Kvadraattisen polynomin dynamiikka

Ilkka Malinen

10. maaliskuuta 2005

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Sisältö

1. Historian havinaa

Dynaamiset systeemit

Suurin osa työni pääkohdista on oivallettu viimeisen sadan vuoden aikana. Dynaamisten systeemien tutkijat pyrkivät ymmärtämään muutoksessa olevaa prosessia. Tämä aihealue ei ole ainoastaan matemaatikoiden tutkimuksen kohde, vaan monien muidenkin alojen tiedemiehet ovat keskittyneet dynaamisten systeemien tutkimukseen. Esimerkiksi tähtien ja galaksien liike on eräs dynaaminen systeemi. Sitä on tutkittu vuosisatoja ja tutkimusta ovat tehneet tuhannet matemaatikot sekä muiden alojen tiedemiehet. Muita klassisia esimerkkejä dynaamisista systeemeistä ovat pörssikurssit, kemialliset reaktiot sekä populaatioiden kasvu ja tuho. Tutkimuksilla pyritään selvittämään, mitä tutkittavalle systeemille on tapahtumassa eli esimerkiksi ovatko pörssikurssit nousussa vai laskussa.

Osa dynaamisista systeemeistä on helposti hallittavissa ja ymmärrettävissä - toiset eivät. On helppo olettaa, että aurinko nousee huomennakin, mutta esimerkiksi paikkansa pitävän sääennusteen tekeminen kuukauden päähän tai Hex-indeksin viikon keskiarvon ennustaminen näyttää olevan mahdottomuus. Näissä kahdessa tapauksessa muuttujien määrä on valtava, mistä seuraa, että ennusteesta tulee hyvin epävarma.

Eräs 1900-luvun merkittävimmistä löydöksistä matematiikan alalla on, että jopa yhden muuttujan systeemi voi käyttäytyä yhtä arvaamattomasti kuin edellä esittämäni esimerkit säästä ja pörssikursseista. Matemaatikot käyttävät tästä ennalta-arvaamattomuudesta nimeä kaaos. Koska kaaosta on löydetty hyvin yksinkertaisistakin systeemeistä, on tutkimus keskittynyt yksinkertaisten systeemien käyttäytymiseen, tavoitteena ymmärtää niiden avulla monen muuttujan systeemeitä.

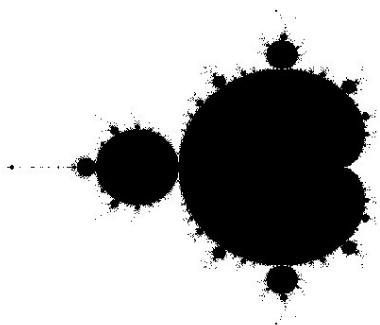
Tässä työssä dynaaminen systeemi on neliöllinen polynomi, jota iteroidaan. Iterointi merkitsee tapahtuman toistamista. Työssäni tämä tarkoittaa sitä, että lasketaan polynomin arvo tietyssä pisteessä ja saatu tulos sijoitetaan toistuvasti uudelleen polynomiin. Näin iteroitaessa saadaan joukko kompleksisia tai reaalisia lukuja. Tulemme huomaamaan, että toisinaan tulos on ennalta arvattava ja toisinaan täysin arvaamaton.

Historiaa

1918-1920 välisenä aikana kaksi ranskalaista matemaatikkoa, Gaston Julia ja Pierre Fatou, muuttivat dynaamisten systeemien tutkimusten painopistettä. He eivät keskittyneet vain lokaalisti dynamiikkaan, vaan pyrkivät ymmärtämään dynaamisia prosesseja globaalisti. Kiintopisteiden ympäriltä he löysivät varsin erikoista dynamiikkaa. Joskus iteraation tuotos oli helposti ennakoitavaa ja vakaata, kun taas toisinaan iteraation tulos oli dramaattisesti erilaista. Näiden kahden matematikon kunniaksi kutsumme nykyään kompleksisen dynaamisen systeemin stabiilia aluetta Fatou-joukoksi ja kaoottista aluetta Julia-joukoksi. Kyseisten tutkijoiden aikaansaannosta on näiden joukkojen monien ominaisuuksien kuvaileminen rationaalifunktioille. Kun he pyrkivät luokittelemaan kaikki mahdolliset Fatou-joukon dynamiikat, he törmäsivät umpikujaan. He olettivat, ettei Fatou-joukon dynamiikka sisältäisi "vaeltavia" alueita, mutta eivät kyenneet osoittamaan sitä. He eivät pystyneet myöskään todistamaan oletustaan Siegelin kiekon olemassa olosta. Näiden kahden ongelman vuoksi kompleksisten systeemien dynamiikan kehitys hidastui 50 vuodeksi.

Ennen toista suurta kehityskautta oli kaksi merkittävää tapahtumaa. 1940-luvulla C. L. Siegel osoitti, että Siegelin kiekko voi esiintyä kompleksisten dynaamisten systeemien yhteydessä. Tämä tulos auttoi stabiilien alueiden luokittelua ja pääsyä lähemmäksi lopullista ratkaisua. Myöhemmin I. N. Baker laajensi monia Fatoun ja Julian tuloksia erilaisille funktioille, osoittaen samalla, että monenlaista stabiilia käyttäytymistä voi esiintyä kokonaisilla ja meromorfisilla funktioilla.

Dynaamisten systeemien kehityksessä toinen suuri kausi alkoi 1980-luvulla, kun tietokoneet mahdollistivat nopeat numeeriset laskut sekä tulosten graafisen esittämisen. Eräs tietokoneen avulla saavutettu tulos oli Benoit Mandelbrotin löydös, jota nykyään kutsutaan Mandelbrot-joukoksi.



Mandelbrot-joukko

Kyseistä joukkoa on sanottu yhdeksi matematiikan kauneimmista ja monimuotoisimmista kohteista. Tämä kaunis kuva sai monia matematiikkoja kiinnostumaan Gastonin ja Julian töistä. Pian tämän jälkeen Dennis Sullivan esitteli kvasikonformikuvausten käytön dynaamisten systeemien yhteydessä. Tulos mahdollisti "vaeltavia alueita ei ole" -lauseen todistuksen. Todistus täydensi olennaisesti stabiilin dynamiikan luokittelun rationaalikuvauksille. Tämän työn olivat Julia ja Fatou aikanaan aloittaneet. Samaan aikaan A. Douady ja J. H. Hubbard toivat uusia näkökulmia neliöllisten polynomien parametriavaruuksiin. He kehittivät tekniikan, jolla pystytään luokittelemaan melko hyvin kaikenlaisten neliöllisten polynomien dynamiikat. Välittömästi tämän jälkeen alkoi työ monien erityyppisten kompleksisten dynaamisten systeemien ympärillä koskien rationaalikuvauksia, korkeamman asteen polynomeja, kokonaisia ja meromorfisia funktiota sekä systeemeitä, jotka perustuvat Newtonin menetelmään. [1] [3]

Merkkihenkilöitä dynaamisten systeemien alalta [7, mukaillen]:

Herman Amandus Schwarz	1843 – 1921
Henri Poincaré	1854 – 1912
Gabriel Kœning	1858 – 1931
Léopold Leau	1868 – 1940
L. É. Böttcher	1872 –
Constantin Carathéodory	1873 – 1950
Samuel Lattés	1875 – 1918
Paul Montel	1876 – 1975
Pierre Fatou	1878 – 1929
Paul Koebe	1882 – 1945
Pekka J. Myrberg	1892 – 1976
Gaston Julia	1893 – 1978
Carl Ludwig Siegel	1896 – 1981
Hubert Cremer	1897 – 1983
Lars Ahlfors	1907 – 1996
Lipman Bers	1914 – 1993
Benoit Mandelbrot	1924 –
Adrien Douady	1935 –
Vladimir I. Arnold	1937 –
Dennis P. Sullivan	1941 –
Michael R. Herman	1942 –
Bodil Branner	1943 –
John Hamal Hubbard	1945 –
William P. Thurston	1946 –
Jean-Christophe Yoccoz	1955 –
Misuhiro Shishikura	1960 –

2. Peruskäsitteitä

2.1. Määritelmä (Metrinen avaruus).

Funktiota $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kutsutaan *metriikaksi* joukossa X, jos jokaiselle $x, y, z \in X$ seuraavat väittämät pätevät:

1. $d(x, y) \geq 0$, ja $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Tällöin paria (X, d) kutsutaan metriseksi avaruudeksi.

2.2. Määritelmä (Normaali perhe). Funktiojoukkoa $\mathcal{F} = \{F_i | i \in I\}$, missä F_i ovat analyyttisiä funktioita, kutsutaan *normaaliksi perheeksi* joukossa $U \in \mathbb{C}$, jos ja vain jos kokoelman $\mathcal{F}$ jokaisella jonolla on alijono, joka suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, joko analyyttiseen funktioon tai pisteeseen ∞.

2.3. Määritelmä (Kutistava kuvaus). Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin funktiota $F : X_0 \to X$, missä $X_0 \subset X$ kutsutaan kutistavaksi joukossa X_0, jos on olemassa luku δ, $0 < \delta < 1$ siten että joukon X_0 kaikille pisteille x ja y pätee

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leq \delta d(x, y).$$

2.4. Lause (Kutistavan kuvauksen periaate). *Olkoon (X, F) täydellinen metrinen avaruus ja $F : X \to X$. Jos kuvaus F on kutistava, niin silloin on olemassa piste x, missä $F(x) = x$.*

TODISTUS: [5, theorem 3.8.2 jälkeen] □

3. Päätuotos

Tässä pro gradu työssä on tarkoitus tutustuttaa lukija kompleksisten neliöllisten polynomien dynamiikkaan. Tällaista polynomia merkitään

$$P_c(z) = z^2 + c, \text{ missä } c \in \mathbb{C}.$$

Tarkoituksena on ymmärtää miten polynomi käyttäytyy sitä iteroitaessa. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0:n *rata* polynomissa P_c on jono lukuja $z_0, z_1, z_2...$, missä $z_n = P_c(z_{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Huomaa merkintä $z_n = P_c^n(z_0)$, missä

$$P_c^n = \underbrace{P_c \circ \cdots \circ P_c}_{n\,kpl}$$

3.1. Merkintöjä ja käsitteitä.
Kiintopisteellä tarkoitetaan sellaista pistettä z_0, joka toteuttaa ehdon $P_c(z_0) = z_0$.
Jaksollisella pisteellä tarkoitetaan pistettä z_0, jolle $P_c^n(z_0) = z_0$, missä n on pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa yhtälön. Tässä n on jaksollisen pisteen z_0 *jaksonpituus*.
Piste z_0 on *esijaksollinen piste*, jos se ei ole jaksollinen, mutta $P_c^{n+j}(z_0) = P_c^j(z_0)$ jollekin $j > 0$
Koska $P_c'(0) = 0$, niin pisteen 0 rataa polynomissa P_c kutsutaan *kriittiseksi radaksi.*

3.2. Määritelmä. Olkoon z_0 polynomin P_c kiintopiste. Tällöin z_0 on

1. *erityisen puoleensavetävä*, jos $|P_c'(z_0)| = 0$
2. *puoleensavetävä*, jos $0 < |P_c'(z_o)| < 1$
3. *neutraali*, jos $|P_c'(z_0)| = 1$
4. *hylkivä*, jos $|P_c'(z_0)| > 1$

Tämän terminologian perustana on seuraava. Jos z_0 on puoleensavetävä tai erityisen puoleensavetävä kiintopiste, silloin on olemassa pisteen z_0 ympäristö U, jossa toteutuu, että $P_c^n(z) \to z_0$ kun $n \to \infty$, kaikille $z \in U$.

Tämä voidaan osoittaa seuraavasti: Koska P_c on jatkuvasti derivoituva sekä $|P_c'(z_0)| < 1$, niin on olemassa pisteen z_0 jokin ympäristö U, jonka pisteille pätee

$|P_c'(w)| \le \delta < 1$, kun $w \in U$. Kun ξ kuuluu janalle $[w_1, w_2]$, käyttämällä väliarvolausetta saadaan

$$|P_c(w_1) - P_c(w_2)| \le |P_c'(\xi)||w_1 - w_2| \le \delta|w_1 - w_2|.$$

Näin ollen polynomikuvaus täyttää kutistavan kuvauksen ehdot, ja joukon U kaikkien pisteiden radat konvergoivat kohti pistettä z_0. Tätä konvergoivien pisteiden joukkoa kutsutaan pisteen z_0 *perusalueeksi*.

Jos z_0 on hylkivä kiintopiste, niin sen lähellä dynamiikka on hyvin erilaista. Koska $P_c'(z_0) \ne 0$, niin käänteiskuvauslauseesta [8, theorem 4.1] seuraa, että on olemassa pisteen z_0 ympäristö U, jossa on olemassa analyyttinen P_c:n käänteiskuvauksen haara. Koska z_0 on puoleensavetävä kiintopiste tässä käänteiskuvauksen haarassa, niin iteroitaessa U:n pisteitä niiden radat menevät kohti pistettä z_0. Näin ollen joukon U pisteiden radat ovat hylkiviä pisteestä z_0 iteroitaessa polynomia P_c.

Jos z_0 on neutraali piste, niin silloin sen ympäristössä dynamiikka voi olla puoleensavetävää, hylkivää tai jonkin muunlaista. Dynamiikka lähellä neutraalia pistettä on hyvin monimutkaista, ja joissain tapauksissa sitä ei vielä täysin hallita ja ymmärretä.

Usein on hyödyllistä tarkastella dynamiikkaa Riemannin pallossa $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Kompaktifioidaan $\mathbb{C}$, eli joukossa $\overline{\mathbb{C}}$, ∞-pisteen ympäristöt ovat $\mathbb{C}$:n rajoitettujen joukkojen komplementit. Nyt ∞ on kiintopiste polynomille P_c ja $P'(\infty) = 0$. Tämä on helppo nähdä konjugoimalla $H^{-1} \circ P_c \circ H$, missä $H = 1/z$. Tämä funktio kuvaa pisteen ∞ nollaksi ja funktio on muotoa

$$z \mapsto \frac{z^2}{1 + cz^2}.$$

Nyt on helppo huomata, että tässä kuvauksessa piste 0 on erityisen puoleensavetävä kiintopiste. Näin ollen on olemassa $R > 0$ siten että, jos $|z| > R$ niin $|P_c^n(z)| \to \infty$, kun $n \to \infty$.

3.3. Määritelmä. Olkoon Λ metrinen avaruus ja $F : \Lambda \to \Lambda$ jatkuva. Tällöin F on pisteessä $p \in \Lambda$ *herkkä alkuehdoille*, jos on olemassa kiinteä $\beta > 0$ siten, että jokaisessa pisteen p ympäristössä U, on olemassa $n > 0$ ja y $\in U$ siten, että

$$d\big(F^n(p),\, F^n(y)\big) > \beta.$$

Taustalla tässä on se, että ei ole väliä kuinka pieni pisteen p ympäristö valitaan, vaan joka tapauksessa U sisältää pisteen, jota iteroitaessa sen etäisyys pisteen p iteraatiosta on vähintäänkin β.

Kuvaus $F : \Lambda \to \Lambda$ on *kaoottinen*, jos F on herkkä alkuehdoille kaikissa pisteissä $a \in \Lambda$.
Jos F ei ole herkkä alkuehdoille missään pisteessä $a \in \Lambda$, niin sanotaan että F on *stabiili* Λ:ssa.

Dynaamisten systeemien kauneus on jyrkkä ero alueiden välissä, joissa toisissa dynamiikka on stabiilia ja toisissa kaoottista.

3.4. Määritelmä. Jatkuva kuvaus $F : \Lambda \to \Lambda$ on *transitiivinen*, jos kaikille avoimille epätyhjille joukoille U ja V on olemassa $n > 0$, siten että $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

3.5. Lause. *Olkoon Λ ääretön joukko ja $F : \Lambda \to \Lambda$. Jos tällöin pätee että*

1. *F:n jaksolliset pisteet ovat tiheässä Λ:ssa*
2. *F on transitiivinen Λ:ssa*

niin F on kaoottinen Λ:ssa.

TODISTUS: Aluksi huomataan, että on olemassa $\delta_0 > 0$ siten, että kaikille $x \in \Lambda$ on olemassa jokin jaksollinen piste $q \in \Lambda$, jonka radan $O(q)$ etäisyys pisteestä x on vähintäänkin $\delta_0/2$. Itse asiassa valitaan kaksi mielivaltaista jaksollista pistettä q_1 ja q_2, joiden radat $O(q_1)$ ja $O(q_2)$ ovat pistevieraat. Tällaiset pisteet q_1 ja q_2 ovat olemassa, koska Λ on ääretön joukko, jossa jaksolliset pisteet ovat tiheässä, ja jaksollisen pisteen jaksonpituus ei voi olla ääretön. Olkoon δ_0 ratojen $O(q_1)$ ja $O(q_2)$ välinen etäisyys. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla kaikkien pisteiden $x \in \Lambda$ etäisyys ainakin toisesta valitusta jaksollisesta pisteestä on vähintään $\delta_0/2$. Tulemme huomaamaan, että F on herkkä alkuehdoille herkkyydellä $\delta = \delta_0/8$.

Olkoon x mielivaltainen piste joukossa Λ ja olkoon N jokin pisteen x ympäristö. Koska F:n jaksolliset pisteet ovat tiheässä, niin on olemassa jaksollinen piste p leikkausjoukossa $U = N \cap B_\delta(x)$. Tässä B on x-keskeinen, δ säteinen pallo. Olkoon n pisteen p jaksonpituus. Kuten yllä osoitettiin, on olemassa jaksollinen piste $q \in \Lambda$, jonka radan $O(q)$ etäisyys pisteestä x on vähintäänkin 4δ.
Olkoon joukko

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} F^{-i}\Big(B_\delta\big(f^i(q)\big)\Big).$$

Selvästi V on avoin ja epätyhjä, koska $q \in V$. Koska F on transitiivinen, on olemassa $y \in U$ ja luonnollinen luku k siten, että $F^k(y) \in V$.
Olkoon j osamäärän $k/n + 1$ kokonaislukuosa, tällöin $\frac{1}{n} + \frac{k}{n} \leq j \leq \frac{k}{n} + 1$ eli $1 \leq nj - k \leq n$. Näin ollen

$$F^{nj}(y) = F^{nj-k}\big(F^k(y)\big) \in F^{nj-k}(V) \subseteq B_\delta\big(F^{nj-k}(q)\big).$$

Nyt $F^{nj}(p) = p$ ja kolmioepäyhtälöstä seuraa

$$d\big(F^{nj}(p), F^{nj}(y)\big) = d\big(p, F^{nj}(y)\big) \geq d\big(x, F^{nj-k}(q)\big) - d\big(F^{nj-k}(q), F^{nj}(y)\big) - d\big(p, x\big),$$

missä d on etäisyysfunktio. Koska $p \in B_\delta(x)$ ja $F^{nj}(y) \in B_\delta(F^{nj-k}(q))$ niin

$$d\big(F^{nj}(p), F^{nj}(y)\big) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Käyttämällä uudelleen kolmioepäyhtälöä saadaan, että joko $d(F^{nj}(x), F^{nj}(y)) > \delta$ tai $d(F^{nj}(x), F^{nj}(p)) > \delta$. Eli olemme löytäneet pisteen, joka kuuluu joukkoon N. Tämän pisteen nj:nen iteraation ja $F^{nj}(x)$:n välinen etäisyys on enemmän kuin δ. [1] □

3.6. Määritelmä (Julia-joukko). Polynomin P_c *Julia-joukko*, jota merkitään $J(P_c)$, on kaikkien niiden pisteiden joukko, missä P_c on herkkä alkuehdoille. Eli $J(P_c)$ on P_c:n kaoottinen joukko. Julia-joukon komplementti on *stabiili joukko*, jota kutsutaan myös *Fatou-joukoksi.*

3.7. Lause. *Olkoon $\{F_i\}$ perhe analyyttisiä funktioita siten, että $\{F_i\}$ ei ole normaali perhe. Tällöin perhe $\{F_i\}$ saa joukon $\overline{\mathbb{C}}$ kaikki arvot, yhtä pistettä vaille kaikki arvot tai kahta pistettä vaille kaikki arvot.*

TODISTUS: [6, lauseen 33.4 jälkeen] □

Jos polynomin P_c iteraatioiden perhe, $\{P_c^n\}$, ei ole normaaliperhe missään pisteen z_0 ympäristössä, niin selvästi $z_0 \in J(P_c)$. Itse asiassa lähellä pistettä z_0 on pisteitä, joiden radat menevät mielivaltaisen kauas pisteen z_0 radasta. Tämä tulos on totta myös kääntäen.

3.8. Lause. *Julia-joukko $J(P_c) = \big\{z_0 \in \mathbb{C} | \{P_c^n\}$ ei ole normaali perhe missään pisteen z_0 ympäristössä.$\big\}$*

Jos piste z_0 on hylkivällä jaksollisella radalla ja pisteen z_0 jaksonpituus polynomissa P_c on n, niin silloin $|(P_c^n)'(z_0)| = \lambda > 1$. Nyt

$$|(P_c^{nj})'(z_0)| = \lambda^j \to \infty$$

kun $j \to \infty$, joten yksikään perheen $\{P_c^{nj}\}$ osajono ei suppene analyyttiseen funktioon. Koska $P_c^{nj}(z_0) = (z_0)$, kaikille j, niin yksikään osajono ei suppene myöskään pisteeseen ∞. Tällöin perhe $\{P_c^n\}$ ei ole normaaliperhe missään pisteen z_0 ympäristössä, ja siten $z_0 \in J(P_c)$.

Tästä seuraa, että hylkivien jaksollisten pisteiden kasautumispisteet kuuluvat joukkoon $J(P_c)$, ja näin saamme Julia-joukolle uuden luonnehdinnan.

3.9. Lause. *Julia-joukko $J(P_c)$ on P_c:n hylkivien jaksollisten pisteiden sulkeuma.*

Kun muistamme, että ääretön on aina P_c:n puoleensavetävä kiintopiste, niin on olemassa $R > 0$, siten, että jos $|z| > R$, niin $|P_c^n(z)| \to \infty$, kun $n \to \infty$. Näin ollen yksikään tällainen piste z ei sisälly joukkoon $J(P_c)$ ja siksi $J(P_c)$ on rajoitettu joukko. Lisäksi kaikkien $J(P_c)$:n pisteiden radat ovat rajoitettuja.

3.10. Määritelmä. Polynomin P_c täytetty Julia-joukko, jota merkitään $K(P_c)$, on niiden pisteiden joukko, jotka ovat rajoitettuja P_c:n iteraatiossa.

Huomataan, että $J(P_c) \subset K(P_c)$. Lisäksi tiedetään, että $\{P_c^n\}$ ei ole normaali perhe joukon $J(P_c)$ yhdenkään pisteen ympäristössä. Tällöin mielivaltaisen lähellä joukon $J(P_c)$ jokaista pistettä on pisteitä, joiden radat menevät äärettömyyteen. Kääntäen, jos pisteen z rata on rajoitettu, mutta mielivaltaisen lähellä pistettä z on pisteitä, joiden radat karkaavat äärettömyyteen, niin tällöin piste z kuuluu joukkoon $J(P_c)$.

3.11 . Lause. *Julia-joukko $J(P_c)$ on $K(P_c)$:n reuna, eli rajoitettujen ja ei-rajoitettujen ratojen reuna.*

Huomaa, että lause 3.11 pätee vain polynomeille eikä yleisesti funktioille.

Fatou-joukkoon kuuluu kaikki puoleensavetävät jaksolliset pisteet yhdessä perusalueidensa kanssa. Selvästikään puoleensavetävien pisteiden perusalueissa ei ole hylkiviä jaksollisia pisteitä eikä karkaavia ratoja. Edellä mainitut pisteet ovat Fatou-joukon peruspisteitä, näiden lisäksi siihen kuuluu myös muita pisteitä.

Muotoa $P_c(z) = z^2 + c$ oleviin polynomeihin keskittymiselle on selvä syy, sillä jokainen neliöllinen kuvaus on dynaamisesti ekvivalentti perheen P_c kanssa. Tarkkaan ottaen sanotaan, että kuvaukset $F, G : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *konjugoivat*, jos on olemassa homeomorfismi $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ siten, että $h \circ F = G \circ h$. Tästä seuraa, että $h \circ F^n = G^n \circ h$, siis h kuvaa F:n radat G:n radoiksi. Sama kääntäen eli h^{-1} vie G:n radat F:n radoiksi. Näin ollen h antaa F:n ja G:n ratojen välille vastaavuuden.

3.12. Lemma. *Olkoon* $F(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ *ja* $\alpha \neq 0,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$. *Tällöin* F *on polynomin* $P_c(z) = z^2 + c$ *konjugaatti jollekin* $c \in \mathbb{C}$. *Itse asiassa affiini kuvaus*

$$H(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2}$$

toteuttaa $H \circ F = P_c \circ H$, *missä*

$$c = \alpha\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}.$$

On vain kaksi muotoa $z^2 + c$ olevaa polynomia, joille $J(P_c)$ voidaan laskea suoraviivaisesti. Nämä erikoistapaukset ovat $P_{-2}(z)$ ja $P_0(z)$. Muille c:n arvoille on olemassa numeerisia laskentatapoja saada $J(P_c)$:n kuva aikaiseksi. Eräs helpoimmista tavoista saada joukon $K(P_c)$ kuva aikaiseksi on seuraava:

3.13. Pakoaika-algoritmi.

1. Jaetaan $\mathbb{C}$ sopivalla ruudukolla osiin.
2. Poimitaan jokaisesta ruudusta piste z_0 ja lasketaan $P_c^i(z_0)$, $1 \leq i \leq N$, johonkin ennalta valittuun arvoon N asti.
3. Jos $|P_c^i(z_0)| \geq$ RAJA jollekin i, niin oletetaan, että z_0:n rata karkaa, eli $z_0 \notin K(P_c)$ ja väritetään z_0:n ruutu valkoisella.
4. Jos $|P_c^i(z_0)| <$ RAJA kaikille i, niin oletetaan, että z_0:n rata on rajoitettu, eli $z_0 \in K(P_c)$ ja väritetään kyseinen ruutu mustalla.

RAJAn tarkka-arvo on $max(2, |c|)$.

Pakoaika-algoritmin toimivuuden voi osoittaa seuraavasti:
Olkoon $R = max(2, |c|)$. Jos $|z| > R$, niin

$$\frac{|P_c^1(z)|}{|z|} = \frac{|z^2 + c|}{|z|} \geq |z| - \frac{|c|}{|z|} > |z| - 1 > 1$$

joten

$$|P_c^{n+1}(z)| > |P_c^n(z)|$$

ja tällöin $|P_c^n(z)| \to \infty$, kun $n \to \infty$.
Viimeisen askeleen perusteluna voi käyttää seuraavaa:

$$\frac{|P_c^1(z)|}{|z|} > |z| - 1 = 1 + \delta > 1 \text{ tällöin } |P_c^1(z)| > (1 + \delta)|z| > 2$$

Lasketaan muutamia osamääriä auki.

$$\frac{|P_c^2(z)|}{|P_c^1(z)|} > |P_c^1(z) - 1| > \Big[(1 + \delta)|z| - 1\Big]$$

$$\frac{|P_c^3(z)|}{|P_c^2(z)|} > |P_c^2(z) - 1| > |P_c^1(z)|\Big[|P_c^1(z)| - 1\Big]$$

$$\frac{|P_c^4(z)|}{|P_c^3(z)|} > |P_c^3(z) - 1| > |P_c^2(z)|\Big[|P_c^2(z)| - 1\Big] > |P_c^2(z)||P_c^1(z)|\Big[|P_c^1(z)| - 1\Big]$$

$$\frac{|P_c^5(z)|}{|P_c^4(z)|} > |P_c^4(z) - 1| > |P_c^3(z)|\Big[|P_c^3(z)| - 1\Big] > |P_c^3(z)||P_c^2(z)||P^1(z)|\Big[|P_c^1(z)| - 1\Big]$$

Nyt selvästi nähdään, että

$$\frac{|P_c^n(z)|}{|P_c^{n-1}(z)|} > \underbrace{|P_c^{n-2}(z)||P_c^{n-3}(z)| \ldots |P_c^1(z)|}_{n-2\,kpl}\Big(|P_c^1(z)| - 1\Big) > \underbrace{|P_c^1(z)|^{n-2}}_{>2^{n-2}}\underbrace{\Big((1 + \delta)|z| - 1\Big)}_{>1} > 2^{n-2}$$

$$2^{n-2} \to \infty, \text{ kun } n \to \infty.$$

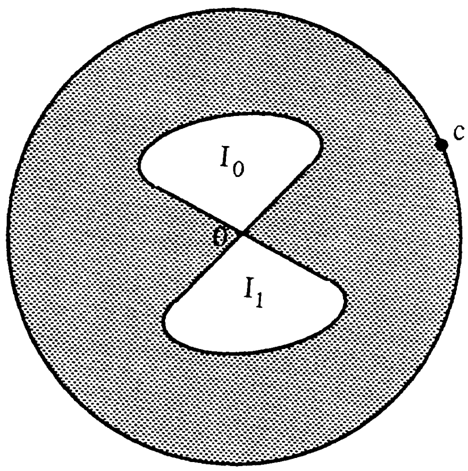
Koska jakaja on oletusten nojalla suurempi kuin 2, niin jaettavan on mentävä äärettömyyteen, joten $|P_c^n(z)| \to \infty$ kun $n \to \infty$.

4. Esimerkkejä

4.1. Esimerkki. Olkoon $P_5(z) = z^2 + 5$. Tämä on hyvin tyypillinen esimerkki, ja käytetyt ratkaisutavat toimivat yleisemminkin muotoa $z^2 + c$ oleville polynomeille, kunhan $|c|$ on tarpeeksi suuri, esimerkiksi $|c| > 2$ on riittävä.

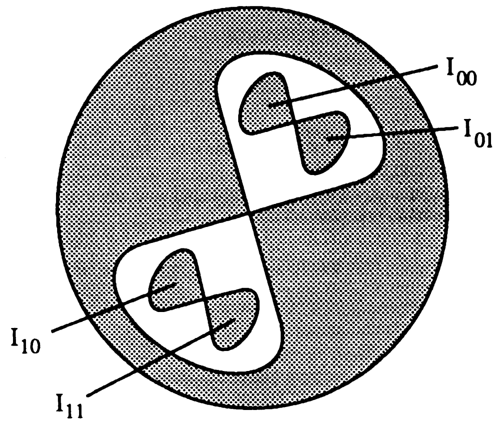
Määritellään ensin alue $R_0 = \{z \mid |z| \leq 5\}$. Huomataan, että kriittinen arvo $P_5(0) = 5$ sisältyy joukkoon R_0. Joukon R_0 kuva on ympyrä, jonka säde on 25 ja keskipisteenä 5, ja niin joukko R_0 sisältyy joukkoon $P_5(R_0)$. On helppo tarkistaa, että joukko $P_5(R_0) - R_0$ kuuluu perusalueeseen erityisen puoleensavetävälle kiintopisteelle, joka tässä tapauksessa on ääretön. Tämä tarkoittaa, että jokaisella pisteellä joukossa $P_5(R_0) - R_0$ on rata, joka menee äärettömyyteen. Lisäksi jokainen rata, joka menee äärettömyyteen, kohtaa tämän joukon tarkalleen kerran. Löytääksemme joukon $K(P_5)$, tarkastelemme aluksi niitä pisteitä, joiden radat kohtaavat joukon $P_5(R_0) - R_0$, koska tämän joukon komplementti on $K(P_5)$

Olkoon $R_1 = \{z \mid P_5(z) \in R_0\}$. Huomataan, että $0 \in R_0$ ja että se on pisteelle 5 ainoa alkukuva, joka sisältyy joukkoon R_0. Kaikilla muilla joukon R_0 pisteillä on kaksi alkukuvaa joukossa R_1. Huomataan, että alue R_1 on muodoltaan "kahdeksikko" sisältäen sisäpisteensä. Merkitään näitä lohkoja I_0 ja I_1. Kuvaukset molemmil-



Joukot R_0 ja R_1

ta lohkoilta ovat injektiivisiä joukolle R_0. Maksimiperiaatteesta seuraa, että joukko $R_0 - R_1$ kuvautuu joukolle $P_5(R_0) - R_0$, täten jokaisella pisteellä joukon R_1 ulkopuolella on rata, joka menee äärettömyyteen. Koska molemmat joukon R_1 lohkot kuvautuvat injektiivisesti joukolle R_0, niin on olemassa kaksi joukon R_1 osajoukkoa, jotka kuvautuvat homeomorfisesti joukkoon R_1. Merkitään näiden joukkojen yhdistettä R_2:lla. Joukko R_2 koostuu kahdesta kahdeksikon muotoisesta joukosta, joiden lohkot I_{00} ja I_{01} sisältyvät joukkoon I_0 sekä lohkot I_{10} ja I_{11} sisältyvät joukkoon I_1. Näin ollen joukko R_2 on joukon R_1 sisuksessa ja $P_5^2 : R_2 \to R_1$. Päättelyketjua



Joukot R_0, R_1 ja R_2

voidaan jatkaa. Olkoon

$$R_{n+1} = P_5^{-1}(R_n).$$

Voidaan osoittaa, että joukko R_{n+1} on joukon R_n sisässä, ja että R_{n+1} on muodostunut tarkalleen 2^n komponentista, joista jokaiselta on homeomorfismi lenkkien sisäpisteet sisältävälle kahdeksikon muotoiselle joukolle.

Nyt voidaan päätellä, että joukon $K(P_5)$ pisteet ovat joukon R_n sisäpisteitä ja tästä seuraa, että $K(P_5)$ on muodostunut äärettömän monesta komponentista. Itse asiassa voidaan osoittaa, että jokainen joukon R_N komponenteista surkastuu pisteeksi, kun $N \to \infty$ ja täten $K(P_5) = J(P_5)$.

4.2. Esimerkki. Olkoon $P_0(z) = z^2$. Tämä on yksinkertaisin neliöllinen polynomi, ja lisäksi 0 ja ∞ ovat polynomin $P_0(z)$ erityisen puoleensavetäviä kiintopisteitä. Tarkastellaan aluksi tapausta $|z_0| < 1$. Olkoon $z_0 = x + yi$, missä $x, y \in \mathbb{R}$. Koska
$|P_0(z)| = |z^2| = x^2 + y^2$ ja
$|z_0| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$,
niin $|P_0^n(z_0)| \to 0$, kun $n \to \infty$. Vastaavaa päättelyä voidaan käyttää myös kun $|z_0| = 1$ tai $|z_0| > 1$, jolloin saadaan:

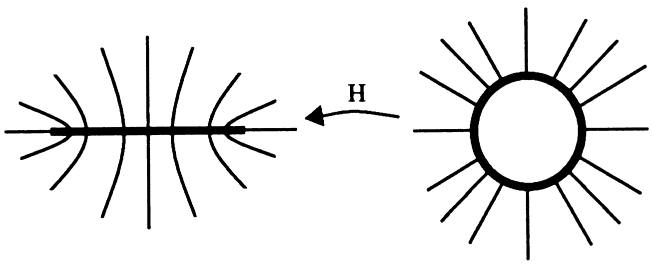
1. $|P_0^n(z_0)| \to 0$, jos $|z_0| < 1$

2. $|P_0^n(z_0)| \to \infty$, jos $|z_0| > 1$

3. $|P_0^n(z_0)| = 1$, jos $|z_0| = 1$

Siis joukko $\{z|\,|z| < 1\}$ on puoleensavetävän kiintopisteen 0 perusalue, joka kuuluu Fatou-joukkoon. Joukon $\{z|\,|z| > 1\}$ kaikkien pisteiden radat karkaavat äärettömyyteen, joten nämäkin pisteet kuuluvat Fatou-joukkoon. Alue näiden alueiden välissä on yksikköympyrä, joka on joukon $K(P_0)$ reuna, ja siten tämä on Julia-joukko polynomille P_0.

4.3. Esimerkki. Olkoon $P_{-2}(z) = z^2 - 2$, osoitetaan että $J(P_{-2})$ on suljettu väli $[-2, 2]$. Huomataan pisteen 0 radan ominaisuus, että $P_{-2}^n(0) = 2$, kaikille $n > 2$. Vaikka P_{-2} on hyvin erilainen verrattuna P_0, niin siitä huolimatta näiden välillä on silmiinpistävä yhteys. Olkoon funktio $H(z) = z + 1/z$, määriteltynä joukossa $\{z|\,|z| \geq 1\}$. Helposti nähdään, että H kuvaa avoimen yksikköympyrän ulkopuolen koko avaruudeksi ja yksikköympyrän väliksi $[-2, 2]$. Itse asiassa H kuvaa suorat hyperbeleiksi, kuten alla olevasta kuvasta nähdään.



Funktio H kuvaa suorat hyperbeleiksi ja avoimen yksikköympyrän väliksi $[-2, 2]$.

Tärkeämpää on kuitenkin se, että H on konjugoiva kuvaus polynomeille P_0 ja P_{-2} joukossa $\{z|\,|z| \geq 1\}$. Tämä on helppo tarkistaa laskulla

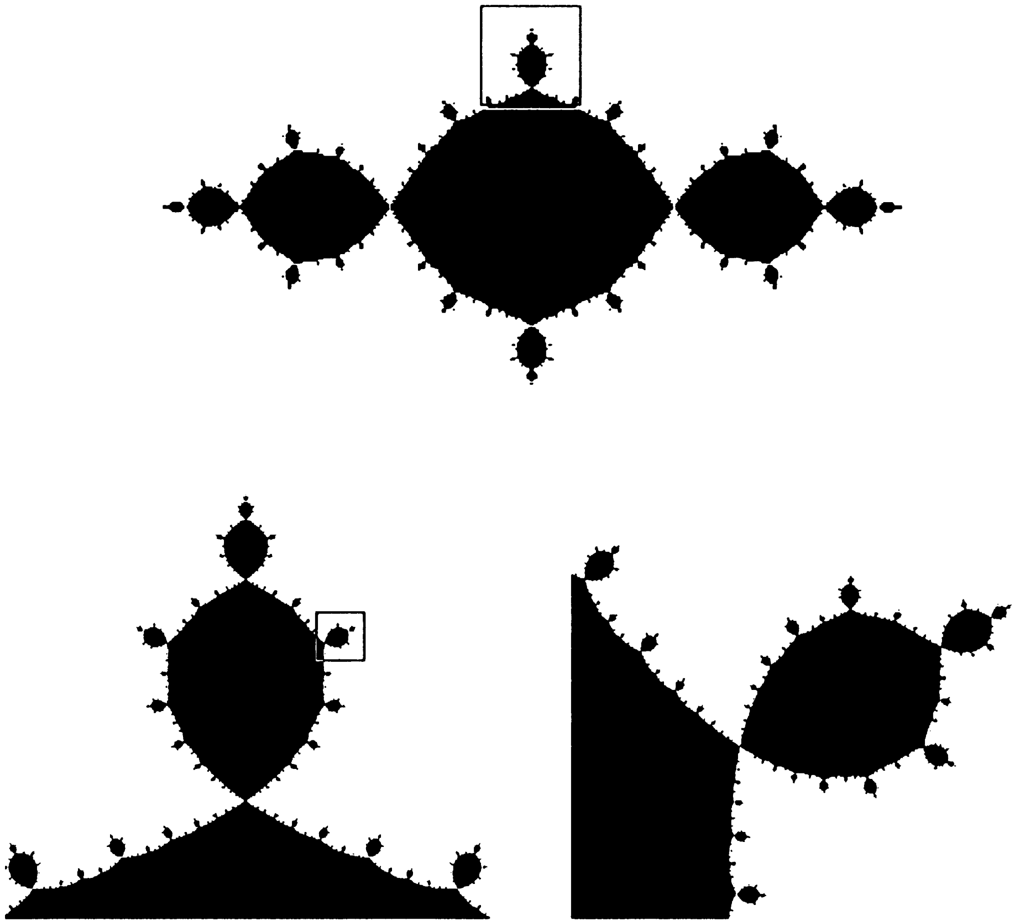
$$H(z^2) = \big(H(z)\big)^2 - 2,$$

joten $H \circ P_0 = P_{-2} \circ H$. Näin ollen jos $z \notin [-2, 2]$, niin $P_{-2}^n(z_0) \to \infty$, kun $n \to \infty$ ja joukon $[-2, 2]$ kaikkien pisteiden radat ovat rajoitettuja polynomissa P_{-2}. Joten $K(P_{-2}) = [-2, 2] = J(P_{-2})$.

4.4. Esimerkki. Olkoon $P_{-1}(z) = z^2 - 1$ jolloin $P_{-1}(0) = -1$ ja $P_{-1}(-1) = 0$, siis 0 ja 1 ovat jaksollisella radalla, jonka jaksonpituus on 2. Lisäksi $P_c'(0) = 0$ kaikille c ja

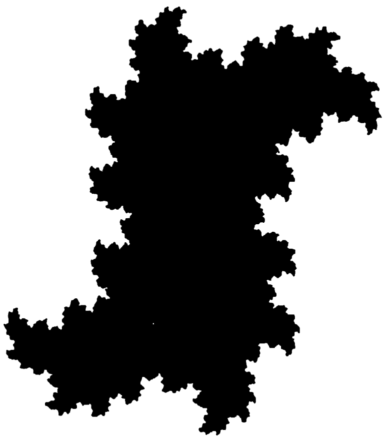
$$(P_{-1}^2)'(0) = (P_{-1}^2)'(-1) = 0.$$

Käyttämällä pakoaika-algoritmia saadaan joukon $K(P_c)$ kuva aikaiseksi. Huomioi, että $J(P_c)$ on joukon $K(P_c)$ reuna. Kuvaa on suurennettu muutaman kerran, jotta olisi helpompi huomata joukon fraktaalimaisuus.

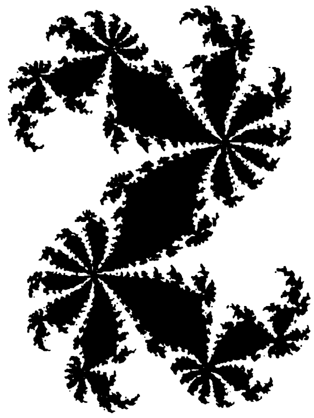


Täytetty Julia-joukko polynomille P_{-1} ja kaksi suurennosta [3, s.236]

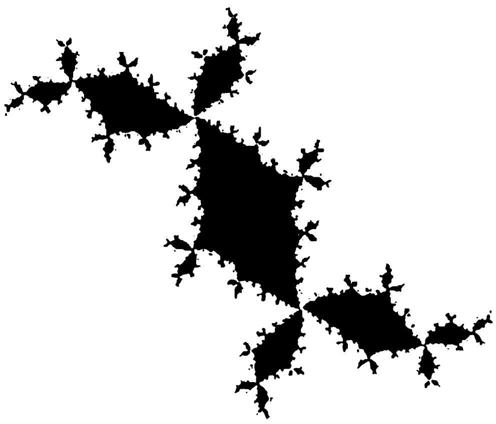
4.5. Esimerkki. Alla on $K(P_c)$ joukkojen kuvia joillekin c:n arvoille. [3, s.235-237] [4, s.296]



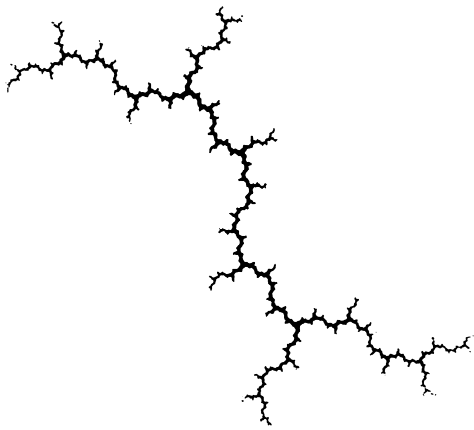
$c = 0,3 - 0,4i$



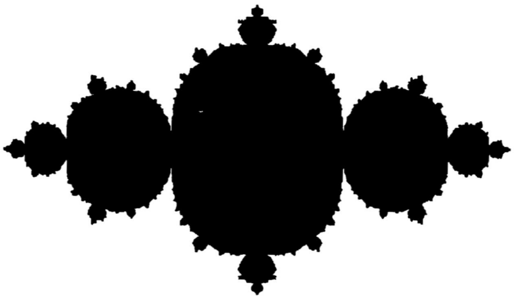
$c = 0,360284 + 0,100376i$



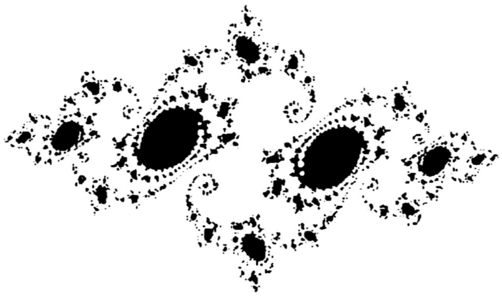
$c = 0,1 + 0,8i$



$c = i$

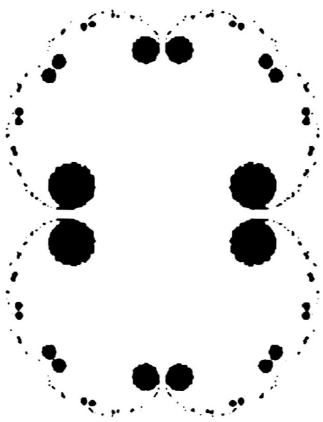


$c = -0,75$



$c = -0,75 + 0,1i$

$c = 0,25$



$c = 0,255$

Kirjallisuus

[1] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., ja Stacey, P. *On Devaney's definition of chaos,* American mathematical monthly 99, 332-334, (1992).

[2] Devaney, R. L. *Complex dynamical systems of quadratic polynomials,* Proceedings of symposia in applied mathematics, vol. 49, 1-20, (1994).

[3] Devaney, R. L. *A first course in chaotic dynamical systems,* Addison-Wesley, (1992).

[4] Devaney, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems, second edition,* Addison-Wesley, (1989).

[5] Friedman, A. *Foundations of modern analysis,* Dover, (1982).

[6] Lehto, K. *Funktioteoria I-II,* Limes, (1982).

[7] Milnor, J. *Dynamics in one complex variable,* SUNY Stonybrook institute for mathematical sciences preprint, (1990/5).

[8] Palka, B. P. *An introduction to complex function theory,* Springer-Verlag, (1990).