JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTO-
TIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Kolmion merkilliset pisteet

Hasan Köktan

2. joulukuuta 2024

Tekijä
Hasan Köktan

Otsikko
Kolmion merkilliset pisteet (engl. Important Points of Triangles)

Tutkinto-ohjelma
Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä	**Sivumäärä**
2. joulukuuta 2024	64

Tiivistelmä

Tämä pro gradu -tutkielma käsittelee kolmion merkillisiä pisteitä, jotka ovat erityisiä pisteitä, joiden sijainti määräytyy kolmion ominaisuuksien perusteella. Tutkielma on jaettu kolmeen osaan.

Ensimmäisessä osassa käsitellään kolmion peruskäsitteitä ja merkintöjä, jotka luovat perustan merkillisten pisteiden ymmärtämiselle. Tässä osassa esitellään keskeisiä geometrisia käsitteitä ja niiden merkitystä kolmion rakenteen kannalta.

Toisessa osassa tarkastellaan lukiomatematiikassa yleisesti käsiteltäviä merkillisiä pisteitä, kuten painopiste, keskinormaalien leikkauspiste ja korkeusjanojen leikkauspiste. Näiden pisteiden avulla syvennetään ymmärrystä kolmion symmetriasta, tasapainosta ja muista keskeisistä geometrisista ominaisuuksista.

Kolmannessa osassa keskitytään harvinaisempiin merkillisiin pisteisiin, joita ei yleensä käsitellä lukiotasolla. Näihin kuuluvat esimerkiksi Napoleonin pisteet, Fermat'n piste, yhdeksän pisteen ympyrä ja Eulerin suora. Tässä osassa analysoidaan näiden pisteiden konstruktioita ja ominaisuuksia sekä niiden yhteyksiä muihin merkillisiin pisteisiin.

Tutkielma on suunnattu matematiikan harrastajille ja opettajille, jotka haluavat syventää ymmärrystään kolmioiden geometriasta ja niiden tarjoamista tutkimusmahdollisuuksista. Työ pyrkii valottamaan kolmion merkillisten pisteiden monimuotoisuutta ja tuomaan esiin niiden merkityksen geometrian opiskelussa ja soveltamisessa. Matematiikan opetuksen näkökulmasta työ edistää syvällistä matemaattista ajattelua ja auttaa opiskelijoita ymmärtämään geometrian laajaa merkitystä erityisesti sen teoreettisten yhteyksien kautta.

Avainsanat: kolmion merkilliset pisteet, Cevan lause, Eulerin suora, Napoleonin piste, Fermat'n piste, yhdeksän pisteen ympyrä.

Sisällys

Johdanto

Geometria on matematiikan osa-alue, joka käsittelee avaruuden ja sen olioiden ominaisuuksia ja suhteita. Yksi geometrian keskeisistä tutkimuskohteista on kolmio, joka on yksinkertaisuudestaan huolimatta rikas monimuotoisuudessaan. Kolmion ominaisuudet ja sen erityiset pisteet ovat merkittävässä roolissa monissa geometrisissa lauseissa ja sovelluksissa.

Geometrian historian aikana monet merkittävät hahmot ovat vaikuttaneet tämän alan kehitykseen sekä teoreettisesti että käytännön sovellusten kautta. Näiden panostusten myötä matematiikan ongelmien ratkaisemisessa käytettävien menetelmien ja työkalujen moninaisuus on lisääntynyt, mikä on laajentanut geometrian sovellusalueita. Esimerkiksi Nicomedeen konkoidikäyrä ja Pappuksen kulman kolmanneksen jakamismenetelmä ovat hyviä esimerkkejä tällaisista edistysaskeleista, sillä ne tarjosivat ratkaisuja ongelmiin, joita ei voitu ratkaista perinteisillä geometrisilla menetelmillä. Tämä alleviivaa sitä, että geometria ei ole vain abstrakti tieteenala, vaan myös luovaa ajattelua ja kekseliäisyyttä vaativa taide [8, s. 79-80].

Tämä tutkielma keskittyy erityisesti kolmion merkillisiin pisteisiin, joita opetetaan lukion MAA3 geometriakurssilla. Työ syventyy sekä kurssilla käsiteltyihin keskeisiin pisteisiin, joita ovat sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste, ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, ortokeskus ja painopiste, että vähemmän tunnettuihin pisteisiin, kuten Napoleonin ja Fermatin pisteisiin. Lisäksi tutustutaan Eulerin suoraan, joka yhdistää ortokeskuksen, ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen ja painopisteen. Näiden pisteiden tutkiminen ei ole ainoastaan teoreettisesti mielenkiintoista, vaan niillä on myös käytännön sovelluksia esimerkiksi insinööritieteissä ja tietokonegrafiikassa.

Tutkielma alkaa peruskäsitteiden ja merkintöjen esittelyllä, mikä luo pohjan myöhemmille osioille. Tämän jälkeen käsitellään kolmioiden keskeisiä ominaisuuksia, kuten kulmanpuolittajaa, keskinormaalia, korkeusjanoja ja keskijanoja, sekä näiden muodostamia leikkauspisteitä. Tämän lisäksi todistetaan muun muassa Cevan lause, joka tarjoaa työkalun kolmion merkillisten pisteiden tutkimiseen.

Lukiomatematiikassa esiintyvät merkittävät pisteet esitellään perusteellisesti, mukaan lukien sisäänpiirretyn ja ympäri piirretyn ympyrän keskipisteet, ortokeskus ja painopiste. Näiden perinteisten pisteiden jälkeen tutkielmassa tarkastellaan myös vähemmän tunnettuja pisteitä. Tämä laajennettu tarkastelu auttaa lukijaa ymmärtämään geometrisen rakenteen monimutkaisuutta ja sovellusten moninaisuutta.

Tämä työ pohjautuu pitkälti Juha Lehrbäckin luentomonisteeseen Euklidinen tasogeometria[5], Lassi Kuritun, Veli-Matti Hokkasen ja Lauri Kahanpään teokseen Geometria [4] sekä MAA3-geometriakurssin oppikirjaan [2].

Lisäksi tutkielman kolmannessa osassa, jossa käsitellään vähemmän tunnettuja kolmion merkillisiä pisteitä, on käytetty viitteinä teoksia Geometry Revisited [1] ja Geometry by Its History [8]. Kuvioiden piirtämiseen on käytetty GeoGebra-selaintyökalua (www.geogebra.org), joka tarjoaa ilmaisen ja helposti käytettävän välineen geometristen kuvioiden havainnollistamiseen. Tutkielman kirjoittamisessa hyödynnettin myös tekoälyä [6] tekstin kielenhuollon osalta, mutta tiivistelmä on laadittu täysin ilman tekoälyn apua.

Lopuksi tutkielman tavoitteena on tarjota kattava katsaus kolmion merkittäviin pisteisiin ja niiden geometrisiin ominaisuuksiin, syventäen lukijan ymmärrystä sekä kolmion rakenteesta että sen monipuolisista sovelluksista. Tämä tutkielma on suunnattu aiheesta kiinnostuneille, jotka haluavat syventää ymmärrystään kolmioiden geometriasta.

1 Peruskäsitteitä ja merkintöjä

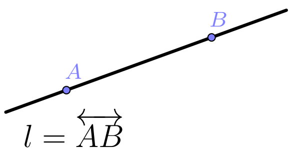
Tässä luvussa käsitellään geometrian peruskäsitteitä ja kolmion ominaisuuksia, jotka toimivat tämän työn teoreettisena perustana. Esitettävät käsitteet ovat keskeisiä ymmärtäessä kolmion merkillisiä pisteitä ja niiden välisiä suhteita. Tässä yhteydessä on hyödyllistä muistaa lukion MAA3-kurssin keskeiset käsitteet, erityisesti lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti [7].

1.1 Geometrisia peruskäsitteitä

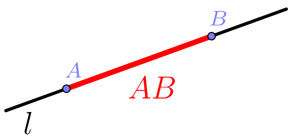
Ennen kuin sukellamme syvemmälle kolmion merkillisiin pisteisiin, on tärkeää varmistaa, että peruskäsitteet ja merkinnät ovat hallussa. Seuraavaksi käymme läpi keskeiset käsitteet jotka tukevat kolmion merkillisten pisteiden ymmärtämistä.

1.1.1 Viivat ja pisteet

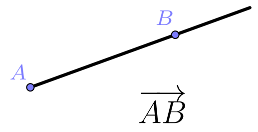
Suora: Suora on äärettömän pitkä ja leveydeltään nolla oleva viiva, joka kulkee kahden pisteen kautta. Suoraa merkitään tavallisesti pienellä kirjaimella, kuten l, tai kahdella suoralla olevalla pisteellä, esimerkiksi $\overleftrightarrow{AB}$.



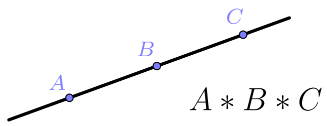
Jana: Jana on suoran osa, joka sijaitsee kahden pisteen välissä. Janaa merkitään sen päätepisteiden avulla, esimerkiksi jana, jonka päätepisteet ovat A ja B, merkitään AB. Janan pituutta merkitään symbolilla $|AB|$.



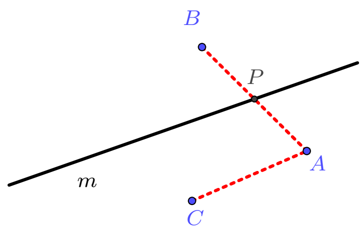
Puolisuora: Puolisuora on osa suoraa, jolla on alkupiste mutta ei päätepistettä. Puolisuoraa merkitään sen alkupisteen ja jonkin sen sisältämän pisteen avulla, esimerkiksi puolisuora, jonka alkupiste on A ja joka sisältää pisteen B, merkitään $\overrightarrow{AB}$.



Pisteiden järjestys: Jos pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla ja B sijaitsee pisteiden A ja C välillä, tämä merkitään $A * B * C$. Tämä notaatio osoittaa, että piste B sijaitsee janalla AC.

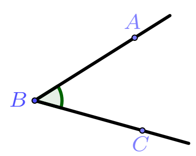


Olkoon m suora ja olkoot A ja B pisteitä, jotka eivät ole suoralla m. Pisteet A ja B sijaitsevat suoran m vastakkaisilla puolilla (eli ne ovat eri puolilla suoraa), jos jana AB leikkaa suoran l, eli on olemassa piste $P \in m$, siten, että $A * P * B$. Tällöin merkitään AmB. Jos tällaista pistettä C ei ole (eli jana AB ei leikkaa suoraa m tai $A = B$), pisteet A ja B ovat samalla puolella suoraa m ja merkitään ABm.

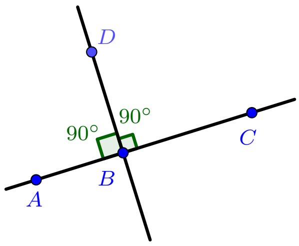


1.1.2 Kulmat ja niiden ominaisuudet

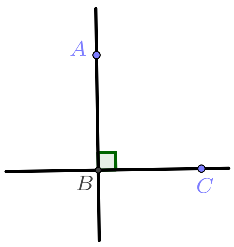
Kulma: Kulma muodostuu kahdesta puolisuorasta, joilla on yhteinen alkupiste. Jos A, B ja C ovat pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla, niin puolisuorat $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ muodostavat kulman $\angle ABC$ (tai $\angle CBA$). Näitä puolisuoria kutsutaan kulman kyljiksi, ja yhteistä pistettä B kutsutaan kulman kärjeksi. Kulma mittaa näiden kahden kyljen välistä aukeamista tai erkanevuutta.



Suora kulma: Kulma $\angle ABD$ on suora kulma, jos ja vain jos se on yhtenevä sen vieruskulman $\angle CBD$ kanssa. Tällöin $\angle ABD = 90°$ ja kääntäen, jos kahden puolisuoran $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BD}$ välinen kulma on $90°$, niin kulma $\angle ABC$ on suora kulma. Huomaa, että tällöin myös viereinen kulma $\angle CBD$ on suora kulma. Suora kulma merkitään symbolilla $\square$ kulman kärjen kohdalla, esimerkiksi $\angle ABD = 90°$.

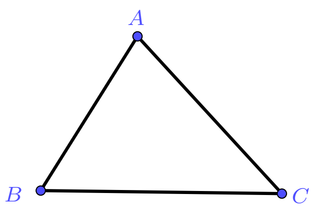


Normaali: Olkoot $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{BC}$ kaksi eri suoraa, jotka leikkaavat pisteessä B siten, että kulma $\angle ABC$ on suora kulma. Tällöin sanomme, että suora $\overleftrightarrow{AB}$ on suoran $\overrightarrow{BC}$ normaali, ja merkitsemme tätä seuraavasti: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$.



1.1.3 Kolmiot ja niiden yhdenmuotoisuus

Kolmio: Kolmio on kolmen pisteen, jotka eivät ole samalla suoralla, määräämä geometrinen kuvio. Kolmiota merkitään sen kärkipisteiden avulla, esimerkiksi kolmio, jonka kärkipisteet ovat A, B ja C, merkitään $\triangle ABC$.



Kolmion $\triangle ABC$ **kärjet** ovat pisteet A, B ja C, ja sen **sivut** ovat janat AB, BC ja AC. Kolmion kulmat ovat $\angle A = \angle BAC$, $\angle B = \angle ABC$ ja $\angle C = \angle ACB$.

Yhtenevyys: Matematiikassa yhtenevyys on keskeinen käsite, joka kuvaa kahden objektin välistä samankaltaisuutta tietyssä suhteessa. Voimme tarkastella yhtenevyyttä sekä janojen että kulmien välillä. Kahden janan sanotaan olevan **yhtenevät**, jos niiden pituudet ovat yhtä suuret. Tätä merkitään seuraavasti: $|AB| = |CD|$, ja luetaan *"janat AB ja CD ovat yhtenevät"*. Vastaavasti, kahden kulman sanotaan olevan **yhtenevät**, jos niiden suuruudet ovat samat. Tämä merkitään $\angle ABC = \angle DEF$, ja luetaan *"kulmat $\angle ABC$ ja $\angle DEF$ ovat yhtenevät"*. Nämä käsitteet kuvaavat janojen ja kulmien samanlaisuutta, erityisesti silloin, kun niitä verrataan tiettyjen konkreettisten mallien, kuten pituuksien tai kulmien suuruuden, avulla.

Lisäksi yhtenevyyttä voidaan laajentaa koskemaan kokonaisia kolmioita.

Määritelmä. *Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat **yhtenevät**, jos niiden kaikki vastaavat osat – sekä sivut että kulmat – ovat yhtenevät. Toisin sanoen, jos*

$$|AB| = |DE|, \quad |BC| = |EF| \quad \text{ja} \quad |CA| = |FD|,$$

ja lisäksi

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E \quad \text{ja} \quad \angle C = \angle F,$$

niin kolmiot ovat yhtenevät. Tällöin merkitään $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Yhdenmuotoisuus: Yhdenmuotoisuus on geometrinen käsite, joka laajentaa yhtenevyyden käsitettä. Yhtenevissä kolmioissa kaikki vastaavat osat – sekä kulmat että sivut – ovat yhteneviä. Yhdenmuotoisissa kolmioissa vastaavuus rajoittuu kulmiin, mutta sivujen yhtenevyys korvataan vaatimuksella, että vastaavien sivujen pituudet ovat keskenään samassa suhteessa. Tämä tarkoittaa, että yhdenmuotoiset kolmiot voivat olla erikokoisia, mutta niiden täytyy säilyttää sama muoto.

Määritelmä. *Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat **yhdenmuotoiset**, jos niiden vastaavat kulmat ovat yhtenevät, eli*

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E \quad \text{ja} \quad \angle C = \angle F,$$

ja lisäksi vastaavien sivujen pituuksien suhteet ovat samat, eli

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

*Tällöin merkitään $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, mikä osoittaa, että kolmiot ovat **yhdenmuotoiset**.*

Toisin sanoen, kolmiot ovat yhdenmuotoiset, jos niiden kaikki vastinkulmat ovat yhteneviä ja vastinsivujen pituuksien suhde on sama. Tämä tarkoittaa, että vaikka yhdenmuotoiset kolmiot voivat olla eri kokoisia, ne näyttävät samalta mittasuhteidensa vuoksi.

Huom: Jos kahden yhdenmuotoisen kolmion yhdenmuotoisuussuhde on 1, silloin nämä kolmiot ovat **yhtenevät**.

Kolmion yhdenmuotoisuulauseet

Yhdenmuotoisuuslauseiden ymmärtäminen on olennaista erilaisten geometristen todistusten perustana. Seuraavat yhdenmuotoisuuslauseet (tai säännöt) ovat keskeisiä työkaluja, joita voidaan hyödyntää tulevissa todistuksissa. Tässä työssä näiden lauseiden todistuksia ei käsitellä yksityiskohtaisesti, vaan ne oletetaan tunnetuiksi esitiedoiksi.

Niille, jotka ovat kiinnostuneita muista yhdenmuotoisuuslauseista ja näiden lauseiden todistuksista tai haluavat tarkastella niitä tarkemmin, suositellaan tutustumista J. Lehrbäckin luentomonisteeseen [5, s. 17-19].

KK-yhdenmuotoisuuslause

Lause. *Jos kahden kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuret kuin toistensa vastaavat kulmat, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*

Esimerkiksi, olkoon kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$, joilla seuraavat kulmat ovat yhtenevät:

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E.$$

Huomaa myös, että kolmion kulmasummalauseen nojalla tällöin myös kolmansien vastinkulmien on oltava yhtenevät, eli $\angle C = \angle F$.

Tällöin, KK-yhdenmuotoisuuslauseen mukaan, voimme päätellä, että kolmiot ovat yhdenmuotoiset:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

SSS-yhdenmuotoisuuslause

Lause. *Jos kaikkien sivujen pituudet ovat verrannollisia toisen kolmion vastaavien sivujen pituuksiin, kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*

Tässä siis oletetaan, että kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ pätee seuraava suhde:

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

Tällöin voimme todeta, että SSS-yhdenmuotoisuuslauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

SKS-yhdenmuotoisuuslause

Lause. *Jos kahden kolmion kaksi vastinsivua ovat verrannolliset ja niiden välinen kulma on yhtä suuri kuin toisen kolmion vastaava kulma, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*

Esimerkiksi, olkoon kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ joiden osalta pätee seuraavat ehdot:

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} \quad \text{ja} \quad \angle B = \angle E.$$

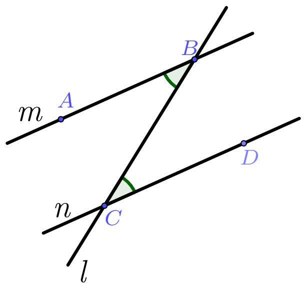
Tämän perusteella SKS-yhdenmuotoisuuslauseen mukaan voidaan todeta, että

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

1.1.4 Vuorokulmalauseet

Vuorokulmalause ja sen käänteinen versio ovat olennaisia käsitteitä geometrian peruslauseissa. Nämä säännöt tarjoavat pohjan erityisesti suuntien ja yhdensuuntaisuuden tarkastelussa, mikä on keskeistä useissa geometrisissa todistuksissa. Tässä työssä emme kuitenkaan mene näiden lauseiden todistuksiin yksityiskohtaisesti, sillä niiden täydellinen esittäminen vaatisi laajempaa matemaattista taustaa ja syvällistä analyysia, joka menee työn keskeisten aiheiden ulkopuolelle. Niille, jotka haluavat tutustua näiden lauseiden todistuksiin tarkemmin, suositellaan perehtymistä Lassi Kuritun, Veli-Matti Hokkasen ja Lauri Kahanpään luentomonisteeseen [4, s. 37, 86].

Lause (Vuorokulmalause)**.** *Olkoot $m = \overleftrightarrow{AB}$ ja $n = \overleftrightarrow{CD}$ eri suoria. Piirretään myös $l = \overleftrightarrow{BC}$. Oletetaan, että AlD ja $\angle ABC = \angle BCD$. Tällöin voimme todeta, että suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset, eli $m \parallel n$.*



Tässä tilanteessa kulmia $\angle ABC$ ja $\angle BCD$ kutsutaan samankohtaisiksi kulmiksi.

Lause (Käänteinen vuorokulmalause)**.** *Olkoot suorat m ja n yhdensuuntaisia, ja suora l, joka leikkaa suoran m pisteessä B ja suoran n pisteessä C. Olkoon lisäksi piste A suoralla m ja piste D suoralla n siten, että AlD. Tästä seuraa, että kulmat $\angle ABC$ ja $\angle BCD$ ovat yhtenevät.*

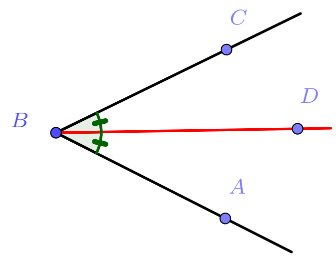
1.2 Kolmioiden ominaisuudet

Tässä luvussa tarkastellaan kolmion keskeisiä ominaisuuksia ja siihen liittyviä merkittäviä janoja, kuten kulmanpuolittaja, keskinormaali, korkeusjana ja keskijana. Nämä ovat keskeisessä roolissa kolmion geometriassa, ja niiden tutkiminen tarjoaa syvällisen ymmärryksen kolmiolle tunnusomaisista pisteistä ja niiden keskinäisistä suhteista. Näitä aiheitä käsitellään lukion geometriakurssilla MAA3 kohdassa ”kolmion merkilliset pisteet” [2], ja niiden kautta avautuvat geometriset suhteet ja teoreettiset yhteydet ovat tärkeitä sekä geometrisessa todistamisessa että käytännön sovelluksissa.

1.2.1 Kulmanpuolittaja

Kulmanpuolittaja on olennainen käsite kolmion geometriassa ja liittyy suoraan kolmion merkillisten pisteiden tutkimiseen. Se on puolisuora, joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan. Tämä käsite on tuttu lukion MAA3 Geometria-kurssilta, jossa kulmanpuolittajaa tarkastellaan usein yhdessä ympyröiden kanssa. MAA3 Geometria-kirjassa kulmanpuolittajasta annetaan intuitiivinen kuvaus: kulmanpuolittajalla sijaitsevat kaikki pisteet, jotka ovat yhtä kaukana kulman kyljistä [2, s. 126]. Kulmanpuolittajalla on tärkeä rooli kolmion merkillisten pisteiden sekä kolmion sisään piirretyn ympyrän tutkimisessa.

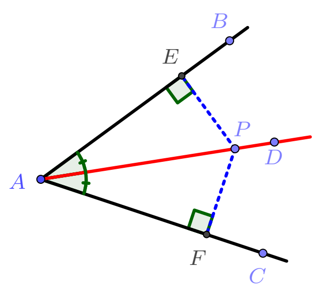
Määritelmä 1.1. Olkoon $\angle ABC$ kulma. Puolisuora $\overrightarrow{BD}$ on kulman $\angle ABC$ **kulmanpuolittaja**, jos se jakaa kulman kahteen yhtäsuureen osaan eli, jos $\angle ABD = \angle DBC$.



Vaikka lukiomatematiikassa usein keskitytään kulmanpuolittajan janamuotoiseen osaan, on tärkeää ymmärtää, että matemaattisesti kulmanpuolittaja on puolisuora, joka jatkuu loputtomiin.

Lause 1.2. *Kulmanpuolittajan jokainen piste on yhtä kaukana kulman kyljistä.*

Todistus. Olkoon puolisuora $\overrightarrow{AD}$ kulman $\angle BAC$ puolittaja. Valitaan mielivaltainen piste P kulmanpuolittajalta $\overrightarrow{AD}$. Piirretään pisteestä P kohtisuorat janat kulman kyljille $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$. Olkoon näiden kohtisuorien janojen kantapisteet E ja F.

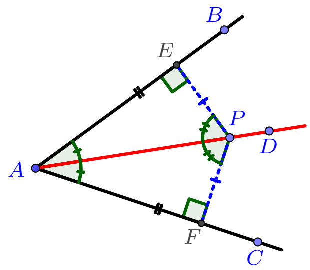


Koska $\overrightarrow{AD}$ on kulmanpuolittaja, pätee $\angle BAD = \angle CAD$. Samoin, koska $PE \perp \overrightarrow{AB}$ ja $PF \perp \overrightarrow{AC}$, ovat kulmat $\angle PEA$ ja $\angle PFA$ molemmat $90°$. Kolmioiden $\triangle PEA$ ja $\triangle PFA$ vastakkaiset kulmat ovat siis yhtenevät, joten KK-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla kolmiot $\triangle PEA$ ja $\triangle PFA$ ovat yhdenmuotoiset.

Yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan

$$\frac{|PE|}{|PF|} = \frac{|EA|}{|FA|} = \frac{|PA|}{|PA|} = 1,$$

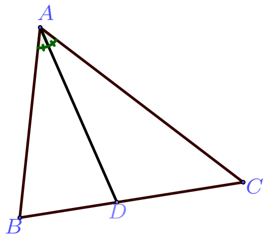
joten $|PE| = |PF|$. Koska PE ja PF ovat kohtisuorien janojen pituudet pisteestä P kulman kyljille, ne ovat myös pisteen P etäisyydet kulman kyljistä. Siten tämä osoittaa, että piste P on yhtä kaukana kulman kyljistä.



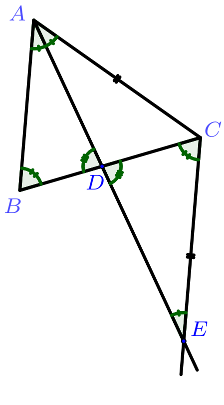
$\square$

Lause 1.3 (Kulmanpuolittajalause)**.** *Kolmion kulman puolittaja jakaa sen vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, eli jos $\triangle ABC$ on kolmio, $B * D * A$, ja $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\angle BAC$ puolittaja, niin*

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$



Todistus. Olkoon kolmio $\triangle ABC$, jossa $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\angle BAC$ puolittaja ja piste D on sivulla BC (eli $B * D * C$). Piirretään pisteestä C puolisuora, joka on yhdensuuntainen sivun AB kanssa. Koska $\overrightarrow{AD}$ ja pisteestä C piirretty AB:lle yhdensuuntainen suora eivät ole yhdensuuntaisia, ne leikkaavat jossain pisteessä. Olkoon tämä leikkauspiste E.



Koska $CE \parallel AB$, vuorokulmalauseen perusteella saadaan, että $\angle BAE = \angle AEC$ ja $\angle ABC = \angle BCE$. Tämän perusteella, KK-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle ECD$ ovat yhdenmuotoisia ($\triangle ABC \sim \triangle ECD$).

Lisäksi, koska $\angle EAC = \angle AEC$, niin $\triangle ACE$ on tasakylkinen kolmio, mistä seuraa että $|AC| = |CE|$.

Yhdenmuotoisuussuhden perusteella voi kirjoittaa, että

$$\frac{|AB|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Koska kolmio $\triangle ACE$ on tasakylkinen kolmio, niin $|CE| = |AC|$. Siispä

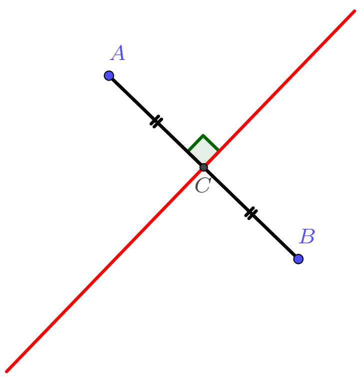
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

$\square$

1.2.2 Keskinormaali

Keskinormaali on yksi lukiomatematiikassa keskeisistä kolmioon liittyvistä käsitteistä. Sen ymmärtäminen auttaa opiskelijoita hahmottamaan kolmion ominaisuuksia ja tutustumaan geometristen konstruktioiden periaatteisiin. Keskinormaaliin liittyvät lauseet, kuten keskinormaalien leikkauspistelause, ovat tärkeitä työkaluja monipuolisessa ongelmanratkaisussa.

Määritelmä 1.4. Olkoon AB jana, jonka keskipiste olkoon C. Janan AB **keskinormaali** on suora, joka kulkee pisteen C kautta ja on kohtisuorassa janaan AB nähden.



Keskinormaali jakaa janan AB kahteen yhtenevään osaan ja on kohtisuorassa kyseiseen janaan nähden.

Lause 1.5. *Piste sijaitsee janan keskinormaalilla, jos ja vain jos sen etäisyydet janan päätepisteisiin ovat yhtä suuret.*

Todistus. $\implies$ Jos piste sijaitsee janan keskinormaalilla, niin sen etäisyydet janan päätepisteisiin ovat yhtä suuret.

Olkoon AB jana ja l sen keskinormaali. Olkoon P mielivaltainen piste keskinormaalilla l. Piirretään janat PA ja PB. Koska l on keskinormaali, se kulkee janan AB keskipisteen C kautta ja on kohtisuorassa janaa AB vastaan. Siten $\angle PCA = \angle PCB = 90°$.

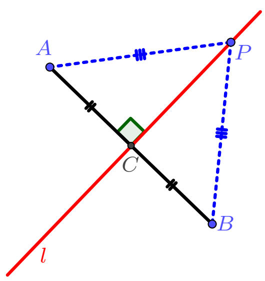
Kolmioissa $\triangle PCA$ ja $\triangle PCB$ on yhteinen sivu PC ja $|AC| = |CB|$, koska C on janan AB keskipiste. Koska myös $\angle PCA = \angle PCB$, niin SKS-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla kolmiot $\triangle PCA$ ja $\triangle PCB$ ovat yhdenmuotoiset. Siispä

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|PC|}{|PC|} = 1,$$

minkä vuoksi kolmiot ovat yhtenevät, koska yhdenmuotoisuussuhde on 1. Yhtenevyydestä seuraa, että $|PA| = |PB|$, eli pisteen P etäisyydet janan AB päätepisteisiin ovat yhtä suuret.

$\impliedby$ Jos pisteen etäisyydet janan päätepisteisiin ovat yhtä suuret, niin piste sijaitsee janan keskinormaalilla.

Olkoon AB jana ja P piste, jolle pätee $|PA| = |PB|$. Piirretään jana PC, missä C on janan AB keskipiste. Koska $|AC| = |CB|$ ja $|PA| = |PB|$, niin kolmiot $\triangle PCA$ ja $\triangle PCB$ ovat yhtenevät, yhtenevyyden määritelmän ja SSS-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla. Yhtenevyydestä seuraa, että $\angle PCA = \angle PCB$. Koska nämä ovat vieruskulmia ja yhtä suuret, niin ne ovat molemmat suoria kulmia. Siten $PC \perp AB$, eli jana PC on janan AB keskinormaali. Koska piste P sijaitsee janalla PC, niin se sijaitsee janan AB keskinormaalilla.



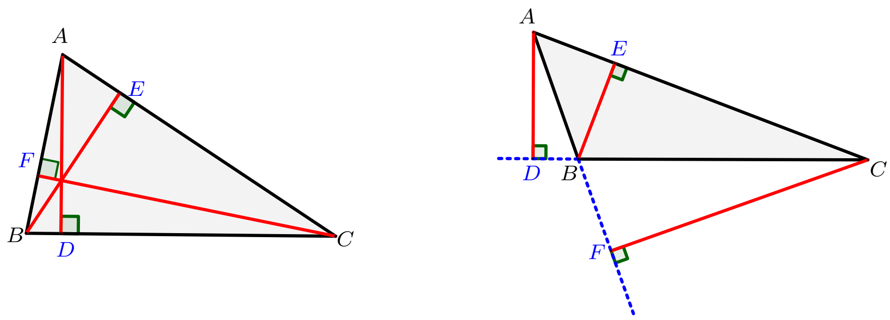
Erikoistapauksena, jos piste P sijaitsee janalla AB, niin P on janan keskipiste. Tällöin $|PA| = |PB|$ triviaalisti, koska keskipiste jakaa janan kahteen yhtä suureen osaan. Tämä tarkoittaa, että P sijaitsee janan AB keskinormaalilla, joka tässä tapauksessa on itse jana AB. Tällä erikoistapauksella olemme täydentäneet todistuksen.

Olemme osoittaneet, että piste sijaitsee janan keskinormaalilla, jos ja vain jos sen etäisyydet janan päätepisteisiin ovat yhtä suuret. $\square$

1.2.3 Korkeusjana

Korkeusjana on kolmion kärjestä vastakkaiselle sivulle tai sen jatkeelle piirretty kohtisuora jana. Korkeusjanat ovat keskeisiä kolmioiden pinta-alan laskemisessa ja ne leikkaavat toisensa kolmion ortokeskuksessa.

Määritelmä 1.6. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Olkoon D pisteen A kautta kulkevan suoran $\overleftrightarrow{BC}$ normaalin ja suoran $\overleftrightarrow{BC}$ leikkauspiste. Tällöin jana AD on kolmion $\triangle ABC$ **korkeusjana**. Muut korkeusjanat BE ja CF saadaan vastaavasti.

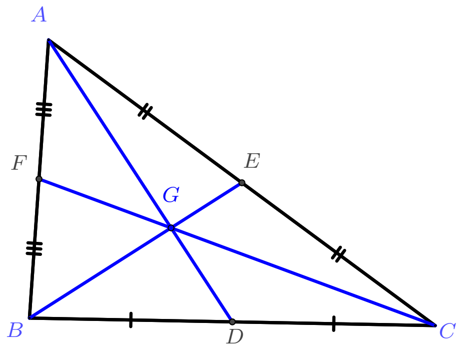


Lukion MAA3 - Geometrian kirjassa [2, s. 25] määritellään, että kolmion korkeusjana on jana, joka kulkee kolmion kärjestä kohtisuoraan vastakkaiselle sivulle tai sen jatkeelle, muodostaen suoran kulman sivun tai jatkeen kanssa.

1.2.4 Keskijana

Kolmiossa keskijana on jana, joka yhdistää kolmion kärkipisteen vastakkaisen sivun keskipisteeseen [2, s. 131]. Keskijanalla on keskeinen rooli kolmion ominaisuuksien ja erikoispisteiden tutkimisessa. Se on myös tärkeä työkalu monissa geometrisissa konstruktioissa ja todistuksissa.

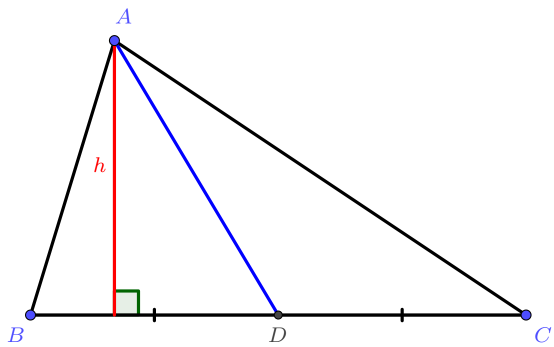
Määritelmä 1.7. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio jo olkoon piste D sivun BC keskipiste. Tällöin jana AD on kolmion $\triangle ABC$ **keskijana** eli **mediaani**. Muut keskijanat BE ja CF saadaan vastaavasti.



Lause 1.8. *Keskijana jakaa kolmion kahdeksi kolmioksi, joilla on yhtä suuret pinta-alat.*

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja olkoon piste D sivun BC keskipiste. Tällöin jana AD on kolmion $\triangle ABC$ keskijana.

Koska piste D on sivun BC keskipiste, meillä on $|BD| = |DC|$. Nyt tarkastellaan kolmiota $\triangle ABD$ ja $\triangle ACD$. Molemmilla kolmioilla on yhteinen korkeus h pisteestä A suoraan BC nähden, ja niiden kannat ovat janat BD ja DC, jotka ovat yhtä pitkiä, koska $|BD| = |DC|$.



Kolmion pinta-ala lasketaan kaavalla

$$\text{Ala} = \frac{1}{2} \cdot \text{kanta} \cdot \text{korkeus}.$$

Lasketaan nyt pinta-alat kolmioille $\triangle ABD$ ja $\triangle ACD$:

$$\text{Ala}(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot h,$$

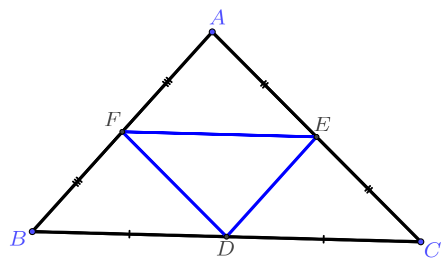
$$\text{Ala}(\triangle ACD) = \frac{1}{2} \cdot |DC| \cdot h.$$

Koska $|BD| = |DC|$, seuraa, että

$$\text{Ala}(\triangle ABD) = \text{Ala}(\triangle ACD).$$

Näin ollen, koska molemmilla kolmioilla on yhtä suuret pinta-alat, keskijana AD jakaa kolmion $\triangle ABC$ kahdeksi kolmioksi, joilla on yhtä suuret pinta-alat. □

Lause 1.9. *Olkoon $\triangle ABC$ mielivaltainen kolmio, jonka sivujen keskipisteet yhdistämällä muodostetaan mediaanikolmio $\triangle DEF$. Näin ollen kolmio $\triangle DEF$ on yhdenmuotoinen kolmion $\triangle ABC$ kanssa ja yhdenmuotoisuussuhde on* $1 : 2$.



Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ mielivaltainen kolmio ja D, E ja F sivujen BC, AC ja AB keskipisteet vastaavasti. Yhdistämällä nämä keskipisteet muodostetaan kolmio $\triangle DEF$.
Ensin tarkastellaan kolmioiden $\triangle FAE$ ja $\triangle BAC$ yhdenmuotoisuutta.

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AF|}{2 \cdot |AF|} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AE|}{2 \cdot |AE|} = \frac{1}{2}$$

Lisäksi kulmat $\angle BAC$ ja $\angle FAE$ ovat samat. Joten SKS-yhdenmuotoisuuslaseen perusteella $\triangle FAE$ ja $\triangle BAC$ ovat yhdenmuotoisia ja yhdenmuotoisuussuhde on $1 : 2$. Tällöin

$$\frac{|FE|}{|BC|} = \frac{1}{2}$$

ja tästä seuraa, että

$$|FE| = \frac{1}{2} \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot |BD|) = |BD| = |DC|.$$

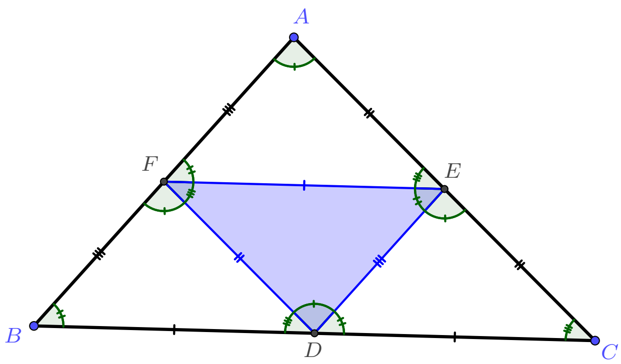
Samalla tavalla voimme todeta, että $\triangle DBF$ on yhdenmuotoinen $\triangle CBA$ kanssa ja

$$|FD| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot |AE|) = |AE| = |EC|$$

Vastaavasti $\triangle ECD$ on yhdenmuotoinen $\triangle ACB$ kanssa ja

$$|DE| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot |AF|) = |AF| = |BF|.$$

Edellisestä seuraa, että koska kolmioiden vastaavat sivut ja kulmat ovat yhtenevät, yhtenevyyden määritelmän mukaan kolmiot $\triangle FBD$, $\triangle FAE$, $\triangle ECD$ ja $\triangle DEF$ ovat keskenään yhteneviä.



Tästä seuraa, että $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoisia. Lisäksi

$$\frac{|FE|}{|BC|} = \frac{|FD|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{1}{2},$$

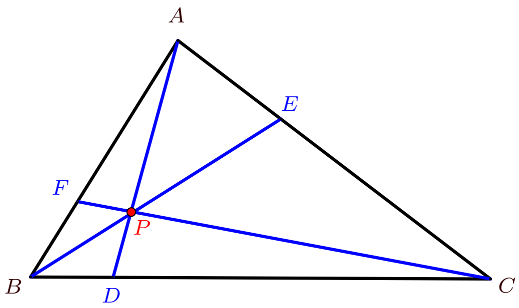
tämä tarkoittaa, että $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ yhdenmuotoisuussuhde on $2:1$. $\square$

1.3 Cevan lause

Cevan lause on nimetty italialaisen matemaatikon Giovanni Cevan mukaan, joka julkaisi lauseen vuonna 1678 [1, s. 4]. Lauseella on useita eri todistuksia, jotka perustuvat esimerkiksi pinta-alojen vertailuun, trigonometriaan tai vektoreihin. Cevan lause auttaa opiskelijoita ymmärtämään kolmioiden geometriaa ja erityisesti sitä, milloin ja miksi tietyt janat kohtaavat yhdessä pisteessä. Lause tarjoaa työkalun monimutkaisempien geometriaongelmien ratkaisemiseen, jotka liittyvät pisteiden ja janojen leikkauspisteisiin kolmioissa.

Lause 1.10 (Cevan lause)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $A * F * B$, $B * D * C$ ja $C * E * A$. Jos janat AD, BE ja CF kulkevat saman pisteen kautta, niin*

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$



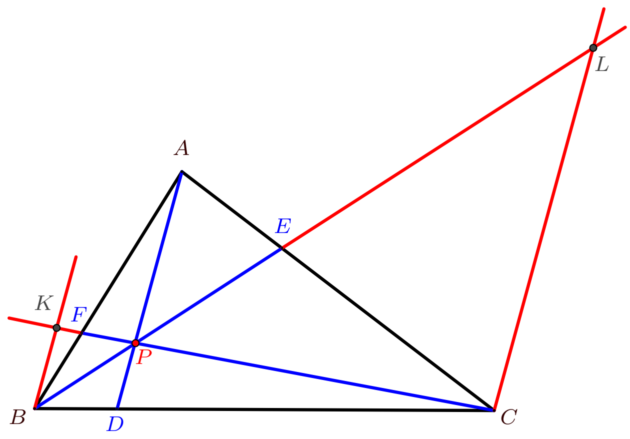
Todistus. Cevan lauseen mukaan, jos kolmiossa janat, jotka lähtevät kolmion kärjistä ja leikkaavat vastakkaisia sivuja, kulkevat saman pisteen kautta, niin näiden janojen muodostamien jakosuhteiden tulo on aina 1. Tämä todistus osoittaa, kuinka yhdenmuotoisuuden avulla voidaan johtaa tämä tärkeä geometrinen tulos.

Piirretään pisteen B kautta puolisuora, joka on yhdensuuntainen puolisuoran AD kanssa. Koska puolisuora CF leikkaa janan AD pisteessä P ja AD on yhdensuuntainen pisteestä B piirretyn puolisuoran kanssa, puolisuora CF leikkaa myös pisteestä B piirretyn puolisuoran jossakin pisteessä. Merkitään tätä leikkauspistettä kirjaimella K.

Vastaavasti, piirretään pisteen C kautta puolisuora, joka on yhdensuuntainen janan AD kanssa. Koska puolisuora BE leikkaa janan AD pisteessä P ja AD on yhdensuuntainen pisteestä C piirretyn puolisuoran kanssa, puolisuora BE leikkaa myös pisteestä C piirretyn puolisuoran jossakin pisteessä. Merkitään tätä leikkauspistettä kirjaimella L.

Siten BK ja CL ovat yhdensuuntaiset janan AD kanssa. Toisin sanoen,

$$BK \parallel AD \parallel CL.$$



Huomaamme, että KK-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla kolmiot $\triangle BFK$ ja $\triangle AFP$ ovat yhdenmuotoiset, koska käänteisen vuorokulmalauseen perusteella $\angle FBK = \angle FAP$ ja $\angle BFK = \angle AFP$ (ristikulmat). Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa, että

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AP|}{|KB|}. \tag{*}$$

Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että kolmiot $\triangle AEP$ ja $\triangle CEL$ ovat yhdenmuotoiset. Näistä yhdenmuotoisuuksista saadaan, että

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|LC|}{|AP|}. \tag{**}$$

Lisäksi voidaan todeta, että KK-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla kolmiot $\triangle CPD$ ja $\triangle CKB$ ovat yhdenmuotoiset, koska käänteisen vuorokulmalauseen perusteella $\angle BKC = \angle KPA = \angle DPC$, eli $\angle BKC = \angle DPC$ ja $\angle PCD = \angle KCB$ (samat kulmat). Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa, että

$$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|PD|}{|KB|}.$$

Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että kolmiot $\triangle PBD$ ja $\triangle LBC$ ovat yhdenmuotoiset. Näistä yhdenmuotoisuuksista saadaan, että

$$\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|LC|}{|PD|}.$$

Nyt, kertomalla nämä kaksi yhtäsuuruutta keskenään saadaan tulokseksi

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|LC|}{|KB|},$$

eli toisin sanoen,

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|KB|}{|LC|}. \tag{***}$$

Lopuksi, yhtälöt (*), (**) ja (***) yhdistämällä seuraa, että

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AP|}{|KB|} \cdot \frac{|KB|}{|LC|} \cdot \frac{|LC|}{|AP|}.$$

Huomaamme, että yhtälön oikealla puolella olevat pituudet $|KB|$, $|LC|$ ja $|AP|$ supistuvat pois

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{\cancel{|AP|}}{\cancel{|KB|}} \cdot \frac{\cancel{|KB|}}{\cancel{|LC|}} \cdot \frac{\cancel{|LC|}}{\cancel{|AP|}} = 1.$$

Täten saamme Cevan lauseen mukaisen lopputuloksen

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

□

Cevan lauseen (1.10) tulos on voimassa myös käänteisesti.

Lause 1.11. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $A*F*B$, $B*D*C$ ja $C*E*A$. Jos*

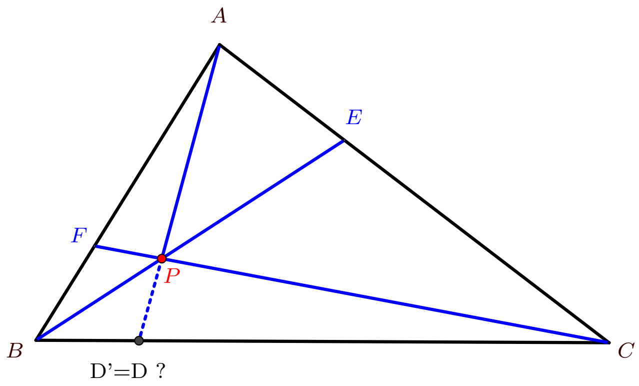
$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$

niin kaikki kolme janaa AD, BE ja CF kulkevat saman pisteen kautta.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $A*F*B$, $B*D*C$ ja $C*E*A$. Oletetaan, että

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$

Tavoitteenamme on osoittaa, että janat AD, BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Olkoon P janojen BE ja CF leikkauspiste. Piirretään suora AP, joka leikkaa sivun BC pisteessä D'.



Koska janat AD', BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä P, voimme soveltaa Cevan lausetta kolmioon $\triangle ABC$:

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD'|}{|D'C|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

Vertaamalla tätä alkuperäiseen oletukseemme,

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD'|}{|D'C|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1 = \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|}.$$

Saadaan tästä

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} = \frac{|BD|}{|DC|} \text{ eli } \frac{|BD'|}{|BC| - |BD'|} = \frac{|BD|}{|BC| - |BD|}.$$

$$|BD'| \cdot |BC| - \cancel{|BD| \cdot |BD'|} = |BD| \cdot |BC| - \cancel{|BD| \cdot |BD'|}$$

$$|BD'| \cdot \cancel{|BC|} = |BD| \cdot \cancel{|BC|}$$

$$|BD'| = |BD|$$

Koska D ja D' sijaitsevat janalla BC, täytyy niiden olla sama piste, eli $D = D'$. Näin ollen P, joka on sekä janojen BE ja CF leikkauspiste että janan AD piste, on kaikkien kolmen janan yhteinen leikkauspiste. $\square$

2 Lukiomatematiikassa käsiteltävät merkilliset pisteet

Tässä luvussa käsitellään lukiomatematiikan geometriassa esiintyviä merkillisiä pisteitä, jotka liittyvät kolmiogeometriaan ja tukevat sekä matematiikan ymmärryksen syventämistä että ongelmanratkaisun taitojen kehittämistä. Tarkastelussa ovat kulmanpuolittajien, keskinormaalien, keskijanojen sekä korkeusjanojen leikkauspisteet, jotka ovat keskeisiä käsitteitä kolmion rakenteellisessa analyysissä.

Lukion opetussuunnitelman perusteiden (2019) mukaan matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää opiskelijoiden matemaattista ajattelua, loogista päättelyä sekä kykyä soveltaa taitojaan erilaisissa ongelmanratkaisutilanteissa [7, s. 224, 225]. Merkillisten pisteiden käsittely tukee näitä tavoitteita, sillä niiden ymmärtäminen ja geometrinen analyysi vaativat abstraktia ajattelua ja syvällistä geometrisen rakenteen hahmottamista. Lisäksi geometrian syvällinen ymmärtäminen tukee muiden matematiikan osa-alueiden, kuten algebran ja trigonometrian, oppimista.

Kolmiogeometriaan liittyvien aiheiden ja käsitteiden käsittely tässä tutkielmassa perustuu erityisesti Juuri MAA3-Geometria -kirjan sisältöön [2]. Vaikka aihetta lähestytään lukiotason kurssimateriaalien kautta, todistukset on kuitenkin laadittu yliopistotason matematiikan näkökulmasta, koska ne ylittävät lukiotason todistusmenetelmät ja käsitteet. Tarvittaessa viitataan myös muihin relevantteihin lähteisiin tukemaan käsittelyä.

Geometriaa opetetaan opetussuunnitelman mukaisesti siten, että opiskelijat oppivat tarkastelemaan kuvioiden ominaisuuksia ja niiden välisiä suhteita monipuolisesti [7, s. 224, 225]. Tämä kolmiogeometrian analyysi antaa hyvän pohjan erityisten pisteiden, kuten korkeusjanojen leikkauspisteen (ortokeskus), tutkimiselle ja auttaa ymmärtämään syvemmin kolmion ominaisuuksia.

Tämän luvun tulokset voivat olla hyödyllisiä sekä opettajille että oppilaille, sillä ne selkeyttävät ja syventävät kolmiogeometrian käsitteiden ymmärtämistä. Luvussa esitetään keskeisiä lauseita ja niiden todistuksia, jotka auttavat ymmärtämään kolmiogeometrian merkillisten pisteiden ominaisuuksia ja rakenteellista merkitystä matematiikassa.

2.1 Kulmanpuolittajien leikkauspiste (Sisään piirretyn ympyrän keskipiste)

Lukiomatematiikassa kolmion sisään piirrettävä ympyrä on tärkeä käsite, joka liittyy läheisesti kolmion kulmanpuolittajiin. Sisään piirretty ympyrä on suurin mahdollinen ympyrä, joka mahtuu kolmion sisään ja sivuaa kaikkia sen sivuja. Osoittautuu, että tämän ympyrän keskipiste on sama kuin kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste.

Lause 2.1 (Kulmanpuolittajien leikkauspiste)**.** *Kolmion kaikkien kolmen kulman kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.*

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Piirretään kulman $\angle CAB$ puolittaja $\overrightarrow{AD}$ ja kulman $\angle ABC$ puolittaja $\overrightarrow{BE}$. Osoitamme, että nämä puolittajat leikkaavat toisensa.
Tehdään vastaoletus, että puolittajat $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{BE}$ eivät leikkaa, jolloin ne olisivat yhdensuuntaiset. Tällöin kulmien $\angle BAD$ ja $\angle ABE$ summan tulisi olla $180°$ (suorien kulmien summa). Kuitenkin tiedetään, että

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \cdot \angle BAC \quad \text{ja} \quad \angle ABE = \frac{1}{2} \cdot \angle ABC,$$

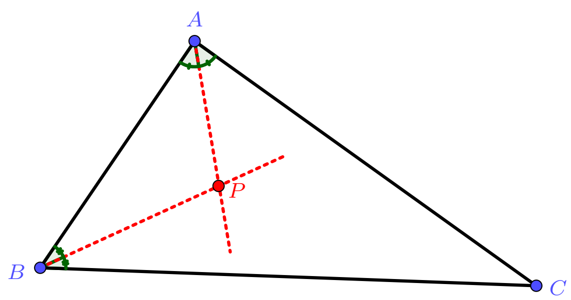
koska $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{BE}$ ovat kulmanpuolittajia. Siten

$$\angle BAD + \angle ABE = \frac{1}{2} \cdot (\angle BAC + \angle ABC).$$

Kolmion kulmien summa on aina $180°$, joten $\angle BAC + \angle ABC < 180°$. Tästä seuraa, että

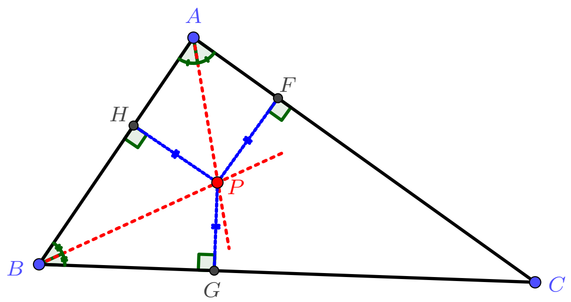
$$\frac{1}{2} \cdot (\angle BAC + \angle ABC) = \angle BAD + \angle ABE < 90°,$$

mikä on ristiriidassa sen kanssa, että kulmien $\angle BAD$ ja $\angle ABE$ summan tulisi olla $180°$. Koska vastaoletus johtaa ristiriitaan, täytyy puolittajien $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{BE}$ leikata toisensa. Merkitään leikkauspistettä kirjaimella P.



Kun kulman $\angle CAB$ kulmanpuolittaja ja kulman $\angle ABC$ kulmanpuolittaja leikkaavat toisensa pisteessä P, tämä piste P on yhtä kaukana molemmista kulmien sivuista.

Koska P on kulman $\angle BAC$ puolittajalla, lauseen 1.2 mukaisesti voidaan päätellä, että $|PF| = |PH|$. Lisäksi, koska P on myös kulman $\angle ABC$ puolittajalla, tästä seuraa, että $|PH| = |PG|$. Näin ollen voimme päätellä, että $|PF| = |PH| = |PG|$.

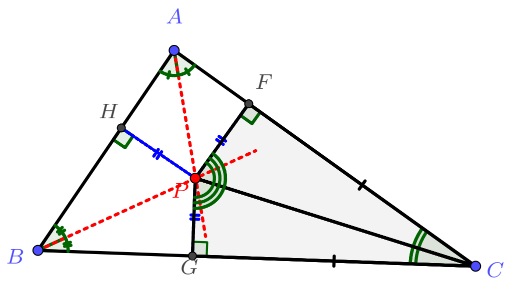


Lopuksi piirretään pisteestä C puolisuora, joka kulkee pisteen P kautta. Tämän seurauksena saamme kolmiot $\triangle PFC$ ja $\triangle PGC$.

Soveltamalla Pythagoraan lausetta näihin suorakulmaisiin kolmioihin, voimme kirjoittaa seuraavat yhtälöt:

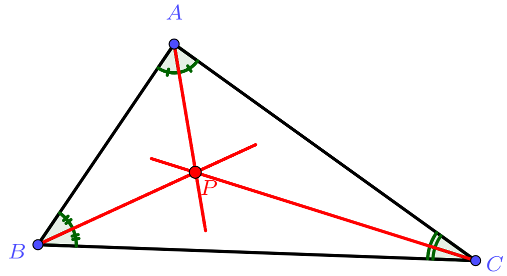
$$|PF|^2 + |FC|^2 = |PC|^2 = |PG|^2 + |GC|^2.$$

Koska $|PF| = |PG|$, voidaan päätellä, että myös $|FC| = |CG|$. Tästä seuraa, että kolmioiden $\triangle PFC$ ja $\triangle PGC$ kaikki sivut ovat keskenään yhtä pitkät. Yhtenevyyden määritelmän ja SSS-säännön nojalla nämä kaksi kolmiota ovat keskenään yhtenevät.



Koska kolmiot ovat yhteneviä, kaikki vastaavat kulmat ovat yhtä suuret. Erityisesti $\angle FPC = \angle GPC$, $\angle PFC = \angle PGC = 90°$, ja $\angle FCP = \angle GCP$.

Tämä todistaa, että puolisuora $\overrightarrow{CP}$ on kulman $\angle ACB$ kulmanpuolittaja, sillä $\angle FCP = \angle GCP$.

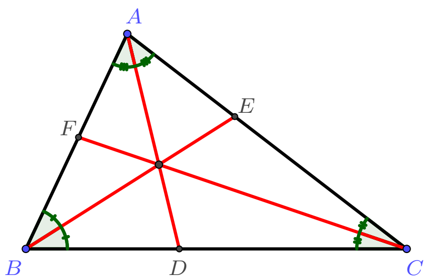


Tämä puolestaan osoittaa, että kolmion kaikkien kolmen kulman kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä P. $\square$

Tässä todistuksessa kulmanpuolittajien leikkauspiste esitetiin intuitiivisella ja geometrisella lähestymistavalla, joka tekee siitä helposti ymmärrettävän. Tämä lähestymistapa tarjoaa vahvan perustan ja visuaalisen käsityksen siitä, miksi kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa tietyssä pisteessä. Geometriset argumentit auttavat lukijaa sisäistämään teorian perusperiaatteet, mikä on tärkeää matematiikan oppimisessa.

Seuraavaksi haluamme esittää toisen todistuksen, joka syventää tätä ymmärrystä analyyttisella ja teoreettisella näkökulmalla. Kulmanpuolittajalauseen 1.3 ja Cevan lauseen 1.10 avulla tämä toinen lähestymistapa rakentaa matemaattisesti täsmällisen perustan, joka vahvistaa aiemmin esitettyjä väitteitä. Tämän analyysin myötä voi nähdä, että geometriset suhteet eivät ole vain visuaalisia käsityksiä, vaan niillä on myös vahva matemaattinen pohja. Yhdistämällä nämä kaksi lähestymistapaa saa sekä intuitiivisen että analyyttisen käsityksen kulmanpuolittajien leikkauspisteestä, mikä syventää ymmärrystä aiheesta.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, ja oletetaan, että $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ ovat kolmion kulmien A, B ja C kulmanpuolittajia, joiden pisteet D, E ja F sijaitsevat sivuilla BC, AC ja AB siten, että $B * D * C$, $C * E * A$ ja $A * F * B$.



Koska AD on kulmanpuolittaja, kulmanpuolittajalauseen 1.3 perusteella saadaan, että

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Samalla tavalla BE ja CF kulmanpuolittajille voi kirjoittaa, että

$$\frac{|EC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{ja} \quad \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Näistä voidaan päätellä seuraava kertolasku:

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|EC|}{|AE|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Yksinkertaistetaan oikea puoli:

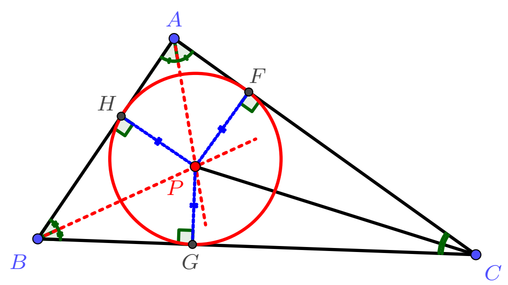
$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|EC|}{|AE|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{\cancel{|AB|}}{\cancel{|AC|}} \cdot \frac{\cancel{|BC|}}{\cancel{|AB|}} \cdot \frac{\cancel{|AC|}}{\cancel{|BC|}} = 1.$$

Näin ollen Cevan lauseen 1.10 mukaan janat AD, BE ja CF leikkaavat yhdessä pisteessä. Koska nämä janat ovat kolmion kulmanpuolittajia, tämä piste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tämä osoittaa, että kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, mikä todistaa lauseen. $\square$

Huom: Kulmanpuolittajien leikkauspiste P on kolmion $\triangle ABC$ **sisään piirretyn ympyrän** keskipiste. Tämä ympyrä on ympyrä, joka on piirrettävä kolmion sisälle siten, että se sivuaa kaikkia kolmion sivuja.

Koska lauseen 2.1 mukaan kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa täsmälleen yhdessä pisteessä ja tämä piste P on yhtä kaukana kaikista kolmion sivuista, se toimii ympyrän keskipisteenä. Tämä tarkoittaa, että kaikki etäisyydet, kuten $|PF|$, $|PG|$ ja $|PH|$, ovat yhtä suuret ja vastaavat ympyrän säteen pituutta.

Ympyrän säde on siis etäisyys kolmion $\triangle ABC$ sivuilta, ja tämä ympyrä on ainutlaatuinen, sillä se on suurin ympyrä, joka voidaan piirtää niin, että se on kolmion sisällä.



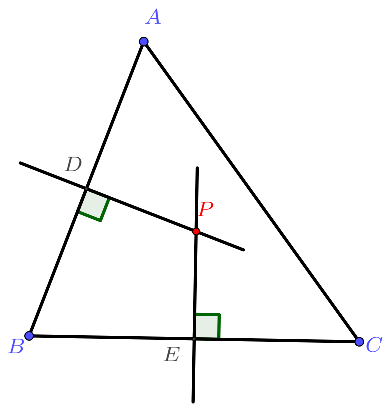
2.2 Keskinormaalien leikkauspiste (Ympäri piirretyn ympyrän keskipiste)

Lukiomatematiikassa kolmion ympäri piirretty ympyrä on keskeinen käsite, joka yhdistää kolmion ominaisuudet ja ympyrän geometrian. Ympäri piirretty ympyrä on yksikäsitteinen ympyrä, joka kulkee kaikkien kolmion kärkipisteiden kautta. Tämän ympyrän keskipisteen määrittäminen perustuu kolmion keskinormaaleihin – suoriin, jotka ovat kohtisuorassa kolmion sivuja vastaan ja kulkevat sivujen keskipisteiden kautta.

Lause 2.2 (Keskinormaalijen leikkauspiste)**.** *Kolmion kaikki kolme sivun keskinormaalia leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

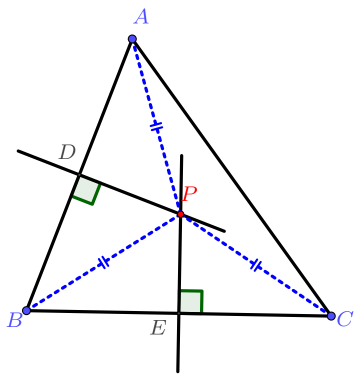
Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Piirretään ensin keskinormaali sivulle AB, joka kulkee sivun AB keskipisteen D kautta. Sitten vastaavasti piirretään keskinormaali sivulle BC, joka kulkee sivun BC keskipisteen E kautta. Osoitetaan, että nämä kaksi keskinormaalia leikkaavat toisensa pisteessä P.

Tehdään vastaoletus, että keskinormaalit eivät leikkaa, jolloin ne olisivat yhdensuuntaiset. Jos keskinormaalit olisivat yhdensuuntaiset, myös sivut AB ja BC olisivat yhdensuuntaiset tai samalla suoralla, koska keskinormaalit ovat kohtisuorassa niitä vastaan. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä kolmion sivut eivät voi olla yhdensuuntaisia eivätkä kolmion kärjet ole samalla suoralla. Koska vastaoletus johtaa ristiriitaan, täytyy keskinormaalien leikata toisensa. Merkitään leikkauspistettä kirjaimella P.



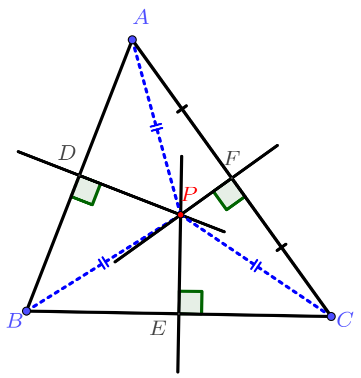
Koska piste P sijaitsee janan AB keskinormaalilla, niin lauseen 1.5 nojalla $|PA| = |PB|$, eli piste P on yhtä etäällä pisteistä A ja B.

Samalla tavalla $|PB| = |PC|$, koska piste P on yhtä etäällä pisteistä B ja C. Tämä tarkoittaa, että $|PA| = |PB| = |PC|$.



Voidaan lauseen 1.5 nojalla suoraan päätellä, että piste P sijaitsee myös janan AC keskinormaalilla, koska $|PA| = |PC|$.

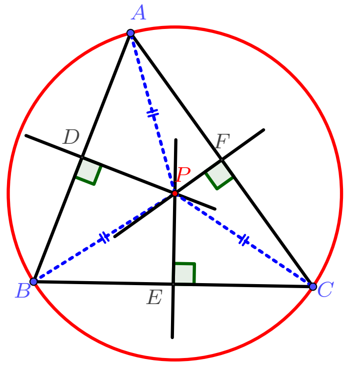
Koska piste P on yhtä kaukana pisteistä A, B, ja C, se sijaitsee kaikkien kolmen sivun keskinormaaleilla. Tämä tarkoittaa, että kaikki kolmion $\triangle ABC$ sivujen keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä P.



$\square$

Huom: Keskinormaalijen leikkauspiste on **kolmion ympäri piirretty ympyrän** keskipiste.

Lauseen 1.5 perusteella keskinormaalien leikkauspiste P on yhtä kaukana kaikista kolmion kärkipisteistä A, B ja C. Tämä tarkoittaa, että $|PA| = |PB| = |PC|$. Näin ollen voimme piirtää ympyrän, jonka keskipiste on P ja säde on PA (tai vastaavasti PB tai PC). Tämä ympyrä kulkee kaikkien kolmion kärkipisteiden kautta, mikä tekee siitä kolmion ympäri piirretyn ympyrän. Siten keskinormaalien leikkauspiste on yksikäsitteisesti määritelty ja se on aina kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

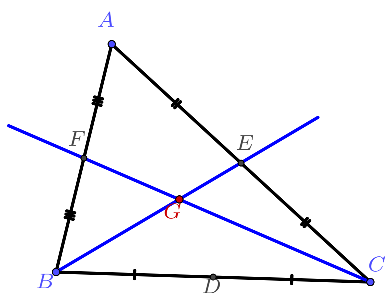


2.3 Keskijanojen leikkauspiste (painopiste)

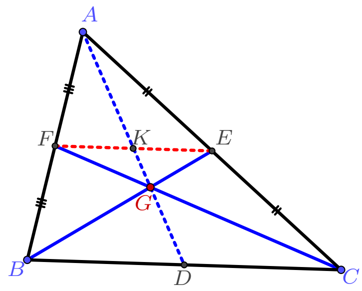
Kolmion keskijanat eli mediaanit ovat määritelmän 1.7 mukaisesti janoja, jotka yhdistävät kolmion kärjet vastakkaisten sivujen keskipisteisiin. Keskijanojen leikkauspistettä kutsutaan kolmion **painopisteeksi**, ja sillä on merkittävä rooli geometriassa. Painopiste jakaa keskijanat tietyssä suhteessa, ja tämä ominaisuus on hyödyllinen monissa geometrisissa todistuksissa ja tehtävissä.

Lause 2.3 (Mediaanilause)**.** *Kolmion mediaanit leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa D, E ja F ovat sivujen BC, AC ja AB keskipisteet. Ensimmäiseksi piirretään puolisuorat $\overrightarrow{BE}$ ja $\overrightarrow{CF}$. Koska puolisuora $\overrightarrow{CF}$ leikkaa sivun AB, sen täytyy myös leikata puolisuora $\overrightarrow{BE}$, sillä $\overrightarrow{BE}$ sijaitsee kulman $\angle ABC$ sisällä. Tämä osoittaa, että keskijanat BE ja CF leikkaavat toisensa jossain kolmion sisällä. Merkitään tätä leikkauspistettä kirjaimella G.



Piirretään seuraavaksi puolisuora $\overrightarrow{AG}$. Jos puolisuora $\overrightarrow{AG}$ jakaa sivun BC kahteen yhtä suureen osaan (eli se kulkee pisteen D kautta), tällöin AD on keskijana. Näin ollen kaikki kolme keskijanaa leikkaavat toisensa samassa pisteessä.



Kolmiossa $\triangle ABC$ muodostuu useita yhdenmuotoisia kolmiopareja. Näiden avulla voidaan osoittaa, että $|BD| = |DC|$, mikä todistaa, että AD on keskijana.

Ensiksi tarkastellaan kolmioita $\triangle FAE$ ja $\triangle BAC$. SKS-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla ne ovat yhdenmuotoisia. Tämä johtuu siitä, että $\angle FAE = \angle BAC$ (yhteinen kulma) ja

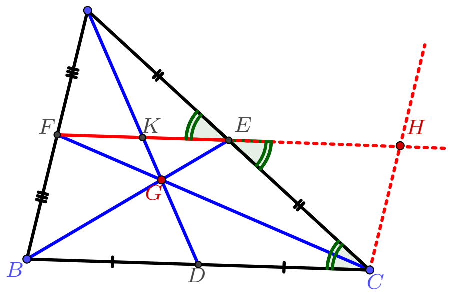
$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{2}.$$

Näin ollen

$$\triangle FAE \sim \triangle BAC$$

Tarvitaan myös osoittaa, että $FE \parallel BC$. Tämän todistaminen on keskeistä, jotta yhdenmuotoisuusargumentit voidaan soveltaa oikein.

Piirretään pisteestä C puolisuora $\overrightarrow{CH}$, joka on yhdensuuntainen sivun AB kanssa ja leikkaa suoran $\overleftrightarrow{FE}$ pisteessä H. Tarkastellaan nyt kolmioita $\triangle AEF$ ja $\triangle CEH$.



Koska kulmat $\angle AEF$ ja $\angle CEH$ ovat ristikulmat, pätee $\angle AEF = \angle CEH$. Lisäksi $\angle AEF = \angle ACB$ koska, $\triangle FAE \sim \triangle BAC$. Näin ollen

$$\angle CEH = \angle ACB.$$

Koska $\angle CEH = \angle ACB$, voidaan vuorokulmalauseen nojalla todeta, että FH on yhdensuuntainen sivun BC kanssa. Näin ollen pätee, että

$$FE \parallel BC.$$

Voi myös sanoa, että

$$\frac{|FE|}{|BC|} = \frac{1}{2},$$

koska $\triangle FAE \sim \triangle BAC$ ja

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{2}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi kolmioita $\triangle AKE$ ja $\triangle ADC$. Tiedämme, että $\angle AEK = \angle ACD$ ja $\angle KAE = \angle DAC$ (koska ne ovat samat kulmat). Tämän vuoksi voidaan KK-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla todeta, että $\triangle AKE \sim \triangle ADC$. Koska

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{2},$$

yhdenmuotoisuuden suhde on $1 : 2$, eli

$$\frac{|KE|}{|DC|} = \frac{1}{2},$$

Tästä seuraa, että

$$|DC| = 2 \cdot |KE|. \tag{*}$$

Tarkastellaan seuraavaksi kolmioita $\triangle FGE$ ja $\triangle CGB$. Koska $FE \parallel BC$, käänteisen vuorokulmalauseen nojalla voidaan päätellä, että

$$\angle EFG = \angle GCB \quad \text{ja} \quad \angle FEG = \angle GBC.$$

Tämän perusteella voidaan KK-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla todeta, että $\triangle FGE \sim \triangle CGB$. Koska $\frac{|FE|}{|BC|} = \frac{1}{2}$, yhdenmuotoisuussuhde on $1 : 2$. Tästä seuraa, että

$$\frac{|EG|}{|BG|} = \frac{1}{2}.$$

Viimeiseksi tarkastellaan kolmioita $\triangle KGE$ ja $\triangle BGD$. Koska $KE \parallel BD$, käänteisen vuorokulmalauseen nojalla voidaan päätellä, että

$$\angle KEG = \angle GBD \quad \text{ja} \quad \angle EKG = \angle GDB.$$

Tämän perusteella voidaan KK-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla todeta, että $\triangle FGE \sim \triangle CGB$. Koska $\frac{|EG|}{|BG|} = \frac{1}{2}$, yhdenmuotoisuussuhde on $1 : 2$. Tästä seuraa, että

$$\frac{|EG|}{|GB|} = \frac{1}{2} = \frac{|KE|}{|BD|},$$

Näin ollen,

$$|BD| = 2 \cdot |KE|. \tag{**}$$

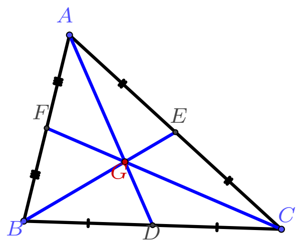
Lopuksi, yhtälöt (*) ja (**) yhdistämällä seuraa, että $|DC| = |BD|$, mikä osoittaa, että AD on kolmion $\triangle ABC$ mediaani. Koska AD kulkee pisteen G kautta, voidaan päätellä, että kaikki kolme mediaania leikkaavat toisensa tässä samassa pisteessä G. □

Todistus Cevan lauseen 1.10 avulla

Nyt todistamme saman tuloksen vaihtoehtoisesti käyttämällä Cevan lausetta, joka tarjoaa tehokkaan työkalun kolmion sisällä olevien janojen leikkauspisteisiin liittyvien kysymysten käsittelyyn.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa D, E ja F ovat sivujen BC, CA ja AB keskipisteet, jolloin AD, BE ja CF ovat mediaanit. Cevan lausetta käyttäen meidän on osoitettava, että suhdetulo

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$



Koska D, E ja F ovat sivujen keskipisteet, ($|AF| = |FB|, |BD| = |DC|$ ja $|CE| = |EA|$), meillä on seuraavat yhtälöt:

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Kun nämä yhtälöt sijoitetaan Cevan lausetta vastaavaan suhdetuloon, saadaan:

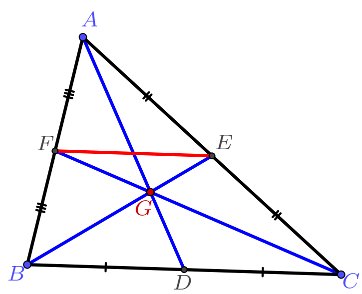
$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Koska suhdetulo on yksi, Cevan lauseesta seuraa, että mediaanit leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tämä piste on kolmion $\triangle ABC$ painopiste G.

□

Lause 2.4. *Mediaanien leikkauspiste jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 2:1 kolmion kärjestä lukien.*

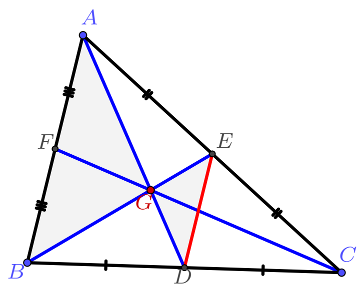
Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, D sivun BC, E sivun AC ja F sivun AB keskipiste.



Lauseen 2.3 todistuksessa osoitettiin, että $\triangle FGE \sim \triangle CGB$ ja yhdenmuotoisuussuhde on $1 : 2$. Tästä seuraa, että

$$\frac{|EG|}{|GB|} = \frac{|FG|}{|GC|} = \frac{1}{2}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi kolmioita $\triangle EGD$ ja $\triangle BGA$.



Koska pisteet D ja E ovat sivujen BC ja AC keskipisteet, vastaava yhdenmuotoisuus pätee myös kolmioiden $\triangle EGD$ ja $\triangle BGA$ välillä. Näin ollen voimme todeta, että $\triangle EGD \sim \triangle BGA$, ja yhdenmuotoisuussuhde on edelleen 1 : 2. Tästä seuraa, että

$$\frac{|EG|}{|GB|} = \frac{|DG|}{|GA|} = \frac{1}{2}.$$

Lopuksi voidaan päätellä, että

$$\frac{|CG|}{|GF|} = \frac{|BG|}{|GE|} = \frac{|AG|}{|GD|} = \frac{2}{1}.$$

Nämä suhteet osoittavat, että mediaanien leikkauspiste jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 2:1 kolmion kärjestä lukien. □

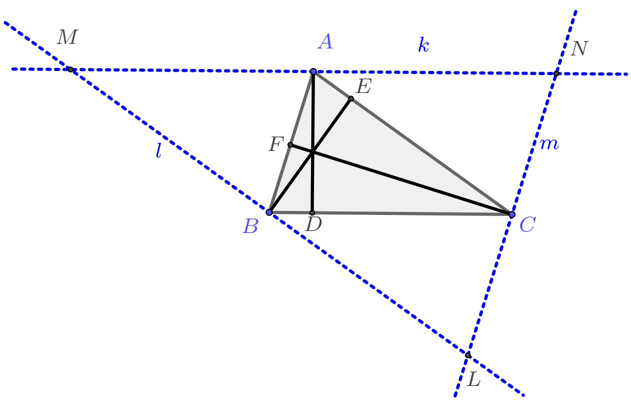
2.4 Korkeusjanojen leikkauspiste (ortokeskus)

Lukiomatematiikassa kolmion korkeusjanat ovat keskeisiä janoja, jotka yhdistävät kolmion kärjet vastakkaisiin sivuihin kohtisuorasti. Korkeusjanojen leikkauspisteellä, jota kutsutaan ortokeskukseksi, on useita mielenkiintoisia ominaisuuksia ja se esiintyy usein geometriaan liittyvissä tehtävissä ja todistuksissa.

Lause 2.5. *Kolmiossa korkeusjanojen jatkeet tai itse korkeusjanat leikkaavat kaikki toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, $B*D*C$ siten, että $AD \perp BC$, $A*E*C$ siten, että $BE \perp AC$ ja $A*F*B$ siten, että $CF \perp AB$. Olkoot k, l ja m suoria, jotka toteuttavat ehdot

- $k \parallel BC$ ja k kulkee A:n kautta.
- $l \parallel AC$ ja l kulkee B:n kautta.
- $m \parallel AB$ ja m kulkee C:n kautta.



Käänteisen vuorokulmalauseen nojalla voidaan todeta, että seuraavat kulmat ovat yhteneviä. Ensinnäkin, koska $MN \parallel BC$, voidaan päätellä, että $\angle MAB = \angle ABC$. Lisäksi, koska $AB \parallel NL$, tiedämme, että $\angle ABC = \angle BCL$. Vastaavasti, koska $MN \parallel BC$, voidaan todeta, että $\angle BCL = \angle ANC$. Näin ollen pätee:

$$\angle MAB = \angle ABC = \angle BCL = \angle ANC.$$

Seuraavaksi, koska $MN \parallel BC$, saadaan $\angle NAC = \angle ACB$. Lisäksi, koska $AC \parallel ML$, voimme todeta, että $\angle ACB = \angle CBL$. Koska $MN \parallel BC$, tiedämme myös, että $\angle CBL = \angle AMB$. Tämän perusteella pätee:

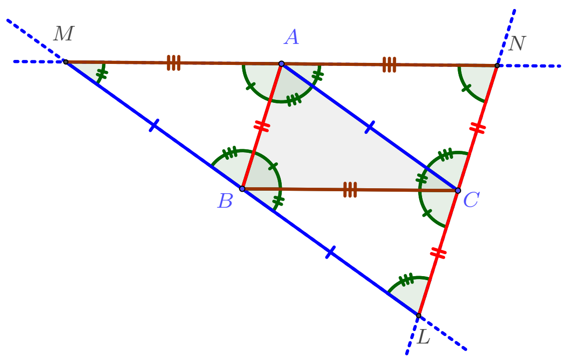
$$\angle NAC = \angle ACB = \angle CBL = \angle AMB.$$

Kolmantena, koska $NL \parallel AB$, voimme todeta, että $\angle NCA = \angle BAC$. Koska $AC \parallel ML$, saadaan myös, että $\angle BAC = \angle CLB$. Lisäksi $NL \parallel AB$ johtaa siihen, että $\angle CLB = \angle ABM$. Näin ollen pätee:

$$\angle NCA = \angle BAC = \angle CLB = \angle ABM.$$

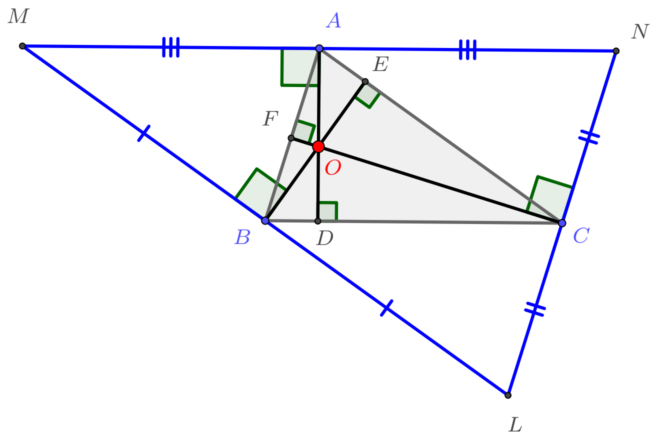
Näiden yhtenevien kulmien nojalla voimme todeta, että kolmioilla $\triangle ABC$, $\triangle BAM$, $\triangle CNA$ ja $\triangle CLB$ on kaikki kulmat yhtenevät. Koska niillä on myös yksi yhteinen sivu, seuraa SKS-yhdenmuotoisuuslauseesta, että nämä neljä kolmiota ovat keskenään yhteneviä, eli

$$\triangle ABC \cong \triangle BAM \cong \triangle CNA \cong \triangle LCB.$$



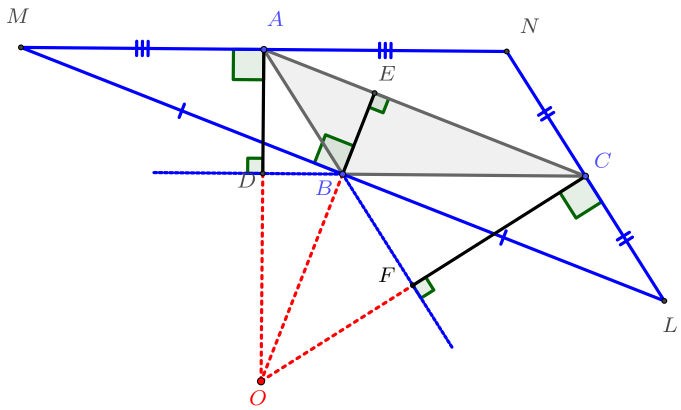
Koska AD on $\triangle ABC$ kolmion korkeusjana, $\angle CDA = 90°$. Sen lisäksi, $\angle DAM = 90°$, koska $MN \parallel BC$. Tämä tarkoittaa, että kolmiossa $\triangle MNL$, AD on sivujen MN keskinormaali, koska $AD \perp MN$ ja $|MA| = |AN|$.

Vastaavasti, BE on sivun ML keskinormaali ja CF on sivun NL keskinormaali. Lauseen 2.2 perusteella keskinormaalit leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.



Näin ollen kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanat leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.

Oletetaan nyt, että kolmio $\triangle ABC$ on tylppäkulmainen kolmio, eli kulma $\angle ABC$ on suurempi kuin $90°$.



Tällöin korkeusjana AD on kolmion $\triangle ABC$ ulkopuolella. Kuitenkin, kuten teräväkulmaisen kolmion tapauksessa, AD on edelleen kolmion $\triangle MNL$ keskinormaali, koska $AD \perp MN$ ja $|MA| = |AN|$.

Vastaavasti, BE ja CF ovat kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanoja ja kolmion $\triangle MNL$ keskinormaaleja. Siksi kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanojen jatkeet leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä kolmion ulkopuolella, koska ne ovat samalla kolmion $\triangle MNL$ keskinormaaleja. Keskinormaalien leikkauspistelauseen 2.2 nojalla nämä kolme keskinormaalia leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

Näin ollen myös tylppäkulmainen kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanojen jatkeet leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka sijaitsee nyt kolmion $\triangle ABC$ ulkopuolella.

Olemme osoittaneet, että kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä, joka voi olla kolmion ulko- tai sisäpuolella, riippuen siitä, onko kolmio terävä- vai tylppäkulmainen. □

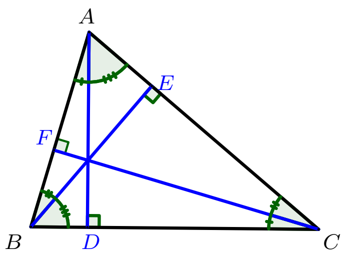
Todistus Cevan lauseen 1.10 avulla

Tarjoamme myös vaihtoehtoisen todistuksen teräväkulmaisen kolmion tapauksessa hyödyntämällä Cevan lausetta.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, ja olkoot D, E ja F pisteet sivuilla BC, CA ja AB siten, että $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ ja $CF \perp AB$. Tavoitteenamme on osoittaa, että korkeusjanat AD, BE ja CF leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä käyttämällä Cevan lausetta.

Cevan lausetta varten tarvitsemme osoittaa, että seuraava suhdetulo on paikkansapitävä:

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$



Aloitetaan tarkastelemalla kolmioita $\triangle ADB$ ja $\triangle CFB$. Molemmissa kolmioissa on suorakulmat, sillä $\angle ADB = \angle CFB = 90°$. Lisäksi kulmat $\angle ABD$ ja $\angle CBF$ ovat yhtä suuret, koska kyseessa on sama kulma. Koska kahdessa kolmiossa kaksi kulmaa ovat yhtä suuret, voimme päätellä KK-yhdenmuotoisuuslauseen nojalle, että kolmiot $\triangle ADB$ ja $\triangle CFB$ ovat yhdenmuotoiset. Tästä seuraa, että

$$\frac{|BD|}{|FB|} = \frac{|AD|}{|CF|}.$$

Samoin kuin edellisessä tapauksessa, tarkastellaan kolmioita $\triangle AEB$ ja $\triangle AFC$ sekä $\triangle BEC$ ja $\triangle ADC$. Myös näissä kolmioissa on yhteinen kulma ja suorakulma, joten KK-yhdenmuotoisuuslauseen perusteella ne ovat yhdenmuotoiset. Tästä seuraa seuraavat yhdenmuotoisuudet ja suhteet:

Kolmioiden $\triangle AEB$ ja $\triangle AFC$ yhdenmuotoisuudesta saadaan

$$\frac{|AF|}{|EA|} = \frac{|CF|}{|BE|},$$

ja kolmioiden $\triangle BEC$ ja $\triangle ADC$ yhdenmuotoisuudesta saadaan vastaavasti

$$\frac{|CE|}{|DC|} = \frac{|BE|}{|AD|}.$$

Nyt yhdistämme nämä tulokset osoittaaksemme, että Cevan lausetta voidaan soveltaa. Yhdenmuotoisuuksien perusteella saimme seuraavat yhtälöt:

$$\frac{|BD|}{|FB|} = \frac{|AD|}{|CF|}$$

$$\frac{|AF|}{|EA|} = \frac{|CF|}{|BE|}$$

$$\frac{|CE|}{|DC|} = \frac{|BE|}{|AD|}.$$

Voimme kertoa nämä yhtälöt keskenään, jotta saamme vaaditun suhdetulon:

$$\frac{|BD|}{|FB|} \cdot \frac{|AF|}{|EA|} \cdot \frac{|CE|}{|DC|} = \frac{|AD|}{|CF|} \cdot \frac{|CF|}{|BE|} \cdot \frac{|BE|}{|AD|}$$

Tässä vaiheessa on tärkeää huomata, että oikealla puolella olevat termit voidaan supistaa, koska ne toistuvat käänteisissä suhteissa.

$$\frac{|BD|}{|FB|} \cdot \frac{|AF|}{|EA|} \cdot \frac{|CE|}{|DC|} = \frac{\cancel{|AD|}}{\cancel{|CF|}} \cdot \frac{\cancel{|CF|}}{\cancel{|BE|}} \cdot \frac{\cancel{|BE|}}{\cancel{|AD|}}$$

Kun kaikki termit on supistettu, jäljelle jää juuri Cevan lausetta vastaava suhdetulo, mikä osoittaa, että suhdetulo on yksi.

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Tämä tarkoittaa, että Cevan lausetta soveltaen korkeusjanat AD, BE ja CF leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.

Näin ollen olemme osoittaneet, että kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, kun kolmio on teräväkulmainen. $\square$

3 Tuntemattomampia merkillisiä pisteitä

Geometria on pitkään kiehtonut matemaatikoita ja tieteilijöitä, ja kolmion merkilliset pisteet ovat olleet yksi tutkimuksen tärkeistä aiheista. Vaikka monet näistä pisteistä, kuten ympäri piirretyn ympyrän keskipiste tai kolmion ortokeskus, ovat tuttuja lukion geometrian oppikirjoista, on olemassa myös vähemmän tunnettuja mutta yhtä kiehtovia pisteitä, jotka eivät aina saa ansaitsemaansa huomiota. Näitä pisteitä voidaan kutsua tuntemattomammiksi merkillisiksi pisteiksi, ja ne tarjoavat syvällisemmän ymmärryksen geometriasta sekä rikkaita tutkimusaiheita matematiikan harrastajille ja ammattilaisille.

Lukion matematiikassa, kuten edellisessä luvussa on käsitelty, keskitytään yleensä kolmion peruspisteisiin, kuten sisään piirretyn ympyrän keskipisteeseen, ympäri piirretyn ympyrän keskipisteeseen, painopisteeseen ja ortokeskukseen. Nämä pisteet tarjoavat vankan pohjan geometrian perusperiaatteiden ymmärtämiselle ja ovat helposti konstruoitavissa perinteisillä työkaluilla, kuten harpin ja viivaimen avulla. Kuitenkin matemaattisen geometrian rikkaus ulottuu huomattavasti pidemmälle. Tuntemattomammat merkilliset pisteet, kuten Napoleonin ja Fermat'n pisteet sekä Eulerin suora, vaativat syvällisempää teoreettista pohdintaa ja laajempaa käsitystä geometrisista suhteista ja symmetrioista.

Näiden tuntemattomampien merkillisten pisteiden tutkiminen ei ole pelkästään uteliaisuuden tyydyttämistä, vaan myös mahdollisuus kehittää geometrista ajattelua ja tutkia yhteyksiä trigonometriaan, analyyttiseen geometriaan ja jopa abstraktiin algebraan. Esimerkiksi Napoleonin pisteet ja niihin liittyvä Napoleonin lause kertovat kolmion ja tasasivuisen kolmion välisistä erityisistä yhteyksistä. Fermat'n piste puolestaan esittää optimoitavan ongelman, joka liittyy kolmion sivujen pituuksien minimointiin.

Näitä teemoja käsitellessä olen pääasiallisesti tukeutunut Coxeterin ja Greitzerin teokseen *Geometry Revisited* [1] sekä Ostermannin ja Wannerin teokseen *Geometry by Its History* [8], joissa käsitellään perusteellisesti tuntemattomampia merkillisiä pisteitä ja niiden ominaisuuksia. Fermat'n pisteiden osalta olen lisäksi hyödyntänyt Eric Weissteinin MathWorld-sivustoa [9], joka tarjoaa yksityiskohtaisia tietoja pisteen ominaisuuksista ja sen sovelluksista.

Tuntemattomammat merkilliset pisteet tarjoavat myös mahdollisuuden tutkia syvällisempiä ja monimutkaisempia matemaattisia konsepteja, kuten symmetriaa, konstruointia ja optimoivia ominaisuuksia. Näiden pisteiden tutkiminen voi johtaa uusiin oivalluksiin ja tuloksiin, jotka rikastuttavat sekä teoreettista että soveltavaa geometriaa. Näiden pisteiden ominaisuuksien ymmärtäminen voi myös auttaa ratkaisemaan ongelmia muilla matematiikan aloilla, kuten algebraisessa geometriassa ja optimointiteoriassa.

Tämän luvun tarkoituksena on tutustuttaa lukija joihinkin näistä vähemmän tunnetuista pisteistä ja tarjota samalla syvällisempää näkemystä geometrisesta ajattelusta.

3.1 Napoleonin pisteet

Napoleonin pisteet ovat mielenkiintoinen ja vähemmän tunnettu geometrian konsepti, joka tarjoaa syvällisiä oivalluksia kolmioiden ominaisuuksista. Nämä pisteet nimettiin ranskalaisen keisarin Napoleon Bonaparten mukaan, joka tunnetusti oli kiinnostunut matematiikasta ja erityisesti geometriasta. (Coxeter ja Greitzer huomauttavat, että Napoleon ei todennäköisesti tiennyt tarpeeksi geometriasta keksiäkseen Napoleonin lausetta, aivan kuten hän ei todennäköisesti tiennyt tarpeeksi englantia muodostaakseen palindromia, joka usein liitetään häneen: “Able was I ere I saw Elba.”) [1]

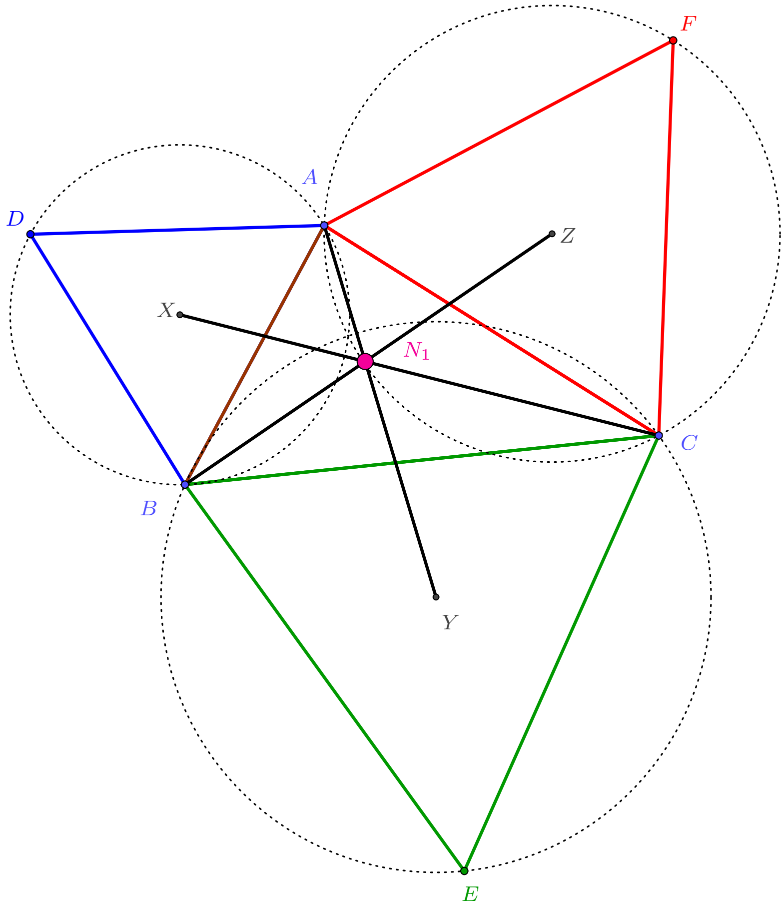
Napoleonin pisteillä on useita mielenkiintoisia ominaisuuksia. Yksi merkittävimmistä on, että riippumatta alkuperäisen kolmion muodosta, Napoleonin kolmiot ovat aina tasasivuisia. Tämä on syvällinen ja yllättävä tulos, joka osoittaa geometrian harmonian ja symmetrian.

Lisäksi Napoleonin pisteiden tutkiminen paljastaa syvempiä suhteita ja yhteyksiä kolmion geometriaan. Esimerkiksi, Napoleonin pisteet liittyvät läheisesti Fermat’n pisteeseen ja niitä voidaan käyttää hyödyksi monissa geometrisissa optimointiongelmissa. Ne ovat myös esimerkki siitä, kuinka yksinkertaiset konstruktiot voivat johtaa monimutkaisiin ja kauniisiin geometrisiin ilmiöihin.

3.1.1 Ensimmäinen Napoleonin piste

Piirretään annetun kolmion $\triangle ABC$ jokaisen sivun ulkopuolelle tasasivuinen kolmio. Esimerkiksi sivun AB ulkopuolelle piirretään tasasivuinen kolmio $\triangle ABD$, sivun BC ulkopuolelle tasasivuinen kolmio $\triangle BCE$ ja sivun AC ulkopuolelle tasasivuinen kolmio $\triangle ACF$.

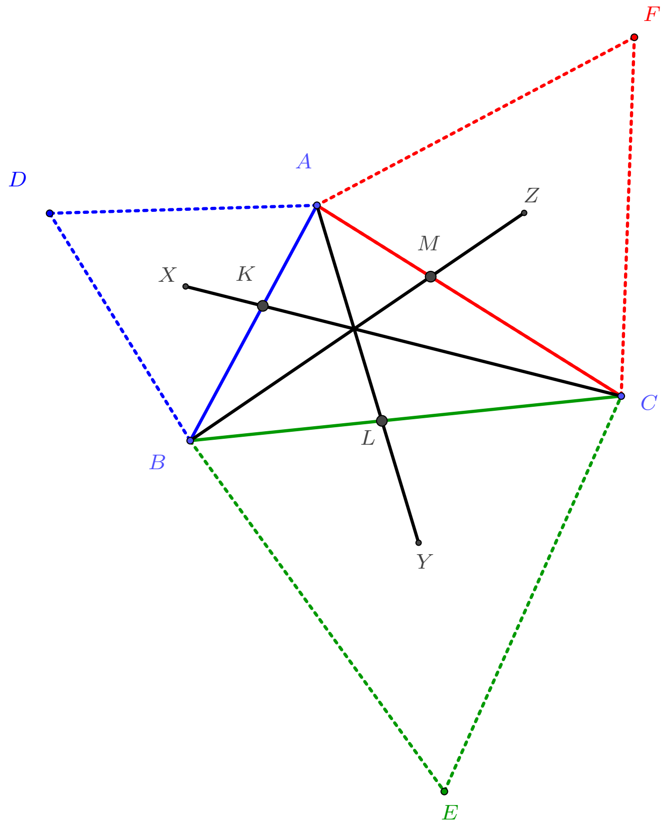
Muodostetaan janat, jotka yhdistävät alkuperäisen kolmion kärjet vastakkaisen tasasivuisen kolmion keskipisteisiin: kärki A yhdistetään kolmion $\triangle BCE$ keskipisteeseen Y, kärki B kolmion $\triangle ACF$ keskipisteeseen Z ja kärki C kolmion $\triangle ABD$ keskipisteeseen X. Tällöin kaikki kolme janaa leikkaavat samassa pisteessä, joka on **ensimmäinen Napoleonin piste** (merkitään usein N_1).



Lause 3.1. *Oletetaan, että kolmion $\triangle ABC$ jokainen kulma on enintään $120°$. Piirretään kullekin kolmion $\triangle ABC$ sivulle ulospäin tasasivuinen kolmio ja merkitään ulkopuolisia kärkiä D, E ja F. Näin muodostuvat tasasivuiset kolmiot $\triangle ADB$, $\triangle BEC$ ja $\triangle AFC$, joiden keskipisteitä merkitään X, Y ja Z. Tällöin janat AY, BZ ja CX leikkaavat yhdessä pisteessä.*

Todistus. Todistuksessa käytämme Cevan lauseen 1.10 käänteistä osoittaaksemme, että annetut janat AY, BZ ja CX leikkaavat yhdessä pisteessä.

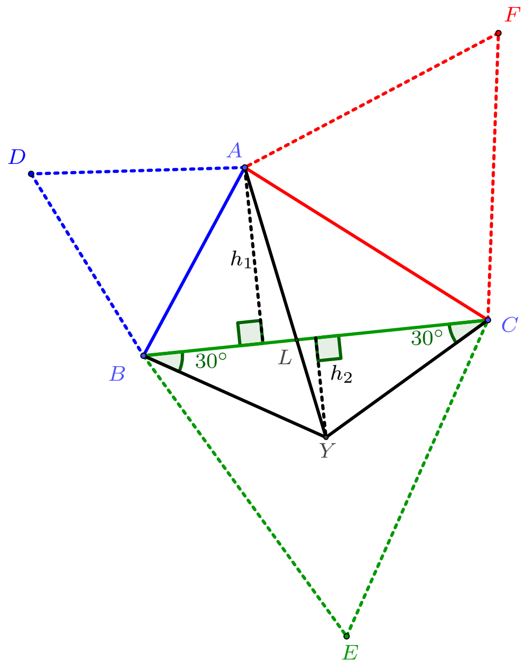
Oletetaan, että kolmion $\triangle ABC$ jokainen kulma on enintään $120°$. Merkitään pisteellä K kohtaa, jossa CX leikkaa janan AB, pisteellä L kohtaa, jossa AY leikkaa janan BC, ja pisteellä M kohtaa, jossa BZ leikkaa janan AC.



Osoitamme, että pisteiden K, L ja M välillä muodostuu Cevan lauseen 1.10 mukainen suhde.

Ensiksi tarkastellaan kolmioita $\triangle ABY$ ja $\triangle ACY$. Kulmat $\angle LBY$ ja $\angle LCY$ ovat molemmat 30°. Tämä johtuu siitä, että kolmio $\triangle BEC$ on tasasivuinen, ja piste Y on tämän kolmion keskipiste. Tasasivuisen kolmion keskipiste sijaitsee samalla kolmion kulmanpuolittajien, mediaanien ja korkeusjanan leikkauspisteessä, joten kulmat $\angle LBY = \angle YBE = 30°$ ja vastaavasti $\angle LCY = \angle YCE = 30°$.

Merkitään myös, että h_1 on korkeus kolmioille $\triangle ALB$ ja $\triangle ALC$, ja vastaavasti h_2 on korkeus kolmioille $\triangle BLY$ ja $\triangle CLY$.



Näiden avulla voimme ilmaista kolmioiden pinta-alat seuraavasti:

$$\mathrm{Ala}(\triangle ALB) = \frac{h_1 \cdot |BL|}{2} \quad \text{ja} \quad \mathrm{Ala}(\triangle BLY) = \frac{h_2 \cdot |BL|}{2},$$

$$\mathrm{Ala}(\triangle ALC) = \frac{h_1 \cdot |LC|}{2} \quad \text{ja} \quad \mathrm{Ala}(\triangle CLY) = \frac{h_2 \cdot |LC|}{2}.$$

Näiden yhtälöiden avulla voimme nyt laskea kolmioiden $\triangle ABY$ ja $\triangle ACY$ pinta-alat summana kolmioista $\triangle ALB$, $\triangle BLY$, $\triangle ALC$ ja $\triangle CLY$

$$\mathrm{Ala}(\triangle ABY) = \mathrm{Ala}(\triangle ALB) + \mathrm{Ala}(\triangle BLY) = \frac{|BL| \cdot (h_1 + h_2)}{2},$$

$$\mathrm{Ala}(\triangle ACY) = \mathrm{Ala}(\triangle ALC) + \mathrm{Ala}(\triangle CLY) = \frac{|LC| \cdot (h_1 + h_2)}{2}.$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{\mathrm{Ala}(\triangle ABY)}{\mathrm{Ala}(\triangle ACY)} = \frac{|BL|}{|LC|}.$$

Toisaalta, voimme ilmaista kolmioiden $\triangle ABY$ ja $\triangle ACY$ pinta-alat myös sivujen ja kulmien avulla. Kolmion pinta-ala voidaan laskea kaavalla

$$\text{pinta-ala} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\theta),$$

missä a ja b ovat sivut ja θ on niiden välinen kulma. Soveltamalla tätä kaavaa saamme seuraavat yhtälöt kolmioille $\triangle ABY$ ja $\triangle ACY$:

$$\mathrm{Ala}(\triangle ABY) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BY| \cdot \sin(\angle ABC + 30^\circ),$$

$$\text{Ala}(\triangle ACY) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CY| \cdot \sin(\angle ACB + 30°).$$

Näiden avulla voimme muodostaa seuraavan suhteen:

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{\text{Ala}(\triangle ABY)}{\text{Ala}(\triangle ACY)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BY| \cdot \sin(\angle ABC + 30°)}{\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CY| \cdot \sin(\angle ACB + 30°)}.$$

Koska kolmiolla $\triangle BYC$ on kulma $\angle YBC = \angle BCY = 30°$, se on tasakylkinen kolmio. Tästä seuraa, että kolmion $\triangle BYC$ kyljet $|BY|$ ja $|CY|$ ovat yhtä pitkät. Näin ollen pätee, että $|BY| = |CY|$. Tämän perusteella voimme yksinkertaistaa tämän seuraavasti:

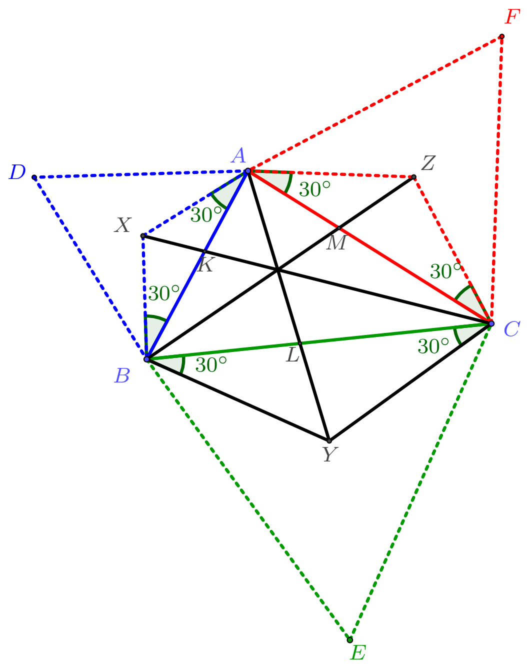
$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AB| \cdot \sin(\angle ABC + 30°)}{|AC| \cdot \sin(\angle ACB + 30°)}.$$

Samalla tavoin kuin edellisessä tapauksessa, tarkastelemme kolmioita $\triangle ABZ$ ja $\triangle CBZ$. Tällöin voidaan osoittaa, että sivujen CM ja MA välinen suhde voidaan ilmaista seuraavasti:

$$\frac{|CM|}{|MA|} = \frac{|BC|}{|AB|} \cdot \frac{\sin(\angle BCA + 30°)}{\sin(\angle BAC + 30°)}.$$

Vastaavasti, tarkastelemalla kolmioita $\triangle ACX$ ja $\triangle BCX$, voimme kirjoittaa seuraavan suhteen sivuille AK ja KB

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{\sin(\angle BAC + 30°)}{\sin(\angle ABC + 30°)}.$$



Nyt voimme kertoa kaikki kolme aiempaa suhdetta yhteen. Tässä vaiheessa on huomattava, että kaikki vasemman puolen kertoimet yksinkertaistuvat. Lopputuloksena saamme, että

$$\frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} \cdot \frac{|AK|}{|KB|} = 1.$$

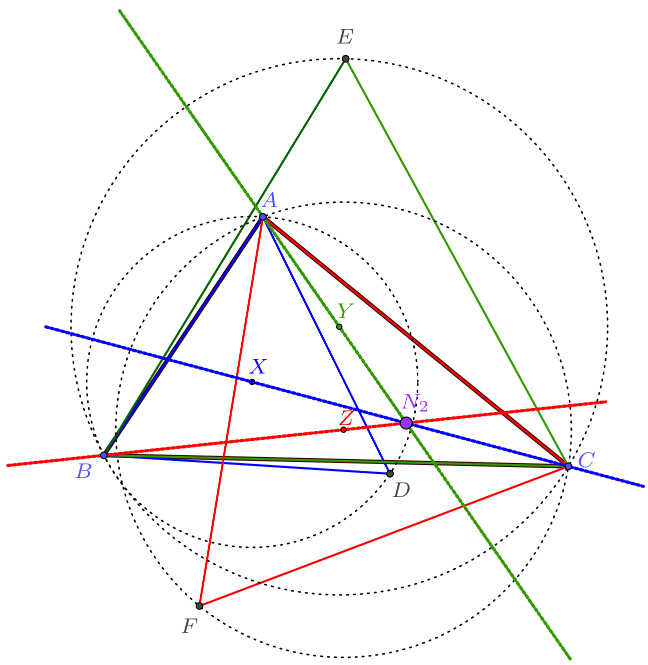
Cevan lauseen 1.10 käänteisen nojalla, janat AL, BM ja CK leikkaavat yhdessä pisteessä.

Lopuksi voimme todeta, että olemme osoittaneet, että kolmiossa $\triangle ABC$ janat AY, BZ ja CX leikkaavat samassa pisteessä, koska $A*L*Y$, $B*M*Z$ ja $C*K*X$.

$\square$

3.1.2 Toinen Napoleonin piste

Piirretään tasasivuiset kolmiot alkuperäisen kolmion sivujen suuntaisesti siten, että ne osoittavat kolmion sisäpuolelle, mutta eivät välttämättä sijaitse kokonaan kolmion sisällä. Yhdistetään jälleen alkuperäisen kolmion kärjet vastakkaisen tasasivuisen kolmion keskipisteisiin. Näiden kolmen janan leikkauspiste on **toinen Napoleonin piste** (merkitään usein N_2)



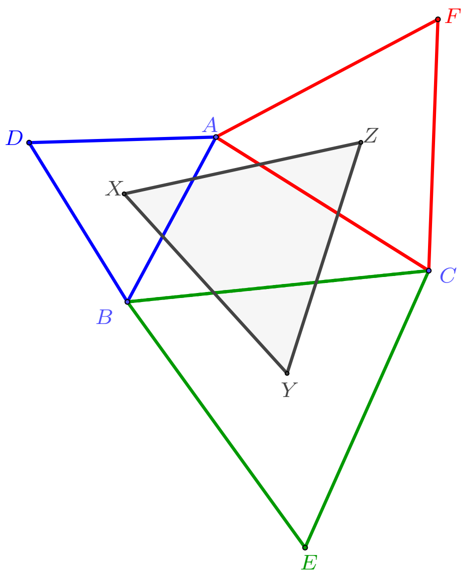
3.1.3 Napoleonin lause

Napoleonin pisteiden ja tasasivuisten kolmioiden konstruktiot liittyvät merkittävään geometrian tulokseen, joka tunnetaan Napoleonin lauseena.

Lause 3.2 (Napoleonin lause)**.** *Kolmion ulkopuolelle piirrettyjen tasasivuisten kolmoiden keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion.*

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, ja piirretään jokaisen sivun ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot. Sivun AB ulkopuolelle piirretään tasasivuinen kolmio $\triangle ABD$, sivun BC ulkopuolelle tasasivuinen kolmio $\triangle BCE$, ja sivun AC ulkopuolelle tasasivuinen kolmio $\triangle ACF$.

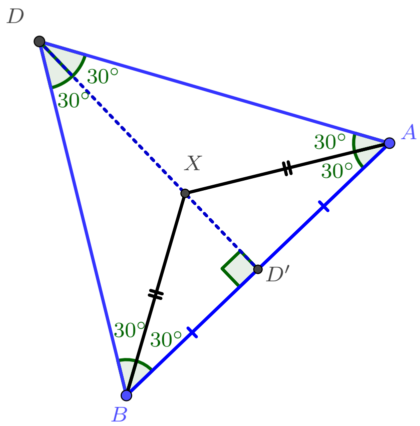
Näiden tasasivuisten kolmoiden keskipisteet merkitään seuraavasti: kolmion $\triangle ABD$ keskipiste on X, kolmion $\triangle BCE$ keskipiste on Y, ja kolmion $\triangle ACF$ keskipiste on Z. Näytämme, että kolmio $\triangle XYZ$ on tasasivuinen, eli $|XY| = |YZ| = |XZ|$.



Tarkastellaan ensin tasasivuista kolmiota $\triangle ABD$. Koska X on kolmion $\triangle ABD$ keskipiste, se on samalla sekä painopiste, ympärysympyrän keskipiste että sisäympyrän keskipiste. Tämän vuoksi pisteestä D pisteeseen X piirretty puolisuora leikkaa sivun AB pisteessä D', joka on sivun AB keskipiste. Koska janat AX, BX ja DX ovat samalla kulmanpuolittajia, ne jakavat kulmat $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle D$ kahteen 30 asteen osaan. Näin ollen

$$\angle BDX = \angle XDA = \angle DAX = \angle XAB = \angle ABX = \angle XBD = 30°.$$

Lisäksi, koska jana DD' on kolmion $\triangle ABD$ korkeus, pätee $DD' \perp AB$. Tämän vuoksi $\triangle BD'X$ on suorakulmainen kolmio.



Tästä voimme kirjoittaa, että

$$\cos 30° = \frac{|BD'|}{|BX|}.$$

$|BD'| = \frac{1}{2}|AB|$, koska DD' on keskijana, joten

$$\cos 30° = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|BX|}.$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AB|}{2 \cdot |BX|},$$

joten

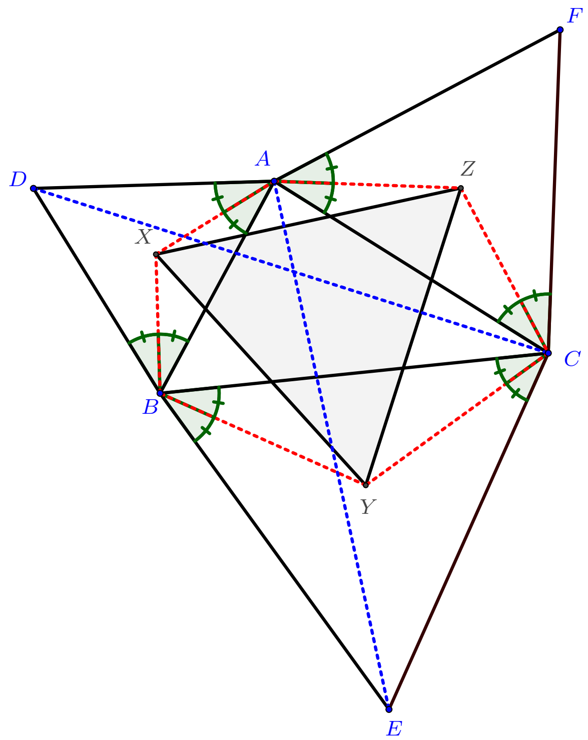
$$|AX| = |BX| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AB|.$$

Vastaavasti kolmiossa $\triangle BCE$ pätee

$$|BY| = |CY| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |BC|,$$

ja kolmiossa $\triangle ACF$ pätee

$$|AZ| = |CZ| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AC|.$$



Huomataan, että SKS-yhdenmuotoisuuslauseen mukaan kolmiot $\triangle XBY$ ja $\triangle ABE$ ovat yhdenmuotoisia. Tämä johtuu siitä, että kulmat $\angle XBY$ ja $\angle ABE$ ovat yhtä suuret ($\angle XBY = \angle ABE = \angle ABC + 60°$). Lisäksi näiden viereisten sivujen suhteet ovat samat:

$$\frac{|BX|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ja} \quad \frac{|BY|}{|BE|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Näiden perusteella voidaan päätellä, että näiden kahden kolmion yhdenmuotoisuuskerroin on $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että

$$|XY| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE|.$$

Vastaavasti voimme tarkastella kolmiota $\triangle ZCY$ ja todeta sen olevan yhdenmuotoinen kolmion $\triangle ACE$ kanssa. Samanlaisella argumentoinnilla saadaan, että myös

$$|ZY| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE|.$$

Tästä seuraa, että

$$|ZY| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| = |XY|.$$

Näin ollen voidaan päätellä, että

$$|ZY| = |XY|.$$

Seuraavaksi tarkastellessamme kolmioita $\triangle XAZ$ ja $\triangle DAC$, voimme havaita samanlaisen yhdenmuotoisuuden kuin edellisissä tapauksissa, koska kulmat $\angle XAZ$ ja $\angle DAC$ ovat yhtä suuret, viereisten sivujen suhteet ovat samat, ja yhdenmuotoisuussuhde on $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Tästä seuraa, että

$$|XZ| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |DC|.$$

Tämän jälkeen tarkastellessamme kolmioita $\triangle XBY$ ja $\triangle DBC$, huomaamme, että myös näiden kulmat ja sivusuhteet täyttävät yhdenmuotoisuuden ehdot, ja yhdenmuotoisuussuhde on $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Tämän perusteella voimme johtaa seuraavanlaisen yhteyden:

$$|XY| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |DC|.$$

Nyt meillä on seuraava yhtälö:

$$|XY| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |DC| = |XZ|.$$

Tästä voimme päätellä, että

$$|XY| = |XZ|.$$

Yhdistämällä tämä edelliseen osaan, jossa todistimme $|ZY| = |XY|$, saamme lopputuloksen

$$|ZY| = |XY| = |XZ|.$$

Näin ollen kolmio $\triangle XYZ$ on tasasivuinen. Tämä todistaa Napoleonin lausen.

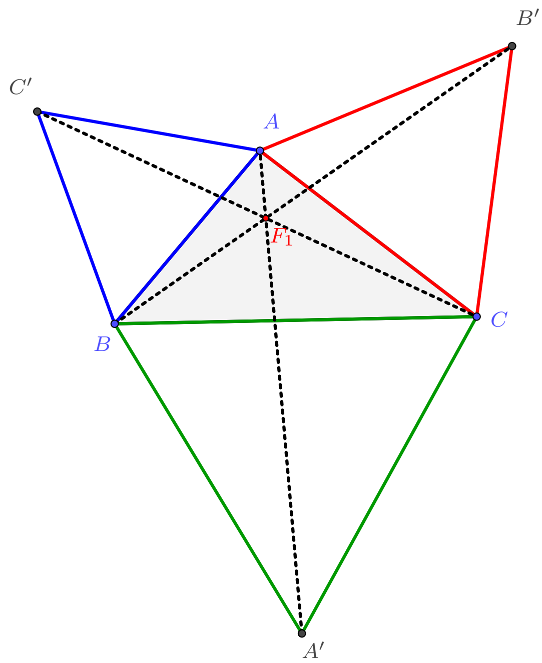
$\square$

3.2 Fermat'n pisteet

Fermat'n piste on kiehtova käsite kolmiogeometriassa, joka yhdistää elegantisti geometrian ja optimoinnin. Tämä piste on nimetty ranskalaisen matemaatikon Pierre de Fermat'n mukaan, joka esitti ongelman kolmion sisällä olevasta pisteestä, jonka etäisyyksien summa kolmion kärkiin on minimaalinen. Mielenkiintoista kyllä, tämä ongelma juontaa juurensa 1600-luvulle, jolloin Fermat haastoi Evangelista Torricellin ratkaisemaan vastaavanlaisen ongelman kolmen kylän yhdistämisestä teillä. Tämä historiallinen yhteys korostaa Fermat'n pisteen merkitystä sekä matemaattisena ongelmana että käytännön sovellusten kannalta. [10]

3.2.1 Ensimmäinen Fermat'n piste

Fermat'n ensimmäinen piste on kolmion sisällä oleva erityinen piste, josta kolmion jokaiseen kärkeen piirrettyjen janojen yhteispituus on lyhin mahdollinen. Tämän pisteen löytämiseksi piirretään jokaiselle alkuperäisen kolmion sivulle tasasivuinen kolmio. Sitten yhdistetään näiden uusien kolmioiden kärkipisteet alkuperäisen kolmion vastakkaisiin kärkiin. Näiden janojen leikkauspiste on **ensimmäinen Fermat'n piste**.



Kuvassa A, B ja C ovat alkuperäisen kolmion kulmat, A', B' ja C' ovat tasasivuisten kolmioiden kulmat ja F_1 on Fermat'n ensimmäinen piste.

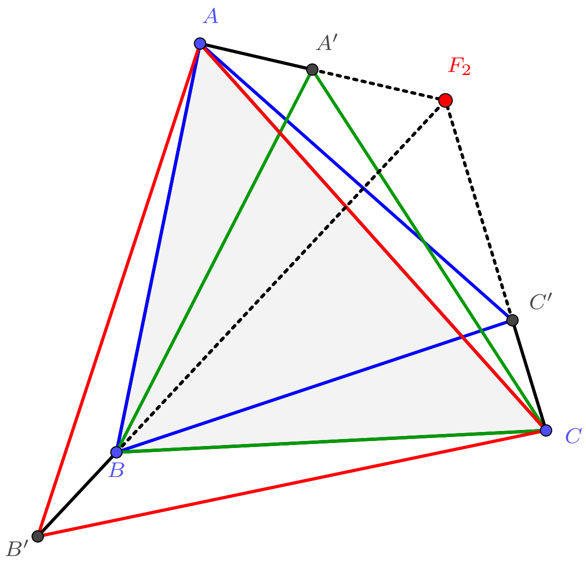
Huom: Jos kaikki kolmion kulmat ovat alle 120 astetta, Fermatin ensimmäinen piste on kolmion sisällä. Jos jokin kulma on yli 120 astetta, piste on kolmion ulkopuolella.

Fermatin piste sijaitsee kohdassa, missä tieverkon etäisyyksien summa saa pienimmän arvonsa, eli kohdassa, joka minimoi etäisyydet kolmion kärkipisteisiin A, B ja C. Tällöin etäisyyksien summa voidaan kirjoittaa muodossa:

$$|AF_1| + |BF_1| + |CF_1|$$

3.2.2 Toinen Fermat'n piste

Fermat'n toisen pisteen määrittämiseksi piirretään tasasivuiset kolmiot alkuperäisen kolmion sivujen suuntaisesti siten, että ne osoittavat kolmion sisäpuolelle, mutta eivät välttämättä sijaitse kokonaan kolmion sisällä. Sitten yhdistetään näiden uusien kolmioiden kärjistä janat alkuperäisen kolmion vastakkaisiin kulmiin. Näiden janojen leikkauspiste on **toinen Fermat'n piste**.



Kuvassa A, B ja C ovat alkuperäisen kolmion kulmat, A', B' ja C' ovat sisäänpäin piirrettyjen tasasivuisten kolmioiden kulmat ja F_2 on **toinen Fermat'n piste**.

Huom: Toinen Fermat'n piste sijaitsee aina kolmion ulkopuolella.

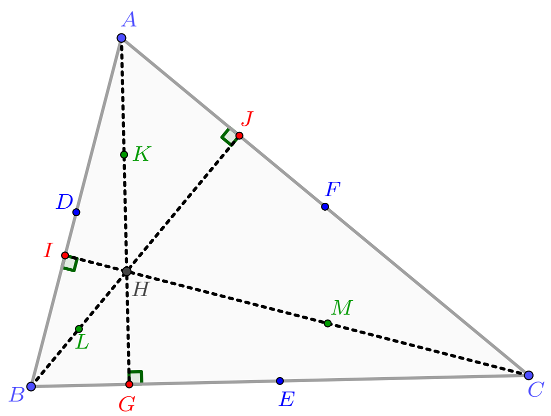
Fermat'n pisteitä ei tässä tutkielmassa käsitellä tarkemmin, vaan tarkoituksena on tarjota yleiskuva pisteen merkityksestä kolmion geometriassa ja optimaalisuuteen liittyvässä ongelmassa. Tarkempia matemaattisia kaavoja, konstruktiomenetelmiä sekä Fermat'n pisteen teoreettisia ominaisuuksia koskeva syvällisempi käsittely löytyy useista lähteistä. Lisätietoja Fermat'n pisteen matemaattisista ominaisuuksista ja historiallisesta taustasta on saatavilla esimerkiksi Wolfram MathWorld -sivustolla [9]. Sivustolla käsitellään muun muassa Fermat'n ongelmaa, pisteen minimointiehdot, pisteen historiallinen yhteys Torricellin ratkaisuun sekä pisteen tarkat kaavat, jotka määrittelevät sen sijainnin kolmion kärkipisteiden etäisyyksien perusteella. Sivu tarjoaa myös matemaattisia funktioita ja kaavoja, kuten Kimberling-keskukset ja Brocard-kulman sovelluksia [3].

3.3 Yhdeksän pisteen ympyrä

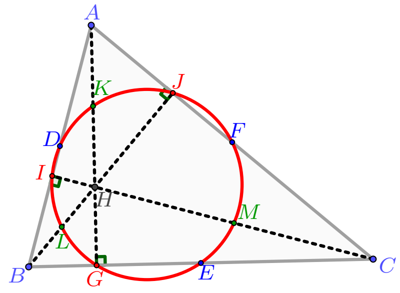
Geometriassa on monia mielenkiintoisia ja syvällisiä lauseita, jotka paljastavat kolmioon liittyvien pisteiden välisiä kauniita ja yllättäviä yhteyksiä. Yksi tällainen lause liittyy yhdeksän pisteen ympyrään, joka on erityinen geometrinen konstruktio ja kulkee kolmion yhdeksän merkittävän pisteen kautta. Yhdeksän pisteen ympyrä on saanut nimensä sen kyvystä yhdistää useita kolmiogeometrian keskeisiä elementtejä, kuten ortokeskuksen, keskipisteet ja sisään piirretyn ympyrän keskipisteet. Tämä ympyrä tarjoaa syvällisen ymmärryksen kolmiomittauksen symmetrioista ja suhteista, mikä tekee siitä arvokkaan tutkimusaiheen geometrian opiskelijoille ja harrastajille.

Nämä yhdeksän pistettä voidaan luokitella kolmeen ryhmään:

- **Sivujen keskipisteet** (D, E ja F): Kolmion jokaisen sivun keskipiste, toisin sanoen piste, joka jakaa sivun kahteen yhtä suureen osaan.
- **Korkeusjanojen kantapisteet** (G, J ja I): Jokaisen kolmion kärjestä vastakkaiselle sivulle piirretty korkeusjana kohtaa sivun tietyssä pisteessä, jota kutsutaan kantapisteeksi.
- **Ortokeskuksen (H) ja kärkipisteiden (A, B, C) välisten janojen keskipisteet (K, L ja M)**: Kolmion ortokeskus on piste, jossa sen kaikki kolme korkeusjanaa leikkaavat.



Lause 3.3. *Minkä tahansa kolmion kolmen korkeuden kantapisteet, kolmen sivun keskipisteet ja kolmen kärjestä ortokeskukseen ulottuvien janojen keskipisteet sijaitsevat samalla ympyrällä.*



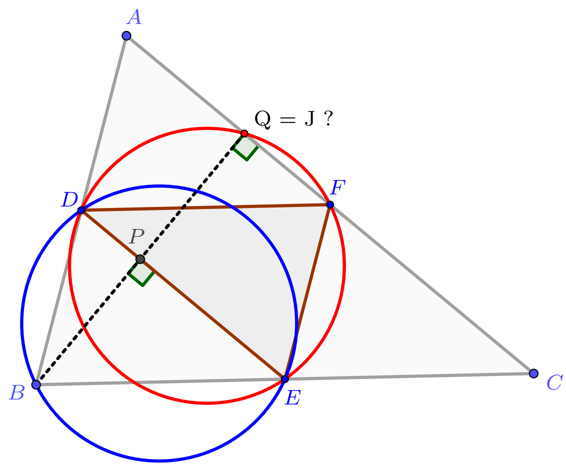
Todistus. Tämän lauseen todistuksessa hyödynnetään Varignonin lausetta (Lause 3.5), jota ei ole vielä esitelty aiemmissa osioissa. Varignonin lause ja sen todistus esitetään kuitenkin myöhemmässä osassa, jolloin tässä todistuksessa käytetty lähestymistapa tulee selitetyksi ja perustelluksi.

Olkoon $\triangle ABC$ mielivaltainen kolmio, ja muodostetaan mediaanikolmio $\triangle DEF$ yhdistämällä kolmion $\triangle ABC$ sivujen keskipisteet D, E ja F. Piirretään tämän medianikolmion ympäri ympyrä. Tällöin pisteet D, E ja F sijaitsevat tällä ympyrällä.

Tarkastellaan ensin, onko korkeusjanan kantapiste myös tällä ympyrällä. Lauseen 1.9 todistuksen nojalla kolmiot $\triangle DEF$ ja $\triangle DBE$ ovat yhtenevät. Täten näiden kolmioiden ympäri piirretyt ympyrät ovat myös yhtenevät.

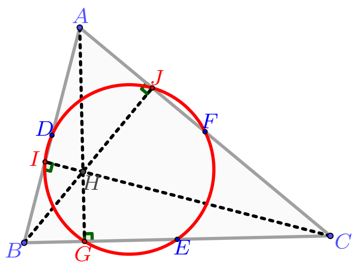
Piirretään kolmion $\triangle DBE$ ympäri piirretyn ympyrän pisteestä B kohtisuora jana suoraa DE vastaan.

Pisteet D ja E ovat näiden kahden ympyrän leikkauspisteitä. Kolmion $\triangle DBE$ ympäri piirretyn ympyrän pisteen B peilikuva suoran DE suhteen on kolmion $\triangle DEF$ ympäri piirretyn ympyrän piste Q.



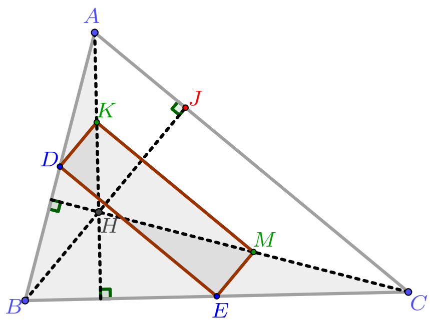
Olkoon piste P suorien BQ ja DE leikkauspiste. Tällöin $BE \perp DE$, koska $\angle BPE = 90°$. Peilauksen perusteella $|BP| = |PQ|$, eli $\frac{|BP|}{|PQ|} = \frac{1}{2}$. Lauseen 1.9 nojalla kolmiot $\triangle DEF$ ja $\triangle ABC$ ovat yhdenmuotoiset ja yhdenmuotoisuussuhde on 1:2. Tästä seuraa, että piste Q on myös janalla AC. Lisäksi, koska $\angle BPE = 90°$, niin myös $\angle DPQ = 90°$ (ristikulmat). Lauseen 2.3 todistuksen nojalla $DE \parallel AC$, joten käänteisen vuorokulmalauseen nojalla saadaan, että $\angle BQC = \angle DPE = 90°$. Siis Q on korkeusjanan kantapiste, joten $Q = J$.

Soveltamalla vastaavaa päättelyä kolmioihin $\triangle DEF$ ja $\triangle ADF$ nähdään, että piste I on myös kolmion $\triangle DEF$ ympäri piirretyllä ympyrällä. Vastaavasti kolmioita $\triangle DEF$ ja $\triangle ECF$ tarkastelemalla havaitaan, että piste G on myös tällä samalla ympyrällä.



Täten kaikki kuusi pistettä eli sivujen keskipisteet D, E, F ja korkeusjanojen kantapisteet G, I, J sijaitsevat samalla ympyrällä.

Kolmion $\triangle ABC$ korkeuksien leikkauspiste on merkitty pisteellä H, eli H on kolmion korkeusjanojen leikkauspiste. Olkoon piste K pisteen H ja kärjen A välinen keskipiste, piste L pisteen H ja kärjen B välinen keskipiste sekä piste M pisteen H ja kärjen C välinen keskipiste. Seuraavaksi näytämme, että myös nämä kolme keskipistettä K, L ja M sijaitsevat samalla ympyrällä yhdessä sivujen keskipisteiden D, E, F sekä korkeusjanojen kantapisteiden G, I, ja J kanssa.



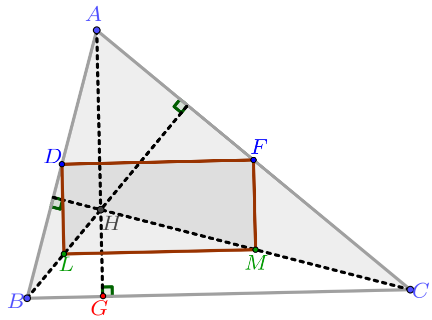
Kuvassa on konkaavi nelikulmio $ABCH$. Pisteet D, E, M ja K vastaavasti janojen AB, BC, CH, AH keskipisteet. Varignonin lauseen 3.5 nojalla keskipisteet yhdistämillä muodostettu nelikulmio $DEMK$ on suunnikas.

Kolmiossa $\triangle ACH$ pisteet M ja K ovat vastaavasti janojen HC ja AH keskipisteet. Lauseen 2.3 todistuksen nojalla $KM \parallel AC$. Lisäksi $KM \perp HJ$, koska $KM \parallel AC$ ja $AC \perp BJ$.

Kolmiossa $\triangle ABH$ pisteet D ja K ovat vastaavasti janojen AB ja AH keskipisteet. Lauseen 2.3 nojalla, $DK \parallel BH$. Koska $B * H * J$, $DK \parallel HJ$. Näin ollen $DK \perp KM$.

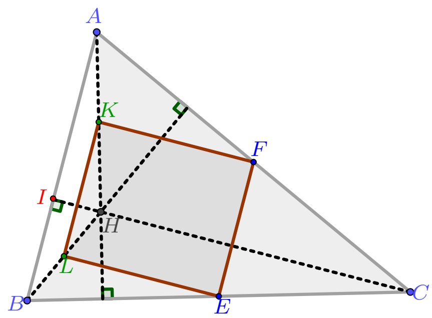
Näin ollen, olemme osoittaneet, että nelikulmio $DEMK$ on suorakulmio. Suorakulmion lävistäjät ovat yhtä suuret.Tästä seuraa, että

$$|KE| = |DM| \tag{*}$$



Kuvassa on konkaavi nelikulmio $ABHC$. Pisteet D, F, M ja L ovat janojen AB, AC, CH ja BH keskipisteet. Käsittely on vastaava kuin edellisessä kuvassa: kolmiossa $\triangle BCH$ pätee $LM \parallel BC$ ja $LM \perp HG$. Samoin kolmiossa $\triangle ABH$ pätee $DL \parallel HG$ ja $DL \perp LM$, mikä osoittaa, että nelikulmio $DFML$ on suorakulmio. Joten

$$|DM| = |FL| \tag{**}$$

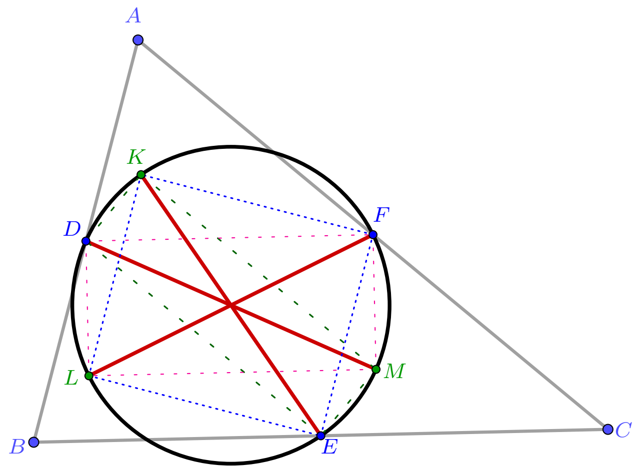


Kuvassa on konkaavi nelikulmio $ACBH$. Pisteet F, E, L ja K ovat janojen AC, BC, BH ja AH keskipisteet.

Edellisen käsittelyn mukaisesti kolmiossa $\triangle ABH$ pätee $KL \parallel AB$ ja $KL \perp HI$. Vastaavasti kolmiossa $\triangle CHB$ pätee $EL \parallel HC$ ja $EL \parallel HI$, jolloin $KL \perp LE$. Tästä seuraa, että nelikulmio $FELK$ on suorakulmio. Joten

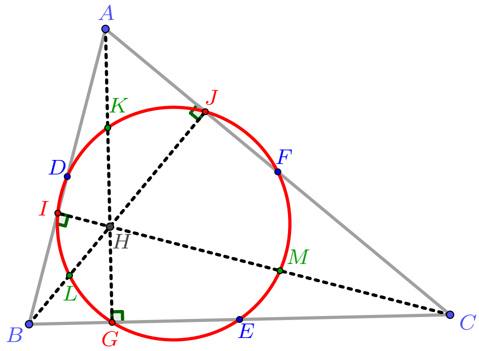
$$|FL| = |KE| \tag{***}$$

Yhtälöiden *, ** ja *** nojalla $|KE| = |DM| = |FL|$. Tästä seuraa, että nelikulmioilla $DFML$, $DEMK$ ja $FELK$ on sama ympärysympyrä.



Täten kaikki kuusi pistettä eli sivujen keskipisteet D, E, F ja kolmen kärjestä ortokeskukseen ulottuvien janojen keskipisteet K, L, M sijaitsevat samalla ympyrällä.

Olemme todistaneet, että sekä sivujen keskipisteet D, E, F että korkeusjanojen kantapisteet G, I, J, samoin kuin kolmen kärjestä ortokeskukseen ulottuvien janojen keskipisteet K, L, M, sijaitsevat samalla ympyrällä.

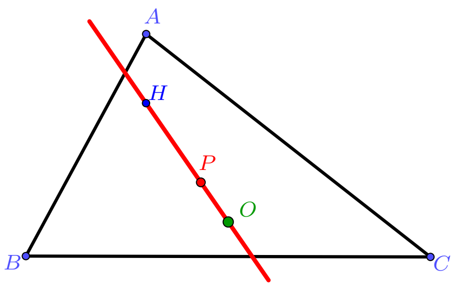


$\square$

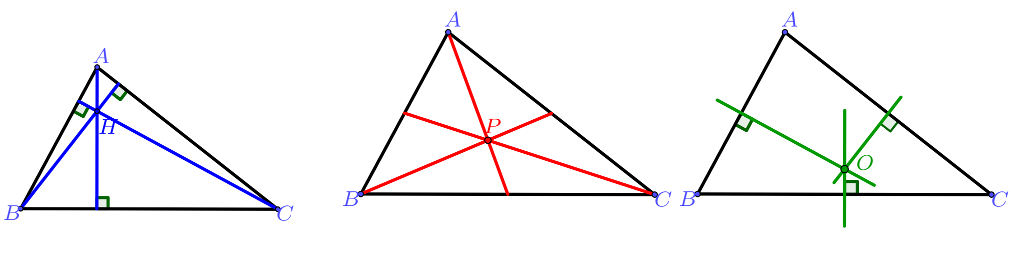
3.4 Eulerin suora

Eulerin suora on kolmiogeometrian merkittävä suora, joka kulkee kolmion kolmen erityisen pisteen – ortokeskuksen (H), painopisteen (G) ja ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen (O) – kautta. Tämä sveitsiläisen matemaatikon Leonhard Eulerin vuonna 1767 löytämä suora on yksi geometrian kulmakivistä.

Lause 3.4. *Minkä tahansa kolmion ortokeskus H, painopiste G ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O sijaitsevat samalla suoralla. Lisäksi painopiste G jakaa janan HO suhteessa $HG : GO = 2 : 1$.*

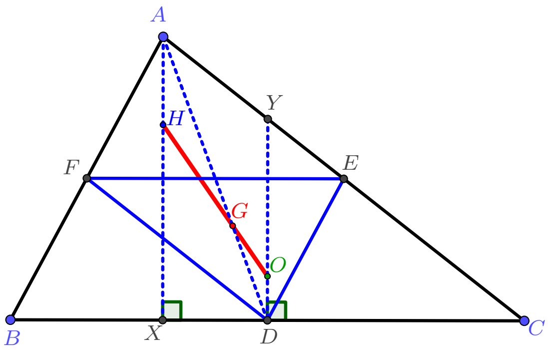


Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ mielivaltainen kolmio. Olkoot H kolmion ortokeskus (korkeusjanojen leikkauspiste), G kolmion painopiste (mediaanien leikkauspiste) ja O kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste (keskinormaalien leikkauspiste).



Ortokeskus (H) Painopiste (G) Ympyrän keskipiste (O)

Merkitään pisteillä D, E ja F kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB keskipisteitä. Näin ollen kolmio DEF on kolmion ABC mediaanikolmio.



Olkoot X ja Y pisteitä siten, että $B * X * C$, $AX \perp BC$, $A * Y * C$ ja $YD \perp BC$. Koska $AX \perp BC$, AX on yksi kolmion $\triangle ABC$ korkeuksista. Tällöin pisteet A, H ja X ovat samalla suoralla, koska H on korkeuksien leikkauspiste.

Lisäksi, koska piste D on sivun BC keskipiste ja $YD \perp BC$, YD on keskinormaali. Tällöin pisteet Y, O ja D ovat samalla suoralla. Vuorokulmanlauseen nojalla päättelemme, että $AX \parallel YD$, koska kulmat $\angle AXD = \angle YDC = 90°$.

Seuraavaksi todistetaan, että kolmiot $\triangle AGH$ ja $\triangle DGO$ ovat yhdenmuotoisia. Käänteisen vuorokulmalauseen nojalla voidaan todeta, että $\angle XAD = \angle ADY$, koska $AX \parallel YD$. Lisäksi, koska AD on mediaani ja G on painopiste, tiedämme lauseen 2.4 nojalla, että $|AG| = 2 \cdot |DG|$.

AH on A-kärjen ortokeskukseen H ulottuva etäisyys kolmiossa $\triangle ABC$. Vastaavasti DO on D-kärjen ortokeskukseen O ulottuva etäisyys kolmiossa $\triangle DEF$. Lauseen 1.9 nojalla, koska kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoiset, vastaavien etäisyyksien suhde on $2 : 1$. Tästä voimme päätellä, että $|AH| = 2 \cdot |DO|$.

Kolmioissa $\triangle AGH$ ja $\triangle DGO$ havaitaan, että kulmat $\angle HAG$ ja $\angle ODG$ ovat yhtä suuret, ja lisäksi etäisyydet toteuttavat suhteet $|AG| = 2 \cdot |DG|$ ja $|AH| = 2 \cdot |DO|$. Näiden ehtojen perusteella voimme todeta, että SKS-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla kolmiot $\triangle AHG$ ja $\triangle GOD$ ovat yhdenmuotoisia, ja niiden yhdenmuotoisuussuhde on $2 : 1$. Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että $\angle AGH = \angle DGO$, mikä tarkoittaa, että pisteet H, G ja O ovat samalla suoralla.
Koska $\triangle AHG$ ja $\triangle GOD$ ovat yhdenmuotoiset suhteessa $2 : 1$, tästä seuraa, että $|HG| = 2 \cdot |GO|$.

Näin ollen olemme todistaneet, että minkä tahansa kolmion ortokeskus H, painopiste G ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O sijaitsevat samalla Eulerin suoralla, ja että G jakaa janan HO suhteessa $2 : 1$. □

Mediaanikolmiolla on myös mielenkiintoinen yhteys alkuperäisen kolmion Eulerin suoraan. Mediaanikolmion ortokeskus on sama kuin alkuperäisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, ja mediaanikolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on sama kuin alkuperäisen kolmion ortokeskus. Tästä seuraa, että mediaanikolmion Eulerin suora on sama kuin alkuperäisen kolmion Eulerin suora, mutta pisteiden roolit vaihtuvat.

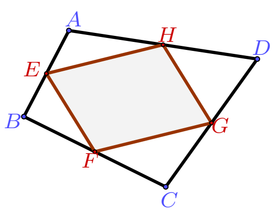
3.5 Varignonin lause

Seuraavassa esitellään Varignonin lause, joka on Pierre Varignonin vuonna 1831 todistama keskeinen työkalu monissa geometrisissa todistuksissa, mukaan lukien yhdeksän pisteen ympyrän todistus.

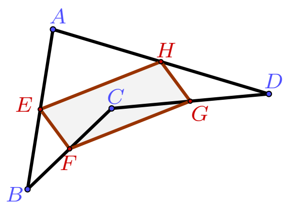
Varignonin lauseessa osoitetaan, että nelikulmion sivujen keskipisteitä yhdistävät janat muodostavat suunnikkaan. Tämä tulos on erityisen tärkeä nelikulmion geometriassa, sillä se tarjoaa näkökulman siihen, miten keskipisteiden yhdistäminen vaikuttaa nelikulmion rakenteeseen ja ominaisuuksiin.

Suunnikkaan määritelmän mukaan se on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. Tämä geometrinen käsite on hyödyllinen monien muiden todistusten, kuten yhdeksän pisteen ympyrän todistuksen, perustana.

Lause 3.5. *Nelikulmion sivujen keskipisteitä yhdistävät janat muodostavat aina suunnikkaan, oli nelikulmio minkä muotoinen tahansa.*

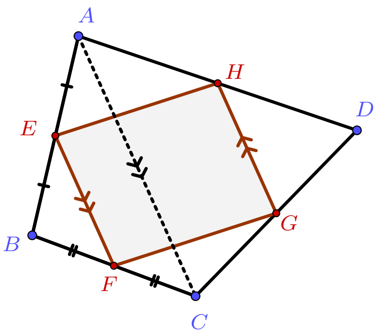


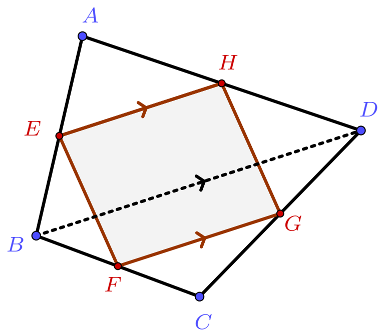
Konveksi nelikulmio



Konkaavi nelikulmio

Todistus. Olkoon $ABCD$ mielivaltainen konveksi nelikulmio. Olkoot E, F, G ja H vastaavasti janojen AB, BC, CD ja DA keskipisteet.





Kolmiossa $\triangle ABC$ pisteet E ja F ovat vastaavasti janojen AB ja AC keskipisteitä. Lauseen 2.3 todistuksen nojalla,

$$EF \parallel AC.$$

Vastaavalla tavalla, kuten kolmion $\triangle ABC$ tapauksessa, pätee myös kolmiossa $\triangle ADC$, että pisteet H ja G ovat janojen AD ja CD keskipisteitä. Tällöin

$$HG \parallel AC.$$

Koska $EF \parallel AC$ ja $HG \parallel AC$ voidaan päätellä, että

$$EF \parallel HG.$$

Samalla tavalla voimme tarkastella kolmiota $\triangle ABD$, jossa pisteet E ja H ovat janojen AB ja AD keskipisteitä. Lauseen 2.3 vastaavan todistuksen nojalla voimme päätellä, että

$$EH \parallel BD.$$

Vastaava päättely pätee myös kolmiossa $\triangle BCD$, jossa pisteet F ja G ovat janojen BC ja CD keskipisteitä. Tällöin voimme todeta, että

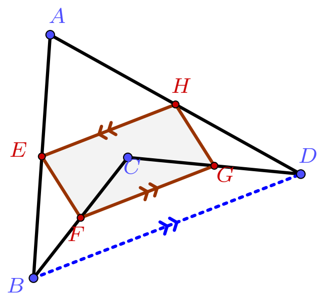
$$FG \parallel BD.$$

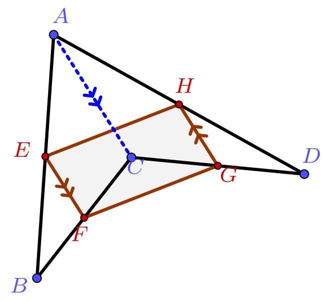
Koska $EH \parallel BD$ ja $FG \parallel BD$, seuraa, että

$$EH \parallel FG.$$

Lopuksi, koska $EF \parallel HG$ ja $EH \parallel FG$, voimme päätellä, että nelikulmio $EFGH$ on suunnikas, mikä pätee, kun $ABCD$ on konveksi nelikulmio.

Nyt tarkastelemme nelikulmioa $ABCD$, joka on konkaavi, ja tutkimme, onko nelikulmio $EFGH$ tällöin suunnikas.





Vastaavalla tavalla kuin edellä, tarkastelemme konkaavin nelikulmion muodostamia kolmioita.

Ensimmäiseksi tarkastellaan kolmiota $\triangle ABD$, jossa pisteet E ja H ovat janojen AB ja AD keskipisteitä. Lauseen 2.3 nojalla pätee, että

$$EH \parallel BD.$$

Samoin kolmiossa $\triangle CBD$, jossa pisteet F ja G ovat janojen BC ja CD keskipisteitä, voimme todeta, että

$$FG \parallel BD.$$

Tästä seuraa, että

$$EH \parallel FG.$$

Samoin voimme tarkastella kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle ACD$, joissa pisteet E ja F ovat janojen AB ja AC keskipisteitä, ja pisteet H ja G ovat janojen AD ja CD keskipisteitä. Lauseen 2.3 nojalla pätee, että

$$EF \parallel AC \quad \text{ja} \quad HG \parallel AC.$$

Tästä seuraa, että

$$EF \parallel HG.$$

Lopuksi, koska $EH \parallel FG$ ja $EF \parallel HG$, voimme päätellä, että nelikulmio $EFGH$ on suunnikas myös silloin, kun $ABCD$ on konkaavi nelikulmio.

Näin ollen olemme osoittaneet, että sekä konveksin että konkaavin nelikulmion tapauksessa sivujen keskipisteitä yhdistävä nelikulmio $EFGH$ muodostaa aina suunnikkaan. Tämä vahvistaa Varignonin lauseen pätevyyden kaikissa nelikulmioissa. $\square$

Lähteet

[1] Coxeter H.S.M. ja Greitzer S.L. (1967). *Geometry revisited.* The Mathematical Association of America.

[2] Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Laitinen, A., Luoma-aho, E., Raittila, T., & Tikka, T. (2020). *Juuri geometria MAA3*, Otava.

[3] Kimberling C. *Encyclopedia of Triangle Centers*, Saatavilla 5.11.2024 https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[4] Kurittu L., Hokkanen V.M. ja Kahanpää L. (2006). *Geometria*, Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto.

[5] Lehrbäck J. (2018). *Euklidinen Tasogeometria*, Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto.

[6] OpenAI (2024). *ChatGPT*, Saatavilla 5.11.2024 https://openai.com/chatgpt/.

[7] Opetushallitus (2019). *Lukion opetussuunitelman perusteet 2019*, Opetushallitus.

[8] Ostermann A. ja Wanner G. (2012). *Geometry by Its History.* Springer.

[9] Weisstein E. W. *Fermat points*, MathWorld–A Wolfram Web Resource. Saatavilla 5.11.2024 https://mathworld.wolfram.com/FermatPoints.html

[10] Wikipedia *Fermat'n pisteet*, Saatavilla 5.11.2024 https://fi.wikipedia.org/wiki/Fermat'n_pisteet.