Hyperbolinen geometria

Pekka Lindgren

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2011

Sisältö

Johdanto ii

Luku 1. Bilineaarimuodot ja neliömuodot 3
1.1. Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmä 5

Luku 2. Sisätuloavaruuden ortogonaalikuvaukset 11

Luku 3. Hyperbolinen geometria 13
3.1. Minkowskin kolmiulotteinen avaruus 13
3.2. Hyperbolinen malli 13
3.3. Geodeettinen etäisyys 13
3.4. Hyperboliset kolmiot 17
3.5. Suorien yhdensuuntaisuus 19
3.6. Epäeuklidisen geometrian malli 19

Luku 4. Kleinin malli 20
4.1. Jananpituus kaksoissuhteen avulla 20
4.2. Positiivisen hyperboloidin projisointi yksikkökiekkoon 21

Liite A. Hyperboliset funktiot 23

Liite B. Kaksoissuhde 24
2.1. Suoran pisteiden kaksoissuhde 24
2.2. Suorakimpun kaksoissuhde 25

Kirjallisuutta 27

Johdanto

Tämän työn tavoitteena on esitellä malli hyperboliselle geometrialle, joka on eräs epäeuklidisen geometrian malleista. Tarkoituksena ei ole todistaa kaikkien aksioomien voimassaoloa, vaan nimenomaan tarkastella miten suorat, pisteet ja kulmat määritellään. Malli tulee olemaan kolmiulotteinen, mutta myös korkeampiulotteinen malli olisi mahdollinen. Nimensä mukaisesti sen pohjana on hyperboloidi, joka määritellään reaalisessa vektoriavaruudessa, ns. Minkowskin avaruudessa. Malli määritellään käyttämällä degeneroitumatonta symmetristä bilineaarimuotoa, joka on lisäksi indefiniitti. Bilineaarimuotoja käsitellään ensimmäisessä ja toisessa luvussa.

Kolmas luku käsittelee ns. hyperbolista geometriaa. Kuten euklidisessa geometriassa, myös hyperbolisessa geometriassa kaksi pistettä määrää aina suoran. Välissäolo toimii samoin kuin euklidisessa geometriassa: jos suoralta valitaan kolme eri pistettä, sijaitsee jokin pisteistä kahden muun välissä. Kahden pisteen välinen etäisyys voidaan myös määritellä ja tästä saadaan metriikka hyperboliseen geometriaan. Ero euklidisen ja hyperbolisen geometrian välillä on, että hyperbolisessa geometriassa pa-ralleeliaksiooma ei ole voimassa, eli suoran ulkopuolisen pisteen kautta voidaan piirtää ainakin kaksi yhdensuuntaista suoraa.

Neljäs ja viimeinen luku on omistettu yhdelle ensimmäisistä hyperbolisen geometrian malleista, jota kutsutaan nimellä *Kleinin malli* tai *Beltrami-Kleinin malli.* Tässä mallissa hyperbolinen avaruus projisoidaan yksikkökiekolle. Tämä malli on havainnollisempi kuin hyperbelimalli, koska hyperboliset suorat ovat yksikkökiekon jänteitä eivätkä hyperbelejä.

LUKU 1

Bilineaarimuodot ja neliömuodot

Tässä luvussa esiteltävät bilineaarimuodot ovat bilineaarikuvausten erikoistapauksia. Tarkastellaan n-ulotteista vektoriavaruutta E ja reaaliarvoista bilineaarikuvausta $B : E \times E \to \mathbb{R}$.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoot $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^p$ lineaarisia vektoriavaruuksia ja B kuvaus, joka kuvaa pisteparin (x, y) pisteeksi z, eli

$$B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p.$$

Kuvausta B kutsutaan *bilineaariseksi*, mikäli se on lineaarinen molempien argumenttien x, y suhteen. Merkitään

$$z = Bxy.$$

Bilineaarikuvaus $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on *symmetrinen*, jos

$$Bxy = Byx \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R}^n$$

ja *alternoiva*, jos

$$Bxx = 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Alternoivalle bilineaarikuvaukselle pätee siis kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$B(x + y)(x + y) = Bxx + Bxy + Byx + Byy = 0, \tag{1.1}$$

joten yhtälön (1.1) nojalla

$$Byx = -Bxy.$$

Jatkossa poikkeuksetta $p = 1$ ja $n = m$. Tällöin reaaliarvoista bilineaarikuvausta $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kutsutaan *bilineaarimuodoksi.*

MÄÄRITELMÄ 1.2. Olkoot $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bilineaarikuvaus ja $x, y \in \mathbb{R}^n$. Merkitään

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_j a_j,$$

missä $a_1, \ldots, a_n$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta. Tällöin kuvauksen B bilineaarisuudesta seuraa, että

$$Bxy = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j B a_i a_j$$

on pisteiden x_i ja y_j bilineaarimuoto. Kun $p = 1$, niin kertoimet $b_{ij} = B a_i a_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, muodostavat bilineaarimuodon B matriisin kannan $a_1, \ldots, a_n$ suhteen, eli

$$Bxy = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j. \tag{1.2}$$

Bilineaarimuoto B määrää *neliömuodon*

$$Bx := Bxx = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j.$$

Kääntäen, lauseke (1.2) määrää bilineaarimuodon B, kun kertoimet b_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$ on annettu. Neliömuoto liittyy bilineaarikuvauksen määrittämiseen *polarisaatiokaavan* avulla. Sijoitetaan kaavaan (1.2) vektoreiksi summa ja erotus $x+y$ ja $x-y$,

$$B(x+y) = Bx + By + Bxy + Byx = Bx + By + 2Bxy \tag{1.3}$$

ja

$$B(x-y) = Bx + By - Bxy - Byx = Bx + By - 2Bxy. \tag{1.4}$$

Kun B on symmetrinen, saadaan yksinkertainen polarisaatiokaava laskemalla kaavojen (1.3) ja (1.4) erotus

$$Bxy = \frac{1}{4}(B(x+y) - B(x-y)).$$

Määritelmä 1.3. Olkoot E n-ulotteinen vektoriavaruus ja $B : E \times E \to \mathbb{R}$ neliömuoto. Neliömuoto B on *positiividefiniitti*, jos kaikilla $x \in E$

$$Bx \geq 0 \quad \text{ja} \quad Bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

ja *negatiividefiniitti*, jos kaikilla $x \in E$

$$Bx \leq 0 \quad \text{ja} \quad Bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Neliömuoto $B : E \times E \to \mathbb{R}$ on *indefiniitti*, jos se voi saada sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

Huomautus 1.4. Olkoon E n-ulotteinen vektoriavaruus. Symmetriselle bilineaarimuodolle $B : E \times E \to \mathbb{R}$ käytetään usein lyhyyden vuoksi sisätulon merkintää "$\cdot$",

$$x \cdot y := Bxy.$$

Yhdessä symmetrisen bilineaarimuodon B kanssa E muodostaa *sisätuloavaruuden* (E, B).

Määritelmä 1.5. Olkoot E vektoriavaruus ja $B : E \times E \to \mathbb{R}$ symmetrinen bilineaarimuoto. Olkoot $S \subset E$ vektoriavaruus ja $x, y \in E$ vektoreita. Vektorit x ja y ovat *ortogonaalisia*, kun

$$x \cdot y = 0.$$

Vektorin x *ortogonaaliavaruus* bilineaarimuodon B suhteen on

$$N_x = \{u \in E : x \cdot u = 0\}.$$

Joukon $S \subset E$ *ortogonaaliavaruus* bilineaarimuodon B suhteen on

$$N_S = N_S(E) = \{x \in E : x \cdot z = 0, \text{ kaikilla } z \in S\}.$$

Aliavaruutta $N_E \subset E$ sanotaan symmetrisen bilineaarimuodon B *nolla-avaruudeksi.* Nolla-avaruus N_E on siis kaikkien vektorien $x \in E$ ortogonaaliavaruuksien N_x leikkaus. Jos $N_E = 0$, niin sanotaan, että bilineaarimuoto B on *degeneroitumaton.*
Vektorin x *pituus*, eli *normi* on

$$|x| = \sqrt{|Bx|}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.6. Olkoot (E, B) n-ulotteinen sisätuloavaruus ja $(e_1, \dots, e_n)$ sen kanta. Sanotaan, että kanta $(e_1, \dots, e_n)$ on *ortogonaalinen*, jos sen kantavektorit ovat keskenään ortogonaalisia. Kanta $(e_1, \dots, e_n)$ on *ortonormaali*, jos on $p, q, r \geq 0$ siten, että

$$Be_ie_j = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \text{missä } \varepsilon_i = \begin{cases} +1, \text{ kun } i = 1, ..., p \\ -1, \text{ kun } i = p+1, ..., p+q \\ 0, \text{ kun } i = p+q+1, ..., p+q+r = n \end{cases}.$$

Kerroin ε_i on tällöin *kantavektorin e_i merkki.*

1.1. Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmä

Olkoot E n-ulotteinen vektoriavaruus, jossa on annettu definiitti sisätulo ja $a_1, \dots, a_n$ sen mielivaltainen kanta. Muodostetaan tämän kannan avulla uusi kanta, jonka vektorit ovat keskenään ortogonaalisia. Olkoon

$$b_1 = a_1.$$

Pyritään korvaamaan kantavektori a_2 kantavektorilla

$$b_2 = a_2 + \lambda b_1,$$

joka on ortogonaalinen kantavektorin $b_1 = a_1$ kanssa. Vektoreiden b_1 ja b_2 ortogonaalisuuden takia on oltava

$$a_2 \cdot b_1 + \lambda b_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot b_2 = 0.$$

Koska $b_1 = a_1 \neq 0$, niin definiittisyyden nojalla $b_1 \cdot b_1 \neq 0$, joten ratkaisemalla λ voidaan myös b_2 ratkaista. Vektorit a_1 ja a_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, joten $b_2 \neq 0$. Vektoriksi b_3 valitaan vastaavasti muotoa

$$b_3 = a_3 + \mu b_1 + \nu b_2$$

oleva vektori. Määräämällä μ ja ν siten, että

$$b_1 \cdot b_3 = 0 \quad \text{ja} \quad b_2 \cdot b_3 = 0,$$

saadaan yhtälöt

$$a_3 \cdot b_1 + \mu b_1 \cdot b_1 = 0$$

ja

$$a_3 \cdot b_2 + \nu b_2 \cdot b_2 = 0.$$

Myös nyt $b_1 \cdot b_1 \neq 0$ ja $b_2 \cdot b_2 \neq 0$, joten μ ja ν määräytyvät yksikäsitteisesti. Vektoreiden a_1, a_2 ja a_3 lineaarisen riippumattomuuden nojalla $b_3 \cdot b_3 \neq 0$. Vastaavalla tavalla saadaan kantavektorit $b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ siten, että

$$b_i \cdot b_j = 0, \text{ kun } i \neq j.$$

Vektorit $b_i \neq 0$ ovat ortogonaalisia, ja siten lineaarisesti riippumattomia muodostaen näin n-ulotteisen avaruuden E kannan. Ortonormaaleja niistä saadaan jakamalla kukin vektori normillaan:

$$e_i = \frac{b_i}{|b_i|},$$

missä $|b_i| = \sqrt{|Bb_i|}$. Siis vektorit $e_1, \dots, e_n$ muodostavat ortonormaalin kannan vektoriavaruuteen E.

Esimerkki 1.7. Olkoot $a_1 = (1,0,1), a_2 = (2,1,-3)$ ja $a_3 = (-1,1,0)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Konstruoidaan ortonormaali kanta käyttäen Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmää. Valitaan aluksi

$$b_1 = a_1.$$

Seuraavaksi valitaan b_2 siten, että

$$b_2 = a_2 + \lambda b_1, \tag{1.5}$$

josta ratkaistaan λ

$$\begin{aligned} 0 &= b_2 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_1 + \lambda b_1 \cdot b_1 \\ \Rightarrow\ \lambda &= -\frac{a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} = -\frac{(2,1,-3)\cdot(1,0,1)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kun sijoitetaan λ ja a_2 yhtälöön (1.5) saadaan

$$b_2 = (2,1,-3) + \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{5}{2}\right).$$

Samalla tavalla ratkaistaan b_3.

$$b_3 = a_3 + \mu b_1 + \nu b_2,$$

missä siis

$$\begin{aligned} 0 &= a_3 \cdot b_1 + \mu(b_1 \cdot b_1) \\ \Rightarrow\ \mu &= -\frac{a_3 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} = -\frac{(-1,1,0)\cdot(1,0,1)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} 0 &= a_3 \cdot b_2 + \nu(b_2 \cdot b_2) \\ \Rightarrow\ \nu &= -\frac{a_3 \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} = -\frac{(-1,1,0)\cdot\left(\frac{5}{2},1,-\frac{5}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2},1,-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{2},1,-\frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

joten

$$b_3 = (-1,1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{9}\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{10}{9}, \frac{2}{9}\right).$$

Saadut vektorit ovat ortogonaalisia ja muodostavat kannan, sillä $\det(b_1, b_2, b_3) \neq 0$. Normittamalla vektorit tulee kannasta ortonormaali.

$$\begin{aligned} |b_1| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\ |b_2| &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{2}}, \\ |b_3| &= \sqrt{\left(-\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Etsitty ortonormaali kanta on siis (e_1, e_2, e_3), missä

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \\ e_2 &= \frac{b_2}{|b_2|} = \sqrt{\frac{2}{27}}\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{3\sqrt{6}}(5,2,-5), \\ e_3 &= \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{2}{9}, \frac{10}{9}, \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-1,5,1). \end{aligned}$$

Lause 1.8. *(Sylvesterin hitauslause) Olkoot E n-ulotteinen vektoriavaruus, $x, y \in E$ ja $B : E \times E \to \mathbb{R}$ symmetrinen bilineaarimuoto, jolloin*

$$\frac{1}{4}(B(x+y) - B(x-y)) = Bxy.$$

Tällöin on olemassa avaruuden E ortonormaali kanta $e_1, \ldots, e_n$,

$$Be_ie_j = \varepsilon_i\delta_{ij}, \text{ missä } \varepsilon_i = \begin{cases} +1, & \text{kun } i = 1, ..., p \\ -1, & \text{kun } i = p+1, ..., p+q \\ 0, & \text{kun } i = p+q+1, ..., p+q+r = n \end{cases}$$

ja näiden kantavektoreiden virittämät lineaarisesti riippumattomat aliavaruudet U^p, V^q ja W^r, joille

$$E = U^p \oplus V^q \oplus W^r.$$

Tällöin symmetriselle bilineaarimuodolle B aliavaruuksien U^p, V^q ja W^r ulottuvuudet p, q ja r eivät riipu ortonormaalin kannan $e_1, \ldots, e_n$ valinnasta. Kerroin ε_i on tällöin kantavektorin e_i merkki. Positiivisen avaruuden $U = U^p$ dimensiota p kutsutaan symmetrisen bilineaarimuodon B indeksiksi.

Todistus. Käsitellään aluksi tapaus, jossa B on definiitti avaruudessa E. Voidaan olettaa, että se on positiividefiniitti. Määrätään Gram-Schmidtin ortogonalisointiperiaatteen avulla kuvauksen B suhteen ortonormaali kanta lähtien liikkeelle mielivaltaisesta kannasta $a_1, \ldots, a_n$. Koska $a_1 \neq 0$, niin $Ba_1 > 0$. Määritellään $\lambda_{11} \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\lambda_{11}^2 = Ba_1.$$

Tällöin yhtälöstä

$$a_1 = \lambda_{11}e_1$$

saadaan positiivinen yksikkövektori e_1, koska $\lambda_{11} \neq 0$.
Etsitään seuraavaksi λ_{21} siten, että

$$B(a_2 - \lambda_{21}e_1)e_1 = 0.$$

Tämä on totta, kun

$$\lambda_{21} = Ba_2e_1.$$

Koska a_1 ja a_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, niin myös e_1 ja a_2 ovat sitä. Tästä seuraa, että $a_2 - \lambda_{21}e_1 \neq 0$ ja $B(a_2 - \lambda_{21}e_1) > 0$. Nyt yhtälön

$$\lambda_{22}^2 = B(a_2 - \lambda_{21}e_1)$$

juuret ovat nollasta eroavia ja vektoria e_1 vastaan kohtisuorassa oleva yksikkövektori määräytyy yhtälöstä

$$a_2 = \lambda_{21}e_1 + \lambda_{22}e_2.$$

Seuraavaksi määritetään kertoimet λ_{31} ja λ_{32} siten, että

$$B(a_3 - \lambda_{31}e_1 - \lambda_{32}e_2)e_i = 0$$

kun $i = 1, 2$. Kertoimiksi saadaan

$$\lambda_{3i} = Ba_3e_i.$$

Vektorit a_1, a_2 ja a_3 ovat kannan alkioina lineaarisesti riippumattomia, joten myös e_1, e_2 ja a_3 ovat sitä. Vektori

$$a_3 - \lambda_{31}e_1 - \lambda_{32}e_2 \neq 0,$$

on vektoreiden e_1 ja e_2 virittämän aliavaruuden normaali, joten
$B(a_3 - \lambda_{31}e_1 - \lambda_{32}e_2) > 0$. Määrätään $\lambda_{33} \neq 0$ kaavasta

$$\lambda_{33}^2 = B(a_3 - \lambda_{31}e_1 - \lambda_{32}e_2).$$

Vektoreita e_1 ja e_2 vastaan kohtisuorassa oleva vektori e_3 määritellään yhtälön

$$a_3 = \lambda_{31}e_1 + \lambda_{32}e_2 + \lambda_{33}e_3$$

avulla.
Jatkamalla saadaan yhtälöryhmä, jonka avulla voidaan määrätä ortonormaali kanta $e_1, \ldots, e_n$

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_{11}e_1, \\ a_2 &= \lambda_{21}e_1 + \lambda_{22}e_2, \\ a_3 &= \lambda_{31}e_1 + \lambda_{32}e_2 + \lambda_{33}e_3, \\ &\vdots \\ a_n &= \lambda_{n1}e_1 + \lambda_{n2}e_2 + \cdots + \lambda_{n3}e_n, \end{aligned} \tag{1.6}$$

missä, kun $j < i \leq n$

$$\lambda_{ij} = Ba_ie_j \tag{1.7}$$

ja $i = 1, \ldots, n$

$$\lambda_{ii}^2 = B(a_i - \lambda_{i1}e_1 - \cdots - \lambda_{i(i-1)}e_{i-1}) \tag{1.8}$$

Yhtälöistä (1.6), (1.7) ja (1.8) saadaan etsitty ortonormaali kanta

$$\begin{aligned} e_1 &= \mu_{11}a_1, \\ e_2 &= \mu_{21}a_1 + \mu_{22}a_2, \\ e_3 &= \mu_{31}a_1 + \mu_{32}a_2 + \mu_{33}a_3, \\ &\vdots \\ e_n &= \mu_{n1}a_1 + \mu_{n2}a_2 + \cdots + \mu_{nn}a_n. \end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että B on mielivaltainen symmetrinen bilineaarimuoto avaruudessa E. Olkoon U maksimaalinen aliavaruus, jossa B on positiividefiniitti,

$$0 \leq \dim U = p \leq n.$$

Avaruudelle U saadaan ortonormaali kanta $e_1, \ldots, e_p$ Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmällä. Projisoidaan jokainen vektori $x \in E$ aliavaruuteen U ja määritellään vektorin x normaali aliavaruuden U suhteen. Tämä tapahtuu jakamalla x kahteen komponenttiin

$$x = u + v,$$

siten, että $v \perp U$. Vektorit

$$u = \sum_{i=1}^{p} (x \cdot e_i) e_i \quad \text{ja} \quad v = x - \sum_{i=1}^{p} (x \cdot e_i) e_i.$$

toteuttavat kohtisuoruusehdon, sillä vektori v on ortogonaalinen kaikkia kannan alkioita $e_j \in U$ vastaan

$$v \cdot e_j = (x - \sum_{i=1}^{p} (x \cdot e_i) e_i) \cdot e_j = (x \cdot e_j) - (x \cdot e_j) = 0,$$

kaikilla $j = 1, \ldots, p$, jolloin myös $v \cdot u = 0$ jokaiselle $u \in U$. Etsitty projektio on siis

$$u = \sum_{i=1}^{p} (x \cdot e_i) e_i$$

ja $v = x - u$. Tämä projektio ja sitä vastaava normaali eivät riipu kannasta $e_i \in U$, vaan ne määräytyvät yksikäsitteisesti vektorista x ja avaruudesta U. Nimittäin, jos

$$x = u' + v'$$

on toinen vektorin x ositus, niin

$$u' - u = v - v'$$

on ortogonaalinen avaruutta U vastaan ja myös itseään vastaan, joten

$$B(u' - u) = 0.$$

Nyt, koska B oli positiividefiniitti avaruudessa U täytyy olla $u' = u$ ja $v' = v$.
Normaalien v joukko muodostaa avaruuden U ortogonaaliavaruuden

$$F =: N_U(E) = N^{m-p} = \{x \in E : x \cdot z = 0 \text{ kaikilla } z \in U\}.$$

Siis F muodostuu kaikista aliavaruutta U vastaan kohtisuorista vektoreista. Koska U oli maksimaalinen aliavaruus, jossa B on positiividefiniitti, niin aliavaruus F ei sisällä positiivisia vektoreita. Jos olisi $y \cdot y > 0$ jollakin $y \in F$, niin kaikilla
$x = u + \lambda y \in U + \mathbb{R}y$,

$$x \cdot x = u \cdot u + \lambda^2 y \cdot y \geq 0 \ \text{ ja } \ x \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0 \ \text{ ja } \ \lambda = 0,$$

ja vastoin oletusta B olisi positiividefiniitti aidosti suuremmassa aliavaruudessa
$U + \mathbb{R}y$. Siis on oltava $y \cdot y \leq 0$ kaikilla $y \in F$. Olkoon $V = V^q \subset F$ maksimaalinen negatiividefiniitti aliavaruus ja

$$e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}$$

Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmällä saatu kanta, eli $Be_ie_j = 0$, kun $i \neq j$ ja $Be_i = -1$. Olkoon lisäksi $W = W^r = N_V(F) \subset V \subset F$. Nyt, koska $w \in F$, $w \cdot w \leq 0$, mutta myös $w \in W = N_V(F)$, joten $w \cdot w \geq 0$. Siis $w \cdot w = 0$ kaikilla $w \in W$ ja polarisaatiokaavasta saadaan, että

$$w \cdot w_0 = 0 \text{ kaikilla } w, w_0 \in W.$$

Koska $x \in E$ voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla $x = u + v + w$, missä $u \in U$, $v \in V, w \in W$, niin $w_0 \cdot x = 0$ kaikilla $x \in E$, kun $w_0 \in W$. Siis $W = N_E(E) \subset E$, eli jos $w \in E$, niin

$$w \in W \quad \Leftrightarrow \quad w \cdot x = 0 \text{ kaikilla } x \in E.$$

Siis W on sisätuloavaruuden (E, B) nolla-avaruus ja sen ulottuvuus on $r = n - p - q$. Saadaan siis

$$E = U^p \oplus V^q \oplus W^r,$$

ja kun lisätään aliavaruuden W kanta,

$$e_{p+q+1}, \dots, e_{p+q+r} = e_n,$$

aiemmin saatuihin, on saatu haluttu avaruuden E ortonormaali kanta.

Positiivinen avaruus U ja negatiivinen avaruus V eivät yleensä ole invariantteja, mutta niiden ulottuvuudet p ja q ovat. Tarkastellaan toista avaruuden Eositusta,

$$E = U_1^{p_1} + V_1^{q_1} + W_1^{r_1},$$

missä edellä todistetun nojalla $W_1^{r_1} = W$ ja siten $r_1 = r$. Olkoot avaruuksien $U_1^{p_1}$ ja $V_1^{q_1}$ ulottuvuudet p_1 ja q_1. Osoitetaan, että $p_1 = p$ ja $q_1 = q$. Avaruuden E osituksen nojalla $u \in U$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$u = u_1 + v_1 + w_1.$$

Saadaan lineaarikuvaus $A : U^p \to U_1^{p_1}$ asettamalla $Au = u_1$. Näytetään, että lineaarikuvaus A on injektio osoittamalla, että aina $Au = 0 \Rightarrow u = 0$ kaikilla $u \in U$. Koska $u_1 = Au = 0$, niin $u = v_1 + w_1$, jolloin $0 \leq Bu = B(v_1 + w_1) \leq 0$. Mutta B on positiividefiniitti avaruudessa U, joten $u \cdot u = 0$ ja $u = 0$. Täytyy siis olla $p \leq p_1$ ja symmetrisyyden takia myös $p_1 \leq p$, joten $p_1 = p$. Tästä seuraa, että $q_1 = m - p_1 - r_1 = m - p - r = q$. Näin on siis osoitettu ulottuvuuksien p ja q invarianssi. □

LUKU 2

Sisätuloavaruuden ortogonaalikuvaukset

Tässä luvussa käsitellään lineaarikuvausten ortogonaalisuutta. Tarkastellaan degeneroitumatonta sisätuloavaruutta (E, B), jonka sisätuloa merkitään $x \cdot y := Bxy$ kaikilla $x, y \in E$. Degeneroitumattomuudesta seuraa, että $x \cdot y = 0$ kaikilla $y \in E$ jos ja vain jos $x = 0$.

Määritelmä 2.1. Lineaarikuvaus $A : E \to E$ on *ortogonaalinen*, jos se säilyttää sisätulon, eli jos kaikilla $x, y \in E$

$$Ax \cdot Ay = x \cdot y.$$

Lause 2.2. *Ortogonaalikuvaus $A : E \to E$ on aina sisätuloavaruuden säännöllinen lineaarikuvaus. Sillä on siis käänteiskuvaus $A^{-1} : E \to E$, joka on myös ortogonaalinen.*

Todistus. Kun $Ax = 0$, pätee kaikilla $y \in E$

$$0 = 0 \cdot Ay = Ax \cdot Ay = x \cdot y,$$

joten $x = 0$, koska sisätulo oli degeneroitumaton. Siis A on injektio ja siten myös lineaarinen bijektio, koska $\dim E = n < \infty$. On siis olemassa käänteiskuvaus
$A^{-1} : E \to E$. □

Lause 2.3. *Lineaarikuvaus $A : E \to E$ on ortogonaalinen jos ja vain jos lineaarikuvaus A säilyttää sisätuloa vastaavan neliömuodon,*

$$B(Ax) = Bx, \ \textit{kaikilla } x \in E.$$

Todistus. Väitteen välttämättömyys seuraa ortogonaalisuuden määritelmästä. Väitteen riittävyys saadaan polarisaatiokaavan avulla:

$$\begin{aligned} Ax \cdot Ay &= \frac{1}{4}[B(Ax + Ay) - B(Ax - Ay)] \\ &= \frac{1}{4}[B(A(x + y)) - B(A(x - y))] \\ &= \frac{1}{4}[B(x + y) - B(x - y)] \\ &= Bxy = x \cdot y. \end{aligned}$$

□

Lause 2.4. *Lineaarikuvaus $A : E \to E$ on ortogonaalinen, jos se kuvaa avaruuden E jonkin ortonormaalikannan jälleen ortonormaalikannaksi niin, että kantavektorien merkit säilyvät.*

Todistus. Olkoon $E = U^p + V^q + W^r$ avaruuden E ositus. Koska bilineaarimuoto B on degeneroitumaton, $r = 0$ ja $p + q = n$. Siis $E = U^p + V^q$. Olkoot $e_1, \ldots, e_p$ positiiviset kantavektorit ja $e_{p+1}, \ldots, e_n$ negatiiviset kantavektorit siten, että
$e_i \cdot e_j = \varepsilon_i \delta_{ij}$. Nyt kaikilla $x, y \in E$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Siis myös $f_1 = Ae_1, \ldots, f_n = Ae_n$ on ortonormaalikanta ja $f_i \cdot f_j = \varepsilon_i \delta_{ij}$, joten kaikilla $x, y \in E$

$$\begin{aligned} Ax \cdot Ay &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j Ae_i \cdot Ae_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f_i \cdot f_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i y_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j e_i \cdot e_j \\ &= x \cdot y. \end{aligned}$$

□

LUKU 3

Hyperbolinen geometria

Tässä kappaleessa esitellään eräs epäeuklidisen geometrian malli. Se eroaa euklidisesta geometriasta siinä, että paralleeliaksiooma ei ole voimassa. Sen sijaan on siis voimassa niin sanottu hyperbolinen aksiooma, jonka mukaan suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee aina ainakin kaksi yhdensuuntaista suoraa.

3.1. Minkowskin kolmiulotteinen avaruus

Minkowskin kolmiulotteisella avaruudella M tarkoitetaan reaalista vektoriavaruutta, jossa on määritelty degeneroitumaton symmetrinen bilineaarimuoto
$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$x \cdot y = Bxy = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

3.2. Hyperbolinen malli

Hyperbolinen avaruus muodostuu Minkowskin avaruuden positiivisen hyperboloidin

$$H = \{x \cdot x = -1, x_3 \geqslant 0\}$$

pisteistä. Tässä yhtälö $x \cdot x = -1$ määrittelee kaksivaippaisen hyperboloidin josta ehto $x_3 > 0$ valitsee ylemmän puoliskon. Tarkastellaan epäeuklidisen geometrian mallia, joka koostuu hyperbolisen avaruuden H kaikista pisteistä. Määritellään seuraavassa myös hyperbolisen avaruuden H *suorat* ja nähdään, että kuten euklidisessa geometriassa, myös hyperbolisessa geometriassa kaksi pistettä määrittelee aina yksikäsitteisen suoran. Myös pisteiden *välissäolo* suoralla ja kahden toisiaan leikkaavan suoran välinen *kulma* määritellään.

3.3. Geodeettinen etäisyys

Etsitään kahden pisteen välistä lyhintä matkaa positiivisen hyperboloidin H pinnalla. Tätä varten tarvitaan keino määrittää pituus. Kuten tunnettua (ks. esim. Purmonen [8]) positiivisen hyperboloidin $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : Bx = -1,\ x_3 > 0\}$ tangenttiavaruus T_x pisteessä $x \in H$ koostuu neliömuodon

$$Bx = x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

gradientin

$$\nabla Bx = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$$

nollavektoreista $u \in \mathbb{R}^3$, eli vektoreista, joilla

$$\nabla Bx \cdot u = 2(x_1u_1 + x_2u_2 - x_3u_3) = 0.$$

Tangenttiavaruus on siis

$$T_x = \{u \in \mathbb{R}^3 : x \cdot u = 0\}.$$

Koska bilineaarimuodon B indeksi on $+2$, $x \cdot x = -1$ ja $\mathbb{R}^3 = T_x + \mathbb{R}x$ on suora summa, niin Sylvesterin lauseen nojalla B on positiividefiniitti jokaisen pisteen $x \in H$ tangenttiavaruudessa T_x. Kun $x, y \in H$ ja $x \neq y$, niin x ja y ovat lineaarisesti riippumattomia ja niiden virittämässä 2-ulotteisessa tasossa $\langle x, y \rangle \subset \mathbb{R}^3$ on Gram-Schmidtin ortogonalisointiperiaatteen nojalla siis kantavektori $f \perp x$ siten, että $f \cdot f = +1$ ja vektori y voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$y = \lambda x + \mu f, \tag{3.1}$$

missä $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ovat molemmat positiivisia. Nyt

$$-1 = y \cdot y = \lambda^2 x \cdot x + \mu^2 f \cdot f = \mu^2 - \lambda^2,$$

joten jos valitaan $\lambda > \mu > 0$, niin $\lambda > 1$. Tällöin hyperbolisten funktioiden avulla voidaan kirjoittaa

$$\lambda = \cosh(\Gamma),\ \mu = \sinh(\Gamma)$$

ja yhtälö (3.1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$y = \cosh(\Gamma)x + \sinh(\Gamma)f,$$

jollakin $0 < \Gamma \in \mathbb{R}$, missä $f \cdot f = +1$ ja $f \cdot x = 0$. Kun $\gamma : [a, b] \to H$ on paloittain jatkuvasti differentioituva käyrä, missä

$$\gamma(a) = x \quad \text{ja} \quad \gamma(b) = y = \cosh(\Gamma)x + \sinh(\Gamma)f,$$

niin kaikilla $a \leq t \leq b$ vastaavasti

$$\gamma(t) = \cosh(\eta(t))x + \sinh(\eta(t))f(t), \tag{3.2}$$

missä

$$\Gamma = \eta(b), \quad 0 = \eta(a),$$

$$f(t) \cdot f(t) = +1 \quad \text{ja} \quad x \cdot f(t) = 0 \text{ kaikilla } t.$$

Koska käyrä γ on paloittain jatkuvasti differentioituva, niin myös $\eta : [0, \Gamma] \to \mathbb{R}$ ja $f : [0, \Gamma] \to \mathbb{R}^3$ ovat paloittain jatkuvasti differentioituvia. Edelleen

$$\gamma'(t) = [\sinh(\eta(t))x + \cosh(\eta(t))f(t)]\eta'(t) + \sinh(\eta(t))f'(t).$$

Koska $\gamma(t) \in H$, on $\gamma(t) \cdot \gamma(t) \equiv -1$. Derivoimalla tästä seuraa

$$D(\gamma(t) \cdot \gamma(t)) = 2\gamma(t) \cdot \gamma'(t) \equiv 0,$$

eli

$$\gamma'(t) \in \gamma(t)^{\perp} \text{ kaikilla } t$$

ja siis $\gamma'(t)$ kuuluu kaikilla $t \in [a, b]$ pisteen $\gamma(t) \in H$ tangenttiavaruuteen $T_{\gamma(t)} = \gamma(t)^{\perp}$. Bilineaarimuoto B on positiividefiniitti tangenttiavaruudessa $\gamma(t)^{\perp}$ ja siten

$$\gamma'(t) \cdot \gamma'(t) \geqslant 0$$

kaikilla $a \leq t \leq b$, ja voidaan määritellä käyrän γ *pituus* $l(\gamma)$ asettamalla

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}\, dt \geqslant 0.$$

Vastaavasti määritellään etäisyys $d(x, y) = d_H(x, y)$ asettamalla

$$d_H(x, y) = \inf\{l(\gamma) : \text{hyperboloidin H käyrä } \gamma \text{ yhdistää pisteet } x \text{ ja } y\},$$

jolloin selvästikin aina

$$d_H(y,x) = d_H(x,y).$$

Nyt $f(t)$ oli valittu siten, että $f(t)\cdot f(t) \equiv +1$ ja $x \perp f(t)$ kaikilla t, joten myös $x \perp f'(t)$ kaikilla t. Koska $f(t)\cdot f(t) \equiv 1$, niin derivoimalla saadaan
$D(f(t)\cdot f(t)) = 2f(t)\cdot f'(t) \equiv 0$. Koska $x \cdot x = -1$ ja $x \perp f'(t)$ täytyy siis Sylvesterin hitauslauseen nojalla olla myös

$$f'(t)\cdot f'(t) \geqslant 0$$

ja koska sekä $x \perp f'(t)$, että $f(t) \perp f'(t)$, niin

$$\begin{aligned}
(\sqrt{\gamma'(t)\cdot\gamma'(t)})^2 &= \eta'(t)^2(-\sinh^2(\eta(t)) + \cosh^2(\eta(t))) \\
&\quad + \sinh^2(\eta(t))(f'(t)\cdot f'(t)) \\
&\geqslant \eta'(t)^2 \\
&= |\eta'(t)|^2 \text{ kaikilla } t.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Lausekkeen (3.3) yhtäsuuruus on voimassa vain, kun

$$\eta(t) = 0 \quad \text{tai} \quad f'(t) = 0.$$

Mielivaltaisen pisteet x ja y yhdistävän käyrän γ pituudelle saadaan siten alaraja

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{\gamma'(t)\cdot\gamma'(t)}\,dt \\
&\geqslant \int_a^b \sqrt{\eta'(t)\cdot\eta'(t)}\,dt \\
&= \int_a^b |\eta'(t)|\,dt \\
&\geqslant \int_a^b \eta'(t)\,dt \\
&= \eta(t)\Big|_{t=a}^{b} \\
&= \Gamma \\
&= \cosh^{-1}(\cosh(\Gamma)).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Mutta nyt

$$x\cdot y = -\cosh(\Gamma),$$

joten on

$$l(\gamma) \geq \cosh^{-1}(-x\cdot y) > 0.$$

Toisaalta, kun

$$\Gamma = \cosh^{-1}(\lambda) = \cosh^{-1}(-x\cdot y) > 0$$

saadaan pisteiden x ja y differentioituva yhdistyskaari $\gamma_0 : [0,\Gamma] \to H$ asettamalla

$$\gamma_0(t) = \cosh(t)x + \sinh(t)f, \tag{3.5}$$

jolloin

$$\gamma_0(0) = x, \quad \gamma_0(\Gamma) = y$$

ja edellisen nojalla

$$l(\gamma_0) = \cosh^{-1}(-x\cdot y),$$

joten pisteiden x ja y yhdistyskäyrän γ_0 pituuden alaraja $\cosh^{-1}(-x \cdot y)$ todella saavutetaan. Siten

$$d_H(x,y) = l(\gamma_0) = \cosh^{-1}(-x \cdot y) \geq 0 \text{ kaikilla } x, y \in H,$$

jolloin edellisen nojalla myöskin

$$d_H(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Jos nyt myös $z \in H$ ja γ_1 on pisteiden $y, z \in H$ yhdistyskaari siten, että

$$l(\gamma_1) = d_H(y,z) = \cosh^{-1}(-y \cdot z),$$

niin yhdistämällä kaaret γ_0 ja γ_1, saadaan pisteet x ja z yhdistävä paloittain jatkuvasti differentioituva käyrä γ, jolle pätee kolmioepäyhtälö

$$d_H(x,y) + d_H(y,z) = l(\gamma_0) + l(\gamma_1) = l(\gamma) \geq d_H(x,z) = \cosh^{-1}(-x \cdot z).$$

Siten kaikilla $x, y \in H$ määritelty

$$d_H(x,y) = \cosh^{-1}(-x \cdot y)$$

on metriikka, positiivisen hyperboloidin H *hyperbolinen metriikka.*

Huomautus 3.1. Lausekkeen (3.5) käyrä γ_0 laajenee kaikille $t \in \mathbb{R}$, jolloin selvästi

$$\overline{xy} := \gamma(\mathbb{R}) = H \cap \langle x, f \rangle = H \cap \langle x, y \rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

Joukko $\overline{xy} = \gamma(\mathbb{R})$ on pisteiden $x, y \in H$ määräämä *hyperbolinen suora* ja $f \in T_x$, $f \cdot f = +1$, sen *suuntavektori pisteessä x.* Nyt kaikilla $c, d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\gamma(c) \cdot \gamma(d) &= [\cosh(c)x + \sinh(c)f] \cdot [\cosh(d)x + \sinh(d)f] \\
&= -[\cosh(c)\cosh(d) - \sinh(c)\sinh(d)] \\
&= -\cosh(d-c),
\end{aligned}$$

joten

$$d_H(\gamma(c), \gamma(d)) = |d - c|$$

kaikilla $c, d \in \mathbb{R}$. Käyrä γ on siis lyhin tie kaikkien pisteidensä välillä, eli *hyperbolisen avaruuden H geodeettinen viiva.*

Toisaalta epäyhtälöistä (3.3) ja (3.4) seuraa, että toteuttaakseen yhtälön

$$l(\gamma) = \cosh^{-1}(-x \cdot y) = d_H(x,y),$$

tulee pisteitä x ja y yhdistävän paloittain jatkuvasti differentioituvan käyrän esityksessä (3.2) olla $f' \equiv 0$ kaikilla differentioituvuusväleillä ja jatkuvan funktion $f : [0, \Gamma] \to \mathbb{R}^3$ täytyy siis olla vakio koko välillä $[0, \Gamma]$, eli $f(t) \equiv f$ kaikilla $0 \leq t \leq \Gamma$. Jos siis kolme pistettä $x, y, z \in H$ toteuttavat yhtälön

$$d_H(x,y) = d_H(x,z) + d_H(z,y),$$

myös pisteen z täytyy sijaita tasossa $\langle x, f \rangle = \langle x, y \rangle$, eli hyperbolisella suoralla $\overline{xy} = H \cap \langle x, y \rangle$. Sanotaan, että piste z on tällöin *pisteiden x ja y välissä.* Kuvaus $\gamma : \mathbb{R} \to H$ määrää siten järjestyksen ja etäisyyden säilyttävän isomorfismin lukusuoran $\mathbb{R}$ ja hyperbolisen suoran $\overline{xy} = \gamma(\mathbb{R})$ välillä.

Merkitään positiivisen hyperboloidin H pisteitä tästä eteenpäin isoilla kirjaimilla, siis olkoot $A, B, C \in H$ pisteitä ja $A \cdot A = B \cdot B = C \cdot C = -1$. Pisteiden A ja B etäisyyttä merkitään

$$|AB| = d_H(A, B) = \cosh^{-1}(-A \cdot B) \geq 0.$$

Aiemmin osoitettiin, että d on metriikka, joten sille pätee kolmioepäyhtälö

$$\big||AB| - |BC|\big| \leq |AC| \leq |AB| + |BC|.$$

Lause 3.2. *Olkoot $A, B, C \in H$ pisteitä siten, että $A \neq B \neq C$.*

(i) *Piste B sijaitsee pisteiden A ja C välissä niiden määräämällä suoralla $\overline{AC}$, joka siis on hyperboloidin H geodeettinen viiva, jos ja vain jos*
$$|AC| = |AB| + |BC|.$$
(ii) *Piste A sijaitsee pisteiden B ja C välissä suoralla $\overline{BC}$ jos ja vain jos*
$$|AC| = |BC| - |AB|$$
ja piste C sijaitsee pisteiden A ja B välissä suoralla $\overline{AB}$ jos ja vain jos
$$|AC| = |AB| - |BC|.$$

Molemmissa tapauksissa siis pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla, jos ja vain jos

$$|AC| = \big||AB| \pm |BC|\big|.$$

Sovitaan lisäksi, että myös suoran $\overline{AC}$ pisteet A ja C sijaitsevat pisteiden A ja C välissä.

Kahden pisteen A ja C väliin jäävät suoran $\overline{AC}$ pisteet B muodostavat *janan* $AC \subset \overline{AC}$. Sen päätepisteiden A ja C etäisyys $|AC|$ on samalla myös *janan AC pituus*. Edellisessä lauseessa nähtiin, että suora $\overline{AC}$ koostuu kaikista pisteistä $B \in H$, joilla

(i) Piste B sijaitsee pisteiden A ja C välissä.
(ii) Piste A sijaitsee pisteiden B ja C välissä tai piste C sijaitsee pisteiden A ja B välissä.

Kaksi pistettä $A, C \in H$ määrää siten aina yksikäsitteisen hyperbolisen suoran $\overline{AC} \subset H$.

3.4. Hyperboliset kolmiot

Määritelmä 3.3. Olkoot $A, B, C \in H$ pisteitä siten, että $B, C \neq A$, sekä $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ pisteen A kautta kulkevia suoria. Olkoot $f \in \langle A, B\rangle$ suoran $\overline{AB}$ ja $g \in \langle A, C\rangle$ suoran $\overline{AC}$ *suuntavektoreita pisteessä* A, jolloin $f, g \in T_A \subset \mathbb{R}^3$. Tällöin Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|f \cdot g| \leq \sqrt{f \cdot f}\,\sqrt{g \cdot g} = 1$$

ja suunnattujen suorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ välinen kulma voidaan määritellä

$$0 \leq \angle BAC = \angle CAB := \arccos(f \cdot g) \leq \pi.$$

Lisäksi

$$0 < \angle BAC < \pi,$$

aina kun pisteet A, B ja C eivät ole samalla suoralla.

MÄÄRITELMÄ 3.4. Olkoot $A, B, C \in H$ pisteitä, jotka eivät sijaitse samalla suoralla. Tällöin ne muodostavat *kolmion* ABC, jonka *sivuja* ovat janat BC, CA ja AB. Merkitään *kärjen* A vastaisen sivun BC pituutta kirjaimella a, *kärjen* B vastaisen sivun CA pituutta kirjaimella b ja *kärjen* C vastaisen sivun AB pituutta kirjaimella c. Nyt siis

$$\begin{aligned}\cosh(a) &= \cosh(\cosh^{-1}(-B \cdot C)) = -B \cdot C > 1\\ \cosh(b) &= -C \cdot A > 1\\ \cosh(c) &= -A \cdot B > 1.\end{aligned}$$

Kärkikulmia merkitään vastaavasti

$$\alpha = \angle CAB\,, \quad \beta = \angle ABC \quad \text{ja} \quad \gamma = \angle BCA.$$

LAUSE 3.5. *(Hyperbolisen geometrian kosinilause) Olkoot $A, B, C \in H$ pisteitä ja f suoran $\overline{AB}$ ja g suoran $\overline{AC}$ suuntavektoreita. Tällöin*

$$\begin{aligned}B &= \cosh(c)A + \sinh(c)f\\ C &= \cosh(b)A + \sinh(b)g,\end{aligned}$$

ja koska $A \cdot A = -1$, niin siis

$$\begin{aligned}\cosh(a) = -B \cdot C &= \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)f \cdot g\\ &= \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cos(\alpha).\end{aligned}$$

MÄÄRITELMÄ 3.6. Kuvaus $T : H \to H$ on hyperbolisen avaruuden H *isometria*, jos

$$d_H(T(P), T(Q)) = d_H(P, Q), \text{ kaikilla } P, Q \in H.$$

MÄÄRITELMÄ 3.7. Olkoot $A, A', B, B', C, C' \in H$ pisteitä. Kolmiot $\triangle = ABC$ ja $\triangle' = A'B'C'$ ovat *yhtenevät*, jos on hyperbolisen avaruuden H isometria, joka kuvaa kolmion $\triangle$ kärjet kolmion $\triangle'$ vastinkärjiksi, eli $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ ja $T(C) = C'$.

LAUSE 3.8. *Jos kolmioiden vastinsivut ovat yhtä pitkiä, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

TODISTUS. Sekä kärjet $A, B, C \in H$, että niiden vastinkärjet $A', B', C' \in H$ ovat lineaarisesti riippumattomia muodostaen Minkowskin avaruuden M kannan. On siis yksikäsitteisesti määritelty lineaarikuvaus $T : M \to M$ siten, että $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ ja $T(C) = C'$. Mutta $A \cdot A = A' \cdot A' = -1$, $B \cdot B = B' \cdot B' = -1$ ja $C \cdot C = C' \cdot C' = -1$, ja koska oletuksen mukaan $a = a'$, $b = b'$ ja $c = c'$, niin kosinilauseen nojalla $B \cdot C = B' \cdot C'$, $C \cdot A = C' \cdot A'$ ja $A \cdot B = A' \cdot B'$, joten vaikka kannat A, B, C ja A', B', C' eivät olekaan ortonormaaleja, näemme, kuten Lauseen 2.4 todistuksessa, että

$$Tx \cdot Ty = x \cdot y \text{ kaikilla } x, y \in M.$$

Siten lineaarikuvaus T määrää avaruuden M ortogonaalikuvauksena myös avaruuden H isometrian itselleen. □

LAUSE 3.9. *Jos kolmioiden vastinsivuparit ovat yhtä pitkät ja niiden väliset kulmat yhtä suuret, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

TODISTUS. Olkoot ABC ja $A'B'C'$ kolmioita ja $b = b'$, $c = c'$. Jos nyt myös $\alpha = \alpha'$, niin $A \cdot C = A' \cdot C'$ ja $A \cdot B = A' \cdot B'$. Kosinilauseen nojalla

$$-B \cdot C = \cosh(a) = \cosh(a') = -B' \cdot C'$$

ja siten myös $a = a'$. □

3.5. Suorien yhdensuuntaisuus

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin hyperbolisten suorien yhdensuuntaisuutta ja osoitetaan, että suoran ulkopuolisen pisteen kautta voidaan piirtää ainakin kaksi yhdensuuntaista suoraa. Tämä seikka erottaa euklidisen ja hyperbolisen geometrian toisistaan.

Olkoon $l \subset H$ hyperbolinen suora ja

$$K = \{x \in M : x \cdot x = 0\}$$

kartio. Sanotaan, että suorat l ja m ovat *yhdensuuntaisia*, merkitään $l \parallel m$, kun $l \cap m = \emptyset$. Suoraa l vastaa kaksiulotteinen aliavaruus $L \subset M$ siten, että $l = L \cap H$. Jos $A \in l$ on piste, niin siis

$$L = \langle A, z \rangle, \text{ kaikilla } z \in L \backslash \mathbb{R}A.$$

Jos piste $C \in H$ ei ole suoralla $l = \overline{AB}$, niin kaikilla $P \in l$ suorat l ja $m = \overline{CP}$ leikkaavat täsmälleen pisteessä P. Aliavaruus L leikkaa kartion K pitkin kahta euklidista suoraa. On siis olemassa lineaarisesti riippumattomat vektorit $x, x' \in L \cap K$, jolloin siis $x \cdot x = x' \cdot x' = 0$. Kun $M = \langle C, x \rangle$, niin siis $L \cap M = \mathbb{R}x \subset K$ ja siten pisteen C kautta kulkeva hyperbolinen suora $m = M \cap H$ ei leikkaa suoraa l, eli $l \cap m = \emptyset$. Mutta vastaavasti myöskään aliavaruuden $M' = \langle C, x' \rangle$ määräämä suora $m' = M' \cap H$ ei leikkaa suoraa l ja $l \cap m' = \emptyset$. Jokaisen suoran $l \subset M$ ulkopuolella sijaitsevan pisteen $C \in M$ kautta kulkee siten *ainakin kaksi suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa m ja m'*. Kun suoraa $\tilde{m}$ määrättäessä piste $\tilde{x} \in L$ on valittu kartion K *ulkopuolelta*, eli kun $\tilde{x} \cdot \tilde{x} > 0$, niin luonnollisesti edelleenkin pätee $l \cap \tilde{m} = \emptyset$, eli $\tilde{m} \parallel l$. Sanotaan, että suora $\tilde{m}$ on tällöin *ultrayhdensuuntainen* suoran l kanssa.

3.6. Epäeuklidisen geometrian malli

Nyt on saatu eräs malli epäeuklidiselle geometrialle. Voidaan osoittaa, että se toteuttaa euklidisen geometrian aksioomat lukuunottamatta paralleeliaksioomaa (ks. Hilbert [4]). Sen sijaan, kuten edellä nähtiin, on voimassa hyperbolinen aksiooma, jonka mukaan suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee ainakin kaksi yhdensuuntaista suoraa. Määriteltiin myös metriikka positiiviseen hyperboloidiin H, missä kahden mielivaltaisen pisteen $x, y \in H$ etäisyys asetettiin $d_H(x, y) = \cosh^{-1}(-x \cdot y)$.

LUKU 4

Kleinin malli

Hyperboloidimallissa suorat olivat hyperbelejä, mikä on kuitenkin melko epähavainnollista. Tässä luvussa esitellään hyperbolisen geometrian malli, jossa positiivinen hyperboloidi H projisoidaan tason $\mathbb{R}^2$ yksikkökiekoksi. Suorat ovat tämän kiekon jänteitä ja niiden pituus määritellään kaksoissuhteen avulla. Mallin kehitti Felix Klein 1800-luvun lopulla.

4.1. Jananpituus kaksoissuhteen avulla

Olkoon l pisteen $X \in H$ ja suuntavektorin $f \in T_X$ määräämä hyperbolinen suora $l = \gamma(\mathbb{R})$, kun

$$\gamma(s) = \cosh(s)X + \sinh(s)f$$

kaikilla $s \in \mathbb{R}$. Koska $f \in T_X$, niin $X \perp f$. Vektoripari $f_1 = f$ ja $f_3 = X$ voidaan täydentää Minkowskin avaruuden M kannaksi $\boldsymbol{f} = \{f_1, f_2, f_3\}$ valitsemalla $f_2 \perp f, X$ siten, että $f_2 \cdot f_2 = +1$ (vrt. Sylvesterin hitauslause). Minkowskin avaruuden M pisteellä $u \in M$ on koordinaatit $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ kannan $\boldsymbol{f}$ suhteen, $u = (u_1, u_2, u_3)$, kun

$$u = \sum_{i=1}^{3} u_i f_i.$$

Tällöin

$$U = \{u \in M : u \cdot X = -1\} \subset M$$

on siis tangenttiavaruuden T_X kanssa yhdensuuntainen pisteen X kautta kulkeva Minkowskin avaruuden taso, joka koostuu kaikista vektoreista $u \in M$, joilla $u_3 = 1$. Tällöin hyperbolisen suoran l piste

$$A = \gamma(s) = \cosh(s)X + \sinh(s)f = \sinh(s)f_1 + \cosh(s)f_3$$

kuvautuu *origokeskisessä keskusprojektiossa* tason U pisteeksi

$$A' = (a'_1, a'_2, a'_3) = \frac{\sinh(s)}{\cosh(s)}f_1 + \frac{\cosh(s)}{\cosh(s)}f_3 = \tanh(s)f_1 + f_3 = (\tanh(s), 0, 1),$$

missä siis $a'_1 = \tanh(s)$, $a'_2 = 0$ ja $a'_3 = 1$. Vastaavasti koko suora l kuvautuu tällöin tason U suoran $l' = \{u \in U : u_2 = 0, u_3 = 1\}$ avoimeksi janaksi

$$j' = \{u \in U : |u_1| < 1, u_2 = 0, u_3 = 1\} \subset l'$$

koko hyperbolisen avaruuden H kuvautuessa tason U avoimeksi kiekoksi

$$D' = \{u \in U : u_1^2 + u_2^2 < 1, u_3 = 1\} \subset U.$$

Projektion A' ensimmäisestä koordinaatista

$$a'_1 = \tanh(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1}$$

voidaan ratkaista e^{2s},

$$e^{2s} = \frac{1+a'_1}{1-a'_1}$$

ja siten

$$s = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+a'_1}{1-a'_1}\right).$$

Kun avoimen janan j' päätepisteitä merkitään $P' = (1,0,1)$ ja $Q' = (-1,0,1)$, niin huomataan (vrt. Liite B), että osamäärä $(1+a'_1)/(1-a'_1)$ on *suunnattujen janojen* $\overrightarrow{Q'A'}$ *ja* $\overrightarrow{A'P'}$ *pituuksien suhde*

$$\frac{1+a'_1}{1-a'_1} = \frac{\overrightarrow{Q'A'}}{\overrightarrow{A'P'}}$$

ja siten

$$s = \frac{1}{2}\log\frac{\overrightarrow{Q'A'}}{\overrightarrow{A'P'}}.$$

Jos vastaavasti

$$B = \gamma(t) = \cosh(t)X + \sinh(t)f \in l$$

on toinen saman hyperbolisen suoran l piste, saamme pisteiden A ja B hyperboliseksi etäisyydeksi

$$d_H(A,B) = |t-s| = \frac{1}{2}\big|\log[A', B', P', Q']\big|,$$

missä

$$[A', B', P', Q'] := \frac{\overrightarrow{B'Q'}}{\overrightarrow{B'P'}} : \frac{\overrightarrow{A'Q'}}{\overrightarrow{A'P'}} = \frac{\overrightarrow{Q'B'}}{\overrightarrow{B'P'}} : \frac{\overrightarrow{Q'A'}}{\overrightarrow{A'P'}}$$

on tason U suoran l' pisteiden A', B', P', Q' *kaksoissuhde* (vrt. Liite B).

4.2. Positiivisen hyperboloidin projisointi yksikkökiekkoon

Origokeskisessä projektiossa hyperbolinen avaruus H kuvautuu tason $U \subset M$ avoimeksi joukoksi $D' \subset U$, joka Minkowskin metriikan suhteen on tason U yksikkökiekko, sen reunan muodostuessa tason U ja kartion K leikkauksesta. Koska taso U on pisteen $X \in H$ tangenttitason suuntaisena "vinossa asennossa" kaikilla $X \neq (0,0,1) = \boldsymbol{e_3}$, niin D' on yleensä euklidisen tason $\mathbb{R}^3$ ellipsi ollen sitä eksentrisempi eli soikeampi, mitä kauempana $X \in H$ sijaitsee pisteestä $\boldsymbol{e_3}$. Oikaistaan tilanne projisoimalla taso U tasolle

$$\widehat{\mathbb{R}}^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\},$$

joka unohtaen kolmannen koordinaatin samaistuu tason $\mathbb{R}^2$ kanssa. Tällöin koko hyperbolinen avaruus H kuvautuu tason $\widehat{\mathbb{R}}^2$ yksikkökiekoksi

$$\widehat{D} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_3 = 1\}.$$

Pisteiden $A, B \in H$ määräämä hyperbolinen suora $l = \overline{AB}$ kuvautuu vektoreiden A ja B virittämän avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuden $\langle A, B\rangle$ ja tason $\widehat{\mathbb{R}}^2$ kiekon $\widehat{D}$ leikkausjanaksi $\widehat{j} = \langle A, B\rangle \cap \widehat{D}$. Sen päätepisteet $\widehat{P}$ ja $\widehat{Q}$ sijaitsevat kiekon $\widehat{D}$ kehällä vastaten kartion K ja tason U suoran l' leikkauspisteitä P' ja Q'. Pisteet $\widehat{P}, \widehat{Q}, P', Q'$ sijaitsevat kaikki kartion K pinnalla.

Koska yksikkökiekon $\widehat{D}$ pisteet $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{P}, \widehat{Q}$ ovat suoran $\hat{l} \subset \widehat{\mathbb{R}}^2$ ja vektorien $A', B', P', Q' \in l' \subset \langle A, B\rangle$ määräämän *tason* $\langle A, B\rangle \subset \mathbb{R}^3$ *suorakimpun* leikkauspisteet suoran $\hat{l} = \langle A, B\rangle \cap \widehat{\mathbb{R}}^2$ kanssa, niin pistenelikkojen kaksoissuhteet yhtyvät,

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \frac{1}{2}\big|\log[A', B', P', Q']\big| \\ &= \frac{1}{2}\big|\log[\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{P}, \widehat{Q}]\big|. \end{aligned}$$

Näin hyperbolinen avaruus H on saatu kuvattua koko kiekoksi $\widehat{D}$, ja siihen saadaan siis metriikka asettamalla

$$d_H(\widehat{A}, \widehat{B}) := d_H(A, B),$$

kun $A, B \in H$ ovat pisteitä $\widehat{A}, \widehat{B} \in \widehat{D}$ keskusprojektiossa vastaavat pisteet hyperboloidilla H. Samaistamalla $\widehat{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{R}^3$ tasoksi $\mathbb{R}^2$ ja asettamalla kiekossa $\widehat{D}$ koordinaatti $u_3 = 0$, saadaan yksikkökiekkoon

$$D = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 < 1, u_3 = 0\}$$

vastaava metriikka, jossa etäisyys määritellään lausekkeella

$$d_H(A, B) = \frac{1}{2}\big|\log[A, B, P, Q]\big|,$$

missä P ja Q ovat pisteiden $A, B \in D$ määräämän suoran $\overline{AB}$ ja yksikkökiekon D kehän leikkauspisteet. Koska kiekossa D määritelty etäisyyden d_H lauseke on saatu bijektion avulla hyperboloidin H metriikasta, niin d_H määrää metriikan myös kiekossa D. Tässä kuvaillussa Kleinin kiekkomallissa *hyperboliset suorat* ovat siis yksikkökiekon D avoimia jänteitä, joiden päätepisteet ovat yksikkökiekon D kehällä. Kaksi yksikkökiekon D suoraa $l, m \subset D$ ovat *yhdensuuntaisia*, jos $l \cap m = \emptyset$. Yhdensuuntaisten suorien sanotaan olevan *ultrayhdensuuntaisia*, jos ne eivät leikkaa toisiaan edes yksikkökiekon D kehällä. Lisäksi on helppo nähdä, että malli toteuttaa hyperbolisen aksiooman: Jos piste $R \in D$ ei sijaitse hyperbolisella suoralla $l \in D$, niin suoran, eli kiekon D jänteen l päätepisteet P ja Q määräävät kaksi pisteen R kautta kulkevaa suoran l kanssa ultrayhdensuuntaista suoraa $m = \overline{RP}$ ja $m' = \overline{RQ}$.

LIITE A

Hyperboliset funktiot

Hyperboliset funktiot $\sinh(t)$ ja $\cosh(t)$ määritellään

$$\sinh(t) := \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \cosh(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

ja hyperbolinen tangentti

$$\tanh(t) := \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}.$$

Hyperboliset funktiot $\sinh(t)$ ja $\tanh(t)$ ovat parittomia ja aidosti kasvavia bijektioita

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$$

ja hyperbolinen kosini on parillinen funktio, joka määrittelee bijektiot

$$\cosh : [0, \infty[\to [1, \infty[\quad \text{(aidosti kasvava)}$$

ja

$$\cosh :]-\infty, 0] \to [1, \infty[\quad \text{(aidosti vähenevä).}$$

Hyperbolisilla funktioilla on myös käänteisfunktiot (hyperbolisella kosinilla kaksi käänteisfunktion haaraa), ns. *area-funktiot.* Merkitään $x = \cosh(t)$ ja $y = \sinh(t)$. Tällöin käänteisfunktiot ovat

$$t = \cosh^{-1}(x), \quad t = \sinh^{-1}(y).$$

Koska $\sinh(t)$ on kasvava kaikilla $t \in \mathbb{R}$ käänteisfunktio on olemassa kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Toisaalta $t = \cosh^{-1}(x)$ ei ole yksikäsitteisesti määrätty, koska arvoa x vastaavat luvut t ja $-t$. Koska $\cosh(t) \geq 1$ kaikilla t, niin $\cosh^{-1}(x)$ on määritelty vain, kun $x \geq 1$. Hyperbolisen tangentin käänteisfunktio on olemassa vain, kun $-1 < t < 1$. Hyperbolisten funktioiden derivointikaavat saadaan helposti edellä olevista lausekkeista:

$$D\cosh(t) = \sinh(t), \quad D\sinh(t) = \cosh(t) \quad \text{ja} \quad D\tanh(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)}.$$

Hyperbolisten funktioiden määritelmistä saadaan myös yhteenlaskukaavat

$$\cosh(t+s) = \cosh(t)\cosh(s) + \sinh(t)\sinh(s)$$
$$\sinh(t+s) = \sinh(t)\cosh(s) + \cosh(t)\sinh(s),$$

kaikilla $s, t \in \mathbb{R}$, ja lisäksi pätee

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1.$$

LIITE B

Kaksoissuhde

2.1. Suoran pisteiden kaksoissuhde

Seuraavassa tarkastellaan euklidisen lineaariavaruuden E tavanomaisia suoria. Suoran $l \in E$ määräämiseksi riittää antaa *suoran* l *piste* $P \in l$ ja *suoran* l *suuntavektori* $0 \neq f \in E$, jolloin suoran l kaikki pisteet $A \in l$ voidaan lausua yksikäsitteisellä tavalla muodossa

$$A = sf + P\,, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Pisteeksi P voidaan valita mikä tahansa suoran l piste, mutta suuntavektori f on reaalikerrointa vaille yksikäsitteisesti määrätty.

Suuntavektorin f valinta määrää suoralle l *pituuden*: Jos

$$B = tf + P\,, \quad t \in \mathbb{R},$$

on suoran l toinen piste, niin

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (tf + P) - (sf + P) = (t - s)f,$$

jolloin reaalilukua $t - s \in \mathbb{R}$ voidaan pitää *suunnatun janan* eli *vektorin* $\overrightarrow{AB}$ *suunnattuna pituutena*. Suuntavektori f on tällöin suoran l *pituusyksikkö*, joten vektorin $\overrightarrow{AB}$ suunnattu pituus siis riippuu vektorin f valinnasta. Sen sijaan suoran l *kahden suunnatun janan* $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4} \neq 0$,

$$A_k = s_k f + P\,, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

pituuksien suhde

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_3A_4}} := \frac{s_2 - s_1}{s_4 - s_3} \in \mathbb{R}$$

on yksikäsitteisesti määrätty, sillä jos $P' \in l$ ja f' on toinen suoran l suuntavektori siten, että $f' = \lambda f$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, ja

$$A_k = s'_k f' + P'\,, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

niin

$$s_i - s_j = \lambda(s'_i - s'_j)$$

kaikilla $1 \leq i, j \leq 4$ ja siten

$$\frac{s'_2 - s'_1}{s'_4 - s'_3} = \frac{s_2 - s_1}{s_4 - s_3}.$$

Kun A_1, A_2, A_3 ja A_4 ovat suoran l pisteitä siten, että $A_3 \neq A_4$ ja $A_i \neq A_3, A_4$, kun $i = 1, 2$, niin *suoran* l *pisteiden* $A_1, A_2, A_3, A_4 \in l$ *kaksoissuhde* $[A_1, A_2, A_3, A_4] \in \mathbb{R}$ voidaan siis määritellä yksikäsitteisesti asettamalla

$$\frac{\overrightarrow{A_2A_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}} : \frac{\overrightarrow{A_1A_4}}{\overrightarrow{A_1A_3}} = \frac{\overrightarrow{A_2A_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_4}} = \frac{(s_4 - s_2)(s_3 - s_1)}{(s_3 - s_2)(s_4 - s_1)} \in \mathbb{R}$$

2.2. Suorakimpun kaksoissuhde

Kaksiulotteisessa euklidisessa avaruudessa eli tasossa E on vakiota vaille yksikäsitteisesti määrätty *alternoiva bilineaarimuoto* $0 \neq D : E \times E \to \mathbb{R}$, *tason E determinanttimuoto*, t.s. jos $D' : E \times E \to \mathbb{R}$ on toinen tason E determinanttimuoto, niin on olemassa vakio $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ siten, että

$$D'(x,y) = \mu D(x,y)$$

kaikilla tason E vektoreilla $x, y \in E$. Edelleen tason E kaksi vektoria $x, y \in E$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos $D(x,y) \neq 0$ (ks. esim. Nevanlinna [6], ss. 42-43).

Neljä saman pisteen $P \in E$ kautta kulkevaa tason E suoraa l_1, l_2, l_3 ja l_4 muodostavat *suorakimpun.* Jos $l_3 \neq l_4$ ja $l_i \neq l_3, l_4$, kun $i = 1,2$, niin määritellään *suorakimpun l_1, l_2, l_3, l_4 kaksoissuhde* $[l_1, l_2, l_3, l_4]$ suorien l_k suuntavektoreiden f_k, avulla asettamalla

$$[l_1, l_2, l_3, l_4] = \frac{D(f_2, f_4)D(f_1, f_3)}{D(f_2, f_3)D(f_1, f_4)} \in \mathbb{R}. \tag{B.1}$$

Kaksoissuhde on hyvin määritelty, sillä koska vektorit f_i ja f_j ovat lineaarisesti riippumattomia kaikilla $i = 1,2$ ja $j = 3,4$, niin mikään determinanteista ei häviä. Koska determinanttimuoto on vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen, kaksoissuhde ei myöskään riipu determinanttifunktion D valinnasta, ja koska jokainen vektoreista f_1, f_2, f_3 ja f_4 esiintyy yhtä monta kertaa lausekkeen (B.1) osoittajassa ja nimittäjässä, ei kaksoissuhde $[l_1, l_2, l_3, l_4] \in \mathbb{R}$ riipu myöskään suorien l_1, l_2, l_3 ja l_4 suuntavektoreiden f_1, f_2, f_3 ja f_4 valinnasta. Suorakimpun l_1, l_2, l_3, l_4 kaksoissuhde $[l_1, l_2, l_3, l_4]$ on siis suorien l_1, l_2, l_3 ja l_4 yksikäsitteisesti määräämä.

Kun tason E suora m ei kulje suorakimpun l_1, l_2, l_3, l_4 yhteisen pisteen P kautta, mutta leikkaa kunkin suoran l_k pisteessä $A_k \neq P$, jolloin $l_k \cap m = \{A_k\}$, $k = 1,2,3,4$, niin suorien l_k suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $f_k = \overrightarrow{PA_k} \neq 0$, $k = 1,2,3,4$. Jos toisaalta g on suoran m suuntavektori ja $Q \in m$ sekä

$$A_k = s_k g + Q\ ,\ k = 1,2,3,4,$$

niin

$$f_k = \overrightarrow{PA_k} = s_k g + \overrightarrow{PQ}$$

ja siis

$$f_j - f_i = (s_j - s_i)g$$

kaikilla $i, j = 1,2,3,4$. Jos nyt $i = 1,2$ ja $j = 3,4$ ja koska $f_j = f_i + (f_j - f_i)$, niin determinanttimuodon D alternoivuuden nojalla siis

$$\begin{aligned} D(f_i, f_j) &= D(f_i, f_i) + D(f_i, f_j - f_i) = D(f_i, f_j - f_i) \\ &= (s_j - s_i)D(f_i, g) \neq 0, \end{aligned}$$

sillä $A_i \neq A_j$, kun $i = 1,2$ ja $j = 3,4$, joten $s_j - s_i \neq 0$ ja koska l_i ja m ovat eri suoria, niin niiden suuntavektorit f_i ja g ovat lineaarisesti riippumattomia. Näin determinanttien $D(f_i, f_3)$ ja $D(f_i, f_4)$ suhteeksi saadaan

$$\frac{D(f_i, f_4)}{D(f_i, f_3)} = \frac{(s_4 - s_i)D(f_i, g)}{(s_3 - s_i)D(f_i, g)} = \frac{s_4 - s_i}{s_3 - s_i}$$

ja näin

$$[l_1, l_2, l_3, l_4] = \frac{D(f_2, f_4)}{D(f_2, f_3)} : \frac{D(f_1, f_4)}{D(f_1, f_3)} = \frac{(s_4 - s_2)(s_3 - s_1)}{(s_3 - s_2)(s_4 - s_1)} = [A_1, A_2, A_3, A_4]$$

on siis saatu todennetuksi.

LAUSE B.1. *Jos suora m leikkaa jokaisen tason E suorakimpun l_1, l_2, l_3, l_4 suorista, mutta ei kulje suorakimpun yhteisen pisteen kautta, niin suorakimpun leikkauspisteiden A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ ja $l_i \cap m = \{A_i\}$, kaksoisuhde yhtyy suorakimpun kaksoisuhteeseen,*

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = [l_1, l_2, l_3, l_4].$$

Neljän leikkauspisteen kaksoissuhde on siis sama kaikilla suorakimppua leikkaavilla suorilla.

HUOMAUTUS B.2. Helposti todetaan, että kaksoissuhde on positiivinen, $[A_1, A_2, A_3, A_4] > 0$ aina, kun molemmat pisteet A_1 ja A_2 sijaitsevat pisteiden A_3 ja A_4 väliin jäävällä janalla, $A_1, A_2 \in A_3A_4$. Tällöin

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A_1 = A_2.$$

Kirjallisuutta

[1] R.Courant, F.John, *Introduction to Calculus and Analysis I.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 1999

[2] W.H.Greub, *Linear Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York; Third Edition, 1967.

[3] D.Hilbert, S.Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination.* Chelsea Publishing Company; 1952.

[4] D.Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig; 1899.

[5] F.Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* Mathematische Annalen 4: 573-625; 1871.

[6] F.Nevanlinna, R.Nevanlinna, *Absolute Analysis.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York; 1973.

[7] Veikko T. Purmonen, *Differentiaalilaskentaa 1.* Luentomoniste 52 Jyväskylän yliopistopaino; Jyväskylä, 2006.

[8] Veikko T. Purmonen, *Differentiaalilaskentaa 2.* Luentomoniste 54 Jyväskylän yliopistopaino, Jyväskylä; toinen, uudistettu painos, 2006.

[9] William F. Reynolds, *Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid.* The American Mathematical Monthly, Vol. 100, No. 5 (May, 1993), pp. 442-455; Mathematical Association of America.