Lipschitz-funktioiden tiheys Newton-Sobolev-avaruuksissa

Maisterintutkielma

Kirjoittaja: Mika Juhani Oksanen
Ohjaaja: Elefterios Soultanis

16-12-2024

Sisällys

Tiivistelmä

Sobolev-avaruudet ovat funktioavaruuksia, jotka koostuvat Lebesgue-avaruuden funktioista, joilla on olemassa tiettyyn kertalukuun asti olevat heikot derivaatat. Sobolev-avaruudet ovat Banach-avaruuksia, ja niillä on usein se hyödyllinen ominaisuus, että sileät funktiot ovat niissä tiheässä normin suhteen. Koska Sobolev-avaruuksien määritelmä nojaa heikon derivaatan käsitteeseen, niin niiden määritelmä vaatii avaruuden, jossa suunnan käsite on mielekäs.

Sobolev-avaruudet voidaan määritellä yleisissä metrisissä mitta-avaruuksissa käyttämällä apuna ylägradientin käsitettä. Funktion ylägradientti on Borel-funktio, jonka avulla voidaan hallita tutkittavan funktion heilahtelua poluilla. Tämän työkalun avulla voidaan määritellä niin sanotut Newton-Sobolev-avaruudet. Annettu p-integroituva funktio kuuluu Newton-Sobolev-avaruuteen, jos sillä on olemassa p-integroituva ylägradientti. Myös Newton-Sobolev-avaruudet ovat Banach-avaruuksia.

Ylägradientti on hyödyllinen työkalu, mutta sillä on myös eräitä rajoitteita. Eräs näistä on, että niiden joukko ei ole suljettu Lebesgue-avaruuden normin suhteen. Jono funktion ylägradientteja voi supeta funktioon, joka ei enää itsessään ole ylägradientti kyseiselle funktiolle. Tätä varten määritellään heikon ylägradientin käsite, joka yleistää ylägradientin käsitettä. Funktion heikkojen ylägradienttien joukko on suljettu Lebesgue-avaruuden normin suhteen, ja lisäksi heikkojen ylägradienttien joukosta voidaan löytää minimaalinen heikko ylägradientti, joka on luonnollinen gradientin normin korvaaja.

Koska suunnan käsite ei ole yleisissä metrisissä avaruuksissa mielekäs, niin Newton-Sobolev-avaruuksien yhteydessä ei enää voida puhua osittaisderivaatoista. Siten sileiden funktioiden normitiheys menetetään. Näiden korvaajaksi voidaan kuitenkin ottaa perinteiset Lipschitz-funktiot.

On vielä avoin kysymys, ovatko Lipschitz-funktiot tiheässä normin suhteen Newton-Sobolev-avaruuksissa kaikilla metrisillä avaruuksilla. Jos käsiteltävä metrinen avaruus on tuplaava, ja lisäksi toteuttaa Poincarén-epäyhtälön, niin tällöin voidaan osoittaa, että Lipschitz-funktiot ovat tiheässä normin suhteen Newton-Sobolev-avaruudessa. Itse asiassa myöhemmin on osoittautunut, että pelkkä avaruuden metrinen tuplaavuus riittää Lipschitz-funktioiden normitiheyteen.

Siinä missä aikaisemmat tiheystulokset ovat olleet normin suhteen, tiheyttä voidaan tarkastella myös muilla tavoilla. Eräs tälläinen on niin sanottu tiheys energian suhteen. Funktio on lähellä approksimoitavaa funktiota energiassa, jos se on lähellä funktiota Lebesgue-avaruudessa, ja lisäksi myös funktioiden minimaaliset heikot ylägradientit ovat lähellä toisiaan Lebesgue-avaruudessa. Tämä on heikompi ominaisuus kuin tiheys normissa, ja hiljattain on osoitettu, että Lipschitz-funktioiden energiatiheys pätee kaikissa metrisissä avaruuksissa. Tämän tutkielman päätulos on tämä energiatiheys kunnollisille metrisille avaruuksille, joille todistus helpottuu alkuperäisestä. Kunnolliset avaruudet ovat metrisiä avaruuksia, joiden suljetut ja rajoitetut osajoukot ovat kompakteja. Ne pitävät sisällään useimmat tärkeät avaruudet, kuten täydelliset monistot ja PI-avaruudet, jotka ovat tuplaavia ja Poincarén-epäyhtälön toteuttavia avaruuksia, ja joista Newton-Sobolev-avaruuksien teoria alunperin kehitettiin.

1 Johdanto

Funktioavaruudet $L^p(X)$, missä X on mitta-avaruus, muodostavat tärkean tutkintakohteen modernissa matemaattisessa analyysissä. Kyseiset avaruudet eivät ole tärkeitä vain itsessään, vaan myös monet niiden johdannaisista muodostavat myös tärkeitä tutkimuskohteita. Näistä johdannaisista eräät huomionarvoiset ovat niin sanotut Sobolev-avaruudet $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, jotka määritellään käyttämällä niin sanottuja heikkoja derivaattoja. Sobolev-avaruudet ovat Banach-avaruuksia ja niillä on myös se hyödyllinen ominaisuus, että sileät funktiot ovat niissä tiheässä. Koska sileitä funktioita on usein luonnollisesti helpompi käsitellä, niin monia todistuksia pystytään yksinkertaistamaan.

Sobolev-avaruuksien määritelmä nojaa kuitenkin osittaisderivaatan käsitteeseen, mikä puolestaan vaatii avaruuden, jossa suunnan käsitteellä on merkitystä. Yleisessä metrisessä avaruudessa näin ei välttämättä ole, joten Sobolev-avaruuden käsitettä ei suoraan pystytä näihin tilanteisiin yleistämään.

Sobolev-avaruudet voidaan kuitenkin laajentaa myös yleisten metristen avaruuksien tapaukseen, kun otetaan avuksi niin sanottu ylägradientin käsite. Tämän avulla voidaan määritellä yleisille metrisille avaruuksille niin sanotut Newton-Sobolev avaruudet. Kuitenkin kuten edellä todettiin, niin koska suunnan käsitteellä ei ole yleisessä metrisessä avaruudessa merkitystä, niin tässä yleistyksessä ei voida enää puhua myöskään sileistä funktioista, joten niiden hyödyllinen tiheys ei enää ole saatavilla. Korvaajaksi voidaan kuitenkin ottaa Lipschitz-funktiot, joiden tiheyteen tässä kirjoitelmassa paneudutaan. Tiheyttä tullaan tarkastelemaan tutulla tapaa normin suhteen, sekä myös niin sanotun energian suhteen.

2 Esitiedot

Tämä teksti ei vaadi esitietoina Sobolev-, Newton-Sobolev-avaruuksia, eikä myöskään tiheyttä energiassa, vaan näistä annetaan tarvittavat tiedot edempänä. Esitietoina vaaditaan erityisesti mitta- ja integraaliteorian perusteita ja myös ymmärrystä funktionaalianalyysistä. Esitiedot on jaettu eri osioihin, mutta yksikään ei varsinaisesti ole toista tärkeämpi.

2.1 Avaruuksista

Määritellään seuraava kompaktiuteen liittyvä avaruuden ominaisuus, joka tulee olemaan oleellinen energiatiheyden yhteydessä ([3], Määritelmä 2.3).

Määritelmä 2.1 (Kunnollinen avaruus)**.** *Sanotaan että metrinen avaruus (X, d) on kunnollinen, jos sen jokainen suljettu ja rajoitettu osajoukko on kompakti.*

Kunnollisuus on suhteellisen vahva ominaisuus, josta seuraa esimerkiksi avaruuden täydellisyys ([3], Lause 3.2).

Lause 2.2. *Jos metrinen avaruus (X, d) on kunnollinen, niin tällöin (X, d) on täydellinen.*

Toinen ominaisuus mikä avaruuden kunnollisuudesta seuraa, on separoituvuus. Väite on laajalti tunnettu, mutta koska sille ei löytynyt kirjallisuudesta hyvää lähdettä, niin annettakoon tässä sille lyhyt todistus.

Lause 2.3. *Jos metrinen avaruus (X, d) on kunnollinen, niin tällöin (X, d) on separoituva.*

Todistus. Olkoon $x_0 \in X$. Koska avaruus (X, d) on kunnollinen, niin jokainen suljettu pallo $\overline{B}(x_0, n), n \in N$ on kompakti. Koska jokainen kompakti joukko on separoituva, niin erityisesti jokaiselle pallolle $B(x_0, n), n \in N$ on olemassa tiheä numeroituva joukko A_n. Koska avaruudelle X pätee $X = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_0, n)$, niin joukko $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ on haluttu avaruuden (X, d) tiheä numeroituva joukko. □

2.2 Mitta- ja integraaliteoria

Yleisten mittojen sijaan usein käytetään niin sanottuja Borel-mittoja, jotka ovat mittoja, joilla jokainen Borel-joukko on mitallinen. Myös Borel-mitoilla on kuitenkin omat rajoitteensa, joten yleensä niihin liittyen tehdään muutamia lisäoletuksia, joiden avulla saadaan niin sanotut Radon-mitat. Ennen näiden määritelmää tarvitaan muutamia mittojen-ominaisuuksia ([6], sivu 212).

Määritelmä 2.4 (Sisä- ja ulkosäännöllisyys)**.** *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Kyseisen avaruuden mitta μ on ulkosäännöllinen, jos jokaiselle mitalliselle joukolle $A \subset X$ pätee*

$$\mu(A) = \inf_{U \supseteq A \text{ avoin}} \mu(U).$$

Vastaavasti mitta μ on sisäsäännöllinen, jos jokaiselle mitalliselle joukolle $A \subset X$ pätee

$$\mu(A) = \sup_{K \subseteq A \text{ kompakti}} \mu(K).$$

Näiden käsitteiden avulla voidaan määritellä niin sanotut Radon-mitat.

Määritelmä 2.5 (Radon-mitta)**.** *Borel-mitta μ on Radon-mitta, jos se on äärellinen jokaisella kompaktilla joukolla, ulkosäännöllinen jokaisella Borel-joukolla ja sisäsäännöllinen jokaisella avoimella joukolla.*

Tässä tutkielmassa oletetaan, että (X, d) on kunnollinen avaruus ja *mu* Radon-mitta kyseisessä avaruudessa. Kokoelmaa (X, d, μ) kutsutaan metriseksi mitta-avaruudeksi.

Mittoihin liittyy eräs hyödyllinen suppenemisen muoto, joka on niin sanottu suppeneminen mitan suhteen ([6], sivu 61).

Määritelmä 2.6 (Suppeneminen mitan suhteen)**.** *Funktiojono $f_n \in L^p(X)$ suppenee funktioon $f \in L^p(X)$ mitan μ suhteen, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon) = 0.$$

Suppeneminen mitan suhteen siis tarkoittaa, että sen joukon mitta, jolle f_n ja f ovat kaukana toisistaan, on nollamittainen.

Seuraavan lauseen voi hieman epätarkasti tulkita sanovan, että jokainen mitallinen funktio on melkein jatkuva. ([6], Lause 7.10)

Lause 2.7 (Lusinin lause)**.** *Olkoon (X, d) metrinen-avaruus, μ on Radon-mitta, $f : X \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio ja $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa jatkuva kompaktikantajainen funktio $g : X \to \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = g(x)$ kaikille x suljetussajoukossa F, jolle pätee $\mu(X \setminus F) < \epsilon$.*

2.3 Funktioista

Seuraava lause sanoo, että jokaista mitallista funktiota voidaan approksimoida hyvin läheisesti Borel-funktioilla sekä ylhäältä, että alhaalta käsin ([3], Lause 1.2).

Lause 2.8. *Olkoon (X, d, μ) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio. Tällöin on olemassa Borel-funktiot $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ siten, että pätee*

$$f_1 \leq f \leq f_2 \quad \text{ja} \quad f_1 = f_2 \quad \text{melkein kaikkialla.}$$

Usein funktioiden määrittelyjoukosta mielenkiintoisin osa on se, missä funktio saa nollasta eroavia arvoja. Tämän vuoksi tälle käsitteelle on hyvä olla oma nimensä.

Määritelmä 2.9 (Funktion kantaja)**.** *Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ kantaja supp on pienin suljettu joukko, jonka komplementissa funktio saa arvon nolla, eli*

$$supp(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Lisäksi sanotaan, että funktion kantaja on rajoitettu tai kompakti, jos supp rajoitettu tai kompakti.

Lipschitz-funktiot, joilla on tässä kirjoitelmassa keskeinen asema, määritellään perinteisellä tavalla.

Määritelmä 2.10 (Lipschitz-funktiot)**.** *Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Funktio $f : X \to Y$ on Lipschitz-funktio, jos on olemassa vakio $L \geq 0$ siten, että pätee*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2), \tag{1}$$

kaikille pisteille $x_1, x_2 \in X$

Lipschitz-vakio funktiolle $f : X \to Y$ määritellään kaavalla

$$LIP(f) = \sup_{x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2} \frac{d_Y(f(x_1), f(x_2))}{d_X(x_1, x_2)}.$$

Toisin sanoen, funktion f Lipschitz-vakio on pienin $L \geq 0$, jolle yhtälö (1) pätee.

Tarpeellinen käsite on myös niin sanottua asymptoottinen Lipschitz-vakio.

Määritelmä 2.11. *Olkoon jälleen (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Funktion $f : X \to Y$ asymptoottinen Lipschitz-vakio pisteessä $x \in X$ saadaan kaavalla*

$$lip_a f(x) = \lim_{r \to 0} \sup_{x_1 \neq x_2 \in B(x,r)} \frac{d_Y(f(x_1), f(x_2))}{d_X(x_1, x_2)}.$$

Jos x on erakkopiste, niin asetetaan $lip_a f(x) = 0$.

Merkitään lisäksi $\mathrm{LIP}_b(X)$ niiden Lipschitz-funktioiden joukkoa, joiden kantaja on rajoitettu.

Tarvitaan myös seuraavaa, perinteistä jatkuvuutta heikompaa jatkuvuuden määritelmää ([10], sivu 112).

Määritelmä 2.12 (Alhaalta puolijatkuvuus)**.** *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Funktio $f : X \to]-\infty, \infty]$ on alhaalta puolijatkuva, jos joukko $\{x \in X : f(x) > a\}$ on avoin jokaiselle pisteelle $a \in \mathbb{R}$.*

Vaihtoehtoisesti voidaan määritellä, että funktio f on puolijatkuva pisteessä $x_0 \in X$, jos pätee

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Tärkeä puolijatkuvuuteen liittyvä tulos, jota tullaan tarvitsemaan, on seuraava niin sanottu Bairen-lause. Sen nojalla alhaalta puolijatkuvalle funktiolle pystytään löytämään jono Lipschitz-funktioita, jotka approksimoivat kyseistä funktiota pisteittäin halutulla tarkkuudella ([10], Lause 4.2.2).

Lause 2.13 (Bairen-lause alhaalta puolijatkuville funktioille)**.** *Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $c \in \mathbb{R}$ vakio ja $f : X \to [c, \infty]$ alhaalta puolijatkuva funktio. Tällöin on olemassa jono (f_i) Lipschitz-funktioita määriteltynä avaruudessa X siten, että pätee*

$$c \leq f_i \leq f_{i+1} \leq f,$$

ja

$$\lim_{i \to \infty} f_i(x) = f(x) \quad \textit{kaikille pisteille } x \in X.$$

Tarvitaan myös niin sanottua Tietzen-jatkolausetta. Lauseen nojalla, tiettyjen oletusten vallitessa, annettu funktio, joka on määritelty avaruuden suljetussa osajoukossa, pystytään jatkamaan jatkuvaksi funktioksi koko avaruuteen siten, että myös mahdollinen funktion rajoittuneisuus säilyy ([4], Lause 4.22).

Lause 2.14. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus, S kyseisen avaruuden suljettu osajoukko, ja $f : S \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $g : X \to \mathbb{R}$ siten, että pätee $g|_S = f$.*

Lisäksi jos löytyy vakio $M \geq 0$ siten, että pätee $|f(x)| \leq M$ kaikille $x \in S$, niin g voidaan valita siten, että pätee $|g(x)| \leq M$ kaikille $x \in X$.

Myös absoluuttiset funktiot määritellään perinteisesti.

Määritelmä 2.15. *Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ väli. Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva välillä $[a, b]$, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että aina kun on annettu välit $]x_k, y_k[\subset [a, b]$, $k \in \{1, ..., N\}$, $]x_m, y_m[\cap]x_n, y_n[= \emptyset$, joille on*

$$\sum_{k=1}^{N}(y_k - x_k) < \delta,$$

niin tällöin pätee

$$\sum_{k=1}^{N} |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon,$$

Tarvitaan myös seuraava pieni lemma, jonka mukaan absoluuttisesti jatkuvat funktiot ovat suljettuja kertolaskun suhteen ([3], Lemma 1.58).

Lemma 2.16. *Jos u ja v ovat absoluuttisesti jatkuvia välillä $[a, b]$, niin tällöin myös uv on myös absoluuttisesti jatkuva välillä $[a, b]$.*

Seuraava pieni epäyhtälö on myös hyvä muistaa ([6], Epäyhtälö 6.17)

Lause 2.17 (Chebyshevin epäyhtälö)**.** *Olkoon $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ mitta-avaruus, $f \in \mathcal{L}^1(X)$ ja $R > 0$. Tällöin pätee epäyhtälö*

$$\mu(x : |f(x)| > R) \leq \frac{1}{R} \int_X |f(x)| \, d\mu.$$

Olkoon lisäksi $\mathcal{L}^p(X)$ avaruudessa X pisteittäin määritellyt funktiot, jotka ovat p-integroituvia.

2.4 Funktionaalianalyysi

Jos on annettu normiavaruus $(X, \|\cdot\|)$, niin avaruudessa määriteltyjen rajoitettujen lineaarikuvausten joukko muodostaa kyseisen avaruuden niin sanotun duaalin, joka on erittäin tärkeä käsite ([10], sivut 15-16).

Määritelmä 2.18 (Duaali ja biduaali)**.** *Olkoon* $(X, \|\cdot\|)$ *normiavaruus. Kyseisen avaruuden duaali on kaikkien rajoitettujen lineaarikuvausten* $x^* : X \to \mathbb{R}$ *muodostama vektoriavaruus. Duaalia merkitään* X^**.*

Duaaliin määritellään normi kaavalla

$$\|x^*\|_* = \sup_{\|x\|\leq 1} |x^*(x)|, x^* \in X^*.$$

Edelleen normiavaruuden $(X, \|\cdot\|)$ *biduaali on sen duaalin duaali, eli kaikkien muotoa* $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$ *olevien rajoitettujen lineaarikuvausten muodostama joukko. Biduaalia merkitään* X^{**}*.*

Duaalinormi $\|\cdot\|_*$ tekee itse asiassa duaaliavaruudesta aina täydellisen avaruuden ([11], Lause 4.3). Lisäksi normiavaruuden $(X, \|\cdot\|)$ ja sen biduaalin välille X^{**} voidaan määritellä luonnollinen lineaarikuvaus ([10], sivu 16).

Määritelmä 2.19 (Kanoninen kuvaus)**.** *Olkoon* $(X, \|\cdot\|)$ *normiavaruus. Kyseisen avaruuden niin sanottu kanoninen kuvaus* $J : X \to X^{**}$ *on kuvaus* $x \mapsto J_x$*, missä* $J_x : X^* \to \mathbb{R}$ *määritellään kaavalla* $J_x(x') = x'(x)$*.*

Kanoninen kuvaus siis liittää jokaiseen avaruuden alkioon $x \in X$ yksikäsitteisen biduaalin alkion $J_x \in X^{**}$. Kuvaus J_x antaa duaalin alkiolle $x' \in X^*$ tuloksena kyseisen alkion arvon pisteessä x. Kanonista kuvausta voidaan käyttää määrittelemään seuraava tärkeä avaruuden ominaisuus.

Määritelmä 2.20 (Refleksiivisyys)**.** *Sanotaan että normiavaruus* $(X, \|\cdot\|)$ *on refleksiivinen, jos kanoninen kuvaus* J *on surjektiivinen.*

Refleksiivisyys on erittäin vahva ominaisuus, josta voidaan johtaa monia avaruuden ominaisuuksia. Yksinkertaisin näistä on, että koska kanoninen kuvaus on määritelmänsä nojalla injektio, niin refleksiivinen avaruus on aina biduaalinsa kanssa isomorfinen. Lisäksi kanoninen kuvaus on myös isometrinen ([11], Määritelmä 4.5).

Toinen ominaisuus, joka refleksiivisyydestä seuraa, on että koska duaaliavaruus annetulla normilla varustettuna on täydellinen ([11], Lause 4.3 (a)), niin myös sen duaali X^{**} on täydellinen. Jos avaruus X on refleksiivinen biduaalinsa X^{**} kanssa, niin tällöin avaruuden X välttämättä oltava myös täydellinen.

On myös tärkeää muistaa, että ei riitä, että löytyy jokin lineaarikuvaus avaruudelta X avaruuteen X^{**}, joka on surjektiivinen, vaan nimenomaan kanonisen kuvauksen tulee olla surjektiivinen. On olemassa avaruuksia, jotka ovat isomorfisia biduaalinsa kanssa, mutta eivät kuitenkaan ole refleksiivisiä. Eräs tälläinen esimerkki on niin sanottu Jamesin avaruus ([7]).

Duaalin alkioiden avulla voidaan määritellä seuraava tärkeä suppenemisen muoto ([10], sivu 20).

Määritelmä 2.21 (Heikko suppeneminen)**.** *Olkoon* $(X, \|\cdot\|)$ *normiavaruus. Sanotaan että jono* $(x_n) \subset X$ *suppenee heikosti pisteeseen* $x \in X$*, jos kaikille duaalin alkioille* $x^* \in X^*$ *pätee*

$$x^*(x_n) \to x^*(x) \quad kun \quad n \to \infty.$$

Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla jokaisella Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ rajoitetulla jonolla on olemassa suppeneva osajono. Ääretönulotteisen Banach-avaruuden tapauksessa tämä ei pidä paikkaansa. Kuitenkin jos kyseinen Banach-avaruus on refleksiivinen, niin pätee seuraava heikkoon suppenemiseen liittyvä vastaava tulos ([10], Lause 2.4.1)

Lause 2.22. *Olkoon X refleksiivinen Banach-avaruus ja olkoon $(x_n) \subset X$ rajoitettu jono. Tällöin kyseisellä jonolla on olemassa osajono (x_{n_k}), joka on heikosti suppeneva.*

Vaikka heikko suppeneminen on nimensä mukaisesti normissa suppenemista heikompaa, niin siitä voidaan kuitenkin todeta seuraava normissa suppenemiseen liittyvä tärkeä tulos ([10], sivu 21).

Lemma 2.23 (Mazurin lemma)**.** *Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ Banach-avaruus, $x_0 \in X$, ja $(x_j) \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, jono, jolle pätee $x_j \to x_0$ heikosti, kun $j \to \infty$. Tällöin on olemassa jono konveksikombinaatioita*

$$\overline{x}_k = \sum_{j=k}^{m_k} a_{j,k} x_j,$$

missä $a_j \geq 0$ ja $a_{k,k} + \ldots + a_{m_k,k} = 1$, joille pätee

$$\|\overline{x}_k - x\| \to 0 \quad kun \quad k \to \infty.$$

2.5 Käyrä ja käyräintegraali

Käyrä on keskeinen, jota tässä tekstissä tullaan tarvitsemaan. Seuraavaksi määritellään, mikä käyrä tarkalleen on, ja muutamia siihen liittyviä käsitteitä ja tuloksia ([10], sivut 127-129).

Määritelmä 2.24 (Kompakti käyrä)**.** *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Käyrä avaruudessa X on jatkuva kuvaus $\gamma : I \to X$, missä $I \subset \mathbb{R}$ on väli. Käyrää kutsutaan kompaktiksi, jos I on kompakti.*

Määritelmä 2.25 (Käyrän pituus ja suoristuvuus)**.** *Kompaktin käyrän $\gamma : [a, b] \to X$ pituus l_γ määritellään kaavalla*

$$l_\gamma = \sup \Big\{ \sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \Big| a = t_0 < \cdots < t_k = b \Big\}.$$

Käyrää sanotaan suoristuvaksi, jos sen pituus on äärellinen.

Määritelmä 2.26 (Käyrän pituusfunktio)**.** *Jokaiselle suoristuvalle käyrälle on olemassa niin sanottu pituus-funktio*

$$s_\gamma : [a, b] \to [0, l_\gamma],$$

joka määritellään kaavalla

$$s_\gamma(t) = l_{\gamma|_{[a,t]}}.$$

Tällöin pätee

$$d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) \leq l_{\gamma|_{[t_1,t_2]}} = s_\gamma(t_2) - s_\gamma(t_1)$$

aina kun pätee $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$.

Annetaan muutama pituus-funktion perusominaisuus ([10], Lemma 5.1.4).

Lemma 2.27. *Suoristuvan käyrän $\gamma : [a,b] \to X$ pituusfunktio s_γ on kasvava ja jatkuva.*

Todistus. Suoraan määritelmästä nähdään, että s_γ on kasvava funktio. Kiinnitetään t_0, $a \leq t_0 \leq b$. Koska s_γ on on kasvava, niin toispuoleiset raja-arvot $s_\gamma^-(t_0)$ ja $s_\gamma^+(t_0)$ ovat olemassa. Tehdään vastaoletus, että pätee $s_\gamma(t_0) - s_\gamma^-(t_0) > \delta > 0$, jollekin $t_0 \in [a,b]$. Tällöin itse asiassa on $t_0 > a$, koska jos olisi $t_0 = a$, niin tällöin olisi välttämättä $s_\gamma^-(t_0) = s_\gamma(t_0)$. Olkoon $a < t_1 < t_0$. Funktion s_γ kasvavuuden nojalla pätee

$$l_{\gamma|_{[t_1,t_0]}} = s_\gamma(t_0) - s_\gamma(t_1) > \delta.$$

Lisäksi koska on $s_\gamma(t_0) - s_\gamma(t_1) = s_{\gamma|_{[t_1,t_0]}}(t_0)$, niin käyrän γ jatkuvuudesta saadaan luvut $t_1 = a_0 < ... < a_k < t_0$, joille pätee

$$\sum_{j=1}^{k} d(\gamma(a_j), \gamma(a_{j-1})) > \delta.$$

Määritellään $t_2 = a_k$. Tällöin pätee $l_{\gamma|_{[t_1,t_2]}} > \delta$ ja

$$l_{\gamma|_{[t_2,t_0]}} = s_\gamma(t_0) - s_\gamma(t_2) > \delta.$$

Induktiota käyttämällä voidaan löytää jono $(t_i), t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots < t_0$ siten, että pätee $l_{\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}} > \delta$. Tästä saadaan

$$l_{\gamma|_{[t_1,t_0]}} \geq l_{\gamma|_{[t_1,t_i]}} > (i-1)\delta$$

kaikille $i = 2, 3, ...$, mikä on ristiriita käyrän γ suoristuvuuden kanssa. On siis oltava $s_\gamma^-(t_0) = s_\gamma(t_0)$, kuten haluttiinkin. Yhtäsuuruus $s_\gamma^+(t_0) = s_\gamma(t_0)$ saadaan vastaavasti, mikä todistaa väitteen. □

Määritelmä 2.28 (Käyrän pituudella parametrisointi)**.** *Suoristuva käyrä $\gamma : [a,b] \to X$ voidaan parametrisoida käyrän pituudella. Tällöin saadaan käyrä $\gamma_s : [0, l_\gamma] \to X$ määriteltynä kaavalla*

$$\gamma_s(t) = \gamma(s_\gamma^{-1}(t)),$$

missä

$$s_\gamma^{-1}(t) = \sup\{s : s_\gamma(s) = t\}$$

on pituusfunktion s_γ toispuoleinen käänteisfunktio. Lisäksi koska s_γ on jatkuva, niin pätee

$$\sup\{s : s_\gamma(s) = t\} = \max\{s : s_\gamma(s) = t\}.$$

Funktio s_γ^{-1} on kasvava, ja lisäksi se on oikealta jatkuva, eli sille pätee $\lim_{t \to t_0^+} s_\gamma^{-1}(t) = s_\gamma^{-1}(t_0)$. Jos on $\lim_{t \to t_0^-} s_\gamma^{-1}(t) = s_0 < s_\gamma^{-1}(t_0)$, niin tällöin käyrä γ on vakio välillä $[s_0, s_\gamma^{-1}(t_0)]$. Käyrä $\gamma_s : [0, l_\gamma] \to X$ on siis se yksikäsitteinen käyrä, joka toteuttaa yhtälön

$$\gamma(t) = \gamma_s(s_\gamma(t))$$

kaikille $t \in [a,b]$. Lisäksi suoraan määritelmästä saadaan

$$l_{\gamma_s|_{[t,u]}} = u - t$$

kun $0 \leq t \leq u \leq l_\gamma$.

Hyödyllinen käsite on myös niin sanottu käyrän nopeus ([9], Määritelmä 3.5).

Määritelmä 2.29. *Käyrälle $\gamma : [a, b] \to X$ määritellään nopeus pistessä $t \in]a, b[$ kaavalla*

$$\lim_{h \to 0} \frac{d(\gamma(t + h, \gamma(t)))}{|h|},$$

silloin kun raja-arvo on olemassa.

Olkoon myös $\Gamma(X)$ kaikkien avaruuden X käyrien joukko. Määritellään seuraavaksi käyräintegraalin käsite ([10], sivu 131).

Määritelmä 2.30. *Suoristuvalle käyrälle $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ ja ei-negatiiviselle Borel-funktiolle $\rho : X \to [0, \infty]$ määritellään käyräintegraali kaavalla*

$$\int_\gamma \rho \, ds = \int_0^{l_\gamma} \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)| \, dt$$

Jos γ on parametrisoitu kaarenpituudella, niin tällöin on $|\gamma'(t)| = 1$ kaikkialla ([10], Väite 5.1.8).

Lause 2.31. *Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ kompakti suoristuva käyrä, ja olkoon $\gamma_s : [0, l_\gamma] \to X$ sen parametrisointi käyränpituudella. Tällöin käyrä γ_s on 1-Lipschitz jatkuva, ja erityisesti absoluuttisesti jatkuva, jolle pätee*

$$\lim_{u \to t, u \neq t} \frac{d(\gamma_s(t), \gamma_s(u))}{|t - u|} = 1,$$

melkein kaikille $t \in [0, l_\gamma]$.

Määritellään myös osakäyrän käsite ([3], Lemma 1.35).

Määritelmä 2.32 (Osakäyrä ja ylägradientti käyrän suhteen)**.** *Käyrä γ' on käyrän $\gamma : [0, l_y] \to X$ osakäyrä, jos $\gamma' = (\gamma)|_{[a,b]}$ joillekin $0 \leq a \leq b \leq l_\gamma$.*

Lisäksi sanotaan, että funktio g on ylägradientti funktiolle f käyrän γ suhteen, jos pätee

$$|f(\gamma'(0) - f(\gamma(l_{\gamma'})))| \leq \int_{\gamma'} g \, ds,$$

kaikille käyrän γ osakäyrille γ'.

3 Sobolev-avaruudet

Annetaan seuraavaksi jo johdannossa mainittujen Sobolev-avaruuksien määritelmä, joka pohjautuu niin sanottuihin heikkoihin derivaattoihin. Otetaan tätä varten käyttöön eräs hyödyllinen merkintä: Sanotaan että $\alpha = (\alpha_1, ..., a_n)$, missä $a_j \in \mathbb{N}$, on moni-indeksi, jonka niin sanottu aste määritellään kaavalla $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Lisäksi jos on $D_j = \partial/\partial x_j$, niin merkitään

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

ja $D^{(0,...,0)}\psi = \psi$. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tästä eteenpäin aina avoin joukko. Funktion heikot derivaatat määritellään seuraavasti ([1], Määritelmä 1.62).

Määritelmä 3.1 (Heikko derivaatta)**.** *Olkoon $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Sanotaan että funktio $D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$ on funktion u α:s heikko derivaatta, jos pätee*

$$\int_\Omega u D^\alpha \psi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u \psi \, dx$$

kaikille sileille kompaktin kantajan omaaville funktioille $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Heikkojen derivaattojen avulla voidaan määritellä lopulta niin sanotut Sobolev-avaruudet ([1], Määritelmät 3.1 ja 3.2).

Määritelmä 3.2 (Sobolev-avaruudet $W^{k,p}(\Omega)$)**.** *Olkoon $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$. Sobolev-avaruus $W^{k,p}(\Omega)$ on joukko*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ kun } 0 \leq \alpha \leq k\}.$$

Sobolev-avaruuksiin saadaan normit kaavoilla

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{jos } 1 \leq p < \infty$$
$$\|f\|_{W^{\infty,p}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| k} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Sobolev-avaruuden $W^{k,p}(\Omega)$ funktiot koostuvat siis niistä $L^p(\Omega)$ avaruuden funktioista, joiden heikot derivaatat tarvittavaan kertalukuun asti kuuluvat myös avaruuteen $L^p(\Omega)$.

Eräs perustavanlaatuisista tuloksista Sobolev-avaruuksille on, että ne ovat Banach-avaruuksia ([1], Lause 3.3).

Lause 3.3. *Avaruus $W^{k,p}(\Omega)$ on Banach-avaruus.*

Toinen Sobolev-avaruuksien hyödyllinen ominaisuus on, että sileät funktiot ovat niissä tiheässä normin suhteen ([1], Lause 3.17).

Lause 3.4. *Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin sileät funktiot $C^\infty(\Omega)$ ovat tiheässä avaruudessa $W^{k,p}(\Omega)$, eli toisin sanoen jokaiselle funktiolle $f \in W^{k,p}(\Omega)$ löytyy jono funktioita $(\varphi_j) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, joille pätee*

$$\|f - \varphi_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0, \quad \text{kun } j \to \infty.$$

3.1 Newton-Sobolev-avaruudet

Olkoon tästä eteenpäin $1 \leq p < \infty$ ja $X = (X, d, \mu)$ metrinen mitta-avaruus, jossa on metriikka d, ja positiivinen täydellinen Radon-mitta μ siten, että pätee

$$\mu(B) < \infty \quad \text{kaikille palloille } B \subset X.$$

Sobolev-avaruudet ovat hyödyllisiä työkaluja, mutta kuten johdannossa todettiin, niin niiden määrittely vaatii avaruuden, jossa on lokaali koordinaatisto, joiden avulla osittaisderivaatat voidaan määritellä. Tämän vuoksi Sobolev-avaruudet yleensä määritellään vain tapauksessa, jossa $X = \mathbb{R}^n$. Määritellään seuraavaksi niin sanottu ylägradientin käsite, jonka avulla Sobolev-avaruuksien määritelmää voidaan laajentaa yleisiin metrisiin avaruuksiin. ([3], Määritelmä 1.13).

Määritelmä 3.5 (Funktion ylägradientti)**.** *Borel-funktio* $g : X \to [0, \infty]$ *on ylägradientti funktiolle* $f : X \to \mathbb{R}$*, jos kaikille käyrille* $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ *pätee*

$$|f(\gamma(l_\gamma) - f(\gamma(0)))| \leq \int_\gamma g\, ds.$$

Ylägradientti antaa siis erään mahdollisen tavan hallita funktion heilahtelua. Ylägradientin avulla pystytään määrittelemään Sobolev-avaruuksien yleistykset, niin sanotut Newton-Sobolev-avaruudet.

Määritelmä 3.6 (Newton-Sobolev avaruudet)**.** *Olkoon* $f \in \mathcal{L}^p(X)$*. Määritellään seminormi*

$$\|f\|_{N^{1,p}(X)} = \big(\int_X |f|^p \, d\mu + \inf_g \int_X g^p \, d\mu \big)^{\frac{1}{p}},$$

missä infimum otetaan yli kaikkien funktion f *ylägradienttien* $g \in L^p(X)$*, ja lisäksi pätee sopimus* $\inf \emptyset = \infty$*. Määritellään*

$$\tilde{N}^{1,p}(X) = \{u : \|u\|_{N^{1,p}(X)} < \infty\}.$$

Edelleen voidaan määritellä ekvivalenssiluokkien kautta varsinainen Newton-Sobolev-avaruus $N^{1,p}$*:*

$$N^{1,p}(X) = \tilde{N}^{1,p}(X)/\sim,$$

missä $u \sim v$ *jos ja vain jos* $\|u - v\|_{N^{1,p}(X)} = 0$*.*

On hyvä huomata heti, että Newton-Sobolev-avaruudet määritellään vain tapauksessa $k = 1$. Syy tähän on se, että siinä missä ylägradientti tavallaan toimii gradientin, tai tarkemmin gradientin normin, korvikkeena, niin suuremman kertaluvun tapauksissa heikoille derivaatoille ei olla löydetty järkevää yleistystä tässä yleisyydessä.

Seuraava lause näyttää, että Newton-Sobolev-avaruudet $N^{1,p}(\Omega)$ ovat tavallaan hyvin luonnollinen laajennus Sobolev-avaruuksille $W^{1,p}(\Omega)$ ([3], Lause A.2).

Lause 3.7. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*. Tällöin pätee* $N^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$ *siinä mielessä, että jos on* $\underline{f} \in N^{1,p}(\Omega)$*, niin pätee* $f \in W^{1,p}(\Omega)$*, ja käänteisesti jokaiselle* $f \in W^{1,p}(\Omega)$ *on olemassa* $\overline{f} \in N^{1,p}(\Omega)$ *siten, että pätee* $\overline{f} = f$ *melkein kaikkialla joukossa* Ω*.*

3.2 Funktion p-heikko ylägradientti

Ylägradientti on varsinaisen gradientin normin yleistys, jolloin sitä voidaan luonnollisesti käyttää yleisemmissä tilanteissa, kuin todellista gradienttia. Kuitenkin myös ylägradientilla on tiettyjä rajoitteita, jotka voivat muodostua ongelmaksi. Eräs näistä on se, että ylägradienttien joukko ei ole suljettu avaruudessa $L^p(X)$. Jono ylägradientteja voi supeta funktioon, joka ei itse ole ylägradientti alkuperäiselle funktiolle. Tämän vuoksi otetaan käyttöön vielä uuden tyyppinen yleistys. Tämän määrittelemiseen tarvitaan kuitenkin uusi työkalu, niin kutsuttu p-modulus. ([3], Määritelmä 1.33)

Määritelmä 3.8 (Käyräjoukon p-modulus)**.** *Olkoon Γ käyräjoukko avaruudessa X. Käyräjoukon p-modulus määritellään kaavalla*

$$Mod_p(\Gamma) = \inf \int_X \rho^p \, d\mu,$$

missä infimum otetaan yli kaikkien Borel-funktioiden $\rho : X \to [0, \infty]$, joille pätee

$$\int_\gamma \rho \, ds \geq 1,$$

kaikille käyrille $\gamma \in \Gamma$.

Tarvitaan myös termiä p-melkein kaikille käyrille, mikä on vastine termille melkein kaikkialla. Jos jokin ominaisuus pätee p-melkein kaikille käyrille, niin se pätee kaikille käyrille, paitsi käyräjoukolle, jonka modulus on nolla. Käyräjoukon p-modulukselle pätee seuraavat ominaisuudet ([3], Lemma 1.34).

Lemma 3.9. *Käyräjoukon p-modulukselle pätee:*

1. *jos on $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, niin tällöin pätee $Mod_p(\Gamma_1) \leq Mod_p(\Gamma_2)$;*
2. *$Mod_p(\bigcup_{j=1}^\infty \Gamma_j) \leq \sum_{j=1}^\infty Mod_p(\Gamma_j)$;*
3. *jos jokaiselle käyrälle $\gamma \in \Gamma$ on olemassa osakäyrä $\gamma' \in \Gamma'$, niin tällöin pätee $Mod_p(\Gamma) \leq Mod_p(\Gamma')$.*

Todistus.

1. Tämä on selvää suoraan infimumin määritelmästä, sillä luvun $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_1)$ määrittelevä infimum otetaan suuremmasta joukosta, kuin luvun $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_2)$ vastaava.
2. Olkoon $\epsilon > 0$ ja ρ_j ei-negatiivinen Borel-funktio, jolle pätee

$$\int_\gamma \rho_j \, ds \geq 1 \text{ kaikille } \gamma \in \Gamma_j,$$

ja lisäksi

$$\int_X \rho_j^p \, d\mu \leq \mathrm{Mod}_p(\Gamma_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Määritellään $\rho = \sup_{j \in \mathbb{N}} \rho_j$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}_p\Big(\bigcup_{j=1}^\infty \Gamma_j\Big) &\leq \int_X \rho^p \, d\mu = \int_X (\sup_{j\in\mathbb{N}} \rho_j)^p \, d\mu \\ &\leq \int_X \sum_{j=1}^\infty \rho_j^p \, d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_X \rho_j^p \, d\mu \leq \sum_{j=1}^\infty \mathrm{Mod}_p(\Gamma_j) + \epsilon\end{aligned}$$

Ottamalla raja-arvo $\epsilon \to 0$ saadaan haluttu tulos.

3. Olkoon $\epsilon > 0$ ja ρ ei-negatiivinen Borel-funktio, jolle pätee

$$\int_\gamma \rho \, ds \geq 1 \text{ kaikille } \gamma \in \Gamma'$$

ja

$$\int_X \rho^p \, d\mu \leq \mathrm{Mod}_p(\Gamma') + \epsilon.$$

Olkoon $\gamma \in \Gamma$. Oletuksen nojalla on olemassa käyrän γ osakäyrä $\gamma' \in \Gamma'$. Tästä saadaan

$$\int_\gamma \rho \, ds \geq \int_{\gamma'} \rho \, ds \geq 1.$$

Joten pätee

$$\mathrm{Mod}_p(\Gamma) \leq \int_X \rho^p \, d\mu \leq \mathrm{Mod}_p(\Gamma') + \epsilon \to \mathrm{Mod}_p(\Gamma'), \text{ kun } \epsilon \to 0.$$

□

Käyttämällä p-modulusta voidaan määritellä niin sanottu p-heikko ylägradientti ([10], sivu 158).

Määritelmä 3.10 (Funktion p-heikko ylägradientti)**.** *Borel-funktio $g : X \to [0, \infty]$ on p-heikko ylägradientti funktiolle $f : X \to \mathbb{R}$, jos se on funktion f ylägradientti p-melkein kaikille käyrille.*

Sen sijaan että funktion p-heikon ylägradientin oletetaan olevan Borel-funktio, niin sen sijaan määrittely voitaisiin tehdä vain mitallisten funktioiden avulla (katso esimerkiksi [3], Määritelmä 1.32). Kun p-heikot ylägradientit määritellään kuten tässä, niin käsiteltäessä avaruuteen $L^p(X)$ kuuluvia p-heikkoja ylägradientteja täytyy muistaa, että tosiasiassa käsitellään vain kyseisten funktioiden Borel-edustajia.

Eräs p-heikkojen ylägradienttien etu verrattuna pelkkiin ylägradientteihin on, että pystytään aina löytämään pienin p-heikko ylägradientti.

Lemman 3.9 kohdasta (2) saadaan seuraava hyödyllinen seuraus ([3], Seuraus 1.39).

Lemma 3.11. *Olkoon g funktion u p-heikko ylägradientti ja vastaavasti g' funktion v p-heikko ylägradientti. Tällöin $g + g'$ on funktion $u + v$ p-heikko ylägradientti.*

Todistus. Olkoon Γ_1 niiden käyrien joukko, joille g ei ole ylägradientti funktiolle u, ja vastaavasti Γ_2 se käyräjoukko, joille g' ei ole ylägradientti funktiolle v. Tällöin oletuksen nojalla on $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_1) = \mathrm{Mod}_p(\Gamma_2) = 0$.

Jos käyrälle γ pätee sekä $\gamma \in \Gamma(X) \setminus \Gamma_1$, että $\gamma \in \Gamma(X) \setminus \Gamma_2$, niin sille saadaan kolmioepäyhtälöllä

$$\begin{aligned} |(u+v)(\gamma(0)) - (u+v)(\gamma(l_\gamma))| &\leq |u(\gamma(0)) - u(\gamma(l_\gamma))| + |v(\gamma(0)) - v(\gamma(l_\gamma))| \\ &\leq \int_\gamma g \, ds + \int_\gamma g' \, ds = \int_\gamma (g + g') \, ds. \end{aligned}$$

Tämä pätee käyrille $\gamma \in \Gamma(X) \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. Lemman 3.9 kohdan (2) nojalla pätee $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = 0$, eli voidaan todeta, että $g + g'$ on p-heikko ylägradientti funktiolle $u + v$. □

Yleisesti $g - g'$ ei ole p-heikko ylägradientti funktiolle $u - v$. Yleensä p-moduluksen varsinaista arvoa mielenkiintoisempia ovat tilanteet, joissa p-modulus on saa arvon nolla. Tätä varten on hyödyllistä olla ekvivalentti ominaisuus tälle tapaukselle ([3], Lause 1.37):

Lause 3.12. *Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:*

1. *$Mod_p(\Gamma) = 0$;*
2. *on olemassa ei-negatiivinen Borel-funktio $\rho \in L^p(X)$ siten, että $\int_\gamma \rho\, ds = \infty$ kaikille poluille $\gamma \in \Gamma$.*

Todistus. "(1) $\implies$ (2)"

Koska käyräjoukon Γ p-modulus on nolla, niin kaikille $n \in \mathbb{N}$ on olemassa ei-negatiivinen Borel-funktio ρ_n siten, että

$$\|\rho_n\|_{L^p(X)} \leq 2^{-n} \text{ ja } \int_\gamma \rho_n\, ds \geq 1 \text{ kaikille } \gamma \in \Gamma.$$

Määritellään funktio $\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \in L^p(X)$. Tällöin on

$$\int_\gamma \rho\, ds = \infty \text{ kaikille } \gamma \in \Gamma.$$

"(2) $\implies$ (1)"

Oletuksen nojalla jos $\gamma \in \Gamma$, niin pätee $\int_\gamma \rho\, ds = \infty$. Tällöin on myös

$$\int_\gamma \frac{\rho}{n}\, ds = \infty \geq 1 \text{ kaikille } \gamma \in \Gamma.$$

Täten $\mathrm{Mod}_p(\Gamma) \leq \|\frac{\rho}{n}\|^p_{L^p(X)} \to 0$, kun $n \to \infty$, mikä todistaa väitteen. □

Seuraava lause vahvistaa p-heikkojen ylägradienttien määritelmää ([3], Lemma 1.40).

Lemma 3.13. *Olkoon g p-heikko ylägradientti funktiolle f avaruudessa X. Määritellään lisäksi käyräjoukko*

$$\Gamma = \{\gamma \in \Gamma(X) : \ g \textit{ ei ole ylägradientti funktiolle } f \textit{ polun } \gamma \textit{ suhteen}\}.$$

Tällöin pätee $Mod_p(\Gamma) = 0$.

Todistus. Olkoon Γ' niiden polkujen $\gamma' : [0, l_\gamma] \to X$ joukko, joille pätee

$$|f(\gamma'(0)) - f(\gamma'(l_y))| \nleq \int_{\gamma'} g\, ds,$$

jolloin koska g on p-heikko ylägradientti funktiolle f, niin pätee $\mathrm{Mod}_p(\Gamma') = 0$. Lisäksi joukon Γ määritelmän nojalla jokaiselle $\gamma \in \Gamma$ on olemassa osakäyrä $\gamma' \in \Gamma'$. Lemman 3.9 (3) nojalla pätee $\mathrm{Mod}_p(\Gamma) = 0$. □

Seuraavia lemmoja varten tarvitaan muutamien käyräjoukkojen määritelmiä ([3], Määritelmä 1.41).

Määritelmä 3.14. *Olkoon $E \subset X$. Määritellään käyräjoukot*

$$\Gamma_E = \{\gamma \in \Gamma(X) : \gamma^{-1}(E) \neq \emptyset\} \quad ja \quad \Gamma_E^+ = \{\gamma \in \Gamma(X) : m_1(\gamma^{-1}(E)) > 0\},$$

missä m_1 on Lebesguen-mitta, joka on jatkettu ulkomitaksi kaikille avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukoille.

Seuraava lemma sanoo, että nollamittaista joukkoa aidosti leikkaavien polkujen p-moduluksen täytyy olla nolla ([3], Lemma 1.42).

Lemma 3.15. *Jos $\mu(E) = 0$, niin tällöin on $Mod_p(\Gamma_E^+) = 0$ kaikilla $p \geq 1$.*

Todistus. Olkoon $F \supset E$ Borel-joukko, jolle pätee $\mu(F) = 0$, ja olkoon $\rho = \infty \cdot \chi_F$, missä χ_F on joukon F indikaattorifunktio. Joukon Γ_E^+ määritelmän ja oletuksen $F \supset E$ nojalla käyrälle $\gamma \in \Gamma_E^+$ pätee $m_1(\gamma^{-1}(F)) \neq 0$. Lisäksi koska $\gamma^{-1}(F)$ on Borel-joukko, niin funktion ρ määritelmästä saadaan

$$\int_\gamma \rho \, ds = \infty \text{ kaikille } \gamma \in \Gamma_E^+. \tag{2}$$

Yhtälöstä (2), tiedosta $\mu(F) = 0$ ja funktion ρ määritelmästä saadaan

$$\mathrm{Mod}_p(\Gamma_E^+) \leq \int_X \rho^p \, d\mu = 0,$$

mikä todistaa väitteen. □

Lisäksi p-heikoilla ylägradienteilla on se hyödyllinen ominaisuus, että vaikka niitä muutettaisiin nollamittaisissa joukoissa, niin ne säilyvät p-heikkoina ylägradienttina. Tämä saadaan suoraavan lemman seurauksena ([3], Lemma 1.43).

Lemma 3.16. *Olkoon g ja $\tilde{g}$ ei-negatiivisia Borel-funktioita määriteltynä avaruudessa X siten, että $g = \tilde{g}$ melkein kaikkialla. Tällöin pätee*

$$\int_\gamma g \, ds = \int_\gamma \tilde{g} \, ds$$

p-melkein kaikille käyrille γ.

Todistus. Olkoon $E = \{x \in X : g(x) \neq \tilde{g}(x)\}$. Koska g on Borel-funktio, niin $\int_\gamma g \, ds$ on määritelty kaikille käyrille γ. Kaikille $\gamma \in \Gamma(X) \setminus \Gamma_E^+$ pätee

$$\int_\gamma g \, ds = \int_\gamma \tilde{g} \, ds.$$

Koska määritelmän nojalla on $\mu(E) = 0$, niin Lemman 3.15 perusteella voidaan todeta, että pätee $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_E^+) = 0$, eli väite pätee p-melkein kaikille käyrille γ. □

Lemmasta 3.16 saadaan välittömästi haluttu seuraus ([3], Seuraus 1.44).

Seuraus 3.17. *Olkoon g p-heikko ylägradientti funktiolle f, ja olkoon $\tilde{g} = g$ melkein kaikkialla, ja lisäksi $\tilde{g} \geq 0$. Tällöin myös $\tilde{g}$ on p-heikko ylägradientti funktiolle f.*

Seuraava hieman tekninen tulos antaa tavan löytää funktiolle p-heikko ylägradientti ([3], Lause 1.50)

Lause 3.18. *Oletetaan että on $\mu(E) = 0$, ja että funktiolle $g \geq 0$ pätee p-melkein kaikille käyrille $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$*

$$\gamma(0), \gamma(l_\gamma) \in E \quad \text{tai} \quad |u(\gamma(0)) - u(\gamma(l_\gamma))| \leq \int_\gamma g\, ds. \tag{3}$$

Tällöin funktio g on p-heikko ylägradientti funktiolle u.

Todistus. Olkoon Γ niiden käyrien γ joukko, joilla on olemassa jokin osakäyrä, jolle yhtälö (3) ei päde. Tällöin on $\mathrm{Mod}_p(\Gamma) = 0$ Lemman 3.9 (3) nojalla. Määritellään lisäksi joukko $\Gamma(E) = \{\gamma : \gamma \subset E\}$. Koska on $\mu(E) = 0$, niin pätee $\mathrm{Mod}_p(\Gamma(E)) \leq \mathrm{Mod}_p(\Gamma_E^+) = 0$ Lemman 3.15 nojalla.

Valitaan käyrä $\gamma \in \Gamma(X) \setminus (\Gamma \cup \Gamma(E))$. Tällöin on olemassa $t \in [0, l_\gamma]$ siten, että pätee $\gamma(t) \notin E$. Jos $t = 0$ tai $t = l_\gamma$, niin pätee

$$|u(\gamma(0)) - u(\gamma(l_\gamma))| \leq \int_\gamma g\, ds$$

oletuksen nojalla. Muulloin saadaan

$$\begin{aligned} |u(\gamma(0)) - u(\gamma(l_\gamma))| &\leq |u(\gamma(0) - u(\gamma(t)))| + |u(\gamma(t) - u(\gamma(l_\gamma)))| \\ &\leq \int_{\gamma|_{[0,t]}} g\, ds + \int_{\gamma|_{[t,l_\gamma]}} g\, ds = \int_\gamma g\, ds, \end{aligned}$$

koska kohdan (3) jälkimmäinen puoli pätee käyrille $\gamma|_{[0,t]}$ ja $\gamma|_{[t,l_\gamma]}$. Voidaan siis todeta, että g on p-heikko ylägradientti funktiolle u, mikä haluttiinkin näyttää. □

Lauseesta 3.18 saadaan välittömästä seuraava seuraus, kun asetetaan $E = \{x \in X : |u(x)| = \infty\}$. ([3], Seuraus 1.51)

Seuraus 3.19. *Olkoon $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funktio, joka on äärellinen melkein kaikkialla. Oletetaan lisäksi, että p-melkein kaikille käyrille $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ funktiolle $g \geq 0$ pätee*

$$|u(\gamma(0))| = |u(\gamma(l_\gamma))| = \infty \quad \text{tai} \quad |u(\gamma(0)) - u(\gamma(l_\gamma))| \leq \int_\gamma g\, ds.$$

Tällöin funktio g on p-heikko ylägradientti funktiolle u.

Seuraava lause antaa erittäin hyödyllisen tiedon, että p-heikkoja ylägradientteja voidaan approksimoida ylägradienteilla ([3], Lemma 1.46).

Lause 3.20. *Olkoon g p-heikko ylägradientti funktiolle f. Tällöin on olemassa jono (g_j) ylägradientteja, joille pätee*

$$\lim_{j \to \infty} \|g_j - g\|_{L^p(X)} = 0.$$

Lisäksi ylägradientit g_j voidaan valita niin, että pätee $g_j \geq g$ kaikille $j \in \mathbb{N}$.

Todistus. Olkoon Γ niiden polkujen $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ joukko, joille pätee

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(l_\gamma))| \nleq \int_\gamma g' \, ds.$$

Oletuksen nojalla on $\mathrm{Mod}_p(\Gamma) = 0$, joten Lauseen 3.12 nojalla on olemassa ei-negatiivinen Borel-funktio $\rho \in L^p(X)$, jolle pätee

$$\int_\gamma \rho ds = \infty$$

kaikille käyrille $\gamma \in \Gamma$. Määritellään funktio

$$g_j = g + \frac{\rho}{j}.$$

Tällöin jono (g_j) koostuu ylägradienteista, jotka täyttävät halutut vaatimukset. □

Edellinen lause antaa myös toisen suunnan todistukselle, että p-heikot ylägradientit voitaisiin itse asiassa määritellä ylägradienttien joukon sulkeumana avaruudessa $L^p(X)$ ([3], Lause 2.10).

Seuraavaa tärkeää lemmaa tarvitaan näyttämään, että p-heikot ylägradientit käyttäytyvät hyvin suppenemisen suhteen. ([3], Lemma 2.1).

Lemma 3.21 (Fugleden-lemma). *Oletetaan että $g_j \to g$ avaruudessa $L^p(X)$, kun $j \to \infty$. Tällöin on olemassa osajono g_{j_k} siten, että p-melkein kaikille käyrille pätee*

$$\int_\gamma g_j \, ds \to \int_\gamma g \, ds, \text{ kun } j \to \infty,$$

missä lisäksi kaikki integraalit ovat hyvin määriteltyjä ja reaaliarvoisia.

Lisäksi p-melkein kaikille käyrille pätee

$$\int_\gamma |g_j - g| \, ds \to 0 \quad \text{kun } j \to \infty.$$

Todistus. Tarvittaessa siirtymällä osajonoon, voidaan olettaa, että on $\|g_j - g\|_{L^p(X)} < 2^{-j}$.

Määritellään käyräjoukot

$$\tilde{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma(X) : \int_\gamma g_j \, ds \not\to \int_\gamma g \, ds, \text{ kun } j \to \infty\},$$

$$\Gamma_k = \{\gamma \in \Gamma(X) : \limsup_{j\to\infty} \int_\gamma |g_j - g| \, ds > \frac{1}{k}\}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Suoraan käyräjoukkojen määritelmästä nähdään, että pätee kuuluvuus $\tilde{\Gamma} \subset \bigcup_{k=1}^\infty \Gamma_k$. Näytetään pätee että $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_k) = 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, jolloin väite seuraa käyttämällä Lausetta 3.9 (2).

Olkoon $\rho_m = k \sum_{j=m+1}^\infty |g - g_j|$. Tällöin suoraan määritelmästä saadaan

$$\int_\gamma \rho_m \, ds = \int_\gamma k \sum_{j=m+1}^\infty |g - g_j| \, ds > 1 \text{ kaikille käyrille } \gamma \in \Gamma_k \text{ ja } m \in \mathbb{N},$$

joten $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_k) \le \|\rho_m\|^p_{L^p(X)} < (k2^{-m})^p \to 0$, kun $m \to \infty$, kuten haluttiinkin.

Lisäksi p-melkein kaikille käyrille pätee

$$\int_\gamma |g_j - g|\, ds \to 0 \quad \text{kun } j \to \infty.$$

Tämä seuraa suoraan määritelmästä, koska $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_k) = 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Vaihtoehtoisesti jo todistettua osiota voidaan soveltaa funktioihin $g'_j = |g_j - g|$ ja $g' = 0$. □

Fugleden lemman avulla voidaan todistaa seuraava hyödyllinen suppenemistulos ([3], Lause 2.2).

Lause 3.22. *Olkoon f mitallinen funktio ja oletetaan lisäksi, että funktiot $g_j \in L^p(X)$ ovat p-heikkoja ylägradientteja funktiolle f, $j \in \mathbb{N}$, ja joille pätee $g_j \to g$ avaruudessa $L^p(X)$, kun $j \to \infty$. Tällöin g on p-heikko ylägradientti funktiolle f.*

Todistus. Lemman 3.13 nojalla p-melkein kaikille käyrille γ pätee, että g_j on ylägradientti funktiolle f käyrän γ suhteen. Toisaalta Lemman 3.21 nojalla, p-melkein kaikille käyrille γ pätee $\int_\gamma g_j\, ds \to \int_\gamma g\, ds \in \mathbb{R}$, kun $j \to \infty$. Lemman 3.9 (2) nojalla molemmat ominaisuudet toteutuvat p-melkein kaikille käyrille. Olkoon $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ eräs näistä käyristä. Tällöin on

$$|f(\gamma(l_\gamma)) - f(\gamma(0))| \le \lim_{j\to\infty} \int_\gamma g_j\, ds = \int_\gamma g\, ds,$$

jolloin määritelmän nojalla pätee, että g on p-heikko ylägradientti funktiolle f. □

Vastaava suppenemistulos ei pätisi, jos tarkasteltaisiin pelkkiä ylägradientteja, kuten seuraava esimerkki näyttää ([3], Esimerkki 1.31).

Esimerkki 3.23. *Olkoon $E = \{0\} \subset X = \mathbb{R}^2$ ja $1 < p < 2$. Olkoon lisäksi $f = \chi_E$ ja*

$$g_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{j|x|}, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Funktio g_j on ylägradientti funktiolle f ja koska $\|g_j\|_{L^p(X)} \to 0$, kun $j \to \infty$, niin pätee $\|f\|_{N^{1,p}(X)} = 0$. Kuitenkaan nollafunktio ei ole ylägradientti funktiolle f, eli ylägradientit eivät ole suljettuja kyseisen suppenemisen suhteen.

Käyräjoukkojen p-heikoilla ylägradienteilla on myös lattiisi-ominaisuus. ([3], Lemma 2.6).

Lemma 3.24. *Olkoon f mitallinen funktio ja $g_1, g_2 \in L^p(X)$ p-heikkoja ylägradientteja funktiolle f. Tällöin myös $g = \min\{g_1, g_2\}$ on p-heikko ylägradientti funktiolle f.*

Todistus. Lauseen 3.12 nojalla p-melkein kaikille käyrille γ pätee, että funktiot g_1 ja g_2 ovat ylägradientteja funktiolle f käyrän γ suhteen. Toisaalta Lemman 3.13 nojalla p-melkein kaikille käyrille γ avaruudessa X pätee $\int_\gamma (g_1 + g_2)\, ds < \infty$. Lemman 3.9 (2) nojalla molemmat ominaisuudet toteutuvat p-melkein kaikille käyrille γ. Olkoon $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ yksi niistä käyristä, joille molemmat pätevät.

Määritellään joukko $E = \{t \in (0, l_\gamma) : g_1(\gamma(t)) \le g_2(\gamma(t))\}$. Tällöin $E \subset \mathbb{R}$ on Borel-joukko, joten on olemassa avoimet joukot $(0, l_\gamma) \supset U_1 \supset U_2 \supset ... \supset E$ siten, että $m_1(U_n \setminus E) \to 0$, kun $n \to \infty$, missä m_1 on yksiulotteinen Lebesguen-mitta.

Lemman [[3], Lemma 1.4] nojalla kiinnitetylle indeksille n joukko U_n voidaan kirjoittaa pareittain pistevieraana yhdisteenä $U_n = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ avoimia välejä $I_i = (a_i, b_i)$, missä osa väleistä voi olla tyhjiä välejä. Tästä saadaan

$$\begin{aligned} |f(\gamma(0)) - f(\gamma(l_\gamma))| &\le |f(\gamma(0)) - f(\gamma(a_1))| + |f(\gamma(a_1)) - f(\gamma(b_1))| \\ &\quad + |f(\gamma(b_1)) - f(\gamma(l_\gamma))| \\ &\le \int_{I_1} g_1(\gamma(t))\, dt + \int_{[0,l_\gamma]\setminus I_1} g_2(\gamma(t))\, dt. \end{aligned}$$

Samalla tavalla jatkamalla saadaan kaikille $j \in \mathbb{N}$

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(l_\gamma))| \le \int_{\cup_{i=1}^{j} I_i} g_1(\gamma(t))\, dt + \int_{[0,l_\gamma]]\setminus \cup_{i=1}^{j} I_i} g_2(\gamma(t))\, dt.$$

Ottamalla raja-arvo $j \to \infty$ ja käyttämällä monotonisen ja dominoidun konvergenssin lauseita saadaan

$$|u(\gamma(0)) - u(\gamma(l_\gamma))| \le \int_{U_n} g_1(\gamma(t))\, dt + \int_{[0,l_\gamma]\setminus U_n} g_2(\gamma(t))\, dt.$$

Käyttämällä monotonisen ja dominoidun konvergenssin lauseita vielä kerran saadaan

$$|u(\gamma(0)) - u(\gamma(l_\gamma))| \le \int_{E} g_1(\gamma(t))\, dt + \int_{[0,l_\gamma]\setminus E} g_2(\gamma(t))\, dt = \int_\gamma g\, ds,$$

eli myös g on ylägradientti funktiolle u polun γ suhteen, mikä haluttiinkin näyttää. □

Myös lattiisi-ominaisuus puuttuu pelkiltä ylägradienteilta ([3], Esimerkki 2.8).

Esimerkki 3.25. *Olkoon $f = \chi_{\{0\}} \in N^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < 2$ ja olkoon*

$$g(x) = \begin{cases} 1/|x|, |x| \le 1, \\ 0, |x| > 1, \end{cases}$$

joka on funktion f ylägradientti. Määritellään lisäksi

$$E_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \in \bigcup_{j=1}^{\infty} [2^{-2j}, 2^{1-2j}], \right\}$$

$E_2 = \mathbb{R}^2 \setminus E_1$ ja $g_j = g\chi_{E_j}$, $j = 1, 2$.

Näytetään että sekä g_1, että g_2 ovat ylägradientteja funktiolle f. Olkoon $\gamma : [0, l_\gamma] \to \mathbb{R}^2$ mielivaltainen käyrä. Voidaan olettaa, että pätee $\gamma(0) \ne 0 = \gamma(l_\gamma)$. Olkoon $J \ge 1$ kokonaisluku, jolle pätee $2^{1-2J} \le |\gamma(0)|$. Määritellään luvuille $j = J, J+1, ...$ annulukset

$$A_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2^{-2j} \le |x| \le 2^{1-2j}\},$$

ja olkoon

$$a_j = \inf\{t \in [b_{j-i}, l_\gamma] : \gamma(t) \in A_j\} \quad \textit{ja} \quad b_j = \sup\{t \in [b_{j-1}, l_\gamma] : \gamma(t) \in A_j\},$$

missä $b_{J-1} = 0$. *Pätee siis* $b_j - a_j \geq 2^{-2j}$, *koska käyrän* γ *täytyy leikata annulusta* $A_j, j = J, J+1, ...,$ *päästäkseen origoon. Koska pätee* $g_1 = g \geq 2^{2j-1}$ *annuluksessa* A_j, *niin saadaan*

$$\int_{\gamma|_{[a_j,b_j]}} g_1\, ds \geq \int_{\gamma|_{[a_j,b_j]\cap A_j}} g\, ds \geq (b_j - a_j) \min_{A_j} g \geq \frac{1}{2}, j = J, J+1, ...$$

Summaamalla yli kaikkien lukujen j *saadaan*

$$\int_\gamma g_1\, ds \geq \sum_{j=J}^{\infty} \int_{\gamma|_{[a_j,b_j]}} g_1\, ds = \infty,$$

mistä nähdään, että g_1 *on ylägradientti funktiolle* f. *Vastaavalla tavalla nähdään, että myös* g_2. *on ylägradientti funktiolle* f *Selvästi pätee myös* $g_1, g_2 \in L^p(\mathbb{R}^2)$.

Minimifunktio $\min\{g_1, g_2\} = 0$ *ei kuitenkaan ole ylägradientti funktiolle* f. *Kuitenkin lauseen 3.24 nojalla nollafunktio on funktion* f *p-heikko ylägradientti.*

Seuraava lemma antaa hyvin hyödyllisen tiedon, että p-heikko ylägradientteja voi tavallaan "liimata"toisiinsa ([3], Lemma 2.19)

Lemma 3.26 (Liimaamis-lemma)**.** *Olkoon* $E \subset X$ *mitallinen joukko,* $f \in ACC_p(X)$, u *ja* v *mitallisia funktioita ja oletetaan, että sekä funktiolla u että funktiolla v on olemassa avaruuteen* $L^p(X)$ *kuuluva ylägradientti.*

Oletetaan lisäksi, että on $f|_E = u$ *ja* $f|_{X\setminus E} = v$. *Olkoon* $g' \in L^p(X)$ *funktion u p-heikko ylägradientti ja vastaavasti* $g'' \in L^p(X)$ *funktion v p-heikko ylägradientti. Tällöin funktion* $g = g'\chi_E + g''\chi_{X\setminus E}$ *Borel-edustajat ovat funktion* f *p-heikkoja ylägradientteja.*

Lisäksi jos sekä $g' = g_u$ *ja* $g'' = g_v$ *ovat minimaalisia p-heikkoja ylägradientteja, niin tällöin funktion g mikä tahansa Borel-edustaja on funktion* f *minimaalinen p-heikko ylägradientti.*

Todistus. Olkoon $g_1 = g' + g''\chi_{X\setminus E}$ ja $g_2 = g'\chi_E + g''$. Näytetään ensiksi, että sekä g_1 että g_2 ovat p-heikkoja ylägradientteja funktiolle f.

Symmetrisyyden vuoksi riittää näyttää, että g_1 on funktion f p-heikko ylägradientti. Valitaan käyrä $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ siten, että joukko $\gamma^{-1}(E)$ on mitallinen. Tämä toteutuu p-melkein kaikilla käyrillä, mikä nähdään seuraavasti: Koska μ on Borel-säännöllinen, niin voidaan valita Borel-joukko $B \subset X$ siten, että pätee $E \subset B$, $\mu(B) = \mu(E)$ ja $\mu(B \setminus E) = 0$. Merkataan $N = B \setminus E$. Tällöin Lemman 3.15 nojalla pätee $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_N^+) = 0$. Käyrille $\Gamma(X) \setminus \Gamma_N^+$ pätee siis $m_1(\gamma^{-1}(N)) = 0$, missä m_1 on kuten määritelmässä 3.14, eli joukko $\gamma^{-1}(N)$ on näille käyrille mitallinen. Koska pätee

$$\gamma^{-1}(E) = \gamma^{-1}(B) \setminus \gamma^{-1}(N),$$

niin käyrille $\gamma \in \Gamma(X) \setminus \Gamma_N^+$ joukko $\gamma^{-1}(E)$ on mitallinen.

Valitaan käyrä γ lisäksi siten, että funktiot u, v ja f ovat kaikki absoluuttisesti jatkuvia käyrän γ suhteen, ja että sekä g' on ylägradientti funktiolle u, että ja g'' on ylägradientti funktiolle v

käyrän γ suhteen. Lemmojen 3.13 ja 3.16 nojalla kukin näistä ominaisuuksista pätee p-melkein kaikille käyrille. Toisaalta Lemman 3.9 (2) nojalla nämä kaikki ominaisuudet pätevät p-melkein kaikille käyrille.

Jos on $\gamma \cap E = \emptyset$, niin tällöin pätee

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(l_\gamma))| = |v(\gamma(0)) - v(\gamma(l_\gamma))| \leq \int_\gamma g'' \, ds \leq \int_\gamma g_1 \, ds.$$

Jos taas on voimassa $\gamma \cap E \neq \emptyset$, niin olkoon

$$\alpha = \inf\{t \in [0, l_\gamma] : \gamma(t) \in E\} \quad \text{ja} \quad \beta = \sup\{t \in [0, l_\gamma] : \gamma(t) \in E\}.$$

Tällöin on $0 \leq \alpha \leq \beta \leq l_\gamma$ ja

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(\alpha))| = |v(\gamma(0)) - v(\gamma(\alpha))| \leq \int_{\gamma|_{]0,\alpha[}} g'' \, ds \leq \int_{\gamma|_{]0,\alpha[}} g_1 \, ds,$$

missä yhtäsuuruus pätee jatkuvuuden nojalla, jos on $\alpha > 0$, ja on triviaalisti totta muussa tapauksessa. Vastaavasti saadaan

$$|f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(l_\gamma))| \leq \int_{\gamma|_{]\beta,l_\gamma[}} g_1 \, ds.$$

Funktioiden u ja f jatkuvuudesta käyrän γ suhteen saadaan lisäksi

$$|f(\gamma(\alpha)) - f(\gamma(\beta))| = |u(\gamma(\alpha)) - u(\gamma(\beta))| \leq \int_{\gamma|_{]\alpha,\beta[}} g' \, ds \leq \int_{\gamma|_{]\alpha,\beta[}} g_1 \, ds$$

Kolmioepäyhtälöä käyttämällä tästä yhtälöstä nähdään, että g_1 on p-heikko ylägradientti funktiolle f, joten myös g on p-heikko ylägradientti ja pätee $g \geq g_f$ melkein kaikkialla. Tästä ja Lemmasta 3.24 seuraa suoraan, että myös $g = \min\{g_1, g_2\}$ on p-heikko ylägradientti funktiolle f.

Jos on $g' = g_u$ ja $g'' = g_v$, niin tätä lemmaa käyttämällä, vaihtamalla vain funktioiden u ja f paikkaa keskenään, nähdään, että $g_f \chi_E + g_u \chi_{X \setminus E}$ on p-heikko ylägradientti funktiolle u. Koska g_u ja g_v ovat minimaalisia, niin tällöin pätee

$$g_u \leq g_f \leq g = g_u \quad \text{melkein kaikkialla joukossa E.}$$

Täten siis $g_f = g$ melkein kaikkialla joukossa E ja vastaavasti myös joukossa $X \setminus E$, mikä haluttiinkin näyttää. □

Seuraava hyödyllinen liimaus-lemman seuraus sanoo, että jos funktiot yhtyvät melkein kaikkialla joukossa E, niin myös niiden minimaaliset p-heikot ylägradientit yhtyvät melkein kaikkialla samassa joukossa ([3], Seuraus 2.21).

Seuraus 3.27. *Olkoon u, v mitallisia funktioita, joille kummallekin on olemassa avaruuteen $L^p(X)$ kuuluvat ylägradientit. Määritellään joukko*

$$E = \{x \in X : u(x) = v(x)\}.$$

Tällöin pätee

$$g_u = g_v \quad \textit{melkein kaikkialla joukossa } E.$$

Todistus. Määritellään

$$f = \begin{cases} u & \text{joukossa } X \setminus E \\ v & \text{joukossa } E. \end{cases}$$

Tällöin pätee siis $f = u$. Lemman (3.26) nojalla funktio $g_u\chi_{X\setminus E} + g_v\chi_E$ on minimaalinen p-heikko ylägradientti funktiolle $f = u$. Koska myös g_u on minimaalinen p-heikko ylägradientti funktiolle $u = f$, niin täytyy olla

$$g_u\chi_{X\setminus E} + g_v\chi_E = g_u \quad \text{melkein kaikkialla.}$$

Erityisesti siis on $g_u = g_v$ melkein kaikkialla joukossa E. □

Näiden tulosten avulla voidaan näyttää minimaalisen p-heikon ylägradientin olemassaolo ([3], Lause 2.5).

Lause 3.28. *Olkoon f mitallinen funktio ja oletetaan, että sillä on olemassa ylägradientti, joka kuuluu avaruuteen $L^p(X)$. Tällöin funktiolle f on olemassa minimaalinen p-heikko ylägradientti $g_f \in L^p(X)$ siten, että pätee*

$$g_f \leq g \quad \textit{melkein kaikkialla}$$

kaikille p-heikoille ylägradienteille $g \in L^p(X)$. Lisäksi g_f on yksikäsitteinen nollamittaista joukkoa lukuunottamatta.

Todistus. Määritellään

$$M = \inf_g \|g\|_{L^p(X)},$$

missä infimum otetaan yli kaikkien funktion f p-heikkojen ylägradienttien.

Olkoon jono $(g_j)_{j=1}^{\infty} \subset L^p(X)$ funktion f p-heikkoja ylägradientteja, joille pätee

$$\|g_j\|_{L^p(X)} \to M \quad \text{kun} \quad j \to \infty.$$

Määritellään funktio $\overline{g}_j = \min\{g_1, ..., g_j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Lemman 3.24 nojalla $\overline{g}_j$ on p-heikko ylägradientti funktiolle f, ja selvästi pätee $\overline{g}_{j+1} \leq \overline{g}_j$.

Määritellään $g_f = \lim_{j\to\infty} \overline{g}_j$. Dominoidun konvergenssin lauseen nojalla pätee $\overline{g}_j \to g_u$ avaruudessa $L^p(X)$, kun $j \to \infty$. Lauseen 3.22 nojalla voidaan lisäksi todeta, että myös g_f on funktion f p-heikko ylägradientti. Suoraan saadaan

$$M \leq \|g_f\|_{L^p(X)} = \lim_{j\to\infty} \|\overline{g}_j\| \leq \lim_{j\to\infty} \|g_j\| = M.$$

Olkoon g toinen p-heikko ylägradientti funktiolle f. Lemman 3.24 nojalla myös $\min\{g_f, g\}$ on funktion f p-heikko ylägradientti. Saadaan siis

$$\|g_f\|_{L^p(X)} = M \leq \|\min\{g_f, g\}\|_{L^p(X)} \leq \|g_f\|_{L^p(X)},$$

mistä nähdään, että $g_f \leq g$ melkein kaikkialla.

Oletetaan että g' on toinen minimaalinen p-heikko ylägradientti funktiolle f. Tällöin suoraan nähdään, että on sekä $g_u \leq g'$, että $g_u \geq g'$ melkein kaikkialla. Lisäksi jos g'' on ei-negatiivinen funktio, jolle pätee $g'' = g_u$ melkein kaikkialla, niin tällöin myös g'' on p-heikko ylägradientti funktiolle f seurauksen 3.17 nojalla, ja on selvästi myös minimaalinen. □

Vaikka p-heikot ylägradientit ovatkin yleistys ylägradienteista, niin niillä on silti monia ylägradienttien hyviä ominaisuuksia. Niille pystytään esimerkiksi näyttämään tulosääntö, eli niin sanottu Leibnizin sääntö. Tämän todistamiseen tarvitaan seuraavaa absoluuttiseen jatkuvuuteen liittyvää määritelmää ([3], Lause 1.56).

Määritelmä 3.29 (Absoluuttisesti jatkuva p-melkein kaikilla käyrillä)**.** *Olkoon f mitallinen funktio, jolle on olemassa ylägradientti, joka kuuluu avaruuteen $L^p(X)$. Sanotaan että funktio f on absoluuttisesti jatkuva p-melkein kaikilla käyrillä, merkitään $f \in ACC_p(X)$, jos yhdistetty funktio $f \circ \gamma : [0, l_\gamma] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva p-melkein kaikille käyrille $\gamma \in \Gamma(X)$.*

Tulosäännön todistamiseen tarvitaan myös seuraava pieni lemma ([3], Lemma 2.14).

Lemma 3.30. *Olkoon $f \in ACC_p(X)$ funktio ja olkoon lisäksi $g \in L^p(X)$ p-heikko ylägradientti funktiolle f. Tällöin p-melkein kaikille käyrille $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ pätee*

$$|(u \circ \gamma)'(t)| \leq g(\gamma(t)) \quad \text{melkein kaikille } t \in [0, l_\gamma]. \tag{4}$$

Käänteisesti jos $g \geq 0$ on Borel-funktio, $f \in ACC_p(X)$ ja yhtälö (4) pätee p-melkein kaikille käyrille $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$, niin tällöin g on p-heikko ylägradientti funktiolle f.

Todistus. Oletetaan ensiksi, että $f \in \mathrm{ACC}_p(X)$ ja että $g \in L^p(X)$ on p-heikko ylägradientti funktiolle f. Olkoon $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ käyrä, joka toteuttaa seuraavat kohdat:

1. f on absoluuttisesti jatkuva käyrän γ suhteen;
2. g on ylägradientti funktiolle f käyrän γ suhteen;
3. käyrälle γ pätee $\int_\gamma g\, ds < \infty$.

Oletuksen nojalla ensimmäinen ja toinen näistä pätee p-melkein kaikille käyrille. Lisäksi Lauseen 3.12 nojalla myös kolmas ominaisuus pätee p-melkein kaikille käyrille. Lemman 3.9 (2) nojalla kaikki nämä ominaisuudet pätevät p-melkein kaikille käyrille.

Melkein kaikille $t \in]0, l_\gamma[$ funktio $f \circ \gamma$ on differentioituva pisteessä t ja t on Lebesguen piste funktiolle $g \circ \gamma$. Tällaiselle t pätee

$$|(f \circ \gamma)'(t)| = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(\gamma(t+h)) - f(\gamma(t))}{h} \right| \tag{5}$$

$$\leq \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(\gamma(\tau)) d\tau = g(\gamma(t)), \tag{6}$$

mikä todistaa väitteen toisen suunnan.

Käänteisesti oletetaan että $g \geq 0$ on Borel-funktio, $f \in \mathrm{ACC}_p(X)$ ja että yhtälö (4) pätee p-melkein kaikille käyrille $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$. Olkoon $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ käyrä, jonka suhteen f on absoluuttisesti jatkuva ja jolle yhtälö (4) pätee. Lemman 3.9 (2) nojalla nämä molemmat ominaisuudet toteutuvat p-melkein kaikille käyrille. Saadaan siis

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(l_\gamma))| \leq \int_0^{l_\gamma} |(f \circ \gamma)'(t)| dt \leq \int_0^{l_\gamma} g(\gamma(t)) dt = \int_\gamma g\, ds,$$

eli g on p-heikko ylägradientti funktiolle f, mikä haluttiinkin näyttää. $\square$

Näiden avulla voidaan todistaa niin sanottu Leibnizin sääntö ([3], Lause 2.15).

Lause 3.31 (Leibnizin sääntö)**.** *Valitaan mitalliset funktiot u ja v ja oletetaan lisäksi, että sekä funktiolle u että funktiolle v on olemassa avaruuteen $L^p(X)$ kuuluvat ylägradientit. Tällöin funktion $|u|g_v + |v|g_u$ Borel-edustajat ovat funktion uv p-heikkoja-ylägradientteja.*

Todistus. Koska funktiot u, v, g_u ja g_v ovat mitallisia, niin myös funktio $g = |u|g_v + |v|g_u$ on mitallinen, ja selvästi on $g \geq 0$. Lisäksi Lemman (2.16) nojalla on $uv \in \mathrm{ACC}_p(X)$. Olkoon $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$ käyrä jolle (4) pätee sekä pareille (u, g_u) ja (v, g_v) ja siten, että sekä u ja v ovat absoluuttisesti jatkuvia käyrän γ suhteen. Koska kukin näistä toteutuu p-melkein kaikille käyrille, niin Lemman 3.9 (2) nojalla nämä kaikki pätevät p-melkein kaikille käyrille.

Pätee myös $|(u\circ\gamma)'(t)| \leq g_u(\gamma(t))$ ja $|(v\circ\gamma)'(t)| \leq g_v(\gamma(t))$ melkein kaikille $t \in [0, l_\gamma]$. Tällaiselle t, merkitsemällä $w = uv$, saadaan

$$\begin{aligned}|(w\circ\gamma)'(t)| &= |u(\gamma(t))(v\circ\gamma)'(t) + v(\gamma(t))(u\circ\gamma)'(t)| \\ &\leq |u(\gamma(t))|g_v(\gamma(t)) + |v(\gamma(t))|g_u(\gamma(t)) = g(\gamma(t)).\end{aligned}$$

Lemman 3.30 nojalla voidaan todeta, että g on p-heikko ylägradientti funktiolle $w = uv$. □

Näytetään tämän osion lopuksi, että Newton-Sobolev-avaruudet ovat Banach-avaruuksia. Tähän tarvitaan seuraavaa Fugleden-lemman seurausta ([3], Lause 2.3).

Lause 3.32. *Olkoon $f_j \in \mathcal{L}^p(X)$ ja $g_j \in L^p(X)$ p-heikko ylägradientti funktiolle f_j kaikille $j \in \mathbb{N}$. Oletetaan lisäksi, että pätee sekä $f_j \to f$ että $g_j \to g$ avaruudessa $L^p(X)$, kun $j \to \infty$, ja että g on lisäksi ei-negatiivinen. Tällöin on olemassa funktio $\tilde{f}$, jolle pätee $\tilde{f} = f$ melkein kaikkialla, siten, että funktio g ylägradientti funktiolle $\tilde{f}$, eli erityisesti on $\tilde{f} \in N^{1,p}(X)$.*

Todistus. Siirtymällä tarvittaessa osajonoon, voidaan olettaa, että pätee $f_j \to f$ melkein kaikkialla. Lemman 3.21 nojalla voidaan lisäksi olettaa, että pätee myös $\int_\gamma g_j\, ds \to \int_\gamma g\, ds \in \mathbb{R}$, kun $j \to \infty$, kaikille käyrille $\gamma \in \Gamma(X) \setminus \Gamma_1$, missä $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_1) = 0$.

Määritellään $\tilde{f} = \limsup_{j\to\infty} f_j$, jolloin $\tilde{f}$ on määritelty kaikissa pisteissä avaruudessa X, ja lisäksi määritelmän nojalla pätee $\tilde{f} = f$ melkein kaikkialla avaruudessa X. Määritellään joukko $E = \{x \in X : |\tilde{f}(x)| = \infty\}$. Olkoon Γ_2 niiden käyrien γ joukko, joille g_j ei ole ylägradientti funktiolle f_j käyrän γ suhteen kaikille $j \in \mathbb{N}$. Lemman 3.13 nojalla pätee $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_2) = 0$. Lemman 3.9 kohdan (2) nojalla puolestaan pätee $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = 0$, eli p-melkein kaikille käyrille γ pätee sekä $\int_\gamma g_j\, ds \to \int_\gamma g\, ds \in \mathbb{R}$, kun $j \to \infty$, että g_j on ylägradientti funktiolle f_j käyrän γ suhteen kaikille $j \in \mathbb{N}$.

Kiinnitetään yksi tälläinen käyrä $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$. Tällöin on joko $\gamma(0), \gamma(l_\gamma) \in E$ tai

$$|\tilde{f}(\gamma(l_\gamma)) - \tilde{f}(\gamma(0))| \leq \limsup_{j\to\infty} |f_j(\gamma(l_\gamma)) - f_j(\gamma(0))| \leq \limsup_{j\to\infty} \int_\gamma g_j\, ds = \int_\gamma g\, ds.$$

Koska joukolle E pätee määritelmän nojalla $\mu(E) = 0$, niin seurauksen 3.19 nojalla voidaan todeta, että funktio g todella on p-heikko ylägradientti funktiolle $\tilde{f}$, mikä haluttiinkin näyttää. □

Tämän avulla voidaan näyttää, että Newton-Sobolev-avaruudet ovat Banach-avaruuksia ([3], Lause 1.71)

Lause 3.33. *Avaruus $N^{1,p}(X)$ on Banach-avaruus.*

Todistus. Olkoon (u_j) Cauchy-jono avaruudessa $N^{1,p}(X)$. Tällöin pätee $u_j \to \tilde{u}$ avaruudessa $L^p(X)$ jollekin alkiolle $\tilde{u} \in L^p(X)$. Näytetään että funktiolla $\tilde{u}$ on edustaja u , jolle pätee sekä $u \in N^{1,p}(X)$, että $u_j \to u$ avaruudessa $N^{1,p}(X)$. Tähän riittää näyttää, että pätee $u \in N^{1,p}(X)$, ja että jokaisella jonon (u_j) osajonolla on osajono, joka suppenee alkioon u avaruudessa $N^{1,p}(X)$.

Kiinnitetään jonon (u_j) mielivaltainen osajono. Merkataan kyseistä osajonoa samoilla indekseillä (u_j). Valitaan tästä osajonosta edelleen osajono (u_{j_k}) siten, että pätee

$$\|u_{j_{k+1}} - u_{j_k}\|_{N^{1,p}(X)} < 2^{-k}.$$

Olkoon $\tilde{g}_k$ p-heikko ylägradientti funktiolle $u_{j_{k+1}} - u_{j_k}$, jolle pätee

$$\|\tilde{g}_k\|_{L^p(X)} < 2^{-k}. \tag{7}$$

Tällöin funktio

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{g}_i$$

on p-heikko ylägradientti funktiolle

$$\sum_{k=1}^{N-1} (u_{j_{k+1}} - u_{j_k}) = u_{j_N} - u_{j_1},$$

kaikille $N \in \mathbb{N}$. Seurauksen 3.11 nojalla $g_{u_{j_1}} + g$ on p-heikko ylägradientti funktiolle

$$u_{j_1} + (u_{j_N} - u_{j_1}) = u_{j_N}$$

kaikille $N \in \mathbb{N}$, missä $g_{u_{j_1}}$ on funktion u_{j_1} minimaalinen p-heikko ylägradientti. Koska pätee

$$u_{j_k} \to \tilde{u} \quad \text{ja} \quad g_{u_{j_1}} + g \to g_{u_{j_1}} + g$$

avaruudessa $L^p(X)$, kun $k \to \infty$, ja missä $(g_{u_{j_1}} + g)$ on vakiojono, niin Lauseen 3.32 nojalla on olemassa u siten, että pätee $u = \tilde{u}$ melkein kaikkialla, ja lisäksi $g_{u_{j_1}} + g$ on p-heikko ylägradientti funktiolle u. Tästä seuraa, että pätee kuuluvuus $u \in N^{1,p}(X)$.

Huomataan että funktio

$$g_k = \sum_{i=k}^{\infty} \tilde{g}_i$$

on määritelmänsä nojalla p-heikko ylägradientti kaikille funktioille

$$\sum_{i=k}^{k+l-1} (u_{j_{i+1}} - u_{j_i}) = u_{j_k+l} - u_{j_k},$$

$l \in \mathbb{N}$. Koska pätee

$$u_{j_{k+l}} - u_{j_k} \to u - u_{j_k} \quad \text{ja} \quad g_k \to g_k$$

avaruudessa $L^p(X)$, kun $l \to \infty$, ja missä g_k on vakiojono, niin Lauseen 3.32 nojalla voidaan todeta, että g_k on p-heikko ylägradientti funktion $u - u_{j_k}$ sopivalle edustajalle. Lisäksi yhtälön (7) nojalla pätee

$$\|g_k\|_{L^p(X)} < 2^{1-k} \to 0 \text{ kun } k \to \infty,$$

mikä yhdistettynä suppenemiseen $u_{j_k} \to u$ avaruudessa $L^p(X)$ antaa

$$\|u_{j_k} - u\|_{N^{1,p}(X)} \leq \|u_{j_k} - u\|_{L^p(X)} + \|g_k\|_{L^p(X)} \to 0 \text{ kun } k \to \infty,$$

mikä todistaa väitteen. □

4 Lipschitz-funktioiden tiheys

4.1 Tiheys normissa

Tietyillä oletuksilla pystytään näyttämään, että Lipschitz-funktiot ovat tiheässä Newton-Sobolev avaruudessa normin suhteen. Tämä on verrattain vahva ominaisuus, jonka voi kuitenkin saada voimaan muutamallakin tavalla. Eräs tapa, jota tässäkin tutkielmassa tullaan käyttämään, on olettaa, että käsiteltävä avaruus on niin sanotusti tuplaava ja toteuttaa Poincarén-epäyhtälön. Pelkkä avaruuden tuplaavuus itse asiassa riittäisi oletukseksi (katso esimerkiksi [2]), mutta Poincarén-epäyhtälön olettaminen helpottaa todistusta huomattavasti.

Ensimmäinen oleellinen oletus Lipschitz-funktioiden tiheydelle normissa on siis niin sanottu avaruuden tuplaavuus ([3], sivu 65).

Määritelmä 4.1 (Mitan tuplaavuus ja metrinen tuplaavuus)**.** *Avaruuden X mitta μ on tuplaava, jos on olemassa vakio $C_\mu \geq 1$ siten, että kaikille palloille $B(x,r) \subset X$ pätee*

$$0 < \mu(B(x,2r)) \leq C_\mu \mu(B(x,r)) < \infty.$$

Metrinen avaruus X on tuplaava, jos on olemassa vakio $C < \infty$ siten, että jokaisen pallon $B(z,r) \subset X$ peittämiseen tarvitaan enintään C palloa, joiden säteet ovat $\frac{1}{2}r$.

Toinen käytettävä oletus on niin sanotun Poincarén-epäyhtälön voimassaolo ([3], Määritelmä 4.1).

Määritelmä 4.2 (Poincarén-epäyhtälö)**.** *Olkoon $q \geq 1$. Sanotaan että avaruudessa X pätee (q,p)-Poincarén-epäyhtälö, jos on olemassa vakiot $C_{PI} > 0$ ja $\lambda \geq 1$ siten, että kaikille palloille $B \subset X$, kaikille integroituville funktioille f avaruudessa X, ja kaikille funktion f ylägradienteille g pätee*

$$\Big(⨍_B |f - f_B|^q \, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C_{PI} diam(B) \Big(⨍_{\lambda B} g^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}},$$

missä $f_B = ⨍_B f \, d\mu$. Jos on $\lambda = 1$, niin tällöin sanotaan, että pätee vahva (q,p)-Poincarén epäyhtälö.

Normitiheyden todistamiseen tarvitaan muutamia käsitteitä ja työkaluja, joista ensimmäinen on niin sanottu ei-keskitetty maksimaalifunktio ([3], Määritelmä 3.10).

Määritelmä 4.3. *Olkoon* (X, d, μ) *metrinen mitta-avaruus ja* $\Omega \subset X$ *avoin joukko. Funktiolle* $f \in L^1(\Omega)$ *määritellään niin sanottu ei-keskitetty maksimaalifunktio joukkoon* Ω *kaavalla*

$$M_\Omega^* f(x) = \sup_B \fint |f| \, d\mu,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien pallojen $B \subset \Omega$*, jotka sisältävät pisteen* x.

Tutumpi funktio voi olla keskitetty Hardy-Littlewood maksimaalifunktio ([3], Huomio 3.11), ja itse asiassa koska mitta μ on oletuksen nojalla tuplaava, niin voitaisiin käyttää kumpaa tahansa funktiota. Kuitenkin ei-keskitetyn käyttäminen tekee aputulosten todistamisista hieman helpompaa.

Ei-keskitetylle maksimaalifunktiolle pätee seuraava tekninen tulos ([3], Lemma 3.12)

Lemma 4.4. *Funktiolle* $f \in L^1(\Omega)$ *ei-keskitetty maksimaalifunktio* $M_\Omega^* f(x)$ *on alhaalta puolijatkuva joukossa* Ω *ja lisäksi sille pätee*

$$\mu(E_\tau) \leq \frac{C_\mu^3}{\tau} \int_{E_\tau} |f| \, d\mu \quad ja \quad \lim_{\tau \to \infty} \tau \mu(E_\tau) = 0,$$

missä $E_\tau = \{x \in \Omega : M_\Omega^* f(x) > \tau\}$.

Vielä yhtenä käsitteenä Lipschitz-funktioiden normitiheyden todistamiseen tarvitaan niin sanotut McShane-laajennukset, joiden avulla avaruuden osajoukossa määritelty Lipschitz-funktio voidaan jatkaa Lipschitz-funktioksi koko avaruuteen. ([3], Lause 5.2).

Lemma 4.5. *Olkoon* $E \subset X$ *ja* $f : E \to \mathbb{R}$ *L-Lipschitz-funktio. Tällöin funktion* f *ylä- ja ala-Mcshane-laajennukset*

$$\overline{f}(x) = \inf_{y \in E} (f(y) + Ld(x, y)) \quad ja \quad \underline{f}(x) = \sup_{y \in E} (f(y) - Ld(x, y)), x \in X,$$

ovat L-Lipschitz-funktioita, joille pätee $\underline{f} \leq \overline{f}$ *avaruudessa* X*, ja* $\underline{f} = f = \overline{f}$ *joukossa* E.

4.1.1 Normitiheyden todistus

Näillä oletuksilla ja työkaluilla voidaan todistaa Lipschitz-funktioiden tiheys Newton-Sobolev-avaruuksissa ([3], Lause 5.1).

Lause 4.6. *Olkoon* X *p-Poincaré-avaruus varustettuna tuplaavalla mitalla* μ*. Tällöin Lipschitz-funktiot ovat tiheässä avaruudessa* $N^{1,p}(X)$ *normin suhteen.*

Todistus. Olkoon $u \in N^{1,p}(X)$. Todistetaan väite ensiksi tapaukselle, että u on rajoitettu. Olkoon $g \in L^p(X)$ ylägradientti funktiolle u. Olkoon $\tau > 0$ ja määritellään joukko

$$E_\tau = \{x \in X : M^* g^p(x) > \tau^p\},$$

missä M^*g^p on määritelmän 4.4 antama ei-keskitetty maksimaalifunktio funktiolle g^p. Olkoon $0 < \frac{1}{2}r \leq \rho \leq r$ ja $x \in X \setminus E_\tau$ mielivaltainen piste. Mitan μ tuplaavuudesta, p-Poincarén epäyhtälöstä, ei-keskitetyn maksimaali-funktion määritelmästä ja joukon E_τ määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned} |u_{B(x,\rho)} - u_{B(x,r)}| &\leq \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,r)}|\, d\mu \leq C' \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, d\mu \\ &\leq C'r\Big(\fint_{\lambda B(x,r)} g^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C'r(M^*g^p(x))^{\frac{1}{p}} \leq C'\tau r. \end{aligned} \tag{8}$$

Saatua epäyhtälöä (8) ja kolmioepäyhtälöä käyttämällä mielivaltaiselle $0 < \rho < r$ ja tarpeeksi suurelle $k \in \mathbb{N}$ saadaan

$$\begin{aligned} |u_{B(x,r)} - u_{B(x,\rho)}| &\leq |u_{B(x,r) - u_{B(x,r/2)}} + |u_{B(x,r/2) - u_{B(x,r/4)}}| \\ &+ ... + |u_{B(x,r/2^k)} - u_{B(x,\rho)}| \\ &\leq C'\tau(r + r/2 + r/4 + ...) \\ &C\tau r. \end{aligned} \tag{9}$$

Tästä siis seuraa, että jokainen jono $\{u_{B(x,r_j)}\}$, jolle pätee $r_j \to 0$ kun $j \to \infty$, on Cauchy-jono ja raja-arvo

$$\overline{u}(x) = \lim_{r\to 0} u_{B(x,r)}$$

on olemassa kun $x \in X \setminus E_\tau$.

Näytetään että funktio $\overline{u}$ on $C\tau$-Lipschitz-funktio joukossa $X \setminus E_\tau$. Olkoon $x, y \in X \setminus E_\tau$ mielivaltaisia ja määritellään $r_j = 2^{1-j}d(x, y), j = 0, 1 ...$. Olkoon lisäksi $B_0 = B(x, r_0)$. Yhtälöstä (9) saadaan

$$|\overline{u}(x) - u_{B_0}| \leq C\tau d(x, y)$$

ja vastaavasti $|\overline{u}(y) - u_{B_0}| \leq C\tau d(x, y)$. Näistä kahdesta epäyhtälöstä seuraa, että $\overline{u}$ on $C\tau$-Lipschitz joukossa $X \setminus E_\tau$. Lisäksi funktio $\overline{u}$ voidaan jatkaa $C\tau$-Lipschitz funktioksi koko avaruuteen X käyttämällä ylä-Mcshanen-laajennusta

$$\overline{u}_\tau(x) = \inf_{y \in X\setminus E_\tau} (\overline{u}(y) - C\tau d(x, y)), x \in X.$$

Määritellään katkaistu funktio $u_\tau = \max\{\min\{\overline{u}_\tau, \tau\}, -\tau\}$. Koska u on määritelmänsä nojalla rajoitettu, niin suurille τ pätee $|u| \leq \tau$ avaruudessa X, joten pätee $u_\tau = \overline{u} = u$ kaikissa Lebesgue-pisteissä joukossa $X \setminus E_\tau$. Tätä tietoa ja Minkowskin-epäyhtälöä käyttämällä suurelle τ saadaan

$$\|u - u_\tau\|_{L^p(x)} \leq \|u\|_{L^p(E_\tau)} + \|u_\tau\|_{L^p(E_\tau)} \leq 2\tau\mu(E_\tau)^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad \text{kun} \quad \tau \to \infty,$$

missä raja-arvo saadaan Lemman 4.4 avulla.

Lisäksi on $u - u_\tau = 0$ joukossa $X \setminus (E_\tau \cup E)$, missä E on niiden pisteiden joukko, jotka eivät ole Lebesgue-pisteitä funktiolle u. Seurauksen 3.11 ja Lemman 3.26 nojalla voidaan todeta, että $(g + C\tau)\chi_{E_\tau \cup E}$ on p-heikko ylägradientti funktiolle $u - u_\tau$. Koska f on mitallinen funktio, niin on $\mu(E) = 0$, jolloin Lemman 4.4 nojalla saadaan

$$\|g_{u-u_\tau}\|_{L^p(X)} \leq \|g\|_{L^p(E_\tau)} + C\tau\mu(E_\tau)^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad \text{kun} \quad \tau \to \infty,$$

mikä todistaa väitteen rajoitetuille funktioille.

Jos u on rajoittamaton, niin approksimoidaan sitä katkaistujen funktioiden

$$u_k = \max\{\min\{u, k\}, -k\}$$

avulla. Selvästi pätee $u_k \to u$ avaruudessa $L^p(X)$ ja

$$\mu(\{x : |u(x)| > k\}) \to 0 \quad \text{kun} \quad k \to \infty.$$

Lemman 3.26 nojalla $g\chi_{|u|>k}$ on p-heikko ylägradientti funktiolle $u - u_k$, joten pätee

$$\|g_{u-u_k}\|_{L^p(X)} = \Big(\int_X |g_{u-u_k}|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \le \Big(\int_{|u|>k} |g\chi_{|u|>k}|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{kun} \quad k \to \infty,$$

mikä todistaa väitteen. □

Kuten aikaisemmin todettiin, niin avaruuden tuplaavuus ja Poincarén-epäyhtälön voimassaolo ovat vahvoja oletuksia, ja onkin luontaista kysyä, minkä kaltaiseen tulokseen päästään ilman näitä oletuksia. Itse asiassa yleisen avaruuden X tilanteeseen liittyvät seuraavat avoimet kysymykset ([3], sivu 122).

Avoin kysymys 4.7. *Ovatko lokaalit Lipschitz-funktiot aina tiheässä avaruudessa $N^{1,p}(X)$ normin suhteen yleiselle avaruudelle X?*

Avoin kysymys 4.8. *Ovatko Lipschitz-funktiot tiheässä normissa avaruudessa $N^{1,p}(X)$, jos X on kunnollinen avaruus?*

4.2 Tiheys energiassa

Yleisessä tapauksessa Lipschitz-funktioiden normitiheys on siis epävarmaa, mutta niille voidaan kuitenkin näyttää heikompi tiheyteen liittyvä tulos. Esitellään tähän liittyen seuraavaksi niin sanottu suppeneminen energissa.

Määritelmä 4.9 (Suppeneminen energiassa)**.** *Funktiojono $f_i \subset N^{1,p}(X)$ suppenee funktioon $f \in N^{1,p}(X)$ energiassa, jos seuraavat ehdot täyttyvät:*

1. *Funktiot f_i suppenevat funktioon f avaruudessa $L^p(X)$, eli*

$$\lim_{i\to\infty} \int_X |f - f_i|^p d\mu = 0.$$

2. *Funktioiden f_i minimaaliset p-heikot ylägradientit g_{f_i} suppenevat funktion f minimaaliseen p-heikkoon ylägradienttiin g_f avaruudessa $L^p(X)$, eli*

$$\lim_{i\to\infty} \int_X |g_f - g_{f_i}|^p d\mu = 0.$$

On hyvä huomata heti alkuun, että energiassa suppeneminen on heikompaa, kuin normin suhteen suppeneminen. Newton-Sobolev-avaruuden funktiojono f_i suppenee funktioon f normissa, jos kaikille $\epsilon > 0$ löytyy $N \in \mathbb{N}$ siten, että pätee $\|f - f_i\|_{N^{1,p}} < \epsilon$ kaikille $i \geq N$. Erityisesti tästä seuraa suoraan, että minimaaliset p–heikot ylägradientit g_{f-f_i} suppenevat nollaan avaruudessa $L^p(X)$. Energiassa suppenemisesta puolestaan tiedetään vain, että minimaalisten p-heikkojen ylägradienttien erotus $g_f - g_{f_i}$ suppenee nollaan avaruudessa $L^p(X)$. Melkein kaikkialla pätee $|g_f - g_{f_i}| \leq g_{f-f_I}$, mistä nähdään, että normin suhteen suppenemisesta seuraa energiassa suppeneminen, mutta käänteinen väite ei välttämättä päde.

4.2.1 Aputuloksia energiatiheyden todistukseen

Tarvitaan erinäisiä edistyneempiä määritelmiä ja aputuloksia, ennen kuin Lipschitz-funktioiden tiheys energiassa voidaan todistaa. Ensimmäisenä annetaan hyödyllinen integroituvuuteen liittyvä määritelmä ([5], Määritelmä 2.6):

Määritelmä 4.10 (Vahva p-yhtäintegroituvuus)**.** *Olkoon $p \in [1, \infty[$. Joukko $\mathcal{F} \subset L^p(X)$ on vahvasti p-yhtäintegroituva, jos seuraavat ehdot täyttyvät:*

1. *jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa joukko $E \subset X$, $\mu(E) < \infty$, jolle pätee $\int_{X \setminus E} |f|^p < \epsilon$ kaikille funktioille $f \in \mathcal{F}$;*
2. $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(X)} < \infty$*;*
3. *kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos on $\mu(E) < \delta$, niin tällöin pätee*

$$\int_E |f|^p \, d\mu < \epsilon$$

   kaikille funktioille $f \in \mathcal{F}$.

Kirjallisuudessa yleisempi käsite on pelkkä p-yhtäintegroituvuus, joka käsittää vain kohdan (3).

Kun $p \in]1, \infty[$, niin avaruuden $L^p(X)$ refleksiivisyys takaa, että jokaiselle rajoitetulle jonolle löytyy heikosti suppeneva osajono. Tapauksessa $p = 1$ refleksiivisyyttä ei kuitenkaan voida käyttää, mutta seuraava lause antaa yhteyden heikosti suppenevan osajonon ja vahvan p-yhtäintegroituvuuden välille ([8], Lause 2.54)

Lause 4.11 (Dunford-Pettis)**.** *Kokoelma funktioita $\mathcal{F} \subset L^1(X)$ on jonoesikompakti heikossa topologiassa, jos ja vain jos se vahvasti* 1*-yhtäintegroituva.*

Edelliseen vahvan p-integroituvuuden käsitteeseen liittyy myös seuraava hyödyllinen suppenemistulos ([8], Lause 2.24).

Lause 4.12 (Vitalin suppenemislause)**.** *Olkoon $(f_n) \subset L^p(X)$ jono funktioita. Kyseinen jono suppenee funktioon $f \in L^p(X)$, jos ja vain jos jono suppenee mitassa funktioon f, ja on lisäksi vahvasti p-yhtäintegroituva.*

Seuraava lemma antaa tietyn tyyppisen suppiloperiaatteen, jonka nojalla p-heikkojen ylägradienttien suppeneminen pätee, jos niillä on olemassa ylhäältä rajoittavat funktiot, jotka myös suppenevat ([5], Lemma 2.9).

Lemma 4.13. *Olkoon $f_i, f \in N^{1,p}(X)$, $i \in \mathbb{N}$, ja $g_{f_i}, g_f \in L^p(X)$, $i \in \mathbb{N}$, vastaavasti kyseisten funktioiden minimaaliset p-heikot ylägradientit. Oletetaan että pätee $f_i \to f$ avaruudessa $L^p(X)$, kun $i \to \infty$,ja että että on olemassa funktiot $\tilde{g}_i \in L^p(X)$, jotka suppenevat funktioon $g_f \in L^p(X)$ avaruudessa $L^p(X)$. Tällöin jos on $g_{f_i} \le \tilde{g}_i$, niin pätee $g_{f_i} \to g_f$ avaruudessa $L^p(X)$.*

Todistus. Näytetään aluksi, että jono g_{f_i} suppenee funktioon g_f heikosti avaruudessa $L^p(X)$. Tätä varten riittää näyttää, että jokaisella jonon g_{f_i} osajonolla on heikosti suppeneva osajono, joka suppenee funktioon g_f. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi alkuperäisen jonon (g_f) osajonoa samoilla indekseillä, kuin alkuperäistä jonoa.

Näytetään ensiksi, että jonolla g_{f_i} on osajono, joka suppenee heikosti johonkin funktioon $\tilde{g}$. Jos $p > 1$, niin tämä seuraa Lauseesta 2.22 avaruuden $L^p(X)$ refleksiivisyyden nojalla.

Jos taas $p = 1$, niin koska $\tilde{g}_i$ suppenee avaruudessa $L^1(X)$, lauseen 4.12 nojalla kyseinen jono on vahvasti 1-yhtäintegroituva. Tämä yhdistettynä yhtälöön $g_{f_i} \le \tilde{g}_i$ antaa, että myös jono g_{f_i} on vahvasti 1-yhtäintegroituva. Lauseen 4.11 nojalla voidaan siis todeta, että jonolla g_{f_i} on heikosti suppeneva osajono. Merkitään tätäkin osajonoa samoilla indekseillä g_{f_i}. Pätee siis, että $g_{f_i} \to \tilde{g}$ heikosti avaruudessa $L^p(X)$.

Lemman 2.23 nojalla on olemassa jono konveksikombinaatioita $(\tilde{g}_j)$, missä

$$\tilde{g}_i = \sum_{k=i}^{m_i} \lambda_{k,i} g_{f_i}, \quad \lambda_{k,i} \ge 0, \quad \lambda_{i,i} + ... + \lambda_{m_i,i} = 1,$$

joille pätee

$$\|\tilde{g}_i - \tilde{g}\|_{L^p(X)} \to 0,$$

kun $i \to \infty$. Lisäksi pätee, että jokainen $\tilde{g}_i$ on p-heikko ylägradientti funktiolle

$$\tilde{f}_i = \sum_{k=i}^{m_i} \lambda_{k,i} f_i, \quad \lambda_{k,i} \ge 0, \quad \lambda_{i,i} + ... + \lambda_{m_i,i} = 1.$$

Tällöin pätee siis sekä $\tilde{g}_i \to \tilde{g}$, että $\tilde{f}_i \to f$ avaruudessa $L^p(X)$, kun $i \to \infty$, jolloin Lemmasta 3.32 seuraa, että on olemassa funktio $\tilde{f}$, jolle pätee $\tilde{f} = f$ melkein kaikkialla, ja jolle lisäksi $\tilde{g}$ on p-heikko ylägradientti. Lemma 3.16 takaa, että p-heikon ylägradientin $\tilde{g}$ edustajan valinnalla ei ole merkitystä. Täten pätee $\tilde{g} \ge g_f$ melkein kaikkialla. Toisaalta L^p-avaruuden normin alhaalta heikosta puolijatkuvuudesta seuraa, että pätee

$$\int_X \tilde{g}^p \, d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int_X g_{f_i}^p \, d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int_X \tilde{g}_i^p \, d\mu = \int_X g_f^p \, d\mu.$$

Tämä yhdessä epäyhtälön $\tilde{g} \ge g_f$ kanssa antaa, että pätee $\tilde{g} = g_f$ melkein kaikkialla. Voidaan siis todeta, että pätee $g_{f_i} \to g_f$ heikosti avaruudessa $L^p(X)$.

Todistetaan seuraavaksi, että suppeneminen pätee myös normin suhteen. Heikosta suppenemisesta seuraa, että jono (g_{f_i}) on vahvasti p-yhtäintegroituva. Lauseen 4.12 nojalla se siis suppenee funktioon g_f, jos se suppenee kyseiseen funktioon mitassa. Täytyy siis näyttää, että pätee

$$\limsup_{i\to\infty} \mu(\{x \in X : |g_{f_i}(x) - g_f(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

Jos $A \subset X$ on joukko, jolle pätee $\mu(A) < \infty$, niin epäyhtälöä 2.17 käyttämällä sille saadaan arvio

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : |g_{f_i}(x) - g_f(x)| > \epsilon\}) &\leq \frac{1}{\epsilon}\int_X |g_f - g_{f_i}|\, d\mu \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_A |g_f - g_{f_i}|\, d\mu + \frac{1}{\epsilon}\int_{X\setminus A} |g_f - g_{f_i}|\, d\mu.\end{aligned}$$

ääritelmän 4.10 kohdasta (3) ja jonon g_{f_i} vahvasta p-yhtäintegroituvuudesta seuraa, että termi

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{X\setminus A} |g_f - g_{f_i}|\, d\mu$$

saadaan mielivaltaisen pieneksi, kun joukko A valitaan tarpeeksi suureksi. Ilman yleisyyden menetystä riittää siis näyttää mitassa suppeneminen kaikille äärellisen mitan omaaville joukoille, eli että pätee

$$\limsup_{i\to\infty} \mu(\{x \in A : |g_{f_i}(x) - g_f(x)| > \epsilon\}) = 0$$

kaikille $\epsilon > 0$ ja kaikille $A \subset X$, joille pätee $\mu(A) < \infty$.

Kiinnitetään yksi tällainen joukko $A \subset X$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in A : |g_{f_i}(x) - g_f(x)| > \epsilon\}) &\leq \frac{1}{\epsilon}\int_A |g_f - g_{f_i}|\, d\mu \\ &= \frac{1}{\epsilon}\left(2\int_{A\cap\{g_{f_i} > g_f\}} (g_{f_i} - g_f)\, d\mu - \int_A (g_f - g_{f_i})\, d\mu\right).\end{aligned}$$

Koska g_{f_i} suppenee heikosti funktioon g_f, niin pätee $\lim_{i\to\infty} \int_A g_f - g_{f_i}\, d\mu = 0$. Koska lisäksi pätee $g_{f_i} \leq \tilde{g}_i$ ja $\tilde{g}_i \to g_f$ avaruudessa $L^p(X)$, niin saadaan arvio

$$\begin{aligned}\limsup_{i\to\infty} \int_{A\cap\{g_{f_i} > g_f\}} (g_{f_i} - g_f)\, d\mu &\leq \limsup_{i\to\infty} \int_{A\cap\{g_{f_i} > g_f\}} (\tilde{g}_i - g_f)\, d\mu \\ &\leq \limsup_{i\to\infty} \int_{A\cap\{g_{f_i} > g_f\}} |\tilde{g}_i - g_f|\, d\mu = 0.\end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä kaksi raja-arvoa saadaan suoraan

$$\limsup_{i\to\infty} \mu(\{x \in A : |g_{f_i}(x) - g_f(x)| > \epsilon\}) = 0,$$

eli g_{f_i} suppenee funktioon g_f mitassa. Vitalin suppenemislauseen 4.12 nojalla voidaan siis todeta, että jono (g_{f_i}) suppenee funktioon g_f avaruudessa $L^p(X)$, mikä haluttiinkin todistaa. □

Tarvitaan myös versiota Arzela-Ascolin lauseesta ([5], Lemma 2.11).

Lause 4.14 ("Arzela-Ascoli"). *Olkoon* $L \in [0, \infty[$. *Oletetaan että* Y *on täydellinen metrinen avaruus. Olkoon* $\gamma_n : [0,1] \to Y$ *jono* L*-Lipschitz käyriä siten, että jokaiselle* $t \in [0,1]$ *joukko* $A_t = \{\gamma_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ *on esikompakti avaruudessa* Y*. Tällöin on olemassa osajono* (γ_{n_k})*, joka suppenee tasaisesti* L*-Lipschitz käyrään* γ*.*

Todistus. Koska väli $[0,1]$ on separoituva, niin siltä voidaan valita numeroituva tiheä joukko $D = \{t_1, t_2, ..., \}$. Koska Y on oletuksen nojalla täydellinen, niin joukon A_{t_1} esikompaktiuden nojalla jokaiselle jonolle $(\gamma_n(t_1)), n \in \mathbb{N}$, löytyy osajono $\gamma_{n_1(j)}(t_1)$, joka suppenee johonkin avaruuden Y pisteeseen, kun $j \to \infty$.

Vastaavasti jonolle $n_1(j)$ voidaan valita osajono $n_2(j)$ siten, että $\gamma_{n_2(j)}(t_2)$ suppenee. Induktiivisesti saadaan jono Lipschitz-käyriä $\gamma_{n_k(j)}$, jotka määritelmänsä nojalla jokainen suppenee kaikille $t_i, n \leq k$. Diagonaaliargumentilla saadaan indeksijono $m(j)$ siten, että $\gamma_{m(j)}(t_i)$ suppenee kaikille $t_i \in D$.

Koska $\gamma_{m(j)}$ suppenee kaikille $t_i \in D$, niin erityisesti se on Cauchy-jono kyseisille alkioille. Tästä seuraa, että kaikille $\epsilon > 0$ ja $t_k \in D$ on olemassa jokin $N_k \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$$|\gamma_n(t_i) - \gamma_m(t_i)| < \frac{\epsilon}{3},$$

kun $m, n \geq N_k$.

Koska kaikki käyrät γ_n ovat L-Lipschitz käyriä, niin erityisesti kaikille $x \in [0,1]$ pätee

$$|\gamma_n(s) - \gamma_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$$

kaikille käyrille γ_n, aina kun on $s, t \in]x - \delta, x + \delta[$, missä $\delta = \frac{\epsilon}{3L}$.

Välit $]x - \delta, x + \delta[$ muodostavat välin $[0,1]$ avoimen peitteen. Koska $[0,1]$ on sekä suljettu että rajoitettu, niin erityisesti se on kompakti. Voidaan siis valita äärellinen määrä välejä $]x_1 - \delta, x_1 + \delta[, ...,]x_J - \delta, x_J + \delta[$, jotka myös peittävät välin $[0,1]$.

Koska joukko D on tiheä, niin on jokaiselle välille $]x_j - \delta, x_j + \delta[, j \in \{1, ..., J\}$, löytyy jokin $t_{k(j)} \in D$, jolle pätee $t_{k(j)} \in]x_j - \delta, x_j + \delta[$. Määritellään $K = \max\{k(1), ..., k(J)\}$. Erityisesti kaikille $x \in [0,1]$ on olemassa jokin $j \in \{1, ..., J\}$ ja $t_{k(j)} \in D$, $k(j) \in 1, ..., K$ siten, että pätee $x, t_{k(j)} \in]x_j - \delta, x_j + \delta[$. Määritellään $N = \max\{N_1, ..., N_K\}$. Kolmioepäyhtälöä käyttämällä saadaan

$$|\gamma_n(x) - \gamma_m(x)| \leq |\gamma_n(x) - \gamma_n(t_{k(j)})| + |\gamma_n(t_{k(j)}) - \gamma_m(t_{k(j)})| + |\gamma_m(t_{k(j)}) - \gamma_m(x)| < \epsilon,$$

kaikille $m, n \geq N$. Jono γ_n on siis tasaisesti Cauchy kaikille $x \in [0,1]$, jolloin tasaisen Cauchyn kriteerion nojalla voidaan todeta, että jono (γ_n) suppenee tasaisesti käyrään γ. Lisäksi koska käyrät γ_n ovat jatkuvia, niin tasaisesta suppenemisesta seuraa, että myös käyrä γ on jatkuva.

Olkoon $x_1, x_2 \in [0,1]$. Tasaisesta jatkuvuudesta saadaan

$$d_Y(\gamma(x_1), d_Y(x_2)) = \lim_{j \to \infty} d_Y(\gamma_{k(j)}(x_1), \gamma_{k(j)}(x_2)) \leq L|x_1 - x_2|,$$

eli myös raja-arvo käyrä γ on L-Lipschitz, kuten haluttiinkin. □

Seuraava approksimointitulos sanoo, että jokaista ei-negatiivista p-integroituvaa funktioita voidaan approksimoida vähenevällä jonolla alhaalta puolijatkuvia funktioita ([10], sivu 113).

Lause 4.15. *[Vitali-Carathéodory] Olkoon (X, d, μ) metrinen mitta-avaruus ja olkoon lisäksi $1 \leq p < \infty$. Jokaiselle funktiolle $f : X \to [0, \infty]$, $f \in \mathcal{L}^p$ on olemassa pisteittäin vähenevä jono (g_i) alhaalta puolijatkuvia funktioita, jotka on määritelty avaruudessa X, joille pätee $f \leq g_{i+1} \leq g_i$ ja $g_i \to f$ avaruudessa $L^p(X)$.*

Todistus. Olkoon $f : X \to [0, \infty]$, $f \in \mathcal{L}^p(X)$. Olkoon $(\varphi)_i$ jono ei-negatiivisia yksinkertaisia funktioita, jotka suppenevat pisteittäin funktioon f. Kirjoittamalla funktio f muotoon

$$f = \varphi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} (\varphi_i - \varphi_{i-1})$$

nähdään, että f voidaan itse asiassa kirjoitaa muodossa

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \chi_{E_j},$$

missä $a_0 = \infty$, $a_j \in]0, \infty[$, $j \in \mathbb{N}$, ja $E_j \subset X$ on mitallinen joukko kaikille $j = 0, 1, 2, ...$

Kiinnitetään $\epsilon > 0$. Borel-säännöllisyyden nojalla jokaiselle $j \in \mathbb{N}$ voidaan valita avoin joukko $U_j \supset E_j$ siten, että pätee

$$\mu(U_j) \leq \mu(E_j) + \epsilon^p 2^{-jp} a_j^{-p}.$$

Valitaan lisäksi jono avoinmia joukkoja $V_j \supset E_0$ siten, että pätee

$$\mu(V_j) \leq \epsilon^p 2^{-jp}$$

kaikille $j \in \mathbb{N}$. Tällöin alhaalta puolijatkuvalle funktiolle

$$g_\epsilon = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{U_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{V_j}$$

pätee sekä $f \leq g_\epsilon$ koko avaruudessa X, että

$$\|g_\epsilon - f\|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu(U_j \setminus E_j)^{\frac{1}{p}} + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(V_j)^{\frac{1}{p}} \leq 2\epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, niin ottamalla jono (ϵ_k), $\epsilon_k > 0$, jolle pätee $\epsilon_k \to 0$, kun $k \to \infty$, saadaan jono g_ϵ alhaalta puolijatkuvia funktioita, jotka approksimoivat funktioita f mielivaltaisella tarkkuudella. Jonosta saadaan lisäksi vähenevä ottamalla minimi $\min\{g_{\epsilon_1}, g_{\epsilon_k}\}$, mikä antaa lopullisen jonon, sillä alhaalta puolijatkuvien funktioiden minimi on myös alhaalta puolijatkuva. $\square$

4.2.2 Approksimoiva Lipschitz-funktio

Lipschitz-funktioiden tiheyden energiassa osoittamiseen täytyy rakentaa sopivat ominaisuudet omaava funktiojono. Tätä ennen täytyy esitellä joitain tarvittavia käsitteitä.

Diskreetti polku P metrisessä avaruudessa (X, d) on pistejono $P = (p_0, ..., p_n)$, jossa $p_k \in X$ kaikille $k = 0, ..., n, n \in \mathbb{N}$. Polun suurin välin pituus määritellään kaavalla

$$\mathrm{Mesh}(P) = \max_{k=0,...,n-1} d(p_k, p_{k+1}),$$

halkaisija kaavalla

$$\mathrm{diam}(P) = \max_{k,l} d(p_k, p_l),$$

ja pituus kaavalla

$$\mathrm{Len}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} d(p_k, p_{k+1})$$

Merkitään että $p \in P$, jos löytyy indeksi $k = 0, ..., n$, jolle pätee $p_k = p$.

Lisäksi kirjoitetaan $P \subset U$ joukolle $U \subset X$, jos $p_k \in U$ kaikille $k = 0, ..., n$. Merkitään myös, että $P \subset Q$, jos polun P pisteet muodostavat polun Q eheän osajonon, eli toisin sanoen, että on $P = (p_0, ..., p_m)$ ja $Q = (q_0, ..., q_n), m \leq n$ ja on olemassa ei negatiivinen $0 \leq s \leq n - m$ siten, että $q_{s+k} = p_k$ kaikille $k = 0, ..., m$. Tällöin sanotaan, että polku P on polun Q osapolku.

Kiinnitetyille $\delta > 0$ ja suljetulle joukolle $A \subset X$ sanotaan, että diskreetti polku $P = (p_0, ..., p_n)$ on (δ, A, x)-kelvollinen, jos pätee $\mathrm{Mesh}(P) \leq \delta, p_0 \in A$ ja $p_n = x$. Kaikkien näiden kelvollisten diskreettien polkujen joukkoja merkitään $\mathcal{P}(\delta, A, x)$.

Seuraavaksi muodostetaan tarvittavat Lipschitz-funktiot ja käydään läpi niiden tärkeimmät ominaisuudet, joita tullaan tarvitsemaan ([5], Lemma 2.13).

Lemma 4.16. *Olkoon $M > 0, \delta > 0$ vakioita, $f : X \to [0, M]$ funktio, $A \subset X$ suljettu joukko, ja $g : X \to [0, \infty[$ jatkuva ja rajoitettu funktio. Tällöin funktiolla*

$$\tilde{f} = \min\{M, \inf_{p_0,...,p_n \in \mathcal{P}(\delta,A,x)} f(p_0) + \sum_{k=0}^{n-1} g(p_k) d(p_k, p_{k+1})\}$$

on seuraavat ominaisuudet:

1. *$\tilde{f} : X \to [0, M]$;*
2. *kaikille $x \in A$ pätee $0 \leq \tilde{f} \leq f(x)$;*
3. *jos $x \in A$ ja $f(x) = 0$, niin tällöin on $\tilde{f}(x) = 0$;*
4. *kaikille $x, y \in X$, joille on $d(x, y) \leq \delta$, pätee*

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \max\{g(x), g(y)\} d(x, y);$$

5. *$lip_a[\tilde{f}](x) \leq g(x)$ kaikille $x \in X$;*

6. *$\tilde{f}$ on* $\max\{M\delta^{-1}, \sup_{x\in X g(x)}\}$*-Lipschitz-funktio.*

Todistus. 1. Koska jokainen määritelmässä esiitynä infimumin termi on ei-negatiivinen, niin myös funktio $\tilde{f}$ on suoraan määritelmän nojalla ei-negatiivinen. Lisäksi se, että pätee $\tilde{f}(x) \leq M$ kaikille $x \in X$ seuraa suoraan määritelmästä, koska minimin toinen termi on M.

2. Olkoon $x \in A$. Koska triviaali polku $P = (x, x)$ on myös (δ, A, x)-kelvollinen, niin pätee

$$\tilde{f}(x) \leq f(x) + g(x)d(x, x) = f(x).$$

3. Olkoon $x \in A$. Kohtien (2) ja (1) nojalla saadaan, että on $0 \leq \tilde{f} \leq f(x) = 0$.

4. Olkoon $x, y \in X$ mielivaltaisia pisteitä, joille pätee $d(x, y) \leq \delta$ ja olkoon $P = (p_0, ..., p_n)$ mielivaltainen (δ, A, x)-kelvollinen polku.

   Muodostetaan (δ, A, y)-kelvollinen polku $Q = (q_0, ..., q_{n+1})$ asettamalla $q_{n+1} = y$ ja $q_i = p_i$ kaikille $i \in \{0, ..., n\}$. Tästä saadaan

$$\tilde{f}(y) \leq f(q_0) + \sum_{k=0}^{n} g(q_k)d(q_k, q_{k+1}) = f(q_0) + \sum_{k=0}^{n-1} g(q_k)d(q_k, q_{k+1}) + g(x)d(x, y).$$

   Ottamalla infimumin yli kaikkien (δ, A, x)-kelvollisten polkujen ja ottamalla myös minimin luvun M kanssa, niin pätee $\tilde{f}(y) \leq \tilde{f}(x) + g(x)d(x, y)$. Tekemällä sama päättelyketju, mutta vaihtamalla lukujen x ja y roolit, sadaan haluttu epäyhtälö.

5. Valitaan pisteet $x, a, b \in X$. Käyttämällä sekä kohtaa (4) pisteisiin a ja b saadaan

$$\frac{|\tilde{g}(a) - \tilde{f}(b)|}{d(a, b)} \leq \max\{g(a), g(b)\}.$$

   Ottamalla raja-arvot $a, b \to x$, käyttämällä funktion g jatkuvuutta ja asymptoottisen Lipschitz-vakion määritelmää saadaan

$$lip_a[\tilde{f}](x) \leq \max\{g(x), g(x)\} = g(x).$$

6. Olkoon $L = \max\{M\delta^{-1}, \sup_{x\in X} g(x)\}$ ja $x, y \in X$. Jos on $d(x, y) \leq \delta$, niin kohdasta (4) saadaan, että pätee $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq Ld(x, y)$. Toisaalta jos on $d(x, y) > \delta$, niin tällöin kohdan (1) perusteella pätee

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq M \leq M\delta^{-1}d(x, y) \leq Ld(x, y).$$

□

Ensiksi täytyy kuitenkin selventää, mitä tarkalleen tarkoitetaan kun sanotaan, että diskreetit polut P^i suppenevat kohti käyrää γ.

Koska käsitellään kunnollista avaruutta X, niin kyseisessä avaruudessa ylempänä määriteltyjen diskreettien polkujen pisteitä ei välttämättä voi yhdistää janoilla avaruudessa X. Tämän ongelman ratkaisemiseen tarvitaan niin sanottua Frechetin upotuslausetta, jossa X upotetaan isometrisesti Banach-avaruuteen. ([10], sivu 106).

Lause 4.17 (Frechetin upotuslause)**.** *Jokaiselle metriselle avaruudelle (X, d) on olemassa isometrinen kuvaus $F : X \to \ell^\infty(\mathbb{N})$.*

Tämän tuloksen avulla avaruus X pystytään tavallaan samaistamaan kuvan $F(X) \subset l^\infty(\mathbb{N})$ kanssa.

Osajoukolle $A \subset X$ ja $a \in A$, pisteen x etäisyys joukosta A saadaan kaavalla $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a)$. Määritellään seuraavaksi niin sanotut lineaarisesti interpoloivat käyrät.

Määritelmä 4.18. *Jos $P = (p_0, ..., p_n)$ on diskreetti polku, niin määritellään sen lineaarisesti interpoloiva käyrä seuraavasti: Jos $Len(P) = 0$, niin määritellään $\gamma_P : [0, 1] \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ asettamalla $\gamma(t) = p_0$ kaikille $t \in [0, 1]$. Jos $Len(P) > 0$, niin määrittellään jono interpoloivia aikoja $T_P = (t_0, ..., t_n)$ asettamalla $t_0 = 0$ ja*

$$t_k = \sum_{i=0}^{k-1} d(p_i, p_{i+1})/Len(P) \text{ kun } k = 1, ..., n.$$

Näiden avulla voidaan määritellä käyrä $\gamma_P : [0, 1] \to \ell^\infty$ paloittain lineaarisesti interpoloimalla avaruudessa ℓ^∞ seuraavasti: asettamalla $\gamma_P(t_k) = p_k$ ja kun on $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ja $t_{k+1} > t_k$, niin asetetaan

$$\gamma(t) = ((t - t_k)p_k - (t_{k+1} - t)p_{k+1})(t_{k+1-t_k})^{-1}.$$

Tarvitaan seuraavaa lineaarisiin käyriin liittyvää lemmaa ([5], Lemma 2.15).

Lemma 4.19. *Jos P on diskreetti polku ja γ_P sen lineaarisesti interpoloiva käyrä, niin tällöin γ_P on $Len(P)$-Lipschitz, jonka nopeus on vakio, $Len(P) = Len(\gamma_P)$ ja kaikille $t \in [0, 1]$ on olemassa piste $p \in P \subset X$ siten, että pätee $d(\gamma_P(t), p) \le Mesh(P)$.*

Sanotaan että jono diskreettejä polkuja (P^i) suppenee käyrään $\gamma : [0, 1] \to X$, jos sen lineaarisesti interpoloiva käyrä γ_{P^i} suppenee tasaisesti käyrään γ ja $\lim_{i\to\infty} \text{Mesh}(P^i) = 0$.

Tarvitaan myös seuraavaa suppenemiseen liittyvää tulosta ([5], Lemma 2.16).

Lemma 4.20. *Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus, ja (P^i) on jono diskreettejä polkuja avaruudessa (X, d), joille pätee $\lim_{i\to\infty} Mesh(P^i) = 0$ ja $\sup_{i\in\mathbb{N}} Len(P^i) < \infty$. Tällöin on olemassa osajono i_k siten, että jono (P^{i_k}) suppenee käyrään $\gamma : [0, 1] \to X$.*

Todistus. Olkoot $\gamma_{P^i} : [0, 1] \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ diskreettejä polkuja P^i vastaavat lineaarisesti interpoloivat käyrät ja merkitään $L = \sup_{i\in\mathbb{N}} \text{Len}(P^i) < \infty$. Lemman 4.19 nojalla jokainen käyrä γ_{P^i} on L-Lipschitz. Olkoon $t \in [0, 1]$ ja määritellään joukko $A_t = \{\gamma_{P^i}(t) : i \in \mathbb{N}\}$.

Näytetään että joukko A_t on täysin rajoitettu. Olkoon $t \in [0, 1]$ määritellään joukko $A_t = \{\gamma_{P^i}(t) : i \in \mathbb{N}\}$. Kiinnitetään $\delta > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ siten, että kun $i \ge N$, niin pätee $\text{Mesh}(P^i) \le \delta$. Määritellään joukko $K = X \cup \{\gamma_{P^1}(t), ..., \gamma_{P^N}(t)\}$. Näytetään että pätee $d(a, K) \le \delta$ kaikille $a = \gamma_{P^i}(t) \in A_t$. Kun $i \le N$, niin tämä seuraa välittömästi joukon K määritelmästä. Kun taas $i > N$, niin Lemman 4.19 nojalla on olemassa $p^i \in P^i$ siten, että pätee $d(\gamma_{P^i}(t), p^i) \le \text{Mesh}(P^i) \le \delta$. Koska $p^i \in X$, niin pätee $d(\gamma_{P^i}(t), K) \le d(\gamma_{P^i}(t), X) \le \delta$.

Joukko K on määritelmänsä nojalla kompakti, eli erityisesti se on täysin rajoitettu. Voidaan siis löytää pisteet $x_1, ..., x_M \in K$ siten, että pätee $K \subset \cup_{j=1}^M B(x_j, \delta)$. Yhdistämällä tämä tietoon, että on $d(a, K) \leq \delta$ kaikille $a = \gamma_{P^i}(t) \in A_t$, saadaan kuuluvuus $A_t \subset \cup_{j=1}^{M} B(x_j, 2\delta)$, mikä todistaa joukon A_t täyden rajoittuneisuuden. Koska avaruus $l^\infty(\mathbb{N})$ on Banach-avaruus, ja koska täydellisen avaruuden osajoukko on täysin rajoitettu jos ja vain jos se on esikompakti, niin erityisesti joukko A_t on esikompakti joukko.

Lauseen 4.14 nojalla on olemassa osajono $(\gamma_{P^{i_k}})$, joka suppenee tasaisesti käyrään $\gamma : [0, 1] \to \ell(\mathbb{N})$. Riittää enää näyttää, että kyseisen käyrän kuvajoukko kuuluu avaruuteen X. Lemman 4.19 nojalla kaikille $t \in [0, 1]$ pätee

$$d(\gamma(t), X) \leq \limsup_{i\to\infty} d(\gamma_{P^i}, X) \leq \lim_{i\to\infty} \mathrm{Mesh}(P^i) = 0,$$

eli käyrän γ kuvajoukko todella kuuluu avaruuteen X. □

Seuraava tekninen tulos antaa tavan hallita alhaalta puolijatkuvan funktion käyräintegraalia ylhäältä käsin ([5], Lemma 2.19).

Lemma 4.21. *Olkoon $g : X \to [0, \infty]$ alhaalta puolijatkuva funktio ja oletetaan lisäksi, että jatkuvien funktioiden $g_i : X \to [0, \infty]$ muodostama jono (g_i) on kasvava ja että se suppenee pisteittäin funktioon g. Jos $(P^i = (p_0^i, ..., p_{n(i)}^i))$ on jono diskreettejä polkuja, joille pätee $\sup_{i\in\mathbb{N}} Len(P^i) < \infty$ ja jotkaa suppenevat käyrään $\gamma : [0, 1] \to X$, niin tällöin pätee epäyhtälö*

$$\int_\gamma g\, ds \leq \liminf_{i\to\infty} \sum_{k=0}^{n(i)-1} g_i(p_k^i) d(p_k^i, p_{k+1}^i).$$

Todistus. Olkoot γ_{P^i} diskreettien polkujen P^i interpoloivat käyrät ja olkoon $L = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Len}(P^i)$. Lauseen 2.14 nojalla jokainen $g_i : X \to \mathbb{R}$ voidaan jatkaa jatkuvaksi funktioksi $\tilde{g}_i : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ koko avaruuteen $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Lisäksi muodostamalla lopulliset jatkofunktiot $\hat{g}_i$ rekursiivisesti ja ottamalla maksimin, saadaan koko avaruudessa määritellyt jatkuvat funktiot,

$$\hat{g}_{i+1} = \max\{\hat{g}_i, \tilde{g}_{i+1}\},$$

joille myös pätee $g_i \leq g_j$ kaikille $i \leq j$. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi näitä lopullisia jatkofunktioita $g_i, i \in \mathbb{N}$.

Jatketaan funktio g koko avaruuteen ℓ^∞ kaavalla $g(x) = \lim_{i\to\infty} g_i(x)$, missä $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Koska (g_i) on kasvava jono jatkuvia funktioita, niin tästä seuraa, että funktio g on alhaalta puolijatkuva. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi jatkettuja funktioita samalla symboleilla, kuin alkuperäisiä funktioita.

Kiinnitetään indeksi $i \in \mathbb{N}$. Koska jono γ_{P^j} suppenee määritelmän nojalla tasaisesti käyrään γ, kun $j \to \infty$, niin täten joukko $K \subset \ell^\infty$, joka muodostetaan ottamalla yhdiste käyrien $\gamma_{P^j}, j \in \mathbb{N}$ ja γ kuvista, on kompakti. Täten joukossa K funktio g_i on tasaisesti jatkuva.

Kiinnitetään $\epsilon > 0$. Koska $g_i|_K$ on tasaisesti jatkuva, niin määritelmän nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos on $x, y \in K$, joille pätee $d(x, y) \leq \delta$, niin tällöin on $|g_i(x) - g_i(y)| \leq \epsilon/L$. Valitaan tarpeeksi suuri N siten, että $\mathrm{Mesh}(P^j) \leq \delta$ jokaiselle $j \geq N$. Jos $T_{P^j} = (t_0^j, ..., t_{n(j)}^j)$ on jono interpoloitavia aikoja diskreeteille polulle P^j, niin tällöin

$$d(\gamma_{P^j}(t), p_k^j) \leq \mathrm{Mesh}(P^j) \leq \delta,$$

jokaiselle $t \in [t_k^j, t_{k+1}^j]$, missä $k = 0, ..., n(j) - 1$. Täten jokaiselle $j \geq N$ saadaan

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\gamma_{P^j}} g_i \, ds - \sum_{k=0}^{n(j)-1} g_i(p_k^j) d(p_k^j, p_{k+1}^j)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=0}^{n(j)-1} \int_{\gamma_{P^j}|_{[t_k^j, t_{k+1}^j]}} g_i \, ds - \sum_{k=0}^{n(j)-1} g_i(p_k^j) d(p_k^j, p_{k+1}^j)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=0}^{n(j)-1} \int_{\gamma_{P^j}|_{[t_k^j, t_{k+1}^j]}} (g_i(\cdot) - g_i(p_k^j)) \, ds\Big| \\
&= \sum_{k=0}^{n(j)-1} \int_{\gamma_{P^j}|_{[t_k^j, t_{k+1}^j]}} \Big|(g_i(\cdot) - g_i(p_k^j))\Big| \, ds \\
&= \mathrm{Len}(P^j)\epsilon / L \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

missä viimeisellä rivillä käytettiin tietoa $\mathrm{Len}(P^j) = \mathrm{Len}(\gamma_{P^j})$, mikä seuraa Lemmasta 4.19. Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, niin ottamalla raja-rvo $j \to \infty$ saadaan

$$\lim_{j \to \infty} \Big|\int_{\gamma_{P^j}} g_i \, ds - \sum_{k=0}^{n(j)-1} g_i(p_k^j) d(p_k^j, p_{k+1}^j)\Big| = 0.$$

Käyttämällä edellä saatua tulosta, käyräintegraalien alhaalta puolijatkuvuutta ja sitä, että on $g_i \leq g_j$ kun $i \leq j$, saadaan jokaiselle $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma g_i \, ds &\leq \liminf_{j \to \infty} \int_{\gamma_{P^j}} g_i \, ds = \liminf_{j \to \infty} \sum_{k=0}^{n(j)-1} g_i(p_k^j) d(p_k^j, p_{k+1}^j) \\
&\leq \liminf_{j \to \infty} \sum_{k=0}^{n(j)-1} g_j(p_k^j) d(p_k^j, p_{k+1}^j).
\end{aligned}$$

Ottamalla raja-arvot $i \to \infty$ ja käyttämällä monotonisen konvergenssin lausetta yhtälön vasemmalle puolella saadaan haluttu tulos. □

Energiatiheyden todistus tulee suurelta osin pohjautumaan seuraavaan lauseeseen ([3], Huomio 2.23).

Lause 4.22. *Olkoon $f : X \to [0, M]$ funktio, jolle pätee $f|_{X \setminus B(x_0, R)} = 0$, joillekin $M > 0, R > 2, x_0 \in X$. Oletetaan lisäksi, että kyseiselle funktiolle on olemassa alhaalta puolijatkuva ylägradientti $g_1 : X \to [0, \infty]$. Olkoon $\sigma > 0$ mielivaltainen ja $\psi_{2R}(x) = \max\{0, \min\{1, 2R - d(x_0, x)\}\}$. Tällöin kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa kompakti joukko $K \subset X$, jolle pätee $\mu(B(x_0, 2R) \setminus K) < \epsilon$, ja jono rajoitettuja Lipschitz-funktioita $(f_n), n \in \mathbb{N}$, joille pätee*

1. *$0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ kaikille $x \in K$,*
2. *$lip_a f_n(x) \leq g_1(x) + \sigma\psi_{2R}(x)$ kaikille $x \in X$, ja*

3. $f_n(x) \to f(x)$ *kaikille* $x \in K$.

Todistus. Lauseen 2.7 nojalla voidaan valita kompakti joukko $K \subset B(x_0, 2R)$ siten, että on $\mu(B(x_0, 2R) \setminus K) < \epsilon$, ja lisäksi funktio $f|_K$ on jatkuva. Määritellään siis apufunktio

$$\psi_{2R}(x) = \max\{0, \min\{1, 2R - d(x_0, x)\}\}.$$

Koska oletuksen nojalla on $R > 2$, niin pätee $\psi_{2R}|_{B(x_0, 3R/2)} = 1$ ja $\psi_{2R}|_{X\setminus B(x_0,2R)} = 0$. Määritellään apufunktiota käyttämällä funktio

$$g_\sigma(x) = g_1(x) + \sigma\psi_{2R}(x).$$

Koska sekä funktio g_1, että $\sigma\psi_{2R}(x)$ ovat alhaalta puolijatkuvia, niin erityisesti myös g_σ on alhaalta puolijatkuva.

Lauseen 2.13 nojalla voidaan löytää kasvava jono rajoitettuja ja jatkuva funktioita $(\tilde{g}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, jotka suppenevat funktioon g_1, ja joille pätee $0 \le \tilde{g}_m \le \tilde{g}_n \le g_1$ kun $m \le n$. Määritellään funktiot

$$g_n(x) = \tilde{g}_n + \sigma\psi_{2R}(x).$$

Suoraan tästä määritelmästä saadaan, että pätee $g_m \le g_n$, kun $m \le n$, $0 \le g_n \le g_\epsilon$, ja että g_n suppenee pisteittäin funktioon g_ϵ, kun $n \to \infty$. Määritellään suljettu joukko $A = K \cup X \setminus B(x_0, R)$. Koska sekä funktio $f|_K$, että funktio $f|_{X\setminus B(x_0,R)}$ ovat jatkuvia, niin erityisesti myös funktio $f|_A$ on jatkuva.

Määritellään jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ funktio f_n kaavalla

$$f_n(x) = \min\Big\{M, \inf_{p_0,\dots,p_N} f(p_0) + \sum_{k=0}^{N-1} g_n(p_k) d(p_k, p_{k+1})\Big\},$$

missä infimum otetaan yli kaikkien (n^{-1}, A, x)-kelvollisten polkujen $(p_0, ..., p_n)$.

Koska g_n on määritelmänsä nojalla rajoitettu ja jatkuva kaikille $n \in \mathbb{N}$, niin voidaan käyttää Lemmaa 4.16. Kyseisen lemman kohtien (1) ja (6) nojalla voidaan todeta, että funktio $f_n : X \to [0, M]$ on Lipschitz-funktio kaikille $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi funktioiden g_n määritelmän ja Lemman 4.16 kohtien (2) ja (5) nojalla funktiolle f_n pätee

$$0 \le f_n|_K \le f|_K,$$

eli kohta (1) toteutuu, ja

$$\mathrm{lip}_a[f_n] \le g_n \le g_\sigma,$$

eli myös kohta (2) toteutuu. Lisäksi Lemman 4.16 kohdan (3) nojalla saadaan, että pätee $f_n(x) = 0$ kaikille $x \in X \setminus B(x_0, R)$. Näistä saadaan siis, että pätee $f_n \in \mathrm{LIP}_b(X)$.

Oletetaan kohdan (3) todistamiseksi, että löytyy piste joukosta $K \subset B(x_0, 2R)$, jossa pisteittäin suppeneminen ei toteudu. Näytetään että tämän vastaoletuksen avulla löydetään käyrä γ, jolle pätee

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) > \int_\gamma g_\sigma \, ds,$$

mikä olisi ristiriita, sillä g_σ on ylägradientti funktiolle f. Kiinnitetään siis piste $x_1 \in K \subset B(x_0, 2R)$, jolle pisteittäinen suppeneminen ei toteudu.

Kun $m \leq n$, niin pätee siis $g_m \leq g_n$. Erityisesti pätee myös $f_m \leq f_n$ kaikille $x \in X$, koska jokainen (n^{-1}, A, x_1)-kelvollinen polku on myös (m^{-1}, A, x_1)-kelvollinen. Jono $(f_n(x_1)), n \in \mathbb{N}$, on siis kasvava. Lemman 4.16 nojalla pätee siis $f_n(x_1) \leq f(x_1)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti koska kyseessä on kasvava ja rajoitettu jono, niin raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n(x_1)$ on olemassa. Koska oletuksen nojalla kyseinen raja-arvo ei ole $f(x_1)$, niin on olemassa vakio $\delta > 0$, jolle pätee $\lim_{n\to\infty} f_n(x_1) \leq f(x_1) - \delta$.

Koska oletuksen nojalla on $f(x) \leq M$, niin pätee $f_n(x_1) \leq M - \delta$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Funktioiden $f_n(x)$ määritelmästä saadaan diskreetit polut $P^n = (P_0^n, ..., P_{N_n}^n)$, jotka ovat (n^{-1}, A, x_1)-kelvollisia, ja joille pätee

$$f(p_0^n) + \sum_{K=0}^{N_n-1} g_n(p_k^n) d(p_k^n, p_{k+1}^n) < f(x_1) - \frac{\delta}{2} \leq M. \tag{10}$$

Jos polku on (n^{-1}, A, x_1)-kelvollinen, niin pätee siis $p_0^n \in A$, $\mathrm{Mesh}(P^n) \leq n^{-1}$ ja $p_{N_n}^n = x_1$.

Olkoon $Q^n = (q_0^n, ..., q_{M_n}^n)$ suurin polun P^n osapolku, jolle pätee $q_{M_n}^n = x_1$ ja

$$Q^n \subset B(x_0, 3R/2).$$

Näytetään että polku Q^n on (n^{-1}, A, x_1)-kelvollinen ja toteuttaa epäyhtälön (11) alla. Koska $Q^n \subset P^n$, niin välittömästi saadaan, että pätee $\mathrm{Mesh}(Q^n) \leq n^{-1}$. Lisäksi suoraan määritelmän nojalla $q_{M_n}^n = x_1$. Riittää siis näyttää, että pätee $q_0^n \in A$.

Jos $Q^n = P^n$, niin selvästi Q^n on (n^{-1}, A, x_1)-kelvollinen. Lisäksi on $f(q_0^n) = f(p_0^n)$ ja alla oleva epäyhtälö (11) toteutuu. Oletetaan että kuuluvuus $Q^n \subset P^n$ on aito. Koska $R > 2$, niin $\mathrm{Mesh}(P^n) \leq 1 \leq R/2$ ja koska Q^n on suurin osapolku, jolle kuuluvuus pätee, niin täytyy olla $q_0^n \in B(x_0, 3R/2) \setminus B(x_0, R)$. On siis $q_0^n \in A$ ja Q^n on yhä (n^{-1}, A, x)-kelvollinen. Lisäksi koska funktio f on kannatettu pallossa, niin pätee $0 = f(q_0^n)$. Tästä ja epäyhtälöstä (10) saadaan

$$\begin{aligned} f(q_0^n) + \sum_{K=0}^{N_n-1} g_n(q_k^n) d(q_k^n, q_{k+1}^n) &\leq f(p_0^n) + \sum_{K=0}^{N_n-1} g_n(p_k^n) d(p_k^n, p_{k+1}^n) \\ &< f(x) - \frac{\delta}{2} \leq M. \end{aligned} \tag{11}$$

Näytetään että jono (Q^n) toteuttaa Lemman 4.20 oletukset, jolloin kyseisellä jonolla on osajono, joka suppenee johonkin käyrään.

1. Koska avaruus X on kunnollinen, niin erityisesti suljettu ja rajoitettu joukko $\overline{B(x_0, 2R)}$ on kompakti. Koska diskreeteille poluille Q^n pätee $Q^n \subset \overline{B(x_0, 2R)}$, niin lemman kompaktivaatimus täyttyy.

2. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Mesh}(Q^n) = 0$: Suoraan saadaan, että pätee

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Mesh}(Q^n) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0,$$

koska Q^n on (n^{-1}, A, x_1)-kelvollinen.

3. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Len}(Q^n) < \infty$: Kiinnitetään $n \in \mathbb{N}$. On siis $g_n(x) = \tilde{g}_n(x) + \sigma\psi_{2R}(x), Q^n \subset B(x_0, 3R/2)$ ja $R \geq 2$. Funktion $\psi_{2R}(x)$ määritelmän nojalla pätee $\psi_{2R}(x)|_{B(x_0,3R/2)} = 1$. Tästä seuraa, että jokaiselle $q \in Q^n$ pätee $g_n(q) \geq \sigma$ kaikille $q \in Q^n$. Käyttämällä epäyhtälöä (11) ja asettamalla $L_0 = \sigma^{-1} M$ saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Len}(Q^n) &= \sigma^{-1} \sum_{k=0}^{M_n-1} \sigma d(q_k^n, q_{k+1}^n) \\
&\leq \sigma^{-1}\Big(f(q_0^n) + \sum_{K=0}^{M_n-1} g_n(q_k^n) d(q_k^n, q_{k+1}^n)\Big) \leq L_0,
\end{aligned}
$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Lemman 4.20 nojalla on siis olemassa jonon (Q^n) osajono (Q^{n_k}), joka suppenee käyrään $\gamma : [0,1] \to X$.

Koska $q_0^{n_k} \in A$, A on suljettu ja lisäksi pätee $\lim_{n_k\to\infty} q_0^{n_k} = \gamma(0)$, niin pätee $\gamma(0) \in A$. Samaten nähdään, että on $\gamma(1) = x_1$. Koska $f|_A$ on jatkuva, niin pätee $f(\gamma(0)) = \lim_{n_k\to\infty} f(q_0^{n_k})$. Koska kasvava jono $(g_n), n \in \mathbb{N}$, suppenee pisteittäin funktioon g_ϵ, niin käyttämällä Lemmaa 4.21 diskreetteihin polkuihin Q^{n_k}, käyrään γ ja funktioihin g_n ja g_ϵ, sekä lisäksi epäyhtälöä (11), saadaan, että pätee

$$
f(\gamma(0)) + \int_\gamma g_\epsilon \, ds \leq \liminf_{n\to\infty} f(q_0^n) + \sum_{k=0}^{M_n-1} g_n(q_k^n) d(q_k^n, q_{k+1}^n) \leq f(\gamma(1)) - \frac{\delta}{2}.
$$

Tästä saadaan siis

$$
f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) > \int_\gamma g_\sigma \, ds,
$$

mikä on ristiriita, sillä g_ϵ on määritelmänsä nojalla funktion f ylägradientti. Voidaan siis todeta, että jokaiselle $x \in K$ pätee $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, eli kyseinen pisteittäinen suppeneminen on voimassa. □

4.2.3 Energiatiheyden todistus

Näiden tulosten avulla pystytään todistamaan Lipschitz-funktioiden tiheys energiassa. Lauseeseen voidaan myös helposti liittää lisäosa, joka sanoo, että myös kyseisten Lipschitz-funktioiden asymptoottiset Lipschitz-vakiot $\mathrm{lip}_a[f_n]$ suppenevat funktion f minimaaliseen p-heikkoon ylägradienttiin.

Lause 4.23. *Olkoon X kunnollinen metrinen avaruus. Olkoon $p \in [1, \infty[$ ja μ Radon-mitta, joka on positiivinen ja äärellinen jokaisella pallolla $B \subset X$. Jos $f \in N^{1,p}(X)$, niin on olemassa jono rajoitetun kantajan omaavia Lipschitz funktioita $f_n \in LIP_b(X) \subset N^{1,p}(X)$ siten, että seuraavat kohdat ovat voimassa.*

1. *Funktiot f_n suppenevat funktioon f avaruudessa $L^p(X)$, eli*

$$
\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|^p \, d\mu = 0.
$$

2. *Funktioiden f_n minimaaliset p-heikot ylägradientit g_{f_n} suppenevat funktion f minimaaliseen p-heikkoon ylägradienttiin g_f avaruudessa $L^p(X)$, eli*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |g_f - g_{f_n}|^p d\mu = 0.$$

3. *Funktioiden f_n asymptoottiset Lipschitz-vakiot $lip_a[f_n]$ suppenevat funktion f minimaaliseen p-heikkoon ylägradienttiin g_f avaruudessa $L^p(X)$, eli*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |g_f - lip_a[f_n]|^p d\mu = 0.$$

Oletusta että avaruus X on kunnollinen, voitaisiin itse asiassa heikentää, olettamalla sen sijaan, että avaruus X on täydellinen ja separoituva ([5]). Tämä vahvempi oletus kuitenkin yksinkertaistaa todistusta.

Lause 4.23 yleiselle funktiolle $f \in N^{1,p}(X)$ saadaan johdettua tapauksesta, jossa funktion f oletetaan olevan ei-negatiivinen, rajoitettu ja lisäksi kannatettu pallossa.

Lause 4.24. *Olkoon $f \in N^{1,p}(X)$ funktio, jolle pätee $f : X \to [0, M]$ jollekin $M > 0$, ja $f|_{X\setminus B(x_0,R)=0}$ joillekin $x_o \in X, R > 2$. Tällöin on olemassa jono (f_n) rajoitetun kantajan omaavia Lipschitz funktioita, jotka toteuttavat Lauseen 4.23 vaatimukset.*

Todistus. Kiinnitetään $\epsilon \in]0, 1[$. Lauseen 2.7 ja Radon-mitan μ sisäsäännöllisyyden nojalla voidaan valita kompakti joukko $K \subset B(x_0, 2R)$ siten, että pätee

$$\mu(B(x_0, 2R) \setminus K) \le \epsilon(2M)^{-p} \tag{12}$$

ja lisäksi $f|_K$ on jatkuva. Olkoon $\sigma \in]0, 1[$ siten, että pätee

$$\mu(B(x_0, 2R))\sigma^p \le \epsilon 4^{-2p}. \tag{13}$$

Lemman 3.20 ja Lauseen 4.15 nojalla funktiolle f voidaan valita alhaalta puolijatkuva ylägradientti g_1 siten, että pätee

$$\int_X |g_1 - g_f|^p \, d\mu \le \epsilon 4^{-2p}. \tag{14}$$

Lauseen 4.22 nojalla on olemassa jono rajoitetun kantajan omaavia Lipschitz-funktioita $(f_n) \subset \mathrm{LIP}_b(X)$, joille pätee

1. $0 \le f_n \le f(x)$ kaikille $x \in X$,
2. $\mathrm{lip}_a[f_n](x) \le g_1 + \sigma\psi_{2R}$ kaikille $x \in X$ ja
3. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ kaikille $x \in K$.

Määritellään joukko $A = K \cup B(x_0, R)$. Koska sekä $f|_K$ että $f|_{X\setminus B(x_0,R)}$ ovat jatkuvia, niin myös funktio $f|_A$ on jatkuva. Koska $A \setminus K \subset X \setminus B(x_0, R)$, niin pätee $f_n(x) = f(x) = 0$ joukossa

$A \setminus K$. Koska on $f_n, f : X \to [0, M]$, niin pisteittäisestä suppenemista saadaan dominoidun konvergenssilauseen avulla, että tarpeeksi suurille $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\int_A |f_n - f|^p \, d\mu = \int_K |f_n - f|^p \, d\mu \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Pätee siis $f_n(x) = f(x) = 0$ kaikille $x \in X \setminus B(x_0, R)$ ja $f_n(x), f(x) \in [0, M]$ kaikille $x \in B(x_0, R) \setminus K$. Koska on $X = A \cup (B(x_0, R) \setminus K)$, niin epäyhtälöä (12) käyttämällä tarpeeksi suurille $n \in \mathbb{N}$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_X |f - f_n|^p \, d\mu &= \int_A |f - f_n|^p \, d\mu + \int_{B(x_0,R)\setminus K} |f - f_n|^p \, d\mu \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + M^p \mu(B(x_0, R) \setminus K) \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Funktiojono (f_n) toteuttaa siis Lauseen 4.23 kohdan (1).

Lisäksi käyttämällä epäyhtälöitä (13) ja (14) saadaan, että funktiolle $g_\epsilon = g_1(x) + \sigma\psi_{2R}(x)$ pätee

$$\begin{aligned}\int_X |g_\epsilon - g_f|^p d\mu &= \int_X |g_1(x) + \sigma\psi_{2R}(x) - g_f|^p d\mu \\ &\leq \int_X |g_1 - g_f|^p d\mu + \mu(B(x_0, 2R))\sigma^p \\ &\leq \epsilon 4^{-2p} + \epsilon 4^{-2p} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Suoraan asymptoottisen Lipschitz-vakion määritelmästä saadaan minimaaliselle p-heikolle ylägradientille arvio

$$g_{f_n} \leq \operatorname{lip}_a[f_n](x) \leq g_1 + \sigma\psi_{2R}(x) = g_\epsilon$$

kaikille $x \in X$. Diagonaaliargumentilla kun $n \to \infty$ ja $\epsilon \to 0$, saadaan jono (f_ϵ), jolle pätee

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_X |f - f_\epsilon|^p \, d\mu = 0$$

ja jono (g_ϵ), jolle pätee

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_X |g_\epsilon - g_f|^p d\mu = 0$$

ja

$$g_{f_\epsilon} \leq \operatorname{lip}_a[f_\epsilon](x) \leq g_\epsilon$$

kaikille $x \in X$. Lemmasta 4.13 seuraa, että pätee sekä

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_X |g_f - g_{f_\epsilon}|^p d\mu = 0$$

että

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_X |g_f - \operatorname{lip}_a[f_\epsilon]|^p d\mu = 0,$$

eli funktiojono (f_ϵ) toteuttaa myös Lauseen 4.23 kohdat (2) ja (3), mikä todistaa väitteen tapauksessa, jossa funktio f on ei-negatiivinen, rajoitettu ja kannatettu pallossa. □

Käyttämällä Lemmaa 4.24 voidaan todistaa myös yleinen tapaus eli Lause 4.23.

Lauseen 4.23 todistus. Olkoon $f \in N^{1,p}(X)$ mielivaltainen funktio. Osoitetaan ensin, että funktion f voi olettaa olevan ei-negatiivinen. Kirjoitetaan se muodossa $f = f_+ - f_-$, missä $f_+ = \max\{f, 0\}$ ja $f_- = \max\{-f, 0\}$, $f_\pm \in N^{1,p}$. Tällöin Lauseen 3.27 nojalla pätee $g_f = g_{f_+} + g_{f_-}$. Jos Lause 4.23 on tosi funktioille $f_\pm$, niin tällöin funktioille f_+ ja f_- voitaisiin löytää jono funktioita $(f_+^n), (f_-^n) \in \mathrm{LIP}_b(X)$, joille pätee $\mathrm{lip}_a[f_\pm^n] \to g_{f_\pm}$ avaruudessa $L^p(X)$. Määritellään $f_n = f_+^n - f_-^n$. Tällöin asymptoottisen Lipschitz-vakion määritelmästä seuraa, että pätee $g_{f_n} \le \mathrm{lip}_a[f_n] \le \mathrm{lip}_a[f_+^n] + \mathrm{lip}_a[f_-^n]$. Koska $\mathrm{lip}_a[f_+^n] + \mathrm{lip}_a[f_-^n] \to g_{f_+} + g_{f_-} = g_f$ avaruudessa $L^p(X)$, niin Lemman 4.13 nojalla pätee $\mathrm{lip}_a[f_n] \to g_f$ ja $g_{f_n} \to g_f$ avaruudessa $L^p(X)$. Funktiojono (f_n) siis suppenee funktioon f energiassa. Voidaan siis olettaa, että f on itseasiassa ei-negatiivinen.

Osoitetaan että funktion $f : X \to [0, \infty]$ voidaan olettaa olevan rajoitettu. Olkoon $f_M = \min\{f, M\}$ kaikille $M > 0$. Tällöin pätee $f_M \to f$ avaruudessa $L^p(X)$ kun $M \to \infty$. Lauseen 3.27 nojalla funktio $g_M = g_f \cdot \chi_{X \setminus f^{-1}[0,M]}$ on minimaalinen p-heikko ylägradientti funktiolle $f - f_M$. Lisäksi pätee $g_M \to 0$ avaruudessa $L^p(X)$ kun $M \to \infty$. Funktio f_M suppenee siis funktioon f avaruudessa $N^{1,p}(X)$. Erityisesti koska pätee $g_{f-f_M} \le |g_f - g_{f_M}|$, niin Lauseen 4.13 nojalla pätee $g_{f_M} \to g_f$ avaruudessa $L^p(X)$. Jos Lause 4.23 pätee jokaiselle funktiolle f_M, niin tällöin on olemassa jonot (f_M^n), jotka suppenevat energiassa funktioon f_M ja joille pätee $\mathrm{lip}_a[f_M^n] \to g_{f_M}$ avaruudessa $L^p(X)$, kun $x \to \infty$. Diagonaaliargumentilla, kun $M \to \infty$ ja $n \to \infty$, saadaan haluttu jono Lipschitz-funktioita, joille energiassa suppeneminen pätee.

Osoitetaan että jokainen ei-negatiivinen ja rajoitettu funktio voidaan olettaa olevan rajoitetusti kannatettu pallossa. Oletetaan siis, että jollekin $M > 0$ pätee $0 \le f \le M$. Olkoon $x_0 \in X$ ja määritellään funktiot $f_R(x) = f\psi_R(x)$, missä $\psi_R(x) = \max\{0, \min\{1, R - d(x_0, x)\}\}$, $R \in \mathbb{N}$ ja $R > 0$. Funktiot ψ_R ovat 1-Lipschitz-funktioita, joille pätee $0 \le \psi_R \le 1$. Lisäksi pätee $f_R \to f$ sekä pisteittäin, että avaruudessa $L^p(X)$.

Lisäksi funktiolle $f - f_R$ on p-heikko ylägradientti

$$g_R = \chi_{X \setminus B(x_0, R-1)} g_f + f \chi_{B(x_0, R+1) \setminus B(x_0, R-1)}.$$

Lauseiden 3.31 ja 3.27 nojalla. Koska $g_R \to 0$, kun $R \to \infty$, avaruudessa $L^p(X)$, niin pätee $f_R \to f$ avaruudessa $N^{1,p}(X)$. Pallossa kannatetut funktiot ovat siis tiheässä normin suhteen. Jo todistetun nojalla siis jokaiselle f_R on olemassa jono $(f_R^n) \subset \mathrm{LIP}_b(X)$ siten, että $f_R^n \to f$ avaruudessa $L^p(X)$ ja $g_{f_R^n} \to g_{f_R}$ kun $n \to \infty$. Jälleen diagonaaliargumentilla, kun $R \to \infty$ ja $n \to \infty$, saadaan jono Lipschitz-funktioita, joille pätee haluttu suppeneminen.

Koska f oli mielivaltainen funktio, niin voidaan todeta, että lause pätee kaikille funktioille avaruudessa $N^{1,p}(X)$. $\square$

5 Lähteet

Viitteet

[1] Robert A. Adams, John J. F. Fournier: *Sobolev spaces, Second Edition*, Academic Press, (Pure and Applied Mathematics, 2003).

[2] Luigi Ambrosio, Maria Colombo, Simone Di Marino: *Sobolev spaces in metric measure spaces: reflexivity and lower semicontinuity of slope*, Mathematical Society Of Japan, (Advanced Studies In Pure Mathematics, sivut 1-58, 2015).

[3] Anders Björn, Jana Björn: *Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces*, European Mathematical Society (Tracts in Mathematics, vuosikerta 17, 2011).

[4] Andrew M. Bruckner, Judith B. Brucker, Brian S. Thomson: *Real Analysis, Second Edition*, www.classicalrealanalysis.com, (2008).

[5] Sylvester Eriksson-Bique: *Density of Lipschitz functions in energy*, Springer Link, (Calculus of Variations and Partial Differential Equations, julkaisu 62, artikkeli 60, 2023).

[6] Gerald B. Folland: *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications, Second Edition*, John Wiley and Sons, Inc., (A Wiley-Interscience Publication, 1999).

[7] Robert C. James: *A Non-Reflexive Banach Space Isometric with Its Second Conjugate Space*, National Academy of Sciences, (julkaisu 37, osa 3, sivut 174-177, 1951).

[8] Irene Fonseca, Giovanni Leoni: *Moderns Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*, Springer Science+Business Media, LLC, (Springer Monographs in Mathematics, 2007).

[9] Piotr Hajlasz: *Sobolev spaces on metric-measure spaces*, American Mathematical Society, (Contemporary Mathematics, Julkaisu 338, sivut 173-218, 2003)

[10] Juha Heinonen, Pekka Koskela, Nageswari Shanmugalingam, Jeremy T. Tyson: *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces: An Approach based on Upper Gradients*, Cambridge University Press, (2015).

[11] Walter Rudin: *Functional Analysis, Second Edition*, McGraw-Hill Inc., (International series in pure and applied mathematics, 1991).