Maksimaalifunktio ja L^p -avaruudet

PRO GRADU -TUTKIELMA
Matti Teerikangas
Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
23. toukokuuta 2007

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Hardy, Littlewood, Wiener **2**

3 Maksimaaliongelma **6**

4 L^p-avaruudet **10**

4.1 Mitallisuus 10

4.2 L^1- ja L^∞-avaruudet 12

4.3 L^p-avaruudet, $1 \leq p < \infty$ 14

4.4 Tärkeitä epäyhtälöitä 15

5 $5r$-peitelause **22**

6 Hardy-Littlewood-maksimaalifunktio **24**

6.1 Integraalin esityslause 24

6.2 Maksimaalifunktio 26

1 Johdanto

Tämän työn tärkein tarkoitus on esittää Hardy-Littlewood-maksimaalifunktion määritelmä sekä todistaa sen perusominaisuuksia. Nykyisessä muodossaan olevan maksimaalifunktion esitys löytyy vasta työn loppupuolelta kappaleesta 6. Maksimaalifunktion käsittely aloitetaan tavallaan historiallisesta näkökulmasta. Lähdetään kulkemaan Hardyn ja Littlewoodin jalanjälkiä ja esitetään aluksi yksinkertainen maksimaaliongelma, jossa tarkastellaan erästä äärellisten summien ominaisuutta. Sovelletaan tämä samainen ongelma integraaleihin avaruudessa $\mathbb{R}$ ja päästään hyvin nopeasti käsiksi itse pääteemaan, maksimaalifunktioon $\theta(x)$. Tämän kappaleen merkinnät ovat hyvin pitkälti identtiset alkuperäislähteen [3] merkintöjen kanssa, mutta eivät eroa merkittävästi nykyisistä merkinnöistä.

Kappaleissa 4 ja 5 esitetään välttämättömiä pohjatietoja, joita tarvitaan maksimaalifunktion tarkastelussa. Kappaleesta 3 poiketen nyt tarkastellaan $\mathbb{R}$:n sijaan n-ulotteista reaaliavaruutta. Ensin käydään nopeasti läpi mitallisuuden käsite ja määritellään L^1-, L^∞- ja lopulta L^p-avaruudet. Lause 4.4.1., Hölderin epäyhtälö, on kappaleen 4 tärkein yksittäinen lause. Sen avulla todistetaan Minkowskin epäyhtälö ja saadaan todistettua, että L^p on normiavaruus. Kappaleessa 5 esitetään ja todistetaan $5r$-peitelause eli peruspeitelause. Tämä kappale eroaa hieman matemaattiselta luonteeltaan tämän työn muista kappaleista, mutta on välttämätön maksimaalifunktion ominaisuuksia todistettaessa. Tässä yhteydessä olisi voitu valita muukin peitelause, esimerkiksi Vitalin peitelause, mutta yksinkertaisuuden vuoksi valittiin $5r$-peitelause.

Kappaleen 6 alussa todistetaan Lebesguen määritelemän mukainen integraalin esityslause. Tämä lause osoittautuu erittäin tarpeelliseksi. Vielä ennen maksimaalifunktion määrittelyä esitetään Lebesguen differentioituvuuslause, jota hieman muokkaamalla päädytään itse maksimaalifunktioon. Ainoana erona kappaleen 3 maksimaalifunktioon on, että nyt operoidaan avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Lauseen 6.2.2. todistus on alunperin Wienerin käsialaa ja se sopii todistukseksi myös Lauseeseen 3.0.5. Wiener siis laajensi maksimaalifunktion tarkastelun $\mathbb{R}$:stä $\mathbb{R}^n$:ään. Esitetään heti konkreettinen käyttö Lauseelle 6.2.2. ja todistetaan sen avulla jo aiemmin esitetty Lebesguen differentioituvuuslause. Kappaleen lopussa tarkastellaan vielä maksimaalifunktion integroituvuutta rajoitetussa pallossa.

Aloitetaan kuitenkin lyhyellä historiallisella katsauksella Hardyn, Littlewoodin ja Wienerin elämään.

2 Hardy, Littlewood, Wiener

Maksimaalifunktiota käsittelevän teorian kehittänyt kolmikko Hardy, Littlewood ja Wiener olivat kaikki 1900-luvun alun suuria matemaatikkoja. He olivat ihmisinä täysin toisistaan poikkeavia, ja jopa heidän matemaattinen lahjakkuutensa poikkesi toisistaan huomattavasti. Siitä huolimatta, tai ehkä juuri siksi, he saivat yhdessä valtavasti aikaan. Heistä englantilaiset Hardy ja Littlewood työskentelivät yhdessä vuosikymmeniä ja kolmikosta nuorin Yhdysvalloissa syntynyt Norbert Wiener vieraili Cambridgessä usein ja pitkään.

Godfrey Harold Hardy syntyi Englannissa 1877 melko köyhään perheeseen. Hänen molempia vanhempiaan pidettiin älykkäinä ja matemaattisesti lahjakkaina, mutta heillä ei ollut ollut taloudellisia mahdollisuuksia yliopistokoulutukseen. Hardy, jota tuon ajan tapaan puhuteltiin lähes poikkeuksetta sukunimellä, oli koulussa hyvä kaikessa. Jälkeenpäin katsoen on varsin mielenkiintoinen yksityiskohta se, ettei hän ollut kouluaikana mitenkään erityisen kiinnostunut matematiikasta. Hän sai joka tapauksessa stipendin Wincherter Collegeen, Englannin parhaana pidettyyn matematiikan opinahjoon, jo vuonna 1889. Seitsemän vuotta myöhemmin Hardy siirtyi Wincherteristä Cambridgeen. Siellä hän oli jo vähällä vaihtaa pääaineensa historiaan, koska ei ollut tyytyväinen opetuksen tasoon. Löydettyään itselleen sopivan ohjaavan opettajan jatkuivat opinnot uudella innolla. Matematiikan ohella Hardy oli erityisen kiinnostunut kriketistä, mikä tulee ilmi tässäkin työssä kappaleessa 3. Hän ei kuitenkaan koskaan pelannut joukkueessa, mutta saattoi seurata pelejä päivittäin. Tennistä hän tosin pelasi itsekin. Yksi omituisuus, mistä Hardy tunnetaan, oli hänen valokuvakammonsa. Koko hänen elämänsä aikana hänestä saatiin otettua tiettävästi vain viisi valokuvaa.

Vuonna 1908 Hardy julkaisi ensimmäisen merkittävän teoksen: A course of pure mathematics. Tämän teoksen vaikutus matematiikan tutkimukselle on hyvin merkittävä, sillä se mullisti matematiikan opetuksen yliopistoissa. Pari vuotta tämän jälkeen Hardy aloitti tiiviin yhteistyön niin ikään englantilaisen John Edenson Littlewoodin kanssa. Tämä matemaatikon poika eli suuren osan lapsuudestaan Etelä-Afrikassa. Isä Eward ei ollut lainkaan tyytyväinen poikansa saamaan opetukseen etenkään matematiikan osalta. Koulumenestys oli joka tapauksesa hyvää ja poika pääsikin Kapkaupungin yliopistoon. Opetuksen laatu ei edelleenkään tyydyttänyt isää ja niin 15-vuotias poika lähetettiin takaisin Englantiin. Jo tuohon aikaan nuori Littlewood kärsi masennuksesta, jota tuskin paransivat huonot olot Etelä-Afrikassa ja yksin muutto takaisin Englantiin. Pari vuotta Littlewood vietti St Paulin koulussa Lontoossa, kunnes vuonna 1903 hän pääsi Cambridgeen. Hän kävi välillä luennoimassa Manchesterin yliopistossa usean vuoden ajan palaten takaisin Cambridgeen 1910. Näihin aikoihin alkoi jo mainittu yhteistyö Hardyn kanssa. Tässä yhteydessä on hyvä mainita myös kaksikon yhteistyö intialaisen matemaatikon Ramanujanin kanssa. Tämä vuonna 1913 alkanut yhteistyö oli hyvin merkittävä ja tuottoisa, vaikka Ramanujan viettikin suurimman osan ajastaan Intiassa. Vierailujen lisäksi yhteistyö toimi lähinnä kirjeenvaihdon välityksellä.

Norbet Wiener syntyi 1894 Missourissa Yhdysvalloissa juutalaiseen perheeseen. Hänen venäläissyntyinen isänsä Leo opetti Harvardin yliopistossa slaavilaisia kieliä ja oli valtavan kiinnostunut matematiikasta. Hän ei ollut koskaan opiskellut matematiikkaa yliopistossa, eikä tarvinnut matemaattisia taitoja omassa työssään, mutta hänen matemaattinen lahjakkuutensa oli kiistämätön. Hän pystyi opettamaan pojalleen matematiikkaa vielä yliopistotasolla, joka on itseoppineelta varsin kunnioitettava saavutus. Jos oli isä Leo lahjakas, niin sitä oli poikakin. Kouluun seitsemänvuotias poika laitettiin suoraan kolmannelle luokalle, mutta siirrettiin lähes saman tien neljännelle. Edelleen Norbetin ajatuksenjuoksu oli paljon luokkatovereitaan edellä, joten isä päätti ottaa poikansa opetuksen omalle vastuulleen. Näihin aikoihin lääkärit määräsivät kömpelön pojan lukukieltoon ylirasittuneiden silmien vuoksi. Puolen vuoden ajan hän opettelikin päässälaskua isänsä kanssa, kunnes lopulta vuonna 1903 yhdeksänvuotiaana Norbert Wiener pääsi takaisin kouluun. Hänet laitettiin seitsemän vuotta itseään vanhempien oppilaiden kanssa samalle luokalle. Kolmen vuoden kuluttua ollessaan vasta yhdentoista vuoden ikäinen hänestä tuli jo ylioppilas. Samana vuonna Wiener pääsi Tufts Collegeen, missä hän opiskeli pääaineenaan matematiikkaa. Valmistuttuaan Tuft Collegesta 1909 hän meni Harvardiin jatko-opiskelijaksi, ja vastoin kaikkien odotuksia alkoikin opiskella eläintiedettä, mutta vaihtoi pääaineensa filosofiaan jo samana vuonna. Wiener suuntautui matemaattiseen filosofiaan ja teki väitöskirjansa matemaattisesta logiikasta valmistuen Harvardista tohtoriksi ollessaan vasta 18-vuotias. Seuraavaksi Wiener muuttikin jo Englantiin, Cambridgeen ja meni Hardyn luennoimille kursseille. Vuonna 1914 Wiener jatkoi matkaa toisen suuruuden saksalaisen Hilbertin oppiin Göttingeniin.

Ensimmäisen maailmasodan syttyminen johti Wienerin, Hardyn ja Littlewoodin omille teilleen. Wienerin ja Littlewoodin älykkyys valjastettiin hetkeksi sotakoneistojen tarpeisiin. Wiener tutki ballistiikkaa ja sähköistä tietoliikennettä, mistä jälkimmäinen johti hänen mielenkiintonsa Fourier-sarjoihin ja Fourier-integraaleihin. Littlewood oli myös tykistön palveluksessa. Hän kehitti Englannin ilmapuolustuksen tarkkuuden ja vihollisen havainnoinnin täysin uudelle tasolle. Samaan aikaan Hardy jatkoi tutkimuksiaan Cambridgessä, sillä terveydellisistä syistä häntä ei kelpuutettu asevoimien palvelukseen. Seuraavat vuodet olivat Hardylle erityisen raskaita. Hän oli suuri Saksan ja erityisesti saksalaisen tiedeyhteisön ihailija, mikä jätti hänet ajatuksineen sodanaikaisessa Englannissa varsin yksin. Sekä sodan syttymiseen että työtovereiden mielipiteisiin syvästi pettynyt Hardy siirtyi vuonna 1919 professoriksi Oxfordiin. Siellä hän tunsi itsensä huomattavasti onnellisemmaksi, mutta asetti vuonna 1931 matemaattiset syyt etusijalle ja lähti takaisin Cambridgeen. Vuodet, jolloin Hardy oli Oxfordissa ja Littlewood Cambridgessä, olivat välimatkasta huolimatta heidän yhteistyönsä parasta aikaa. Tuota aikaa Hardy kuvasi myöhemmin elämänsä onnellisimmaksi ajaksi. Myös maksimaalifunktion tutkimus ajoittuu juuri tälle ajalle. Näihin aikoihin Wiener matkusteli Yhdysvaltojen ja Euroopan väliä vieraillen etenkin Saksassa ja Englannissa. Wienerin tuolloisilla tutkimuksilla oli yhteyksiä varsin useisiin tieteenaloihin. Matematiikan ja sähkötekniikan lisäksi muun muassa kvanttimekaniikan tutkimus hyötyi hänen aikaansaannoksistaan. Wiener avioitui vuonna 1926 ja vietti tämän jälkeen pitkiä aikoja Yhdysvalloissa. Matematiikan tutkimuksen kannalta Wienerin parhaat vuodet osuivat 1930-luvun alkuun. On tuskin sattumaa, että juuri tuolloin hän vietti suurimman osan ajastaan Hardyn vieraana Cambridgessä.

Hardy, Littlewood ja Wiener olivat matemaattisilta taidoiltaan hyvin erilaisia, vaikka tutkivatkin usein samoja ongelmia mm. Riemannin zetafunktiota ja Fourier-sarjoja. Matemaattinen oivalluskyky oli Hardyn ja Wienerin vahvuuksia, kun taas Littlewoodilla lasku- ja todistustekniikat olivat hallussa paremmin kuin ehkä kenelläkään muulla. Ehkä juuri yhdistelmä teknistä taitoa ja matemaattista luovuutta johti eritoten Hardyn ja Littlewoodin hedelmälliseen yhteistyöhön. Jos Hardya ja Wieneriä yhdisti luovuus, niin paljon muuta yhteistä heillä ei ollutkaan. Siinä missä Hardy pystyi esittämään monimutkaisetkin ongelmat hämmästyttävän selkeästi, oli Wienerille yksinkertaistenkin asioiden selittäminen välillä lähes ylivoimaista. Hän saattoi pyöritellä triviaalin ongelman todistusta sivukaupalla ja seuraavaksi ohitti vaikean ongelman todistuksen kokonaan pitäen sitä itsestäänselvyytenä. Hänen töidensä epäselvyyttä lisäsi lukemattomat matemaattiset virheet ja kirjoitusvirheet. Lisäksi Wiener oli surkea keskustelija, sillä hän ei osannut kuunnella muita ja kuten Freudenthalin kerrotaan sanoneen: ”Hän puhui useita kieliä, mutta ei ollut helposti ymmärrettävissä yhdelläkään niistä.”[8] Ei siis ole yllätys, että hän oli kuuluisa surkeista luennoistaan. Hardya taas vastaavasti pidettiin huippuluennoitsijana.

Toisen maailmansodan syttyminen oli Hardylle kova isku. Sodan syttyminen romahdutti sekä Hardyn fyysisen että psyykkisen kunnon. Hän teki matematiikalle kuitenkin vielä yhden palveluksen: A mathematicians apology (1940). Siinä Hardy kertoo matemaatikon ajattelutavasta ja siitä mistä matemaatikko saa tyydytyksensä. Kirja oli toisaalta myös Hardyn matemaattinen testamentti, sillä rehellisenä miehenä hän myönsi menettäneensä sen kyvyn, mikä oli tehnyt hänestä yhden aikansa suurimmista matemaatikoista.

Sodan jo loputtua vuonna 1947 Hardy yritti lopettaa maalliset kärsimyksensä oman käden kautta siinä kuitenkaan onnistumatta. Hän ei yrittänyt uudestaan, koska ei selvästikään ollut hyvä siinä. Kauaa ei Hardyn tarvinnut kuolemaa kuitenkaan odottaa, sillä vielä samana vuonna tämä vannoutunut ateisti siirtyi vehreämmille niityille.

Toisin kuin Hardyn Littlewoodin matemaattiset taidot eivät iän myötä ruostuneet. Vielä yli 90 vuoden iässä hänellä riitti uusia ajatuksia. Edes paha masennus, josta hän kärsi koko pitkän elämänsä, ei tuhonnut hänen matemaattisia taitojaan – sosiaalisen elämän kylläkin. Kuolinpaikaksi näille molemmille suuruuksille merkittiin sama: Cambridge, Cambridgeshire, England. Wienerin kohdalla papereissa taas lukee Tukholma 1964. Kolmikko keräsi valtavasti erilaisia palkintoja ja huomionosoituksia. Suurin osa näistä tuli tietysti Englannista, mutta erityisesti pitkään elänyt Littlewood sai huomattavan määrän huomionosoituksia arvostetuista yliopistoista ympäri maailmaa.[8]

3 Maksimaaliongelma

Englantilaiset raskaan sarjan matemaatikot G. H. Hardy ja J. E. Littlewood julkaisivat vuonna 1930 matemaattisessa aikakausilehti *Acta Mathematicassa* 36-sivuisen artikkelin *A maximal theorem with function-theoretic application.* Tässä artikkelissa maksimaaliongelmaa lähestyttiin englantilaisittain kriketti-pelin termistöllä. Onkin luonnollista lähestyä tätä ongelmaa suomalaisittain käyttäen esimerkkinä pesäpalloa. Tarkemmin sanoen käytän esimerkkinä jokeripelaajan lyömiä juoksuja. Kauden aikana käytyjen otteluiden lyötyjä juoksuja kuvaa ei-negatiivisia lukuja sisältävä lukujoukko

$$a_1, a_2, \ldots, a_n. \tag{1}$$

Asetetaan nyt α_v kuvaamaan lyötyjen juoksujen keskiarvoa v:nnen ottelun jälkeen

$$\alpha_v = \frac{A_v}{v} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_v}{v}. \tag{2}$$

Olkoon $s(x)$ positiivinen kasvava funktio kaikilla x. Oletetaan vielä, että jokerinpelaajan tyytyväisyytteen vaikuttaa ainoastaan tuotujen juoksujen lukumäärä, ja että tuo tyytyväisyys v:nnen pelin jälkeen voidaan laskea funktiosta s,

$$s_v = s(\alpha_v). \tag{3}$$

Kauden jälkeinen ”kokonaityytyväisyys” S lasketaan yksittäisten pelien jälkeisten ”tyytyväisyystilanteiden” summana:

$$S = \sum s_v = \sum s(\alpha_v). \tag{4}$$

Lause 3.0.1. *Jos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat ei-negatiivisia satunnaisessa järjestyksessä olavia lukuja, $s(x)$ on mikä tahansa kasvava funktio ja α_v, s_v ja S ovat määriteltyjä kuten edellä (2),(3),(4), niin S saavuttaa maksimin, kun a_v:t on järjestetty vähenevään järjestykseen.*

Todistus ohitetaan, mutta helposti nähdään, että aina kun $a_\mu < a_v$ ja $\mu < v$, niin vaihtamalla termit a_μ ja a_v päittäin, termit $s_\mu, s_{\mu+1}, \ldots, s_{v-1}$ kasvavat ja loput pysyvät muuttumattomina, joten myös S kasvaa. Kun tätä jatketaan niin kauan, että $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_v$, niin tällöin S saavuttaa maksimin.

Tehdään pieni muutos keskiarvojen α_v määrittelyyn. Oletetaan, että α_v ei olekaan lyöjän koko kauden keskiarvo, vaan hänen keskiarvomaksiminsa v:hen päättyvistä yhtäjaksoisista peleistä:

$$\alpha_v = \frac{a_{v*} + a_{v*+1} + \cdots + a_v}{v - v* + 1} = \max_{\mu \leq v} \frac{a_\mu + a_{\mu+1} + \cdots + a_v}{v - \mu + 1}. \tag{5}$$

Sovitaan vielä, että jos $v*$ ei ole yksikäsitteinen, niin valitaan aina pienin vaihtoehto. Muiden termien määrittelyt olkoot samat kuin Lauseessa 1. Muutoksista huolimatta itse maksimaaliongelma säilyy muuttumattomana, joskin sen todistus on nyt huomattavasti monimutkaisempi.

Lause 3.0.2. *Jos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat ei-negatiivisia satunnaisessa järjestyksessä olevia lukuja, $s(x)$ on mikä tahansa kasvava funktio ja α_v määritelty kuten edellä (5) ja s_v ja S kuten jo aiemmin (3),(4), niin S saavuttaa maksimin, kun a_v:t on järjestetty vähenevään järjestykseen.*

Tässä yhteydessä Lauseen 3.0.2 todistus sivuutetaan. Alkuperäinen todistus (ks. [3] s. 84-91) on melko pitkällinen mutta selkeä. Lyhyemmän todistuksen on esittänyt mm. R. M. Gabriel (*Journal of the London Mathematical Society, 6 (1931)*).

Hardy ja Littlewood laajensivat maksimaaliongelmaa koskevien epäyhtälöiden tarkastelun äärellisistä summista integraaleihin. Tällöin yksittäisten juoksujen a_v tilalle asetetaan jatkuva, positiivinen ja rajoitettu funktio $f(x)$. Keskiarvojen α_v tilalle taas määritellään integraalikeskiarvo

$$A(x, \xi) = \frac{1}{x - \xi} \int_\xi^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad (0 \leq \xi \leq x); \qquad A(x, x) = f(x). \tag{6}$$

Lopullinen summan $S = \sum \alpha_v$ vastine on integraali yli jonkin välin $[0, a]$, missä a:n voidaan kuvitella vastaavan termien s_v määrää eli indeksiä v.

Kun määritellään vielä maksimaalifunktio θ seuraavasti

$$\theta(x) = \theta(x, f) = \max_{0 \leq \xi} A(x, \xi), \tag{7}$$

niin saadaan Lauseiden 3.0.1. ja 3.0.2. kanssa ekvivalentit lauseet:

Lause 3.0.3. *Jos* $s(x)$ *on jatkuva ja kasvava funktio ja* A *kuten edellä (6), niin*

$$\int_0^a s\big(A(x,0,f)\big)\,dx \leq \int_0^a s\big(A(x,0,f^*)\big)\,dx$$

ja

$$\int_0^a s\big(\theta(x,f)\big)\,dx \leq \int_0^a s\big(\theta(x,f^*)\big)\,dx,$$

missä f^* *on vähenevä ns. uudelleen järjestetty funktio f, jolle pätee* $\int \nu(f)\,dx = \int \nu(f^*)\,dx$*. Tämä on voimassa mille tahansa positiiviselle funktiolle* ν*, kunhan integraali on olemassa.*

Valitsemalla $s(x) = x^k$, missä $k > 1$, saadaan konstruoitua perustavanlaatuisia epäyhtälöitä. Viimeisenä viittauksena alkuperäiseen maksimaaliongelmaan tarkastellaan seuraavaa epäyhtälöä:

$$S = \sum_{v=1}^{n} \Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_v}{v}\Big)^k \leq \Big(\frac{k}{k-1}\Big)^k \sum_{v=1}^{n} a_v^k.$$

Ja vastaava epäyhtälö integraaleihin sovellettuna:

$$\int_0^a \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big)^k \mathrm{d}x \leq \Big(\frac{k}{k-1}\Big)^k \int_0^a f^k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause 3.0.4. *Jos* θ *on määritelty kuten edellä (7) ja* f *on ei-negatiivinen ja jatkuva, niin tällöin*

$$\int_0^a \theta^k(x)\,dx \leq \Big(\frac{k}{k-1}\Big)^k \int_0^a f^k(x)\,dx,$$

missä a voi olla joko ääretön tai äärellinen.

Lause 3.0.5. *Jos* θ *on määritelty kuten edellä (7) ja* f *on ei-negatiivinen ja jatkuva, niin tällöin*

$$\int_a^b \theta^k(x)\,dx \leq 2\Big(\frac{k}{k-1}\Big)^k \int_a^b f^k(x)\,dx,$$

missä a ja b voivat olla joko äärettömiä tai äärellisiä.[1]

[1] Todistus sivuutetaan tässä vaiheessa, koska se on sama kuin Lauseen 6.2.2. (c) todistus, kun integroidaan yli $\mathbb{R}$:n.

Jos $k = 1$, ei edellisten lauseiden konstruointi ole järkevä ja seuraava esimerkki todistaa, ettei ole olemassa vakiota, jolla niistä saataisiin järkeviä ja tosia.

Esimerkki 3.1. Olkoon $f(x) = x^{-1}(\log x^{-1})^{-2}$. Merkitään $g(x) = \log x^{-1}$, jolloin $g'(x) = -x^{-1}$ ja $f(x) = -g'(x)\big(g(x)\big)^{-2}$. Saadaan

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a -g'(x)\big(g(x)\big)^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 0} \Big/_0^a \big(g(x)\big)^{-1} = \lim_{b\to 0} \Big/_b^a \big(\log x^{-1}\big)^{-1}$$

$$= \lim_{b\to 0} \Big/_b^a \frac{1}{-\log x} = -\lim_{b\to 0}\Big(\frac{1}{\log a} - \underbrace{\frac{1}{\log b}}_{\to 0}\Big) = -\frac{1}{\log a} < \infty,$$

kun $a \in]0,1[$, eli integraali suppenee. Toisaalta

$$\int_0^a \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{x}\Big(-\frac{1}{\log x}\Big)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x.$$

Sijoitetaan $y = \log x$ ts. $x = e^y$. Tällöin $\mathrm{d}x = e^y\,\mathrm{d}y$ ja

$$-\int_0^a \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{b\to 0}\int_{\log b}^{\log a} \frac{e^y}{e^y y}\,\mathrm{d}y = -\lim_{b\to 0}\int_{\log b}^{\log a} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\lim_{b\to 0} \Big/_{\log b}^{\log a} \log|y|$$

$$= \lim_{b\to 0}(-\log|\log a| + \log\underbrace{|\log b|}_{\to\infty}) = \infty,$$

joten se hajaantuu, mikä johtaa ristiriitaan.

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $f(x)$, jolla integraali

$$\int_a^b |f|\log^+|f|\,\mathrm{d}x$$

on olemassa äärellisellä välillä $[a,b]$. Merkintä $\log^+|f|$ tarkoittaa: $\log^+|f| = \log|f|$, kun $|f| \geq 1$ ja muulloin $\log^+|f| = 0$.

Lause 3.0.6. *Jos θ on määritelty kuten edellä (7) ja f on ei-negatiivinen ja jatkuva, niin tällöin*

$$\int_a^b \theta\,dx \leq B\int_a^b f\log^+ f\,dx + B,$$

missä $B = B(a,b)$ on riippuvainen ainoastaan a:sta ja b:stä.

Hardyn ja Littlewoodin oppilas ja työtoveri Norbert Wiener laajensi myöhemmin maksimaalifunktion tarkastelun $\mathbb{R}$:stä $\mathbb{R}^n$:ään. Maksimaalifunktioon palataan tarkemmin kappaleessa 6. Sitä ennen käydään läpi maksimaalifunktion tarkastelussa välttämättömät L^p-avaruudet sekä hyödyllinen $5r$-peitelause.

4 L^p-avaruudet

4.1 Mitallisuus

Määritelmä 4.1.1. Olkoon Γ joukon X σ-algebra eli

1. $\emptyset \in \Gamma$
2. $A \in \Gamma \Rightarrow A^{\complement} \in \Gamma$
3. $A_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$.

Nyt funktio $\mu : \Gamma \to [0, +\infty]$ on *mitta* joukossa Γ, jos

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) μ on numeroituvasti additiivinen, eli

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

aina, kun $A_i \in \Gamma$, $i \in \mathbb{N}$ ja $A_i \cup A_j = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$.

Kolmikkoa (X, Γ, μ) sanotaan *mitta-avaruudeksi* ja Γ:aa μ-mitallisten joukkojen perheeksi.

Määritelmä 4.1.2. Olkoon $\mathcal{P}(X)$ kaikkien X:n osajoukkojen joukko. Funktiota $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ sanotaan *ulkomitaksi* joukossa X, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. μ^* on monotoninen, eli $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ aina, kun $A \subset B$
3. μ^* on numeroituvasti subadditiivinen, eli

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Määritelmä 4.1.3. Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X. Joukkoa $E \subset X$ sanotaan *mitalliseksi ulkomitan μ^* suhteen*, eli μ^*-mitalliseksi, jos seuraava ns. Carathéodoryn ehto, on voimassa:

$$\mu^*(A) = \mu^*\big(A \cap E\big) + \mu^*\Big(A \cap E^{\complement}\Big) \quad \text{aina, kun} \quad A \subset X. \tag{8}$$

Ulkomitalle μ^* nollamittaiset joukot ovat aina μ^*-mitallisia, mutta mitta-avaruudessa (X, Γ, μ) Γ ei välttämättä sisälläkään kaikkia μ-nollamittaisten joukkojen osajoukkoja. Jos tätä epäkohtaa ei ole, sanotaan mittaa μ *täydelliseksi*. Tällöin

$$E \in \Gamma,\ \mu(E) = 0,\ F \subset E \ \Rightarrow\ F \in \Gamma.$$

Myös $\mu(F) = 0$, sillä μ on monotoninen. Nollamittaisten joukkojen osajoukot ovat siis aina nollamittaisia. Kaikki epätäydelliset mitat voidaan täydentää täydellisiksi ja esimerkiksi Lebesguen mitta on valmiiksi täydellinen.

Ulkomitan rajoittuma mitallisia joukkoja sisältävään σ-algebraan antaa aina mitta-avaruuden $(X, \Gamma, \mu^*|_\Gamma)$.

Määritelmä 4.1.4. Olkoon $A \subset X$ μ-mitallinen joukko (μ täydellinen). Funktio $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ on *mitallinen*, jos

$$f^{-1}(\pm\infty) \in \Gamma \quad \text{ja} \quad f^{-1}(U) \in \Gamma \qquad \forall\, U \subset \mathbb{R}, \quad \text{missä } U \text{ on avoin.}$$

4.2 L^1- ja L^∞-avaruudet

Muistutus funktioiden integroituvuudesta:
Mitallinen funktio $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on integroituva, jos

$$\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{ja} \quad \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Merkitään:

$L^1(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ mitallinen ja } \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty\}$
eli $f \in L^1 \iff f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on integroituva.

Jos $f, g \in L^1$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin $af + bg \in L^1$, joten L^1 on vektoriavaruus.

Merkitään vielä:

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$$

Nyt $\|f\|_1$ on seminormi, sillä $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ melkein kaikialla.

Esimerkki 4.1. Olkoon $X = \mathbb{R}$, $\mu = m$ (Lebesguen mitta) ja $f = \chi_{\mathbb{Q}}$.

$$\Rightarrow \quad \|f\|_1 = 0, \quad \text{mutta} \quad f \neq 0.$$

Seuraava määritelmä on ensiarvoisen tärkeä L^p-avaruuksia käsiteltäessä!

Määritelmä 4.2.1. Funktiot $f, g \in L^1$ ovat *ekvivalentit*, merkitään $f \sim g$, jos $f = g$ melkein kaikkialla. Merkitään:

$$[f] = \widetilde{f} = \{g \in L^1 \mid g \sim f\} = f\text{:n ekvivalenssiluokka}$$
$$\widetilde{L}^1 = \{\widetilde{f} \mid f \in L^1\}$$

Nyt $\widetilde{L}^1$ on vektoriavaruus ja $\|\widetilde{f}\|_1 := \|f\|_1$ on sen normi.

Tämä on hyvin määritelty, sillä se ei riipu edustajasta f. Jatkossa puhutaan vain L^1- tai L^p-avaruuksista ja pelkistä funktioista, koska funktiot, jotka yhtyvät melkein kaikkialla on samaistettu.

Nyt, jos $[f] = [g]$ ja $f(x) \neq g(x)$, kun $x \in A \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0$.

Määritelmä 4.2.2. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen. Määritellään L^∞*-normi oleellisena supremumina*:

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf\{\alpha \geq 0 \mid \mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) = 0\} \\ &= \inf\{\alpha \geq 0 : |f(x)| \leq \alpha, \text{ m.k. } x \in X\} \end{aligned}$$

ja $|f| \leq \|f\|_\infty$.

L^∞-avaruus määritellään normin $\|f\|_\infty$ avulla:

$$L^\infty = L^\infty(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ mitallinen ja } \|f\|_\infty < \infty\}$$

Samaistetaan $f, g \in L^\infty$, jos $f = g$ melkein kaikkialla.

Lause 4.2.1. *L^∞ on normiavaruus ja $\|\cdot\|_\infty$ on sen normi.*

Todistus.

i) L^∞ on vektoriavaruus (ks. iv)

ii) $\|f\|_\infty \geq 0 \quad$ ja $\quad \|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$ m.k.

iii) $|\lambda f|_\infty = \|\lambda\| \|f\|_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

iv) Kolmioepäyhtälö:

$$\left.\begin{array}{r} |f| \leq \|f\|_\infty \text{m.k.} \\ |g| \leq \|g\|_\infty \text{m.k.} \end{array}\right\} \Rightarrow |f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ m.k.}$$

$$\Rightarrow \quad \mu\big(\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}\big) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \Rightarrow \quad f + g \in L^\infty. \quad \square$$

4.3 L^p-avaruudet, $\quad 1 \leq p < \infty$

Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, missä μ on täydellinen.

Määritelmä 4.3.1. Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen. Määritellään L^p-*normi* seuraavasti:

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p}.$$

Nyt

$$L^p(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ mitall. ja } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}.$$

Samaistukset kuten edellä.

Lause 4.3.1. *Jos $\mu(X) < \infty$ ja $1 \leq q \leq p$, niin $L^p(X) \subset L^q(X)$. Inkluusio on aito, jos $0 < \mu(X) < \infty$ ja $p > q$.*

Todistus. Olkoon $p = \infty$. Jos $f \in L^\infty$, niin

$$\int_X |f|^q \, d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^q \, d\mu = \|f\|_\infty^q \mu(X).$$

Näin ollen $f \in L^q$. Tapaus $p < \infty$ ohitetaan, mutta se on helppo todistaa esimerkiksi *Hölderin epäyhtälön* ja *konjugoitujen eksponenttien* avulla.

Esimerkki 4.2. Olkoon $X =]0,1[$, $\mu = m|_{[0,1]}$ Lebesguen mitta. Jos f on mitallinen ja rajoitettu, niin $f \in L^p \quad \forall\, p \geq 1$.

$$\text{Olkoon} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}.$$

Silloin

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 x^{-p/2} \, d\mu = \begin{cases} \lim\limits_{a \to 0+} \frac{1}{1-\frac{p}{2}} \Big/_a^1 x^{1-p/2} = \frac{1}{1-\frac{p}{2}} < \infty, & \text{jos } p < 2 \\ \lim\limits_{a \to 0+} \frac{1}{1-\frac{p}{2}} \Big/_a^1 x^{1-p/2} = \infty, & \text{jos } p > 2 \\ \lim\limits_{a \to 0+} \Big/_a^1 = \infty, & \text{jos } p = 2 \end{cases}$$

$$f \in L^p \iff 1 \leq p < 2.$$

Eksponentilla p on siis suuri vaikutus siihen, mitkä funktiot kuuluvat avaruuteen $L^p(X)$.

4.4 Tärkeitä epäyhtälöitä

Tavoitteena on todistaa, että L^p on normiavaruus. Tavoitteen saavuttamiseen tarvitsemme Hölderin ja Minkowskin perustavanlaatuiset epäyhtälöt. Todistetaan kuitenkin ensin yksinkertainen Youngin epäyhtälö, joka liittyy L^p-avaruuksissa hyvin käyttökelpoisiin konjugoituihin eksponentteihin.

Lemma 4.4.1 (Youngin epäyhtälö). *Jos* $a, b \in [0, \infty]$ *ja* $p, q > 1$ *siten, että* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, niin*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{9}$$

Todistus. Konstruoidaan funktio f seuraavasti:

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb.$$

Tällöin

$$f(b^{\frac{1}{p-1}}) = f'(b^{\frac{1}{p-1}}) = 0.$$

Nyt

$$0 = \frac{(b^{\frac{1}{p-1}})^p}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{1}{p-1}} b \overset{(b^{\frac{1}{p-1}} \to a)}{\leq} \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$

Lisäämällä ab molemmille puolille saadaan

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \square$$

Lause 4.4.1 (Hölderin epäyhtälö). *Jos*

$$p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ ja } f \in L^p, \quad g \in L^q, \text{ niin}$$

$$fg \in L^1 \quad \text{ja} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{10}$$

Todistus. Jos $\|f\|_p = 0$, niin $f = 0$ m.k. ja $\|fg\|_1 = 0$, joten asia on selvä ja $\|g\|_q = 0$ samoin. Voidaan olettaa $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$. Oletetaan myös, että $f(x), g(x) \in \mathbb{R}\ \forall x$. Olkoon

$$\alpha = \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \quad \text{ja} \quad \beta = \Big(\int_X |g|^q \, d\mu \Big)^{1/q} \tag{11}$$

sekä

$$a = \frac{f(x)}{\alpha} \quad \text{ja} \quad b = \frac{g(x)}{\beta}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha\beta}\int_X fg\,\mathrm{d}\mu &= \int_X \overbrace{\frac{f(x)}{\alpha}}^{a}\overbrace{\frac{g(x)}{\beta}}^{b}\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Young}}{\leq} \int_X \Big(\frac{1}{p}(\frac{f(x)}{\alpha})^p + \frac{1}{q}(\frac{g(x)}{\beta})^q\Big)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{p}\frac{\int_X f(x)^p\,\mathrm{d}\mu}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_X g(x)^q\,\mathrm{d}\mu}{\beta^q} \overset{(11)}{=} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

Kertomalla molemmat puolet termillä $\alpha\beta$ saadaan

$$\int_X fg\,\mathrm{d}\mu \leq \big(\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\big)^{1/p}\big(\int_X |g|^q\,\mathrm{d}\mu\big)^{1/q},$$

eli

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q. \quad \square$$

Lause 4.4.2 (Minkowskin epäyhtälö). *Jos $f, g \in L^p$, niin $f + g \in L^p$ ja*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q. \tag{12}$$

Todistus. Helposti nähdään, että $|f+g|^{p-1} \in L^q$. Todistuksen loppuosassa käytetään Hölderin epäyhtälön lisäksi vanhaa tuttua kolmioepäyhtälöä:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p &\overset{\Delta\text{e.y.}}{\leq} \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p\Big(\int \big(|f+g|^{p-1}\big)^q\Big)^{1/q} + \|g\|_q\Big(\int \big(|f+g|^{p-1}\big)^q\Big)^{1/q} \\ &= \|f\|_p\Big(|f+g|^p\Big)^{1/q} + \|g\|_q\Big(|f+g|^p\Big)^{1/q} \\ &= \big(\|f\|_p + \|g\|_q\big)\|f+g\|_p^{p/q\,(=p-1)}. \qquad \Big| : \|p+g\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

Täten $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q$. $\square$

Nyt on todistettu, että L^p on normiavaruus normina $\|\cdot\|_p$. Itse asiassa L^p on täydellinen normiavaruus eli Banach-avaruus.

Määritelmä 4.4.1. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus. Sanomme, että funktiojono (f_i) *suppenee L^p:ssä* funktioon f, jos

$$\|\underbrace{f_i}_{\in L^p} - \underbrace{f}_{\in L^p}\|_p = 0, \text{ kun } i \to \infty.$$

Lause 4.4.3. *Jos* (f_i) *on Cauchy-jono* L^p*:ssä,* $1 \le p \le \infty$*, niin lyötyy osajono* (f_{i_k})*, joka suppenee m.k.*

Todistus. Jokaista $k \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa i_k siten, että

1) $\|f_i - f_j\|_p < \frac{1}{2^k}, \quad$ kun $i, j \ge i_k$

2) $i_1 < i_2 \cdots$

Voidaan olettaa, että $f(x), f_i(x) \in \mathbb{R}$. Asetetaan

$$g_k = |f_{i_1}| + |f_{i_2} - f_{i_1}| + \cdots + |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}|.$$

Koska (g_k) on kasvava jono, on olemassa $g = \lim_{k\to\infty} g_k$. Toisaalta kaikilla k

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_p &= \||f_{i_1}| + \sum_{v=1}^{k} |f_{i_{v+1}} - f_{i_v}|\|_p \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\le} \|f_{i_1}\|_p + \sum_{v=1}^{k} \|f_{i_{v+1}} - f_{i_v}\|_p \\
&\le \|f_{i_1}\|_p + \sum_{v=1}^{k} \frac{1}{2^v} \le \|f_{i_1}\|_p + 1.
\end{aligned}$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int g^p \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{k\to\infty} \int g_k^p = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p \le (\|f_{i_1}\| + 1)^p < \infty,$$

joten

$$g(x) < \infty \quad \text{m.k.}$$

Nyt sarja $f_{i_1}(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \big(f_{i_{v+1}}(x) - f_{i_v}(x)\big)$ suppenee melkein kaikilla x. Merkitään summaa $f(x)$:llä. Saadaan

$$f_{i_{k+1}} = f_{i_1} + \sum_{v+1}^{k} (f_{i_{v+1}} - f_{i_v}) \to f \quad \text{m.k.} \quad \square$$

Huomautus. L^2 on peräti Hilbert-avaruus, sillä sen normi tulee sisätulosta

$$< f, g >= \int_X f g \, d\mu, \quad \text{kun} \quad f, g \in L^2(X).$$

Lause 4.4.4. *Jatkuvat funktiot ovat tiheässä L^p:ssä. Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\lim_{k\to\infty} h_k = h$ ja*

$$\lim_{k\to\infty} \|f - h_k\|_p = 0.$$

Todistus. Olkoon $g_k : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ jono jatkuvia funktioita, joiden kantajat ovat kompaktissa pallossa $\overline{B}(0, 1/k)$. Olkoon lisäksi

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k = 1.$$

Määritellään funktiojono h_k funktioiden f ja g_k *konvoluutiona* eli olkoon

$$h_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g_k(y)\,\mathrm{d}y.$$

Selvästi h_k on myös jatkuva kaikilla k. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} f(x) - h_k(x) &= f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g_k(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_k(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g_k(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y)) g_k(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

joten

$$|f(x) - h_k(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| g_k(y)\,\mathrm{d}y.$$

Olkoon $p > 1$, jolloin

$$\begin{aligned} |f(x) - h_k(x)|^p &\leq \left(\int_{R^n} (f(x) - f(x-y)) g_k(y)\,\mathrm{d}y \right)^p \\ &= \left(\int_{R^n} |(f(x) - f(x-y)| g_k(y)^{1/p} g_k(y)^{1/q}\,\mathrm{d}y \right)^p \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int_{R^n} |f(x) - f(x-y)|^p g_k(y)\,\mathrm{d}y \left(\int_{R^n} \left(g_k(y)^{1/q} \right)^q \mathrm{d}y \right)^{p/q} \\ &= \int_{R^n} |f(x) - f(x-y)|^p g_k(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Tällöin $\forall p \geq 1$

$$\begin{aligned}\|f-h_k\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-h_k(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{R^n} \left(\int_{R^n} |f(x)-f(x-y)|^p g_k(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{R^n} g_k(y) \left(\int_{R^n} |f(x)-f(x-y)|^p \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Koska g_k:n kantaja on pallossa $\overline{B}(0,1/k)$, voidaan olettaa, että sisemmässä integraalissa $|y| \leq 1/k$. Osoitetaan seuraavaksi, että

$$\int_{R^n} |f(x)-f(x-y)|^p \,\mathrm{d}x \to 0, \quad \text{kun} \quad k \to \infty. \tag{13}$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Todistetaan, että on olemassa $\eta > 0$ siten, että jos $|y| < \eta$, niin

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)-f(x-y)|^p \,\mathrm{d}x < \epsilon.$$

Merkitään

$$\begin{aligned}I_y(A) &= \int_A |f(x)-f(x-y)|^p \,\mathrm{d}x, \quad A \in \mathbb{R}^n, \\ B_i &= B(0,i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < i\}, \quad i > 1.\end{aligned}$$

Olkoon $y \in B(0,1)$. Tällöin $|x| > i$, joten $|x-y| \geq i-1$. Dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_i} |f(x)-f(x-y)|^p \,\mathrm{d}x \\ \leq &\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_i} 2^p \big(|f(x)|^p + |f(x-y)|^p\big) \,\mathrm{d}x \\ \leq &2^p \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_i} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{i-1}} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right) \xrightarrow{\text{DKL}} 0, \quad \text{kun } i \to \infty.\end{aligned}$$

Täten on olemassa i siten, että

$$I_y\big(\mathbb{R}^n \setminus B_i\big) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Samoin

$$I_y(A) \leq 2^p \bigg(\int_{A+h} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x + \int_A |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \bigg),$$

kun $A \in \mathbb{R}^n$ ja $A + h = \{a + h : a \in A\}$.

Integraali on absoluuttisesti jatkuva mitan suhteen, joten on olemassa $\delta < 0$ siten, että

$$I_y(A) \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{kun } \mu(A) < \delta.$$

Lusinin lauseen nojalla on olemassa kompakti $\mathcal{F} \subset B_{i+1}$ siten, että

$$\mu(B_{i+1} \setminus \mathcal{F}) < \delta \quad \text{ja} \quad f|_{\mathcal{F}} \text{ on tasaisesti jatkuva.}$$

Tällöin on olemassa $\eta \in]0,1[$ siten, että

$$|f(x) - f(x-y)|^p < \frac{\epsilon}{4\mu(\mathcal{F})}, \quad \text{kun} \quad |y| < \eta \ \text{ ja } \ x, x-y \in \mathcal{F}.$$

Olkoon $y \in B(0,\eta)$ mielivaltainen. Merkitään

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{x \in \mathcal{F} : x - y \in \mathcal{F}\}, \\
A_2 &= \{x : x - y \in B_{i+1} \setminus \mathcal{F}\}, \\
A_3 &= B_{i+1} \setminus \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Nyt $A_2 = A_3 - y$, joten $\mu(A_2) = \mu(A_3) = \mu(B_{i+1} \setminus \mathcal{F}) < \delta$. Tällöin, jos $x \in B_i$, niin $x - y \in B_{i+1}$, joten

$$\begin{gathered}
B_i \cap \mathcal{F} \subset \{x \in \mathcal{F} : x - y \in B_{i+1}\} \\
\subset \underbrace{\{x \in \mathcal{F} : x - y \in \mathcal{F}\}}_{=A_1} \cup \underbrace{\{x \in \mathcal{F} : x - y \in B_{i+1} \setminus \mathcal{F}\}}_{\subset A_2} \subset A_1 \cup A_2.
\end{gathered}$$

Nyt

$$B_i = \underbrace{(B_i \setminus \mathcal{F})}_{\subset A_3} \cup \underbrace{(B_i \cap \mathcal{F})}_{\subset A_1 \cup A_2} \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

ja $\mathbb{R}^n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup (\mathbb{R}^n \setminus B_i)$, mistä seuraa, että

$$I_y(\mathbb{R}^n) \leq I_y(A_1) + I_y(A_2) + I_y(A_3) + I_y(\mathbb{R}^n \setminus B_i).$$

Approksimoidaan oikean puolen termejä:

i) $I_y(A_1) = \displaystyle\int_{A_1} \underbrace{|f(x) - f(x-y)|^p}_{< \frac{\epsilon}{4\mu(\mathcal{F})}} \,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{4}$

ii) $I_y(A_2) < \dfrac{\epsilon}{4}$

iii) $I_y(A_3) < \dfrac{\epsilon}{4}$

iv) $I_y(\mathbb{R}^n \setminus B_i) < \dfrac{\epsilon}{4}$.

Yhdistämällä kohdat $i), ii), iii)$ ja $iv)$ saadaan

$$I_y(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p \,\mathrm{d}x < \epsilon \quad \square_{(13)}.$$

Nyt

$$\|f - h\|_p = \lim_{k\to\infty} \|f - h_k\|_p \leq \lim_{k\to\infty} \|f - h_k\|_p^p = 0. \quad \square$$

Määritelmä 4.4.2. Sanotaan, että funktio f on *lokaalisti integroituva* eli $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, jos $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen ja

$$\int_K |f| < \infty \quad \forall \text{ kompaktilla} \quad K \subset \mathbb{R}^n.$$

Huomautus. Olkoon $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Merkitään $\overline{B}_i = \overline{B}(0,i)$, $i \in \mathbb{N}$, jolloin $\overline{B}_i$ on pallo $\mathbb{R}^n$:ssä. Tällöin

$$\int_{\overline{B}_i} f = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{\overline{B}_i}. \tag{14}$$

Tarkasteltaessa funktion f ominaisuuksia pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä ei ole merkitystä tarkastellaanko funktiota f vai funktiota $f\chi_{\overline{B}(0,i)}$, missä $i > 2|x|$. Tällaisissa tapauksissa voidaan huoletta olettaa, että $f \in L^1$.

5 $5r$-peitelause

Tässä kappaleessa esitetään ja todistetaan $5r$-peitelause, jota joissain lähteissä kutsutaan myös peruspeitelauseeksi. Lausetta tullaan tarvitsemaan myöhemmin todistettaessa maksimaalifunktion keskeisiä ominaisuuksia.

Lause 5.0.5 ($5r$-peitelause). *Olkoon F mielivaltainen perhe $\mathbb{R}^n$:n kuulia siten, että*

$$D = \sup\{d(B) : B \in \mathcal{F}\} < \infty,$$

missä $d(B)$ on B:n halkaisija. Tällöin on olemassa numeroituva perhe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ siten, että

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall B_i, B_j \in \mathcal{G}, \quad B_i \neq B_j, \quad \text{(ts. } \mathcal{G}\text{:n kuulat erill.), ja}$$
$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B.$$

Todistus. Suoritetaan todistus kolmessa osassa.
Osa I: Merkitään

$$\mathcal{F}_j = \{B \in \mathcal{F} : D/2^j < d(B) \leq D/2^{j-1}\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

jolloin $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$.

Määritellään perheet $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$ induktiivisesti:

(a) Olkoon $\mathcal{G}_1$ mikä tahansa *maksimaalinen* perhe $\mathcal{F}_1$:n erillisiä kuulia, ts.

$$B \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \nexists B' \in \mathcal{G}_1 \quad \text{siten, että} \quad B \cap B' \neq \emptyset.$$

(b) Oletetaan, että $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{k-1}$ on valittu. Olkoon $\mathcal{G}_k$ mikä tahansa *maksimaalinen* kokoelma $\mathcal{F}_k$:n erillisiä kuulia B siten, että

$$B \cap B' = \emptyset \quad \forall B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{G}_j.$$

Merkitään

$$\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j, \quad \text{jolloin } \mathcal{G} \text{ on perhe erillisiä kuulia.}$$

Osa II: Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{G}_j$ on numeroituva $\forall j$. Tällöin myös $\mathcal{G}$ on numeroituva. Mekitään

$$\mathcal{G}_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_{j,i}, \quad \text{missä} \quad \mathcal{G}_{j,i} = \{B \in \mathcal{G}_j : B \subset B^*(0,i)\},$$

ja osoitetaan, että $\mathcal{G}_{j,i}$ on äärellinen, jolloin $\mathcal{G}_j$:t ovat numeroituvia.

$$\left.\begin{array}{r} B \in \mathcal{G}_{j,i} \Rightarrow d(B) > D/2^j \quad \text{ja} \quad B \subset B^*(0,i) \\ B^*(0,i) \quad \text{kompakti} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_{j,i} \quad \text{äärellinen.}$$

Osa III: Osoitetaan, että jokaista $B \in \mathcal{F}$ kohti on olemassa $B' \in \mathcal{G}$ siten, että $B \cap B' \neq \emptyset$ ja $B \subset 5B'$, jolloin

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B.$$

Jos $B \in \mathcal{F}$, niin $B \in \mathcal{F}_k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Jos $\mathcal{G}_k$ on maksimaalinen, niin on olemassa $B' \in \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{G}_j$ siten, että $B \cap B' \neq \emptyset$. Toisaalta

$$\left.\begin{array}{r} d(B') > D/2^k \quad \text{ja} \quad d(B) \leq D/2^{k-1} \Rightarrow d(B) < 2d(B') \\ B \cap B' \neq \emptyset \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad B \subset 5B'. \quad \square$$

6 Hardy-Littlewood-maksimaalifunktio

6.1 Integraalin esityslause

Aloitetaan tarkastelemalla hyödyllistä Lebesguen määrittelemää *integraalin esityslausetta*. Siirrytään samalla käyttämään yleisen mitan sijaan kyseisen miehen omaa mittaa, Lebesguen mittaa.[2] Käytetään yksinkertaisuuden vuoksi myös Lebesguen mitasta symbolia μ. (Voimassa vain kappaleessa 6.)

Lause 6.1.1 (Integraalin esityslause). *Olkoon $f : X \to [0, \infty]$ mitallinen, $X \in M_\mu$. Tällöin*

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \mu\big(\{x : f(x) > t\}\big) \, dt,$$

missä M_μ on kaikkien μ-mitallisten joukkojen kokoelma.

Funktiota $\lambda(t) = \mu\big(\{x : f(x) > t\}\big),\ t > 0$, sanotaan f:n *distribuutiofunktioksi*. Se on vähenevä ja näin ollen Riemann-integroituva suljetuilla $[0, \infty[$:n osaväleillä.

Todistus. Olkoon u positiivinen, yksinkertainen funktio, jolle

$$u(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j \chi_{X_j}(x),$$

missä $X_j \in M_\mu$ ovat pareittain pistevieraita ja $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_k$. Induktiolla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu\big(\{x \in X : u(x) > t\}\big) \, \mathrm{d}t &= \int_0^{c_k} \mu\big(\{x \in X : u(x) > t\}\big) \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{c_{j-1}}^{c_j} \mu\big(\{x \in X : u(x) > t\}\big) \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^{k} (c_j - c_{j-1}) \mu(\bigcup_{i=j}^{k} A_i \cap A) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (c_j - c_{j-1}) \sum_{i=j}^{k} \mu(A_i \cap A) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu(A_i \cap A) \sum_{i=1}^{j} (c_j - c_{j-1})
\end{aligned}$$

[2] Lebesguen mitan määritelmä löytyy mm. Brucknerin [1] kirjasta.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k} c_j \mu(A_i \cap A) \\
&= \int_X u \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}
$$

Valitaan sitten u_i:t siten, että $\lim_{j\to\infty} u_j(x) = f(x)$. Tällöin myös u_j:den distribuutiofunktiot muodostavat nousevan jonon siten, että

$$\lambda_j(t) = \mu\big(\{x \in X : u_j(x) > t\}\big)$$

ja

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_j(t) = \lambda(t) = \mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big).$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big)\,\mathrm{d}t &= \lim_{j\to\infty} \int_0^\infty \mu\big(\{x \in X : u_j(x) > t\}\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_X u_j \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu. \quad \square
\end{aligned}
$$

Lause 6.1.2. *Olkoon $0 < p < \infty$ ja $f : X \to [0, \infty]$ mitallinen. Tällöin*

$$\int_X f^p \, d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big)\, dt. \tag{15}$$

Todistus. Käytetään todistuksessa sijoitusta $s = t^p$, jolloin $\mathrm{d}s = (pt^{p-1})\,\mathrm{d}t$. Saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_0^\infty \mu\big(\{x \in X : f^p(x) > s\}\big)\,\mathrm{d}s \\
&=^{\text{sij.}} \int_0^\infty \mu\big(\{x \in X : \underbrace{f^p(x) > t^p}_{\Rightarrow f(x) > t}\}\big)(pt^{p-1})\,\mathrm{d}t \\
&= p \int_0^\infty t^{p-1} \mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big)\,\mathrm{d}t. \quad \square
\end{aligned}
$$

Distribuutiofunktiolle löydetään heti myös käytännön sovellus.

Lause 5.1.3 (Chebyshevin epäyhtälö). Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\lambda(t) \le \frac{A}{t}, \quad \text{missä} \quad A = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \,\mathrm{d}y. \tag{16}$$

Todistus. Helposti nähdään, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,\mathrm{d}y \geq \int_{|f|>t} |f(y)|\,\mathrm{d}y \geq t\lambda(t),$$

mikä todistaakin lauseen. $\square$

6.2 Maksimaalifunktio

Lebesguen differentioituvuuslauseen mukaan

Lause 6.2.1. *Jos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, niin*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x) \tag{17}$$

melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Lauseen todistukseen palataan kappaleen lopussa.

Tehdään pieniä muutoksia yllä olevan lauseen vasempaan puoleen. Otetaan rajankäynnin "$\lim_{r\to 0}$" sijaan supremum yli $f(y)$:n integraalikeskiarvon. Koska tässä yhteydessä kiinnostuksen kohde on lähinnä funktion f suhteellinen koko, niin vaihdetaan f:n tilalle $|f|$, jolloin pääsemme eroon integraalien kannalta hiukan kiusallisista negatiivisista arvoista. Näin meillä on kaikki eväät maksimaalifunktion määrittelyyn.

Määritelmä 6.2.1. Kun $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ja $x \in \mathbb{R}^n$, asetetaan

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{18}$$

Funktio Mf on *maksimaalifunktio.*[3]

Huomautus. Mf on ns. keskitetty maksimaalifunktio. Esim Holopaisen luentomonisteessa [4] supremum otetaan yli minkä tahansa kuulan B_x, joka sisältää x:n siten, että

$$M^*(f)(x) = \sup_{x\in B_x} \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Koska $M(f)(x) \leq M^*(f)(x) \leq 2^n M(f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, on yleensä samantekevää kumpaa käytetään.

Alustavien lauseiden ja määritelmien pohjalta päästään ensimmäiseen maksimaalifunktiota koskevaan lauseeseen. Se onkin tämän työn tärkein yksittäinen lause ja sen todistus tämän työn ydintavoite.

[3] Vertaa kappaleessa 3 esiteltyyn alkuperäiseen maksimaalifunktioon $\theta(x)$.

Lause 6.2.2. *Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, *niin funktio* Mf *on äärellinen melkein kaikkialla.*

(b) Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *niin jokaiselle* $t > 0$

$$\mu\big(\{x : M(f)(x) > t\}\big) \le \frac{A}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f|\, dx,$$

missä A *on ainostaan ulottuvuudesta* n *riippuva vakio* ($A = 5^n$ *kelpaa).*

(c) Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *ja* $1 < p < \infty$, *niin* $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *ja*

$$\|Mf\|_p \le A_p \|f\|_p,$$

missä A_p *on ainoastaan potenssista* p *ja ulottuvuudesta* n *riipuva vakio.*

Ennen lauseen todistusta todistetaan, että kohdassa (c) Mf on integroituva eli $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$ vain, jos $f = 0$ m.k. Tällöin triviaalisti $\int_{\mathbb{R}^n} |f| = 0$. Esitietona: $\mu\big(B(x,r)\big) = c_n r^n$, missä c_n on ulottuvuudesta n riipuva vakio. Olkoon

$$\underbrace{\int_{B(x,r)} |f(y)|\, \mathrm{d}y}_{I} > 0.$$

Jos $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(x,R)$, niin $B(x,R) \subset B(x, 2|x|)$ ja

$$Mf \ge \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,2|x|)} |f(y)|\, \mathrm{d}y \ge \frac{1}{c_n(2|x|)^n} \underbrace{\int_{B(0,R)} |f(y)|\, \mathrm{d}y}_{=I>0}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} M(f)(x)\, \mathrm{d}x \ge I \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} c_n^{-1}(2|x|)^{-n}\, \mathrm{d}x = \infty,$$

sillä

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} c_n^{-1}(2|x|)^{-n}\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{B(0,2^{i+1}R)\setminus B(0,2^i R)} \underbrace{c_n^{-1}(2|x|)^{-n}}_{\ge c_n^{-1}(2^{i+2}R)^{-n}}$$

$$\ge \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\mu\big(B(0,2^{i+1}R) \setminus B(0,2^i R)\big)}_{=c_n((2^{i+1}R)^n - (2^i R)^n)} c_n^{-1}(2^{i+2}R)^{-n}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n - 1}{4^n}}_{=c>0} = \sum_{i=0}^{\infty} c = \infty.$$

Todistus. Aloitetaan todistus kohdasta (b). Kiinnitetään $t > 0$ ja merkitään $M_t = \{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > t\}$. Tällöin $\forall x \in M_t$ on olemassa kuula B_x siten, että

$$\frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_t} |f(y)| \,\mathrm{d}y > t.$$

Toisin sanoen

$$\mu(B_t) < \frac{1}{t} \int_{B_t} |f(y)| \,\mathrm{d}y \qquad \Big(\leq \frac{\|f\|_1}{t} \Big). \tag{19}$$

Olkoon $\mathcal{F} = \{B_x : x \in M_t\}$, jolloin triviaalisti

$$M_t \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

Koska $\mu(B_x) = c_n \big(d(B_x)/2\big)^n$, niin (17):sta saadaan

$$\sup\{d(B_x) : B_x \in \mathcal{F}\} \leq 2 \Big(\frac{\|f\|_1}{c_n t} \Big)^{1/n} < \infty.$$

[4] $5r$-peitelauseen nojalla on olemassa numeroituva osaperhe $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \dots\} \subset \mathcal{F}$ erillisiä avoimia kuulia siten, että

$$M_t \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B_i \in \mathcal{G}} 5B_i.$$

Siten

$$\begin{aligned} \mu(M_t) \leq \mu(\cup_i 5B_i) &\overset{\text{numer.yhd.}}{\leq} \sum_i \mu(5B_i) = 5^n \sum_i \mu(B_i) \\ &\overset{(17)}{\leq} 5^n \sum_i \frac{1}{t} \int_{B_i} |f(y)| \,\mathrm{d}y \overset{B_i\text{:t erill.}}{=} \frac{5^n}{t} \int_{\cup_i B_i} |f(y)| \,\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{5^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \,\mathrm{d}y. \quad \Box_{(b)} \end{aligned}$$

Seuraavaksi todistetaan rinnakkain kohdat (a) ja (c). Suoraan normin $\|f\|_\infty$ Määritelmästä 3.2.2., sekä Mf:n Määritelmästä 5.2.1. saadaan triviaalisti

$$\|Mf\|_\infty = \|f\|_\infty, \quad \text{kun} \quad f \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

[4] Tässä yhteydessä voitaisiin käyttää myös ns. Vitalin peitelausetta, joka löytyy mm. Brucknerin [1] kirjasta.

Jatketaan todistusta olettaen, että $1 < p < \infty$. Jaetaan funktio f kahteen palaa seuraavasti: $f_1(x) = f(x)$, kun $|f(x)| \geq t/2$ ja $f_1(x) = 0$ muulloin. Näin ollen saadaan $|f(x)| \leq |f_1(x)| + t/2$, joten $M(f)(x) \leq M(f_1)(x) + t/2$. Nyt

$$\{x : M(f)(x) > t\} \subset \{x : M(f_1)(x) > t\},$$

ja lopulta

$$\mu\{E_t\} = \mu\big(\{x : M(f)(x) > t\}\big) \overset{(b)}{\leq} \frac{2A}{t}\|f_1\|_1.$$

Toisin sanoen

$$\mu\{E_t\} \leq \frac{2A}{t}\int_{|f|>t/2} |f| \,\mathrm{d}x. \tag{20}$$

Käytimme yllä juuri todistettua kohtaa (b), joka on mahdollista, sillä $f_1 \in L^1$ aina, kun $f \in L^p$. Asetetaan $g = Mf$ ja olkoon λ g:n distribuutiofunktio. Koska f on mitallinen ja $0 < p < \infty$, voimme käyttää tässä todistuksessa Lausetta 6.1.2. Nyt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p \,\mathrm{d}x = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(E_t)\,\mathrm{d}t \leq p\int_0^\infty t^{p-1}\Big(\frac{2A}{t}\int_{|f|>t/2} |f(x)|\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t.$$

(18):sta saadaan

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_p^p &\leq p\int_0^\infty t^{p-1}\Big(\frac{2A}{t}\int_{|f|>t/2} |f(x)|\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= 2Ap\int_0^\infty t^{p-2}\Big(\int_{|f|>t/2} |f(x)|\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= 2Ap\int_0^\infty t^{p-2}\Big(\int_0^\infty \chi_{\{x:|f(x)|>t/2\}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= 2Ap\int_0^\infty \int_0^\infty t^{p-2}\chi_{\{x:|f(x)|>t/2\}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
\text{Fubini} \quad \Rightarrow \qquad &= 2Ap\int_0^\infty \int_0^\infty t^{p-2}\chi_{\{x:|f(x)|>t/2\}}|f(x)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= 2Ap\int_0^\infty |f(x)|\Big(\int_0^\infty t^{p-2}\chi_{\{x:|f(x)|>t/2\}}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Fubinin lauseen nojalla vaihdoimme integroinnin järjestystä. Seuraavaksi ratkaistaan sisempi integraali erikseen:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{p-2}\chi_{\{x:|f(x)|>t/2\}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2|f(x)|} t^{p-2}\,\mathrm{d}t = \Big/_{0}^{2|f(x)|} \frac{1}{p-1}t^{p-1} \\ &= \Big(\frac{1}{p-1}\Big)(2|f(x)|)^{p-1}, \qquad \text{kun} \quad p>1.\end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä tulos alkuperäiseen ulompaan integraaliin:

$$\begin{aligned}&2Ap\int_0^\infty |f(x)|\Big(\frac{1}{p-1}\Big)(2|f(x)|)^{p-1}\,\mathrm{d}x \\ =&2Ap\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\Big(\frac{1}{p-1}\Big)(2|f(x)|)^{p-1}\,\mathrm{d}x \\ =&\frac{2Ap}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|2^{p-1}|f(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}x \\ =&\frac{2^pAp}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x, \qquad \text{kun} \quad 1<p<\infty.\end{aligned}$$

Nyt siis

$$\|Mf\|_p^p \le A_p^p\|f\|_p^p.$$

Kun asetetaan vielä $A=5^n$, saadaan

$$\|Mf\|_p \le A_p\|f\|_p, \quad \text{missä} \quad A_p = 2\Big(\frac{5^np}{p-1}\Big)^{1/p}. \quad \square$$

Palataan kappaleen alussa esitetyn Lauseen 6.2.1. todistukseen, jossa käytämme Lausetta 6.2.2. (b).

Todistus. Riittää osoittaa, että funktion

$$f_r(x) = \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)}\int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad 1>r>0, \tag{21}$$

raja-arvo $\lim_{r\to 0} f_r(x) = f(x)$ kaikilla x, kun $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, sillä jokaisella $i\ge 1$ huomautus (13) pätee m.k. $x\in \overline{B}(0,i)$.

Lisäksi Lauseen 4.4.3. perusteella on olemassa f_i:n osajono f_{i_k}, joka suppenee m.k. Olkoon $f_r = f_{1/i}\to f \quad L^1$:ssä, jolloin on olemassa f_{r_k} siten, että $f_{r_k}\to f$ m.k., kun jono $(r_k)\to 0$.

Todistettavaksi jää, että raja-arvo $\lim_{r\to 0} f_r(x)$ on olemassa m.k. Tätä varten olkoon $g \in L^1$ jatkuva funktio ja $x \in \mathbb{R}^n$. Nyt triviaalisti $f = f - g + g$. Olkoon

$$\begin{aligned}
t &< \Big|\frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)}\int_{B(x,r)} f(y) - f(x)\,\mathrm{d}y\Big| \leq \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}y \\
&= \fint_{B(x,r)} |f(y) - g(y) + g(x) - f(x) + g(y) - g(x)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \fint_{B(x,r)} |f(y) - g(y)|\,\mathrm{d}y + \fint_{B(x,r)} |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}y + \fint_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Nyt $|g(x) - f(x)|$ voidaan olettaa vakioksi integroitaessa y:n suhteen ja integraalikeskiarvo vakiosta on vakio itse.

Todistetaan lisäksi, että $\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |g(y) - g(x)| = 0$. Kiinnitetään $x \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Koska g on jatkuva, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|g(y) - g(x)| < \epsilon \quad \forall y \in B(x,\delta)$. Siten

$$\fint_{B(x,r)} \underbrace{|g(y) - g(x)|}_{<\epsilon} < \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)}\int_{B(x,r)} \epsilon\,\mathrm{d}y = \epsilon.$$

Nyt $\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |g(y) - g(x)| = 0$, sillä ϵ oli mielivaltainen. Saadaan

$$\begin{aligned}
t &< \fint_{B(x,r)} |f(y) - g(y)|\,\mathrm{d}y + |g(x) - f(x)| \\
&\leq M(|f - g|)(x) + |g(x) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Nyt $M(|f - g|)(x) > t/2$ tai $|g(x) - f(x)| > t/2$, joten

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}y > t\} \\
&\subset \{x \in \mathbb{R}^n : M(|f - g|)(x) > t/2\} \bigcup \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x) - f(x)| > t/2\}.
\end{aligned}$$

Yhtäpitävästi

$$\begin{aligned}
&\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}y > t\}\big) \\
&\leq \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n : M(|f - g|)(x) > t/2\}\big) + \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x) - f(x)| > t/2\}\big) \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{2 \cdot 5^n \|f - g\|_1}{t} + \frac{2\|f - g\|_1}{t} \leq \frac{2(5^n + 1)\|f - g\|_1}{t}.
\end{aligned}$$

$(*)$Seuraa suoraan Lauseiden 6.1.3. ja 6.2.2.(b) epäyhtälöistä.

Lauseen 4.4.4. mukaan jatkuvat funktiot ovat *tiheässä* L^p-avaruudessa eli kun $f \in L^1$, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa jatkuva funktio g siten, että $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Asettamalla $\epsilon \to 0$ saadaan

$$\limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y = 0 \quad \text{m.k.} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Täten

$$\liminf_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y \leq \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y = 0 \quad \text{m.k.} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ja siis

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y = 0 \quad \text{m.k.} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mikä todistaa raja-arvon $\lim_{r\to 0} f_r(x)$ olemassaolon. $\square$

Lause 6.2.3. *Olkoon funktiolla f kantaja pallossa $B \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin $M(f)(x) \in L^1(B)$, jos $|f| \log(2 + |f|)$ on integroituva yli B:n.*

Todistus. Nyt

$$\begin{aligned}
\int_B Mf \, \mathrm{d}x &= \int_0^\infty \mu\big(\{x \in B : M(f)(x) > t\}\big) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \mu\big(\{x \in B : M(f)(x) > t\}\big) \, \mathrm{d}t + \int_1^\infty \mu\big(\{x \in B : M(f)(x) > t\}\big) \, \mathrm{d}t \\
&\leq \mu(B) + \int_1^\infty \mu\big(\{x \in B : M(f)(x) > t\}\big) \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

missä $\mu(B) < \infty$. Funktio Mf on siten integroituva yli B:n, jos

$$\int_1^\infty \mu\big(\{x \in B : M(f)(x) > t\}\big) \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Epäyhtälön (19) mukaan

$$\mu\big(\{x \in B : M(f)(x) > t\}\big) \leq \frac{2A}{t} \int_{|f|>t/2} \chi_B(x) |f| \, \mathrm{d}x,$$

joten

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \mu\big(\{x\in B: M(f)(x)>t\}\big)\,\mathrm{d}t &\le \int_1^\infty \frac{2A}{t}\int_{|f|>t/2} \chi_B(x)|f|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= 2A\int_0^\infty \frac{\chi_{\{t:t>1\}}}{t}\int_{R^n}\chi_B(x)\chi_{\{x:|f|>t/2\}}|f|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
\text{Fubini}\quad\Rightarrow\qquad &= 2A\int_{R^n}\int_0^\infty \frac{1}{t}\chi_B(x)\chi_{\{x:|f|>t/2>1/2\}}|f|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= 2A\int_{R^n}\chi_B(x)|f|\int_0^\infty \frac{1}{t}\chi_{\{x:|f|>t/2>1/2\}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= 2A\int_B |f|\int_1^{2|f|}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= 2A\int_B |f|\big(\log^+(2|f|)-\underbrace{\log 1}_{=0}\big)\,\mathrm{d}x \\
&= 2A\int_B |f|\log^+(2|f|)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\int_B |f|\log^+(2|f|)\,\mathrm{d}x = \int_B |f|\log(2|f|)\,\mathrm{d}x,$$

kun $2|f|>1$ eli $|f|>1/2$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
&\int_B |f|\log^+(2|f|)\,\mathrm{d}x \le \int_B (|f|+1/2)\log\big(2(|f|+1/2)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_B (|f|+1/2)\big(\log 2+\log(|f|+1/2)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_B |f|\log 2 + 1/2\log 2 + |f|\log(|f|+1/2) + 1/2\log(|f|+1/2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_B |f|\log 2\,\mathrm{d}x + \int_B 1/2\log 2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_B |f|\log(|f|+1/2)\,\mathrm{d}x + \int_B 1/2\log(|f|+1/2)\,\mathrm{d}x < \infty
\end{aligned}$$

aina, kun

$$\int_B |f|\log(2+|f|)\,\mathrm{d}x < \infty. \quad \square$$

Edellinen lause päteen myös toisinpäin, eli jos $Mf\in L^1(B)$, niin $|f|\log(2+|f|)\in L^1(B)$.

Tämän todistus on hieman monimutkaisempi ja vaatii lisää esitietoja, joten se ohitetaan. Tarvittavat tiedot ja vinkit todistuksen tekemiseen löytyvät Steinin [9] kirjasta.

Asiasta ollaan kuitenkin saatu jo pientä viitettä sivulla 9 Esimerkissä 3.1. Siinä funktio $f(x) = x^{-1}(\log x^{-1})^{-2}$ on integroituva suljetulla välillä $[0, a]$, mutta $M(f)(x) \geq \frac{1}{x}\int_0^x f \, \mathrm{d}t \notin L^1([0, a])$.

Tästä seuraa, että $|f| \log(2 + |f|) \notin L^1([0, a])$, mikä on oleellisesti sama asia kuin $|f| \log|f| \notin L^1([0, a])$. Nyt

$$\begin{aligned}
\log|f| &= \log\Big(\frac{1}{x(\log x^{-1})^2}\Big) \\
&= \log x^{-1} + \log\Big(\frac{1}{(\log x^{-1})^2}\Big) \\
&= \log x^{-1} - 2\log\log x^{-1},
\end{aligned}$$

missä $x > 0$ ja $\log x^{-1} > 0$ eli $x < 1$. Toisaalta $\log\log x^{-1} \geq 0$, kun $\log x^{-1} \geq 1$ eli $0 < x \leq 1/e$. Saadaan

$$\log|f| \leq \log x^{-1}, \quad \text{kun} \;\; 0 < x \leq \frac{1}{e}.$$

Siten

$$|f|\big(\log|f|\big)^{\lambda} \leq \frac{1}{x(\log x^{-1})^2}\big(\log x^{-1}\big)^{\lambda} = \frac{1}{x}\big(\log x^{-1}\big)^{\lambda-2},$$

ja lopulta

$$\begin{aligned}
\int_0^a |f|\big(\log|f|\big)^{\lambda-2} \,\mathrm{d}x &\leq \int_0^a x^{-1}(\log x^{-1})^{\lambda-2} \,\mathrm{d}x = \Big/_0^a -\frac{1}{\lambda-1}(\log x^{-1})^{\lambda-1} \\
&= -\frac{1}{\lambda-1}\Big(\big(\log 1/a\big)^{\lambda-1} - \big(\underbrace{\log 1/0}_{=\infty}\big)^{\lambda-1}\Big) < \infty, \quad \text{kun} \;\; 0 < \lambda < 1.
\end{aligned}$$

Esimerkin 3.1. funktion f maksimaalikunktio $Mf \notin L^1([0, 1/e])$, mutta $|f| \log^{\lambda}|f| \in L^1([0, 1/e])$, kun $0 < \lambda < 1$.

Viitteet

[1] Bruckner A. M., Bruckner J. B. and Thomson B. S. *Real Analysis,* Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1997.

[2] Friedman A. *Foundation of Modern Analysis*, Dover Publications Inc. USA, 1982.

[3] Hardy G. H. and Littlewood J. E. *A Maximal Theorem with Function-Theoretic Application*, Acta Mathematica, 54, 81-116, 1930.

[4] Holopainen I. *Reaalianalyysi I*, Helsingin yliopisto, May 5, 2004.

[5] Kilpeläinen T. *Mitta- ja integraaliteoria*, Jyväskylän yliopisto, 2003–04.

[6] Mattila P. *Geometry sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press, 1995.

[7] Nurmela M. $L^p(X, \mathcal{A}, m)$*-avaruudet*, Jyväskylän yliopisto, 1981.

[8] O'Connor J. J. and Robertson E. F. *Godfrey Harold Hardy, John Edenson Littlewood, Norbert Wiener*, URL: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/2003.

[9] Stein E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Function*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.