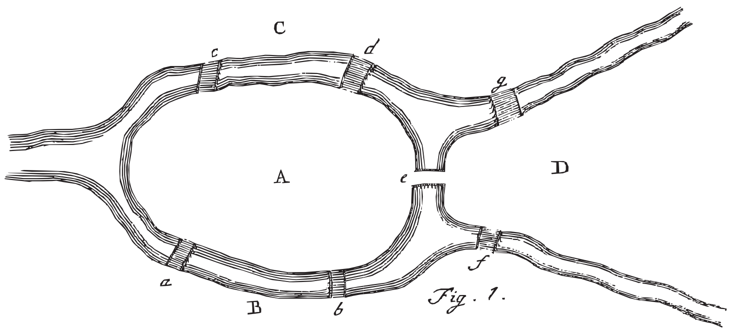
Tasoverkot

Elina Kallunki



Matematiikan Pro Gradu-tutkielma
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto
Syksy 2006

Sisältö

Johdanto

Pro gradu tutkiemassani halusin keskittyä matematiikan osa-alueeseen, joka ensimmäisenä herätti minussa suuren mielenkiinnon tietoteknisten sovellusalueidensa vuoksi. Lisäksi kyseinen aihealue oli pitkään aikaan ensimmäinen, joka onnistui palauttamaan mielenkiintoni matematiikan lukemiseen. Siksi graduaiheen valinnan tullessa ajankohtaiseksi, tämä oli suoraan yksi mielenkiintoisimmista osa-aluevaihtoehdoista. Molemmat graduni pääkohdat ovat asioita, joihin olen törmännyt aiemminkin ja jotka jo silloin vaikuttivat mielenkiintoisilta. Olin iloisesti yllättynyt siitä, että minun oli mahdollista keskittyä näihin. Kiitos siis pro gradu -ohjaajalleni professori Esa Järvenpäälle näin kiinnostavien pääkohtien valinnasta.

Ensimmäisessä luvussa käsittelen tämän matematiikan osa-alueen historiaa ja alkukehitystä nykypäivän tunnetuimpiin ongelmiin. Ala on siitä poikkeuksellinen, että sen alkuhetki voidaan suoraan osoittaa ensimmäiseen formalisoituun ongelmaansa. Sitä ennen alan ongelmia pidettiin lähinnä viihdyttävinä pähkinöinä. Myös alan sovellukset ovat maallikoille helpommin ymmärrettäviä ja löydettävissä kuin monen muun matematiikan haaran.

Seuraavissa kahdessa luvussa käsittelen verkkoteorian perusteet ja tasoverkkojen erikoisuuksia. Näiden tietojen on tarkoitus antaa pohja tulevien kohtien ymmärrykselle. Luvut ovat sisällöltään laajempia, kuin mitä pro graduni pääkohtien ymmärtäminen edellyttäisi, mutta halusin tehdä tästä osiosta enemmän kuin vain perustietoluettelon – halusin, että tulevana opettajana voisin käyttää sitä mahdollisesti opetusmateriaalinakin.

Neljännen luvun sisältö on ensimmäinen pro graduni pääkohdista eli Eulerin kaava ja muutamia sen seurauksia. Tämän sisältöä tarvitaan toisen pääkohdan eli 5-värilauseen toisessa todistuksessa. Eulerin kaavalla on paljon muitakin seurauksia, mutta tässä ovat vain pro graduni kannalta oleelliset tai ymmärrystä helpottavat. Eulerin kaavaan olin pinnallisesti tutustunut aiemmin Matemaatiikan historian kurssin yhteydessä Platonin säännöllisiin monitahokkaisiin rajoittuen.

Viidennessä ja kuudennessa luvussa käsittelen karttojen värittämistä eli 4- ja 5-väriongelmia, joista 5-väriongelman todistus oli graduni toinen pääkohta. 4-väriongelman esittelen, koska se synnytti 5-väriongelmalle sekä ongelman itsensä että ratkaisun. 5-väriongelma taas todistetaan sekä neljännen luvun Eulerin kaavan avulla että ilman sitä. Näiden lisäksi löysin myös muita todistuksia, mutta päädyin valitsemaan ensimmäisen ja erikoisimman.

Seitsemän ja kahdeksas luku keskittyvät konkretisoimaan verkkoteoreettisia ongelmia esimerkkien ja sovellusten avulla. Kokoelmaan kuuluvat muutama pääkohtia täydentävä tehtävä sekä omia valintojani tyypillisiksi tasoverkkojen ja väritysten esimerkeiksi.

1 Historiaa

Varsinaisen verkkoteorian alkuna pidetään Königsbergin eli Kaliningradin siltaongelmaa. Kaliningradin lävitse virtaa joki, jossa on kaksi saarta. Molemmilta saarilta kulkee silta tai siltoja molemmille rannoille ja toisilleen. Kaupungin asukkaat koettivat löytää reitin, jota pitkin kulkemalla jokainen silta tulisi kuljetuksi vain kerran ja lopuksi vielä päädyttäisiin lähtörannalle. Vuonna 1736 Euler todisti julkaisussaan [8]

> *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"*
> *(The solution of a problem relating to the geometry of position),*

että tälläistä reittiä ei ole olemassa edes vaikka luovuttaisiin vaatimuksesta päätyä lopulta lähtörannalle. Ongelmaa on tarkemmin tutkittu luvussa 7.2.

Königsbergin siltaongelmaa pidetään formaalin verkkoteorian ensimmäisenä ongelmana ja näin ollen Eulerin katsotaan käytännössä luoneen ratkaisunsa yhteydessä uuden matematiikan haaran. Tämä on myös ensimmäisiä topologisia ratkaisuja, joissa siirrytään etäisyyksien geometriasta paikkojen suhteiden geometriaan.

Tätäkin vanhempia verkkoteoriaan laskettavia ongelmia on tiedossa. Yksi on tarina kuninkaasta, jolla oli neljä poikaa. Hän halusi, että pojat perivät jokainen neljänneksen kuningaskunnasta ja että jokaisen pojan pääkaupungista tulisi rakentaa tie kaikkiin muihin kaupunkeihin siten, että tiet eivät jaa muita maita kahtia eivätkä risteä muualla kuin pääkaupungeissa. Tämä on ratkaistavissa, mutta tarinan jatko-ongelma, joka kertoo kuninkaan saaneen vielä yhden pojan lisää ja neuvonantajien onnistuneen suorittamaan jaon uudelleen onnistuneesti, on nykyisin todistettu mahdottomaksi.

Modernimpiin verkkoteoreettisiin ongelmiin kuuluu ns. Kauppamatkustajan ongelma (*"Traveling Salesman Problem"*). Siinä on tarkoituksena löytää lyhin mahdollinen reitti, jolla kuljetaan määrättyjen paikkojen kautta ja päädytään lähtöpisteeseen (tarkempi kuvaus kappaleessa 7.8). Leikillisestä nimestään ja asettelustaan huolimatta tämä ongelma esiintyy mitä moninaisimmissa käytännön sovelluksissa: jakeluautojen reittisuunnittelussa, piirilevyjen porausajan minimoinnissa, erilaisissa johdotus- ja verkkosuunnittelutöissä ja monissa monissa muissa paikoissa.

Kuitenkin ehkä kuuluisin verkkoteorian ongelma on Nelivärilauseen todistaminen. Sen tarina alkoi 1852, kun nuori matemaatikko nimeltään Francis

Gurthie joutui pohtimaan Englannin maakuntakartan värittämistä. Värityksen tuli noudattaa sääntöä, että kahta yhteistä rajaa omaavaa aluetta ei saanut värittää keskenään samalla värillä. Hän tuli johtopäätökseen, että kaikkien karttojen värittämiseen näytti riittävän neljä väriä.

Gurthie esitti ongelman tuntemalleen matemaatikolle Augustus De Morganille pyytäen formaalia todistusta tai vastaesimerkkiä havainnolleen. De Morgan ei osannut vastata kysymykseen suoralta käsin ja se jäi hänen vaikutuksestaan pyörimään Lontoon matemaattisiin piireihin useammaksi vuosikymmeneksi nimellä *"Four Colour Conjecture"* eli Neliväriongelma. Ongelmaa kuitenkin pidettiin enemmänkin sukkelana päättelytehtävänä kuin oikeana matemaattisena ongelmana, kunnes 1878 englantilainen matemaatikko Arthur Cayley painosti Lontoon matemaattiselta yhteisöltä todistusta väitteelle.

Vuotta myöhemmin lontoolainen lakimies Alfred Kempe julkaisi mielestään pätevän todistuksen ongelmaan. Todistus osoittautui kuitenkin lopulta vääräksi, minkä osoitti John Heawood yksitoista vuotta myöhemmin. Hän kuitenkin todisti sen pohjalta, että jokainen kartta voidaan värittää viidellä värillä todistaen näin Viisivärilauseen (*"Five Colour Theorem"*).

Neliväriongelman todistus pakoili matemaatikkoja ja vaikka todistukseen näyttää oleva muutamia ilmiselviä tapoja, ne sisältävät useita hienoivaraisia ongelmia. Moni matemaatikko yritti todistaa sitä ja joitakin hyviä yrityksiä syntyi, mutta muutamien vuosikymmenien aikana niistä kaikista löytyi paikkaamattomia reikiä. Todistusyritykset kuitenkin synnyttivät monia uusia tuloksia verkkoteorian ja topologian alueelle, joten niihin käytetty työ ei suinkaan mennyt hukkaan.

Ensimmäinen aukoton (tosin pitkin hampain hyväksytty) todistus saatiin vuonna 1976, kun kaksi matemaatikkoa todisti väitteen tietokoneen avulla oikeaksi. Todistus perustuu brute-force -tekniikkaan, eli siihen, että kaikki mahdolliset tasoverkot luokitellaan tiettyihin kategorioihin ja taskastetaan tietokoneella läpi vastaesimerkkien varalta. Todistusta ei kukaan ole ja tuskin yrittääkään varmentaa käsin ja siksi sitä pidetään tyylittömänä. Seuraavakin tunnettu todistus oli edelleenkin tietokoneavusteinen. Se pohjasi edelliseen yritykseen, tehden siihen paranteluja, jotka vähensivät tietokoneen tutkimia kategorioita.

Joitakin vuosia sitten ongelma redusoitiin logiikan ongelmaksi ja suoritettiin matemaattisen laskuohjelman avulla siten, että jokaisessa todistuksen vaiheessa matemaatikko kertoi ohjelmalle seuraavan askeleen ja se suoritti ainoastaan aivan mekaaniset laskutoimitukset. Nämä laskutoimitukset on tarkastettu eri ohjelmalla, jotta voidaan olla varmoja lasku- ja ohjelmointivirheettömyydestä. Lisäksi aiemmissa tapauksissa todistukseen on käytetty nimenomaan tähän ongelmaan tehtyä ohjelmaa, joka vähentää todistuksen eleganssia. Tähän mennessä matemaatikot suurimmalta osin luopuivat toivosta löytää puhtaasti inhimillinen ratkaisu ongelmaan.

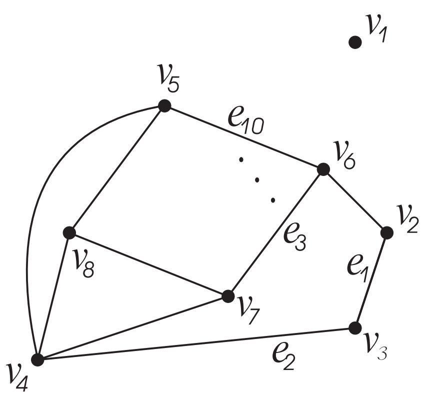
Syksyllä 2004 Ibrahim Cahit julkaisi kaksitoista sivuisen paperin esittäen 4-väriongelmalle aivan uudenlaisen ja täysin koneistamattoman version todistuksesta. Todistus on lupaava, mutta lausuntoja sen pitävyydestä ei vielä ole muiden matemaatikkojen toimesta julkaistu. Ongelman lähestymistapa on kuitenkin aivan uudenlainen ja saattaa epäonnistuessaankin avata uusia reittejä ratkaisun etsintään.

2 Verkkoteoria

Määritelmä 2.1.
Piste (tai solmu tai kärki) on verkon osa, nimensä mukaisesti se yleensä esitetään pisteenä.

Määritelmä 2.2.
Kaari (tai viiva tai sivu tai väli tai kylki) on verkkoteoriassa verkon osa, joka yhdistää kaksi pistettä. Kaari voi olla joko suunnattu tai suuntaamaton eli yksi- tai kaksisuuntainen.

Määritelmä 2.3.
Verkko (tai graafi) muodostuu pisteistä ja niitä yhdistävistä kaarista. Verkkoon voi myös kuulua pisteitä, joihin ei liity kaaria (kuva 2.1).
Verkko G on pari (V, E), missä V on pisteiden joukko ja E pisteparien muodostamien kaarien joukko. Voidaan siis merkitä $V = \{v_i\}$ sekä $E = \{(v_i, v_j)\} = \{e_k\}$.
Merkitään, että $|V|$ on verkon pisteiden lukumäärä ja $|E|$ on kaarien lukumäärä.



Kuva 2.1: Esimerkkiverkko, jossa on 8 pistettä ja 10 kaarta.

Määritelmä 2.4.
Pisteet v_i ja v_j ovat kaaren $e_k = (v_i, v_j)$ **päätepisteet**. **Pisteet** ovat **vierekkäiset** eli **naapureita**, jos niitä yhdistää kaari.

Määritelmä 2.5.
Kaaret ovat

- **vierekkäiset**, jos niillä on yksi yhteinen päätepiste.

- **rinnakkaiset**, jos niiden molemmat päätepisteet ovat samat.

Kaari (v_i, v_i) on **silmukka** (tai looppi).

Määritelmä 2.6.
Pisteen v_i **aste** $d(v_i)$ on pisteeseen päättyvien ja siitä alkavien kaarien lukumäärä. Mukaan lasketaan kaikki rinnakkaiset kaaret ja silmukan molemmat päät.
Piste on **parillinen** jos sen aste on parillinen tai samoin **pariton**. Piste, jonka aste on 0, on **irtopiste**.

Määritelmä 2.7.
Polku (tai kävely tai ketju tai jono) on reitti, joka muodostuu vierekkäisistä verkon kaarista. Sitä merkitään (e_i, e_m, e_k), joka on lista sivuista järjestyksessään. Vastaavasti se voidaan myös määritellä listaamalla vierekkäiset pisteet järjestyksessään tai joukkona.
Polku on **yksinkertainen**, jos siinä ei ole rinnakkaisia kaaria eikä silmukoita ja sen jokainen kaari kuljetaan vain kerran.
Kierros (eli suljettu polku tai sykli) on polku, jonka alkupiste on sama kuin loppupiste.

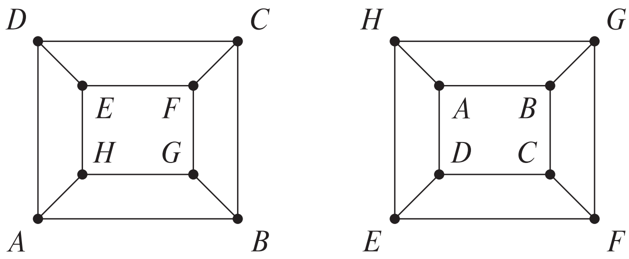
Määritelmä 2.8.
Verkko on

- **tyhjä verkko**, jos siinä ei ole kaaria.
- **nollaverkko**, jos siinä ei ole pisteitä.
- **triviaali verkko**, jos se koostuu vain yhdestä pisteestä.
- **yhtenäinen** jos siinä ei ole pisteitä, joiden välillä ei ole polkua.
- **yksinkertainen**, jos siinä ei ole silmukoita tai rinnakkaisia kaaria.
- **säännöllinen**, jos sen kaikkien pisteiden aste on sama.

Määritelmä 2.9.
Geometrisella verkolla on seuraavat ominaisuudet:

i) se muodostuu n:n pisteen joukosta $V = \{v_i\}$ ja yksinkertaisten kaarien joukosta $E = \{e_i\}$

ii) jokainen joukon E suljettu kaari sisältää täsmälleen yhden joukon V alkion.



Kuva 2.2: Sama verkko esitettynä kahdella erilaisella tasoesityksellä.

Määritelmä 2.10.
Verkon **tasoesitys** on verkon graafinen esitys eli piirros. Yhdellä verkolla voi olla useita erilaisia tasoesityksiä (kuva 2.2).

Määritelmä 2.11.
Verkon **komponentti** on verkon niiden pisteiden joukko, joilta on polku toisilleen. Yhtenäisellä verkolla on yksi komponentti, epäyhtenäisellä useampia.

Määritelmä 2.12.
Verkko G_j on verkon G_i **aliverkko**, jos $V_j \subset V_i$ ja $E_j \subset E_i$. Tätä merkitään $G_j \subseteq G_i$.

Lause 2.13.
Jokaiselle verkolle $G = (V, E)$ pätee

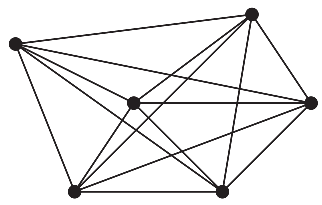
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Todistus. Määritelmän mukaan pisteen v aste $d(v)$ on pisteeseen liittyvien kaarten lukumäärä. Verkon jokainen kaari e sisältää päätepisteensä joukosta V (joita on kaksi). Tällöin jos lasketaan yhteen verkon kaikkien pisteiden asteet saadaan kaksi kertaa kaarien lukumäärä. □

Seuraus 2.14. *Jokaisessa verkossa asteeltaan parittomien pisteiden lukumäärä on parillinen.*

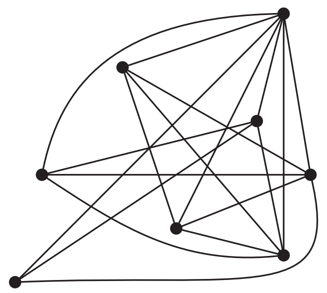
Määritelmä 2.15.
Sanotaan, että verkolla G on **yleinen aste** $d(G)$, jos sen jokaisen pisteen aste on sama. Verkon **suurin aste** on sen korkea-asteisimman pisteen aste.

Määritelmä 2.16.
Yksinkertainen verkko, jossa on n pistettä ja jolla on yleinen aste $n - 1$ on **täydellinen verkko**. Merkitään tällaista verkkoa K_n (kuva 2.3).



Kuva 2.3: Täydellinen verkko, jossa on 6 pistettä eli verkko K_6.

Määritelmä 2.17.
Verkon G **komplementti** $\bar{G}$ on verkon kaikkien pisteiden ja niiden kaarien joukko, jotka tarvittaisiin täydentämään verkko täydelliseksi (kuva 2.4).



Kuva 2.4: Kuvan 2.1 verkolle piirretty komplementti.

Määritelmä 2.18.
Eulerin kävely on polku, joka kulkee tasan kerran jokaista verkon kaarta pitkin.

Lause 2.19.
Yhtenäisellä verkolla on olemassa Eulerin kävely kun

(i) *verkon jokaisen pisteen aste on parillinen jolloin kävely on aina samalla myös kierros.*

(ii) *verkossa on tasan kaksi paritonta pistettä.*

Todistus.
i) Johdetaan tulos induktiolla kaarien lukumäärän suhteen. Jos verkossa ei ole kaaria, on tulos selvä.
Olkoon G epätriviaali ja yhtenäinen verkko, jonka jokainen piste on parillinen. Koska verkossa G on kaaria, on sen pienin aste vähintään kaksi. Tällöin

verkossa on oltava ainakin yksi kierros (todistus lauseen (3.13 **v**) avulla). Olkoon nyt C suurin mahdollinen kierros G:llä ja oletetaan lisäksi, että se ei ole Eulerin kävely. Muodostetaan G:n aliverkko H, joka saadaa poistamalla G:stä kierroksen C kaaret. Koska G on yhtenäinen kuuluu kierrokseen C piste x, joka kuuluu myös aliverkkoon H. Jokaisen aliverkon H pisteen aste on parillinen ja tällöin aliverkolla H on induktio-oletuksen mukaan olemassa kierros D, joka on Eulerin kävely. Koska kierrokset C ja D sivuavat pisteessä x, voidaan ne liittää uudeksi suuremmaksi kierrokseksi. Koska tämä on vastoin C:n maksimaalisuusoletusta, on kierros C Eulerin kävely. ⧅

ii) Oletetaan nyt, että G on yhtenäinen ja sen parittomat pisteet ovat x ja y. Olkoon $G*$ verkko joka saadaan G:stä lisäämällä pisteiden x ja y välille kaari u. Tällöin edellisen perusteella $G*$:llä on kierros $C*$, joka on Eulerin kävely ja poistamalla kaari u saadaan Eulerin kävely, joka alkaa toisesta ja päättyy toiseen parittomaan pisteeseen.[4] □

Määritelmä 2.20.
Hamiltonin kierros on kierros, joka kulkee tasan kerran jokaisen verkon pisteen kautta.

2.1 Verkon väritys

Verkon värittäminen tarkoittaa sitä, että jokaiselle sen pisteelle määrätään oma värinsä, esimerkiksi vihreä, sininen tai keltainen. Kahdelle vierekkäiselle pisteelle ei saa määrätä samaa väriä. Pisteiden lisäksi voidaan värittää myös kaaria ja tasoja (määr. 3.2), mutta tasojen väritykset määritellään yleensä duaalien (määr. 3.6) avulla pisteiden värittämisenä. Värittämisen ei myöskään tarvitse tarkoittaa konkreettista värittämistä vaan se voi tarkoittaa numeroiden, kirjainten tai muiden tunnisteiden määräämistä pisteille.

Määritelmä 2.21.
Verkon pisteen v **väriä** merkitään $c(v)$. Merkitään verkon G **värilukua** $\chi(G)$, joka on pienin verkon värittämiseen tarvittujen värien määrä.

Huomautus. $|V|$ väriä riittää aina verkon värittämiseen, mutta hyvin usein vähempikin riittää (lisää luvussa 6). Täydellisen verkon K_n värittämiseen tarvitaan aina n väriä.

Määritelmä 2.22. *Ahne algoritmi*
Numeroidaan verkon G pisteet ja indeksoidaan tarjolla olevat värit. Tämän jälkeen väritetään pisteet numerojärjestyksessään siten, että pisteelle määrätään pienimmän mahdollisen indeksinumeron omaava väri, jota ei ole vielä käytetty sen naapuripisteissä. Kun verkon kaikki pisteet on käyty lävitse, on

saatu verkolle väritys, jonka väriluku on suurimman värityksessä käytetyn värin indeksinumero.

Huomautus. Ahnetta algoritmia voidaan parantaa seuraavilla kahdella valinnalla:

- Numerointi kannattaa aloittaa mistä tahansa verkon korkeimman asteen omaavasta pisteestä ja numeroida ensin kaikki saman asteen omaavat pisteet, sillä näiden värittäminen on loppuvaiheessa hankalinta.

- Numerointi kannattaa lopettaa matalimman asteen omaaviin pisteisiin, sillä niillä on määritelmällisesti vähiten naapureita ja silloin niiden värittämiselle on vähiten rajoitteita.

Esimerkki ahneen algoritmin käytöstä löytyy kappaleesta 7.1.

Määritelmä 2.23. *Listaväritys*
Olkoon $G = (V, E)$ verkko ja yhdistetään jokaiseen pisteeseen $v \in V$ äärellinen luonnollisista luvuista eli väreistä koostuva lista $L(v)$. Nyt listaan $L(v) \in \mathbb{N}$ ja pisteeseen $v \in V$ liittyvä kuvaus $c : V \to \mathbb{N}$ on nimeltään listaväritys jos $c(v) \in L(v)$ on totta jokaiselle $v \in V$ ja $c(v) \neq c(w)$ kaikille $\{v, w\} \in E$. Verkon g listaväriluku $\chi_\ell(G)$ on pienin $k \in \mathbb{N}$ siten, että G:llä on listaväritys jokaiselle ryhmälle listoja $L(v)$, joille $|L(v)| \leq k$ kaikilla $v \in V$.

Lause 2.24.
Koska tavallinen väritys on listavärityksen erikoistapaus, jossa $L(v)$ on sama kaikille v, saadaan, että

$$\chi(G) \leq \chi_\ell(G) .$$

Todistus. Todistus on selvä, sillä $\chi(G)$ on pienin tarvittava värien määrä, jonka listavärityksenä kaikkien pisteiden värilistat $L(v)$ olivat identtiset. Toisenlaisilla listaväritykisllä $L(v_i)$ voidaan joko päätyä samaan värimäärään tai pärjätä huonommin listojen asettamien rajoitteiden puitteissa. □

Lause 2.25.
Jos verkon G suurin aste on k, niin verkon värittämiseen riittää $k + 1$ väriä eli verkon väriluku $\chi(G) \leq k + 1$.

Todistus. Väritetään verkko ahneella algoritmilla aloittaen suurimman asteen k omaavasta pisteestä. Nyt koska tällä ja kaikilla muilla pisteillä on korkeintaan k ennestään väritettyä naapuria, voidaan väritettävälle pisteelle antaa uusi väri $k + 1$. Siis $k + 1$ väriä riittää. □

3 Tasoverkot

Määritelmä 3.1.
Tasoverkot ovat verkkoja, jotka voidaan piirtää siten, että verkon kaaret eivät risteä keskenään. Jos verkko ei ole tasoverkko, niin sitä kutsutaan **avaruusverkoksi**. **Suora verkko** on tasoverkko, jonka jokainen kaari on jana.

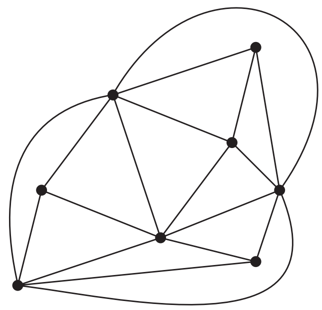
Määritelmä 3.2.
Taso (tai alue tai pinta tai kylki tai silmä) on yhtenäinen kaarien rajoittama alue. Verkossa voi olla yksi taso, ainoastaan jos siinä ei ole yhtään kierrosta. Muutoin siinä on useita tasoja. Nimitetään tätä pakollista ja aina tasoesityksessä löytyvää tasoa **ulkopuoleksi**.

Määritelmä 3.3.
Tasot ovat **vierekkäiset**, jos niitä rajaavien kaarien joukkojen leikkaus on epätyhjä. Tasot **sivuavat**, jos niitä rajaavien pisteiden joukko on epätyhjä.

Määritelmä 3.4.
Verkon reuna on kierros, joka kulkee tasan yhden kerran kaikkien sellaisten kaarien kautta, jotka rajaavat verkon ulkopuolta.

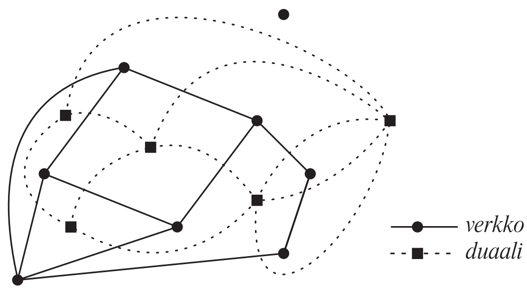
Huomautus. Verkon reuna sulkee sisäänsä koko muun verkon ja se voi olla riippuvainen valitusta tasoesityksestä (Kuva 2.2.). Mikä tahansa tasoverkko voidaan piirtää tasoon siten, että valittu taso on ulkopuoli. Mikä tahansa valittu kaari voidaan myös piirtää verkon reunaan valitsemalla taso, jonka reunaan kyseinen kaari kuuluu ja piirtämällä taso ulkopuoleksi.

Määritelmä 3.5.
Kolmioitu verkko on verkko, jonka jokainen taso ulkopuolta lukuunottamatta on rajattu kolmella verkon kaarella. Mikä tahansa tasoverkko saadaan kolmioitua lisäämällä tarpeeksi kaaria (kuva 3.1.).



Kuva 3.1: Kuvan 2.1 verkko kolmioituna.

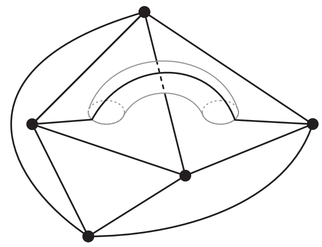
Määritelmä 3.6.
Verkon **duaali** aloitetaan piirtämällä jokaiselle tasolle piste. Sitten yhdistetään vierekkäisillä tasoilla sijaitsevat pisteet yhdellä kaarella toisiinsa jokaista tasoja rajaavaa yhteistä kaarta kohden. Duaali voi siis sisältää useita rinnakkaisia kaaria, vaikka alkuperäinen verkko olisi yksinkertainen (kuva 3.2).



Kuva 3.2: Kuvan 2.1 verkolle piirretty duaali.

Määritelmä 3.7.
Tasoverkko on **täydellinen**, kun verkkoon ei enää voida lisätä yhtään kaarta siten, että kaaret eivät leikkaa.

Määritelmä 3.8.
Verkon **suku** eli **genus** g on pienin määrä **kahvoja** (tai siltoja), jotka tulee lisätä tasoon, jotta verkko voidaan piirtää sille ilman kaarien leikkauksia (kuva 3.3).



Kuva 3.3: Esimerkki verkosta, joka ei ole tasoverkko, piirrettynä kahvan avulla niin, että sen kaaret eivät leikkaa.

Seuraus 3.9. *Tasoverkon suku g on nolla.*

Lause 3.10.
Verkon G, jossa on n pistettä ja k komponenttia, kaarien lukumäärä $|E|$ on vähintään $n - k$.

Todistus. Verkossa G on n pistettä. Jos verkko on yhtenäinen, jokainen piste on yhdistetty vähintään yhdellä kaarella. Kahden pisteen yhdistämiseen tarvitaan yksi kaari ja tähän voidaan liittää kolmas piste lisäämällä taas kaari. Induktiolla saadaan, että n:n pisteen yhdistämiseen tarvitaan vähintään $n-1$ kaarta. Jos tällaisesta verkosta poistetaan yksi kaari, verkko jakautuu kahteen komponenttiin. Nyt induktiolla saadaan, että jakamalla verkko k:hon komponenttiin, on poistettava vähintään $k-1$ kaarta. Laskemalla nämä yhteen saadaan, että verkolle, jossa on n pistettä ja k komponenttia pätee $|E| = (n-1) - (k-1) = n-k$. □

3.1 Jordan polku

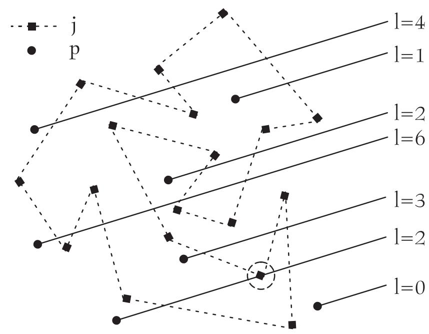
Määritelmä 3.11. (eng. Jordan curve)
Jordan polku j on tasoverkon G äärellinen yksinkertainen kierros. Toisin sanoen jokainen piste $v_i \in j$ esiintyy j:ssä korkeintaan kerran alku- ja loppupistettä lukuunottamatta, joka esiintyy kahdesti.

Lause 3.12. (eng. Jordan curve theorem)
Jokainen Jordan polku j jakaa yhtenäisen tasoverkon G kahteen yhtenäiseen osaan, j:n "sisäpuoleen" ja "ulkopuoleen". Voidaan määritellä relaatio $\approx$ kahden pisteen välille määräämällä, että $x \approx y$ jos ja vain jos on mahdollista luoda polku k x:ltä y:lle siten, että polut k ja j eivät koskaan leikkaa.

Todistus. Olkoon meillä Jordan polku j verkossa G. Nyt G:llä on olemassa tasoesitys, joka on suora verkko eli jokainen verkon kaari on jana. Tällöin jokaisella pisteellä on uniikit koordinaatit ja niiden välisten suorien kaarien kulmakertoimet k_i voidaan määrittää. Valitaan koordinaatistoon suunta z, joka eroaa kaikista polun j janojen kulmakertoimista k_i. Tällainen löydetään aina, sillä polkuun j kuuluvien kaarien e_j määrä on äärellinen.

Määritellään avuksi termi **pisteen** $w = (x_w, y_w)$ **puolisuora** r_w. Tämä on koordinaatiston suora $r_w : [x_w, \infty] \to \mathbb{R}$, $r_w = z(x - x_w) + y_w$.

Jordan polun j sisä- ja ulkopuoli voidaan nyt määritellä siten, että verkon piste p kuuluu ulkopuolen pisteiden joukkoon A, jos siitä koordinaatistoon piirretty puolisuora r_p leikkaa polun j parillisen määrän kertoja ja vastaavasti piste p kuuluu sisäpuolen pisteiden joukkoon B, jos sen puolisuora r_p leikkaa polun j parittoman määrän kertoja. Puolisuoran ei katsota leikkaavan polkua j, jos se kulkee jonkin sen pisteen v_j kautta ja molemmat siitä lähtevät polun j kaaret e_j kuuluvat puolisuoraa vastaavan suoran samalle puolelle. Erilaisia puolisuoria on havainnollistettu kuvassa 3.4.



Kuva 3.4: Havainollistus verkon pisteen p puolisuoraan ja sen leikkauksien lukumääriin Jordan polun j kanssa. Kuvassa on ympäröity kohta, jossa puolisuora sivuaa Jordan polkua muuttamatta leikkauspisteiden lukumäärää.

Määritellään nyt, että verkon pisteet x ja y ovat relaatiossa toisiinsa, jos ne kuuluvat samaan joukkoon A tai B. Jos verkon pistettä p siirretään koordinaatistossa pitkin puolisuoraansa se muuttaa relaatiopisteidensä joukkoa vain jos se ylittää puolisuoran ja Jordan käyrän kaaren e_j leikkauspisteen (kaarien leikatessa oletetaan leikkauspisteisiin syntyvän uusia verkon pisteitä, sillä muutoin verkko ei pysy tasoverkkona). Tällöin siis pisteen $p_a \in A$ ja pisteen $p_b \in B$ yhdistävän polun k on leikattava Jordan polkua jossakin kohdassa, sillä muutoin pisteiden p_a ja p_b tulisi olla relaatiossa toistensa kanssa. Polun k ei katsota leikkaavan Jordan polkua, jos se sivuaa sitä yhdessä tai useammassa pisteessä v_j ja sen pisteeseen tulevien kaarien e_k toiset päätepisteet v_k ovat relaatiossa toistensa kanssa. Polku k ei myöskään leikkaa Jordan polkua, jos niillä on yhteisiä kaaria e_j siten, että polun k ensimmäisen polkuun j liittyvän kaaren e_{k1} toinen päätepiste on relaatiossa ensimmäisen polusta j jälleen eroavan kaaren e_{k2} päätepisteen kanssa.

Nyt on vielä osoitettava, että kaikki pisteet $p, q \in B$ voidaan liittää toisiinsa polulla k_b, joka ei leikkaa Jordan polkua j. Asia on selvä, jos pisteiden p ja q välillä on jo kaari. Jos pisteiden välillä ei ole kaarta, seuraavalla menetelmällä niiden välille saadaan aina luotua polku, joka ei leikkaa Jordan polkua j:

i) Siirrytään p:stä Jordan polkua j lähinnä olevaan (koordinaatistossa euklidinen etäisyys) pisteeseen, joka on p:n kanssa relaatiossa tai Jordan polun piste ja johon päästään tuhoamatta verkon G tasoverkko-ominaisuutta, tarvittaessa lisäämällä verkkoon kaari.

ii) Jos päästiin Jordan käyrälle siirrytään seuraavaan kohtaan, jos ei toistetaan kohtaa *i)* kunnes tämä on totta.

iii) Kuljetaan Jordan käyrää pitkin kunnes saavutaan pisteeseen v_j, joka on lähinnä pistettä q.

iv) Siirrytään pistettä q lähimpään pisteeseen, joka on pisteen p kanssa relaatiossa ja johon päästään tuhoamatta verkon tasoverkko-ominaisuutta, tarvittaessa lisäämällä kaari.

v) Jos päästiin pisteeseen q polku on valmis. Jos valittu piste ei ollut q, toistetaan kohtaa *iv)*, kunnes päästään q:hun, jolloin meillä on etsitty polku.

Saatu polku ei tietenkään ole aina lyhin mahdollinen polku, mutta se on varmasti aina olemassa. □

3.2 Puut

Määritelmä 3.13.
Puu T on yhtenäinen verkko, jossa ei ole kierroksia.

Lause 3.14.
Suuntaamattomalle verkolle G, jossa on n pistettä, seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(*i*) *G on puu*

(*ii*) *G on kierrokseton ja jos G:hen lisätään yksikin kaari, muodostuu tasan yksi kierros.*

(*iii*) *G on yhtenäinen ja jos G:stä poistetaan yksikin kaari, G ei ole enää yhtenäinen.*

(*iv*) *Minkä tahansa kahden G:n pisteen välillä on yksikäsitteinen polku.*

Jos verkossa G on äärellisen monta pistettä eli $|V| = n$, seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä edellisten kanssa:

(*v*) *G on kierrokseton ja siinä on $n-1$ kaarta.*

(*vi*) *G on yhtenäinen ja siinä on $n-1$ kaarta.*

Todistus. Jos $n = 1$, kaikki väitteet triviaalisti yhtäpitäviä. Oletetaan siis, että $n \geq 2$.

i) ⇒ v) Tehdään induktio-oletus, että jokaisessa puussa T_{k+1}, jossa on $k+1$ pistettä, on tarkalleen k kaarta. Nyt jokaisessa puussa T_{k+1} on ainakin yksi

piste v, jonka aste $d(v) = 1$.
Todistus. Voidaan muodostaa polku $P = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, joka on pisin mahdollinen polku puussa G. Olkoon nyt sen toisen päätepisteen aste suurempaa kuin 1. Tällöin päätepisteellä on vähintään kaksi naapuria, joista toinen kuuluu välttämättä polkuun P ja olkoon toinen naapuri piste w. Jos w ei ole mikään pisteistä v_i, voitaisiin polkua P jatkaa mikä on vastoin polun P maksimaalisuusoletusta. Toisaalta jos w on jokin pisteistä v_i, saadaan ristiriita verkon G kierroksettomuusoletuksen kanssa. Tällöin molemmilla polun P päätepisteillä v_1 ja v_m on oltava $d(v_{\{1,m\}}) = 1$.
Jos verkosta T_{k+1} poistetaan piste $v_{\{1,m\}}$ saadaan verkko $T_{k+1} - v_{\{1,m\}}$, jossa ei ole kierroksia, sillä poistamalla verkosta, jossa ei ole kierroksia osia, ei voida saada aikaiseksi kierrosta. Lisäksi $T_{k+1} - v_{\{1,m\}}$ on yhtenäinen, koska poistetun pisteen v aste $d(v_{\{1,m\}}) = 1$. Tällöin $T_{k+1} - v_{\{1,m\}}$ on puu, jossa on k pistettä ja $k - 1$ kaarta. ⧅

v) $\Rightarrow$ **vi)** Oletetaan, että G:ssä on h komponenttia. Jokainen komponenteista on puu määritelmän 3.13 mukaan ja komponenttien yhdistämiseen tarvitaan $h - 1$ kaarta. Yhdistämällä komponentit saadaan puu. Tässä puussa on oletusten mukaan $(n - 1) + (h - 1) = n - 1$ kaarta. Tällöin saadaan, että $h = 1$ eli verkko koostuu yhdestä komponentista. ⧅

vi) $\Rightarrow$ **iii)** Olkoon e G:n kaari. Koska verkossa $G - e$ on $n - 2$ kaarta on siinä lauseen 3.10 perusteella vähintään kaksi komponenttia. Kuitenkin, koska ennen kaaren poistamista G oli yhtenäinen, on $G - e$:ssä tasan kaksi komponenttia ja minkä tahansa kaaren e poistaminen jakaa verkon komponentteihin **iii)**:n mukaisesti. ⧅

iii) $\Rightarrow$ **iv)** G on siis verkko, josta minkä tahansa kaaren poistaminen jakaa verkon komponentteihin. Olkoot x ja y pisteet, joiden välillä on vähintään 2 erilaista polkua p_1 ja p_2. Olkoon u ensimmäinen piste, josta polut lähtevät eroamaan ja v ensimmäinen piste, jossa polut kohtaavat jälleen. Piste u saa siis olla myös piste x, samoin kuin v voi olla y. Jos yhdistetään polut p_1 ja p_2 saadaan kierros. Kierroksesta voidaan aina poistaa yksi kaari ja jäljelle jäävä osa on edelleenkin yhtenäinen. Tämä on ristiriita alkuoletusten **iii)** kanssa, joten jokaisen kahden pisteen välisen polun on oltava yksikäsitteinen. ⧅

iv) $\Rightarrow$ **ii)** Verkossa G ei voi olla kierroksia, sillä jos siinä olisi kierros, olisi kahden kierroksessa olevan pisteen välillä kaksi erilaista polkua. Lisäksi jokainen uusi kaari e luo kierroksen, sillä jokainen verkon piste on jo liitetty jokaiseen toiseen jollakin polulla p. Kaaren e lisääminen pisteiden u ja v välille luo tasan yhden kierroksen, sillä jos se loisi kaksi kierrosta, olisi pisteiden

u ja v välillä jokin toinenkin polku s. Tämä on kuitenkin ristiriita kohdan **iv)** kanssa, joten **ii)** pätee. $\boxbslash$

ii) $\Rightarrow$ i) Oletetaan, että G ei ole yhtenäinen. Tällöin komponenttien k_i ja k_j välille voitaisiin lisätä kaari $e = (u, v)$, missä $u \in k_i$ ja $v \in k_j$. Nyt kaaren e lisääminen ei synnytä kierrosta, mikä on ristiriita kohdan **ii)** kanssa. Siis G on yhtenäinen ja siinä ei ole kierroksia eli oletusten **i)** mukaisesti.

$\square$

Puu on siis tasoverkko, jossa minkä tahansa kahden solmun välillä on täsmälleen yksi polku. Metsä on verkko, jossa minkä tahansa kahden solmun välillä on korkeintaan yksi polku. Metsä on siis verkko, jonka komponentit ovat puita. Metsän kaarien lukumäärä $|E| = n - k$, missä k on metsän komponenttien lukumäärä (lause 3.10).

Määritelmä 3.15.
Sanotaan, että puu on **juurellinen**, jos yksi puun solmuista on nimetty juurisolmuksi eli juureksi. Tällöin kaarilla on suunta kohti juurta tai poispäin juuresta.

Huomautus. Juurelliset puut ovat tärkeitä tietorakenteita algoritmitekniikassa. Tutkitaan näitä lisää esimerkissä 7.7.

Määritelmä 3.16.
Verkon **virittäjäpuu** on pienin yhtenäinen aliverkko, joka yhdistää kaikki verkon pisteet polulla toisiinsa.

Huomautus. Pienimmässä aliverkossa ei voi olla kierroksia, sillä jos siellä olisi kierros, voitaisiin aina poistaa yksi kaari ja silti säilyttää verkon yhtenäisyys. Virittäjäpuu on siis aina puu. Kaikki puut ovat aina omia virittäjäpuitaan.

4 Eulerin kaava

Yksinkertaisten monitahokkaiden kulmien V, särmien E ja tahkojen F lukumääriin liittyvää yhteyttä nimitetään Eulerin kaavaksi, toisinaan myös Descartes-Eulerin kaavaksi, sillä he löysivät monikulmioiden ominaisuudet toisistaan riippumattomasti vuonna 1752. Tämä kaava pätee myös kaikille tasoverkoille, sillä mikä tahansa tasoverkko voidaan taivuttaa konveksiksi kolmiulotteiseksi kappaleeksi ja päin vastoin.

Lause 4.1. Eulerin kaava
Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen tasoverkko ja olkoon f tasojen määrä jossakin G:n tasoesityksessä. Tällöin pätee

$$|V| - |E| + f = 2$$

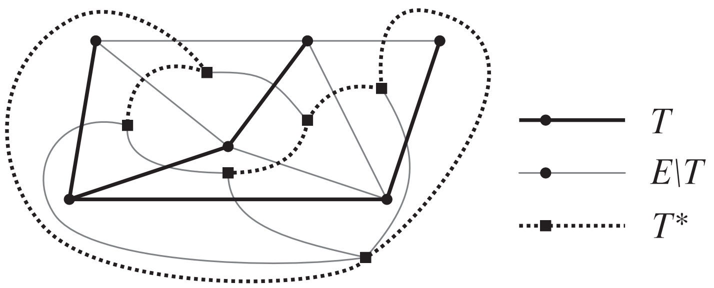
Erityisesti, tasojen määrä ei riipu valitusta tasoesityksestä.

Todistus. (Tapa 1.)
Aloitetaan johtamalla induktiivisesti verkon G kaarien määrä. Jos $E = \emptyset$ niin $|V| = 1$ ja $f = 1$ ja kaava pätee. Olkoon siis $|E| \geq 1$. Tutkitaan kahta tapausta:

Tapaus 1. Verkossa G ei ole kierroksia. Silloin G on puu ja siksi $|V| = |E|+1$. Samalla saadaan myös $f = 1$ koska puilla on vain yksi (rajoittamaton) taso.

Tapaus 2. Jokin kaari $e \in E$ kuuluu kierrokseen. Tästä seuraa, että $G-e$ on yhtenäinen. Induktio-oletuksesta seuraa, että Eulerin kaava pätee sille (oletetaan, että saatu verkko syntyy verkosta G poistamalla kaari e ja noudattaa siis samaa tasoesitystä). Kaari e, joka kuuluu tutkittuun tasoesitykseen erottaa toisistaan kaksi erillistä tasoa (lause 3.12). Kun kaari e poistetaan tulee näistä kahdesta tasosta yksi yhtenäinen taso. Tällöin, jos lisätään takaisin kaari e, nousee sekä tasojen että kaarien lukumäärä yhdellä ja verkon pisteiden määrä säilyy muuttumattomana. Tämän vuoksi Eulerin kaava pätee G:lle. □

Todistus. (Tapa 2.)
Muodostetaan ensin verkolle G virittäjäpuu. Olkoon nyt $T \subseteq E$ G:n virittäjäpuun P kaarijoukko. Määritelmän mukaisesti P:ssä ei ole kierroksia. Muodostetaan G:lle duaali $G*$. Tutkitaan nyt duaalin kaarien ryhmää $T* \subseteq E*$ jotka vastaavat kaaria joukossa $E \backslash T$. $T*$:n kaaret yhdistävät kaikki tasot toisiinsa, koska T:ssä ei ole kierroksia. Samoin $T*$:ssä ei ole kierroksia, koska muutoin se erottaisi toisistaan joitakin G:n pisteitä kierroksen sisällä ja ulkona. Tämä on siis mahdotonta, koska T on virittäjäpuu ja verkkojen T ja



Kuva 4.1: Esimerkkiverkko duaalin muodostamiseksi ja sen hahmottamiseksi, mitä ovat T, $E\backslash T$ ja $T*$.

$T*$ kaaret eivät leikkaa. On siis totta, että $T*$ on verkon $G*$ virittäjäpuu.

Nyt jokaiselle puulle pätee, että verkon pisteiden määrä on yhtä suurempi, kuin verkon kaarien määrä. Siis puulle T saadaan $|V| = |E|_T + 1$ ja $T*$:lle $f = |E|_{T*} + 1$. Nyt voidaan laskea yhtälöt puolittain yhteen, jolloin saadaan $|V| + f = (|E|_T + 1) + (|E|_{T*} + 1)$ eli $|V| - |E| + f = 2$, sillä $|E|_T + |E|_{T*} = |E|$ johtuen konstruktiosta. □

Huomautus.
Eulerin kaava voidaan yleistää verkoille, joiden suku on g seuraavasti

$$V - E + f = X(g)\,,$$

missä V on pisteiden määrä, E on kaarien määrä, f tasojen määrä ja termi

$$X(g) = 2 - 2g$$

on nimeltään Eulerin tunnusluku.

4.1 Eulerin kaavan seurauksia

Lause 4.2.
Olkoon G tasoverkko, jonka jokaisen tason reuna koostuu n:stä kaaresta eli jokainen taso on n-kierros. Tällöin sille pätee

$$|E| = n\frac{(|V| - 2)}{(n - 2)}\,.$$

Todistus. Lähdetään liikkeelle Eulerin kaavasta. Koska verkon G jokainen taso on n-kierros, jokainen sen kaari kuuluu kahdelle G:n tasolle ja jokaista tasoa rajaa n kaarta. Tällöin

$$n|f| = 2|E|$$
$$\Leftrightarrow |f| = \frac{2|E|}{n}.$$

Sijoittamalla tämä Euleriin saadaan

$$|V| - |E| + \frac{2|E|}{n} = 2$$
$$\Leftrightarrow |E|(1 - \frac{2}{n} = |V| - 2$$
$$\Leftrightarrow |E| = \frac{(|V| - 2)}{\frac{1}{n}(n-2)} = \frac{n(|V| - 2}{(n-2)}.$$

□

Lause 4.3.
Täydellinen tasoverkko on kolmioitu eli sen jokaista tasoa rajaa tasan kolme kaarta.

Huomautus. Yleensä oletetaan, että määritelmän 3.7 täydellinen verkko on yksinkertainen, sillä Eulerin lause ei päde verkoille, joissa on silmukoita tai rinnakkaisia kaaria.

Todistus. Verkon jokaista tasoa rajaa kolme kaarta eli sitä rajaa suljettu polku (v_1, v_2, v_3, v_1). Nyt jos joidenkin kahden saman tason reunalla sijaitsevan pisteen v_i välille haluttaisiin lisätä kaari, ei sitä voisi tehdä ilman, että tällä kaarella olisi jo rinnakkainen kaari, sillä kolmio yksinään on täydellinen verkko K_3. Jos taas haluttaisiin lisätä kaari kahden sellaisen pisteen välille, jotka eivät kuulu minkään tason yhteiseen reunaan, jouduttaisiin leikkaamaan muita kaaria. □

Seuraus 4.4. *Maksimaalisessa tasoverkossa on $|V|$ pistettä ja*

$$|E| = \frac{3(|V| - 2)}{(3-2)} = 3|V| - 6$$

kaarta. Tällöin täytyy siis olla, että minkä tahansa tasoverkon G kaarien lukumäärä

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Lause 4.5.
Jokaisella tasoverkolla G, jonka pisteiden määrä $p \geq 4$, on piste v_i, jonka aste $d(v_i) \leq 5$.

Todistus.
Olkoon G kolmioimaton verkko. Tähän verkkoon voidaan lisätä kaaria siten, että siitä tulee kolmioitu verkko G_k. Jos nyt kolmioidusta verkosta G_k on löydettävissä piste v_i, jonka aste on korkeintaan viisi, on se löydettävissä myös alkuperäisestä verkosta G, koska lisäämällä verkkoon kaaria voidaan vain nostaa verkon pisteiden asteita ei laskea.

Tutkitaan siis verkkoa g, joka on kolmioitu verkko. Koska jokaisella tasolla on kolme rajaavaa kaarta ja jokainen kaari kuuluu kahteen tasoon, voidaan tämä muotoilla lausekkeeksi

$$3f = 2|E| \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{2|E|}{3} .$$

Oletetaan nyt, että jokaisen pisteen aste $d(v_i) \geq 6$. Jokaiselle verkolle pätee, että

$$\sum d(v_i) = 2|E| ,$$

koska jokainen kaari e_i tulee lasketuksi kahdesti. Lisäksi pätee myös, että

$$2|E| \geq 6|V| \quad \Leftrightarrow \quad |V| \leq \frac{|E|}{3} .$$

Sijoittamalla nämä Eulerin kaavaan $|V| - |E| + f = 2$ päästään tulokseen

$$2 = |V| - |E| + f = |V| - |E| + \frac{2|E|}{3} = |V| - \frac{|E|}{3} \leq 0 ,$$

mikä on epätosi. Tällöin on siis oltava, että jokaisella tasoverkolla G on olemassa ainakin yksi piste v_i siten, että $d(v_i) \leq 5$.

Ehto $d(v_i) \leq 5$ on pienin mahdollinen, mikä voidaan osoittaa esittämällä tasoverkko, jonka pieniasteisimman pisteen aste on viisi. Tällainen on esimerkiksi ikosaedrin tasoesitys, joka on säännöllinen ja täydellinen viisiasteinen tasoverkko. $\square$

5 4-väri lause

Lause 5.1.
Jokainen tasokartta voidaan värittää neljällä värillä siten, että naapurialueet eivät koskaan ole keskenään saman värisiä.

Neliväriongelma on niin hankala kuin se on syystä, että ratkaisun täytyy olla yleinen. Rajoittuminen esimerkiksi olemassa oleviin karttoihin ei riitä. Tällöin koska karttojen koilla tai muodoilla ei ole väliä vaan ainoastaan sillä miten alueet liittyvät toisiinsa, neliväriongelma on topologinen ongelma.

Neliväriongelma voidaan kuitenkin helposti muotoilla verkkoteoreettisin termein. Kautta ongelman historian suurin osa ratkaisuyrityksistä on tehtykin juuri tällä formalismilla, kuten myös lopulta onnistuneetkin.

Muotoillaan siis ongelma uudelleen. Oletetaan kartta tasoverkoksi, joissa alueiden rajojen risteykset ovat pisteitä ja raja kaaria. Muodostetaan verkolle duaali ja tehdään väritysongelmasta tämän duaaliverkon väritysongelma. Jos halutaan konkretisoida tätä duaaliverkkoa voidaan vaikka olettaa, että jokainen duaalin piste on valtionsa pääkaupunki ja naapurivaltioiden pääkaupungeista johtaa näiden valtioiden sisällä pysyvä tie toisiinsa. Tällöin siis jos jokaisen kartan duaali voidaan värittää neljällä värillä, voidaan itse kartta värittää neljällä värillä ja päin vastoin.

Kun halutaan ratkaista tämä duaalin avulla muotoiltu ongelma, on helpoin aloittaa muodostamalla antiteesi, että *on olemassa kartta, jota ei voida värittää neljällä värillä*. Jos siis on olemassa tuollaisia verkkoja tai vain yksikin verkko, voidaan valita sellainen viisiväritettävä verkko, jossa on pienin määrä pisteitä. Nyt ideana olisi jatkaa näyttämällä, että tuosta verkosta voidaan poistaa yksi piste ilman, että tarvittavien värien määrä muuttuu. Koska nyt kuitenkin olisi käsissä verkko, jossa on vähemmän pisteitä kuin alkuperäisessä, voidaan pienimmän verkon oletuksen mukaan tämä verkko värittää neljällä värillä. Mutta koska poistettava piste valittiin siten, että tarvittavien värien määrä ei muutu saadaan aikaiseksi ristiriita.

Nyt voidaan todeta, että todistuksen ongelma on sen prosessi löytämisessä, jolla voidaan pienentää verkkoa kuitenkaan vähentämättä sen värittämiseen tarvittavien värien määrää ja sen jälkeen näyttää, että pienimmässäkin mahdollisessa nelivärilauseen vastaesimerkkiverkossa täytyy olla ainakin yksi piste, joka voidaan poistaa. Tämä osio vaati lopulta avukseen tietokoneen laskentatehoa.

Ensimmäisen virheettömäksi hyväksytyn tietokoneistetun todistuksen esittivät Appel ja Haken vuonna 1976. He aloittivat todistuksen laadinnan neljä vuotta aikaisemmin lajittelemalla noin 1500 tapaa, jolla piste voitiin hyväksytysti poistaa verkosta ja osoittivat, että minimaalisessa vastaesimerkkiverkossa tulisi olla ainakin yksi tällaisista pisteistä.

6 5-väri lause

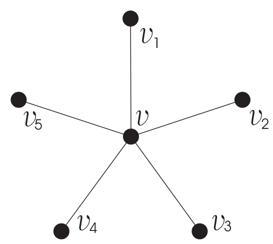
Lause 6.1.
Jokaisen tasoverkon pisteet tai alueet voidaan värittää viidellä värillä siten, että vierekkäisille pisteille tai alueille ei määrätä yhteistä väriä.

Todistus. Heawood (perinteisin todistus Eulerin lauseen avulla)
Aloitetaan induktiolla pisteiden p suhteen. Jokaiselle tasoverkolle, jolle $p \leq 5$ lause pätee aina.

Induktio-oletuksena oletetaan, että kaikki tasoverkot, joissa on p pistettä, $p \geq 5$, ovat 5-väritettäviä. Olkoon G nyt tasoverkko, jossa on $p+1$ pistettä. Nyt voidaan Eulerin lauseen seurauksen perusteella sanoa, että G:ssä on piste v, jonka aste on 5 tai vähemmän. Tällöin induktio-oletuksen perusteella tasoverkko $G - v$ on 5-väritettävä.

Oletetaan, että verkko $G - v$ on väritetty viidellä värillä ja värejä merkitään c_i, $1 \leq i \leq 5$. Tällöin jos jotain väriä, olkoon se vaikka c_j, ei ole käytetty v:n viereisten pisteiden värittämiseen, saadaan 5-väritetty tasoverkko G värittämällä piste V värillä c_j.

Jos näin ei ole, joudutaan tutkimaan tilannetta, jossa $d(v) = 5$ ja kaikki viisi väriä c_i on käytetty viereisten pisteiden värittämiseen. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 6.1. Muutetaan tarvittaessa väritystä siten, että v:n ympäröivät pisteet ovat väritetty kehämäisesti järjestyksessä c_1, c_2, c_3, c_4 ja c_5. Nyt merkitään ympäröiviä pisteitä siten, että värillä c_i väritetty piste on v_i.



Kuva 6.1: Ongelmapiste v, jonka naapureiden värityksessä on jo käytetty jokainen viidestä väristä c_i.

Olkoon G_{13} $G - v$:n aliverkko, joka määräytyy pisteistä, jotka on väritetty joko väreillä c_1 tai c_3. Jos nyt v_1 ja v_3 kuuluvat G_{13}:n eri komponentteihin, niin $G - v$:n 5-väritys voidaan saavuttaa vaihtamalla väritystä siinä G_{13}:n komponentissa, johon v_1 kuuluu. Tällöin saadaan aikaiseksi verkko, jossa mikään v:n viereisistä pisteistä ei ole väritetty värillä c_1 ja verkon G 5-väritys saadaa aikaiseksi värittämällä v värillä c_1.

Jos taas v_1 ja v_3 kuuluvat G_{13}:n samaan komponenttiin, on olemassa polku v_1:stä ja v_3:en ja kaikki polkuun kuuluvat pisteet on väritetty väreillä c_1 tai c_3. Jos tähän polkuun yhdistää polun v_1vv_3 saadaan aikaiseksi kierros, joka välttämättä ympäröi joko pisteen v_2 tai pisteet v_4 ja v_5. Tällöin ei ole olemassa polkua, joka yhdistäisi pisteet v_2 ja v_4. Jos muodostetaan $G - v$:lle aliverkko G_{24}, joka määräytyy pisteistä, jotka on väritetty joko väreillä c_2 tai c_4, niin v_2 ja v_4 kuuluvat G_{24}:n eri komponentteihin. Jos siis nyt vaihdetaan värejä siinä G_{24}:n komponentissa, johon v_2 kuuluu, saadaan aikaiseksi $G - v$:n 5-väritys, jossa mikään v viereisistä pisteista ei ole väritetty värillä c_2. Tällöin koko verkon G 5-väritys saadaan aikaiseksi värittämällä v värillä c_2. □

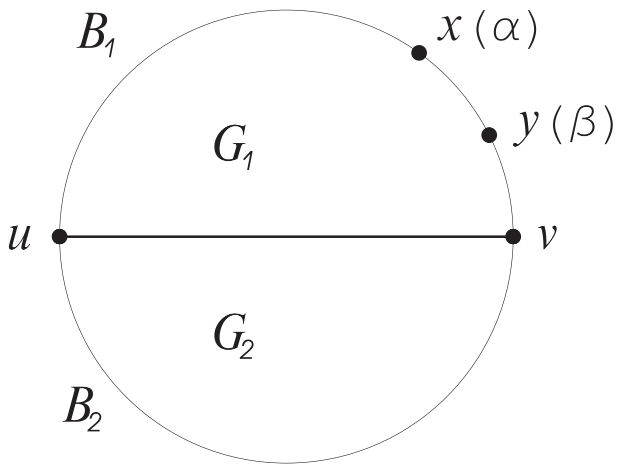
Todistus. Thomassen (ilman Eulerin kaavaa)
Todetaan ensin, että jos verkkoon lisätään kaari, verkon väriluku voi nousta, mutta ei koskaan laskea, koska lisättäessä kaaria lisätään samalla myös väritettävien pisteiden naapuripisteiden määrää. Toisin sanoen, jos H on verkon G aliverkko, pätee aina $\chi_\ell(H) \leq \chi_\ell(G)$. Nyt voidaan olettaa, että G on yhtenäinen ja kolmioitu (lause 4.3). Todistus pätee kaikille verkoille, koska kuten alussa todettiin, kaarien vähentäminen voi vain laskea värilukua.

Jatketaan todistusta todistamalla ensin hieman toisenlainen lause, johon voidaan sitten käyttää induktiota:

> Olkoon $G = (V, E)$ kolmioitu verkko ja olkoon B ulkopuolta rajoittava kierros eli reuna. Nyt oletetaan värilistoille $L(v), v \in V$ seuraavat asiat:
>
> **(1)** Vierekkäiset pisteet $x, y \in B$ on väritetty eri väreillä α ja β.
>
> **(2)** $|L(v)| \leq 3$ kaikille pisteille $v \in B$.
>
> **(3)** $|L(v)| \leq 5$ kaikille pisteille $v \in V \backslash B$. Nimitetään joukkoa $V \backslash B$ verkon G sisäpuoleksi.
>
> Tällöin x:n ja y:n väritys voidaan laajentaa G:n listaväritykseksi. Erityisesti $\chi_\ell(G) \leq 5$.

Lähdetään liikkeelle tilanteesta $|V| = 3$. Tämä on triviaali, sillä nyt on vain yksi värittämätön piste ja sen värilistalle pätee $|L(v)| \geq 3$, joten sen värittämiseksi on tarjolla vapaa väri. Jatketaan induktiolla.

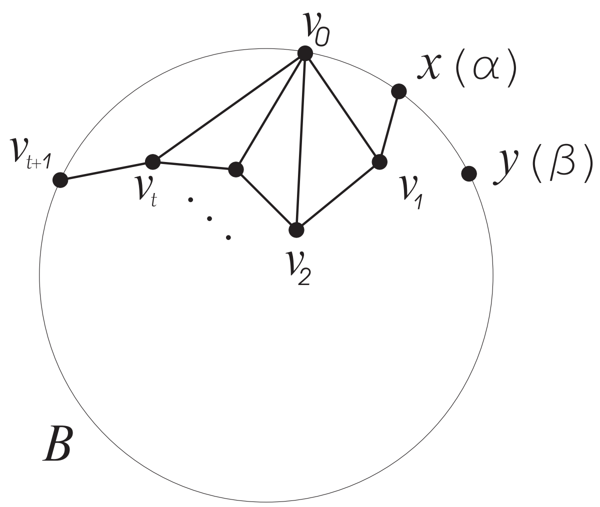
Tapaus 1. Oletetaan, että B:llä on jänne eli kaari e, joka ei kuulu B:hen ja yhdistää kaksi pistettä u:n ja v:n, jotka kuuluvat B:hen. Tämä jänne jakaa nyt verkon G kahteen aliverkkoon G_1 ja G_2. Lisäksi jänne e jakaa myös kierroksen B kahteen osaan B_1 ja B_2. Nyt $B_1 \bigcup \{u, v\}$ rajaa aliverkon G_1 ja $B_2 \bigcup \{u, v\}$ aliverkon G_2. Oletetaan nyt, että pisteet x, y kuuluvat aliverkkoon G_1 (kuva 6.2). Näin syntynyt aliverkko G_1 on kolmioitu ja tällöin induktio-



Kuva 6.2: Jänne $e = (u, v)$ jakaa reunan B ja sisäverkon G kahteen osaan.

oletuksen mukaan myös listaväritettävissä viidellä värillä. Oletetaan nyt, että tässä värityksessä pisteille u ja v määrätään värit γ ja δ. Kun katsotaan aliverkkoa G_2 ja sen kahta ennalta väritettyä pistettä $u, v \in B$ huomataan, että induktio-oletukset pätevät myös verkolle G_2. Toisin sanoen myös G_2 voidaan listavärittää viidellä värillä ja koska molemmat aliverkot on nyt onnistuttu listavärittämään, voidaan myös koko verkko G värittää kyseisellä värityksellä.

Tapaus 2. Oletetaan nyt, että verkossa G ei ole jännettä. Olkoon $v_0 \in B$ $x(\alpha)$:n viereinen piste reunalla B ja olkoot $x, v_1, \ldots, v_t, v_{t+1}$ v_0:n naapurit, missä v_{t+1} sijaitsee reunalla B (kuva 6.3). Muodostetaan nyt aliverkko $G' = G \setminus \{v_0\}$ poistamalla G:stä piste v_0 ja kaikki siihen johtavat kaaret. Aliverkon G' reuna on nyt $B' = B \setminus \{v_0\} \bigcup \{v_1, \ldots, v_t\}$. Koska oletusten mukaan $|L(v_0)| \leq 3$ on listassa $L(v_0)$ α:n lisäksi ainakin kaksi muuta väriä γ ja δ. Korvataan nyt jokainen listoista $L(v_i)$ listoilla $L(v_i) \setminus \{\gamma, \delta\}$. Muut G':n pisteet pysyvät värilistojen suhteen ennallaan. Nyt G' toteuttaa kaikki kolme oletusta ja on siis listaväritettävissä viidellä värillä. Koska nyt v_0:lle voidaan valita väri kahdesta vapaasta väristä, joita ei konstruktiossa esiinny sen ympärillä, voidaan G':n listaväritys laajentaa koko G:n väritykseksi.



Kuva 6.3: Pisteen v_0 erotus verkosta G.

Nyt on tutkittu molemmat mahdolliset tapaukset ja koska saatiin, että kolmioidun verkon listaväritykseen riittää aina viisi väriä, voidaan seurauksen (2.24) perusteella todeta tämän todistuksen antaneen saman tuloksen kuin edellisenkin todistuksen. □

7 Esimerkkejä

Tässä luvussa käydään lävitse joitakin ongelmia elävästä elämästä, historiasta sekä kirjasta *Invitation to Discrete Mathematics* [12].

7.1 Koepäivien määrääminen

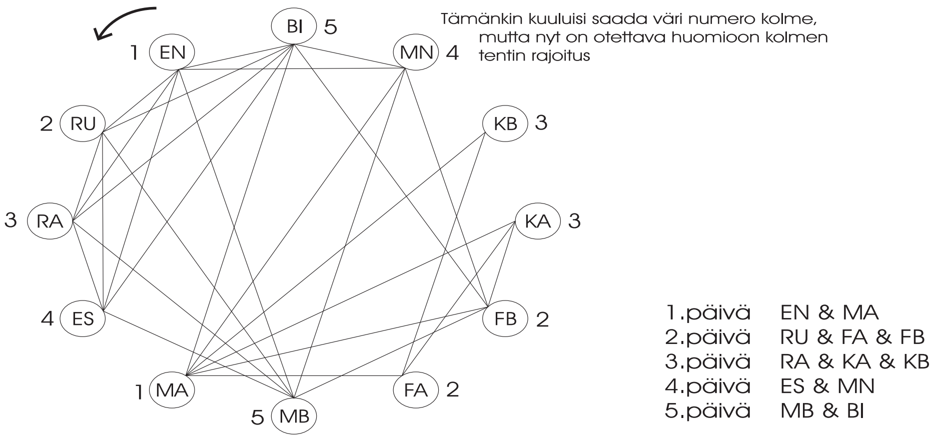
Lukion koeviikolla halutaan järjestää kokeet seuraavista valinnaisista kursseista: englannista (EN), ruotsista (RU), ranskasta (RA), espanjasta (ES), pitkästä (MA) ja lyhyestä (MB) matematiikasta, pitkästä (FA) ja lyhyestä (FB) fysiikasta, pitkästä (KA) ja lyhyestä (KB) kemiasta, maantiedosta (MN) ja biologiasta (BI).
Käytössä on maksimissaan 5 koepäivää ja jokaisena päivänä saa olla maksimissaan kolmen eri aineen kokeet.

Yhteisiä opiskelijoita on seuraavilla kursseilla:

	EN	RU	RA	ES	MA	MB	FA	FB	KA	KB	MN	BI
EN	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
RU		0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
RA			0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
ES				0	0	1	0	0	0	0	0	1
MA					0	0	1	1	1	1	1	1
MB						0	0	1	0	0	1	0
FA							0	0	1	1	0	0
FB								0	1	0	1	1
KA									0	0	0	0
KB										0	0	0
MN											0	1
BI												0

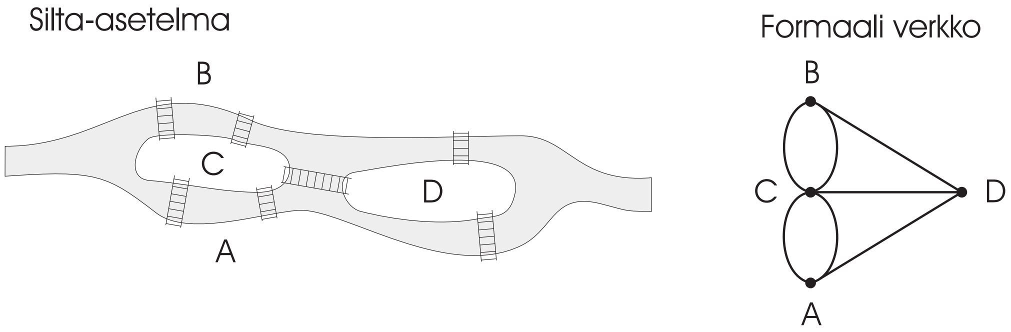
Matriisista piirretään verkko tulkitsemalla, että eri oppiaineita vastaavien pisteiden välillä ei ole kaarta, kun matriisissa on nolla eli kursseilla ei ole samoja henkilöitä, ja pisteiden välillä on kaari kun matriisissa on ykkönen eli kursseilla on samoja opiskelijoita.

Väritetään näin saatu verkko numeroimalla ensin oppiaineet ja sitten indeksoimalla koepäivät. Lisäksi on muistettava, että kunkin koepäivän saa käyttää vain kolmeen kertaan. Itse piirsin verkon renkaaksi ja numeroin sen kiertämällä kehän vastapäivään englannista lähtien – kuvassa 7.1. on siis nähtävissä yksi mahdollinen väritys. Se ei ole ainoa eikä välttämättä edes kyseisen verkon optimaalinenväritys. Olisi myös ollut täysin mahdollista, että ensimmäisellä yrittämällä ei olisi saatu verkkoa väritettyä ja olisi ollut tarpeellista palata takaisin päin ja purkaa väritystä.



Kuva 7.1: Tenttipäivien sopimiseen liittyvä verkko ja sen tuottama tulos.

7.2 Königsbergin siltaongelma



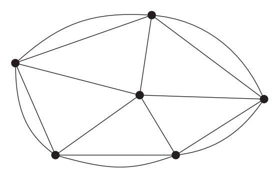
Kuva 7.2: Königsbergin siltaongelma.

Aloitetaan ongelman tutkiminen muodostamalla kuvassa 7.2 formaali verkko siten, että maa-alueita merkitään pisteillä ja sillat ovat kaaria pisteiden välillä. Nyt kysymys voidaan muotoilla uudelleen muotoon: *"Löytyykö kyseiselle verkolle Eulerin kävely?"*

Havaitaan ensin, että jokaiseen neljään pisteeseen liittyy pariton määrä kaaria. Koska tiedetään, että Eulerin kävelyn sisältävässä verkossa voi olla vain kaksi paritonta kärkeä, ei haluttua kävelyä voida kyseisiä siltoja pitkin suorittaa.

7.3 Yleistä astetta 5 olevan verkon rakentaminen

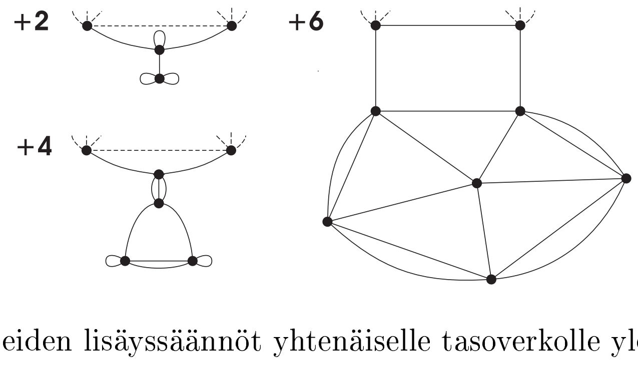
Tehdään seuraavana esimerkkinä kirjasta [12] sivulta 174 tehtävä 1. Aluksi etsitään yhtenäinen tasoverkko, jonka yleinen aste on 5. Sellainen on esimerkiksi kuvan 7.3 verkko. Nyt voidaan rakentaa mielivaltainen määrä yhtenäisiä



Kuva 7.3: Tasoverkko, jonka yleinen aste on 5. Verkko ei ole verkko K_6, koska se ei ole yksinkertainen.

verkkoja, joiden yleinen aste on 5 seuraavilla rajoituksilla

- pisteiden lukumäärän on oltava parillinen, sillä parittoman määrän parittomia pisteitä omaava tasoverkko ei ole mahdollinen
- jos pisteiden lukumäärä on jaollinen kuudella, käytetään kuvan 7.4 lisäyssääntöä ”+6”
- jos pisteiden lukumäärä ei ole jaollinen kuudella käytetään jakojäännöksiksi jääviin pisteisiin kuvan 7.4 lisäyssääntöjä ”+2” ja ”+4”.



Kuva 7.4: Pisteiden lisäyssäännöt yhtenäiselle tasoverkolle yleistä astetta 5.

Lisäyssääntöä ”+6” sovelletaan siis aina sellaiseen pohjaverkkoon, johon ei ole vielä lisätty ”+6”:tta. Lisäyksiä ”+2” ja ”+4” voidaan soveltaa kaikkiin vapaisiin verkon reunan kaariin ja niiden summan ylittäessä kuusi, ne voidaan korvata säännön "+6" mukaisesti.

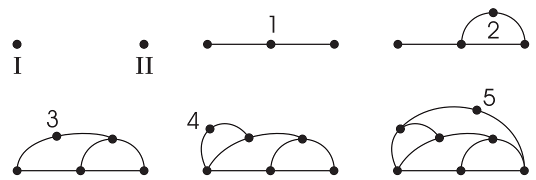
7.4 Versot -peli

Tutkitaan peliä nimeltä Versot *(eng. Game of Sprouts)*. Peli esitellään myös kirjassa [12] sivulla 189 tehtävänä 7. Pelin ovat kehittäneet J.H. Conway (myös *The Game of Life*) ja M.S. Paterson.

Pelin alkuasetelmassa piirretään paperille n pistettä ja peli jatkuu seuraavilla säännöillä:

- jokaisella vuorolla piirretään kahden pisteen välille kaari, jolle lisätään piste
- jokaiselle pisteelle v tulee päteä, että sen aste $d(v) \leq 3$
- kaari ei saa leikata toista kaarta eli verkon tulee pysyä tasovekkona
- peli päättyy kun jäljellä ei ole enää yhtään laillista piirtoa ja viimeisen kaaren piirtänyt voittaa pelin.

Alla eräs esimerkkipeli (kuva 7.5), jossa aloituspisteitä on merkitty roomalaisin numeroin ja siirrot on merkitty numeroimalla niillä luodut pisteet.



Kuva 7.5: Versot pelin esimerkki kahdella pisteellä.

Muotoillaan tähän liittyen kaksi väitettä:
i) peli kestää korkeintaan $3n - 1$ vuoroa
ii) peli kestää vähintää $2n$ vuoroa.

Todistus.
i) Kutsutaan jokaista potentiaalista kaaren päätepistettä pisteen yhdeksi vapausasteeksi. Tässä yhteydessä aloituspisteen vapausaste on siis 3 ja uuden kaarelle piirretyn pisteen 1. Alussa pisteitä on n, joten vapausasteita koko verkossa on $3n$. Jokaisella vuorolla piirretään yksi kaari eli käytetään kaksi vapausastetta ja lisätään yksi piste kaarelle eli luodaan yksi vapausaste

lisää. Vuoron summa on siis -1 vapausastetta.

Optimaalisesti pitkitetyn pelin loppuessa jäljellä on yksi vapausaste, sillä jos niitä olisi enemmän, voitaisiin peliä jatkaa kunnes laillisia siirtoja ei enää olisi eli kunnes viimeinen vapausasteita omaava piste olisi edellisellä vuorolla lisätty piste. Taulukoidaan vuoroja ja niiden vapausasteita

ennen alkua	$3n$
1. vuoro	$3n-1$
2. vuoro	$3n-2$
	$\vdots$
m. vuoro	$3n-m=1$

Viimeisestä vuorosta saadaan siis vuorojen maksimimäärä $m = 3n-1$. ⧅

ii) Kutsutaan selkeyden vuoksi pistettä, jolla on jäljellä yksi vapausaste eläväksi; pistettä, joka kuuluu elävän pisteen kahden lähimmän naapurin joukkoon kuolleeksi; kaikkia muita pisteitä kutsutaan eristetyiksi. Englanninkielisessä termistössä viimeistä pistettä kutsutaan myös fariseukseksi heprean kielisen 'eristäytynyt' -sanan mukaan.[6] Kuolleella pisteellä ei voi olla kahta elävää naapuria, sillä silloin elävät voitaisiin yhdistää seuraavalla vuorolla (lause 4.3). Kuolleita pisteitä havainnollistetaan kuvassa 7.6.

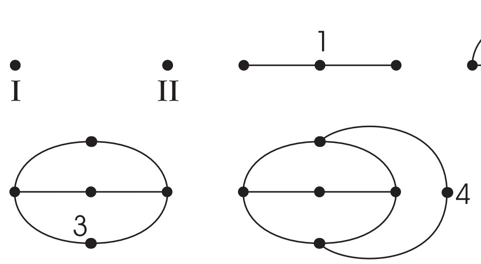
Kuva 7.6: Versot -pelin kuolleet pisteet.

Alussa pisteitä oli n kappaletta ja niitä on tullut lisää pelattujen vuorojen lukumäärän m verran. Kohdassa **i)** todettiin, että pelin alussa vapausasteita on $3n$. Nyt eläviä pisteitä on jäljellä olevien vapausasteiden verran eli $3n-m$, kuolleita pisteitä on kaksi kertaa näin paljon eli $2(3n-m)$ ja loput pisteet p kappaletta ovat eristettyjä. Eristettyjä pisteitä ei ole pakko olla, mutta voittoa tavoittelevassa pelissä pelissä niitä syntyy helposti, sillä niillä kontrolloidaan eläviksi jäävien pisteiden määrää ja näin ollen sitä, millä vuorolla peli päättyy.

Nyt voidaan muodostaa yhtälö verkon kokonaispistemäärästä

$$\begin{aligned} n+m &= 3n-m+2(3n-m)+p \\ m &= 2n+\frac{p}{4} \end{aligned}$$

Koska todettiin, että vaihtoehto $p = 0$ on hyväksyttävä, voi peli minimissään kestää $2n$ vuoroa. Esimerkki tällaisesta pelistä on esitetty kuvassa 7.7. Huomataan myös, että jos eristettyjä pisteitä on, niiden lukumäärä on jaollinen neljällä. $\square$



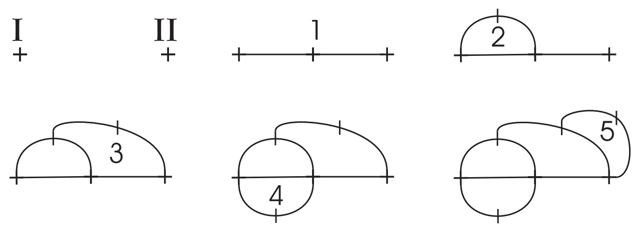
Kuva 7.7: Kahden aloituspisteen peli, jonka kesto on $2n$ vuoroa.

7.5 Brusselin versot -peli

Edellisen pelin seuraavan muunnoksen *(eng. Brussels Sprouts)* on myös kehittänyt John Conway. Peli saadaan seuraavanlaisilla sääntömuutoksilla edellisestä pelistä:

- alkupisteiden sijaan piirretään n kappaletta ristejä
- vuorolla lisättyjen kaarien ja pisteen sijaan lisätään kaari ja sille poikkiviiva eli venytetään pystypuu kaareksi ja poikkipuu pysyy ennallaan
- kaaren saa lisätä kahden olemassa olevan ristin sakaran välille niin, että kaaret eivät risteä

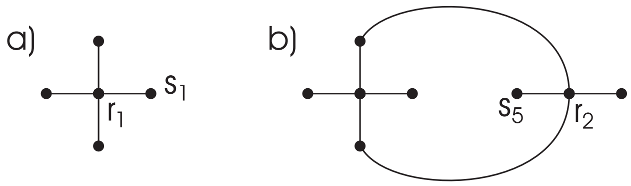
Pelin alku näyttää siis esimerkiksi kuvan 7.8 mukaiselta.



Kuva 7.8: Kahden aloitusristin pelin yksi mahdollinen alku.

Tähän peliin on mahdollista liittää väite, että pelitavasta riippumatta peli kestää aina $5n - 2$ piirtoa.

Todistus. Määritellään pelin ristit hieman eri tavalla. Korvataan jokainen risti viidellä pisteellä ja neljällä kaarella kuvan 7.9 mukaisesti. Nyt määri-



Kuva 7.9: Tapa, jolla sekä aloitusristit a) että pelin aikaiset ristit b) korvataan pisteillä ja kaarilla.

tellään, että jokaisen sakarapisteen s_i aste $d(s_i) \leq 2$ ja jokaisen ristipisteen r_i aste $d(r_i) = 4$. Nyt siis jokaisella vuorolla lisätään kolme pistettä ja neljä kaarta. Vuoron pelaaminen vähentää ensin verkon vapausasteita kahdella kaaren osalta ja sen jälkeen luo kaksi vapausastetta lisää uusien sakarapisteiden muodossa. Vuoron summa on siis ± 0 vapausastetta.

Koska läpi pelin vapausasteiden määrä on vakio eli pelin loppuessa niitä on edelleen $4n$ kappaletta (esimerkin 7.4 nimityksin meillä on $4n$ elävää pistettä), on jokaisen tähän tasoesitykseen jääneen elävän pisteen oltava eristettynä kaikista toisista yksinkertaisella kierroksella – sanotaan, että piste on tämän kierroksen rajaamalla tasolla. Lisäksi sellaisia tasoja, joilla ei olisi elävää pistettä ei voi olla olemassa johtuen ristien sijoittamisesta siten, että aina toinen elävistä sakarapisteistä on toisella ja toinen toisella puolella janaa. Eli kun siis taso jaetaan janalla kahdeksi tasoksi, saavat molemmat uusista tasoista aina elävän pisteen. Lisäksi tasolla ei voi olla kahta elävää pistettä, sillä nämä voitaisiin yhdistää seuraavalla vuorolla, mutta nyt kuitenkin oletettiin, että tutkittiin tilannetta, jossa peli on päättynyt. Näin ollen pelin loppuessa verkossa on siis $4n$ tasoa pelaajien valinnoista riippumatta.

Aiempi sanallinen esitys voidaan muotoilla matemaattisesti ja pelin loppuessa verkossa on siis $5n + 3m$ pistettä (viisi jokaisessa aloitusristissä ja kolme lisää jokaisella vuorolla) ja $4n + 4m$ kaarta (neljä jokaisessa aloitusristissä ja neljä lisää jokaisella vuorolla). Sijottamalla verkon parametrit Eulerin kaavaan $V - E + f = 2$ saadaan seuraava yhteys alkuristien n ja vuorojen m lukumäärille:

$$\begin{aligned}(5n + 3m) - (4n + 4m) + 4n &= 2\\ 5n - m &= 2\\ m &= 5n - 2\,.\end{aligned}$$

Vuorojen lukumäärä on siis aina $5n - 2$ riippumatta pelitavasta. □

Peli onkin tällaisenaan vitsi, sillä voittaja määräytyy aloitusristien lukumäärän mukaan:

- parittomalla määrällä aloitusristejä aloittaja voittaa aina
- parillisella määrällä toisena pelannut voittaa aina.

Mielenkiintoisempi variantti pelistä saadaan, jos poikkipuun lisäämisestä kaarelle tehdään vapaaehtoista.

7.6 Karttaväritys epäyhtenäisille valtioille

Tutkitaan yhtenäistä karttaa M, jossa jokaisella valtiolla voi olla enintään k aluetta. Voidaan osoittaa, että jokaiselle tällaiselle kartalle sen värittämiseen tarvittavien värien määrä on korkeintaan $6k$, kun jokaisen valtion kaikki alueet on väritettävä samalla värillä.

Todistus. Yleisesti verkon väriluku $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$, missä $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$ eli verkon G aliverkkojen G' matalin aste (vrt. lause 2.25)[10]. Koska lauseen 4.5 mukaan jokaisesta tasoverkosta löytyy aina piste, jonka aste $d(v) \leq 5$, saadaan tasoverkkojen rajaksi $\chi \leq 6$.

Tutkitaan nyt tasokarttaa, jossa valtiolla on useita toisistaan erillisiä alueita. Muokataan tämän kartan verkkoa yhdistämällä jokaisen valtion k erillistä pistettä v yhdeksi pisteeksi v_k. Verkko ei enää ole tasoverkko, mutta kaava $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G')\}$ ei sitä vaadikaan.

Koska edellisessä tasoverkossa päti $\max\{\min d(v)\} \leq 5$ saadaan uudeksi $\max\{\min d(v_k)\} \leq 5k$ ottamalla maksimaalisin mahdollinen yhdistys eli k kappaletta pisteitä $d(v) = 5$. Väriluvun ylärajaa rakennettaessa verkossa yhtä valtiota vastasi yksi piste. Nyt kuitenkin jos lisätään valtio, lisätään kerralla k pistettä. Kaavaa onkin siis muokattava vastaamaan tätä eroa. Tällöin $1 + d(v)$ on muutettava muotoon $k + d(v_k)$

Tällöin saadaan seuraava raja

$$\chi(G) \leq k + 5k = 6k$$

Saatiin siis, että suurin mahdollinen väriluku kartalle, jossa jokainen valtio koostuu k:sta osasta on $6k$. □

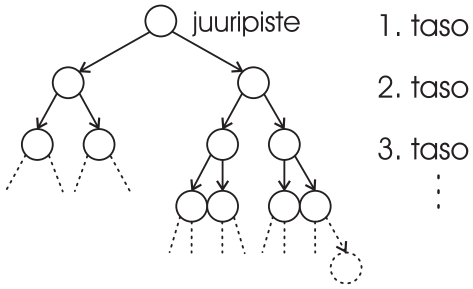
7.7 Binääripuut

Binääripuut ovat tärkeitä tietorakenteita tietoteknisissä sovelluksissa. Binääripuu on suunnattu juurrettu puu, jonka jokaiseen pisteeseen voi saapua korkeintaan yksi kaari ja siitä voi lähteä korkeintaan kaksi kaarta. Binääripuilla on oleellisesti kaksi ongelmaa:

i) Miten aineistosta tehdään binääripuu?

ii) Miten aineistosta etsitään haluttu yksikkö?

Binääripuiden maksimaalinen rakenne näyttää aina kuvan 7.10 mukaiselta.



Kuva 7.10: Binääripuun rakenne. Mahdolliset aineiston paikat on merkitty symbolilla ◯.

Tutkitaan esimerkkiaineistoa A,B,C,D,E,F,G. Tällä on määritelty järjestys, jolloin jokaisesta alkiosta voidaan sanoa onko se suurempi kuin toinen. Kun aineisto tositilanteessa kerätään, se saattaa näyttää vaikka joltakin seuraavista:

a) D,F,B,A,C,G,E

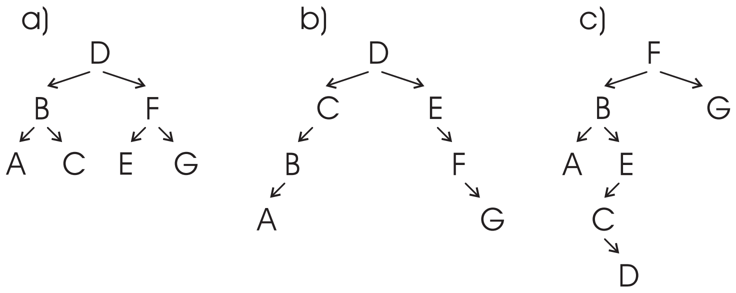
b) D,C,B,E,A,F,G

c) F,B,E,G,C,A,D.

Tutkitaan ensin ongelmaa *i)* eli binääripuun rakentamista. Aloitetaan sijoittamalla puuhun ensimmäiselle tasolle juuripisteeksi aineiston ensimmäinen alkio. Tämän jälkeen tutkitaan seuraavaa alkiota verraten sitä enimmäiseen:

- jos se on suurempi kuin ensimmäinen sijoitetaan se puuhun alemmalle tasolle alkuperäiseen pisteeseen nähden oikealle.
- jos se on pienempi kuin ensimmäinen sijoitetaan se puuhun alemmalle tasolle alkuperäiseen pisteeseen nähden vasemmalle.

Toisen ja kaikkien loppujenkin pisteiden kohdalla vertailut suoritetaan samoin aloittaen juuripisteestä sillä erotuksella, että jos pisteessä johon arvo pitäisi sijoittaa on jo ennestään arvo, suoritetaan vertailu uudestaan tälle pisteelle ja sijoitetaan arvo siihen nähden oikeaan paikkaan. Esimerkkiaineiston kolmen eri permutation a), b) ja c) antamat binääripuut ovat kuvassa 7.11.



Kuva 7.11: Aineiston A,B,C,D,E,F,G kolmen eri permutaation binääripuut.

Nyt jos kohdan ***ii)*** ongelmassa tahdottaisiin puusta b) etsiä arvo F, aloitettaisiin etsiminen vertaamalla arvoa ensin juuripisteeseen. Jos se olisi ollut tämä, olisi etsintä valmis. Nyt koska se oli D, siirrytään etsinnässä siitä kohti suurempia arvoja tasoa alas oikealle. Toistetaan vertailu ja koska E ei täsmää, jatketaan taas alas oikealle. Nyt löydettiin arvo F eli etsintä on valmis.

7.8 Kauppamatkustajan ongelma

Kauppamatkustajan ongelman ydin on minimoida matka, jonka kauppamatkustaja joutuu kulkemaan päästäkseen jokaiseen kaupunkiin listallaan käyden jokaisessa kaupungissa vain kerran.

Verkkoteorian sanoin on tarkoitus etsiä painotetun verkon (jossa pisteet kuvaavat kaupunkeja, kaaret teitä ja niiden painot matkojen pituutta) minimaalinen Hamiltonin kierros. Ongelma pätee mille tahansa määrälle pisteitä. Jos verkossa on vain kaksi pistettä on tapaus helppo, mutta yleisesti ottaen n:lle pisteelle on $\frac{1}{2}(n-1)!$ kuljettavaa kierrosta. Tämä siksi, että meillä on $(n-1)!$ mahdollista reittiä, mutta ei ole tarpeen erotella kumpaan suuntaan kierros kuljetaan.

Koska pistemäärien kasvaessa, kierrokset kasvavat huimasti, ei ole kannattavaa oikeasti laskea ja vertailla kaikkia mahdollisia reittejä vaan kannattaa suorittaa valistuneita arvauksia. On kehitetty algoritmeja, jotka etsivät parhaita lokaaleja reittejä eli reittejä, jotka ovat parempia kuin muut lähimmät ratkaisunsa. Nämä antavat hyviä vaihtoehtoja, mutta niiden ei voida taata antavan optimaalista olemassa olevaa ratkaisua. Sillä mistä pisteestä algoritmin käyttäminen aloitetaan on merkitystä ja saadun vastausreitin hyvyys riippuu siis sattumasta.

Kauppamatkustajan ongelma on niin sanottu *"NP-täydellinen"* ongelma. Jokainen NP-täydellinen ongelma voidaan teoriassa muuntaa miksi tahansa toiseksi NP-täydelliseksi ongelmaksi. Tämä taas tarkoittaa sitä, että jos mikä tahansa näistä ongelmista voitaisiin ratkaista deterministisesti polynomiaalisessa ajassa, kaikki muutkin voitaisiin. Tätä ei kuitenkaan osata tehdä eikä tiedetä voidaankokaan.

8 Sanastoa

Olen koonnut alle *englanti-suomi* -sanastoa sekä helpottamaan itseäni graduni edetessä, että selittämään, mitä nimityksilläni tarkoitan. Suomen osalta verkkoteorian nimitykset tuntuvat olevan vielä vakiintumattomia, joten viite vakiintuneenpaan termistöön saattaa paikoitellen olla paikallaan.

colouring	väritys
complete	täydellinen
connected	yhtenäinen
cromatic number	väriluku
cycle	kierros
...	
degree of freedom	vapausaste
dual graph	duaali
...	
edge	kaari
Euler characteristic	Eulerin tunnusluku
...	
face	taso
...	
genus	suku
graph	verkko
...	
handle	kahva
...	
list colouring	listaväritys
...	
near-triangulated graph	kolmioitu verkko
...	
outer face	ulkopuoli
...	
planar graph	tasoverkko
...	
spanning tree	virittäjäpuu
sprout	verso
subgraph	aliverkko
...	
vertex	piste
...	
walk	kävely

Viitteet

[1] Aigner, Martin & Ziegler, Günter M.: *Proofs from the book*, Berlin: Springer-Verlag Inc., 1998

[2] Biggs, Norman: *Graph theory 1736-1936*, New York: Clarendon Press, 1986

[3] Bollobás, Béla: *Advances in Graph Theory*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1978

[4] Bollobás, Béla: *Graph theory: An Introductory Course*, New York: Springer-Verlag Inc., 1979

[5] Bollobás, Béla: *Modern Graph Theory*, New York: Springer-Verlag Inc., 1998

[6] Conway, John: *The Game of Sprouts*, 1995, luettu 16.7.2006, *http://mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=1091005&tstart=0*

[7] Diestel, Reinhard: *Graph Theory*, Second Eletronic Edition, 2000, haettu 7.5.2005, *http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/download.html*

[8] Euler, Leonhard: *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*, *http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf*, julkaistu 1736

[9] Gross, Jonathan & Yellen, Jay: *Graph Theory and Its Applications*, Boca Raton: CRC Press, 1999

[10] Harary, Frank: *Graph Theory*, Reading: Addison-Wesley Publishing Co., 1969

[11] Koivisto, Pertti: *Graafiteoriaa*, Tampere: Tampereen yliopisto, 2001

[12] Matoušek, Jiří & Nešetřil, Jaroslav: *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1998

[13] Savolainen, Vesa: *Verkkoteoria*, Porvoo: WS Bookwell, 2001

[14] Skiena, Steven: *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Redwood City: Addison-Wesley Publishing Co., 1990

[15] Tomescu, Ioan: *Problems in Combinatorics and Graph Theory*, New York: John Wiley & Sons, 1985