ISOPERIMETRINEN ONGELMA

Pertti Pitkänen

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
11. heinäkuuta 2005

Sisältö

1 Johdanto

Isoperimetrisen ongelman juuret ulottuvat antiikin Kreikkaan, jossa varhaisimmat maininnat ongelmasta löytyvät Pappuksen kirjoituksista 200-luvulta jKr. Alkuperäisessä muodossaan ongelmana on löytää kaikista tason käyristä se, joka sulkee sisäänsä suurimman pinta-alan, kun käyrän pituus on kiinnitetty. Ongelma tunnetaan myös isoperimetrisen epäyhtälön muodossa, joka suljetuille tason käyrille on

$$p \geq 2\sqrt{\pi A},$$

missä p on käyrän pituus ja A sen rajaama pinta-ala. n-ulotteisessa avaruudessa epäyhtälö saa muodon

$$S(A) \geq nV(B)^{1/n}V(A)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{1}$$

missä $S(A)$ on joukon A reunan $n-1$-ulotteinen Hausdorffin mitta, $V(A)$ on A:n n-ulotteinen Lebesguen mitta ja B avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallo. Kun $n = 2$, puhutaan A:n reunan pituudesta ja A:n pinta-alasta ja kun $n = 3$, vastaavat termit ovat reunan ala ja tilavuus. Isoperimetrisestä epäyhtälöstä saadaan myös toinen, ekvivalentti muotoilu ongelmalle, nimittäin löytää joukko, jonka reunan "ala" on pienin, kun kiinnitetään tutkittavien joukkojen "tilavuus" vakioksi. Luvuissa kolme ja neljä vastataankin tähän kysymykseen, mutta tämän minimointiongelman ratkaisu on sama kuin alkuperäisen maksimointiongelman.

Kreikkalaiset tiesivät, että ympyrän rajaama pinta-ala on suurin, mutta eivät osanneet todistaa sitä. Ensimmäisenä lauseen todisti 1838 J. Steiner, joka käytti todistuksessaan Steinerin symmetrisaatioksi myöhemmin nimettyä geometriaan perustuvaa menetelmää. Samaa menetelmää käytetään luvun kolme loppuosassa, jossa osoitetaan, että yhtäsuuruus epäyhtälössä (1) on voimassa vain, kun A on n-ulotteinen pallo. Steinerin todistuksessa oli kuitenkin puute. Siinä nimittäin oletettiin, että tällainen pinta-alan maksimoiva alkio on olemassa. Tämä on tietysti totta, mutta vaatii silti perustelun. Tämän merkittävän edistysaskeleen otti 1880-luvulla H.A. Schwarz, jonka todistus kolmiulotteisille kappaleille sisälsi myös olemassaolotuloksen. Ensimmäisen puhtaasti analyyttisen todistuksen puolestaan esitti 1901 A. Hurwitz, joka ratkaisi ongelman kaksiulotteisessa avaruudessa käyttäen Greenin lausetta.

Pitkästä iästään huolimatta isoperimetrinen ongelma on jaksanut askarruttaa tutkijoita aina viime aikoihin saakka. Tästä esimerkkinä ovat T.W. Gamelinin ja D. Khavinsonin [GK] Stokesin lausetta hyödyntävä todistus vuodelta 1989 ja R.J. Gardnerin (2002) [Ga] sekä Yu.D. Buragon ja V.A. Zallgallerin (1988) [BZ] Brunnin ja Minkowskin epäyhtälöä käyttävä lähestymistapa, joka muodostaa tämän työn kolmannen luvun rungon.

Isoperimetrisestä epäyhtälöstä (1) herää kaksi kysymystä, joihin tässä työssä haetaan vastausta. Ensinnäkin halutaan osoittaa, että epäyhtälö on voimassa. Toiseksi halutaan tutkia, missä tapauksissa yhtäsuuruus toteutuu. Epäyhtälön todistamistapa riippuu merkittävästi siitä, millaisia joukkoja tutkitaan. Tutkimukseni jakautuu kolmeen osaan sen mukaan, millaisten joukkojen parista isoperimetrisen ongelman ratkaisua etsitään ja minimoivan/maksimoivan alkion olemassaoloa selvitetään. Luvussa kaksi rajoitutaan tutkimaan tasossa $\mathbb{R}^2$ olevia joukkoja, ja niistä halutaan löytää alkio, jonka pinta-ala on suurin, kun kiinnitetään tutkittavien joukkojen piirin pituus vakioksi. Ensin tutkitaan monikulmioiden joukkoa ja sitten kaikkia tason osajoukkoja, joiden reuna on Jordan-käyrä. Jälkimmäinen joukko sisältää monikulmiot, mutta myös paljon muita joukkoja.

Luvussa kolme ongelman asettelua yleistetään siirtymällä tason kappaleista tutkimaan n-ulotteisen avaruuden osajoukkoja. Näille joukoille asetetaan se rajoitus, että niiden reunan täytyy olla paloittain sileä, toisin sanoen melkein jokaiseen tutkittavan kappaleen reunan pisteeseen voidaan määrittää $(n-1)$ -ulotteinen tangenttitaso ja sitä vastaan kohtisuora normaalivektori. Siirryttäessä kahdesta ulottuvuudesta useampaan, edellisen kohdan todistuksen välineitä ei voida sellaisinaan yleistää vaan joudutaan rakentamaan uutta teoriaa. Ratkaisua lähdetään hakemaan todistamalla ensin Brunnin ja Minkowskin epäyhtälö ja johtamalla siitä isoperimetrinen epäyhtälö.

Viimeisessä luvussa laajennetaan edelleen vertailuun otettavien kappaleiden kirjoa. Erityistä huomiota kiinnitetään joukon reunan käsitteeseen ja määritellään rajoitetusti heilahtelevien funktioiden määritelmän avulla n.s. äärellisen perimeetterin joukot eli Caccioppoli-joukot. Äärellisen perimeetterin joukko samaistetaan karakteristiseen funktioonsa, joka on rajoitetusti heilahteleva. Rajoitetusti heilahtelevia funktioita tutkimalla päästään selvittämään maksimaalisen alkion olemassaoloa Caccioppoli-joukoille. Lopuksi tutkitaan, missä muodossa isoperimetrinen epäyhtälö on voimassa Caccioppoli-joukoille.

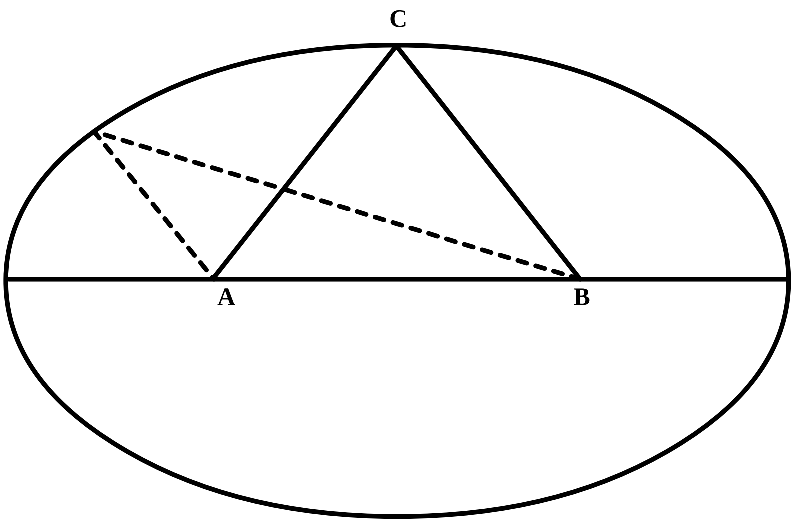
2 Isoperimetrisen epäyhtälön ratkaisu tasossa $\mathbb{R}^2$

2.1 Ratkaisu monikulmioille

Työn aluksi ratkaistaan isoperimetrinen ongelma, kun tutkittavana joukkona ovat monikulmiot, joissa on k kulmaa ja joiden piiri on $2l$. Monikulmiolla tarkoitetaan tässä ja jatkossa avaruuden $\mathbb{R}^2$ kappaletta, jota rajaava suljettu käyrä (reuna) koostuu äärellisen monesta janasta eikä leikkaa itseään. Koska jokainen k-kulmio, jossa k on pariton voidaan ajatella $k+1$-kulmiona, jonka yksi kulma on oikokulma, voidaan rajoittua tarkastelemaan monikulmioita, joissa on parillinen määrä kulmia.

Lemma 2.1. *Kaikista kolmioista, joista on annettu yksi sivu ja piiri, tasakylkinen kolmio sulkee sisäänsä suurimman alan*

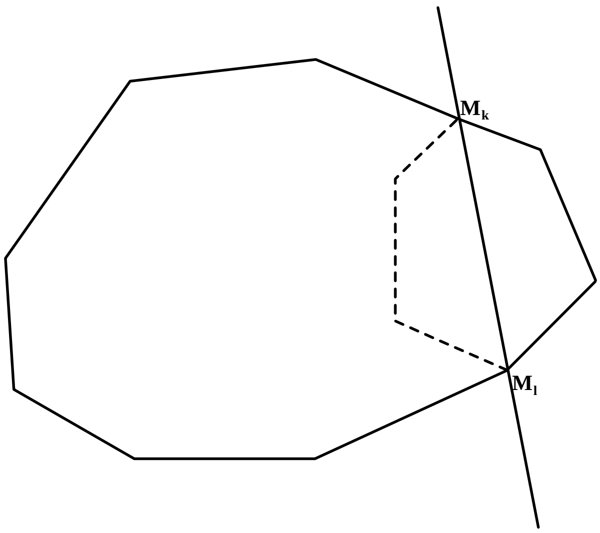
TODISTUS. Olkoon kolmio ABC s.e. sivu AB on kiinnitetty ja kolmion piiri on p. Muodostetaan ellipsi, jonka polttopisteinä ovat pisteet A ja B. Ellipsin pisteillä on se ominaisuus, että niiden polttopisteistä mitattujen etäisyyksien summa on vakio. Kun asetetaan tämä vakio yhtäsuureksi kuin kolmion ABC sivujen BC ja CA pituuksien summa, saadaan, että kolmion kolmas piste C sijoittuu ellipsin kehälle. Ellipsin ominaisuuksista tiedetään, että se on symmetrinen polttopisteiden välisen janan AB keskinormaalin suhteen ja aidosti konveksi. Tällöin pisteen C suurin etäisyys pisteiden A ja B kautta kulkevasta suorasta saavutetaan, kun C on ellipsin ja janan AB keskinormaalin leikkauspiste. Näin muodostuvan kolmion korkeus ja siten myös ala on suurin. Tämä piste C on yhtä kaukana pisteistä A ja B eli kolmio ABC on tasakylkinen. □



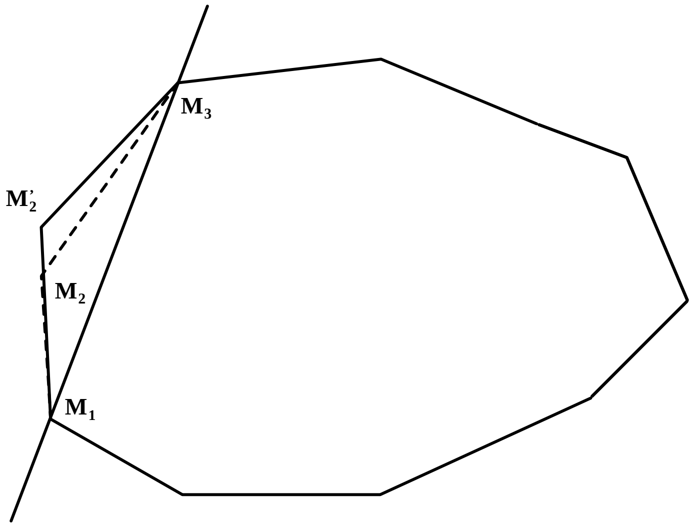
Lause 2.2. *Kaikista tason $2m$-kulmioista, joiden piiri on $2l$, säännöllisen $2m$-kulmion rajaama pinta-ala on suurin.*

Todistus. Todistus seuraa Steinerin alkuperäistä ideaa ja löytyy lähteistä [CH] ja [Ha].
Osoitetaan ensin, että tällainen maksimaalinen monikulmio on olemassa. Numeroimalla monikulmion M kärkipisteet $M_1, \ldots, M_m$, voidaan jokainen monikulmio esittää joukkona $\{M_1, \ldots, M_m\}$ tason $\mathbb{R}^2$ pisteitä. Yleisyyden mitenkään siitä kärsimättä voidaan joukkoa siirtää siten, että yksi joukon pisteistä on origo. Koska monikulmion piiri on $2l$, voidaan todeta, että (mahdollisen siirron jälkeen) kaikki monikulmion kärkipisteet mahtuvat $2l$-säteisen ympyrän sisään. Kärkipisteiden koordinaattien joukko on siis avaruuden $\mathbb{R}^{2m}$ kompakti osajoukko. Koska kuhunkin monikulmioon liittyvä pinta-ala riippuu jatkuvasti monikulmion kärkipisteistä, saavuttaa pinta-ala maksimiarvonsa. Toisin sanoen pinta-alaltaan maksimaalinen monikulmio on olemassa.

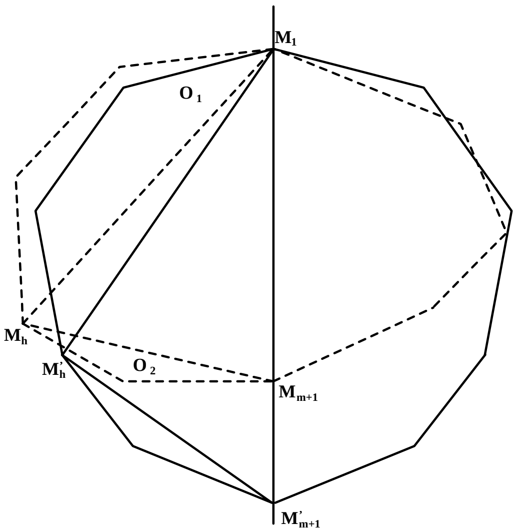
Seuraavaksi todetaan, että maksimaalisen monikulmion on oltava konveksi. Olkoon M $2m$-kulmio, jonka rajaaman alueen pinta-ala on maksimaalinen. Jos M ei ole konveksi, voidaan kahden ei-vierekkäisen kärkipisteen M_k ja M_l kautta piirtää suora, joka on kokonaan M:n ulkopuolella. Peilaamalla syntynyt monikulmio $M_k M_{k+1} \ldots M_{l-1} M_l$ tämän suoran suhteen syntyy uusi monikulmio M', jonka piiri on yhtäsuuri kuin M:n, mutta pinta-ala on suurempi, mikä on vastoin oletusta M:n maksimaalisuudesta.



Seuraavaksi osoitetaan, että monikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Nimittäin, jos kaksi vierekkäistä sivua M_1M_2 ja M_2M_3 ovat eri pituiset, niin kolmio $M_1M_2M_3$ voidaan lemman 2.1 mukaan korvata tasakylkisellä kolmiolla $M_1M_2'M_3$, s.e. M_1M_2' $= M_2'M_3$ ja uuden kolmion ala on suurempi. Silloin monikulmio, jossa kärki M_2 on korvattu kärjellä M_2' on piiriltään sama mutta alaltaan suurempi, mikä taas on vastoin maksimaalisuusoletusta.



Lopuksi osoitetaan, että monikulmion kaikki kärjet ovat ympyrän kehällä. Jaetaan M kahteen osaan N_1 ja N_2 janalla, joka yhdistää vastakkaiset kulmat M_1 ja M_{m+1}. Edellisen kohdan nojalla uusien monikulmioiden piirit ovat yhtäsuuret. Niiden alat ovat myös yhtäsuuret, koska jos näin ei ole, voidaan suurempi monikulmio peilata janan M_1M_{m+1} suhteen ja näin saadulla uudella $2m$-kulmiolla on sama piiri kuin alkuperäisellä, mutta vastoin maksimaalisuusoletusta suurempi ala. Monikulmion jokaiselle kärkipisteelle M_h pätee myös, että kulma $M_1M_hM_{m+1}$ on suora. Jos näin ei ole, löytyy $M_h \in N_1$, jolle kulma $M_1M_hM_{m+1}$ ei ole suora. Nyt N_1 voidaan jakaa kolmioon $M_1M_hM_{m+1}$ ja kahteen monikulmioon O_1 ja O_2, s.e. O_1:lla ja kolmiolla on yhteinen sivu M_1M_h ja O_2:lla ja kolmiolla on yhteinen sivu M_hM_{m+1}. Nyt kolmio $M_1M_hM_{m+1}$ voidaan korvata pinta-alaltaan suuremmalla kolmiolla $M_1'M_h'M_{m+1}'$, s.e. $M_1'M_h' = M_1M_h$ ja $M_h'M_{m+1}' = M_hM_{m+1}$. Tämän uuden suorakulmaisen kolmion ala on suurempi kuin alkuperäisen ja liittämällä monikulmiot O_1 ja O_2 uuden kolmion sivuille ja peilaamalla janan M_1M_{m+1} suhteen saadaan kehänpituudeltaan sama ja pinta-alaltaan suurempi monikulmio kuin alkuperäinen, taas vastoin maksimaalisuusoletusta. Siispä kulman $M_1M_hM_{m+1}$ on oltava suora, mikä riittää osoittamaan, että kärkipiste M_h sijaitsee samalla ympyränkaarella kuin M_1 ja M_{m+1}.



Monikulmion M kärjet sijoittuvat siis tasaisesti ympyrän kehälle, joten on M on säännöllinen $2m$-kulmio. □

2.2 Ratkaisu Jordan-käyrille

Ryhdytään seuraavaksi selvittämään isoperimetrisen ongelman ratkaisua joukossa, joka sisältää edellisessä kappaleessa käsitellyt monikulmiot, joiden piiri on $2l$, mutta sallii myös muiden käyrien rajaamia kappaleita. Luonnolliselta tuntuvan joukon antavat tason kappaleet, joiden reuna on Jordan-käyrän määritelmän toteuttava käyrä. Halutaan siis tietää, onko olemassa Jordan-käyrää, joka sulkee sisäänsä suurimman alan, kun käyrän pituus on vakio. Jos tällainen käyrä löytyy, niin mikä se on?

Määritelmä 2.3 (Jordan-käyrä). Itseään leikkaamaton Jordan-käyrä $j \subset \mathbb{R}^2$ on jatkuvan kuvauksen

$$J : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : J(0) = J(1) \text{ ja } J(x) \neq J(y), \text{ kun } x \in \,]0,1[, \ y \in \,]0,1[\text{ ja } x \neq y$$

kuva. Kuvausta J sanotaan Jordan-poluksi.

Poluista ja käyristä löytyy lisää tietoa lähteestä [Pu].

Lause 2.4 (Jordanin käyrälause). *Jordan-käyrän $j \subset \mathbb{R}^2$ komplementti $\mathbb{R}^2 \setminus j$ koostuu tasan kahdesta pistevieraasta yhtenäisestä osasta, joiden kummankin reuna on j. Toisin sanoen j jakaa tason $\mathbb{R}^2$ kahteen osaan: rajoitettuun joukkoon (sisäpuoli) ja rajoittamattomaan joukkoon (ulkopuoli).*

TODISTUS. Yksinkertaiselta kuulostavan lauseen todistus on erittäin epätriviaali ja vaatii topologista tietämystä. Yksi vaihtoehto on todistaa lause ensin monikulmioille ja käyttää sitten hyväksi kohta esitettävää lausetta 2.6, joka kertoo, että mielivaltaista Jordan-käyrää voidaan approksimoida monikulmioilla. Tätä menetelmää käyttävä todistus löytyy lähteestä [Na]. □

Määritelmä 2.5 (Jordan-polun pituus). Jordan-polun J pituus määritellään seuraavasti:

$$l(J) := \sup\Big\{\sum_{k=1}^{m} |J(t_k) - J(t_{k-1})|\Big\}$$

missä supremum otetaan yli kaikkien välin $[0,1]$ jakojen $T := \{t_1 \dots t_m\}$. Jordan-polun pituus on ekvivalentti Jordan-käyrän geometrisen pituuden kanssa. Jatkossa Jordan-käyrän pituudella tarkoitetaankin käyrän geometrista pituutta.

Jotta edellä käsitelty monikulmioiden tapaus ei menisi aivan hukkaan, todetaan seuraavat monikulmioita ja Jordan-käyriä yhdistävä lauseet.

Lause 2.6. *Jokaista $2l$-pituista Jordan-käyrää j voidaan arvioida mielivaltaisen tarkasti monikulmiolla, jonka piiri on $2l$. Toisin sanoen on olemassa monikulmio M, jolle M:n ja j:n ns. erotusosan pinta-ala saadaan mielivaltaisen pieneksi. Erotusosalla tarkoitetaan joukkoa $(M \backslash \mathcal{J}) \cup (\mathcal{J} \backslash M)$, missä $\mathcal{J}$ on j:n rajaama alue, "sisäpuoli".*

TODISTUS. Olkoon J Jordan-polku ja j sen kuva eli Jordan-käyrä. Määritelmästä 2.5 seuraa, että mielivaltaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa jako $T = \{0 = t_0, t_1, \dots t_{m-1}, t_m = 1\}$ s.e. monikulmion M, jonka kärkinä ovat pisteet $M_k = J(t_k), k = 0, \dots m-1$ piiri eroaa mielivaltaisen vähän j:n pituudesta eli $l(j) - l(M) = \epsilon' < \epsilon$ kaikille $\epsilon > 0$.

Venytetään monikulmiota M hieman korvaamalla viimeinen sivu $M_{m-1}M_0$ kahdella yhtä pitkällä janalla $M_{m-1}X$ ja XM_0 s.e. $|M_{m-1}X| = |XM_0|$ ja $|M_{m-1}X| + |XM_0| = |M_{m-1}M_0| + \epsilon'$. Nyt monikulmion piiri on tasan $2l$. Nyt halutaan osoittaa, että M:n ja j:n erotusosan ala on pieni.

Merkitään j_k:lla välin $[t_k, t_{k+1}]$ kuvaa Jordan-polkukuvauksessa J. Toisin sanoen j_k on se Jordan-käyrän j osa, joka alkaa pisteestä $J(t_k)$ ja päättyy pisteeseen $J(t_{k+1})$.

Tarkastellaan ensin monikulmion sivuja M_kM_{k+1}, $k = 0, \dots, m-2$. Merkitään

$$\epsilon'_k := l(j_k) - |M_kM_{k+1}|,$$

jolloin

$$\sum_{k=0}^{m-2} \epsilon'_k \leq \epsilon'. \tag{2}$$

Määritellään jokaiselle indeksille k ellipsi E_k, jonka polttopisteinä ovat M_k ja M_{k+1} ja jonka pisteet $y \in E_k$ toteuttavat etäisyysehdon $|yM_k| + |yM_{k+1}| = |M_k M_{k+1}| + \epsilon'_k$. Käyttämällä hyväksi lauseen 2.1 todistusta ja tietoa, että lyhin reitti pisteestä toiseen on suora voidaan todeta, että jokainen käyrän j_k piste kuuluu ellipsin rajaamaan "sisäpuoleen". Siispä $j_k \subset E_k$ ja erotusosan alaa voidaan arvioida ylöspäin ellipsin rajaaman alueen pinta-alalla. Suoralla laskulla saadaan ellipsin E_k lyhemmän puoliakselin pituudeksi $\sqrt{\epsilon'_k}\sqrt{2|M_k M_{k+1}| + \epsilon'_k}$ pidemmän puoliakselin pituuden ollessa $\frac{1}{2}\left(|M_k M_{k+1}| + \epsilon'_k\right)$. Merkitään A_k erotusosan pinta-alaa osavälillä k. Tällöin

$$A_k < A(E_k) = \pi \frac{1}{2}(|M_k M_{k+1}| + \epsilon'_k)\sqrt{\epsilon'_k}\sqrt{2|M_k M_{k+1}| + \epsilon'_k}$$

Epsilon voidaan valita aidosti ykköstä pienemmäksi, jolloin $\epsilon'_k \leq \epsilon' < \epsilon < 1$. Neliöjuuren sisällä olevaa sivun pituutta puolestaan voidaan arvioida ylöspäin Jordan-käyrän j pituudella ja puolikas korvata ykkösellä. Saadaan

$$A_k < \pi(|M_k M_{k+1}| + \epsilon'_k)\sqrt{\epsilon'}\sqrt{2l(j) + 1}. \tag{3}$$

Yhteensä erotusosan pinta-alalle $m-1$ ensimmäisellä osavälillä saadaan arvio

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-2} A_k &< \sum_{k=0}^{m-2} \left(\pi(|M_k M_{k+1}| + \epsilon'_k)\sqrt{\epsilon'}\sqrt{2l(j)+1}\right) \\ &= \sqrt{\epsilon'}\pi\sqrt{2l(j)+1}\left(\sum_{k=0}^{m-2} |M_k M_{k+1}| + \sum_{k=0}^{m-2} \epsilon'_k\right). \end{aligned}$$

Ensimmäinen summa on melkein monikulmion M piirin pituus ja toiseen voidaan käyttää kohtaa (2). Saadaan

$$\sum_{k=0}^{m-2} A_k < \sqrt{\epsilon'}\pi\sqrt{2l(j)+1}\left(l(M) + \epsilon'\right). \tag{4}$$

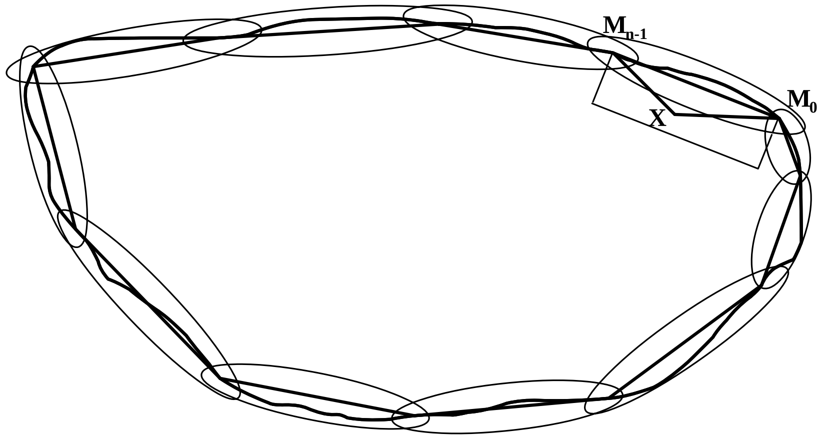
Viimeisellä osavälillä erotuksen pinta-alalle ei saada aivan yhtä hyvää arviota, koska alussa tehty sivun korvaaminen kahdella janalla saattaa kasvattaa pinta-alojen erotusta. Huomataan kuitenkin, että korvaamisesta huolimatta erotusjoukon pinta-ala jää tarpeeksi pieneksi. Arvioimalla ensin ellipsin avulla eli käyttämällä kohtaa (3) ja huomaamalla, että kolmiota $M_{m-1}XM_0$ voidaan arvioida suorakulmiolla eli $A(M_{m-1}XM_0) < \epsilon'|M_{m-1}M_0|$ saadaan

$$\begin{aligned} A_{m-1} &< \pi(|M_{m-1}M_0| + \epsilon'_{m-1})\sqrt{\epsilon'}\sqrt{2l(j)+1} + \epsilon'|M_{m-1}M_0| \\ &= \sqrt{\epsilon'}\left(\pi(|M_{m-1}M_0| + \epsilon'_{m-1})\sqrt{2l(j)+1} + \sqrt{\epsilon'}|M_{m-1}M_0|\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Laskemalla osien alat yhteen ja käyttämällä kohtia (4) ja (5) saadaan koko erotusosan pinta-alalle arvio

$$
\begin{aligned}
A = \sum_{k=0}^{m-1} A_k &= \sum_{k=0}^{m-2} A_k + A_{m-1} \\
&< \sqrt{\epsilon'}\pi\sqrt{2l(j)+1}\left(l(M)+\epsilon'\right) \\
&\quad + \sqrt{\epsilon'}\left(\pi(|M_{m-1}M_0| + \epsilon'_{m-1})\sqrt{2l(j)+1} + \sqrt{\epsilon'}|M_{m-1}M_0|\right) \\
&= \sqrt{\epsilon'}\Big(\pi\sqrt{2l(j)+1}\left(l(M)+\epsilon'\right) \\
&\quad + \pi(|M_{m-1}M_0| + \epsilon'_{m-1})\sqrt{2l(j)1} + \sqrt{\epsilon'}|M_{m-1}M_0|\Big)
\end{aligned}
$$

Koska $l(M)$ on rajoitettu samoin kuin $l(j)$, niin erotusosan ala A pienenee ϵ:n pienentämisen mukana infinitesimaaliseksi. Monikulmio M siis approksimoi Jordankäyrää j halutulla tarkkuudella erotusosan pinta-alan mielessä. □



Lause 2.7. *Olkoon M_{2m} säännöllinen $2m$-kulmio, jonka piiri on $2l$. Tällöin M:n ala on aidosti pienempi kuin sen ympyrän ala, jonka piiri on $2l$ eli pätee*

$$A(M_{2m}) < \frac{l^2}{\pi}$$

ja kun annetaan kulmien määrän kasvaa, saadaan

$$\lim_{m\to\infty} A(M_{2m}) = \frac{l^2}{\pi}.$$

Toisin sanoen säännöllisen piiriltään $2l$-pituisen monikulmion rajaama ala lähestyy alhaalta piiriltään $2l$-pituisen ympyrän alaa.

Todistus. Olkoon M_{2m} säännöllinen $2m$-kulmio, jonka piiri on $2l$. M_{2m} voidaan jakaa $2m$ tasakylkiseen kolmioon s.e. kolmioilla on yhteinen kärkipiste (monikulmion painopiste) ja jokaisen kolmion kannan pituus on $\frac{m}{l}$ ja huippukulma $\frac{\pi}{2m}$. Jokaisen kolmion korkeusjana puolittaa sen kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi, jonka kanta on $\frac{m}{2l}$ ja huippukulma $\alpha_m := \frac{\pi}{4m}$. Trigonometrian avulla kolmion korkeudeksi saadaan $h := \frac{l}{2m \tan \alpha_m}$. Niinpä kolmion pinta-ala on

$$A_k = \frac{1}{2}\frac{l}{2m}\frac{l}{2m\tan\alpha_m} = \frac{l^2}{8m^2\tan\alpha_m}$$

ja koko monikulmion ala

$$\begin{aligned} A(M_{2m}) = 2mA_k = 2m\frac{l^2}{8m^2\tan\alpha_m} &= \frac{l^2}{4m\tan\alpha_m} \\ = \frac{\frac{\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}}\frac{l^2}{4m\tan\alpha_m} = \frac{l^2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{4m}}{\tan\alpha_m} &= \frac{l^2}{\pi}\frac{\alpha_m}{\tan\alpha_m} \end{aligned}$$

Koska $\alpha = \frac{\pi}{4m}$ ja $m \geq 2$, niin $\frac{\alpha}{\tan\alpha} < 1$ ja

$$A(M_{2m}) = \frac{l^2}{\pi}\frac{\alpha}{\tan\alpha} < \frac{l^2}{\pi}$$

Kun $m \to \infty$, niin $\alpha_m \to 0$ ja $\frac{\alpha}{\tan\alpha} \to 1$. Siis

$$\lim_{m\to\infty}\frac{l^2}{\pi}\frac{\alpha}{\tan\alpha} = \frac{l^2}{\pi}.$$

Täten monikulmion ala lähestyy alhaalta ympyrän alaa ja lause on todistettu. □

Palataan seuraavaksi alkuperäiseen ongelmaan, joka on löytää käyrä, joka rajaa sisäänsä suurimman pinta-alan. Muotoillaan ongelma isoperimetrisen epäyhtälön muotoon ja ratkaistaan saman tien.

Lause 2.8. *Kaikista $2l$-pituisista Jordan-käyristä ympyrä sulkee sisäänsä suurimman pinta-alan.*

Todistus. Halutaan siis osoittaa, että mielivaltaisen Jordan-käyrän rajaama pinta-ala on pienempi tai yhtäsuuri kuin ympyrän pinta-ala.

Olkoon $j \in J$ Jordan-käyrä. Lauseen 2.6 mukaan j:tä voidaan arvioida monikulmiolla M_i siten, että alat eroavat toisistaan mielivaltaisen vähän. Löytyy siis jono $\{M_i\}$ monikulmioita s.e. $A(j) = \lim_{i\to\infty} A(M_i)$. Lauseen 2.2 mukaan jokaisen monikulmion M_i ala suurenee, kun se korvataan säännöllisellä monikulmiolla N_i. Säännöllisille monikulmioille puolestaan pätee lause 2.7.
Siispä Jordan-käyrälle j saadaan:

$$A(j) = \lim_{i\to\infty} A(M_i) \leq \lim_{i\to\infty} A(N_i) = \frac{l^2}{\pi},$$

mikä todistaa väitteen. □

Näin on saatu ratkaistua isoperimetrinen ongelma tasossa. Ratkaisussa on kuitenkin huomioitava se, että siinä rajoitutaan tarkastelemaan vain Jordan-käyriä eli itseään leikkaamattomia jatkuvia käyriä. Ratkaisu ei myöskään sellaisenaan yleisty useampaan ulottuvuuteen, koska esim. säännöllisiä monikulmioita vastaavat kappaleet puuttuvat useampiulotteisista avaruuksista.

Seuraavassa luvussa tarkastellaan isoperimetristä ongelmaa n-ulotteisessa avaruudessa ($n \geq 2$). Maksimaalista alkiota haetaan niiden kappaleiden joukosta, joiden reuna on paloittain jatkuvasti differentioituva. Koska tämän luvun menetelmät eivät ole yleistettävissä useampaan kuin kahteen ulottuvuuteen, joudutaan ratkaisemisessa hakemaan muita keinoja. Oivaksi apuvälineeksi osoittautuu Brunnin ja Minkowskin epäyhtälö, jonka seurauksena isoperimetrinen epäyhtälö saadaan puoli-ilmaiseksi.

3 Sileäreunaiset joukot avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Tässä luvussa käsitellään isoperimetrisen ongelman ratkaisua avaruuden $\mathbb{R}^n$ kappaleille, joiden reuna on paloittain jatkuvasti differentioituva. Isoperimetrinen epäyhtälö todistetaan näyttämällä ensin toteen Brunnin ja Minkowskin epäyhtälö. Tässä luvussa kappaleen $A \subset \mathbb{R}^n$ tilavuudella tarkoitetaan sen n-ulotteista Lebesguen mittaa ja pinta-alalla A:n reunan $n-1$ -ulotteista Hausdorffin mittaa. Näistä tullaan käyttämään merkintöjä $V(A)$ ja $S(A)$. Muutenkin läpi koko loppuosan mittana tullaan käyttämään Lebesguen mittaa, jonka suhteen myös joukkojen mitallisuutta tarkastellaan. σ-algebrana puolestaan toimii luvussa 4 esiteltävä Borelin σ-algebra. Aiheen käsittely seuraa pääpiirteittäin lähteitä [BZ] ja [Ga].

3.1 Brunnin ja Minkowskin epäyhtälö

Merkintä 3.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Reaaliluvun ja joukon tuloa merkitään λA ja se määritellään

$$\lambda A := \{\lambda x : x \in A\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Määritelmä 3.2 (Vektorisumma). Joukkojen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ summa $A + B \subset \mathbb{R}^n$ määritellään seuraavasti

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Tarkastellaan seuraavien esimerkkien ja kuvien avulla, mitä joukkojen yhteenlasku käytännössä tarkoittaa.

Esimerkki 3.3. Olkoon $A = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : |a_1| \leq 1, |a_2| \leq 1\} = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ja $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ tason yksikköpallo. Silloin summa

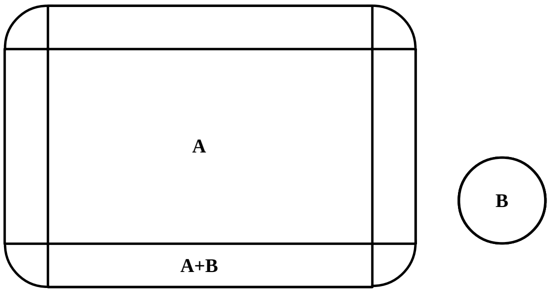
$$A + B = \{a + b : a = (a_1, a_2) \in A, b = (b_1, b_2) \in B\}$$

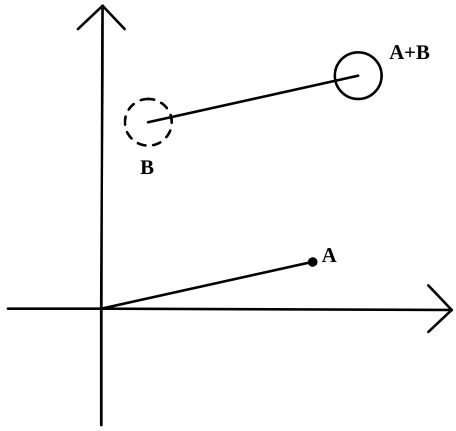
koostuu neliöstä A, neljästä suorakulmiosta ja neljästä ympyräneljänneksestä.

Esimerkki 3.4. Olkoon $A = \{a\} \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ yhdestä pisteestä koostuva joukko ja B edellisen esimerkin yksikköpallo. Nyt summajoukko

$$A + B = \{a + b : b \in B\}$$

on joukon B siirto vektorin a verran.





Lause 3.5 (Brunnin ja Minkowskin epäyhtälö). *Olkoot A ja B epätyhjiä rajoitettuja mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja s.e. myös joukko $A+B$ on mitallinen. Silloin*

$$V(A+B) \geq \left(V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}\right)^n \tag{6}$$

Todistus. Lause todistetaan ensin kahdelle laatikolle, suorakulmaiselle kappaleelle, jonka sivut ovat samansuuntaisia koordinaattiakseleiden kanssa. Oletetaan, että A ja B ovat laatikoita, joiden sivujen pituudet ovat a_i ja b_i koordinaattiakselin $i \in \{1, \dots n\}$ suuntaan. Tällöin

$$V(A) = \prod_{i=1}^{n} a_i \ , \quad V(B) = \prod_{i=1}^{n} b_i \quad ja \quad V(A+B) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

Aritmeettista ja geometrista keskiarvoa koskeva epäyhtälö kertoo, että jonolle $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \subset \mathbb{R}$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Käyttämällä tätä epäyhtälöä osamääräjonoille $\left\{\frac{a_i}{a_i+b_i}\right\}_{i=1}^n$ ja $\left\{\frac{b_i}{a_i+b_i}\right\}_{i=1}^n$ saadaan

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+b_i}\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i+b_i}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+b_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i+b_i} = 1,$$

josta kirjoittamalla tulot auki ja kertomalla molemmat puolet yhteisellä nimittäjällä saadaan

$$\left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/n}\right)^n \leq \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i).$$

Brunnin ja Minkowskin epäyhtälö on siis voimassa, kun A ja B ovat laatikoita.

Seuraava vaihe on todistaa lause joukoille, jotka ovat näiden laatikoiden äärellisiä yhdisteitä siten, että laatikoiden sisukset ovat pistevieraita. Käytetään todistustekniikkana induktiota laatikoiden lukumäärän suhteen. Edellä osoitettiin, että epäyhtälö on voimassa, kun laatikoiden yhteismäärä $m = 2$. Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan epäyhtälö on voimassa, kun laatikoiden yhteismäärä yhdisteissä on pienempi kuin m. Toisin sanoen (6) pätee, kun yhdisteen $A \cup B$ muodostavien laatikoiden lukumäärä on pienempi kuin m. Olkoot nyt A ja B yhdisteitä laatikoista siten, että laatikoita on yhteensä m kappaletta. Koska laatikot ovat sisukseltaan keskenään pistevieraita jan niiden "särmät"ovat koordinaattiakseleiden suuntaisia, saadaan joukon A mahdollisen siirron jälkeen, että hypertaso $\{x_n = 0\}$ erottaa kaksi A:n laatikkoa. Merkitään $A_+ = A \cap \{x_n \geq 0\}$. Vastaavasti toista puolta A:sta merkitään A_-. Merkitään lisäksi

$$\lambda := \frac{V(A_+)}{V(A)},$$

jolloin $0 < \lambda < 1$. Siirretään nyt yhdistettä B sen verran, että sama hypertaso jakaa B:n osiin B_+ ja B_- samassa suhteessa kuin A:n eli

$$\frac{V(B_+)}{V(B)} = \lambda.$$

Huomaa, että $A_+ + B_+ \subset \{x_n \geq 0\}$ ja $A_- + B_- \subset \{x_n \leq 0\}$ ja että joukoissa $A_- \cup B_-$ ja $A_+ \cup B_+$ on molemmissa vähemmän kuin m laatikkoa. Käyttämällä induktio-oletusta (6) joukkoihin $A_- + B_-$ ja $A_+ + B_+$ saadaan

$$\begin{aligned}
V(A+B) &= V(A_+ + B_+) + V(A_- + B_-) + V(A_+ + B_+) + V(A_+ + B_-) \\
&\geq V(A_+ + B_+) + V(A_- + B_-) \\
&\geq \big(V(A_+)^{1/n} + V(B_+)^{1/n}\big)^n + \big(V(A_-)^{1/n} + V(B_-)^{1/n}\big)^n \\
&\geq \lambda\big(V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}\big)^n + (1-\lambda)\big(V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}\big)^n \\
&= \big(V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}\big)^n
\end{aligned}$$

Näin on osoitettu, että Brunnin ja Minkowskin epäyhtälö äärellisille yhdisteille laatikoita. Kun lisäksi tiedetään, että rajoitettua mitallista joukkoa voidaan arvioida tällaisilla joukoilla, on epäyhtälö todistettu kaikille rajoitetuille mitallisille joukoille. □

Huomautus 3.6. Itse asiassa edellä esitetty epäyhtälö on erikoistapaus yleisemmästä muodosta. Nimittäin jokaiselle $0 < \lambda < 1$ pätee

$$V_n((1-\lambda)A + \lambda B)^{1/n} \geq V_n((1-\lambda)A)^{1/n} + V_n(\lambda B)^{1/n},$$

josta 3.5 saadaan, kun asetetaan $\lambda = \frac{1}{2}$.

3.2 Ratkaisun olemassaolo

Seuraavaksi osoitetaan, että Brunnin ja Minkowskin epäyhtälöstä seuraa isoperimetrinen epäyhtälö. Johdetaan isoperimetrinen epäyhtälö ensin ilman yhtäsuuruustarkastelua ja käydään sitten tarkastelemaan, missä tilanteessa yhtäsuuruus pätee.

Määritelmä 3.7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ ja $B \subset \mathbb{R}^n$ yksikköpallo. Määritellään joukon A reunan *Minkowskin (ulko)mitta*

$$\mu_+(A) = \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{V(A + \epsilon B) - V(A)}{\epsilon}$$

Huomautus 3.8. Jos joukon A reuna on paloittain sileä tai A on kompakti ja konveksi, niin määritelmä yhtyy totuttuun A:n pinta-alan määritelmään ([Fe], Lause 3.2.39, s. 275).

Lause 3.9 (Ratkaisun olemassaolo). *Olkoon joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ reuna paloittain sileä ja $B = \overline{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Silloin A:n reunan pinta-ala on vähintään yhtä suuri kuin sen pallon reunan ala, jolla on sama tilavuus kuin joukolla A. Kaavamaisesti lausuttuna joukolle A pätee*

$$S(A) \geq nV(A)^{\frac{n-1}{n}} V(B)^{1/n} \tag{7}$$

TODISTUS. Lauseen todistus etenee suoraviivaisella laskulla käyttäen hyväksi Brunnin ja Minkowskin epäyhtälöä ja binomikaavaa.

$$\begin{aligned}
S(A) &= \mu_+(A) \\
&= \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{V(A + \epsilon B) - V(A)}{\epsilon} \\
&\geq \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\Big(V(A)^{1/n} + \epsilon V(B)^{1/n}\Big)^n - V(A)}{\epsilon} \\
&= \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \big(V(A)^{1/n}\big)^{n-p} \big(\epsilon V(B)^{1/n}\big)^p - V(A)}{\epsilon} \\
&= \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{V(A) + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \big(V(A)^{1/n}\big)^{n-p} \epsilon^p \big(V(B)^{1/n}\big)^p - V(A)}{\epsilon} \\
&= \liminf_{\epsilon \to 0} \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \big(V(A)^{1/n}\big)^{n-p} \epsilon^{p-1} \big(V(B)^{1/n}\big)^p \\
&= n\big(V(A)^{1/n}\big)^{n-1} V(B)^{1/n} = nV(A)^{\frac{n-1}{n}} V(B)^{1/n}
\end{aligned}$$

Laskun tuloksena saatiin, että (7) pätee joukolle A ja lause on todistettu. □

Lause osoittaa, että joukon reunan mitalla on alaraja ja että se saavutetaan eli että pallo on reunan pinta-alan minimoiva kappale. Tähän mennessä ei kuitenkaa otettu kantaa siihen, löytyykö muita minimoivia joukkoja. Täytyy siis vielä osoittaa, että pallo on ainoa minimoiva joukko. Jatketaan tutkimusta karsimalla potentiaalisten minimoijien joukosta kaikki ei-konveksit joukot. Tämän jälkeen rajoitutaan tarkastelemaan konvekseja joukkoja ja todetaan, että niiden joukossa pallo on ainoa minimoiva joukko. Sitä ennen esitellään Steinerin todistuksessaan käyttämä geometriaan perustuva menetelmä, jota tarvitsemme tämän luvun lopussa, nimittäin Steinerin symmetrisaatio.

3.3 Steinerin symmetrisaatio

Symmetrisaatiolla tarkoitetaan joukolle tehtävää operaatiota, jonka tuloksena saadaan uusi joukko, jolla on haluttuja symmetriaominaisuuksia. Hyvä symmetrisaatio säilyttää joitakin alkuperäisen joukon ominaisuuksia ja muuttaa toisia monotonisesti.

Steinerin symmetrisaatiossa valitaan ensin hypertaso H, jonka suhteen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ symmetrisoidaan. Symmetrisointi tapahtuu siten, että A:n projektio H:lle ei muutu eli A ei veny tai kutistu H:n suunnassa. Symmetrisaation seurauksena saatu joukko on symmetrinen H:n suhteen.

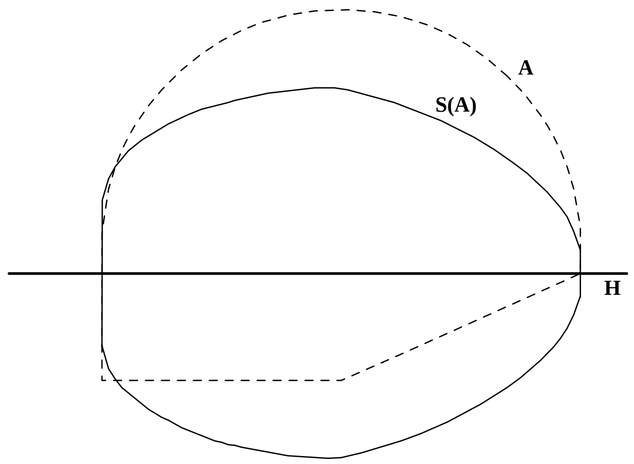
Määritelmä 3.10 (Steinerin symmetrisaatio). Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksi ja $h \in \mathbb{R}^n$ vektori. Määritellään vektoria h vastaan kohtisuora hypertaso $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x|h) = 0\}$ Joukon A Steinerin symmetrisaatio on joukko

$$S_H(A) = \Big\{(x,t) \in H \times \mathbb{R} : A \cap (x + \mathbb{R}h) \neq \emptyset, |t| \leq \frac{1}{2}|A \cap (x + \mathbb{R}h)|\Big\},$$

missä $|\cdot|$ on yksiulotteinen Lebesgue-mitta suoralla $x+\mathbb{R}h$. Toisin sanoen joukosta A konstruoidaan H:n suhteen symmetrinen joukko $S_H(A)$ siten, että seuraavat ehdot täyttyvät:

1. Jokainen tasoa H vastaan kohtisuora suora, joka leikkaa toista joukoista A tai $S_H(A)$ leikkaa myös toista joukkoa ja näiden leikkausten yksiulotteiset Lebesguen mitat ovat yhtä suuret.

2. Joukon $S_H(A)$ ja H:ta vastaan kohtisuoran suoran leikkausjoukko on yhtenäinen.



Lause 3.11 (Steinerin symmetrisaation ominaisuuksia). *Steinerin symmetrisaatiolla voidaan osoitaa olevan seuraavat ominaisuudet:*

1. *Steinerin symmetrisaatio säilyttää konveksiuden.*
2. *Steinerin symmetrisaatio säilyttää tilavuuden eli* $V(S_H(A)) = V(A)$.
3. *Steinerin symmetrisaatio ei kasvata reunan alaa eli* $S(S_H(A)) \leq S(A)$

Steinerin symmetrisaation ominaisuuksia käsitellään lähteessä [BZ], s. 77-81.

3.4 Ratkaisun yksikäsitteisyys

Edellä esiteltyjen valmistelujen jälkeen päästään osoittamaan, että pallo on ainoa joukko, jolle yhtäsuuruus isoperimetrisessä epäyhtälössä toteutuu. Näytetään ensin, että ei-konveksi joukko ei voi minimoida reunan alaa.

Määritelmä 3.12 (Tiheyspisteiden joukko). Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ tiheyspisteiden joukko on

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{\epsilon \to 0} \frac{V(A \cap B(x,\epsilon))}{V(B(x,\epsilon))} = 1 \right\},$$

missä $B(x,\epsilon)$ on avoin x-keskinen, ϵ-säteinen pallo. Merkitään joukon A tiheyspisteiden sulkeumaa A_0. Tiedetään, että $V(A_0) = V(A)$. Kun A on suljettu, niin $A_0 \subset A$.

Lemma 3.13. *Jos A on ei-konveksi kompakti joukko, jolla on positiivinen tilavuus $\mathbb{R}^n$:ssä, niin on olemassa ääretön sylinteri Q (jonka pystysuora leikaus on $(n-1)$-ulotteinen kuutio), joka jaetaan kahdella korkeusjanaa vastaan kohtisuoralla leikkauksella kolmeen osaan Q_1, Q_2 ja Q_3 siten, että äärellisen osan Q_2 sisällä ei* *ole A:n pisteitä, kun taas suljetut äärettömät osat Q_1 ja Q_3 sisältävät A:n pisteitä ja $V(Q_3 \cap A) > 0$. Jos edelleen $A = A_0$, niin myös $V(Q_1 \cap A) > 0$.*

TODISTUS. Koska A on suljettu tiedetään, että $A_0 \subset A$. Tarkastellaan kahta vaihtoehtoa:

1. Oletetaan, että $A \backslash A_0 \neq \emptyset$, jolloin voidaan valita $a \in A \backslash A_0$. Antiteesin kautta todetaan, että löytyy piste $b \in A_0$ siten, että jokin janan $l = ab$ piste $p \notin A$.

   Nimittäin oletetaan hetkeksi, että tällaista pistettä ei löydy vaan kaikille $b \in A_0$ jana $ab \subset A$. Koska $b \in A_0$, mielivaltaisen läheltä b:tä löytyy tiheyspiste b', jolle
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{V(A \cap B_\epsilon)}{B_\epsilon} = 1,$$
   missä $B_\epsilon = B(b', \epsilon)$. Erityisesti jokaiselle $\delta > 0$ löytyy $\epsilon > 0$ s.e.
$$\frac{V(A \cap B_r)}{B_r} > 1 - \delta, \textit{ kun } 0 < r < \epsilon. \tag{8}$$
   Kiinnitetään $\delta > 0$, sitä vastaava $\epsilon > 0$ ja $r = \epsilon/2$ ja määritellään näiden avulla joukko $C := \{ax : x \in B_r\}$ joka siis on kaikkien niiden janojen joukko, joiden toinen päätepiste on a ja toinen pallossa B_r. Konstruoidaan vielä pistejono $\{b'_i\}$ s.e. $b'_i \in ab$ jokaisella i ja $|ab'_i| = \frac{|ab'|}{i}$. Näiden valmistelujen jälkeen voidaan ensinnäkin todeta, että näin määriteltynä pallo B_r toteuttaa ehdon (8). Lisäksi jokaiselle indeksille i pallo $B_i := B(b'_i, \frac{r}{i}) \subset C$ joten jokaiselle $x \in A \cap B_r$ löytyy $x_i \in A \cap B_i$ (koska jana $ax \subset A$). Siten joukko $A \cap B_i$ on joukon $A \cap B$ dilaatio (kutistus) pisteen a suhteen ja siten joukkojen $A \cap B_i$ ja B_i mittojen suhde säilyy joten myös B_i toteuttaa ehdon (8). Näin saatiin konstruoitua jono tiheyspisteitä b_i s.e. $\lim_{i \to \infty} |a - b'_i| = 0$. Täten on näytetty, että $a \in A_0$, mikä on vastoin oletusta a:n valinnasta. Siispä antiteesimme on väärä eli toivottu piste $p \notin A$ löytyy. Koska A on suljettu ja A^c siten avoin, löytyy $\delta > 0$ s.e. pallo $B(p, \delta)$ ei leikkaa joukkoa A. Tätä palloa $B(p, \delta)$ käyttäen on nyt helppo muodostaa haluttu sylinteri Q kahdella janan l suuntaisella leikkauksella s.e. $l \subset Q$. Jakamalla Q kolmeen osaan Q_1, Q_2 ja Q_3 s.e. $Q_2 \subset D(p, \delta)$ saadaan, että $a \in Q_1$ ja Q_3 sisältää pisteen $b \in A_0$ ympäristön, joten $V(Q_3 \cap A) > 0$.

2. Oletetaan, että $A = A_0$. Koska A ei ole konveksi, löytyvät pisteet $a, b \in A$ s.e. jana $l = ab$ sisältää A:n komplementin pisteen p. Nyt voidaan samaan tapaan kuin ykköskohdassa muodostaa haluttu sylinteri Q. Nyt toinen osista Q_1 ja Q_3 sisältää pisteen a ympäristön ja toinen pisteen b ympäristön joten $V(Q_1 \cap A) > 0$ ja $V(Q_3 \cap A) > 0$.

Molemmissa tapauksissa kuvailtu sylinteri siis löytyi joten lemma on todistettu. □

Lause 3.14. *Olkoot A ja B kompakteja ei-nollamittaisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja s.e. A ei ole konveksi. Silloin*

$$V(A+B) > [V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n.$$

TODISTUS. Määritellään joukko Q kuten lemmassa 3.13 ja nimetään Q:n sivut $Q_1, \ldots, Q_{2(n-1)}$ s.e. Q_{2i-1} ja Q_{2i} ovat vastakkaiset eli samansuuntaiset sivut, kun $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Jaetaan joukko A putken Q:n sivujen määrittelemillä hypertasoilla $n-1$ vaiheessa s.e. lopputuloksena syntyy A:n ositus putken Q sisäpuoliseen ja ulkopuoliseen osaan.

Ensimmäisessä vaiheessa jaetaan A ensin hypertasolla $S_1 \supset Q_1$ osiin A_1' ja A_1'' s.e. A_1'' on samassa puoliavaruudessa kuin sylinteri Q ja $V(A_1') = \lambda_1 V(A)$. Joukko B jaetaan samansuuntaisella hypertasolla osiin B_1' ja B_1'' s.e. $V(B_1') = \lambda_1 V(B)$. Nyt

$$\begin{aligned} V(A+B) &\geq V(A_1' + B_1') + V(A_1'' + B_1'') \\ &\geq [V^{1/n}(A_1') + V^{1/n}(B_1')]^n + V(A_1'' + B_1'') \\ &\geq \lambda_1 [V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + V(A_1'' + B_1'') \end{aligned}$$

Sitten jaetaan joukko A_1'' hypertasolla $S_2 \supset Q_2$ osiin A_2' ja A_2'' s.e. A_2'' on samassa puoliavaruudessa kuin sylinteri Q ja $V(A_2') = \lambda_2 V(A_1'')$. Joukko B_1'' jaetaan taas samansuuntaisella hypertasolla samassa suhteessa kuin A_1''. Joukko A_2'' on nyt se osa A:sta, joka on kahden em. hypertason välissä. Saadaan

$$\begin{aligned} V(A_1'' + B_1'') &\geq V(A_2' + B_2') + V(A_2'' + B_2'') \\ &\geq [V^{1/n}(A_2') + V^{1/n}(B_2')]^n + V(A_2'' + B_2'') \\ &\geq \lambda_2 [V^{1/n}(A_1'') + V^{1/n}(B_1'')]^n + V(A_2'' + B_2'') \\ &\geq \lambda_2 (1-\lambda_1) [V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + V(A_2'' + B_2'') \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} V(A+B) &\geq V(A_1' + B_1') + V(A_2' + B_2') + V(A_2'' + B_2'') \\ &\geq [V^{1/n}(A_2') + V^{1/n}(B_2')]^n + V(A_2'' + B_2'') \\ &\geq \Big(\lambda_1 + \lambda_2(1-\lambda_1)\Big) [V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + V(A_2'' + B_2'') \\ &\geq \Big(1 - (1-\lambda_2)(1-\lambda_1)\Big) [V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + V(A_2'' + B_2'') \end{aligned}$$

Vaiheessa $2 \leq i \leq n-1$ jaetaan edellisten vaiheiden hypertasojen rajaama joukko A_{2i-2}'' ensin hypertasolla $S_{2i-1} \supset Q_{2i-1}$ osiin A_{2i-1}' ja A_{2i-1}'' s.e. A_{2i-1}'' on samassa puoliavaruudessa sylinterin Q kanssa ja $V(A_{2i-1}') = \lambda_{2i-1} V(A_{2i-2}'')$. Joukon B jaossa syntynyt joukko B_{2i-2}'' jaetaan samansuuntaisella hypertasolla osiin B_{2i-1}' ja B_{2i-1}'' s.e. $V(B_{2i-1}') = \lambda_{2i-1} V(B_{2i-2}'')$. Sitten jaetaan joukko A_{2i-1}'' hypertasolla

$S_{2i} \supset Q_{2i}$ osiin A'_{2i} ja A''_{2i} s.e. A''_{2i} on samassa puoliavaruudessa kuin sylinteri Q ja $V(A'_{2i}) = \lambda_{2i} V(A''_{2i-1})$. Joukko B''_{2i-1} jaetaan taas samansuuntaisella hypertasolla samassa suhteessa kuin A''_{2i-1}.

Seuraavaksi osoitetaan induktiolla, että i:n ositusoperaation jälkeen pätee

$$V(A+B) \geq \Big(1 - \prod_{j}^{2i}(1-\lambda_j)\Big)[V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + V(A''_{2i} + B''_{2i})$$

Vaihtoehto $i = 1$ on jo käsitelty yllä. Tehdään induktio-oletus eli oletetaan, että

$$V(A+B) \geq \Big(1 - \prod_{j}^{2(i-1)}(1-\lambda_j)\Big)[V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + V(A''_{2(i-1)} + B''_{2(i-1)})$$

Jakamalla joukot $A''_{2(n-1)}$ ja $B''_{2(n-1)}$ yllä kerrotulla tavalla saadaan

$$V(A''_{2i-2} + B''_{2i-2}) \geq V(A'_{2i-1} + B'_{2i-1}) + V(A''_{2i-1} + B''_{2i-1})$$

ja

$$V(A''_{2i-1} + B''_{2i-1}) \geq V(A'_{2i} + B'_{2i}) + V(A''_{2i} + B''_{2i})$$

eli

$$\begin{aligned}
V(A''_{2(i-1)} + B''_{2(i-1)}) \geq & V(A'_{2i-1} + B'_{2i-1}) + V(A'_{2i} + B'_{2i}) + V(A''_{2i} + B''_{2i}) \\
\geq & [V^{1/n}(A''_{(2i-1)}) + V^{1/n}(B'_{(2i-1)})]^n \\
& + [V^{1/n}(A''_{(2i)}) + V^{1/n}(B'_{(2i)})]^n + V(A''_{2i} + B''_{2i}) \\
\geq & \lambda_{2i-1}[V^{1/n}(A''_{(2i-2)}) + V^{1/n}(B'_{(2i-2)})]^n \\
& + \lambda_{2n}[V^{1/n}(A''_{(2i-1)}) + V^{1/n}(B'_{(2i-1)})]^n + V(A''_{2i} + B''_{2i}) \\
\geq & \lambda_{2i-1}[V^{1/n}(A''_{(2i-2)}) + V^{1/n}(B'_{(2i-2)})]^n \\
& + \lambda_{2i}(1-\lambda_{2i-1})[V^{1/n}(A''_{(2i-2)}) + V^{1/n}(B'_{(2i-2)})]^n \\
& + V(A''_{2i} + B''_{2i})
\end{aligned}$$

Sijoittamalla

$$V(A''_{(2n-2)}) = \prod_{j}^{2n-2}(1-\lambda_j)V(A)$$

ja

$$V(B''_{(2n-2)}) = \prod_{j}^{2n-2}(1-\lambda_j)V(B)$$

Saadaan

$$
\begin{aligned}
V(A''_{2(i-1)}+B''_{2(i-1)}) \geq & \lambda_{2i-1}\prod_j^{2i-2}(1-\lambda_j)[V^{1/n}(A)+V^{1/n}(B)]^n \\
& + \lambda_{2i}(1-\lambda_{2i-1})\prod_j^{2i-2}(1-\lambda_j)[V^{1/n}(A)+V^{1/n}(B)]^n \\
& + V(A''_{2i}+B''_{2i}) \\
= & (\lambda_{2i-1}+\lambda_{2i}(1-\lambda_{2i-1})\prod_j^{2i-2}(1-\lambda_j)[V^{1/n}(A)+V^{1/n}(B)]^n \\
& + V(A''_{2i}+B''_{2i}) \\
= & (1-(1-\lambda_{2i-1})(1-\lambda_{2i}))\prod_j^{2i-2}(1-\lambda_j)[V^{1/n}(A)+V^{1/n}(B)]^n \\
& + V(A''_{2i}+B''_{2i}) \\
= & \left(\prod_j^{2i-2}(1-\lambda_j)-\prod_j^{2i}(1-\lambda_j)\right)[V^{1/n}(A)+V^{1/n}(B)]^n \\
& + V(A''_{2i}+B''_{2i})
\end{aligned}
$$

Siis kokonaisuudessaan

$$
\begin{aligned}
V(A+B) \geq & (1-\prod_j^{2i-2}(1-\lambda_j)+\prod_j^{2i-2}(1-\lambda_j)-\prod_j^{2i}(1-\lambda_j))[V^{1/n}(A)+V^{1/n}(B)]^n \\
& + V(A''_{2i}+B''_{2i}) \\
= & (1-\prod_j^{2i}(1-\lambda_j))[V^{1/n}(A)+V^{1/n}(B)]^n + V(A''_{2i}+B''_{2i})
\end{aligned}
$$

Merkitään $\lambda := \prod_j^{2n-2}(1-\lambda_j)$, $a := A''_{2n-2} = A\cap Q$ ja $b := B''_{2n-2}$, jolloin $V(a) = \lambda V(A)$ ja $V(b) = \lambda V(B)$. Saadaan siis

$$V(A+B) \geq (1-\lambda)[V^{1/n}(A)+V^{1/n}(B)]^n + V(a+b)$$

Joukko A koostuu kahdesta epätyhjästä joukosta $a' = A\cap Q_1$ ja $a'' = A\cap Q_3$, s.e. $V(a') = \delta V(a)$ ja $V(a'') > 0$. Siirretään joukkoa Q_2 rajaavia sylinteriä vastaan kohtisuoria tasoja siten, että tasot sisältävät joukkojen a' ja a'' pisteitä. Siirretään sitten origo joukon Q_2 keskipisteeseen ja x_1-akseli kulkemaan putken Q suuntaisesti.

Siirretään seuraavaksi joukkoa b s.e. hypertaso $x_1 = 0$ jakaa b:n samassa suhteessa kuin joukon a. Jos siirto ei ole yksikäsitteinen, siirretään sen verran, että joukolla

$\beta = b'' \cap Q_2 \cap \{x : x_1 > 0\}$ on positiivista mittaa. Valitaan $p \in a'$. Nyt $(p+\beta) \subset (a'+b'')$ ja $(p+\beta) \cap a = \emptyset$ eli

$$
\begin{aligned}
V(a+b) &= V\Big((a'+b') \cup (a''+b'') \cup (a'+b'') \cup (a''+b')\Big) \\
&\geq V\Big((a'+b') \cup (a''+b'') \cup (a'+b'')\Big) \\
&\geq V\Big((a'+b') \cup (a''+b'') \cup (p+\beta)\Big) \\
&= V(a'+b') + V(a''+b'') + V(p+\beta) \\
&= V(a'+b') + V(a''+b'') + V(\beta)
\end{aligned}
$$

Siispä

$$
\begin{aligned}
V(A+B) \geq &(1-\lambda)[V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + V(a'+b') + V(a'+b') + V(\beta) \\
\geq &(1-\lambda)[V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + [V^{1/n}(a') + V^{1/n}(b')]^n \\
&+ [V^{1/n}(a'') + V^{1/n}(b'')]^n + V(\beta) \\
= &(1-\lambda)[V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + \delta[V^{1/n}(a) + V^{1/n}(b)]^n \\
&+ (1-\delta)[V^{1/n}(a) + V^{1/n}(b)]^n + V(\beta) \\
= &(1-\lambda)[V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + [V^{1/n}(a) + V^{1/n}(b)]^n + V(\beta) \\
= &(1-\lambda)[V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + \lambda[V^{1/n}(a) + V^{1/n}(b)]^n + V(\beta) \\
= &[V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n + V(\beta) \\
> &[V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)]^n,
\end{aligned}
$$

mikä todistaa lauseen. □

Pitkähkön väännön jälkeen päästiin lopulta siihen tulokseen, että toisen joukoista A, B ollessa epäkonveksi yhtäsuuruus ei Brunnin ja Minkowskin epäyhtälössä voi toteutua. Tästä seuraa vastaava tulos isoperimetriselle epäyhtälölle.

Seuraus 3.15. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ tilavuudeltaan positiivinen, epäkonveksi joukko. Silloin isoperimetrinen epäyhtälö joukolle A on aito eli*

$$S(A) > nV(A)^{\frac{n-1}{n}} V(B)^{1/n}.$$

Tulos saadaan käyttämällä lausetta 3.14 hyväksi lauseen 3.9 todistuksessa.

Seuraus 3.16. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja B yksikköpallo s.e.*

$$S(A) = nV(A)^{\frac{n-1}{n}} V(B)^{1/n}.$$

Silloin edellisestä seurauksesta seuraa suoraan, että A on konveksi.

Näiden valmistelujen jälkeen voidaan todistaa, että pallo on ainoa reunan pinta-alan minimoiva alkio.

Lause 3.17. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ reunaltaan paloittain sileä joukko, joka minimoi reunan alan, toisin sanoen*

$$S(A) = nV(A)^{\frac{n-1}{n}} V(B)^{1/n}.$$

Silloin A on pallo.

Todistus. Seurauksen 3.16 mukaan A on konveksi. Olkoon $H \subset \mathbb{R}^n$ hypertaso. Valitaan koordinaatisto siten, että H kulkee A:n massakeskipisteen kautta ja toteutaa yhtälön $x_n = vakio$. Merkitään G:llä sen joukon sisusta, joka saadaan projisoimalla joukko A hypertasolle H. Reuna ∂A jakautuu kolmen osaan A_1, A_2 ja A_3, missä A_1 on konveksin funktion $x_n = g(x_1, \dots x_{n-1})$, $(x_1, \dots x_{n-1}) \in G$ kuvaaja, A_2 on konkaavin funktion $x_n = f(x_1, \dots x_{n-1})$, $(x_1, \dots x_{n-1}) \in G$ kuvaaja ja A_3 koostuu x_n-akselin suuntaisista janoista $\{(x_1, \dots, x_{n-1}, t) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \partial G,\ t \in \mathbb{R})\}$. Mazurin lauseen ([Ro], luku 25, erityisesti lause 25.4 tai [ET], seuraus 6.2.) mukaan konveksilla funktiolla on osittaisderivaatat melkein kaikkialla ja tuntemalla funktion arvo yhdessä pisteessä saadaan muut arvot laskettua integroimalla funktion derivaattoja. Konveksin joukon kyseessä ollessa voidaan käyttää normaalia alaa, joka lasketaan

$$S(A_1) = \int_G \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, \mathrm{d}x.$$

Samoin

$$S(A_2) = \int_G \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, \mathrm{d}x$$

ja

$$S(A_3) = \int_{\partial G} f - g \, \mathrm{d}x.$$

Kokonaisuudessaan

$$S(A) = \int_G \sqrt{1 + |\nabla g|^2} + \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial G} f - g \, \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Steinerin symmetrisaatiossa joukko säilyy konveksina. Symmetrisaation jälkeen joukkoa rajoittavat konveksi funktio $\frac{g-f}{2}$, konkaavi funktio $\frac{f-g}{2}$ ja x_n-akselin suuntaiset janat. Tällöin reunan alaksi saadaan

$$\begin{aligned} S(S(A)) &= \int_G \sqrt{1 + \left|\nabla \frac{f-g}{2}\right|^2} \, \mathrm{d}x + \int_G \sqrt{1 + \left|\nabla \frac{g-f}{2}\right|^2} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial G} \frac{f-g}{2} - \frac{g-f}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_G \sqrt{4 + |\nabla f - \nabla g|^2} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial G} f - g \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{10}$$

Tutkitaan gradienttien ∇f ja ∇g arvoja pisteessa $x \in G$. Merkitään lyhyyden vuoksi $\nabla f =: a \in \mathbb{R}^{n-1}$ ja $\nabla g =: b \in \mathbb{R}^{n-1}$. Vektorin a normia merkitään $|a|$ ja a:n ja b:n sisätuloa $(a|b)$. Vektoreille a ja b pätee Cauchy'n epäyhtälö, jonka mukaan

$$(a|b) \leq |a||b| \tag{11}$$

ja yhtäsuuruus on voimassa, kun a ja b ovat lineaarisesti riippuvia. Toisaalta tiedetään, että aina pätee

$$|a+b| \geq 0. \tag{12}$$

ja yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $a = -b$. Kohdista (11) ja (12) seuraa, että

$$(a|b)^2 - |a|^2|b|^2 \leq |a|^2 + 2(a|b) + |b|^2$$

ja yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $a = -b$. Epäyhtälöä edelleen muokkaamalla saadaan

$$1 - 2(a|b) + (a|b)^2 \leq 1 + |a|^2 + |b|^2 + |a|^2|b|^2$$

ja puolittain neliöjuuren ottamisen jälkeen

$$1 - (a|b) \leq \sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}.$$

Kerrotaan epäyhtälö kahdella ja lisätään molemmille puolille termi $2 + |a|^2 + |b|^2$, jonka jälkeen päästään muotoon

$$4 + |a|^2 - 2(ab) + |b|^2 \leq 1 + |a|^2 + 1 + |b|^2 + \sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}.$$

Huomaamalla, että $|a-b|^2 = |a|^2 - 2(a|b) + |b|^2$ ja ottamalla jälleen neliöjuuri kummaltakin puolelta saadaan

$$\sqrt{4+|a-b|^2} \leq \sqrt{1+|a|^2} + \sqrt{1+|b|^2}.$$

Muistaen aiemmin tehdyt sopimukset merkinnöistä huomataan nyt, että jokaiselle $x \in G$

$$\sqrt{4+|\nabla f(x) - \nabla g(x)|^2} \leq \sqrt{1+|\nabla f(x)|^2} + \sqrt{1+|\nabla g(x)|^2}.$$

Kun tarkastellaan, mitä tulos tarkoittaa A:n ja sen symmetrisaation $S(A)$ reunan alojen osalta (kohdat (9) ja (10)), huomataan, että symmetrisaatio pienentää (tai säilyttää samana) joukon A reunan alan. Toisaalta Steinerin symmetrisaarion ominaisuuksiin kuuluu, että se säilyttää joukon n-ulotteisen Lebesguen mitan. Tästä seuraa ristiriita, koska alkuoletuksena oli, että A on reunan mitan minimoiva joukko. Toisin sanoen kaikilla $x \in G$ täytyy siis olla $\nabla f = -\nabla g$, josta seuraa, että $\nabla f + \nabla g = 0$ eli $f + g$ on vakio. Tästä seuraa, että A:lla on symmetriataso, joka on tason H suuntainen. Koska H kulkee A:n massakeskipisteen kautta, on H itse tämä symmetriataso. Näin on siis todistettu, että mielivaltaisesti valittu A:n massakeskipisteen kautta kulkeva hypertaso on A:n symmetriataso. Tämä riittää osoittamaan, että A on pallo. $\square$

4 Laajennus äärellisen perimeetterin joukoille

Viimeisessä luvussa laajennetaan edellä saatuja tuloksia suuremmalle joukolle kuin joukot joiden reuna on jatkuvasti differentioituva. Osiossa laajennetaan joukon reunan käsitettä määrittelemällä ns. Caccioppoli-joukot ja todetaan, että tällaisia joukkoja voidaan arvioida mielivaltaisen tarkasti joukoilla, joiden reuna on sileä.

4.1 Määritelmiä ja merkintöjä

Aluksi esitellään eräitä mittateriaan ja funktionaalianalyysiin liittyviä määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan myöhemmin tässä luvussa. Hyvä lähde, josta muun muassa nämä määritelmät ja lauseet todistuksineen löytyvät on [EG].

Merkintä 4.1. Joukon A karakteristinen funktio on funktio χ_A, jolle

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A \\ 0, & \text{kun } x \notin A. \end{cases}$$

Merkintä 4.2. Joukon tilavuutta ja reunan alaa koskevat merkinnät muuttuvat hieman luvun 3 vastaavista. Jatkossa joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ n-ulotteista tilavuutta merkitään $|E|$ ja se määritellään

$$|E| = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \, \mathrm{d}x,$$

kun χ_E on E:n karakteristinen funktio. Jos E:n reuna on jatkuvasti differentioituva, määritelmä yhtyy luvusta 3 tutun merkinnän kanssa eli

$$|E| = V(E). \tag{13}$$

Hieman myöhemmin määritellään tutkittaville joukoille reunan mitta $P(E)$, joka siistin joukon tapauksessa vastaa edellisessä luvussa käytettyä E:n reunan $n-1$-ulotteista alaa $S(E)$. Näin isoperimetrinen epäyhtälö saa muodon

$$P(E) \geq n|B|^{1/n}|E|^{\frac{n-1}{n}}, \tag{14}$$

missä B on avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallo.

Määritelmä 4.3 (Lebesgue-avaruus). Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja $1 \leq p < \infty$. Lebesgue-avaruus $L^p(\Omega)$ on avaruuden $C^\infty(\Omega)$ täydellistymä normin $\|\cdot\|_p$ suhteen.

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x\Big)^{1/p} < \infty, f \; on \; Lebesgue-mitallinen\}.$$

Tässä osiossa tarvitaan erityisesti Lebesgue-avaruutta $L^1(\Omega)$, jonka osajoukko myöhemmin määriteltävä rajoitetusti heilahtelevien funktioiden avaruus $BV(\Omega)$ on.

Määritelmä 4.4 (σ-algebra, Borelin σ-algebra ja Borel-joukko). Kokoelma $\mathcal{A}$ avaruuden X joukkoja on σ-algebra, jos se täyttää seuraavat ehdot:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. jos $A \in \mathcal{A}$, niin $X \setminus A \in \mathcal{A}$
3. jos $A_k \in \mathcal{A}, (k = 1, \dots)$, niin $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Borelin σ-algebra on pienin σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot. Borel-joukko on Borelin σ-algebran alkio.

Määritelmä 4.5 (Kompaktikantajainen funktio). Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on kompaktikantajainen, jos on olemassa suljettu ja rajoitettu joukko $A \subset \Omega$ s.e. $f(x) = 0$ kaikille $x \in \Omega \setminus A$. Kompaktikantajaisten funktioiden avaruutta merkitään alaindeksillä 0, esimerkiksi jatkuvien, kompaktikantajaisten funktioiden avaruutta merkitään C_0.

Lause 4.6 (Rieszin esityslause). *Olkoon $L : C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ lineaarinen funktionaali, jolle*

$$\sup\{L(f) : f \in C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, \ \operatorname{spt} f \subset K\} < \infty$$

jokaiselle kompaktille osajoukolle $K \subset \mathbb{R}^n$. Silloin on olemassa Radon-mitta μ ja μ-mitallinen funktio $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s.e.

1. *$|\sigma(x)| = 1$ μ m.k. x ja*
2. *$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma \, \mathrm{d}\mu$*

kaikille $f \in C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

Todistus. Lause todistuksineen löytyy lähteestä [EG], s. 49-53. □

Lause 4.7. *Olkoot f, $f_j \in L^1(\Omega)$, $j = 1, 2, \dots$ ja*

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\Omega} |f_j - f| \, \mathrm{d}x = 0.$$

Silloin on olemassa osajono $\{f_{j_k}\}$ s.e.

$$f_{j_k}(x) \to f(x) \ \text{m.k.} \ x \in \Omega.$$

Todistus. Monotonisen konvergenssin lauseeseen perustuva todistus löytyy lähteestä [EG], s.21-22. □

4.2 Kokonaisheilahtelu

Rajoitetusti heilahtelevien funktioiden teorian rakentamiseksi tarvitaan integroituvan funktion kokonaisheilahtelun käsitteen määrittäminen, mikä tehdään seuraavassa.

Määritelmä 4.8 (Kokonaisheilahtelu). Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin ja $f \in L^1(\Omega)$. Määritellään funktion f kokonaisheilahtelu seuraavasti:

$$\int_\Omega |Df| = \sup \Big\{ \int_\Omega f \operatorname{div} g \, \mathrm{d}x : g = (g_1, \ldots, g_n) \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \\ ja \quad |g(x)| \leq 1 \text{kaikille } x \in \Omega \Big\},$$

missä $\operatorname{div} g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$ on funktion g divergenssi.

Esimerkki 4.9. Jotta ylläoleva määritelmä saisi perusteita olemassaololleen, näytetään seuraavaksi, että siisteille funktioille kokonaisheilahtelu vastaa funktion gradientin normin integrointia.
Olkoon $f \in C^2(\Omega)$. Halutaan siis näyttää, että

$$\int_\Omega |Df| = \int_\Omega |\nabla f|,$$

missä $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ on funktion f gradientti.
Käyttämällä osittaisintegrointikaavaa ja tietoa siitä, että funktio g on nollaa joukon Ω reunalla saadaan, että

$$\int_\Omega f \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega g_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x.$$

Tämä tieto apuna lähdetään kirjoittamaan auki kokonaisheilahtelun määritelmää.

$$\begin{aligned}
\int |Df| \, \mathrm{d}x &= \sup \left\{ \int_\Omega f \operatorname{div} g \, \mathrm{d}x \right\} = \sup \left\{ \int_\Omega f \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right\} \\
&= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \int_\Omega f \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right\} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n - \int_\Omega g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right\} \\
&= \sup \left\{ -\int_\Omega \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right\} = \sup \left\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right\}
\end{aligned}$$

Loppuosa todistuksesta tehdään kahdessa vaiheessa. Ensin osoitetaan, että

$$\sup \left\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right\} \leq \int_\Omega |\nabla f| \, \mathrm{d}x.$$

Tämä onnistuu käyttämällä Schwarzin epäyhtälöä ja tietoa, että $|g(x)| \leq 1$ kaikilla $x \in \Omega$.

$$
\begin{aligned}
\sup\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\right\} &\leq \sup\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n |g_i| \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\,\mathrm{d}x\right\}\\
&\leq \sup\left\{\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |g_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}\mathrm{d}x\right\}\\
&= \sup\left\{\int_\Omega |g(x)||\nabla f|\,\mathrm{d}x\right\} \leq \sup\left\{\int_\Omega |\nabla f|\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= \int_\Omega |\nabla f|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Lopuksi näytetään toteen epäyhtälö toiseen suuntaan eli

$$
\sup\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\right\} \geq \int_\Omega |\nabla f|\,\mathrm{d}x. \tag{15}
$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Määritellään joukot

$$
\begin{aligned}
\Omega_0 &:= \{x \in \Omega : \nabla f(x) = 0\} \quad ja\\
\widetilde{\Omega} &:= \Omega \backslash \Omega_0 = \{x \in \Omega : \nabla f(x) \neq 0\}
\end{aligned}
$$

sekä joukko

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Omega}_\epsilon &:= \left\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \backslash \widetilde{\Omega}) > \epsilon\right\}\\
&= \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\} \cap \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega_0) > \epsilon\}.
\end{aligned}
$$

Määritellään myös funktio $h_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ s.e.

$$
h_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \widetilde{\Omega}_\epsilon\\ 0, & \text{kun } x \in \Omega_0 \cup \partial\Omega. \end{cases}
$$

Hieman myöhemmin, osiossa 4.13 näytetään, että tällainen siisti funktio voidaan konstruoida esimerkiksi $\widetilde{\Omega}_{\frac{\epsilon}{2}}$:n karakteristisen funktion silotuksena.
Kiinnitetään sitten funktio $\tilde{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ seuraavasti:

$$
\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} h_\epsilon(x), & \text{kun } |\nabla f(x)| > 0\\ 0, & \text{kun } |\nabla f(x)| = 0 \end{cases},
$$

jolloin

$$
\tilde{g}_i(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{|\nabla f(x)|} h_\epsilon(x), & \text{kun } |\nabla f(x)| > 0\\ 0, & \text{kun } |\nabla f(x)| = 0 \end{cases}.
$$

Kahden jatkuvasti differentioituvan funktion tulona funktio $\tilde{g}$ on jatkuvasti differentioituva. Tästä sekä ja siitä, että h_ϵ on kompaktikantajainen seuraa, että $\tilde{g} \in C_0^1(\Omega)$. Niinpä lauseketta (15) voidaan arvioida seuraavasti

$$\begin{aligned}
\sup\left\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \right\} &\geq \int_\Omega \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{|\nabla f|} h_\epsilon(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \frac{h_\epsilon(x)}{|\nabla f|} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{h_\epsilon(x)}{|\nabla f|} |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla f| h_\epsilon(x) \,\mathrm{d}x \geq \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon} |\nabla f| h_\epsilon(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon} |\nabla f| \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Koska arvio pätee mielivaltaisen pienelle $\epsilon > 0$, voidaan epsilonin antaa mennä nollaan ja epäyhtälö säilyy. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}
\sup\left\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \right\} &\geq \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla f| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla f| \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0} |\nabla f| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla f| \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Näin on todistettu molemmat epäyhtälöt. Toisin sanoen siistille funktiolle f kokonaisheilahtelu (em. määritelmän mukaan) vastaa sitä mitä pitääkin eli gradientin normin integrointia. Samaa periaatetta käyttäen voidaan osoittaa, että Sobolev-avaruuden $W^{1,1}(\Omega)$ funktiolle f

$$\int_\Omega |Df| = \int_\Omega |\nabla f| \,\mathrm{d}x,$$

missä $\nabla f = (f_1, \ldots, f_n)$ ja $f_1, \ldots, f_n$ ovat f:n yleistettyjä derivaattoja. Kokonaisheilahtelun määritelmä on siis mielekäs.

4.3 Rajoitetusti heilahtelevat funktiot ja Caccioppoli-joukot

Määritelmä 4.10. Funktio $f \in L^1(\Omega)$ on rajoitetusti heilahteleva joukossa Ω, jos $\int_\Omega |Df| < \infty$. Tämän ehdon täyttävät funktiot muodostavat rajoitetusti heilahtelevien funktioiden avaruuden, jota merkitään $BV(\Omega)$.

Määritelmä 4.11 (Joukon perimeetteri, Caccioppoli-joukko). Olkoon E Borel-joukko ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Määritellään joukon E perimeetteri seuraavasti.

$$P(E;\Omega) := \int_\Omega |D\chi_E| = \sup\Big\{ \int_E \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x : \ g \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n), |g(x)| \le 1 \Big\}.$$

Jos $\Omega = \mathbb{R}^n$, niin käytetään merkintää $P(E) = P(E;\mathbb{R}^n)$. Jos joukolla E on lokaalisti äärellinen perimeetteri eli $P(E;\Omega) < \infty$ jokaisella rajoitetulla joukolla Ω, niin E on Caccioppoli-joukko.

Lause 4.12. *Olkoon $f \in BV(\Omega)$. Silloin on olemassa Ω:ssa määritelty Radon-mitta μ ja μ-mitallinen funktio $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ s.e.*

1. $|\sigma(x)| = 1$ μ *m.k. ja*
2. $\int_\Omega f \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g \cdot \sigma \,\mathrm{d}\mu$

kaikille $g \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Todistus. Todistus löytyy tässä esitettävässä muodossa lähteestä ([EG]), s. 167-168.
Määritellään lineaarinen funktionaali $L : C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$

$$L(\varphi) := -\int_\Omega f \operatorname{div} \varphi \,\mathrm{d}x,$$

$\varphi \in C_0^1(\Omega : \mathbb{R}^n)$. Koska $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, niin

$$\sup\big\{L(\varphi) : \varphi \in C_0^1(V;\mathbb{R}^n), |\varphi| < 1\big\} = M(V) < \infty$$

jokaiselle avoimelle joukolle $V \subset\subset \Omega$ ja siksi

$$|L(\varphi)| \le M(V)\|\varphi\|_{L^\infty}$$

jokaiselle $\varphi \in C_0^1(V;\mathbb{R}^n)$.
Kiinnitetään kompakti joukko $K \subset \Omega$ ja valitaan avoin joukko V s.e. $K \subset V \subset\subset \Omega$. Jokaista $\varphi \in C_0$, jolle $\operatorname{spt} \varphi \subset K$, voidaan arvioida jonolla kompaktikantajaisia jatkuvasti derivoituvia funktioita $\varphi_i \in C_0^1(V;\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots$ s.e. $\varphi_i \to \varphi$ pisteittäin V:ssä. Määritellään jonon raja-arvon avulla uusi funktionaali

$$\overline{L}(\varphi) := \lim_{i\to\infty} L(\varphi_k).$$

Koska L on rajoitettu, niin raja-arvo on olemassa ja on riippumaton jonon $\{\varphi\}_k$ valinnasta. Siispä funktionaali L voidaan yksikäsitteisesti laajentaa

$$\overline{L} : C_0(\Omega;\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

ja

$$\sup\left\{\overline{L}(\varphi) : \varphi \in C_0(\Omega;\mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1,\ \operatorname{spt}\varphi \subset K\right\} < \infty$$

jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset \Omega$. Rieszin esityslauseen 4.6 mukaan on olemassa Radon-mitta μ ja μ-mitallinen funktio σ, joka toteuttaa lauseen kohdat 1 ja 2. □

Edellinen lause kertoo, että BV-funktion heikot ensimmäiset osittaisderivaatat ovat Radon-mittoja.

4.4 Silotus

Jotta rajoitetusti heilahtelevia funktioita voitaisi approksimoida siisteillä funktioilla, täytyy löytää sellaisia siistejä funktioita, jotka arvioivat BV-funktioita halutulla tavalla. Tätä tehtävää varten esitellään seuraavaksi funktion silotus.

Määritelmä 4.13 (Silotusydin ja silotus). Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Määritellään joukko $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$. Määritellään myös C^∞-funktio $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seuraavasti

$$\eta(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & jos \quad |x| < 1 \\ 0, & jos \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

missä vakio c asetetaan s.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Näiden valmistelujen jälkeen voidaan määritellä standardi silotusydin

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big)$$

Jokaiselle funktiolle $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ voidaan nyt määritellä silotus f_ϵ pisteittäin seuraavasti

$$f_\epsilon(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y,\ x \in \Omega_\epsilon.$$

Funktion f silottamisesta määritellyllä silotusytimellä käytetään merkintää $*$ eli

$$f_\epsilon = \eta_\epsilon * f,$$

Suoralla laskutoimituksella nähdään, että standardi silotusydin on symmetrinen eli $\eta(x) = \eta(-x)$ ja erityisesti $\eta(x-y) = \eta(y-x)$. Jatkossa silotus tapahtuukin käyttäen yllämainittua standardia silotusydintä ilman erillistä mainintaa.

Lause 4.14. *Silotuksen ominaisuuksia*

1. *Jokaiselle* $\epsilon > 0$ *pätee* $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

2. *Jos* $f \in C(\Omega)$, *niin* $f_\epsilon \to f$ *pisteittäin kaikissa* Ω*:n kompakteissa osajoukoissa.*

3. *Jos* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ *jollekin* $1 \leq p < \infty$, *niin* $f_\epsilon \to f$ *avaruudessa* $L^p_{loc}(\Omega)$. *Itse asiassa* $f_\epsilon(x) \to f(x)$, *kun* x *on Lebesguen piste eli m.k.* x.

4. *Jos* $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *jollekin* $1 \leq p \leq \infty$, *niin*

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial x_i} = \eta_\epsilon * \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad x \in \Omega_\epsilon.$$

5. *Itse asiassa, jos* $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *jollekin* $1 \leq p \leq \infty$, *niin* $f_\epsilon \in W^{1,p}_{loc}(\Omega_\epsilon)$.

TODISTUS. Silotuksen ominaisuuksia on tarkasteltu lähteessä [EG], s. 123. □

4.5 BV-funktion approksimointi

Osoitetaan nyt, että edellä esitellyt siloitukset approksimoivat BV-funktioita toivotulla tavalla.

Lause 4.15 (Puolijatkuvuus). *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *avoin ja* $\{f_j\} \subset BV(\Omega)$ *jono funktioita, joka lähestyy funktiota* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Silloin*

$$\int_\Omega |Df| \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega |Df_j|.$$

TODISTUS. Seuraavassa esitettävä todistus löytyy lähteessä [EG], s. 127. Olkoon $g \in C^1_0$ s.e. $|g| \leq 1$. Silloin

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f \operatorname{div} g \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \lim_{j\to\infty} f_j \operatorname{div} g \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \operatorname{div} g \, \mathrm{d}x \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega |Df_j|.
\end{aligned}$$

Väite seuraa ottamalla supremum yli kaikkien funktioiden $g \in C^1_0$, joille $|g| \leq 1$. □

Huomautus 4.16. Normilla

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_1 + \int_\Omega |Df|$$

varustettu $BV(\Omega)$ on Banach-avaruus.
Suoraan määritelmistä nähdään, että $\|f\|_{BV}$ on normi. Näytetään lisäksi, että edellä mainittu normi tekee avaruudesta täydellisen.
Olkoon $\{f_j\} \subset BV(\Omega)$ Cauchy-jono. Normin määritelmästä seuraa, että se on Cauchy-jono myös avaruudessa $L^1(\Omega)$. $L^1(\Omega)$:n täydellisyydestä puolestaan seuraa, että on olemassa funktio $f \in L^1(\Omega)$ s.e. $f_j \to f$ $L^1(\Omega)$:ssa. Koska $\{f_j\}$ on Cauchy-jono $BV(\Omega)$:ssa, niin $\|f_i\|_{BV}$ on rajoitettu. Tällöin $\int_\Omega |Df_j|$ on rajoitettu, kun $j \to \infty$. Siispä puolijatkuvuuslauseen 4.15 mukaan $f \in BV(\Omega)$. Riittää siis osoittaa, että $f_j \to f$ $BV(\Omega)$:ssa tai koska konvergenssi on jo todettu $L^1(\Omega)$:ssa, että

$$\int_\Omega |D(f_j - f)| \to 0, \text{kun } j \to \infty.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Löytyy $N \in \mathbb{N}$

$$\|f_j - f_k\|_{BV} < \epsilon, \text{kun } j, k > N.$$

Tällöin myös

$$\int_\Omega |D(f_j - f_k)| < \epsilon.$$

Nyt $f_k \to f$ $L^1(\Omega)$:ssa joten $f_j - f_k \to f_j - f$ $L^1(\Omega)$:ssa. Siispä lauseen 4.15 mukaan

$$\int_\Omega |D(f_j - f)| \leq \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega |D(f_j - f_k)| \leq \epsilon.$$

Koska ϵ valittiin mielivaltaisesti, funktio $f_j \to f$ $BV(\Omega)$:ssa eli $BV(\Omega)$ on täydellinen eli Banach-avaruus.

Lemma 4.17. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $\{f_j\} \subset BV(\Omega)$ jono funktioita, joille $f_j \to f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ja*

$$\lim_{j \to \infty} \int_\Omega |Df_j| = \int_\Omega |Df|.$$

Silloin jokaiselle avoimelle joukolle $A \subseteq \Omega$

$$\int_{\overline{A} \cap \Omega} |Df| \geq \limsup_{j \to \infty} \int_{\overline{A} \cap \Omega} |Df_j|.$$

Erityisesti, jos $\int_{\partial A\cap\Omega}|Df|=0$, *niin*

$$\int_A |Df| = \lim_{j\to\infty}\int_A |Df_j|.$$

TODISTUS. Olkoon $B=\Omega\backslash\overline{A}$. Koska Ω on avoin ja $\overline{A}$ suljettu, on B avoin. Tällöin lauseen 4.15 mukaan

$$\int_A |Df| \le \liminf_{j\to\infty}\int_A |Df_j| \quad \text{ja} \quad \int_B |Df| \le \liminf_{j\to\infty}\int_B |Df_j|.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{A}\cap\Omega}|Df| + \int_B |Df| &= \int_\Omega |Df| \\
&= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega |Df_j| \\
&\ge \limsup_{j\to\infty}\int_{\overline{A}\cap\Omega}|Df_j| + \limsup_{j\to\infty}\int_B |Df_j| \\
&\ge \limsup_{j\to\infty}\int_{\overline{A}\cap\Omega}|Df_j| + \int_B |Df|
\end{aligned}$$

Saadaan siis

$$\int_{\overline{A}\cap\Omega}|Df| \ge \limsup_{j\to\infty}\int_{\overline{A}\cap\Omega}|Df_j|.$$

ja lause on todistettu. □

Lemma 4.18. *Olkoon* $f\in BV(\Omega)$ *ja* $A\subset\subset\Omega$ *avoin s.e.*

$$\int_{\partial A}|Df| = 0$$

ja olkoon $\{f_\epsilon\}$ *jono silotuksia. Tarvittaessa* f *voidaan laajentaa koko avaruuteen* $\mathbb{R}^n$ *asettamalla* $f(x)=0$, *kun* $x\notin\Omega$. *Silloin*

$$\int_A |Df| = \lim_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x.$$

TODISTUS. Täytyy siis näyttää, että raja-arvo on olemassa ja että se on juurikin sama kuin f:n kokonaisheilahtelu. Koska aina pätee

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x \le \limsup_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x,$$

riittää olemassaolon toteamiseksi osoittaa, että

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x \le \liminf_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x,$$

jolloin

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x = \limsup_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x.$$

Kun vielä näytetään, että

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x \le \int_A |Df| \le \liminf_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x,$$

on lause sen jälkeen todistettu.
Koska $f_\epsilon \to f\ L^1(\Omega)$, niin lauseen 4.15 perusteella tiedetään jo, että

$$\int_A |Df| \le \liminf_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon| dx.$$

Nyt pitää enää todistaa toinen puoli eli

$$\int_A |Df| \ge \limsup_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon| dx.$$

Olkoon $g \in C_0^1(A;\mathbb{R}^n)$ ja $|g| \le 1$. Käyttämällä silotuksen ominaisuutta 1 voidaan silotus siirtää funktiosta toiseen seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_\epsilon \operatorname{div} g\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(\int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y\right) \operatorname{div} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(\int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) \operatorname{div} g(x) f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(\int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) \operatorname{div} g(x) f(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega f(y) \left(\int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) \operatorname{div} g(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{16}$$

Vaihtamalla muuttujien x ja y merkinnät keskenään muistaen, että silotusydin η_ϵ on symmetrinen saadaan

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(y) \left(\int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) \operatorname{div} g(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y &= \int_\Omega f(x) \left(\int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) \operatorname{div} g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega f(\operatorname{div} g)_\epsilon\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Koska $g \in C^1(\Omega) \subset W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, silotuksen ominaisuuden 4 perusteella divergenssin silotukselle pätee

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} g)_\epsilon &= \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)\operatorname{div} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n \eta_\epsilon * \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{\epsilon_i}}{\partial x_i} = \operatorname{div} g_\epsilon\end{aligned}$$

ja siten

$$\int_\Omega f(\operatorname{div} g)_\epsilon\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\operatorname{div} g_\epsilon\,\mathrm{d}x.$$

Koska $|g| \leq 1$, myös $|g_\epsilon| \leq 1$ kaikille $\epsilon > 0$. Ehdosta $\operatorname{spt} g \subseteq A$ puolestaan seuraa, että $\operatorname{spt} g_\epsilon \subseteq A^\epsilon := \{x : \operatorname{dist}(x, A) \leq \epsilon\}$. Saadaan

$$\int_\Omega f_\epsilon \operatorname{div} g\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\operatorname{div} g_\epsilon\,\mathrm{d}x \leq \int_{A^\epsilon} |Df|.$$

Kun otetaan supremum yli kaikkien funktioiden g, saadaan

$$\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x \leq \int_{A^\epsilon} |Df|.$$

Niinpä

$$\begin{aligned}\limsup_{\epsilon\to 0}\int_A |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x &\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{A^\epsilon} |Df| = \int_{\overline{A}} |Df|\\ &= \int_A |Df| + \int_{\partial A} |Df| = \int_A |Df|,\end{aligned}$$

koska oletuksen mukaan $\int_{\partial A} |Df| = 0$. Tämä riittääkin lauseen todistamiseen. □

Lemma 4.18 siis kertoo, että silotusten jonon kokonaisheilahtelu lähestyy silotettavan funktion kokonaisheilahtelua. Itse tulosta emme jatkossa tarvitse, sen sijaan hyödyllisyytensä myöhemmin osoittaa todistuksen kohta (16), jossa silotus siirretään jatkuvasti differentioituvasta funktiosta toiseen.

Huomautus 4.19. Jos $A = \mathbb{R}^n$, niin 4.18:n mukaan

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df| = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |Df_\epsilon|\,\mathrm{d}x$$

ja erityisesti, jos $f = \chi_E$, niin saadaan

$$P(E) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |D(\chi_E)_\epsilon|\,\mathrm{d}x.$$

Lause 4.20. *Olkoon $f \in BV(\Omega)$. Silloin on olemassa jono $\{f_n\} \subset C^\infty(\Omega)$ s.e.*

$$(1) \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |f_j - f| \, \mathrm{d}x = 0 \quad \textit{ja} \quad (2) \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |Df_j| \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |Df|.$$

TODISTUS. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $m \in \mathbb{R}$. Asetetaan joukot

$$\Omega_0 = \emptyset, \; \Omega_k := \Big\{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m+k}\Big\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

ja valitaan m niin suureksi, että $\int_{\Omega\setminus\Omega_1} |Df| < \epsilon$.
Määritellään sitten joukot $A_i = \Omega_{i+1}\setminus\overline{\Omega}_{i-1}$, kun $i = 1, 2, \ldots$. Määritellään lisäksi ns. ykkösen osituksen avulla funktiojono $\{\chi_i\}_{i=1}^\infty$ s.e.

$$\chi_i \in C_0^\infty(A_i), \quad 0 \le \chi_i \le 1 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^\infty \chi_i = 1.$$

Olkoon η määritelmän 4.13 mukainen silotus. Jokaiselle indeksille i voidaan valita $\epsilon_i > 0$ s.e. seuraavat ehdot täyttyvät.

$$\mathrm{spt}(\eta_{\epsilon_i} * (f\chi_i)) \subset \Omega_{i+2}\setminus\overline{\Omega}_{i-2} \quad (\Omega_{-1} = \emptyset)$$
$$\int |\eta_{\epsilon_i} * (f\chi_i) - f\chi_i| \, \mathrm{d}x < \epsilon 2^{-i}$$
$$\int |\eta_{\epsilon_i} * (fD\chi_i) - fD\chi_i| \, \mathrm{d}x < \epsilon 2^{-i}$$

Ensimmäinen ehto täyttyy, kun ϵ_i valitaan s.e. $\epsilon_i < \frac{1}{(m+i+1)(m+i+2)}$. Tällöin

$$\mathrm{spt}(\eta_{\epsilon_i} * (f\chi_i)) \subset A_i^\delta := \{x : \mathrm{dist}(x, A_i) < \delta = \frac{1}{m+i+2}\} \subset \Omega_{i+2}\setminus\Omega_{i-2}.$$

Toisen ja kolmannen ehdon täyttävän ϵ_i:n olemassaolon takaa silotuksen ominaisuus 3. Lopuksi määritellään

$$f_\epsilon = \sum_{i=1}^\infty \eta_{\epsilon_i} * (f\chi_i).$$

Näiden valmistelujen jälkeen osoitetaan, että jonolla $\{f_\epsilon\}$ on halutut ominaisuudet (1) ja (2). Aluksi voidaan todeta, että jokainen $x \in \Omega$ kuulu yhtä aikaa korkeintaan kolmeen joukkoon A_{j-i}, A_j, A_{j+1} ja $\chi_i(x) = 0$, kun, $x \in A_j$ ja $i \notin \{j-i, j, j+i\}$. Täten f_ϵ:n määrittelevässä summassa on jokaisella x korkeintaan kolme nollasta poikkeavaa termiä. Toisin sanoen summa on äärellinen ja näin ollen $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$. Edelleen, koska

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \sum_{i=1}^\infty \chi_i = \sum_{i=1}^\infty f(x)\chi_i,$$

niin

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_\epsilon - f| dx &= \int_\Omega \Big| \sum_{i=1}^\infty \eta_{\epsilon_i} * (f\chi_i) - \sum_{i=1}^\infty f\chi_i \Big| \,\mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega |\eta_{\epsilon_i} * (f\chi_i) - f\chi_i| \,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^\infty \epsilon 2^{-i} < \epsilon.\end{aligned}$$

Toisin sanoen $f_\epsilon \to f$ $L^1(\Omega)$:ssa, kun $\epsilon \to 0$ ja kohta (1) on todistettu. Todistetaan vielä vaatimus (2). Lauseen 4.15 seurauksena tiedetään, että

$$\int_\Omega |Df| \leq \liminf_{\epsilon\to 0} \int_\Omega |Df_\epsilon|,$$

joten riittää osoittaa, että

$$\int_\Omega |Df| \geq \limsup_{\epsilon\to 0} \int_\Omega |Df_\epsilon| \tag{17}$$

Olkoon $g \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ja $|g| \leq 1$. Silloin (vertaa lemman 4.18 todistus)

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_\epsilon \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \sum_{i=1}^\infty (\eta_{\epsilon_i} * (f\chi_i)) \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega \eta_{\epsilon_i} * (f\chi_i) \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f\chi_i \operatorname{div}(\eta_{\epsilon_i} * g) \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f\chi_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\eta_{\epsilon_i} * g)_j \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Lisäämällä integraalin sisälle nolla muodossa

$$f\sum_{j=1}^n (\eta_{\epsilon_i} * g)_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} - f\sum_{j=1}^n (\eta_{\epsilon_i} * g)_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j}$$

ja käyttämällä tulon derivointisääntöä saadaan

$$\begin{aligned}\int f_\epsilon \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f\chi_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\eta_{\epsilon_i} * g)_j + f\sum_{j=1}^n (\eta_{\epsilon_i} * g)_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} \\ &\quad - f\sum_{j=1}^n (\eta_{\epsilon_i} * g)_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f \sum_{j=1}^n \left[\chi_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\eta_{\epsilon_i} * g)_j + (\eta_{\epsilon_i} * nbg)_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j}\right] \\ &\quad - f\sum_{j=1}^n (\eta_{\epsilon_i} * g)_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\chi_i(\eta_{\epsilon_i} * g)\right)_j - f\sum_{j=1}^n (\eta_{\epsilon_i} * g)_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Kun integroidaan lauseketta paloittain, siirretään jälkimmäisessä termissä silotuksen paikkaa ja vaihdetaan integrointi- ja summausoperaatioiden järjestystä, päädytään lopulta muotoon

$$\int f_\epsilon \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega f \operatorname{div}(\chi_i \eta_{\epsilon_1} * g)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega g \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (\eta_{\epsilon_i} * f \nabla \chi_i)\right] \mathrm{d}x.$$

Koska $\sum_{i=1}^{\infty} \nabla \chi_i = 0 \in \mathbb{R}^n$, niin myös $\sum_{i=1}^{\infty} f \nabla \chi_i = 0 \in \mathbb{R}^n$. Vähentämällä nolla em. muodossa erotuksen jälkimmäisestä termistä, se voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\int_\Omega g \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (\eta_{\epsilon_i} * f \nabla \chi_i)\right] \mathrm{d}x &= \int_\Omega g \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} (\eta_{\epsilon_i} * f \nabla \chi_i) - \sum_{i=1}^{\infty} f \nabla \chi_i\right] \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega g \cdot [(\eta_{\epsilon_i} * f \nabla \chi_i) - f \nabla \chi_i]\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ja alkuperäinen lauseke saa siis muodon

$$\begin{aligned}\int f_\epsilon \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega f \operatorname{div}(\chi_i \eta_{\epsilon_1} * g)\,\mathrm{d}x \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega g \cdot [(\eta_{\epsilon_i} * f \nabla \chi_i) - f \nabla \chi_i]\,\mathrm{d}x \\ &:= I_1^\epsilon + I_2^\epsilon.\end{aligned}$$

Arvioidaan osia I_1^ϵ ja I_2^ϵ erikseen, ensin osaa I_1^ϵ. Irrotetaan summasta ensimmäinen termi. Koska $|\chi_i \eta_{\epsilon_i} * g| \leq 1$ ja $\chi_i \eta_{\epsilon_i} * g \in C_0^\infty(\Omega)$, ensimmäiselle termille pätee kokonaisheilahtelun määritelmän 4.8 mukaan

$$\int f \operatorname{div}(\chi_1 \eta_{\epsilon_i} * g)\,\mathrm{d}x \leq \sup\left\{\int f \operatorname{div}(g)\,\mathrm{d}x : g \in C_0^\infty(\Omega), |g| \leq 1\right\} = \int_\Omega |Df|.$$

Koska summassa I_1^ϵ on korkeintaan kolme nollasta eroavaa termiä, voidaan summan loppuosaa arvioida

$$\sum_{i=2}^{\infty} \int f \operatorname{div}(\chi_i \eta_{\epsilon_i} * g)\,\mathrm{d}x \leq 3 \int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Df| < 3\epsilon.$$

Lausekkeelle I_2^ϵ puolestaan pätee ϵ_i:n valinnassa vaaditun ehdon (2) perusteella $|I_2^\epsilon| < \epsilon$. Kaiken kaikkiaan saadaan siis arvio

$$\int_\Omega f_\epsilon \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |Df| + 4\epsilon.$$

Ottamalla supremum yli funktioiden g saadaan

$$\int_\Omega |Df_\epsilon| \leq \int_\Omega |Df| + 4\epsilon.$$

Kun annetaan epsilonin mennä nollaan huomataan, että lause on todistettu. $\square$

Edellisestä lauseesta saatiin tieto, että BV-funktiota voidaan arvioida siisteillä funktioilla. Osoitetaan kohta samantyyppinen tulos Caccioppoli-joukoille. Sitä ennen näytetään kuitenkin, että reunan alan minimoiva Caccioppoli-joukko on olemassa.

4.6 Minimoivan joukon olemassaolo

Lause 4.21. *Olkoon* $\Omega = B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\} \subset \mathbb{R}^n$. *Olkoon* $\{f_j\} \subset BV(\Omega)$ *rajoitettu BV-normin mielessä eli löytyy* $M > 0$, *jolle*

$$\sup_j \|f_j\|_{BV(\Omega)} \leq M < \infty.$$

Silloin on olemassa osajono $\{f_{j_k}\}$ *ja funktio* $f \in BV(\Omega)$ *s.e.*

$$f_{j_k} \to f \ L^1(\Omega)\text{:ssa.}$$

TODISTUS. Olkoon $M \in \mathbb{R}$ ja $\{f_j\} \subset BV(\Omega)$ jono funktioita, joille $\|f_j\|_{BV} \leq M$. Jokaiselle f_j voidaan lauseen 4.20 mukaan valita approksimoiva siisti funktio $\tilde{f}_j \in C^\infty(\Omega)$ s.e.

$$\int_\Omega |\tilde{f}_j - f_j| \,\mathrm{d}x < \frac{1}{j} \quad \text{ja} \quad \sup_j \int_\Omega |D\tilde{f}_i| \leq M + 1.$$

Koska funktiot $\tilde{f}_j$ ovat jatkuvasti differentioituvia, niiden kokonaisheilahtelu vastaa gradientin normin integrointia ja BV-normista saadaankin seuraava arvio $\tilde{f}_j$:n Sobolev-normille:

$$\begin{aligned} M \geq \|\tilde{f}_j\|_{BV} &= \|\tilde{f}_j\|_1 + \int_\Omega |Df| \\ &= \|\tilde{f}_j\|_1 + \int_\Omega |\nabla f| \\ &= \|\tilde{f}_j\|_{W^{1,1}}. \end{aligned}$$

Toisin sanoen jono $\{\tilde{f}_j\}$ on siis rajoitettu Sobolev-normin mielessä. Tässä tapauksessa Rellichin lause ([EG], 4.6 Lause 1 ja erityisesti sen jälkeinen huomautus) toteaa, että on olemassa $f \in L^1(\Omega)$ ja osajono $\{\tilde{f}_{j_k}\}$ s.e. $\tilde{f}_{j_k} \to f \ L^1(\Omega)$:ssa. Toisin sanoen jokaiselle $\epsilon > 0$ löytyy $K > 0$ s.e.

$$\int_\Omega |\tilde{f}_{j_k} - f| \,\mathrm{d}x < \epsilon,$$

kun indeksi $j_k > K$.
Olkoon siis $j_k > K$. Arviosta

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_{j_k} - f| \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |f_{j_k} - \tilde{f}_{j_k} + \tilde{f}_{j_k} - f| \,\mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega |f_{j_k} - \tilde{f}_{j_k}| \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\tilde{f}_{j_k} - f| \,\mathrm{d}x \\ &< \frac{1}{j} + \epsilon\end{aligned}$$

seuraa, että myös alkuperäisen jonon $\{f_j\}$ osajono $\{f_{j_k}\} \to f$ $L^1(\Omega)$:ssa. Lauseen 4.15 mukaan $f \in BV(\Omega)$. □

Huomaa, että samoilla argumenteilla voidaan todistaa, että rajoitetut joukot $BV(\Omega)$:ssa ovat relatiivisesti kompakteja $L^p(\Omega)$ kaikilla $1 \le p < \frac{n}{n-1}$.
Edellistä lausetta käyttäen voidaan todistaa minimoijan olemassaolo Caccioppol-joukoille.

Lause 4.22 (Minimoijan olemassaolo). *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja avoin ja olkoon L Caccioppoli-joukko. Silloin on olemassa joukko E, jolle $E \backslash \Omega = L \backslash \Omega$ ja*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_E| \le \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_F|$$

jokaiselle joukolle F, jolle $F \backslash \Omega = L \backslash \Omega$.

TODISTUS. Koska Ω on rajoitettu, on olemassa luku $r \in \mathbb{R}$ s.e. $\Omega \subset\subset B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$. Nyt, jos $F \backslash \Omega = L \backslash \Omega$, niin varmasti myös $F \backslash B_r = L \backslash B_r$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_r} |D\chi_F| = \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_r} |D\chi_L|$$

joten

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_F| = \int_{B_r} |D\chi_F| + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_r} |D\chi_L|$$

Siispä riittää osoittaa, että on olemassa joukko $E \subset B_r$, jolle $E \backslash \Omega = L \backslash \Omega$ ja

$$\int_{B_r} |D\chi_E| \le \int_{B_r} |D\chi_F|$$

jokaiselle $F \subset B_r$, jolle $F \backslash \Omega = L \backslash \Omega$.
Selvästi $\int_{B_r} |D\chi_F|$ on ei-negatiivinen ja siten alhaalta rajoitettu. Jos E_j on minimoiva jono, niin $\int_{B_r} |D\chi_{E_j}|$ on tasaisesti rajoitettu. Toisin sanoen

$$0 \le \sup_j \int_\Omega |D\chi_{E_j}| \,\mathrm{d}x \le M < \infty. \tag{18}$$

Edelleen B_r on rajoitettu, joten $\int_{B_r} |\chi_{E_j}|\,\mathrm{d}x$ on tasaisesti rajoitettu eli

$$\sup_j \int_\Omega |\chi_{E_j}|\,\mathrm{d}x = \sup_j \|\chi_{E_j}\|_1 \leq N < \infty. \tag{19}$$

Ehtojen (18) ja (19) johdosta

$$\sup_j \|\chi_{E_j}\|_{BV(\Omega)} = \sup_j \left(\int_\Omega |\chi_{E_j}|\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |D\chi_{E_j}|\,\mathrm{d}x \right) \leq M + N < \infty$$

eli χ_{E_j} on rajoitettu jono $BV(B_r)$:ssa. Edellisen lauseen 4.21 perusteella löytyy osajono (merkitään sitäkin χ_{E_j}), joka konvergoi kohti jotakin funktiota $f \in BV(B_r)$. Koska myös osajonolle pätee (19), eli se on rajoitettu normin L^1 mielessä, voidaan käyttää lausetta 4.7, joka kertoo, että tälle jonolle löytyy vielä uusi osajono (pysytään edelleen merkinnässä χ_{E_j}), joka lähestyy funktiota f pisteittäin m.k. $x \in B_r$. Kahden osajonoon siirtymisen jälkeen saadaan siis lähestyminen pisteittäin melkein kaikkialla. Koska lisäksi $\chi_{E_j}(x)$ saa arvoja 0 tai 1, voidaan yhteenvetona em. ominaisuuksista olettaa, että f on joukon E karakteristinen funktio, ja E puolestaan yhtyy joukon L kanssa Ω:n ulkopuolella. Nyt puolijatkuvuuslauseen 4.15 mukaan

$$\int_\Omega |Df| = \int_\Omega |D\chi_E| \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega |D\chi_{E_j}|,$$

joten E on etsitty minimoiva joukko. □

4.7 Caccioppoli-joukkojen approksimointi

Lause 4.23 (Co-areakaava). *Olkoon $f \in BV(\Omega)$ ja määritellään tasa-arvojoukko $F_t := \{x \in \Omega : f(x) > t\}$. Silloin*

$$\int_\Omega |Df| = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_\Omega |D\chi_{F_t}| \Big)\,\mathrm{d}t.$$

Lause siis liittää toisiinsa f:n kokonaisheilahtelun ja tasa-arvojoukot.

Todistus. Käsitellään ensin tapaus $f \geq 0$. Koska

$$\chi_{F_t}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t < f(x) \\ 0, & \text{kun } t \geq f(x) \end{cases},$$

niin

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{f(x)} 1\,\mathrm{d}t = \int_0^{f(x)} \chi_{F_t}(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \chi_{F_t}(x)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Jotta f:n kokonaisheilahtelua voitaisiin arvioida, lähdetään liikkeelle jo tutuksi tulleesta g:n divergenssin ja f:n tulon integraalista, jonka supremumina yli funktioiden g saadaan f:n kokonaisheilahtelu. Olkoon $g \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ja $|g| \leq 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(\int_0^\infty \chi_{F_t}(x) \,\mathrm{d}t \right) \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \left(\int_\Omega \chi_{F_t}(x) \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{F_t} \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{20}$$

Jos taas $f \leq 0$, niin

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_{f(x)}^0 -1 \,\mathrm{d}t = \int_{f(x)}^0 \chi_{F_t}(x) - 1 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^0 \chi_{F_t}(x) - 1 \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Tutkitaan tässäkin tapauksessa samaista integraalia, jolle saadaan

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(\int_0^\infty \chi_{F_t}(x) - 1 \,\mathrm{d}t \right) \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_\Omega \chi_{F_t}(x) \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 \int_\Omega \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Funktio $g \in C_0^\infty(\Omega)$, joten $\int_\Omega \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x = 0$. Lauseke sievenee muotoon

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^0 \int_\Omega \chi_{F_t} \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_{F_t} \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{21}$$

Yleisessä tapauksessa, kun $f \in BV(\Omega)$, määritellään funktiot f^+ (f:n positiiviosa) ja f^- (negatiiviosa) seuraavasti

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\} \quad ja \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}.$$

Näin määriteltyinä $f^+(x) \geq 0$ ja $f^-(x) \geq 0$ kaikille $x \in \Omega$. Lisäksi $f(x) = f^+(x) + (-f^-(x))$. Summan ensimmäiseen termiin voidaan siis soveltaa yllä laskettua kohtaa (20) ja jälkimmäiseen kohtaa (21). Saadaan

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega (f^+ + f^-) \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega f^+ \operatorname{div} x + \int_\Omega f^- \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_{F_t} \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 \int_{F_t} \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_{F_t} \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega |D\chi_{F_t}| \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö seuraa perimeetterin määritelmästä 4.11. Tämä pätee siis mielivaltaiselle funktiolle $f \in BV(\Omega)$. Ottamalla supremum yli funktioiden $g \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $|g| \leq 1$ saadaan

$$\int_\Omega |Df| \leq \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega |D\chi_{F_t}| \,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

kun $f \in BV(\Omega)$. Näin on saatu päätökseen todistuksen ensimmäinen puoli. Jotta saataisiin todistettua yhtäsuuruus, pitää vielä näyttää epäyhtälö toiseen suuntaan eli, että kaikille $f \in BV(\Omega)$

$$\int_\Omega |Df| \geq \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega |D\chi_{F_t}| \,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

Tämä tulos näytetään ensin siisteille funktioille. Yleiselle $f \in BV(\Omega)$ todistus tapahtuu arvioimalla funktiota f jonolla siistejä funktioita. Olkoon kuitenkin ensin $f \in C^\infty(\Omega)$. Tällöin on hyvä muistaa, että kokonaisheilahtelu vastaa gradientin normin integrointia ja tällöin merkitäänkin $Df = \nabla f$. Asetetaan funktio

$$m(t) := \int_{\Omega \setminus F_t} |Df| = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\}} |\nabla f| \,\mathrm{d}x.$$

Integroitava on aina ei-negatiivinen ja erotusjoukoille pätee $\Omega \setminus F_{t_1} \subset \Omega \setminus F_{t_2}$, kun $t_1 \leq t_2$, joten funktio m on kasvava ja siksi derivaatta m' on olemassa m.k. Lisäksi

$$\int_{-\infty}^\infty m'(t) \,\mathrm{d}t \leq \int_\Omega |Df| \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla f| \,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

Kiinnitetään seuraavaksi $-\infty < t < \infty$ ja $r > 0$ sekä määritellään funktio $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{kun } s \leq t \\ \frac{s-t}{r}, & \text{kun } t \leq s \leq t+r \\ 1, & \text{kun } s \geq t+r \end{cases}.$$

Funktio η on jatkuva sekä melkein kaikkialla derivoituva ja

$$\eta'(s) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{kun } t < s < t + r \\ 0, & \text{kun } s < t \text{ tai } s > t + r \end{cases},$$

Käyttämällä osittaisintegrointikaavaa muistaen, että $g \in C_0^\infty(\Omega)$ ja $f \in C^\infty(\Omega)$ saadaan (ks. 4.9)

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \eta\,(f(x))\,\mathrm{div}\,g\,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega \eta\,(f(x))\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\eta\,(f(x))\,\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \eta\,(f(x))}{\partial x_i} g_i\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\eta'\,(f(x))\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g_i\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \eta'\,(f(x))\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g_i\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega \eta'\,(f(x))\,\nabla f \cdot g\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{r}\int_{F_t \setminus F_{t+r}} \nabla f \cdot g. \end{aligned} \tag{25}$$

Tutkitaan seuraavaksi erotusosamäärää

$$\begin{aligned} \frac{m(t+r) - m(t)}{r} &= \frac{1}{r}\left[\int_{\Omega\setminus F_{t+r}} |\nabla f|\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega \setminus F_t} |\nabla f|\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{r}\int_{F_t \setminus F_{t+r}} |\nabla f|\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Koska $g(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \Omega$, niin f:n gradientin normi voidaan korvata f:n gradientin ja g:n sisätulolla eikä lausekkeen arvo ainakaan kasva. Käyttämällä lisäksi kohtaa (25) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{m(t+r) - m(t)}{r} &\geq \frac{1}{r}\int_{F_t \setminus F_{t+r}} \nabla f \cdot g\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega \eta\,(f(x))\,\mathrm{div}\,g\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Niille $t \in \mathbb{R}$, joille derivaatta $m'(t)$ on olemassa, annetaan r:n mennä nollaan, jolloin epäyhtälön vasemmalle puolelle muodostuu m:n derivaatta pisteessä t ja oikealle puolelle funktion g divergenssin integraali yli tasa-arvojoukon F_t. Toisin sanoen

$$m'(t) \geq -\int_{F_t} \mathrm{div}\,g\,\mathrm{d}x \quad \text{m.k. } t.$$

Ottamalla supremum yli funktioiden g saadaan

$$\int_\Omega |D\chi_{F_t}| \leq m'(t).$$

Nyt (24) antaa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_\Omega |D\chi_{F_t}|\,\mathrm{d}t \le \int_{-\infty}^{\infty} m'(t)\,\mathrm{d}t \le \int_\Omega |Df|\,\mathrm{d}x.$$

Tästä tuloksesta ja epäyhtälöistä (22) seuraa, että kaikille $f \in C^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega |Df| = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_\Omega |D\chi_{F_t}|\Big)\,\mathrm{d}t. \tag{26}$$

eli lause on todistettu siisteille funktioille.
Lopuksi olkoon $f \in BV(\Omega)$. Lauseen 4.20 mukaan voidaan valita jono siistejä funktioita $\{f_k\} \subset C^\infty(\Omega)$ s.e.

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |f_k - f|\,\mathrm{d}x = 0 \quad ja \quad \lim_{k\to\infty}\int_\Omega |Df_k| = \int_\Omega |Df|. \tag{27}$$

Koska $f, f_k \in L^1(\Omega)$, niin lauseen 4.7 mukaan voidaan siirtyä osajonoon (merkitään sitäkin f_k), jolle

$$f_k(x) \to f(x) \text{ m.k. } x \in \Omega.$$

Määritellään jokaiselle funktiolle f_k tasa-arvojoukot $F_t^k := \{x \in \Omega : f_k(x) > t\}$. Joukkojen F_t^k ja F_t karakterististen funktioiden erotuksen integraalille pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\chi_{F_t^k}(x) - \chi_{F_t}(x)\Big|\,\mathrm{d}t = \int_{\min\{f(x),f_k(x)\}}^{\max\{f(x),f_k(x)\}} 1\,\mathrm{d}t = |f_k(x) - f(x)|\,.$$

Integrointirajojen järjestys riippuu siis siitä, kumpi funktioista f_k, f on suurempi pisteessä x. Koska $f_k \to f$ pisteittäin, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\chi_{F_t^k}(x) - \chi_{F_t}(x)\Big|\,\mathrm{d}t \to 0 \; m.k. \; x \in \Omega.$$

ja siten

$$\Big|\chi_{F_t^k}(x) - \chi_{F_t}(x)\Big|\,\mathrm{d}t \to 0 \; m.k. \; x \in \Omega, \; m.k. \; t.$$

Koska $0 \le \chi_{F_t^k}, \chi_{F_t} \le 1$, niin voidaan käyttää dominoidun konvergenssin lausetta, joka sanoo, että

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \Big|\chi_{F_t^k} - \chi_{F_t}\Big|\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ja tämähän pätee siis edelleen m.k. t. Nyt alhaalta puolijatkuvuuslauseen 4.15 perusteella tiedetään, että m.k. t

$$\int_\Omega |D\chi_{F_t}| \le \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega |D\chi_{F_t^k}|\,\mathrm{d}x$$

Integroidaan puolittain yli $\mathbb{R}$:n, käytetään Fatou'n lemmaa ([Fe], s. 84), tietoa, että lause on jo todistettu siisteille f (26) ja viimeiseksi tietoa (27) jonon f_k kokonaisheilahtelun raja-arvosta saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}|D\chi_{F_t}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\leq \liminf_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}|D\chi_{F_t^k}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\Omega}|Df_k|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\Omega}|Df|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Saatu tulos ja lasku (23) riittävät todistamaan lauseen. □

Nyt voidaan todistaa lause, joka on samankaltainen kuin 4.20, mutta jossa arvioidaan BV-funktioiden sijasta Caccioppoli-joukkoja. Todistuksessa käytetään lemmaa, joka esitellään todistuksen jälkeen.

Lause 4.24. *Jokaista rajoitettua Caccioppoli-joukkoa E voidaan arvioida jonolla siistejä joukkoja eli on olemassa jono $\{E_j\} \subset C^{\infty}$ s.e.*

$$(1)\ \lim_{j\to\infty}\int|\chi_{E_j}-\chi_E|\,\mathrm{d}x = 0 \quad ja \quad (2)\ \lim_{j\to\infty}\int|D\chi_{E_j}|\,\mathrm{d}x = \int|D\chi_E|.$$

Todistus. Etsitty jono approksimoivia joukkoja löytyy tutkimalla E:n karakteristisen funktion silotuksia ja niiden tasa-arvojoukkoja. Todistus jakautuu kahteen vaiheeseen. Ensin näytetään, että melkein kaikki silotusten tasa-arvojoukot ovat reunaltaan sileitä. Toisessa vaiheessa keskitytään tutkimaan näitä sileäreunaisia joukkoja ja muodostetaan niistä jono, jolla on halutut approksimaatioominaisuudet (1) ja (2).

Olkoon E Caccioppoli-joukko, $\{\epsilon_j\} \subset \mathbb{R}$, $\epsilon_j > 0$ kaikilla j ja $\epsilon_j \to 0$, kun $j \to \infty$. Asetetaan jono määritelmän 4.13 mukaisia E:n karakteristisen funktion silotuksia $f_j = \eta_{\epsilon_j} * \chi_E$.

Kiinnitetään silotus f_j ja tutkitaan sen tasa-arvojoukkoja E_{jt}. Koska $f_j \in C^{\infty}(\Omega)$, niin voidaan käyttää Sardin lemmaa 4.26, joka sanoo, että

$$|\{f_j(x) : \nabla f_j(x) = 0\}| = 0.$$

Toisin sanoen melkein kaikille $0 < t < 1$ pätee $\nabla f_j(x) \neq 0$ kaikille x, joille $f_j(x) = t$ eli kaikille $x \in \partial E_{jt}$. Tarkastellaan seuraavassa tällaisia lukuja t.

Olkoon $\hat{x} \in \partial E_{jt}$. Todistuksen laadun kärsimättä voidaan olettaa, että osittaisderivaatoista viimeinen $\frac{\partial f_j}{\partial x_n} \neq 0$. Implisiittifunktiolause ([CJ], s. 228, [MH], s. 397) sanoo, että tällöin on olemassa funktio $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{n-1}, R)$ s.e.

$$\varphi(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-1}) = \hat{x}_n$$

ja

$$f_j(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}))=t,$$

kun $(x_1,\dots,x_{n-1})\in B((\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{n-1}),\epsilon)$, $\epsilon>0$. Toisin sanoen

$$f_j(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}))\in\partial E_{jt}.$$

Pisteen $\hat{x}\in\partial E_{jt}$ ympäristössä reuna ∂E_{jt} on siis jatkuvasti derivoituvan kuvauksen φ graafi ja siten jatkuvasti differentioituva. Koska tämä pätee jokaiselle $x\in\partial E_{jt}$, niin koko reuna on jatkuvasti differentioituva.

Kuten yllä on kerrottu, tämä pätee melkein kaikilla $0<t<1$. Siispä on osoitettu, että jokaisen silotuksen f_j melkein kaikki tasa-arvojoukot E_{jt} ovat reunaltaan sileitä. Seuraavaksi siirrytään vaiheeseen kaksi, jossa tarkastellaan vain näitä sileäreunaisia tasa-arvojoukkoja ja näytetään, että niistä voi muodostaa jonon, joka täyttää vaatimukset (1) ja (2).

Olkoon $\delta\in\,]0,1/4[$ ja $\delta^{1/2}<t<1-\delta^{1/2}$. Huomautuksen 4.19 mukaan löytyy tarpeeksi suuri indeksi j s.e.

$$\int|\chi_E-f_j|<\delta.$$

Tästä ja lemmasta 4.25 seuraa, että

$$\int|\chi_{E_{jt}}-\chi_E|\le\frac{1}{\min(t,1-t)}\int|\chi_E-f_j|<\frac{\delta}{\delta^{1/2}}=\delta^{1/2}. \tag{28}$$

Kun muistetaan, että $0\le f_j\le 1$, niin Co-areakaava 4.23 kertoo, että

$$\int|Df_j|=\int_{-\infty}^{\infty}\int|D\chi_{E_{jt}}|\,\mathrm{d}t=\int_0^1\int|D\chi_{E_{jt}}|\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Huomiosta 4.19 puolestaan seuraa, että

$$\int|D\chi_E|=\lim_{j\to\infty}\int|Df_j|. \tag{30}$$

Kun yhdistetään kohdat (29) ja (30) saadaan

$$\int|D\chi_E|=\lim_{j\to\infty}\int_0^1\int|D\chi_{E_{jt}}|\,\mathrm{d}t. \tag{31}$$

Toisaalta jokaiselle j löytyy t_j s.e.

$$(1-2\delta^{1/2})\int|D\chi_{E_{jt_j}}|\le\int_0^1\int|D\chi_{E_{jt}}|. \tag{32}$$

Kohdista (31) ja (32) seuraa, että

$$\int |D\chi_E| \geq (1 - 2\delta^{1/2}) \int |D\chi_{E_{jt_j}}|. \tag{33}$$

Kun annetaan $\delta \to 0$, niin saadaan

$$\int |D\chi_E| \geq \limsup_{\delta \to 0} \int |D\chi_{E_{jt_j}}| = \limsup_{j \to \infty} \int |D\chi_{E_{jt_j}}| \tag{34}$$

Alhaalta puolijatkuvuuslauseen 4.15 mukaan taas

$$\int |D\chi_E| \leq \liminf_{j \to \infty} \int |D\chi_{E_{jt_j}}|, \tag{35}$$

joten kohdat (34) ja (35) kertovat, että

$$\int |D\chi_E| = \lim_{j \to \infty} \int |D\chi_{E_{jt_j}}|$$

ja jono $\{E_{jt_j}\}$ täyttää ehdon (2). Jono $\{E_{jt_j}\}$ on jonon $\{E_{jt}\}$ osajono, joten kohdasta (28) seuraa, että se täyttää myös ehdon (1). Kun vielä muistetaan, että joukot E_{jt_j} ovat sileäreunaisia, niin voidaan todeta, että lause on todistettu. □

Lemma 4.25. *Olkoon $0 < t < 1$, $\epsilon_j \to 0$, kun $j \to \infty$. Määritellään jono silotuksia $f_j = \eta_{\epsilon_j} * \chi_E$ ja jokaiselle silotukselle tasa-arvojoukot*

$$E_{jt} = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) > t\}.$$

Silloin jokaiselle indeksille j seuraava arvio on voimassa

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{E_{jt}} - \chi_E| \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\min(t, 1-t)} \int |f_j - \chi_E| \,\mathrm{d}x.$$

Todistus. Olkoon ensin $x \in E_{jt} \backslash E$. Koska $x \in E_{jt}$, niin $f_j(x) > t$. Koska $x \notin E$, niin $\chi_E(x) = 0$. Siispä

$$f_j(x) - \chi_E(x) > t.$$

Samantyyppisellä päättelyllä voidaan todeta, että

$$\chi_E(x) - f_j(x) \geq 1 - t,$$

kun $x \in E \backslash E_{jt}$. Koska $(E \backslash E_{jt}) \cap (E_{jt} \backslash E) = \emptyset$, niin

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_j - \chi_E| \,\mathrm{d}x &\geq \int_{E_{jt} \backslash E} |f_j - \chi_E| \,\mathrm{d}x + \int_{E \backslash E_{jt}} |f_j - \chi_E| \,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{E_{jt} \backslash E} |t| \,\mathrm{d}x + \int_{E \backslash E_{jt}} |1 - t| \,\mathrm{d}x \\
&= t|E_{jt} \backslash E| + (1-t)|E \backslash E_{jt}|.
\end{aligned}$$

Jos $t \geq 1-t$, niin

$$\begin{aligned} t|E_{jt} \backslash E| + (1-t)|E \backslash E_{jt}| &\geq (1-t)|E_{jt} \backslash E| + (1-t)|E \backslash E_{jt}| \\ &= (1-t)\left(\int_{E_{jt} \backslash E} 1 \, \mathrm{d}x + \int_{E \backslash E_{jt}} 1 \, \mathrm{d}x\right) \\ &= (1-t)\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{E_{jt}} - \chi_E| \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Vastaavasti, jos $t \leq 1-t$, niin saadaan

$$t|E_{jt} \backslash E| + (1-t)|E \backslash E_{jt}| \geq t \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{E_{jt}} - \chi_E| \, \mathrm{d}x.$$

Yhteenvetona voidaan siis todeta, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_j - \chi_E| \, \mathrm{d}x \geq \min\{t, 1-t\} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{E_{jt}} - \chi_E| \, \mathrm{d}x,$$

josta väite seuraa. □

Lemma 4.26 (Sardin lemma). *Olkoon $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Tällöin f:n kriittisten pisteiden arvojen joukon Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on nolla.*

TODISTUS. Lause todistuksineen löytyy lähteestä [St], s. 45, erityisesti lause 3.1. □

Lause 4.27 (Isoperimetrinen epäyhtälö Caccioppoli-joukoille). *Olkoon E Caccioppoli-joukko. Silloin*

$$P(E) \geq n|B|^{1/n}|E|^{\frac{n-1}{n}},$$

missä $B \in \mathbb{R}^n$ on yksikköpallo.

TODISTUS. Lause todistetaan käyttämällä approksimoivaa siistireunaisten joukkojen jonoa ja vastaavaa tulosta 3.9 siistireunaisille joukoille.

Lauseen 4.24 mukaan löytyy jono $\{E_j\}$, joiden reuna on jatkuvasti differentioituva ja jolle

$$(1) \lim_{j \to \infty} \int |\chi_{E_j} - \chi_E| \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{ja} \quad (2) \lim_{j \to \infty} \int |D\chi_{E_j}| \, \mathrm{d}x = \int |D\chi_E|.$$

Käyttämällä kohtaa (2) ja perimeetterin määritelmää saadaan

$$P(E) = \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_E| = \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_{E_j}|.$$

Siistireunaisille joukoille $\int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_{E_j}| = S(E_j)$, joten

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_{E_j}|\,\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty} S(E_j),$$

joten voidaan käyttää lausetta 3.9 ja saadaan

$$P(E) = \lim_{j\to\infty} S(E_j) \geq \lim_{j\to\infty} \left(nV(B)^{1/n} V(E_j)^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Sileäreunaisille joukoille on 4.2:n mukaan $V(E_j) = |E_j|$ joten päästään muotoon

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \left(nV(B)^{1/n} V(E_j)^{\frac{n-1}{n}}\right) &= n|B|^{1/n} \lim_{j\to\infty} |E_j| \\
&= n|B|^{1/n} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j}\,\mathrm{d}x \\
&= n|B|^{1/n} |E|^{\frac{n-1}{n}}
\end{aligned}$$

ja lause on todistettu. □

5 Yhteenveto

Tässä työssä tutkittiin, millaisille joukoille isoperimetrinen epäyhtälö on voimassa. Lisäksi osoitettiin erilaisissa tapauksissa, että maksimaalinen alkio on olemassa ja selvitettiin, mikä se on.

Luvussa kaksi todettiin, että monikulmioiden joukossa maksimaalinen alkio on säännöllinen monikulmio. Tätä tulosta apuna käyttäen näytettiin, että tason Jordan-käyrien rajaamien kappaleiden joukossa on maksimaalinen alkio ja että se on ympyrä. Luvussa kolme päästiin siihen tulokseen, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ paloittain sileäreunaisille joukoille on olemassa (siirtoa vaille) yksikäsitteinen maksimaalinen alkio ja että se on n-ulotteinen pallo.

Luvussa neljä saatiin rajoitetusti heilahtelevia funktioita tutkimalla selville, että äärellisen perimeetterin joukot eli Caccioppoli-joukot sisältävät maksimaalisen alkion. Lopuksi osoitettiin, että jokaista Caccioppoli-joukkoa voidaan approksimoida jonolla luvussa kolme tutkittuja paloittain sileäreunaisia joukkoja. Yhdessä luvun kolme tuloksen kanssa tämä tarkoittaa sitä, että Caccioppoli-joukoille maksimaalinen alkio on n-ulotteinen pallo. Tulos on kuitenkin hieman heikompi kuin luvun kolme vastaava, sillä joukon ja sen karakteristisen funktion samaistamisesta johtuen ratkaisujoukoksi käy myös pallo, johon on lisätty tai josta on poistettu nollamittainen joukko. Yksikäsitteisyyden sijaan voidaankin sanoa, että isoperimetrisen ongelman ratkaisu Caccioppoli-joukoille kuuluu pallon ekvivalenssiluokkaan.

Viitteet

[BZ] Burago, Yu.D. ja Zalgaller, V.A.: *Geometric Inequalities.* Springler-Verlag, 1988

[CH] Courant, R. ja Hilbert, D.: *Methods of Mathematical Physics, vol. 1.* Interscience Publishers, Inc., New York 1965

[CJ] Courant, R. ja John, F.: *Introduction to Calculus and Analysis II, vol. 1.* Springer-Verlag, 1989

[ET] Ekeland, I. ja Temam, R.: *Convex Analysis and Variational Problems.* North-Holland Publishing Company, 1976

[EG] Evans, L.C. ja Gariepy, R.F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, 1992

[Fe] Federer, H.: *Geometric Measure Theory.* Springler-Verlag, 1969

[Ga] Gardner, R.J.: The Brunn-Minkowski inequality. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 39 (2002), no. 3, 355-405

[GK] Gamelin, T.W. ja Khavinson, D.: The isoperimetric inequality and rational approximation. *The American Mathematical Monthly* 96 (1989), no. 1, 18-30

[Gi] Giusti, E.: *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Birkhäuser Boston, Inc., 1984

[Ha] Hansen, V.L.: *Shadows of the Circle.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 1998

[MH] Mardsen, J.E. ja Hoffman, M.J.: *Elementary Classical Analysis.* W.H. Freeman and Company, 1993

[Na] Narens, L.A.: Nonstandard Proof of the Jordan Curve Theorem. *Pacific J. Math.* 36 (1971), no. 1, 219-229

[Pu] Purmonen, Veikko T.: *Differentiaali- ja integraalilaskentaa osa II.* Jyväskylän yliopisto, 2000

[Ro] Rockafellar R.T.: *Convex Analysis.* Princeton University Press, 1972

[St] Sternberg, S.: *Lectures on Differential Geometry.* Prentice Hall, Inc., 1964