JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Pólyan lause

Vera Mattila

8. joulukuuta 2024

Tekijä Vera Mattila	
Otsikko Pólyan lause (engl. Pólya's theorem)	
Tutkinto-ohjelma Matematiikan maisteriohjelma	
Päivämäärä 8. joulukuuta 2024	**Sivumäärä** 53

Tiivistelmä

Tämän tutkielman aiheena on Pólyan lause. Se on stokastinen tulos, jonka mukaan symmetrinen satunnaiskävely yksi- ja kaksiulotteisessa hilassa on palautuva, mutta kolme- ja ylempiulotteisessa hilassa poistuva. Tämä tarkoittaa, että kun yksi- tai kaksiulotteisessa hilassa lähdetään mistä tahansa pisteestä liikkeelle niin, että jokaisen suunnan valitsemisen todennäköisyys on sama, päädytään melkein varmasti joskus takaisin alkupisteeseen, kun taas kolme- ja ylempiulotteisessa hilassa ei välttämättä koskaan palata takaisin.

Tutkielman tavoitteena on todistaa Pólyan lause. Se todistetaan tekemällä hiloista sähköverkkoja ja käyttämällä tuloksia, jotka satunnaiskävelylle todistetaan fysikaalista intuitiota käyttäen. Tutkielma aloitetaan verkkoteorialla, sillä hilat ovat verkkoja. Määritellään verkko sekä annetaan määritelmiä verkkojen ominaisuuksille. Yksi näistä ominaisuuksista on verkon kävely, jota tarvitaan satunnaiskävelyn määrittelyyn.

Tämän jälkeen esitellään Markovin ketjut, sillä satunnaiskävely on tietyt ehdot täyttävä Markovin ketju. Annetaan määritelmä Markovin ketjulle, ja esitellään Markovin ketjujen ominaisuuksia. Kerrotaan esimerkiksi, milloin Markovin ketju on palautuva ja milloin poistuva, mikä on tärkeää Pólyan lausetta varten. Tämän jälkeen määritellään satunnaiskävely Markovin ketjujen ja verkkojen avulla.

Seuraavaksi käsitellään sähköverkkoja. Aluksi määritellään sähköverkko, minkä jälkeen käsitellään sähköverkkojen virtauksia ja potentiaaleja. Lisäksi annetaan virtauksen energialle määritelmä sekä esitellään efektiivinen resistanssi. Tämän jälkeen todistetaan Markovin ketjun palautuvuuteen ja poistuvuuteen liittyvä tulos efektiivisen resistanssin sekä virtauksien ja energian avulla. Kyseinen tulos on yksi tutkielman tärkeimmistä, koska sitä käytetään Pólyan lauseen todistuksessa. Tutkielman lopuksi muotoillaan Pólyan lause ja todistetaan se.

Sisällys

Johdanto

Tämän tutkielman aiheena on Pólyan lause. Se on Georg Pólyan vuonna 1921 todistama stokastiikan tulos, joka sanoo, että symmetrinen satunnaiskävely on yksi- ja kaksiulotteisessa hilassa palautuva ja kolme- ja ylempiulotteisessa hilassa poistuva [11]. Tutkielman tavoitteena on todistaa Pólyan lause. Tämä tehdään ajattelemalla hilat sähköverkkoina ja käyttämällä tuloksia, jotka satunnaiskävelylle todistetaan fysikaalista intuitiota käyttäen. Pólyan lauseen voi todistaa monella eri tavalla, mutta sähköverkkojen käytössä on etuna se, että tutkielman lopussa nähtävä todistus on mahdollista toistaa muillekin verkoille, kunhan ne ovat riittävän samankaltaisia kuin hila.

Tutkielma jakautuu viiteen lukuun, joista ensimmäisen aiheena on verkkoteoria. Aluksi annetaan määritelmä verkolle, minkä jälkeen esitellään verkkojen ominaisuuksia. Kerrotaan esimerkiksi, mitä tarkoittavat yksinkertainen ja yhtenäinen verkko sekä aliverkko. Lisäksi määritellään verkon kävely myöhemmin tarvittavaa satunnaiskävelyä varten. Lopuksi käsitellään vielä puita, jotka tulevat olemaan keskeisessä osassa yhdessä tärkeässä ja mielenkiintoisessa tuloksessa.

Toisessa luvussa on kaksi eri alalukua, joista ensimmäisessä käsitellään Markovin ketjuja. Luku alkaa Markovin ketjun määrittelemisellä. Se on satunnaismuuttujien jono, jossa tulevaisuus ei riipu menneisyydestä vaan ainoastaan nykyhetkestä. Sen jälkeen käsitellään siirtymämatriisia ja alkujakaumaa, jotka sisältävät tietoa Markovin ketjuista todennäköisyyksien muodossa. Lisäksi annetaan määritelmiä muille Markovin ketjujen ominaisuuksille, kuten palautuvuudelle ja poistuvuudelle. Luvussa esitellään myös tunnettu esimerkki Markovin ketjuista, jota kutsutaan pelurin vararikoksi. Toisessa alaluvussa aiheena on satunnaiskävely, joka on tietyt ehdot täyttävä Markovin ketju. Määritellään se, minkä jälkeen käsitellään vielä hieman harmonisia funktioita. Lisäksi osoitetaan, että pelurin vararikko -esimerkissä esiintyvä Markovin ketju ei ole satunnaiskävely.

Kolmannessa luvussa aiheena on sähköverkot. Luvun johdannossa määritellään sähköverkko, minkä jälkeen luku jakautuu kahteen eri alalukuun. Ensimmäisessä alaluvussa esitellään sähköverkon virtaukset ja potentiaali. Näiden yhteydessä muotoillaan Kirchhoffin lait ja Ohmin laki, jotka ovat keskeisiä sähköfysiikan tuloksia. Lopuksi todistetaan eräs merkittävä tulos virtauksiin ja Kirchhoffin lakeihin liittyen ensimmäisessä luvussa esiteltyjen puiden avulla. Toisessa alaluvussa käsitellään virtauksien energiaa sekä efektiivistä resistanssia. Luku aloitetaan virtauksen energian määrittelemisellä. Tämän jälkeen määritellään efektiivinen konduktanssi, jonka avulla saadaan myös efektiivinen resistanssi. Lisäksi esitellään sarjaankytkentä- ja rinnankytkentälait, joiden avulla efektiivisiä resistansseja voidaan laskea.

Neljännessä luvussa käsitellään Markovin ketjujen palautuvuutta ja poistuvuutta efektiivisen resistanssin avulla. Aluksi annetaan kaava todennäköisyydelle, jolla Markovin ketju palaa takaisin alkupisteeseensä. Sen jälkeen todistetaan, että Markovin ketjun palautuvuuden tai poistuvuuden voi päätellä efektiivisen resistanssin avulla.

Viimeisessä luvussa muotoillaan Pólyan lause ja todistetaan se. Todistuksessa käytetään neljännessä luvussa fysiikan avulla todistettuja tuloksia Markovin ketjun palautuvuuteen ja poistuvuuteen liittyen. Lopuksi palataan vielä pelurin vararikko -esimerkkiin.

Tutkielman sisällön ymmärtämiseksi lukijalta edellytetään todennäköisyysteorian perustuntemusta. Täytyy ymmärtää esimerkiksi käsitteet satunnaismuuttuja, todennäköisyysmitta, odotusarvo ja ehdollinen todennäköisyys. Lisäksi pitää tuntea lause todennäköisyysmitan alhaalta jatkuvuudesta (engl. continuity from below). Jos nämä asiat eivät ole tuttuja tai kaipaavat kertaamista, niistä voi lukea Christel Geissin ja Stefan Geissin luentomonisteesta [2].

Tutkielman pääasiallisena lähteenä on ollut Geoffrey Grimmettin teos *Probability on Graphs. Random Processes on Graphs and Lattices* [5], sillä tässä tutkielmassa käytettävä versio Pólyan lauseen todistuksesta pohjautuu sieltä löytyvään todistukseen. Kyseistä lähdettä on käytetty lisäksi toisessa luvussa satunnaiskävelyn määrittelyyn, ja myös kolmas sekä neljäs luku perustuvat pitkälti siihen. Ensimmäisen luvun verkkoteoriassa on käytetty Ville Tengvallin luentomonistetta [13] sekä Ian Andersonin kirjaa [1], ja toisen luvun Markovin ketjuihin liittyvät asiat ovat enimmäkseen Geoffrey Grimmettin ja Dominic Welshin teoksesta [6].

Tämän tutkielman kirjoittamisessa on käytetty apuna OpenAI:n generatiivista tekoälysovellusta ChatGPT:tä. Sovellusta on hyödynnetty sanavalintojen parantamisessa, lauserakenteiden selkeyttämisessä, tekstin tiivistämisessä sekä kirjoitusvirheiden tarkastamisessa.

1 Verkkoteoria

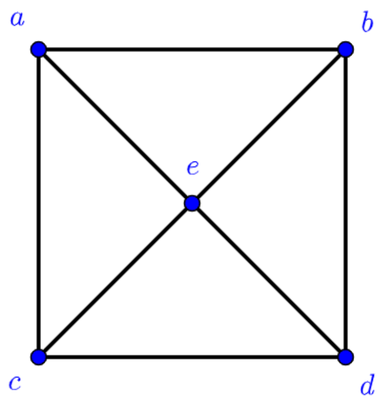
Ensimmäisessä luvussa käsitellään verkkoteorian perusteita. Aloitetaan määrittelemällä verkko, minkä jälkeen määritellään muita verkkoon liittyviä tärkeitä käsitteitä, kuten verkon yhtenäisyys sekä puu ja virittäjäpuu. Tässä luvussa myös alustetaan ymmärrystä satunnaiskävelystä kertomalla, mitä verkon kävely ylipäätään on. Luvun sisältö pohjautuu pääosin lähteeseen [13, s.10–40] ja sitä täydennetään lähteellä [1, s.43–50].

Määritelmä 1.1 (Verkko)**.** Olkoot V epätyhjä joukko ja E multijoukko joukon V alkiopareja. Tällöin paria $G = (V, E)$ kutsutaan verkoksi. Joukon V alkioita kutsutaan verkon G *kärjiksi* ja joukon E alkioita verkon G *sivuiksi*. Kahta kärkeä kutsutaan *naapureiksi*, jos niitä yhdistää sivu. Jos kärjet $u, v \in V$ ovat naapureita, merkitään $u \sim v$.

Huomautus 1.2. Koska E on joukon V alkioparien multijoukko, niin sama alkiopari voi esiintyä siinä useammin kuin kerran. Lisäksi itse alkioparit ovat multijoukkoja, eli ne voivat koostua kahdesta samasta alkiosta.

Verkkoa $G = (V, E)$ kutsutaan äärelliseksi, jos joukossa V on äärellinen määrä kärkiä ja vastaavasti äärettömäksi, jos V sisältää äärettömän monta kärkeä.

Esimerkki 1.3. Olkoon $G = (V, E)$, missä $V = \{a, b, c, d, e\}$ ja $E = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\big\}$. Tällöin G on äärellinen verkko, jota voidaan havainnollistaa esimerkiksi kuvalla 1.1.



Kuva 1.1: Esimerkin 1.3 verkko.

Verkot voidaan jakaa ominaisuuksiensa perusteella yksinkertaisiin verkkoihin ja multigraafeihin.

Määritelmä 1.4 (Yksinkertainen verkko)**.** Verkkoa kutsutaan yksinkertaiseksi, jos sama sivu voi esiintyä siinä vain kerran ja siinä ei ole *silmukoita*, eli muotoa $\{v, v\} \in E$ jollekin $v \in V$, olevia sivuja. Jos verkko ei ole yksinkertainen, sitä kutsutaan multigraafiksi.

Esimerkissä 1.3 nähty verkko on yksinkertainen. Määritellään seuraavaksi, mitä tarkoittaa verkon kärkien aste.

Määritelmä 1.5 (Kärjen aste)**.** Verkon kärjen $v \in V$ aste $d(v)$ on kaikkien niiden sivujen lukumäärä, joihin v kuuluu. Kärjen v astetta laskettaessa mahdollinen silmukka $\{v, v\}$ lasketaan kahdesti.

Kuvasta 1.1 nähdään, että esimerkin 1.3 verkon kärkien asteet ovat $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = 3$ ja $d(e) = 4$. Verkolle voidaan määritellä aliverkko, joka on jokin osa alkuperäisestä verkosta.

Määritelmä 1.6 (Aliverkko)**.** Verkko $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ on verkon $G = (V, E)$ aliverkko, jos $\hat{V} \subset V$ ja $\hat{E} \subset E$.

Seuraavaksi tutustutaan verkon kävelyyn. Annetaan sille määritelmä, ja kerrotaan, milloin kävelyä voidaan kutsua poluksi tai kierrokseksi.

Määritelmä 1.7 (Kävely)**.** Verkon kävely on jono sivuja $(\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\})$, $n \geq 1$. Kävelyä kutsutaan *suljetuksi*, jos sen lähtö- ja päätekärki ovat samoja, eli $v_0 = v_n$. Kävelyn *pituus* on sen sisältämien sivujen lukumäärä n.

Jos kävelyä $(\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\})$ merkitään k, niin sen sisältämille sivuille merkitään $\{v_i, v_{i+1}\} \in k$ kaikilla $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Jatkossa kävelystä käytetään lyhyempää merkintää $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

Määritelmä 1.8 (Polku ja kierros)**.** Jos kävelyn kaikki kärjet ovat eri kärkiä, paitsi mahdollisesti lähtö- ja päätekärki, kävelyä kutsutaan poluksi. Polkua kutsutaan kierrokseksi, jos se on suljettu.

Määritelmä 1.9 (Kärkien välinen etäisyys)**.** Verkon kärkien $u, v \in V$ välinen etäisyys $\delta(u, v)$ on niiden välisen lyhimmän polun pituus.

Jos kaikista verkon kärjistä pääsee kulkemaan mihin tahansa toiseen kärkeen jotain polkua pitkin, verkko on yhtenäinen.

Määritelmä 1.10 (Yhtenäisyys)**.** Verkko on yhtenäinen, jos kaikilla $u, v \in V$ on olemassa polku kärjestä u kärkeen v.

Esimerkin 1.3 verkko on yhtenäinen. Yhtenäisyyden avulla voidaan määritellä verkon komponentti, jota kutsutaan myös yhtenäisyyskomponentiksi.

Määritelmä 1.11 (Komponentti)**.** Verkon komponentti on sen yhtenäinen aliverkko, joka ei ole osa mitään suurempaa yhtenäistä aliverkkoa.

Komponentit ovat siis verkon yhtenäisiä, mutta keskenään erillisiä osia. Näin ollen verkko voidaan jakaa komponentteihin. Komponentin määritelmästä seuraa, että verkolla on korkeintaan yhtä monta komponenttia kuin sillä on kärkiä, ja jos verkko on itsessään yhtenäinen, se muodostaa ainoan komponenttinsa.

Lopuksi vielä käsitellään puita. Kerrotaan, mikä on puu, sekä määritellään juurrutettu puu ja virittäjäpuu.

Määritelmä 1.12 (Puu)**.** Yhtenäistä yksinkertaista verkkoa kutsutaan puuksi, jos siinä ei ole vähintään kolme kärkisiä kierroksia.

Määritelmä 1.13 (Juurrutettu puu)**.** Juurrutettu puu on puu, jonka kärjistä yksi on valittu sen *juureksi*. Lisäksi:

1. Juurrutetun puun kärjen *taso* on sen polun pituus, joka yhdistää juuren kyseiseen kärkeen.

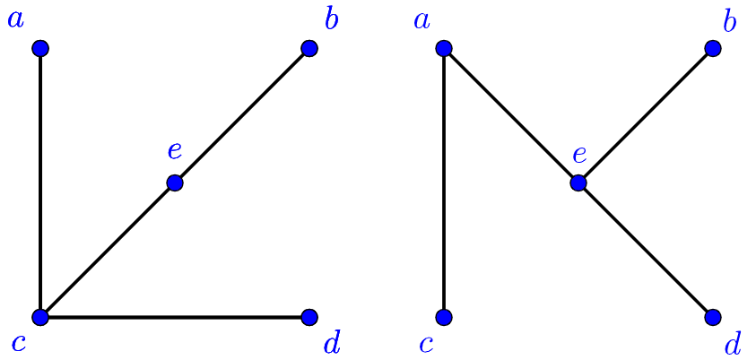
2. Juurutetun puun kärjen matalampitasoisia naapureita kutsutaan sen *vanhemmiksi* ja korkeampitasoisia naapureita sen *lapsiksi*.

3. *Haaraksi* kutsutaan kärkeä, jolla on lapsia ja *lehdeksi* kärkeä, jolla ei ole lapsia.

4. Jos juurrutetun puun jokaisella haaralla on korkeintaan k lasta, niin sitä kutsutaan *k-haaraiseksi*.

Määritelmä 1.14 (Virittäjäpuu)**.** Yhtenäisen verkon G virittäjäpuu on puu, joka sisältää verkon G kaikki kärjet ja on verkon G aliverkko.

Kuvasta 4.1 löytyy 2-haarainen juurrutettu puu. Kuvassa 1.2 taas on joitakin esimerkin 1.3 verkon virittäjäpuita.



Kuva 1.2: Esimerkin 1.3 verkon virittäjäpuita.

Osoitetaan seuraavaksi, että äärellisen yhtenäisen verkon virittäjäpuu on aina olemassa.

Lause 1.15. *Jokaisella äärellisellä yhtenäisellä verkolla on vähintään yksi virittäjäpuu.*

Todistus. Olkoon G äärellinen yhtenäinen verkko. Oletetaan aluksi, että G on yksinkertainen. Jos G ei sisällä kierroksia, se on itsensä virittäjäpuu. Jos G sisältää kierroksia, poistetaan jostain kierroksesta yksi sivu, jolloin se ei ole enää kierros. Jos tämän jälkeen verkossa on edelleen kierroksia, poistetaan taas jostain kierroksesta yksi sivu. Tätä jatketaan, kunnes verkossa ei ole enää yhtäkään kierrosta. Näin saadaan verkko, jossa ei ole kierroksia, ja joka on edelleen yhtenäinen ja yksinkertainen. Tämä verkko on yksinkertaisen verkon G virittäjäpuu.

Oletetaan sitten, että G on multigraafi. Poistetaan kaikki silmukat, ja jos kahden kärjen välillä on useampi kuin yksi sivu, poistetaan näistä sivuista kaikki muut paitsi yksi. Näin saadaan yksinkertainen verkko, joka on edelleen yhtenäinen. Samoin kuin todistuksen alkuosassa, poistamalla kaikki kierrokset saadaan verkko, joka on multigraafin G virittäjäpuu. □

Lisää puihin liittyviä tuloksia löytyy lähteestä [14, Chapter 4].

2 Markovin ketjut ja satunnaiskävely

Tässä luvussa esitellään Markovin ketjut ja satunnaiskävely. Ensimmäisessä alaluvussa tutustutaan Markovin ketjun määritelmään sekä sen moniin ominaisuuksiin, kuten siirtymämatriisiin, alkujakaumaan sekä invarianttiin jakaumaan. Lisäksi tutustutaan tunnettuun esimerkkiin Markovin ketjuista, joka tunnetaan nimellä pelurin vararikko. Toisessa alaluvussa kerrotaan, mitä tarkoittaa satunnaiskävely, ja määritellään se verkkojen ja Markovin ketjujen avulla. Lisäksi jatketaan pelurin vararikko -esimerkkiä ja muokataan sitä. Lopuksi vielä tutustutaan harmonisen funktion määritelmään ja todistetaan sille muutama tulos. Ensimmäinen alaluku pohjautuu enimmäkseen lähteeseen [6, s.205–241], ja toisessa alaluvussa seurataan pääosin lähdettä [5, s.1–3, s.19–20].

2.1 Markovin ketjut

Tämä alaluku käsittelee Markovin ketjuja. Ne ovat satunnaismuuttujien jonoja, jotka toteuttavat ehdon nimeltä Markovin ehto. Ensimmäiseksi määritelläänkin Markovin ketju.

Määritelmä 2.1 (Markovin ketju)**.** Olkoon S numeroituva joukko, jota kutsutaan *tila-avaruudeksi*, ja olkoon $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ sellaisten satunnaismuuttujien jono, joiden maalijoukko on S. Jonoa X kutsutaan Markovin ketjuksi, jos se toteuttaa *Markovin ehdon*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

kaikilla $n \geq 0$ ja kaikilla $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in S$. Markovin ketjua kutsutaan *homogeeniseksi*, jos kaikilla $i, j \in S$ ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ei riipu muuttujasta n.

Markovin ketju on siis satunnaismuuttujien jono, jossa tulevaisuus ei riipu menneisyydestä, vaan ainoastaan mahdollisesti nykyhetkestä. Markovin ketjuille on määritelty siirtymämatriisi ja alkujakauma.

Määritelmä 2.2 (Siirtymämatriisi ja alkujakauma)**.** Siirtymämatriisi $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$ määritellään $p_{i,j} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$, ja alkujakauma $\lambda = (\lambda_i)_{i \in S}$ määritellään $\lambda_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$.

Huomautus 2.3. Jos Markovin ketju on homogeeninen, niin $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{i,j}$ kaikilla $n \geq 0$.

Esitellään seuraavaksi pelurin vararikko (engl. gambler's ruin), joka on hyvin tunnettu esimerkki Markovin ketjuista. Siinä pelataan peliä, jossa jokaisella kierroksella pelaaja joko voittaa tai häviää yhden euron. Peli päättyy, kun pelaaja saa kasaan tietyn rahasumman tai kun hän häviää kaikki rahansa.

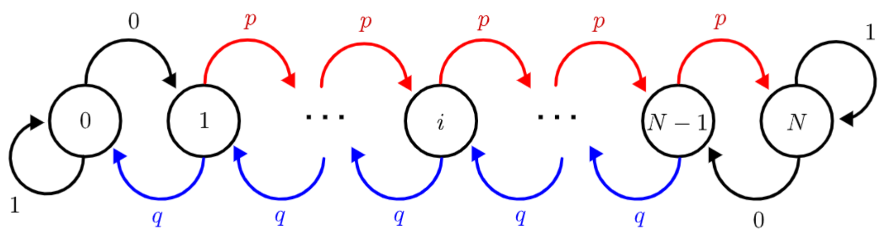
Esimerkki 2.4 (Pelurin vararikko)**.** Olkoon $N \geq 2$ se summa euroissa, jota tavoitellaan. Olkoon $1 \leq i \leq N-1$, missä i on pelaajalla pelin alussa oleva rahamäärä euroissa. Jokaisella kierroksella, edellisistä kierroksista riippumatta, pelaaja voittaa yhden euron todennäköisyydellä $p \in (0,1)$ tai häviää yhden euron todennäköisyydellä $q = 1 - p$. Tätä on havainnollistettu kuvassa 2.1. Olkoon X_n pelaajan rahamäärä euroissa kierroksen n jälkeen. Pelaaja voittaa, jos hän onnistuu saamaan N euroa ennen kuin häneltä loppuvat rahat. Peli päättyy, kun pelaaja joko voittaa tai hänen rahansa loppuvat.

Nyt $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ on homogeeninen Markovin ketju tila-avaruudella $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ ja siirtymämatriisilla P, jossa

$$p_{i,i+1} = \begin{cases} 0, & \text{kun } i \in \{0, N\} \\ p, & \text{kun } i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}, \end{cases}$$

$$p_{i,i-1} = \begin{cases} 0, & \text{kun } i \in \{0, N\} \\ q, & \text{kun } i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}, \end{cases}$$

$$p_{i,i} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i \in \{0, N\} \\ 0, & \text{kun } i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}. \end{cases}$$



Kuva 2.1: Pelurin vararikon todennäköisyyksistä muodostettu siirtymädiagrammi. Punaiset nuolet kuvaavat euron voittamisen todennäköisyyttä p ja siniset nuolet euron häviämisen todennäköisyyttä q. Kuvan mallina on ollut [7, Figure 1].

Pelurin vararikosta voi lukea lisää lähteestä [7, s.6–43]. Jatketaan sitten siirtymämatriisin ja alkujakauman käsittelyä.

Lause 2.5. *Alkujakauma λ ja siirtymämatriisi P täyttävät seuraavat ehdot:*

1. *Vektori λ on jakauma, eli $\lambda_i \geq 0$ kaikilla $i \in S$, ja $\sum_{i \in S} \lambda_i = 1$.*
2. *Matriisi $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$ on stokastinen matriisi, eli*
    - *$p_{i,j} \geq 0$ kaikilla $i, j \in S$*
    - *$\sum_{j \in S} p_{i,j} = 1$ kaikilla $i \in S$, eli jokaisen rivin summa on yksi.*

Todistus. Todistus seuraa todennäköisyysmitan ominaisuuksista:

1. Selvästi $\lambda_i = \mathbb{P}(X_0 = i) \geq 0$ kaikilla $i \in S$, ja
$$\sum_{i \in S} \lambda_i = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_0 = i) = \mathbb{P}(X_0 \in S) = 1.$$
2. Selvästi $p_{i,j} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) \geq 0$ kaikilla $i, j \in S$. Lisäksi
$$\sum_{j \in S} p_{i,j} = \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(X_1 \in S \mid X_0 = i) = 1$$
kaikilla $i \in S$. □

Kolmogorovin laajennuslauseesta [3, Theorem 4.2] seuraa, että annetuille jakaumalle λ ja stokastiselle matriisille P on aina olemassa Markovin ketju alkujakaumalla λ ja siirtymämatriisilla P [4, Theorem 3.1.1]. Seuraava lause todistaa kyseisen Markovin ketjun pistetodennäköisyydet.

Lause 2.6. *Olkoon λ jakauma ja olkoon P stokastinen matriisi. Satunnaismuuttujien jono $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ on homogeeninen Markovin ketju alkujakaumalla λ ja siirtymämatriisilla P jos ja vain jos*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n} \tag{2.1}$$

kaikilla $n \geq 0$ ja kaikilla $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$.

Todistus. Määritellään tapahtuma $A_k = \{X_k = i_k\}$ kaikilla $k = 1, \ldots, n$, jolloin yhtälö (2.1) saa muodon

$$\mathbb{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}. \tag{2.2}$$

" $\Rightarrow$ " Oletetaan, että X on homogeeninen Markovin ketju alkujakaumalla λ ja siirtymämatriisilla P. Osoitetaan yhtälö (2.2) tekemällä induktio muuttujan n suhteen. Olkoot $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$. Kun $n = 0$, määritelmän 2.2

nojalla $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$. Olkoon sitten $n \geq 1$ siten, että yhtälö (2.2) pätee. Tällöin Markovin ehdon, induktio-oletuksen ja homogeenisyyden nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_0 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_0 \cap \cdots \cap A_n)\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_0 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_0 \cap \cdots \cap A_n)\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) \\ &= \lambda_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n} p_{i_n,i_{n+1}},\end{aligned}$$

joten väite seuraa induktiosta.

" $\Leftarrow$ " Oletetaan, että yhtälö (2.2) pätee kaikilla $n \geq 0$ ja kaikilla $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$. Kun asetetaan $n = 0$, saadaan alkujakaumaksi $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$. Olkoot $n \geq 0$ ja $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in S$. Nyt ehdollisen todennäköisyyden kaavalla

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_0 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{\mathbb{P}(A_0 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1})}{\mathbb{P}(A_0 \cap \cdots \cap A_n)},$$

mistä oletuksen nojalla saadaan

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_0 \cap \cdots \cap A_n) = p_{i_n,i_{n+1}}. \tag{2.3}$$

Lisäksi

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = \frac{\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1})}{\mathbb{P}(A_n)},$$

missä yhtälön (2.3) nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) &= \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1} \in S} \mathbb{P}(A_0 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1} \in S} \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_0 \cap \cdots \cap A_n)\mathbb{P}(A_0 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= p_{i_n,i_{n+1}}\mathbb{P}(A_n),\end{aligned}$$

eli saadaan

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = p_{i_n,i_{n+1}}. \tag{2.4}$$

Siispä $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_0 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)$, eli X on Markovin ketju siirtymämatriisilla P, ja yhtälö (2.4) takaa sen homogeenisyyden. □

Määritellään seuraavaksi Markovin ketjun ominaisuudet kommunikointi ja redusoimattomuus.

Määritelmä 2.7 (Kommunikointi)**.** Olkoon X homogeeninen Markovin ketju tila-avaruudella S ja siirtymämatriisilla P. Alkioille $i, j \in S$ sanotaan, että alkio i johtaa alkioon j, ja merkitään $i \to j$, jos $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$ jollekin $n \geq 0$. Jos $i \to j$ ja $j \to i$, niin merkitään $i \leftrightarrow j$, ja sanotaan, että i ja j kommunikoivat.

Jos kaikki tila-avaruuden S alkiot kommunikoivat keskenään, ketju X on redusoimaton.

Määritelmä 2.8 (Redusoimattomuus)**.** Homogeenista Markovin ketjua X kutsutaan redusoimattomaksi, jos i ja j kommunikoivat kaikilla $i, j \in S$.

Markovin ketjun palautuvuus ja poistuvuus ovat tämän tutkielman kannalta yksiä tärkeimmistä määritelmistä, koska Pólyan lause tulee käsittelemään niitä.

Määritelmä 2.9 (Palautuvuus ja poistuvuus)**.** Olkoon $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ homogeeninen Markovin ketju. Olkoon $\bar{T}_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$ ensimmäinen tai toinen n, jolla ketju X saa arvon $i \in S$. Alkiota i sanotaan palautuvaksi, jos $\mathbb{P}(\bar{T}_i < \infty \mid X_0 = i) = 1$ ja poistuvaksi, jos se ei ole palautuva. Ketjua X sanotaan palautuvaksi, jos sen ensimmäinen arvo on palautuva ja poistuvaksi, jos sen ensimmäinen arvo ei ole palautuva.

Alkio $i \in S$ on siis palautuva jos ja vain jos Markovin ketju palaa alkioon i melkein varmasti ja poistuva jos ja vain jos on mahdollista, ettei Markovin ketju palaa alkioon i.

Lause 2.10. *Alkio $i \in S$ on palautuva jos ja vain jos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = i) = \infty.$$

Todistus sivuutetaan ja se löytyy lähteestä [4, s.60–61]. Jos alkio on palautuva, niin myös kaikki sen kanssa kommunikoivat alkiot ovat palautuvia.

Lause 2.11. *Olkoon X homogeeninen Markovin ketju. Jos alkiot $i, j \in S$ kommunikoivat ja i on palautuva, niin tällöin myös j on palautuva.*

Todistus. Merkitään tässä todistuksessa $p^{(n)}(i,j) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$ kaikilla $n \geq 0$ ja $i, j \in S$. Koska $i, j \in S$ kommunikoivat, on olemassa $k, l \geq 0$ siten, että $p^{(k)}(i,j) > 0$ ja $p^{(l)}(j,i) > 0$. Koska lisäksi i on palautuva, niin lauseen 2.10 nojalla $\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(i,i) = \infty$. Nyt Chapman-Kolmogorovin yhtälöstä [4, Proposition 3.2.1] seuraa, että

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(j,j) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} p^{(l+n+k)}(j,j) \geq \sum_{n=1}^{\infty} p^{(l)}(j,i)p^{(n)}(i,i)p^{(k)}(i,j) \\ &= p^{(k)}(i,j)p^{(l)}(j,i)\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(i,i) = \infty.\end{aligned}$$

Siispä lauseen 2.10 nojalla myös j on palautuva. □

Huomautus 2.12. Lauseesta 2.11 seuraa, että jos alkiot $i, j \in S$ kommunikoivat ja i onkin poistuva, niin myös j on poistuva.

Seuraavaksi tullaan määrittelemään, mitä tarkoittaa käännetty ketju. Tätä varten kuitenkin tarvitaan vielä määritelmät positiiviselle palautuvuudelle ja invariantille jakaumalle.

Määritelmä 2.13 (Positiivinen palautuvuus)**.** Alkiota i sanotaan positiivisesti palautuvaksi, jos se on palautuva, ja jos sen palautuvuusajan odotusarvolle

$$E(\bar{T}_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(\bar{T}_i = n \mid X_0 = i)$$

pätee $E(\bar{T}_i) < \infty$. Ketjua X sanotaan positiivisesti palautuvaksi, jos kaikki tila-avaruuden S alkiot ovat positiivisesti palautuvia.

Määritelmä 2.14 (Invariantti jakauma)**.** Olkoon X Markovin ketju siirtymämatriisilla P. Vektoria $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ kutsutaan ketjun X invariantiksi jakaumaksi, jos

1. $\pi_i \geq 0$ kaikilla $i \in S$, ja $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$
2. $\pi = \pi P$.

Huomautus 2.15. Määritelmässä 2.14 esiintyvässä matriisitulossa πP vektori π pitää ajatella rivimatriisina. Tällainen matriisitulo on hyvin yleinen stokastiikassa.

Seuraavasta lemmasta on myöhemmin hyötyä. Se kertoo, että invariantti jakauma on muuttumaton ajan kuluessa.

Lemma 2.16. *Olkoon $X = (X_n)_{n=0}^{N}$ homogeeninen Markovin ketju siirtymämatriisilla P ja invariantilla jakaumalla π. Jos satunnaismuuttujalla X_0 on jakauma π, niin silloin myös satunnaismuuttujalla X_n on jakauma π kaikilla $n \geq 0$.*

Todistus. Olkoon satunnaismuuttujalla X_0 jakauma π. Osoitetaan induktiolla, että satunnaismuuttujalla X_n on jakauma π kaikilla $n \geq 0$. Suoraan oletuksesta saadaan, että satunnaismuuttujalla X_n on jakauma π, kun $n = 0$. Oletetaan sitten, että $n \geq 1$ siten, että satunnaismuuttujalla X_n on jakauma π, eli $\mathbb{P}(X_n = k) = \pi_k$ kaikilla $k \in S$. Osoitetaan, että satunnaismuuttujalla X_{n+1} on jakauma π, eli $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \pi_k$ kaikilla $k \in S$.

Olkoon $k \in S$. Markovin ehdon, induktio-oletuksen, homogeenisyyden ja ehdon $\pi = \pi P$ nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \sum_{i_n \in S} \mathbb{P}(X_n = i_n)\mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n) \\ &= \sum_{i_n \in S} \pi_{i_n} p_{i_n,k} = (\pi P)_k = \pi_k.\end{aligned}$$ □

Nyt päästään määrittelemään käännetty ketju.

Määritelmä 2.17 (Käännetty ketju)**.** Olkoon $X = (X_n)_{n=0}^N$ redusoimaton, positiivisesti palautuva Markovin ketju siirtymämatriisilla P ja invariantilla jakaumalla π. Oletetaan, että satunnaismuuttujalla X_0 on jakauma π, eli että π on ketjun X alkujakauma. Ketjun X käännetty ketju $Y = (Y_n)_{n=0}^N$ määritellään $Y_n = X_{N-n}$ kaikilla $0 \leq n \leq N$.

Käännetyn ketjun nimi tulee siitä, että siinä alkuperäisen ketjun satunnaismuuttujat ovat päinvastaisessa järjestyksessä, eli indeksit n on käännetty. Käännettyä ketjua kutsutaan myös aikakääntyväksi ketjuksi ja ideksiä n ajanhetkeksi. Myös käännetty ketju on Markovin ketju.

Lause 2.18. *Määritelmän 2.17 jono Y on redusoimaton Markovin ketju siirtymämatriisilla $\hat{P} = (\hat{p}_{i,j})_{i,j \in S}$, joka on määritelty*

$$\hat{p}_{i,j} = \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{j,i}$$

kaikilla $i, j \in S$, sekä invariantilla jakaumalla π.

Todistus. Osoitetaan aluksi, että $\hat{P}$ on stokastinen matriisi. Koska $p_{i,j} \geq 0$ ja $\pi_i \geq 0$ kaikilla $i, j \in S$, niin selvästi myös $\hat{p}_{i,j} \geq 0$ kaikilla $i, j \in S$. Lisäksi, koska $\pi = \pi P$, niin

$$\sum_{j \in S} \hat{p}_{i,j} = \frac{1}{\pi_i} \sum_{j \in S} \pi_j p_{j,i} = \frac{1}{\pi_i} \pi_i = 1$$

kaikilla $i \in S$. Näytetään sitten, että π on invariantti matriisille $\hat{P}$, eli että $\pi = \pi \hat{P}$. Koska $\sum_{j \in S} p_{i,j} = 1$ kaikilla $i \in S$, saadaan

$$\sum_{i \in S} \pi_i \hat{p}_{i,j} = \pi_j \sum_{i \in S} p_{j,i} = \pi_j$$

kaikilla $j \in S$. Lauseen 2.6 nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n) &= \mathbb{P}(X_{N-n} = i_n, X_{N-n+1} = i_{n-1}, \ldots, X_n = i_0) \\ &= \pi_{i_n} p_{i_n,i_{n-1}} \cdots p_{i_1,i_0} \\ &= \pi_{i_n} \frac{\pi_{i_{n-1}}}{\pi_{i_n}} \hat{p}_{i_{n-1},i_n} \cdots \frac{\pi_{i_0}}{\pi_{i_1}} \hat{p}_{i_0,i_1} \\ &= \pi_{i_0} \hat{p}_{i_0,i_1} \cdots \hat{p}_{i_{n-1},i_n}\end{aligned}$$

kaikilla $n \geq 0$ ja kaikilla $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$. Nyt edelleen lauseen 2.6 nojalla jono Y on Markovin ketju siirtymämatriisilla $\hat{P}$ ja invariantilla jakaumalla π. Koska X on redusoimaton, niin selvästi myös Y on redusoimaton. $\square$

Satunnaiskävelyn määrittelyä varten tulee tietää, milloin Markovin ketju on kääntyvä.

Määritelmä 2.19 (Kääntyvyys)**.** Olkoon $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ Markovin ketju tila-avaruudella S ja siirtymämatriisilla P. Ketju X on kääntyvä jonkin positiivisen funktion $\pi : S \to (0, \infty)$ suhteen, jos $\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}$ kaikilla $i, j \in S$.

Määritelmä 2.19 on hyvin yleinen, sillä se määrittelee kääntyvyyden jonkin positiivisen funktion π suhteen. Jos halutaan, että tämä jokin positiivinen funktio on nimenomaan invariantti jakauma, täytyy Markovin ketjun olla äärellinen.

Lause 2.20. *Olkoon $X = (X_n)_{n=0}^{N}$ redusoimaton Markovin ketju invariantilla jakaumalla π, ja oletetaan, että satunnaismuuttujalla X_0 on jakauma π. Ketju X on kääntyvä, jos sillä ja sen käännetyllä ketjulla Y on samat siirtymämatriisit, eli jos $\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}$ kaikilla $i, j \in S$.*

Todistus. Seuraa suoraan määritelmästä 2.19. $\square$

2.2 Satunnaiskävely

Tässä alaluvussa aiheena on satunnaiskävely. Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen tai numeroituvasti ääretön yksinkertainen yhtenäinen verkko. Jos verkko G on numeroituvasti ääretön, tällöin oletetaan, että jokaisen kärjen $v \in V$ asteelle pätee $d(v) < \infty$. Aluksi valitaan jokin kärki $v_0 \in V$, josta satunnaiskävely lähtee liikkeelle. Seuraavaksi valitaan satunnaisesti jokin kärjen v_0 naapureista, merkitään tätä kärkeä $v_1 \in V$, ja siirrytään siihen. Tämän jälkeen kärjen v_1 naapureista valitaan satunnaisesti seuraava kärki $v_2 \in V$ ja siirrytään siihen. Kun tätä prosessia jatketaan, saadaan satunnainen kärkien jono $v_0, v_1, v_2, \ldots$, jota kutsutaan satunnaiskävelyksi verkolla G. [5, 8]

Yleisesti seuraavaa kärkeä valitessa valinta ei ole *tasaisesti satunnainen*, eli jokaisen naapurin valitsemistodennäköisyys ei välttämättä ole sama. Tällöin määritellään *painofunktio* $w : E \to (0, \infty)$, joka liittää jokaiseen verkon G sivuun $e \in E$ positiivisen painon w_e. Nyt siirtymä tapahtuu sivua e pitkin todennäköisyydellä, joka on suoraan verrannollinen sivun painoon w_e. Jos kuitenkin kaikissa askeleissa jokaisen naapurin valitsemistodennäköisyys on sama, satunnaiskävelyä kutsutaan *symmetriseksi*. Annetaan seuraavaksi täsmällinen määritelmä verkon G satunnaiskävelylle Markovin ketjujen avulla.

Määritelmä 2.21 (Satunnaiskävely)**.** Kääntyvä Markovin ketju $Z = (Z_n)_{n=0}^{\infty}$ kärkien joukossa V on satunnaiskävely verkolla $G = (V, E)$, mikäli sivujen joukko E sisältää tasan kaikki sellaiset sivut $\{u, v\}$, joille $p_{u,v} > 0$.

Määritellään kaikille kärjille $u, v \in V$ painofunktio

$$w_{u,v} = \pi_u p_{u,v}.$$

Tällöin kääntyvyyden nojalla $w_{u,v} = w_{v,u}$ kaikilla $u, v \in V$. Jos kärkiä $u, v \in V$ yhdistää sivu, on $w_{u,v}$ silloin myös sivun $\{u, v\} \in E$ paino. Jos sivua $\{u, v\}$ merkitään e, niin kyseisen sivun painoa $w_{u,v}$ voidaan merkitä myös w_e. Painofunktion määritelmästä seuraa, että jos $u \not\sim v$, niin $w_{u,v} = 0$, sillä tällöin $p_{u,v} = 0$. Toisaalta, jos $u \sim v$, niin $w_{u,v} > 0$, sillä tällöin $\pi_u > 0$ ja $p_{u,v} > 0$. Nyt verkkoa G kutsutaan *painotetuksi* verkoksi. Kääntyvyyden nojalla

$$p_{u,v} = \frac{w_{u,v}}{W_u} \tag{2.5}$$

kaikilla $u, v \in V$, missä

$$W_u = \sum_{v \in V} w_{u,v}$$

kaikilla $u \in V$. Koska verkko G on yhtenäinen, jokaisella kärjellä $u \in V$ on vähintään yksi naapuri $\hat{u} \in V$. Tällöin

$$W_u = \sum_{v \in V} w_{u,v} \geq w_{u,\hat{u}} > 0$$

kaikilla $u \in V$, jolloin erityisesti $W_u \neq 0$ kaikilla $u \in V$.

Vaikka satunnaiskävely on aina jokin Markovin ketju, ei sama päde toisin päin, eli Markovin ketju ei ole aina jokin satunnaiskävely. Satunnaiskävely on määritelty aina verkolla, jonka sivujen joukko sisältää tasan kaikki sellaiset sivut $\{u, v\}$, joille $p_{u,v} > 0$, mutta Markovin ketju voidaan määritellä myös verkolla, jonka sivujen joukko sisältää sellaisia sivuja $\{u, v\}$, joille $p_{u,v} = 0$. Eli satunnaiskävelyn täytyy olla mahdollista kulkea verkkonsa jokaista sivua pitkin, mutta Markovin ketjun ei tarvitse. Kaikki Markovin ketjut eivät ole myöskään aina kääntyviä, ja esimerkiksi pelurin vararikko -esimerkissä määritelty ketju on Markovin ketju, muttei satunnaiskävely, sillä se ei ole kääntyvä.

Esimerkki 2.22. Olkoon $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ määritelty kuten esimerkissä 2.4. Osoitetaan, että Markovin ketju X ei ole kääntyvä. Oletetaan vastoin väitettä, että ketju X on kääntyvä. Tällöin on olemassa positiivinen funktio $\pi : S \to (0, \infty)$, jolle $\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}$ kaikilla $i, j \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

Täten erityisesti $\pi_0 p_{0,1} = \pi_1 p_{1,0}$. Tiedetään, että $p_{0,1} = 0$, joten myös $\pi_0 p_{0,1} = 0$. Täten on oltava myöskin $\pi_1 p_{1,0} = 0$. Koska kuitenkin $p_{1,0} = q = 1 - p \neq 0$, on oltava $\pi_1 = 0$. Tämä on ristiriita, sillä funktion π piti olla aidosti positiivinen. Koska ketju X ei ole kääntyvä, ei se voi olla myöskään satunnaiskävely.

Muokataan pelurin vararikko -esimerkkiä niin, että saadaan Markovin ketju, joka on satunnaiskävely. Oletetaan, että peli ei lopukaan silloin kun pelaaja saa N euroa tai häviää kaikki rahansa, vaan peli jatkuu ikuisesti. Tällöin pelaajalla voi olla myös enemmän kuin N euroa tai hänen rahamääränsä voi olla negatiivinen.

Esimerkki 2.23. Olkoon $i \in \mathbb{Z}$ rahamäärä euroissa, joka pelaajalla on pelin alussa. Pelaaja voittaa edelleen yhden euron todennäköisyydellä $p \in (0,1)$ tai häviää yhden euron todennäköisyydellä $q = 1 - p$. Edelleen X_n on pelaajan rahamäärä euroissa kierroksen n jälkeen.

Tällöin $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ on homogeeninen Markovin ketju tila-avaruudella $\mathbb{Z}$ ja siirtymämatriisilla P, jossa

$$p_{i,j} = \begin{cases} p, & \text{kun } j = i+1 \\ q = 1-p, & \text{kun } j = i-1 \\ 0, & \text{kun } j = i \end{cases}.$$

Osoitetaan, että Markovin ketju X on kääntyvä. Määritellään positiivinen funktio $\pi : \mathbb{Z} \to (0, \infty)$,

$$\pi_i = \frac{p}{1-p} \pi_{i-1} = \left(\frac{p}{1-p} \right)^i \pi_0,$$

missä $\pi_0 > 0$. Nyt jos $j = i$, niin

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i},$$

jos $j = i + 1$, niin

$$\pi_i p_{i,j} = \left(\frac{p}{1-p} \right)^i \pi_0 p = \left(\frac{p}{1-p} \right)^{i+1} \pi_0 (1-p) = \pi_j p_{j,i},$$

ja jos $j = i - 1$, niin

$$\pi_i p_{i,j} = \left(\frac{p}{1-p} \right)^i \pi_0 (1-p) = \left(\frac{p}{1-p} \right)^{i-1} \pi_0 p = \pi_j p_{j,i}.$$

Siispä $\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}$ kaikilla $i, j \in \mathbb{Z}$, eli ketju X on kääntyvä. Täten X on satunnaiskävely verkolla $G = (\mathbb{Z}, E)$, jossa sivujen joukko E sisältää kaikki sellaiset sivut $\{u, v\}$, joille $p_{u,v} > 0$.

Huomautus 2.24. Jos esimerkissä 2.23 jokaisella kierroksella euron voittamisen todennäköisyys p ja euron häviämisen todennäköisyys q ovat samat, eli $p = \frac{1}{2} = q$, niin satunnaiskävely on symmetrinen.

Käsitellään seuraavaksi harmonisia funktioita. Olkoon tätä varten Z Markovin ketju joukossa V siirtymämatriisilla P, ja oletetaan, että Z on kääntyvä funktion $\pi : V \to (0, \infty)$ suhteen.

Määritelmä 2.25 (Harmoninen funktio)**.** Olkoon $U \subseteq V$. Funktio $f : V \to \mathbb{R}$ on harmoninen joukossa U, jos

$$f(u) = \sum_{v \in V} p_{u,v} f(v)$$

kaikilla $u \in U$.

Harmonisuus voidaan määritellä myös ilman Markovin ketjua Z. Tällöin käytetään määritelmää 2.25 niin, että siirtymämatriisin P alkiot $p_{u,v}$ korvataan joillain muilla luvuilla. Eräs yleinen esimerkki ketjun Z harmonisista funktioista ovat niin kutsutut *osumistodennäköisyydet*. Niiden määrittelemiseen tarvitaan *ensimmäisiä osumishetkiä*.

Määritelmä 2.26 (Ensimmäinen osumishetki)**.** Olkoon $U \subseteq V$. Tällöin $T_U = \inf\{n \geq 0 : Z_n \in U\}$ on ensimmäinen kerta, kun ketju Z osuu joukkoon U. Lisäksi merkitään $T_u = T_{\{u\}}$ kaikilla $u \in V$, jolloin T_u on ensimmäinen kerta, kun ketju Z osuu kärkeen u.

Nyt voidaan määritellä ketjun Z osumistodennäköisyydet. Olkoot $U \subseteq V$, $W = V \setminus U$ ja $s \in U$. Olkoon $g(u)$ todennäköisyys, että alkiosta u aloitettu Markovin ketju Z osuu alkioon s ennen kuin se osuu joukkoon W, kaikilla $u \in V$. Eli

$$g(u) = \mathbb{P}(Z_n = s \ \text{ jollekin } \ n < T_W \mid Z_0 = u)$$

kaikilla $u \in V$, missä T_W on ensimmäinen kerta, kun ketju Z osuu joukkoon W. Seuraavaksi osoitetaan, että osumistodennäköisyys g on harmoninen joukossa $U \setminus \{s\}$.

Lause 2.27. *Funktio g on harmoninen joukossa $U \setminus \{s\}$.*

Todistus. Olkoon $u \in U \setminus \{s\}$. Tällöin Markovin ehdon nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
g(u) &= \mathbb{P}(Z_n = s \ \text{ jollekin } \ n < T_W \mid Z_0 = u) \\
&= \sum_{v \in V} \mathbb{P}(Z_1 = v \mid Z_0 = u)\mathbb{P}(Z_n = s \ \text{ jollekin } \ n < T_W \mid Z_0 = u, Z_1 = v) \\
&= \sum_{v \in V} p_{u,v}\mathbb{P}(Z_n = s \ \text{ jollekin } \ n < T_W \mid Z_0 = v) \\
&= \sum_{v \in V} p_{u,v} g(v).
\end{aligned}$$

□

Huomautus 2.28. Funktiolle g pätee selvästi $g(s) = 1$ ja $g(v) = 0$ kaikilla $v \in W$. Näitä arvoja kutsutaan funktion g *reunaehdoiksi*, sillä ne kertovat, mitä arvoja funktio g saa harmonisuuden ulkopuolella.

Jatketaan harmonisten funktioiden käsittelyä yleisellä tasolla. Seuraavaksi osoitetaan, että harmoninen funktio on yksikäsitteinen annetuilla reunaehdoilla.

Lause 2.29. *Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen tai numeroituvasti ääretön yhtenäinen verkko, ja olkoon U joukon V äärellinen aito osajoukko. Olkoot $f, g : V \to \mathbb{R}$ harmonisia funktioita joukossa U, joilla on samat reunaehdot, eli joille $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in V \setminus U$. Tällöin $f \equiv g$.*

Lauseen 2.29 todistamiseksi tarvitaan seuraavaa tulosta, jonka todistus pohjautuu lähteeseen [9, s.20].

Lause 2.30 (Maksimiperiaate)**.** *Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen tai numeroituvasti ääretön verkko. Olkoon $\hat{G} = (U, \hat{E})$ verkon G yhtenäinen aliverkko, ja määritellään*

$$\Delta U = \{v \in V \setminus U : v \sim u \text{ jollekin } u \in U\}.$$

Olkoon $f : V \to \mathbb{R}$ harmoninen funktio joukossa U, joka saavuttaa supremuminsa ainakin jossain pisteessä $x_0 \in U$. Tällöin f on vakio joukossa $U \cup \Delta U$, missä se saa arvon $\sup_{v \in V} f(v)$.

Todistus. Olkoon $S = \{x \in V : f(x) = \sup_{v \in V} f(v)\}$. Olkoon $x \in U \cap S$, jolloin funktion f harmonisuuden ja tiedon $\sum_{y \in V} p_{x,y} = 1$ nojalla saadaan

$$\sum_{y \in V} p_{x,y} f(y) = f(x) = f(x) \sum_{y \in V} p_{x,y} = \sum_{y \in V} p_{x,y} f(x),$$

eli

$$\sum_{y \in V} p_{x,y}[f(x) - f(y)] = 0. \tag{2.6}$$

Koska $f(x) = \sup_{v \in V} f(v)$, niin $f(x) - f(y) \geq 0$ kaikilla $y \in V$ ja täten myös $p_{x,y}[f(x) - f(y)] \geq 0$ kaikilla $y \in V$. Siispä yhtälön (2.6) nojalla täytyy olla $p_{x,y}[f(x) - f(y)] = 0$ kaikilla $y \in V$. Nyt jos $y \in V$ siten, että $y \sim x$, niin $p_{x,y} > 0$ ja on oltava $f(x) - f(y) = 0$, eli $f(y) = f(x) = \sup_{v \in V} f(v)$. Nyt siis väite pätee kaikille kärjen x_0 naapureille, ja edelleen se saadaan pätemään kaikille kärjen x_0 joukossa U olevien naapureiden naapureille. Koska aliverkko $\hat{G}$ on yhtenäinen, saadaan edelleen väite pätemään koko joukossa $U \cup \Delta U$. $\square$

Nyt voidaan todistaa lause 2.29. Todistuksessa on käytetty apuna lähdettä [9, s.20].

Lauseen 2.29 todistus. Olkoon $h(x) = f(x) - g(x)$ kaikilla $x \in V$. Koska f ja g ovat harmonisia joukossa U, niin selvästi myös h on harmoninen joukossa U. Osoitetaan, että $h(x) \leq 0$ kaikilla $x \in V$. Koska U on joukon V aito osajoukko, niin $V \setminus U \neq \emptyset$. Tiedetään, että $h(x) = 0$ kaikilla $x \in V \setminus U$. Koska lisäksi U on äärellinen, niin tiedetään, että h saavuttaa supremuminsa jossain pisteessä $x_0 \in V$. Jos $x_0 \in V \setminus U$, niin

$$h(x) \leq \sup_{x \in V} h(x) = h(x_0) = 0$$

kaikilla $x \in V$.

Olkoon sitten $x_0 \in U$. Olkoon $\hat{G} = (U, \hat{E})$ verkon G aliverkko. Jaetaan aliverkko $\hat{G}$ komponentteihin, joita on vain äärellinen määrä, sillä U on äärellinen. Merkitään näitä komponentteja $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \ldots, \hat{G}_n$, missä $\hat{G}_i = (U_i, \hat{E}_i)$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Olkoon nyt $x_0 \in U_i$ mille tahansa $i = 1, 2, \ldots, n$. Koska h on harmoninen joukossa U, se on harmoninen myös joukossa U_i. Komponentti $\hat{G}_i$ on verkon $\hat{G}$ yhtenäinen aliverkko, ja koska $\hat{G}$ on verkon G aliverkko, $\hat{G}_i$ on myös verkon G yhtenäinen aliverkko. Koska aliverkon $\hat{G}$ komponentit ovat keskenään erillisiä, mutta verkko G on yhtenäinen, niin joukossa $V \setminus U$ on oltava kärkiä, jotka yhdistävät näitä komponentteja. Siispä on olemassa myös $y_0 \in V \setminus U$ siten, että $y_0 \sim u$ jollekin $u \in U_i$. Nyt lauseen 2.30 nojalla

$$h(x) \leq \sup_{x \in V} h(x) = h(x_0) = h(y_0) = 0$$

kaikilla $x \in V$.

Täten $h(x) \leq 0$ kaikilla $x \in V$, eli $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in V$. Kun tehdään täysin sama päättely uudestaan funktiolle $\hat{h}(x) = g(x) - f(x)$, saadaan myös $g(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in V$. Täten $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in V$. $\square$

3 Sähköverkot

Tämän luvun aiheena ovat sähköverkot ja niihin liittyen erityisesti virtaukset ja potentiaali sekä energia ja efektiivinen resistanssi. Aluksi määritellään sähköverkko verkkojen ja painofunktioiden avulla. Sen jälkeen ensimmäisessä alaluvussa määritellään sähköverkon virtaukset sekä potentiaali. Lisäksi esitellään Kirchhoffin lait ja Ohmin laki. Lopuksi todistetaan vielä eräs tärkeä ja mielenkiintoinen tulos virtauksiin ja Kirchhoffin lakeihin liittyen ensimmäisessä luvussa esiteltyjen virittäjäpuiden avulla. Toinen alaluku aloitetaan virtauksen energian määritelmällä. Lisäksi määritellään efektiivinen konduktanssi ja efektiivinen resistanssi sekä esitellään sarjaankytkentä- ja rinnankytkentälait, joiden avulla voidaan laskea efektiivisiä resistansseja. Koko luvun sisältö pohjautuu pitkälti lähteeseen [5, s.3–10].

Aloitetaan siis määrittelemällä sähköverkko. Matemaattisesti sähköverkko on vain painotettu verkko, jossa sivujen painoja kutsutaankin konduktansseiksi ja niiden käänteisarvoja resistansseiksi [9]. Olkoon $G = (V, E)$ yksinkertainen ja yhtenäinen äärellinen verkko, ja olkoon $w : E \to (0, \infty)$ sivujen painofunktio, jolle sivun $e \in E$ arvoa merkitään w_e. Nyt sähköverkko määritellään olemaan verkko G, jossa sivulla $e \in E$ on *konduktanssi* w_e tai yhtäpitävästi *resistanssi* w_e^{-1}. Konduktanssi on suure, joka ilmaisee johtimen, tässä tapauksessa verkon G sivun, kyvyn johtaa sähkövirtaa ja resistanssi on konduktanssin käänteissuure, joka ilmaisee johtimen kyvyn vastustaa sähkövirtaa.

3.1 Virtaukset ja potentiaali

Tässä alaluvussa käsitellään sähköverkon virtauksia ja potentiaalia aloittaen virtauksista. Olkoot $s, t \in V$ erillisiä kärkiä, ja kutsutaan joukkoa $\{s, t\}$ *lähdejoukoksi*. Jokaisella sivulla $\{u, v\} \in E$ on *virta* kärjestä u kärkeen v, jota merkitään $j_{u,v}$. Verkon *virtaus* kärjestä s kärkeen t on näiden virtojen muodostama vektori.

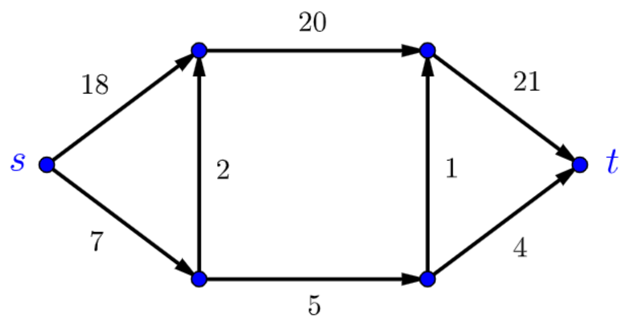
Määritelmä 3.1 (s/t-virtaus)**.** Olkoot $s, t \in V$, $s \neq t$. Tällöin s/t-virtaus on vektori $j = (j_{u,v})_{u,v \in V, u \neq v}$, jolle

1. $j_{u,v} = -j_{v,u}$
2. $j_{u,v} = 0$ silloin, kun $u \nsim v$
3. pätee Kirchhoffin virtalaki 3.2.

3.2. Kirchhoffin virtalaki. Kokonaisvirta, joka virtaa mistä tahansa muusta kärjestä kuin lähdejoukosta, on nolla, eli kaikilla $u \in V \setminus \{s, t\}$

$$\sum_{v \in V} j_{u,v} = 0.$$

Kärkiä s ja t kutsutaan s/t-virtauksen *lähteeksi* ja *nieluksi*, ja usein s/t-virtauksen sijaan puhutaan vain virtauksesta. Määritelmän 3.1 ensimmäinen ehto tarkoittaa sitä, että virta kärjestä v kärkeen u yhtä suuri kuin virta kärjestä u kärkeen v, mutta vastakkaismerkkinen. Toinen ehto vaatii, ettei sellaisten kärkien välillä ole ollenkaan virtaa, jotka eivät ole naapureita, eli joita ei yhdistä sivu. Kolmas ehto takaa sen, että mihin tahansa muuhun kärkeen kuin lähdejoukkoon tuleva virta myös lähtee sieltä. Kuvassa 3.1 on havainnollistettu erästä s/t-virtausta.



Kuva 3.1: Esimerkki s/t-virtauksesta.

Määritellään jokaiselle virtaukselle j kärjen u *kokonaisvirta*

$$J_u = \sum_{v \in V} j_{u,v}$$

kaikilla $u \in V$. Kirchhoffin virtalain nojalla $J_u = 0$ kaikilla $u \notin \{s, t\}$, minkä nojalla saadaan

$$J_s + J_t = \sum_{u \in V} J_u = \sum_{u,v \in V} j_{u,v} = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V} (j_{u,v} + j_{v,u}) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V} (j_{u,v} - j_{u,v}) = 0,$$

eli $J_s = -J_t$. Tämä tarkoittaa, että lähteestä s lähtenyt kokonaisvirta on yhtä suuri kuin kokonaisvirta, joka saapuu nieluun t. Esimerkiksi kuvan 3.1 virtaukselle pätee $J_s = 18 + 7 = 25$ ja $J_t = -21 - 4 = -25$, kuten pitikin. Määritellään, että virtauksen j *koko* on $|J_s|$. Jos $|J_s| = 1$, virtausta j

kutsutaan *yksikkövirtaukseksi.* Kuvan 3.1 virtauksen koko esimerkiksi on 25. Yleensä oletetaan, että $J_s > 0$, mikä takaa sen, että virtaus kulkee nimenomaan lähteestä s nieluun t.

Seuraavaksi käsitellään potentiaalia. Määritellään aluksi potentiaaliero, minkä jälkeen todistetaan, että potentiaalierolla on olemassa potentiaalifunktio, joka määrittää sen arvot.

Määritelmä 3.3 (Potentiaaliero)**.** Funktio $\phi_{u,v}$ on sivun $\{u,v\} \in E$ potentiaaliero kärjestä u kärkeen v, jos se toteuttaa Kirchhoffin potentiaalilain 3.4.

3.4. Kirchhoffin potentiaalilaki. Kumulatiivinen potentiaaliero minkä tahansa verkon G kierroksen yli on nolla, eli mille tahansa verkon G kierrokselle $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1$ pätee

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_{v_k,v_{k+1}} = 0.$$

Kirchhoffin potentiaalilaista seuraa, että $\phi_{u,v} = -\phi_{v,u}$ kaikilla $\{u,v\} \in E$, sillä jos otetaan kaksikärkinen kierros $v_1, v_2, v_3 = v_1$, niin Kirchhoffin potentiaalilain nojalla $\phi_{v_1,v_2} + \phi_{v_2,v_1} = 0$, eli $\phi_{v_1,v_2} = -\phi_{v_2,v_1}$. Kirchhoffin potentiaalilain avulla voidaan myös todistaa seuraava tulos.

Lause 3.5. *Funktio $\phi_{u,v}$ on potentiaaliero jos ja vain jos on olemassa funktio $\phi : V \to \mathbb{R}$ siten, että $\phi_{u,v} = \phi(v) - \phi(u)$ kaikilla $\{u,v\} \in E$.*

Todistus. Todistetaan lauseen molemmat suunnat erikseen.

" $\Leftarrow$ " Olkoon $\phi : V \to \mathbb{R}$ siten, että $\phi_{u,v} = \phi(v) - \phi(u)$ kaikilla $\{u,v\} \in E$. Olkoon $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1$ verkon G kierros. Nyt

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_{v_k,v_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} [\phi(v_{k+1}) - \phi(v_k)] = \phi(v_{n+1}) - \phi(v_1) = \phi(v_1) - \phi(v_1) = 0,$$

joten $\phi_{u,v}$ on potentiaaliero.

" $\Rightarrow$ " Olkoon $\phi_{u,v}$ potentiaaliero. Olkoon $\phi : V \to \mathbb{R}$ siten, että $\phi(s) = 0$ ja $\phi(v) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{v_k,v_{k+1}}$ kaikilla $v \in V \setminus \{s\}$, missä $s = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v$ on polku kärjestä s kärkeen v.

Olkoon $\{u,v\} \in E$. Olkoot $s = u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1} = u$ polku kärjestä s kärkeen u ja $s = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v$ polku kärjestä s kärkeen v. Oletetaan aluksi, että näiden polkujen ainoa yhteinen kärki on s. Tällöin $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}, u_{m+1}, u_m, \ldots, u_1$ on kierros, joka alkaa kärjestä s, kulkee kärjen v kautta kärkeen u ja palaa takaisin kärkeen s. Nyt Kirchhoffin potentiaalilain nojalla

$$\begin{aligned}\phi(v) - \phi(u) &= \sum_{k=1}^{n} \phi_{v_k,v_{k+1}} - \sum_{k=1}^{m} \phi_{u_k,u_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \phi_{v_k,v_{k+1}} + \sum_{k=1}^{m} \phi_{u_{k+1},u_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \phi_{v_k,v_{k+1}} + \phi_{v_{n+1},u_{m+1}} + \sum_{k=1}^{m} \phi_{u_{k+1},u_k} - \phi_{v_{n+1},u_{m+1}} \\ &= 0 - \phi_{v_{n+1},u_{m+1}} = \phi_{u_{m+1},v_{n+1}} = \phi_{u,v}.\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että poluilla kärjestä s kärkeen u ja kärjestä s kärkeen v on muitakin yhteisiä kärkiä kuin vain s. Lähdetään laskemaan erotusta $\phi(v) - \phi(u)$ summien avulla samalla tavalla kuin edellä. Jos polut sisältävät samoja sivuja, erotusta laskettaessa näiden sivujen potentiaalierot kumoavat toisensa. Lisäksi polut voivat yhdessä muodostaa pienempiä kierroksia, joille erotuksessa $\phi(v) - \phi(u)$ potentiaalierojen summa on Kirchhoffin potentiaalilain nojalla nolla.

Täten erotuksesta $\phi(v) - \phi(u)$ jää jäljelle joko suoraan sivun $\{u, v\}$ potentiaaliero $\phi_{u,v}$ tai sitten sellaisten sivujen potentiaalierojen summa, jotka muodostaisivat kierroksen, jos lisättäisiin sivu $\{u, v\}$. Jälkimmäisessä tapauksessa toimitaan kuten aiemmassa tilanteessa, jossa kärki s oli polkujen ainoa yhteinen kärki, eli lisätään erotukseen $\phi(v) - \phi(u)$ sivun $\{u, v\}$ potentiaaliero $\phi_{u,v}$ ja samalla vähennetään se. Tällöin erotuksessa $\phi(v) - \phi(u)$ tämän uuden kierroksen potentiaalierojen summa on Kirchhoffin potentiaalilain nojalla nolla, ja jäljelle jää vain $\phi_{u,v}$. $\square$

Funktiota $\phi : V \to \mathbb{R}$ kutsutaan *potentiaalifunktioksi*, ja se määrittää potentiaalin kussakin verkon kärjessä. Vaikka potentiaaliero $\phi_{u,v}$ on alun perin määritelty vain verkon sivuille, sen käsitettä voidaan laajentaa siten, että potentiaalifunktion ϕ arvot kärjissä s ja t määrittävät kokonaispotentiaalieron mille tahansa virtaukselle i. Tässä tapauksessa virtauksen i potentiaaliero on $\phi(t) - \phi(s)$.

Seuraavaksi esitellään yhtälö, joka pätee mille tahansa funktiolle $\psi : V \to \mathbb{R}$, mutta jota käytetään myöhemmin nimenomaan potentiaalifunktiolle.

Propositio 3.6. *Olkoon $\psi : V \to \mathbb{R}$, ja olkoon j s/t-virtaus. Tällöin*

$$[\psi(t) - \psi(s)]J_s = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V} [\psi(v) - \psi(u)] j_{u,v}.$$

Todistus. Virtauksen ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}
\sum_{u,v\in V}[\psi(v)-\psi(u)]j_{u,v} &= \sum_{u,v\in V}\psi(v)j_{u,v} - \sum_{u,v\in V}\psi(u)j_{u,v} \\
&= \sum_{v\in V}\psi(v)\sum_{u\in V}j_{u,v} - \sum_{u\in V}\psi(u)\sum_{v\in V}j_{u,v} \\
&= \sum_{v\in V}\psi(v)\sum_{u\in V}(-j_{v,u}) - \sum_{u\in V}\psi(u)\sum_{v\in V}j_{u,v} \\
&= -\sum_{v\in V}\psi(v)J_v - \sum_{u\in V}\psi(u)J_u \\
&= -2\sum_{v\in V}\psi(v)J_v \\
&= -2[\psi(s)J_s + \psi(t)J_t] \\
&= 2[-\psi(s)J_s + \psi(t)J_s] \\
&= 2[\psi(t) - \psi(s)]J_s,
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

Nyt virtaus j toteuttaa Kirchhoffin lait, jos se toteuttaa Ohmin lain 3.7 jollekin potentiaalifunktiolle ϕ.

3.7. Ohmin laki. Mille tahansa sivulle $\{u,v\} \in E$ pätee

$$j_{u,v} = w_{u,v}\phi_{u,v}.$$

Potentiaalifunktio on harmoninen joukossa $V \setminus \{s,t\}$, jos se toteuttaa Ohmin lain.

Lause 3.8. *Ohmin lain toteuttava potentiaalifunktio on harmoninen joukossa $V \setminus \{s,t\}$.*

Todistus. Olkoon $u \in V \setminus \{s,t\}$. Ohmin lain ja Kirchhoffin virtalain nojalla

$$\sum_{v\in V} w_{u,v}[\phi(v)-\phi(u)] = \sum_{v\in V} w_{u,v}\phi_{u,v} = \sum_{v\in V} j_{u,v} = 0,$$

mistä saadaan

$$\phi(u) = \frac{\sum_{v\in V} w_{u,v}\phi(v)}{\sum_{v\in V} w_{u,v}} = \sum_{v\in V}\frac{w_{u,v}}{W_u}\phi(v).$$

Siispä ϕ on harmoninen joukossa $V \setminus \{s,t\}$. □

Seuraavaksi esitellään yhteys satunnaiskävelyn ja sähköverkkojen välillä osoittamalla, että potentiaalifunktiot voidaan lausua satunnaiskävelyn osumistodennäköisyyksien avulla. Tarkoituksena on näyttää, että jos ϕ on Ohmin lain toteuttava potentiaalifunktio, jolle $\phi(s) = 0$ ja $\phi(t) = 1$, niin tällöin minkä tahansa kärjen $u \in V$ potentiaali $\phi(u)$ on yhtä suuri kuin todennäköisyys, että kärjestä u alkava satunnaiskävely osuu kärkeen t ennen kuin se osuu kärkeen s. [9, s.6]

Lause 3.9. *Olkoot $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ satunnaiskävely ja $\phi : V \to \mathbb{R}$ Ohmin lain toteuttava potentiaalifunktio, jolle $\phi(s) = 0$ ja $\phi(t) = 1$. Tällöin*

$$\phi(u) = \mathbb{P}(Z_n = t \text{ jollekin } n < T_s \mid Z_0 = u)$$

kaikilla $u \in V$.

Todistus. Olkoon $g(u) = \mathbb{P}(Z_n = t \text{ jollekin } n < T_s \mid Z_0 = u)$ kaikilla $u \in V$. Täytyy siis osoittaa, että $\phi(u) = g(u)$ kaikilla $u \in V$. Lauseesta 2.27 seuraa, että funktio g on harmoninen joukossa $V \setminus \{s, t\}$ reunaehdoilla $g(s) = 0$ ja $g(t) = 1$. Myös Ohmin lain toteuttava potentiaalifunktio ϕ on harmoninen joukossa $V \setminus \{s, t\}$ lauseen 3.8 nojalla. Koska lisäksi $\phi(s) = 0$ ja $\phi(t) = 1$, niin nyt lauseen 2.29 nojalla $\phi(u) = g(u)$ kaikilla $u \in V$. □

Ohmin lain nojalla virralla $j_{u,v}$ on sama etumerkki kuin potentiaalierolla $\phi_{u,v}$, mikä tarkoittaa, että "virta kulkee ylämäkeen". Lisäksi Ohmin laki mahdollistaa sen, että potentiaalierot voidaan lausua virtojen ja konduktanssien avulla. Siispä Kirchhoffin potentiaalilaki voidaan lausua muodossa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{j_{v_k, v_{k+1}}}{w_{v_k, v_{k+1}}} = 0 \tag{3.1}$$

mille tahansa verkon G kierrokselle $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1$. Nyt kun Kirchhoffin potentiaalilaki on kirjoitettu virtojen avulla, molemmat Kirchhoffin lait ovat lineaarisia virtojen suhteen. Tästä seuraa, että Kirchhoffin lakien ratkaisujen summa on myös niiden ratkaisu.

Lause 3.10 (Superpositioperiaate)**.** *Jos i_1 ja i_2 ovat ratkaisuja Kirchhoffin laeille samoilla lähteellä ja nielulla, niin silloin myös summa $i_1 + i_2$ on niiden ratkaisu.*

Todistus. Seuraa suoraan lineaarisuudesta. □

Kirchhoffin lait toteuttava virtaus on yksikäsitteinen annetulla koolla.

Lause 3.11. *Jos i_1 ja i_2 ovat ratkaisuja Kirchhoffin laeille samoilla lähteellä, nielulla ja koolla, niin tällöin $i_1 = i_2$.*

Todistus. Koska i_2 on Kirchhoffin lakien ratkaisu, niin selvästi myös $-i_2$ on niiden ratkaisu. Kun merkitään $j = i_1 - i_2$, niin lauseen 3.10 nojalla j on Kirchhoffin lakien ratkaisu. Koska i_1 ja i_2 ovat ratkaisuja samalla koolla, lähtee molemmissa virtauksissa lähteestä s yhtä paljon virtaa. Täten myös molempien virtausten nieluun t tulee yhtä paljon virtaa. Siispä koska $j = i_1 - i_2$, ei virtaukseen j tule virtaa, eikä sitä myöskään lähde sieltä. Täten $J_v = 0$ kaikilla $v \in V$.

Osoitetaan siis, että $j_{u,v} = 0$ kaikilla $u, v \in V$. Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa sivu $\{u_1, u_2\} \in E$, jolle $j_{u_1,u_2} > 0$. Nyt Kirchhoffin virtalain nojalla tiedetään, että on olemassa $u_3 \in V$ siten, että $j_{u_2,u_3} > 0$. Koska joukon V koko on äärellinen, $|V| < \infty$, löytyy iteraation nojalla kierros $u_l, u_{l+1}, \ldots, u_m, u_{m+1} = u_l$, jossa $j_{u_k,u_{k+1}} > 0$ kaikilla $k = l, l+1, \ldots, m$. Ohmin lain nojalla potentiaalifunktiolle $\phi : V \to \mathbb{R}$ pätee

$$j_{u_k,u_{k+1}} = w_{u_k,u_{k+1}} \phi_{u_k,u_{k+1}} = w_{u_k,u_{k+1}} [\phi(u_{k+1}) - \phi(u_k)]$$

kaikilla $k = l, l+1, \ldots, m$. Siispä koska $j_{u_k,u_{k+1}} > 0$ kaikilla $k = l, l+1, \ldots, m$, saadaan $\phi(u_k) < \phi(u_{k+1})$ kaikilla $k = l, l+1, \ldots, m$. Siis

$$\phi(u_l) < \phi(u_{l+1}) < \cdots < \phi(u_m) < \phi(u_{m+1}) = \phi(u_l),$$

mikä on ristiriita. Täten $j_{u,v} = 0$ kaikilla $u, v \in V$, eli on oltava $i_1 = i_2$. $\square$

Siispä lauseen 3.11 nojalla annetuilla lähteellä, nielulla ja koolla voi olla korkeintaan yksi ratkaisu, joka toteuttaa molemmat Kirchhoffin lait. Seuraavaksi tullaan osoittamaan, että tällainen ratkaisu on myöskin aina olemassa. Tehdään tämä todistamalla, että eräs virittäjäpuiden avulla määriteltävissä oleva yksikkövirtaus toteuttaa Kirchhoffin lait. Tämä riittää, koska jos annettu koko onkin jokin muu kuin yksi, niin yksikkövirtaukselle voidaan antaa kertoimeksi tämä kyseinen koko, jolloin saadaan halutun kokoinen virtaus, joka edelleen toteuttaa Kirchhoffin lait. Todistus tehdään aluksi yksinkertaisemmassa tilanteessa, jossa kaikki konduktanssit ovat ykkösiä, eli $w_e = 1$ kaikilla $e \in E$. Tämä lähestymistapa auttaa lukijaa hahmottamaan todistuksen rakenteen ja sen eri osat. Sen jälkeen todistus tehdään yleisten konduktanssien tilanteessa, jossa $w_e \in (0, \infty)$ kaikilla $e \in E$, käyttäen samankaltaisia tekniikoita kuin tapauksessa $w_e = 1$.

Olkoon siis aluksi $w_e = 1$ kaikilla $e \in E$. Jotta tämä Kirchhoffin lait toteuttava yksikäsitteinen ratkaisu voitaisiin määritellä virittäjäpuiden avulla, tarvitaan vielä virittäjäpuihin ja niiden ominaisuuksiin liittyviä merkintöjä. Olkoot $\mathcal{T}$ kaikkien verkon G virittäjäpuiden joukko ja $N = |\mathcal{T}|$ niiden lukumäärä. Lauseen 1.15 nojalla $N \geq 1$. Tiedetään, että jokaisella verkon

G virittäjäpuulla on polku kärjestä s kärkeen t. Kutsutaan tätä polkua s/t-poluksi. Jokaisen virittäjäpuun s/t-polku on yksikäsitteinen, sillä koska puissa ei ole kierroksia, niin kärjestä s kärkeen t päästään vain yhtä reittiä. Olkoon $\Pi(s, a, b, t)$ virittäjäpuun ominaisuus, joka kertoo, että virittäjäpuun yksikäsitteinen s/t-polku kulkee sivun $\{a, b\}$ kautta suunnassa kärjestä a kärkeen b, kaikilla $\{a, b\} \in E$. Olkoot $\mathcal{N}(s, a, b, t)$ niiden verkon G virittäjäpuiden joukko, joilla on ominaisuus $\Pi(s, a, b, t)$ ja $N(s, a, b, t) = |\mathcal{N}(s, a, b, t)|$ kyseisten virittäjäpuiden lukumäärä. Nyt voidaan määritellä Kirchhoffin lait toteuttava yksikäsitteinen yksikkövirtaus virittäjäpuiden lukumäärän avulla, kun $w_e = 1$ kaikilla $e \in E$.

Lause 3.12. *Jos $w_e = 1$ kaikilla $e \in E$, niin funktio*

$$i_{a,b} = \frac{1}{N}[N(s, a, b, t) - N(s, b, a, t)]$$

kaikilla $\{a, b\} \in E$ määrittelee yksikkövirtauksen lähteestä s nieluun t, joka toteuttaa Kirchhoffin lait.

Todistus. Olkoon $w_e = 1$ kaikilla $e \in E$. Aloitetaan osoittamalla, että $i_{a,b} = \frac{1}{N}[N(s, a, b, t) - N(s, b, a, t)]$ määrittelee virtauksen lähteestä s nieluun t. Ensimmäisenä näytetään, että $i_{a,b} = -i_{b,a}$. Se on totta, sillä

$$-i_{b,a} = -\frac{1}{N}[N(s, b, a, t) - N(s, a, b, t)] = \frac{1}{N}[N(s, a, b, t) - N(s, b, a, t)] = i_{a,b}.$$

Seuraavaksi näytetään, että $i_{a,b} = 0$, kun $a \not\sim b$. Olkoot $a, b \in V$ siten, että $a \not\sim b$. Tällöin

$$i_{a,b} = \frac{1}{N}[N(s, a, b, t) - N(s, b, a, t)] = \frac{1}{N}(0 - 0) = 0.$$

Osoitetaan vielä, että $i_{a,b}$ toteuttaa s/t-virtauksen määritelmän kolmannen ehdon, joka on sama kuin Kirchhoffin virtalaki. Osoitetaan siis, että $\sum_{v \in V} i_{u,v} = 0$ kaikilla $u \in V \setminus \{s, t\}$. Olkoon $\hat{T} \in \mathcal{T}$. Koska $i_{a,b}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$i_{a,b} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{N}[\mathbb{1}_{\mathcal{N}(s,a,b,t)}(T) - \mathbb{1}_{\mathcal{N}(s,b,a,t)}(T)],$$

niin virittäjäpuun $\hat{T}$ osuus summasta $i_{a,b}$ riippuu virittäjäpuun $\hat{T}$ s/t-polusta. Merkitään tätä s/t-polkua π. Jos polku π kulkee sivua $\{a, b\}$ pitkin kärjestä a kärkeen b, on virittäjäpuun $\hat{T}$ osuus $\frac{1}{N}$, jos π kulkee sivua $\{a, b\}$ pitkin kärjestä b kärkeen a, on osuus $-\frac{1}{N}$, ja jos π ei sisällä ollenkaan sivua $\{a, b\}$, on osuus 0.

Olkoon nyt $u \in V \setminus \{s,t\}$. Merkitään $I_u = \sum_{v \in V} i_{u,v}$, jolloin riittää osoittaa, että $I_u = 0$. Nyt I_u voidaan kirjoittaa muodossa

$$I_u = \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in V} \frac{1}{N} [\mathbb{1}_{\mathcal{N}(s,u,v,t)}(T) - \mathbb{1}_{\mathcal{N}(s,v,u,t)}(T)].$$

Siispä jos $u \in \pi$, niin virittäjäpuun $\hat{T}$ osuus summasta I_u on $-\frac{1}{N} + \frac{1}{N} = 0$, sillä koska $u \neq s,t$, niin polku π tulee kärkeen u jotain sivua $\{a,u\}$ pitkin ja lähtee sieltä jotain sivua $\{u,b\}$ pitkin. Jos taas $u \notin \pi$, niin virittäjäpuun $\hat{T}$ osuus summasta I_u on 0. Kun summataan yli kaikkien virittäjäpuiden, saadaan $I_u = 0$, kuten haluttiin. Siispä $i_{a,b}$ on s/t-virtaus.

Osoitetaan seuraavaksi, että $i_{a,b}$ toteuttaa Kirchhoffin potentiaalilain. Tehdään tämä osoittamalla, että $i_{a,b}$ toteuttaa Kirchhoffin potentiaalilain muodossa (3.1). Eli koska $w_e = 1$ kaikilla $e \in E$, niin riittää osoittaa, että

$$\sum_{j=1}^{n} i_{v_j,v_{j+1}} = 0 \tag{3.2}$$

kaikille verkon G kierroksille $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1$. Olkoon $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $v_{n+1} = v_1$ verkon G kierros, ja merkitään sitä C. Käytetään tässä todistuksessa virittäjäpuiden sijaan pensaita. Olkoot T_s ja T_t erillisiä puita siten, että $s \in T_s$, $t \in T_t$ ja niiden yhdiste sisältää kaikki verkon G kärjet. Tällöin paria (T_s, T_t) kutsutaan verkon G *s/t-pensaaksi*. Jatkossa s/t-pensaan sijaan puhutaan vain pensaasta.

Olkoon $\mathcal{B}$ kaikkien verkon G pensaiden joukko, ja olkoon $\mathcal{B}(s,a,b,t)$ kaikkien niiden pensaiden joukko, joille $a \in T_s$ ja $b \in T_t$. Joukkojen $\mathcal{B}(s,a,b,t)$ ja $\mathcal{N}(s,a,b,t)$ välillä on bijektiivinen kuvaus, sillä jos pensaaseen $B \in \mathcal{B}(s,a,b,t)$ lisätään sivu $\{a,b\}$, saadaan joukon $\mathcal{N}(s,a,b,t)$ yksikäsitteinen alkio, ja jos virittäjäpuusta $T \in \mathcal{N}(s,a,b,t)$ poistetaan kyseinen sivu, saadaan joukon $\mathcal{B}(s,a,b,t)$ yksikäsitteinen alkio.

Koska $i_{a,b}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$i_{a,b} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{N} [\mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,a,b,t)}(B) - \mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,b,a,t)}(B)],$$

niin summalle (3.2) pätee

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} i_{v_j,v_{j+1}} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{N} [\mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,v_j,v_{j+1},t)}(B) - \mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,v_{j+1},v_j,t)}(B)] \\
&= \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{N} \left[\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,v_j,v_{j+1},t)}(B) - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,v_{j+1},v_j,t)}(B) \right].
\end{aligned}$$

Olkoon $\hat{B} = (\hat{T}_s, \hat{T}_t) \in \mathcal{B}$. Nyt pensaan $\hat{B}$ osuus summasta (3.2) on $\frac{1}{N}(F_+ - F_-)$, missä

$$F_+ = \left| \left\{ \{v_j, v_{j+1}\} \in C : 1 \leq j \leq n, v_j \in \hat{T}_s, v_{j+1} \in \hat{T}_t \right\} \right|$$

on niiden kierroksen C parien lukumäärä, joille ensimmäinen kärki kuuluu puuhun $\hat{T}_s$ ja toinen kärki puuhun $\hat{T}_t$, ja

$$F_- = \left| \left\{ \{v_j, v_{j+1}\} \in C : 1 \leq j \leq n, v_{j+1} \in \hat{T}_s, v_j \in \hat{T}_t \right\} \right|$$

on niiden kierroksen C parien lukumäärä, joille ensimmäinen kärki kuuluu puuhun $\hat{T}_t$ ja toinen kärki puuhun $\hat{T}_s$. Koska C on kierros, eli polku joka päättyy samaan kärkeen kuin mistä se alkaa, on oltava $F_+ = F_-$, sillä jos $v_1 \in \hat{T}_s$, niin aina kun kierros C siirtyy puusta $\hat{T}_s$ puuhun $\hat{T}_t$, täytyy olla vastaava siirtymä puusta $\hat{T}_t$ takaisin puuhun $\hat{T}_s$, jotta kierros voisi palata alkupisteeseensä. Sama pätee myös, jos $v_1 \in \hat{T}_t$. Eli pensaan $\hat{B}$ osuus summasta (3.2) on $\frac{1}{N}(F_+ - F_-) = 0$. Kun summataan yli kaikkien pensaiden, tulee summasta (3.2) nolla kuten haluttiin.

Todistetaan vielä lopuksi, että $i_{a,b}$ määrittelee nimenomaan yksikkövirtauksen, eli $I_s = 1$. Tiedetään, että jokaisella verkon G virittäjäpuulla T on olemassa yksikäsitteinen kärki $b \in V$ siten, että virittäjäpuun T s/t-polku kulkee kärjestä s kärkeen b sivua $\{s, b\}$ pitkin. Siispä

$$\sum_{b \in V} N(s, s, b, t) = N \quad \text{ja} \quad N(s, b, s, t) = 0 \text{ kaikilla } b \in V.$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} I_s &= \sum_{b \in V} i_{s,b} = \sum_{b \in V} \frac{1}{N}[N(s, s, b, t) - N(s, b, s, t)] = \sum_{b \in V} \frac{1}{N}[N(s, s, b, t) - 0] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{b \in V} N(s, s, b, t) = \frac{1}{N} N = 1. \end{aligned}$$ $\square$

Tämä yksikäsitteinen ratkaisu Kirchhoffin laeille voidaan tulkita virittäjäpuiden sijaan myös todennäköisyyksien avulla. Jos $w_e = 1$ kaikilla $e \in E$, ja T on mikä tahansa satunnaisesti valittu verkon G virittäjäpuu, niin lauseen 3.12 antama yksikäsitteinen ratkaisu Kirchhoffin laeille lähteellä s, nielulla t ja koolla yksi on todennäköisyyksien avulla ilmaistuna

$$i_{a,b} = \mathbb{P}[T\text{:llä on ominaisuus } \Pi(s, a, b, t)] - \mathbb{P}[T\text{:llä on ominaisuus } \Pi(s, b, a, t)]$$

kaikilla $\{a, b\} \in E$.

Olkoon seuraavaksi $w_e \in (0,\infty)$ kaikilla $e \in E$. Nyt tarvitaan lisää virittäjäpuihin liittyviä merkintöjä. Määritellään virittäjäpuun T painoksi

$$w(T) = \prod_{e \in T} w_e,$$

missä merkintä $e \in T$ tarkoittaa, että e on virittäjäpuuhun T kuuluva sivu. Olkoot

$$N^* = \sum_{T \in \mathcal{T}} w(T) \quad \text{ja} \quad N^*(s,a,b,t) = \sum_{T \in \mathcal{N}(s,a,b,t)} w(T).$$

Koska lauseen 1.15 nojalla verkolla G on vähintään yksi virittäjäpuu $\hat{T} \in \mathcal{T}$, niin saadaan

$$N^* = \sum_{T \in \mathcal{T}} w(T) \geq w(\hat{T}) = \prod_{e \in \hat{T}} w_e > 0.$$

Seuraavaksi määritellään Kirchhoffin lait toteuttava yksikäsitteinen virtaus, kun $w_e \in (0,\infty)$ kaikilla $e \in E$.

Lause 3.13. *Jos $w_e \in (0,\infty)$ kaikilla $e \in E$, niin funktio*

$$i^*_{a,b} = \frac{1}{N^*}[N^*(s,a,b,t) - N^*(s,b,a,t)]$$

kaikilla $\{a,b\} \in E$ määrittelee yksikkövirtauksen lähteestä s nieluun t, joka toteuttaa Kirchhoffin lait.

Todistus. Olkoon $w_e \in (0,\infty)$ kaikilla $e \in E$. Kaikki muu todistuksessa menee samalla tavalla kuin lauseen 3.12 todistuksessa, mutta Kirchhoffin virtalain ja Kirchhoffin potentiaalilain osuuksia pitää hieman muuttaa. Kirchhoffin virtalain osuudessa täytyy huomata kirjoittaa $i^*_{a,b}$ muodossa

$$i^*_{a,b} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{N^*}[w(T)\mathbb{1}_{\mathcal{N}(s,a,b,t)}(T) - w(T)\mathbb{1}_{\mathcal{N}(s,b,a,t)}(T)],$$

jolloin todistus menee muuten samalla tavalla kuin lauseen 3.12 todistuksessa. Kirchhoffin potentiaalilain osuus taas on jonkin verran hankalampi, joten todistetaan, että $i^*_{a,b}$ toteuttaa Kirchhoffin potentiaalilain.

Osoitetaan, että $i^*_{a,b}$ toteuttaa Kirchhoffin potentiaalilain muodossa (3.1). Olkoon $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1$ edelleen verkon G kierros, jota merkitään C. Täytyy siis osoittaa, että

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{i^*_{v_j,v_{j+1}}}{w_{v_j,v_{j+1}}} = 0. \tag{3.3}$$

Tehdään tämäkin käyttäen pensaita. Olkoot edelleen $\mathcal{B}$ kaikkien verkon G pensaiden joukko ja $\mathcal{B}(s,a,b,t)$ kaikkien niiden pensaiden joukko, joille $a \in T_s$ ja $b \in T_t$. Määritellään mille tahansa pensaalle $B = (T_s, T_t)$ paino

$$w(B) = \prod_{e \in T_s} w_e \prod_{e \in T_t} w_e.$$

Nyt $i^*_{a,b}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} i^*_{a,b} &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{N^*}[w(T)\mathbb{1}_{\mathcal{N}(s,a,b,t)}(T) - w(T)\mathbb{1}_{\mathcal{N}(s,b,a,t)}(T)] \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{N^*}[w(B)w_{a,b}\mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,a,b,t)}(B) - w(B)w_{a,b}\mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,b,a,t)}(B)] \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{w_{a,b}}{N^*}[w(B)\mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,a,b,t)}(B) - w(B)\mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,b,a,t)}(B)], \end{aligned}$$

joten summalle (3.3) pätee

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{i^*_{v_j,v_{j+1}}}{w_{v_j,v_{j+1}}} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{N^*}[w(B)\mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,v_j,v_{j+1},t)}(B) - w(B)\mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,v_{j+1},v_j,t)}(B)] \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{w(B)}{N^*}\left[\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,v_j,v_{j+1},t)}(B) - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(s,v_{j+1},v_j,t)}(B)\right]. \end{aligned}$$

Olkoon $\hat{B} = (\hat{T}_s, \hat{T}_t) \in \mathcal{B}$. Nyt pensaan $\hat{B}$ osuus summasta (3.3) on $\frac{w(\hat{B})}{N^*}(F_+ - F_-)$, missä edelleen F_+ on niiden kierroksen C parien $\{v_j, v_{j+1}\}$, $1 \le j \le n$, lukumäärä, joille $v_j \in \hat{T}_s$ ja $v_{j+1} \in \hat{T}_t$ sekä F_- on niiden parien lukumäärä, joille $v_{j+1} \in \hat{T}_s$ ja $v_j \in \hat{T}_t$. Edelleen $F_+ = F_-$, eli pensaan $\hat{B}$ osuus summasta (3.3) on $\frac{w(\hat{B})}{N^*}(F_+ - F_-) = 0$. Kun summataan yli kaikkien pensaiden, tulee summasta (3.3) nolla kuten haluttiin. □

3.2 Energia ja efektiivinen resistanssi

Tämän alaluvun aiheina ovat virtauksen energia sekä efektiivinen resistanssi. Olkoot $s, t \in V$ erillisiä kärkiä, ja olkoon j s/t-virtaus. Määritellään aluksi tämän virtauksen j energia.

Määritelmä 3.14 (Energia)**.** Virtauksen j (kuluttama) energia on

$$E(j) = \sum_{\{u,v\} \in E} \frac{j^2_{u,v}}{w_{u,v}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} \frac{j^2_{u,v}}{w_{u,v}}.$$

Esitellään seuraavaksi Thomsonin periaate, joka sanoo, että Kirchhoffin lait toteuttava yksikkövirtaus jakaantuu verkossa siten, että se minimoi kulutetun energian.

Lause 3.15 (Thomsonin periaate)**.** *Olkoot $G = (V, E)$ yhtenäinen verkko ja w_e konduktanssi kaikilla $e \in E$. Olkoot $s, t \in V, s \neq t$. Kaikista verkon G yksikkövirtauksista kärjestä s kärkeen t, Kirchhoffin lait toteuttava virtaus on se yksikäsitteinen s/t-virtaus i, joka minimoi kulutetun energian, eli jolle*

$$E(i) = \inf\{E(j) : j \text{ on yksikkövirtaus kärjestä } s \text{ kärkeen } t\}.$$

Todistus. Olkoon j mikä tahansa yksikkövirtaus lähteestä s nieluun t, ja olkoon i se yksikäsitteinen yksikkövirtaus, joka toteuttaa Kirchhoffin lait. Asetetaan $k = j - i$, jolloin selvästi k on virtaus, jonka koko on nolla. Kun merkitään resistanssille $r_{u,v} = w_{u,v}^{-1}$, saadaan

$$\begin{aligned}
2E(j) &= \sum_{\substack{u,v\in V\\ u\sim v}} \frac{j_{u,v}^2}{w_{u,v}} = \sum_{u,v\in V} j_{u,v}^2 r_{u,v} = \sum_{u,v\in V} (k_{u,v} + i_{u,v})^2 r_{u,v} \\
&= \sum_{u,v\in V} (k_{u,v}^2 + 2k_{u,v} i_{u,v} + i_{u,v}^2) r_{u,v} \\
&= \sum_{u,v\in V} k_{u,v}^2 r_{u,v} + \sum_{u,v\in V} i_{u,v}^2 r_{u,v} + 2\sum_{u,v\in V} i_{u,v} k_{u,v} r_{u,v}.
\end{aligned}$$

Olkoon ϕ virtausta i vastaava potentiaalifunktio. Käyttämällä Ohmin lakia sekä propositiota 3.6 siten, että $\psi = \phi$ ja $j = k$, saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{u,v\in V} i_{u,v} k_{u,v} r_{u,v} &= \sum_{u,v\in V} \frac{i_{u,v}}{w_{u,v}} k_{u,v} = \sum_{u,v\in V} \phi_{u,v} k_{u,v} = \sum_{u,v\in V} [\phi(v) - \phi(u)] k_{u,v} \\
&= 2[\phi(t) - \phi(s)] K_s = 2[\phi(t) - \phi(s)](J_s - I_s) = 0.
\end{aligned}$$

Siispä

$$E(j) = \frac{1}{2}\sum_{u,v\in V} k_{u,v}^2 r_{u,v} + \frac{1}{2}\sum_{u,v\in V} i_{u,v}^2 r_{u,v} \geq \frac{1}{2}\sum_{u,v\in V} i_{u,v}^2 r_{u,v} = E(i),$$

missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $j = i$. □

Seuraavaksi tullaan määrittelemään verkon efektiivinen konduktanssi ja sen avulla verkon efektiivinen resistanssi. Olkoot i Kirchhoffin lait toteuttava virtaus ja ϕ virtausta i vastaava potentiaalifunktio. Tällöin virtauksen i energiaksi saadaan Ohmin lain ja proposition 3.6 nojalla

$$\begin{aligned}
E(i) &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{u,v\in V\\ u\sim v}} \frac{i_{u,v}^2}{w_{u,v}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{u,v\in V\\ u\sim v}} \frac{w_{u,v}\phi_{u,v} i_{u,v}}{w_{u,v}} = \frac{1}{2}\sum_{u,v\in V} [\phi(v) - \phi(u)] i_{u,v} \\
&= [\phi(t) - \phi(s)] I_s.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Siispä Kirchhoffin lait toteuttavan virtauksen i energia kärjestä s kärkeen t on yhtä suuri kuin energia, joka kuluisi, jos virta kulkisikin suoraan yksittäistä $\{s,t\}$-sivua pitkin, jolla on sama potentiaaliero ja kärjen s kokonaisvirta kuin virtauksella i. Kyseisenlaisen $\{s,t\}$-sivun konduktanssi, jota merkitään W_{eff}, toteuttaisi Ohmin lain

$$I_s = W_{\text{eff}}[\phi(t) - \phi(s)], \tag{3.5}$$

ja *efektiivinen konduktanssi* W_{eff} määritelläänkin yhtälöllä (3.5). Efektiivinen konduktanssi on koko verkon konduktanssi, joka kertoo, kuinka helposti virta kulkee verkon läpi. *Efektiivinen resistanssi* määritellään efektiivisen konduktanssin käänteisarvona

$$R_{\text{eff}} = \frac{1}{W_{\text{eff}}}. \tag{3.6}$$

Efektiivinen resistanssi on koko verkon resistanssi ja se kertoo verkon kokonaisvastuksen virran kululle. Esitellään seuraavaksi tulos, jonka mukaan verkon efektiivinen resistanssi on yhtä suuri kuin Kirchhoffin lait toteuttavan yksikkövirtauksen energia.

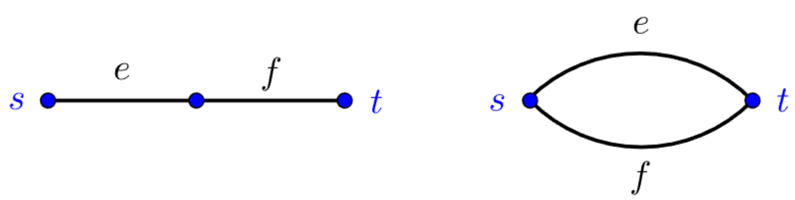
Lemma 3.16. *Verkon efektiivinen resistanssi R_{eff} kärjestä s kärkeen t on yhtä suuri kuin energia, jonka Kirchhoffin lait toteuttava yksikkövirtaus kuluttaa virratessaan kärjestä s kärkeen t.*

Todistus. Olkoot i Kirchhoffin lait toteuttava virtaus ja ϕ virtausta i vastaava potentiaalifunktio. Yhtälöiden (3.4) ja (3.5) nojalla

$$R_{\text{eff}} = \frac{1}{W_{\text{eff}}} = \frac{\phi(t) - \phi(s)}{I_s} = \frac{E(i)}{I_s^2},$$

joten jos virtaus i on yksikkövirtaus, niin $|I_s| = 1$ ja saadaan $R_{\text{eff}} = E(i)$. $\square$

On hyödyllistä osata laskea verkon efektiivinen resistanssi. Tähän tarkoitukseen on kehitetty sarjaankytkentä- ja rinnankytkentälait. Sarjaan- ja rinnankytkentää on havainnollistettu kuvassa 3.2.



Kuva 3.2: Vasemmalla sivut e ja f ovat sarjaankytkennässä ja oikealla rinnankytkennässä.

3.17. Sarjaankytkentälaki. Kaksi sarjaan kytkettyä vastusta, joiden resistanssit ovat r_1 ja r_2, voidaan korvata yhdellä vastuksella, jonka resistanssi on $r_1 + r_2$.

Todistus. Olkoon R_{eff} sellaisen verkon efektiivinen resistanssi, jossa on kaksi sarjaan kytkettyä sivua resistansseilla r_1 ja r_2. Olkoon i tämän verkon Kirchhoffin lait toteuttava yksikkövirtaus. Tällaisia virtauksia on vain yksi. Tällöin lemman 3.16 nojalla

$$R_{\text{eff}} = E(i) = \frac{1}{r_1^{-1}} + \frac{1}{r_2^{-1}} = r_1 + r_2. \qquad \square$$

3.18. Rinnankytkentälaki. Kaksi rinnan kytkettyä vastusta, joiden resistanssit ovat r_1 ja r_2, voidaan korvata yhdellä vastuksella, jonka resistanssi on R, missä $R^{-1} = r_1^{-1} + r_2^{-1}$.

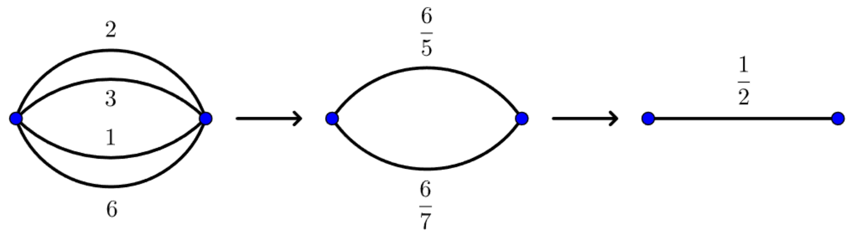
Todistus. Olkoon R_{eff} sellaisen verkon efektiivinen resistanssi, jossa on kaksi rinnan kytkettyä sivua resistansseilla r_1 ja r_2. Olkoon i tämän verkon Kirchhoffin lait toteuttava yksikkövirtaus siten, että resistanssilla r_1 varustetun sivun virta on $a \geq 0$ ja resistanssilla r_2 varustetun sivun virta on $1 - a$. Ohmin lain nojalla $\phi_{s,t} = i_{s,t} w_{s,t}^{-1}$, joten kahdelle rinnan kytketylle sivulle tulee päteä

$$\begin{aligned} \frac{a}{r_1^{-1}} = \frac{1-a}{r_2^{-1}} \quad &\Leftrightarrow \quad r_1 a = r_2(1-a) \quad \Leftrightarrow \quad (r_1 + r_2)a = r_2 \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{r_2}{r_1 + r_2}. \end{aligned}$$

Nyt lemman 3.16 nojalla

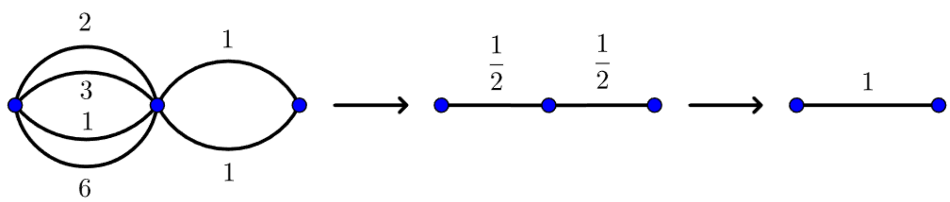
$$\begin{aligned} R_{\text{eff}} = E(i) &= \frac{a^2}{r_1^{-1}} + \frac{(1-a)^2}{r_2^{-1}} = \frac{\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)^2}{r_1^{-1}} + \frac{\left(1 - \frac{r_2}{r_1+r_2}\right)^2}{r_2^{-1}} \\ &= \frac{r_1 r_2^2}{(r_1+r_2)^2} + \frac{r_1^2 r_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{r_1 r_2 (r_2 + r_1)}{(r_1+r_2)^2} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \qquad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 3.19. Lasketaan kahden verkon efektiiviset resistanssit sarjaankytkentä- ja rinnankytkentälakien avulla. Olkoon verkko aluksi kuten kuvan 3.3 vasemmassa reunassa siten, että kuvan numerot vastaavat resistansseja. Huomataan, että sivut joilla on resistanssit 2 ja 3 sekä sivut, joilla on resistanssit 1 ja 6, ovat rinnankytkennöissä. Siispä rinnankytkentälain nojalla ylemmät sivut voidaan korvata sivulla, jonka resistanssille R pätee $\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, eli $R = \frac{6}{5}$. Samoin alemmat sivut voidaan korvata sivulla, jonka resistanssille pätee $\frac{1}{R} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$, eli $R = \frac{6}{7}$. Uudet sivut resistansseilla $\frac{6}{5}$ ja $\frac{6}{7}$ ovat myös rinnankytkennässä, joten ne voidaan korvata sivulla, jolle $\frac{1}{R} = \frac{5}{6} + \frac{7}{6} = 2$, eli $R = \frac{1}{2}$. Siispä tämän verkon efektiivinen resistanssi on $R_{\text{eff}} = \frac{1}{2}$.



Kuva 3.3: Esimerkki verkon efektiivisen resistanssin laskemisesta rinnankytkentälain avulla.

Olkoon seuraavaksi verkko kuten kuvan 3.4 vasemmassa reunassa. Nyt edellisen laskun nojalla tiedetään, että ensimmäiset sivut voidaan korvata sivulla, jonka resistanssi on $R = \frac{1}{2}$. Rinnankytkentälain nojalla sivut, joiden resistannsit ovat ykkösiä, voidaan korvata sivulla, jonka resistanssille pätee $\frac{1}{R} = 1 + 1 = 2$, eli $R = \frac{1}{2}$. Nyt nämä kaksi uutta sivua resistansseilla $\frac{1}{2}$ ovat sarjaankytkennässä, joten sarjaankytkentälain nojalla ne voidaan korvata sivulla, jonka resistanssi on $R = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Täten tämän verkon efektiivinen resistanssi on siis $R_{\text{eff}} = 1$.



Kuva 3.4: Esimerkki verkon efektiivisen resistanssin laskemisesta sarjaankytkentä- ja rinnankytkentälain avulla.

Edellä esitellyn Thomsonin periaatteen avulla voidaan todistaa Rayleighin periaate, jonka mukaan verkon efektiivinen resistanssi on yksittäisten sivujen resistanssien, eli sivu-resistanssien, kasvava funktio.

Lause 3.20 (Rayleighin periaate)**.** *Verkon efektiivinen resistanssi R_{eff} on sivu-resistanssien $(r_e)_{e \in E}$ kasvava funktio.*

Todistus. Olkoot $(r_e)_{e\in E}$ ja $(r'_e)_{e\in E}$ sivu-resistanssien vektoreita, joille pätee $r_e \leq r'_e$ kaikilla $e \in E$. Olkoot i ja i' yksikkövirtauksia, jotka toteuttavat Kirchhoffin lait. Oletetaan, että R_{eff} on määritelty resistanssien $(r_e)_{e\in E}$ ja virtauksen i avulla ja R'_{eff} on määritelty resistanssien $(r'_e)_{e\in E}$ ja virtauksen i' avulla. Kun sivulle $e = \{u, v\}$ merkitään $r_e = r_{u,v}$ ja $r'_e = r'_{u,v}$, saadaan lemman 3.16, Thomsonin periaatteen ja tiedon $r_e \leq r'_e$ kaikilla $e \in E$ nojalla

$$R_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v\in V \\ u\sim v}} i_{u,v}^2 r_{u,v} \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v\in V \\ u\sim v}} (i'_{u,v})^2 r_{u,v} \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v\in V \\ u\sim v}} (i'_{u,v})^2 r'_{u,v} = R'_{\text{eff}},$$

kuten haluttiin. $\square$

4 Palautuvuus ja efektiivinen resistanssi

Tässä luvussa käsitellään Markovin ketjujen palautuvuutta efektiivisten resistanssien avulla. Aluksi esitellään kaava todennäköisyydelle, jolla Markovin ketju palaa takaisin alkupisteeseensä. Tämän jälkeen todistetaan tärkeä tulos, joka kertoo, kuinka Markovin ketjun palautuvuuden tai poistuvuuden voi päätellä efektiivisen resistanssin avulla. Efektiivinen resistanssi määriteltiin aiemmin vain äärellisille sähköverkoille, joiden virtauksilla on lähde ja nielu. Tämän luvun tuloksissa kuitenkin tarvitaan efektiivistä resistanssia äärettömille sähköverkoille, joiden virtauksilla on lähde, mutta ei nielua. Seuraavaksi tullaan määrittelemään tämä äärettömän sähköverkon efektiivinen resistanssi R_{eff} äärellisten sähköverkkojen efektiivisten resistanssien $R_{\text{eff}}(n)$ raja-arvona. Luvussa seurataan lähdettä [5, s.11–13].

Olkoon $G = (V, E)$ ääretön yhtenäinen verkko, jonka kärkien asteet ovat äärellisiä, ja olkoot $(w_e)_{e\in E}$ konduktansseja. Olkoon $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ kääntyvä Markovin ketju tila-avaruudella V ja siirtymämatriisilla P, jonka alkiot on määritelty yhtälöllä (2.5). Valitaan verkosta G jokin kärki, jota merkitään 0 ja kutsutaan *alkupisteeksi*, ja asetetaan $Z_0 = 0$. Olkoot

$$\Lambda_n = \{u \in V : \delta(0, u) \leq n\},$$

$$\partial\Lambda_n = \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1} = \{u \in V : \delta(0, u) = n\}$$

kaikilla $n \geq 1$. Nyt siis Λ_n on niiden kärkien joukko, joiden etäisyys alkupisteestä on enintään n, ja $\partial\Lambda_n$ on joukon Λ_n reuna, eli niiden kärkien joukko, joiden etäisyys alkupisteestä on n.

Olkoon G_n verkon G aliverkko, jonka kärkijoukko on Λ_n ja joka sisältää kaikki ne sivut, jotka yhdistävät joukon Λ_n kärkiä. Olkoon $\overline{G}_n$ verkko, joka saadaan verkosta G_n samastamalla kaikki joukon $\partial\Lambda_n$ kärjet yhdeksi kärjeksi, jota merkitään $\bar{I}_n$. Äärellistä verkkoa $\overline{G}_n$ voidaan pitää sähköverkkona lähteellä 0 ja nielulla $\bar{I}_n$. Olkoon $R_{\text{eff}}(n)$ tämän verkon efektiivinen resistanssi.

Verkko $\overline{G}_n$ voidaan muodostaa verkosta $\overline{G}_{n+1}$ samastamalla kaikki kärjet joukossa $\partial\Lambda_n \cup \{\bar{I}_{n+1}\}$. Tämä samastaminen voidaan ajatella myös niin, että muutetaan verkon $\overline{G}_{n+1}$ jokaisen kärjen joukosta $\partial\Lambda_n$ ja kärjen $\bar{I}_{n+1}$ välillä olevien sivujen resistanssit nolliksi. Tällöin $\overline{G}_n$ on kuin $\overline{G}_{n+1}$, mutta joidenkin sivujen resistanssit ovatkin nollia. Täten Rayleighin periaatteen nojalla $R_{\text{eff}}(n) \leq R_{\text{eff}}(n+1)$ kaikilla $n \geq 1$, eli $R_{\text{eff}}(n)$ on kasvava muuttujan n suhteen. Siispä raja-arvo

$$R_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} R_{\text{eff}}(n)$$

on olemassa.

Ennen kuin johdetaan kaava Markovin ketjun todennäköisyydelle palata alkupisteeseensä, todistetaan vielä, että äärellisessä verkossa mistä tahansa kärjestä alkava kääntyvä Markovin ketju osuu melkein varmasti mihin tahansa kärkeen.

Lause 4.1. *Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen yhtenäinen verkko. Olkoon $(Z_n)_{n\geq 0}$ kääntyvä Markovin ketju tila-avaruudella V, jolle $p_{u,v} > 0$ kaikilla $\{u, v\} \in E$. Tällöin $\mathbb{P}(T_u < \infty \mid Z_0 = v) = 1$ kaikilla $u, v \in V$.*

Todistus. Olkoot $u \in V$ ja $g(v) = \mathbb{P}(T_u < \infty \mid Z_0 = v)$ kaikilla $v \in V$. Tällöin funktiolle g pätee

$$g(v) = \sum_{\hat{v}\sim v} p_{v,\hat{v}}\mathbb{P}(T_u < \infty \mid Z_0 = \hat{v}) = \sum_{\hat{v}\sim v} p_{v,\hat{v}}g(\hat{v})$$

kaikilla $v \in V \setminus \{u\}$, eli g on harmoninen joukossa $V \setminus \{u\}$ reunaehdolla $g(u) = 1$. Olkoon lisäksi $f(v) = 1$ kaikilla $v \in V$. Vakiofunktiona f on selvästi harmoninen koko joukossa V, eli myös joukossa $V \setminus \{u\}$, ja sille pätee $f(u) = 1$. Siispä lauseen 2.29 nojalla $g \equiv f$, eli $\mathbb{P}(T_u < \infty \mid Z_0 = v) = 1$ kaikilla $v \in V$. $\square$

Seuraavaksi muotoillaan kaava todennäköisyydelle, jolla Markovin ketju palaa takaisin alkupisteeseensä.

Lause 4.2. *Todennäköisyys, että kääntyvä Markovin ketju Z palaa takaisin alkupisteeseen 0, on*

$$\mathbb{P}(Z_n = 0 \text{ jollekin } n \geq 1 \mid Z_0 = 0) = 1 - \frac{1}{W_0 R_{\mathit{eff}}}.$$

Todistus. Aluksi tarkastellaan ketjua Z rajoitettuna äärelliseen yhtenäiseen verkkoon $\overline{G}_n$, missä $n \geq 1$, ja vasta todistuksen lopussa siirrytään äärettömään verkkoon G. Olkoon $\mathbb{P}^{\overline{G}_n}$ verkon $\overline{G}_n$ todennäköisyysmitta, ja käytetään ehdolliselle todennäköisyydelle merkintää $\mathbb{P}^{\overline{G}_n}_v(\cdot) = \mathbb{P}^{\overline{G}_n}(\cdot \mid Z_0 = v)$ kaikilla $v \in \Lambda_{n-1} \cup \{\bar{I}_n\}$. Olkoon lisäksi $\bar{T}_0 = \inf\{i \geq 1 : Z_i = 0\}$. Aloitetaan muokkaamalla kaava todennäköisyydelle, että verkossa $\overline{G}_n$ pisteestä 0 lähtenyt ketju Z palaa takaisin alkupisteeseen ennen kuin se osuu kärkeen $\bar{I}_n$. Lauseen 4.1 nojalla $\mathbb{P}^{\overline{G}_n}_0(T_{\bar{I}_n} < \infty) = 1$ ja

$$\mathbb{P}^{\overline{G}_n}_0(\bar{T}_0 < \infty) = \sum_{v\sim 0} p_{0,v}\mathbb{P}^{\overline{G}_n}_v(T_0 < \infty) = \sum_{v\sim 0} p_{0,v} = 1.$$

Tämä takaa sen, että pisteestä 0 alkava ketju Z verkossa $\overline{G}_n$ melkein varmasti joskus sekä palaa takaisin alkupisteeseensä että osuu kärkeen $\bar{I}_n$. Täten tapahtumat $\{Z_i = 0 \text{ jollekin } 1 \leq i < T_{\bar{I}_n} \mid Z_0 = 0\}$ ja $\{Z_i = \bar{I}_n \text{ jollekin } 1 \leq i < \bar{T}_0 \mid Z_0 = 0\}$ ovat komplementaarisia verkossa $\overline{G}_n$, ja saadaan

$$\mathbb{P}_0^{\overline{G}_n}(Z_i = 0 \text{ jollekin } 1 \leq i < T_{\bar{I}_n}) = 1 - \mathbb{P}_0^{\overline{G}_n}(Z_i = \bar{I}_n \text{ jollekin } 1 \leq i < \bar{T}_0).$$

Olkoon $g_n(v) = \mathbb{P}_v^{\overline{G}_n}(Z_i = \bar{I}_n \text{ jollekin } i < T_0)$ kaikilla $v \in \Lambda_{n-1} \cup \{\bar{I}_n\}$. Tällöin $g_n(0) = 0$ ja $g_n(\bar{I}_n) = 1$, ja lauseen 3.9 nojalla g_n määrittelee Ohmin lain toteuttavan potentiaalifunktion verkossa $\overline{G}_n$. Olkoon $i(n)$ potentiaalifunktiota g_n vastaava verkon $\overline{G}_n$ virtaus lähteellä 0 ja nielulla $\bar{I}_n$, ja olkoon $I(n)_0$ kärjen 0 kokonaisvirta. Nyt Ohmin lain sekä yhtälöiden (3.5) ja (3.6) nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^{\overline{G}_n}(Z_i = \bar{I}_n \text{ jollekin } 1 \leq i < \bar{T}_0) &= \sum_{v\sim 0} p_{0,v} g_n(v) = \sum_{v\sim 0} \frac{w_{0,v}}{W_0}[g_n(v) - g_n(0)] \\
&= \frac{1}{W_0}\sum_{v\sim 0} i(n)_{0,v} = \frac{I(n)_0}{W_0} = \frac{g_n(\bar{I}_n) - g_n(0)}{W_0 R_{\text{eff}}(n)} \\
&= \frac{1}{W_0 R_{\text{eff}}(n)},
\end{aligned}$$

eli saadaan

$$\mathbb{P}_0^{\overline{G}_n}(Z_i = 0 \text{ jollekin } 1 \leq i < T_{\bar{I}_n}) = 1 - \frac{1}{W_0 R_{\text{eff}}(n)}.$$

Palataan nyt äärettömään verkkoon G, jonka todennäköisyysmitta on $\mathbb{P}$, ja jossa ehdolliselle todennäköisyydelle merkitään $\mathbb{P}_v(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid Z_0 = v)$ kaikilla $v \in V$. Kun käytetään todennäköisyysmitan alhaalta jatkuvuutta, saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0(Z_i = 0 \text{ jollekin } 1 \leq i < T_{\partial\Lambda_n}) &= \mathbb{P}_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z_i = 0 \text{ jollekin } 1 \leq i < T_{\partial\Lambda_n}\}\right) \\
&= \mathbb{P}_0(Z_n = 0 \text{ jollekin } n \geq 1).
\end{aligned}$$

Lisäksi tiedetään, että

$$\mathbb{P}_0(Z_i = 0 \text{ jollekin } 1 \leq i < T_{\partial\Lambda_n}) = \mathbb{P}_0^{\overline{G}_n}(Z_i = 0 \text{ jollekin } 1 \leq i < T_{\bar{I}_n})$$

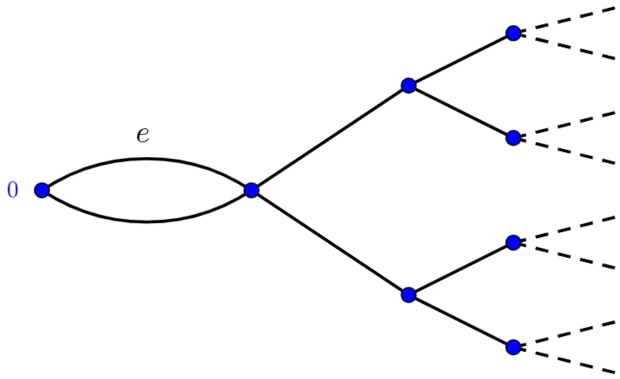
kaikilla $n \geq 1$, sillä ketju Z käyttäytyy samalla tavalla äärettömässä verkossa G ennen reunaa $\partial\Lambda_n$ ja äärellisessä verkossa $\overline{G}_n$ ennen kärkeä $\bar{I}_n$. Siispä

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(Z_n = 0 \text{ jollekin } n \geq 1) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0(Z_i = 0 \text{ jollekin } 1 \leq i < T_{\partial\Lambda_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0^{\overline{G}_n}(Z_i = 0 \text{ jollekin } 1 \leq i < T_{\bar{I}_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{W_0 R_{\text{eff}}(n)}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{W_0 R_{\text{eff}}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lauseen 4.2 nojalla siis palaamistodennäköisyys kasvaa silloin kun $W_0 R_{\text{eff}}$ suurenee. Yksi tapa kasvattaa tätä tuloa on poistaa sellainen sivu joukosta E, joka ei sisällä alkupistettä 0. Tällöin W_0 pysyy muuttumattomana ja Rayleighin periaatteen nojalla R_{eff} kasvaa, sillä tällöin virta ei pääse kulkemaan poistettua sivua pitkin, eli voidaan ajatella, että kyseisen sivun resistanssi on ääretön. Jos taas poistetaan sellainen sivu, joka sisältää alkupisteen 0, voi vaikutus olla päinvastainen, sillä tällöin W_0 pienenee ja R_{eff} kasvaa.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan kuvaa 4.1. Oletetaan, että jokaisen sivun resistanssi on yksi. Tällöin myös jokaisen sivun konduktanssi on yksi ja saadaan $W_0 = 2$. Sarjaankytkentä- ja rinnankytkentälakien nojalla saadaan $R_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} R_{\text{eff}}(n) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. Siispä lauseen 4.2 nojalla todennäköisyys palata alkupisteeseen on $\frac{2}{3}$.

Oletetaan sitten, että sivu e poistetaan. Tällöin $W_0 = 1$ ja sarjaankytkentä- ja rinnankytkentälakien nojalla $R_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} R_{\text{eff}}(n) = 1 + 1 = 2$. Täten lauseen 4.2 nojalla alkupisteeseen palaamisen todennäköisyys on $\frac{1}{2}$. Palaamistodennäköisyys siis pieneni, kun poistettiin alkupisteen sisältävä sivu.



Kuva 4.1: Ääretön 2-haarainen puu, jonka juuri on yhdistetty kahdella sivulla alkupisteeseen 0. Kuvan mallina on ollut [5, Figure 1.2].

Seuraavaksi tullaan esittelemään yksi tämän työn merkittävimmistä tuloksista, joka on seuraus lauseesta 4.2. Tätä tulosta varten määritellään *$0/\infty$-virtaus*. Se on vektori $j = (j_{u,v})_{u,v\in V, u\neq v}$, joka toteuttaa s/t-virtauksen määritelmästä 3.1 ehdot (1) ja (2) sekä ehdon (3) kaikilla $u \neq 0$. Se on siis virtaus, jolla on lähde 0, mutta ei ollenkaan nielua. Samoin kuin s/t-virtaukselle, myös $0/\infty$-virtaukselle j määritellään kärjen u kokonaisvirta $J_u = \sum_{v\in V} j_{u,v}$ kaikilla $u \in V$. Lisäksi $0/\infty$-virtauksen j koko on $|J_0|$ ja energia $E(j) = \sum_{e\in E} \frac{j_e^2}{w_e}$.

Seuraavaksi esiteltävä tulos on hyvin tärkeä, sillä Pólyan lause tullaan todistamaan sen avulla.

Seuraus 4.4. *Lauseesta 4.2 seuraa, että*

1. *ketju Z on palautuva jos ja vain jos $R_{\text{eff}} = \infty$.*
2. *ketju Z on poistuva jos ja vain jos on olemassa verkon G nollasta poikkeava $0/\infty$-virtaus j, jonka energialle pätee $E(j) < \infty$.*

Huomautus 4.5. Seurauksen 4.4 ensimmäisen kohdan nojalla tiedetään myös, että ketju Z on poistuva jos ja vain jos $R_{\text{eff}} < \infty$.

Seurauksen 4.4 todistuksessa tarvitaan seuraavaa klassista tulosta.

Lause 4.6 (Diagonaaliargumentti)**.** *Olkoon $(i(n))_{n=1}^{\infty}$ tasaisesti rajoitettu funktiojono joukossa E, eli $|i(n)_e| \leq M$ jollekin $M > 0$ kaikilla $n \geq 1$ ja $e \in E$. Tällöin on olemassa kasvava osajono $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ siten, että $i(n_k)_e$ suppenee kaikilla $e \in E$.*

Todistus sivuutetaan ja se löytyy lähteestä [12, s.157]. Nyt voidaan todistaa seuraus 4.4.

Seurauksen 4.4 todistus. Seurauksen 4.4 ensimmäinen kohta seuraa suoraan lauseesta 4.2, joten todistetaan vain toinen kohta. Todistetaan se kahdessa osassa. Aluksi todetaan, että lemman 3.16 nojalla on olemassa verkon $\overline{G}_n$, missä $n \geq 1$, Kirchhoffin lait toteuttava yksikkövirtaus $i(n)$ lähteellä 0, nielulla $\bar{I}_n$ ja energialla $E\big(i(n)\big) = R_{\text{eff}}(n)$.

" $\Leftarrow$ " Olkoon i nollasta poikkeava $0/\infty$-virtaus, jolle $E(i) < \infty$. Kun virtaus i jaetaan sen omalla koolla $|I_0|$, saadaan yksikkö-$0/\infty$-virtaus $\hat{\imath}$, jolle $E(\hat{\imath}) < \infty$. Kun virtaus $\hat{\imath}$ rajoitetaan verkon $\overline{G}_n$ sivujen joukkoon E_n, se muodostaa yksikkövirtauksen, joka kulkee lähteestä 0 nieluun $\bar{I}_n$. Nyt Thomsonin periaatteen nojalla

$$E\big(i(n)\big) \leq E(\hat{\imath}),$$

mistä saadaan

$$R_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} R_{\text{eff}}(n) = \lim_{n\to\infty} E\big(i(n)\big) \leq E(\hat{\imath}) < \infty.$$

Jos ketju Z olisi palautuva, olisi ensimmäisen kohdan nojalla $R_{\text{eff}} = \infty$, mikä olisi nyt ristiriita. Siispä ketju Z on poistuva.

" $\Rightarrow$ " Oletetaan, että ketju Z on poistuva, jolloin ensimmäisen kohdan nojalla $R_{\text{eff}} < \infty$. Vaikka virtaus $i(n)$ onkin määritelty verkolla $\overline{G}_n$, on se määritelty myös verkolla G, sillä $E_n \subset E$ ja sivujen $E \setminus E_n$ virrat voidaan asettaa nolliksi. Siispä lauseen 4.6 nojalla on olemassa kasvava osajono

$(n_k)_{k=1}^{\infty}$, jolle $i(n_k)$ suppenee johonkin virtaukseen j, mikä tarkoittaa, että $\lim_{k\to\infty} i(n_k)_e = j_e$ kaikilla $e \in E$. Osoitetaan, että tämä virtaus j toteuttaa vaaditut ehdot. Koska $i(n_k)$ on yksikkövirtaus lähteellä 0 kaikilla $k \geq 1$, niin j on selvästi yksikkö-$0/\infty$-virtaus. Olkoot $k \geq 1$ ja $1 \leq m \leq n_k$. Nyt $E_m \subseteq E_{n_k}$, joten

$$E\big(i(n_k)\big) = \sum_{e \in E_{n_k}} \frac{i(n_k)_e^2}{w_e} \geq \sum_{e \in E_m} \frac{i(n_k)_e^2}{w_e},$$

jolloin myös

$$\lim_{k\to\infty} E\big(i(n_k)\big) \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{e \in E_m} \frac{i(n_k)_e^2}{w_e} = \sum_{e \in E_m} \frac{j_e^2}{w_e}.$$

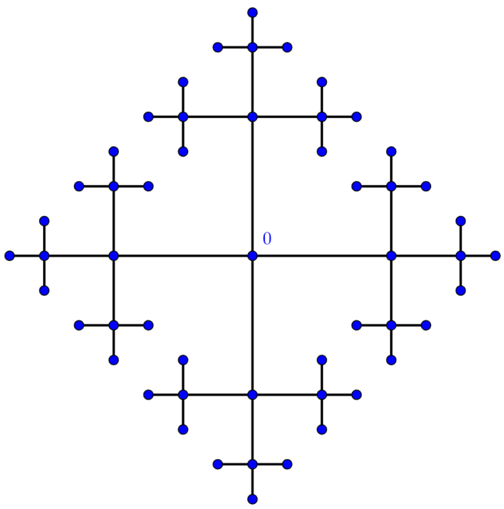
Koska $m \leq n_k$ ja luvun k lähestyessä ääretöntä myös n_k lähestyy ääretöntä, saadaan

$$\lim_{k\to\infty} E\big(i(n_k)\big) \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{e \in E_m} \frac{j_e^2}{w_e} = \sum_{e \in E} \frac{j_e^2}{w_e} = E(j),$$

minkä nojalla

$$E(j) \leq \lim_{k\to\infty} E\big(i(n_k)\big) = \lim_{k\to\infty} R_{\text{eff}}(n_k) = R_{\text{eff}} < \infty. \qquad \square$$

Esimerkki 4.7. Olkoon verkko $G = (V, E)$ kuvan 4.2 mukainen, mutta siten, että se on ääretön, eli jokaisesta kärjestä lähtee aina kolme uutta sivua. Selvitetään seurauksen 4.4 ensimmäisen kohdan avulla, onko kärjestä 0 alkava symmetrinen satunnaiskävely kyseisellä verkolla palautuva vai poistuva.

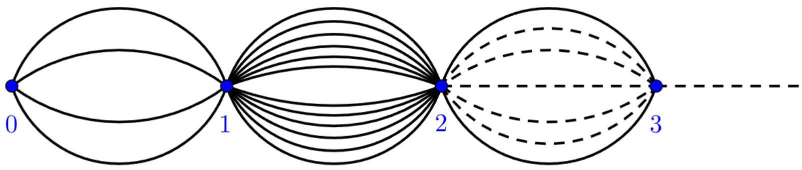


Kuva 4.2: Osa äärettömästä puusta, jonka juuri, eli origo, on yhdistetty neljään eri kärkeen, joista jokaisesta lähtee rekursiivisesti kolme eri sivua.

Olkoon $n \geq 1$. Olkoon G_n verkon G aliverkko, joka käsittää kärkijoukon $\Lambda_n = \{u \in V : \delta(0,u) \leq n\}$ ja kaikki sen alkioiden väliset sivut. Olkoon $\overline{G}_n$ verkko, joka saadaan verkosta G_n samastamalla kaikki joukon $\partial\Lambda_n = \{u \in V : \delta(0,u) = n\}$ kärjet, ja olkoon $R^G_{\text{eff}}(n)$ tämän verkon efektiivinen resistanssi. Olkoon $R^G_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} R^G_{\text{eff}}(n)$ verkon G efektiivinen resistanssi.

Tehdään verkosta G uusi verkko $\hat{G}$ siten, että jokaiselle $k = 1, 2, \ldots$ samastetaan kaikki joukon $\partial\Lambda_k$ alkiot, jolloin uusi verkko näyttää kuvan 4.3 mukaiselta. Olkoon $R^{\hat{G}}_{\text{eff}}(n)$ verkon $\hat{G}$ efektiivinen resistanssi kärjestä 0 kärkeen n. Koska satunnaiskävely on symmetrinen, jokaisen sivun resistanssi on yksi. Nyt rinnankytkentälain nojalla kärkien $i-1$ ja i välinen resistanssi on $\frac{1}{4\cdot 3^{i-1}}$ kaikilla $i \geq 1$, ja täten kärkien 0 ja n välinen resistanssi on sarjaankytkentälain nojalla geometrinen summa

$$R^{\hat{G}}_{\text{eff}}(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\cdot 3^{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{4\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3-\frac{1}{3^{n-1}}}{8}.$$



Kuva 4.3: Kärki i saadaan samastamalla kaikki ne kärjet, joiden etäisyys nollasta on i. Kärkiä $i-1$ ja i yhistää $4\cdot 3^{i-1}$ verkon G sivua. Kuvan mallina on ollut [5, Figure 1.3].

Olkoon $i(n)$ verkon $\overline{G}_n$ yksikkövirtaus siten, että kun $\delta(0,u) = k$ ja $\delta(0,v) = k+1$, missä $0 \leq k \leq n-1$, niin $i_{u,v}(n) = \frac{1}{4\cdot 3^k}$. Tällöin Rayleighin ja Thomsonin periaatteiden nojalla

$$R^{\hat{G}}_{\text{eff}}(n) \leq R^G_{\text{eff}}(n) \leq E\big(i(n)\big).$$

Koska lisäksi virtauksen $i(n)$ energialle pätee

$$E\big(i(n)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4\cdot 3^k}\right)^2 4\cdot 3^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\cdot 3^k} = R^{\hat{G}}_{\text{eff}}(n),$$

niin saadaan $R^G_{\text{eff}}(n) = R^{\hat{G}}_{\text{eff}}(n)$. Siispä

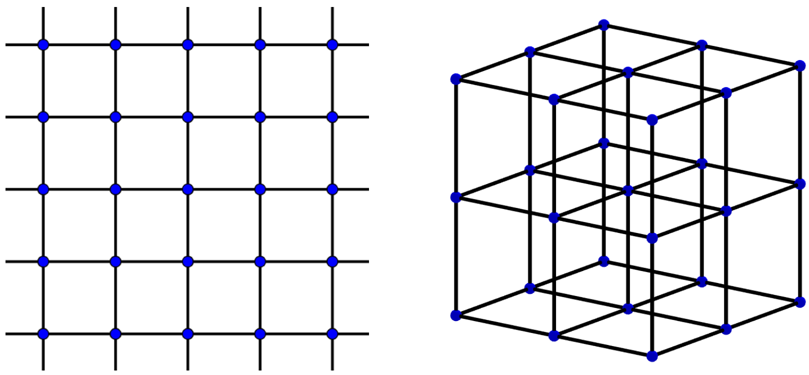
$$R^G_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} R^G_{\text{eff}}(n) = \lim_{n\to\infty} R^{\hat{G}}_{\text{eff}}(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{3^{n-1}}}{8} = \frac{3}{8} < \infty,$$

eli seurauksen 4.4 nojalla symmetrinen satunnaiskävely on poistuva.

5 Pólyan lause

Tässä luvussa esitellään Pólyan lause ja todistetaan se. Pólyan lause on stokastinen tulos, jonka mukaan symmetrinen satunnaiskävely on palautuva yksi- ja kaksiulotteisessa hilassa ja poistuva kolme- ja ylempiulotteisessa hilassa. Todistuksessa seurataan lähteestä [5, s.14–16] löytyvää todistusta. Ennen Pólyan lauseen muotoilua määritellään kuitenkin vielä siinä esiintyvä hila.

Määritelmä 5.1 (Hila)**.** Joukko $\mathbb{L}^d$ on d-ulotteinen kuutiohila, jonka kärkien joukko on $\mathbb{Z}^d$ ja jolla on sivut kaikkien niiden kärkien välillä, jotka ovat Euklidisen etäisyyden yksi päässä toisistaan.



Kuva 5.1: $\mathbb{L}^2$ -hila ja äärellinen $\mathbb{L}^3$ -hila.

Seuraavaksi muotoillaan tämän tutkielman päätulos, eli Pólyan lause.

Lause 5.2 (Pólyan lause)**.** *Symmetrinen satunnaiskävely hilassa* $\mathbb{L}^d$ *on palautuva, jos* $d = 1, 2$ *ja poistuva, jos* $d \geq 3$*.*

Pólyan lauseen todistuksen helpottamiseksi tehdään lemma, joka sanoo, että jos symmetrinen satunnaiskävely on palautuva alkuperäisellä verkolla, niin se on palautuva myös missä tahansa yhtenäisessä aliverkossa, joka sisältää alkupisteen.

Lemma 5.3. *Olkoon* G *numeroituvasti ääretön yhtenäinen verkko, jonka kärkien asteet ovat äärellisiä, ja jonka alkupiste on jokin* 0*. Olkoon* $\hat{G}$ *verkon* G *yhtenäinen aliverkko, joka sisältää kärjen* 0*. Jos symmetrinen satunnaiskävely, joka alkaa kärjestä* 0*, on palautuva verkolla* G*, niin se on palautuva myös verkolla* $\hat{G}$*.*

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$ numeroituvasti ääretön yhtenäinen verkko, jonka kärkien asteet ovat äärellisiä, ja jonka alkupiste on jokin 0. Olkoot $\Lambda_n = \{u \in V : \delta(0, u) \leq n\}$ ja $\partial\Lambda_n = \{u \in V : \delta(0, u) = n\}$ kaikilla $n \geq 1$. Olkoon G_n verkon G aliverkko, joka sisältää kaikki joukon Λ_n kärjet ja kaikki niiden väliset sivut. Olkoon H_n verkko, joka saadaan verkosta G_n samastamalla kaikki joukon $\partial\Lambda_n$ kärjet, ja olkoon $R_{\text{eff}}(n)$ tämän verkon efektiivinen resistanssi. Olkoon $R_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} R_{\text{eff}}(n)$ verkon G efektiivinen resistanssi.

Olkoon $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ verkon G yhtenäinen aliverkko, joka sisältää kärjen 0. Olkoot $\hat{\Lambda}_n = \{u \in \hat{V} : \delta(0, u) \leq n\}$ ja $\partial\hat{\Lambda}_n = \{u \in \hat{V} : \delta(0, u) = n\}$ kaikilla $n \geq 1$. Olkoon $\hat{G}_n$ verkon $\hat{G}$ aliverkko, jossa on kaikki kärjet joukosta $\hat{\Lambda}_n$ ja kaikki niiden väliset sivut. Olkoon $\hat{H}_n$ verkko, joka saadaan verkosta $\hat{G}_n$, kun samastetaan joukon $\partial\hat{\Lambda}_n$ kärjet, ja olkoon $\hat{R}_{\text{eff}}(n)$ tämän verkon efektiivinen resistanssi. Olkoon $\hat{R}_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} \hat{R}_{\text{eff}}(n)$ verkon $\hat{G}$ efektiivinen resistanssi.

Oletetaan, että kärjestä 0 alkava symmetrinen satunnaiskävely on palautuva verkolla G. Tällöin seurauksen 4.4 nojalla $R_{\text{eff}} = \infty$. Koska kyseessä on symmetrinen satunnaiskävely, tiedetään, että verkon G jokaisen sivun resistanssi on yksi. Aliverkko $\hat{G}$ saadaan verkosta G, kun poistetaan siitä halutut kärjet ja sivut. Tämä voidaan ajatella myös niin, että ei poisteta mitään, vaan muutetaan pois haluttujen sivujen resistanssit olemaan äärettömiä. Tällöin aliverkko $\hat{G}$ on muuten samanlainen kuin verkko G, mutta siinä kaikki sivuresistanssit eivät olekaan ykkösiä, vaan osa niistä on äärettömiä. Rayleighin periaatteen nojalla siis $\hat{R}_{\text{eff}}(n) \geq R_{\text{eff}}(n)$ kaikilla $n \geq 1$. Siispä myös

$$\hat{R}_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} \hat{R}_{\text{eff}}(n) \geq \lim_{n\to\infty} R_{\text{eff}}(n) = R_{\text{eff}} = \infty,$$

eli seurauksen 4.4 nojalla kärjestä 0 alkava symmetrinen satunnaiskävely on palautuva myös verkolla $\hat{G}$. □

Lemma 5.3 siis kertoo, että jos origosta alkava symmetrinen satunnaiskävely hilassa $\mathbb{L}^2$ on palautuva, niin se on palautuva myös hilassa $\mathbb{L}^1$, ja toisaalta, jos origosta alkava symmetrinen satunnaiskävely hilassa $\mathbb{L}^3$ on poistuva, sen täytyy olla poistuva myös hilassa $\mathbb{L}^d$ kaikilla $d \geq 4$.

Tiedetään, että jos verkko G on yhtenäinen, niin symmetrinen satunnaiskävely verkolla G on redusoimaton. Tätä tulosta ei todisteta täsmällisesti. Todistus kuitenkin perustuu siihen, että koska verkko G on yhtenäinen, niin mille tahansa sen kahdelle kärjelle löytyy niitä yhdistävä polku, ja koska satunnaiskävely on symmetrinen, valikoituu kävelyn seuraava kärki aina nykyisen kärjen naapureista tasaisesti satunnaisesti, jolloin erityisesti jokaisen suunnan valitsemisen todennäköisyys on aidosti positiivinen. Siispä mistä tahansa kärjestä päästään mihin tahansa kärkeen jotain polkua pitkin aidosti positiivisella todennäköisyydellä. Nyt ollaan valmiita todistamaan Pólyan lause.

Lauseen 5.2 todistus. Koska hila $\mathbb{L}^d$ on yhtenäinen kaikilla $d \geq 1$, niin symmetrinen satunnaiskävely on redusoimaton, ja täten origo kommunikoi kaikkien hilan kärkien kanssa. Siispä jos origo on palautuva, niin lauseen 2.11 nojalla kaikki hilan kärjet ovat palautuvia, ja tällöin symmetrinen satunnaiskävely on palautuva riippumatta siitä, mistä kärjestä se alkaa. Samalla tavalla jos origo on poistuva, niin lauseen 2.11 nojalla kaikki hilan kärjet ovat poistuvia, eli symmetrinen satunnaiskävely on poistuva riippumatta siitä, mistä kärjestä se alkaa. Siispä lemman 5.3 nojalla riittää todistaa, että origosta alkava symmetrinen satunnaiskävely on palautuva hilassa $\mathbb{L}^2$ ja poistuva hilassa $\mathbb{L}^3$. Lähteessä [5] esitetty todistus tapaukselle $\mathbb{L}^3$ pohjautuu lähteeseen [10].

Olkoon aluksi $d = 2$, jolloin seurauksen 4.4 nojalla riittää osoittaa, että $R_{\text{eff}} = \infty$. Tehdään tämä arvioimalla efektiivistä resistanssia alaspäin siten, että alarajasta tulee ääretön. Alarajoja saadaan pienentämällä verkon yksittäisiä sivu-resistansseja, ja esimerkiksi verkon kahden kärjen samastaminen tarkoittaakin sitä, että näiden kärkien välisen sivun resistanssi muutetaan nollaksi. Vaikka kyseisiä kärkiä ei alunperin yhdistäisikään sivu, voidaan niiden välillä silti ajatella olevan sivu, jonka resistanssi on ääretön, jolloin kärkiä samastettaessa tämä ääretön resistanssi muutetaan nollaksi. Tällaisissa tilanteissa verkon efektiivinen resistanssi voi siis Rayleighin periaatteen nojalla ainoastaan pienentyä.

Samalla tavalla kuin esimerkissä 4.7, verkosta $\mathbb{L}^2$ saadaan uusi verkko, kun jokaiselle $k = 1, 2, \ldots$ samastetaan kaikki joukon $\partial\Lambda_k = \{v \in \mathbb{Z}^2 : \delta(0, v) = k\}$ alkiot. Tällöin uusi verkko näyttää kuvan 4.3 mukaiselta, mutta kärkiä $i-1$ ja i yhdistääkin $8i-4$ verkon $\mathbb{L}^2$ sivua. Jokaisen sivun resistanssi on yksi, sillä satunnaiskävely on symmetrinen. Rinnankytkentälain nojalla kärkien $i - 1$ ja i välinen resistanssi on $\frac{1}{8i-4}$ kaikilla $i \geq 1$, ja sarjaankytkentälain nojalla kärkien 0 ja $n - 1$ välinen resistanssi on $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{8i-4}$ kaikilla $n \geq 2$. Siispä Rayleighin periaatteen nojalla saadaan

$$R_{\text{eff}}(n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{8i-4}$$

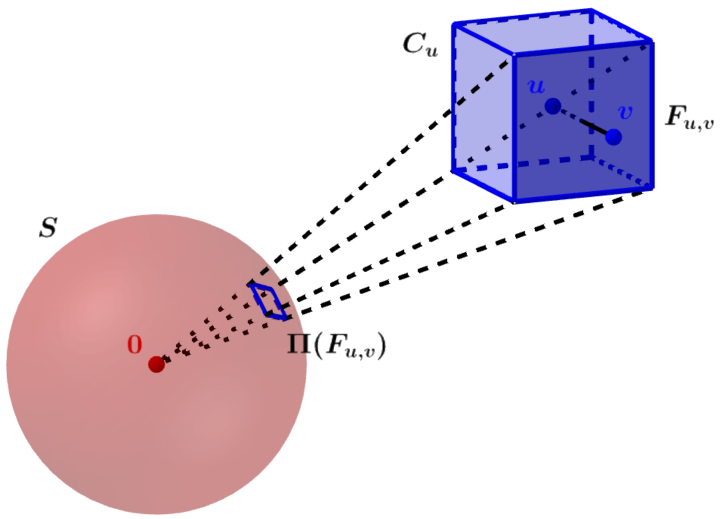
kaikilla $n \geq 2$. Koska $\frac{1}{8i-4}$ on positiivinen ja vähenevä kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$ ja $n \geq 2$, niin voidaan tehdä arvio

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{8i-4} &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} \frac{1}{8i-4}\, dx \geq \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} \frac{1}{8x-4}\, dx \\
&= \int_1^n \frac{1}{8x-4}\, dx = \frac{1}{8}[\ln(8n-4) - \ln(4)] \\
&= \frac{1}{8} \ln\left(\frac{8n-4}{4}\right) = \frac{1}{8} \ln(2n-1)
\end{aligned}$$

kaikilla $n \geq 2$. Siispä myös $R_{\text{eff}}(n) \geq \frac{1}{8}\ln(2n-1)$ kaikilla $n \geq 2$, mistä saadaan

$$R_{\text{eff}} = \lim_{n\to\infty} R_{\text{eff}}(n) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\ln(2n-1) = \infty.$$

Olkoon sitten $d = 3$, jolloin seurauksen 4.4 nojalla riittää löytää nollasta poikkeava $0/\infty$-virtaus, jonka energia on äärellistä. Kyseisen virtauksen konstruoimisessa käytetään geometrista lähestymistapaa, ja aluksi määritelläänkin avaruuden $\mathbb{R}^3$ kappaleita. Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^3$ origokeskisen yksikköpallon pinta. Olkoon $u \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$, ja olkoon C_u avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikkökuutio siten, että sen keskipiste on u ja sen reunat ovat akseleiden suuntaiset. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 5.2. Nyt selvästi jokaiselle kärjen u naapurille $v \in \mathbb{Z}^3$ pätee, että verkon sivu $\{u, v\}$ leikkaa kuution C_u yksikäsitteistä tahkoa. Merkitään tätä tahkoa $F_{u,v}$.



Kuva 5.2: Sivua $\{u, v\}$ pitkin kulkeva virta on itseisarvoltaan yhtä suuri kuin tahkon $F_{u,v}$ origokeskisen yksikköpallon pinnalla olevan projektion $\Pi(F_{u,v})$ pinta-ala. Kuvan mallina on ollut [5, Figure 1.4].

Virtauksen määrittelyyn tarvitaan vielä projektioita pinnalla S. Olkoon $\Pi(x)$ pinnan S ja puolisuoran, joka alkaa origosta ja kulkee pisteen x kautta, välinen leikkaus kaikilla $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Olkoon nyt $|j_{u,v}|$ sen pinnan $\Pi(F_{u,v})$ pinta-ala, joka muodostuu, kun jokainen piste $x \in F_{u,v}$ projisoidaan funktion $\Pi(x)$ avulla pinnalle S. Olkoon $j_{u,v}$ positiivinen jos ja vain jos avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreiden $\frac{1}{2}(u+v)$ ja $v - u$ välinen pistetulo on positiivinen. Olkoon lisäksi $j_{v,u} = -j_{u,v}$. Osoitetaan, että tämä j toteuttaa vaaditut ehdot. Aloitetaan osoittamalla, että j on $0/\infty$-virtaus. Määritelmän 3.1 kaksi ensimmäistä kohtaa seuraavat suoraan siitä, kuinka $j_{u,v}$ määriteltiin. Osoitetaan siis ainoastaan, että $J_u = 0$.

Tiedetään, että kuutiolla C_u on projektio $\Pi(C_u)$ pinnalla S. Kuvasta 5.2 katsottuna kuution C_u etummaisen, oikeanpuoleisen ja ylemmän tahkon projektiot muodostavat yhdessä projektion, joka on sama kuin $\Pi(C_u)$. Lisäksi, jos kuvasta 5.2 katsottuna valitaan kärjen u naapureista etummainen, oikeanpuoleinen tai ylempi, on tällöin vektoreiden $\frac{1}{2}(u+v)$ ja $v-u$ välinen pistetulo positiivinen, eli $j_{u,v}$ on positiivinen. Siispä kyseisille naapureille pätee $j_{u,v} = |j_{u,v}|$ ja summa näiden virtojen yli on projektion $\Pi(C_u)$ pinta-ala positiivisella merkillä varustettuna.

Toisaalta, myös kuution C_u takimmaisen, vasemmanpuoleisen ja alemman tahkon projektiot muodostavat yhdessä projektion $\Pi(C_u)$. Jos valitaan kärjen u naapureista takimmainen, vasemmanpuoleinen tai alempi, on pistetulo tällöin negatiivinen, eli $j_{u,v}$ on negatiivinen. Siispä kyseisille naapureille pätee $j_{u,v} = -|j_{u,v}|$ ja summa näiden virtojen yli on projektion $\Pi(C_u)$ pinta-ala negatiivisella merkillä varustettuna. Täten

$$J_u = \sum_{v\sim u} j_{u,v} = A\Big(\Pi(C_u)\Big) - A\Big(\Pi(C_u)\Big) = 0,$$

missä $A\Big(\Pi(C_u)\Big)$ on projektion $\Pi(C_u)$ pinta-ala.

Tämä perustelu pätee silloin, kun u sijoittuu kuvan 5.2 osoittamaan paikkaan, mutta sama idea pätee muillekin sijainneille. Tämä perustuu siihen, että kun otetaan projektiolta $\Pi(C_u)$ mikä tahansa piste, ja otetaan puolisuora, joka alkaa origosta ja kulkee kyseisen pisteen kautta, niin tämä puolisuora leikkaa kuution C_u kahta eri tahkoa. Toisen tahkon sisältämälle pisteen u naapurille v pätee $\frac{1}{2}(u+v)\cdot(v-u) > 0$ ja toisen tahkon sisältämälle naapurille $\frac{1}{2}(u+v)\cdot(v-u) < 0$. Siispä summaa J_u laskettaessa projektioiden $\Pi(F_{u,v})$ pinta-alat kumoavat toisensa, sillä kaksi erimerkkistä pistettä projisoituvat aina samaksi pisteeksi.

Osoitetaan seuraavaksi, että j on nollasta poikkeava virtaus. Olkoon $z \in \mathbb{Z}^3$ siten, että $z \sim 0$. Nyt $j_{z,0} \neq 0$, sillä jos olisi $j_{z,0} = 0$, niin tällöin pinnan $\Pi(F_{z,0})$ pinta-ala olisi nolla, mikä ei pidä paikkaansa. Lisäksi vektoreiden $\frac{1}{2}(z+0)$ ja $0-z$ väliselle pistetulolle pätee

$$\frac{1}{2}(z+0)\cdot(0-z) = -\frac{1}{2}\|z\|^2 < 0,$$

missä $\|\cdot\|$ on vektorinormi, eli kun merkitään $z = (z_1, z_2, z_3)$, niin $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$. Siispä $j_{z,0} < 0$, eli $j_{0,z} = -j_{z,0} > 0$, ja täten j on nollasta poikkeava virtaus.

Lopuksi osoitetaan vielä, että virtauksen j energia on äärellistä. Tiedetään, että on olemassa $c_1, c_2 < \infty$ siten, että

1. $|j_{u,v}| \leq \frac{c_1}{|u|^2}$, kun $u \neq 0$
2. $\left|\{u \in \mathbb{Z}^3 : |u| = n\}\right| \leq c_2 n^2$,

missä $|u| = \delta(0, u)$. Perustellaan nämä epäyhtälöt aloittaen ensimmäisestä. Tiedetään, että $\Pi(p) = \frac{p}{\|p\|}$ kaikilla $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Jos kuution C_u tahko $F_{u,v}$ on xy-tason suuntainen, saadaan

$$\begin{aligned}
|j_{u,v}| &\leq \max_{p \in F_{u,v}} \|\partial_x \Pi(p)\| \|\partial_y \Pi(p)\| \\
&= \max_{p \in F_{u,v}} \left\| \left(\frac{p_2^2 + p_3^2}{\|p\|^3}, \frac{-p_1 p_2}{\|p\|^3}, \frac{-p_1 p_3}{\|p\|^3} \right) \right\| \left\| \left(\frac{-p_1 p_2}{\|p\|^3}, \frac{p_1^2 + p_3^2}{\|p\|^3}, \frac{-p_2 p_3}{\|p\|^3} \right) \right\| \\
&= \max_{p \in F_{u,v}} \frac{\sqrt{p_2^2 + p_3^2}}{\|p\|^2} \frac{\sqrt{p_1^2 + p_3^2}}{\|p\|^2} \leq \max_{p \in F_{u,v}} \frac{\|p\|}{\|p\|^2} \frac{\|p\|}{\|p\|^2} = \max_{p \in F_{u,v}} \frac{1}{\|p\|^2}.
\end{aligned}$$

Täysin vastaava päättely voidaan tehdä myös kun tahko $F_{u,v}$ on xz- tai yz-tason suuntainen. Koska vektoreiden kolmioepäyhtälöstä $\|u\| \leq \|p\| + \|p - u\|$ saadaan $\|u\| - \|p - u\| \leq \|p\|$, niin selvästi on olemassa $c < \infty$, jolle pätee

$$|j_{u,v}| \leq \max_{p \in F_{u,v}} \frac{1}{\|p\|^2} \leq \frac{c}{\|u\|^2}.$$

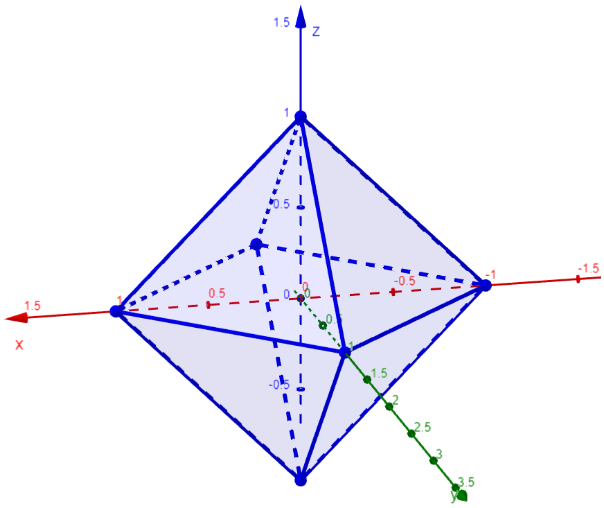
Tiedetään, että kun merkitään $u = (u_1, u_2, u_3)$, niin

$$3\|u\| = \|u\| + \|u\| + \|u\| \geq |u_1| + |u_2| + |u_3| = |u|.$$

Siispä $\|u\| \geq \frac{1}{3}|u|$ ja edelleen $\|u\|^2 \geq \frac{1}{9}|u|^2$. Nyt saadaan

$$|j_{u,v}| \leq \frac{c}{\|u\|^2} \leq \frac{9c}{|u|^2}.$$

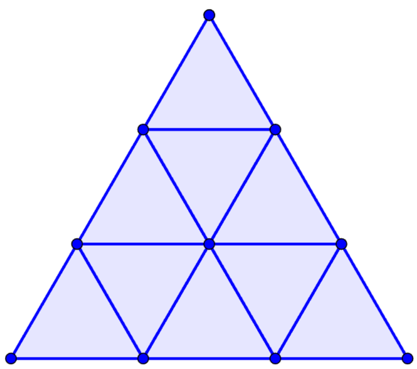
Perustellaan sitten toinen epäyhtälö. Joukon $\{u \in \mathbb{Z}^3 : |u| = n\}$ alkiot muodostavat kuvan 5.3 kaltaisen monitahokkaan. Siinä on kahdeksan tahkoa, jotka kaikki ovat keskenään samanlaisia tasasivuisia kolmioita, joiden sivun pituus on $\sqrt{2}n$. Jokaisen kolmion korkeus on $\sqrt{\frac{3}{2}}n$, joten niiden pinta-ala on $\frac{\sqrt{3}}{2}n^2$.



Kuva 5.3: Joukon $\{u \in \mathbb{Z}^3 : |u| = 1\}$ alkioiden muodostama monitahokas.

Kun $n \geq 2$, joukon $\{u \in \mathbb{Z}^3 : |u| = n\}$ alkiot sijoittuvat monitahokkaan tahkoille siten, että ne jakavat jokaisen kahdeksasta kolmion muotoisesta tahkosta pienempiin kolmioihin, joiden sivun pituus on $\sqrt{2}$. Tilanteen $n = 3$ yhtä tahkoa on havainnollistettu kuvassa 5.4. Jokaisen pienen kolmion korkeus on $\sqrt{\frac{3}{2}}$, joten niiden pinta-ala on $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pieniä kolmioita on siis yhdessä tahkossa n^2 kappaletta, eli koko monitahokkaassa niitä on $8n^2$ kappaletta. Koska jokainen pieni kolmio sisältää kolme kärkeä, niin koko monitahokkaassa kärkiä on enintään $3 \cdot 8n^2 = 24n^2$ kappaletta, eli

$$\left|\{u \in \mathbb{Z}^3 : |u| = n\}\right| \leq 24n^2.$$



Kuva 5.4: Yksi tilanteen $n = 3$ tahkoista ja sen sisältämät kolmiot.

Nyt päästään arvioimaan virtauksen j energiaa. Koska jokaisen sivun konduktanssi on yksi, saadaan edellä olevien epäyhtälöiden nojalla

$$\begin{aligned} E(j) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v \in \mathbb{Z}^3 \\ u \sim v}} \frac{j_{u,v}^2}{w_{u,v}} = \frac{1}{2} \sum_{u \neq 0} \sum_{v \sim u} \frac{j_{u,v}^2}{1} \leq \sum_{u \neq 0} \sum_{v \sim u} \left(\frac{c_1}{|u|^2} \right)^2 \\ &= \sum_{u \neq 0} \Big| \{ v \in \mathbb{Z}^3 : v \sim u \} \Big| \left(\frac{c_1}{|u|^2} \right)^2 = \sum_{u \neq 0} 6 \left(\frac{c_1}{|u|^2} \right)^2 \\ &= 6 \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \{ u \in \mathbb{Z}^3 : |u| = n \} \Big| \left(\frac{c_1}{n^2} \right)^2 \leq 6 \sum_{n=1}^{\infty} c_2 n^2 \left(\frac{c_1}{n^2} \right)^2 \\ &= 6 c_2 c_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \end{aligned}$$

sillä sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee. Täten j toteuttaa vaaditut ehdot. $\square$

Huomautus 5.4. Pólyan lauseen nojalla lemma 5.3 ei toimi toiseen suuntaan, eli jos symmetrinen satunnaiskävely on palautuva aliverkolla $\hat{G}$, ei se välttämättä ole palautuva verkolla G. Tämä nähdään siitä, että symmetrinen satunnaiskävely on poistuva verkolla $\mathbb{L}^3$, mutta palautuva sen aliverkolla $\mathbb{L}^2$.

Edellä nähty todistus ei ole ainoa tapa todistaa Pólyan lause. Yksi vaihtoehtoinen tapa löytyy lähteestä [6, s.218–219]. Siinä Pólyan lause todistetaan lauseen 2.10 avulla laskemalla ja arvioimalla todennäköisyyksiä symmetriselle satunnaiskävelylle $(X_n)_{n \geq 0}$. Tilanteissa $d = 1, 2$ lasketaan todennäköisyys $\mathbb{P}(X_{2n} = 0 \mid X_0 = 0)$, ja saadaan $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{2n} = 0 \mid X_0 = 0) = \infty$. Tilanteessa $d = 3$ arvioidaan tätä samaa todennäköisyyttä ylöspäin, jolloin saadaan $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{2n} = 0 \mid X_0 = 0) < \infty$. Palataan vielä lopuksi pelurin vararikko -esimerkkiin.

Esimerkki 5.5. Oletetaan esimerkin 2.23 tilanne, ja olkoon $p = \frac{1}{2} = q$. Tällöin $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ on symmetrinen satunnaiskävely verkolla $G = (\mathbb{Z}, E)$, jossa E sisältää kaikki sellaiset joukon $\mathbb{Z}$ alkioiden parit, jotka ovat Euklidisen etäisyyden yksi päässä toisistaan. Verkko G on siis $\mathbb{L}^1$ hila. Tällöin Pólyan lauseen nojalla satunnaiskävely X on palautuva. Siis jos pelaajalla on pelin alussa i euroa, on hänellä melkein varmasti sama rahasumma myös kierroksen n jälkeen jollain $n \geq 2$.

Viitteet

[1] Ian Anderson: *A First Course in Discrete Mathematics.* Springer London, 2000.

[2] Christel Geiss ja Stefan Geiss: *An introduction to probability theory* (luentomoniste). Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, 2009. http://users.jyu.fi/~miparvia/Opetus/Stokastiikka/introduction-probability.pdf, viitattu 12.5.2024

[3] C. Geiss ja S. Geiss: *Markov- prosessien jatkokurssi. Markov processes* (luentomoniste). 2021. http://users.jyu.fi/~geiss/lectures/markov.pdf, viitattu 4.6.2024

[4] Christel Geiss ja Stefan Geiss: *Stochastic Modeling* (luentomoniste). Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, 2020. http://users.jyu.fi/~geiss/lectures/models.pdf, viitattu 4.6.2024

[5] Geoffrey Grimmett: *Probability on Graphs. Random Processes on Graphs and Lattices.* Statistical Laboratory, University of Cambridge, 2012.

[6] Geoffrey Grimmett ja Dominic Welsh: *Probability: An Introduction.* Second Edition, Oxford University Press, 2014.

[7] Blake Hunter: *Gambler's Ruin and The Three State Markov Process* (pro gradu -tutkielma). Faculty of California Polytechnic University, Pomona, 2005. https://www1.cmc.edu/pages/faculty/bhunter/Masters.pdf, viitattu 25.6.2023

[8] L. Lovász: Random Walks on Graphs: A Survey. *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty*, Volume 2, pp. 1–46, Bolyai Society Mathematical Studies, 1993.

[9] Russell Lyons ja Yuval Peres: *Probability on Trees and Networks.* Cambridge University Press, 2016.

[10] Terry Lyons: A Simple Criterion for Transience of a Reversible Markov Chain. *The Annals of Probability*, Volume 11, pp. 393–402, 1983.

[11] Georg Pólya: Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Mathematische Annalen*, Volume 84, pp. 149–160, 1921.

[12] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, McGraw-Hill, Inc, 1964.

[13] Ville Tengvall: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan* (luentomoniste). Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto, 2023. https://tim.jyu.fi/files/610395/JoDiMA_2023_luentomoniste.pdf, viitattu 16.11.2024

[14] Robin J. Wilson: *Introduction to Graph Theory.* Fourth Edition, Addison Wesley, 1996.