Paavo Heiskanen

JATKUVUUS- JA DERIVOITUVUUS-KÄSITTEET LUKION PITKÄSSÄ MATEMATIIKASSA

Jyväskylän yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Kevät 2006

Tekijä: Paavo Heiskanen

Yhteystiedot: pave@cc.jyu.fi, paavoh@msn.com

Työ: Pro gradu -tutkielma

Sivumäärä: 99 + vi

Teettäjä: Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Työn nimi: Jatkuvuus- ja derivoituvuus-käsitteet lukion pitkässä matematiikassa

Tiivistelmä: Tässä tutkielmassa tarkastellaan, kuinka lukion pitkässä matematiikassa käsitellään analyysin keskeisten käsitteiden, *jatkuvuuden* ja *derivoituvuuden,* välistä yhteyttä. Tämä tehdään tutkimalla lukion opetussuunnitelman perusteita ja oppikirjoja näiden käsitteiden osalta. Lisäksi tutkitaan, kuinka lukion pitkän matematiikan opiskelijat hallitsevat jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen yhteyden. Tutkielmassa perehdytään erikoistapauksena *jatkuviin ei-missään derivoituviin* funktioihin sekä *monotonisen* funktion derivoituvuuteen suljetulla välillä. Lopuksi ehdotetaan, kuinka näitä erikoistapauksia voisi käsitellä lukion pitkän matematiikan syventävillä kursseilla.

Lukion oppikirjoissa esitetään, että derivoituvuus on vahvempi ominaisuus kuin jatkuvuus. Mielestäni kirjoissa pitäisi painottaa selvemmin, että epäjatkuva funktio ei voi olla derivoituva ja että jatkuvan funktion ei välttämättä tarvitse olla derivoituva. Vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteissa *jatkuvuus*- ja *derivoituvuus*-käsitteiden ymmärtäminen ja hahmottaminen ovat keskeisemmässä roolissa kuin vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteissa. Opiskelijoille suoritetun kyselyn tulosten perusteella vaikuttaa siltä, että lukion pitkän matematiikan opiskelijat hallitsevat jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen yhteyden varsin heikosti.

Avainsanat: derivaatta, derivoituvuus, jatkuva, jatkuvuus, analyysi

Author: Paavo Heiskanen

Contact information: pave@cc.jyu.fi, paavoh@msn.com

Task: Master's thesis

Pages: 99 + vi

Commissioned by: University of Jyväskylä, Department of mathematics and statistics

Title: The concepts of continuity and differentiability in the long mathematics of upper secondary school

Abstract: This thesis explores the approach taken towards the relationship between the central concepts of analysis, continuity and differentiability, in the long mathematics of upper secondary school. This is done by examining the core curriculum of upper secondary school covering these concepts. In addition it is examined, how the students of long mathematics in the upper secondary school master the relationship between the continuity and differentiability. As a special case, the study also goes in more detail into *continuous nowhere differentiable* functions as well as into differentiability of *monotonous* function in a closed interval. Finally some ideas are suggested for the handling of these special cases in the extensive courses of long mathematics in the upper secondary school.

The upper secondary school textbooks state that differentiability is a stronger characteristic than continuity. In my opinion the textbooks should more clearly emphasize that a discontinuous function cannot be differentiable, and that a continuous function does not necessarily have to be differentiable. In the core curriculum of the year 2003 the understanding and identification of the concepts continuity and differentiability are in a more central role than they were in the core curriculum of the year 1994. On the basis of the result of an enquiry made to the students it seems that the students of long mathematics in the upper secondary schools master the relationship between continuity and differentiability rather poorly.

Keywords: derivative, differentiability, continuous, continuity, analysis

KIITOKSET

Haluan kiittää lehtori Veikko T. Purmosta avusta mielenkiintoisen aiheen valinnassa ja hyvästä ohjauksesta työn edetessä. Kiitokset osoitan myös lukioille ja opettajille, jotka mahdollistivat tutkielmaani kuuluvan kyselyn tekemisen. Ystäviäni haluan kiittää tuesta ja hauskoista hetkistä opintojen varrella. Erityinen kiitos kuuluu Sannalle monista kannustavista kommenteista sekä Marille ammattitaitoisista kommenteista tutkielman teossa. Lisäksi haluan kiittää vanhempiani tuesta opintojeni varrella.

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

Tässä tutkimuksessa tutkitaan *jatkuvuuden* ja *derivoituvuuden* välisen yhteyden käsittelyä lukiossa. Toisessa ja kolmannessa luvussa tarkastellaan lukion opetussuunnitelman perusteita ja oppikirjoja jatkuvuuden ja derivoituvuuden osalta. Viidennessä luvussa tarkastellaan lukion toisen vuositason opiskelijoilla teetetyn kyselyn tuloksia. Kuudennessa ja seitsemännessä luvussa tarkastellaan muutamaa jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvää erikoistapausta. Ensin tarkastellaan *jatkuvia ei-missään derivoituvia* funktioita. Näiden patologisten funktioiden olemassaolo osoittaa selvästi sen, että jatkuvuus ei ole riittävä ehto derivoituvuudelle. Seuraavaksi osoitetaan, että jos funktio on monotoninen, se on suljetulla välillä *melkein kaikkialla* derivoituva. Lopuksi kahdeksannessa luvussa esitetään ideoita, kuinka näitä mielenkiintoisia erikoistapauksia voisi käsitellä lukion pitkän matematiikan syventävillä kursseilla.

Derivaatan historia on oleellinen osa mietittäessä sen oppimista ja opettamista. Tässä tutkimuksessa historiaa ei ole erikseen käsitelty vaan sen tarkastelu on tehty Luonnontieteen kandidaatin -tutkielmassa *Derivaatta antiikista nykypäivään* [13]. LuK-tutkielman ja tämän tutkimuksen on tarkoitus muodostaa lukion opettajalle kokonaisuus, jota hän voi käyttää tukimateriaalina derivaatan opetuksessa.

1.1 Matematiikan luonteesta

Matematiikassa käsitteet pyritään määrittelemään muodollisesti määritelmien avulla ja erottamaan ne havainnollisista merkityksistä ja tulkinnoista. Matemaattisen ajattelun kannalta käsitteiden eri tulkinnat ovat kuitenkin tärkeitä, koska ne auttavat konkretisoimaan muodollisia määritelmiä. Ongelmanratkaisuprosessissa eri tulkinnoilla voi olla merkittävä rooli ideoiden oivaltamisessa. Luultavasti kaikkein hyödyllisin matematiikan konkretisointitapa erityisesti matematiikan opiskelijoille on visualisointi. Visualisointi tukee ja havainnollistaa tuloksia, jotka ovat pääosin muodollisia ja symbolisia. Se voi ratkaista (oikean) symbolisen ratkaisun ja (väärän) intuition välisiä ristiriitatilanteita. Lisäksi visualisointi voi auttaa sellaisten käsitteiden ja tarkoitusten käyttöönotossa, jotka saattaisivat helposti jäädä huomaamatta ongelman symbolisen ratkaisun yhteydessä. Ks. [2, s.222-224].

Koska matemaattinen logiikka on luonteeltaan muodollisen deduktiivista eli totuuden säilyttävää, ovat määritelmät keskeisessä asemassa. Jotta käsitteiden muodollisia määritelmiä voi hyödyntää luovassa matemaattisessa ajattelussa, pitää ne ymmärtää hyvin. Käsitteen tulkinta voi pohjautua useampaan eri esitysmuotoon, mutta käsitteen henkilökohtaisen tulkinnan tulee sisältää sama pääasiallinen informaatio kuin määritelmässä on tarkoitettu. Yksi vaihtoehto väärien johtopäätösten ja virheiden estämiseksi on vahvistaa muodollisen määritelmän ja käsitteen eri esitysmuotojen välistä yhteyttä. Tavoitteena on, että henkilökohtainen tulkinta käsitteestä korreloisi mahdollisimman hyvin muodollisen määritelmän kanssa ja jokaisessa tilanteessa voitaisiin käytössä olevaa esitysmuotoa peilata käsitteen henkilökohtaiseen tulkintaan. Tämä tarkoittaa, että määritelmään nojautuen voitaisiin selittää, miksi voidaan käyttää kyseistä esitysmuotoa. Ks. [37].

1.2 Funktioiden jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta

Nieminen ja Tenhunen [28] toteavat *pro gradu* -tutkielmassaan lukion toisen vuositason opiskelijoiden hallitsevan derivaatta-käsitteen varsin huonosti. Esitysmuodoista he toteavat kuvallisen muodon olevan parhaiten hallussa. Haapasalo ym. [10] ovat todenneet myös jatkuvuus-käsitteen olevan lukion toisen vuositason opiskelijoilla heikosti hallussa. Suurimmaksi ongelmaksi todettiin funktion arvon ja raja-arvon erottaminen toisistaan. Lisäksi todettiin, että funktion jatkuvuutta ei monesti tarkisteta tehtävissä, joissa sitä ei varsinaisesti kysytä. Tämä viittaa siihen, että opiskelijat eivät tarkista funktion jatkuvuutta tehtävissä, joissa kysytään funktion derivoituvuutta, eli opiskelijat eivät ymmärrä käsitteiden *jatkuvuus* ja *derivoituvuus* välistä yhteyttä.

Viholainen [37] käsittelee artikkelissaan tutkimusta, jossa testattiin 166 opintojensa loppuvaiheessa olleen aineenopettajaopiskelijan käsityksiä jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta. Tutkimuksessa annettiin neljän funktion lausekkeet ja kuvat (kuva 1.1) ja kysyttiin, milloin funktiot ovat derivoituvia ja milloin epäderivoituvia. Myös jatkuvuutta kysyttiin joissakin tapauksissa.

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ -2x+6, & x\geq 1 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} x^2-4x+3, & x\neq 4 \\ 1, & x=4 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x+2, & x<1 \\ -2x+5, & x\geq 1 \end{cases} \qquad i(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ x+1, & x\geq 1 \end{cases}$$

Kuva 1.1: Viholaisen tutkimuksessa käytetyt funktiot.

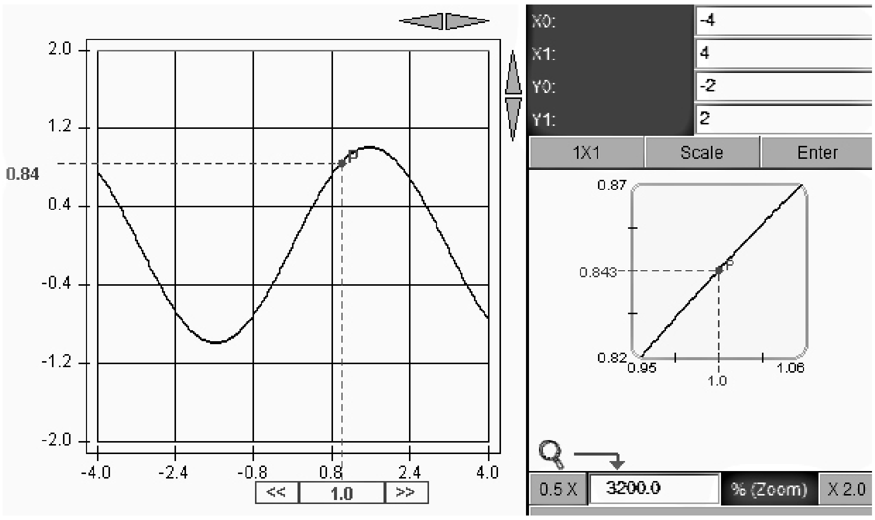
Yli neljäsosa tutkimukseen osallistuneista vastasi, että funktio h ei ole jatkuva mutta on silti derivoituva, vaikka kaikkien opinnoissa olikin käsitelty se, että jatkuvuus on välttämätön ehto derivoituvuudelle. Miten on mahdollista, että niin moni matematiikan opettajaksi valmistuva vastaa väärin analyysin peruskäsitteiden *jatkuvuus* ja *derivoituvuus* välistä yhteyttä koskevaan kysymykseen? Tämä motivoi tarkastelemaan, kuinka näiden käsitteiden välistä yhteyttä käsitellään lukion opetussuunnitelman perusteissa ja lukion oppikirjoissa.

Artikkelissaan Viholainen [37] käsittelee tarkemmin kahden tutkimukseen vastanneen opiskelijan haastattelua. Hän toteaa, että molemmat opiskelijat käyttivät funktion derivoituvuuden tutkimiseen metodeja, jotka eivät pohjautuneet määritelmiin eivätkä olleet yhteensopivia niiden kanssa. Toinen opiskelijoista määritteli funktion derivoituvuuden sen avulla, voidaanko funktion kuvaajalle piirtää kyseiseen kohtaan yksikäsitteinen tangentti. Tangenttien avulla hän määritteli funktion h derivoituvaksi myös kohdassa $x=4$, koska kyseiseen kohtaan voidaan piirtää paraabelille tangentti. Hän kuitenkin totesi funktion epäjatkuvaksi kyseisessä kohdassa ja päätyi siihen johtopäätökseen, että myös epäjatkuva funktio voi olla derivoituva, vaikka hän olikin ensin muistellut toisin. Hän myös päätteli haastattelussa ihan oikein, että jatkuvan funktion ei tarvitse olla derivoituva, ainoastaan perustelu hieman ontui. Hän piirsi funktion g kaltaisen kuvaajan, jossa on piikki, ja perusteli että kärkipisteessä funktio ei ole derivoituva, koska kärkeen voidaan piirtää useita ”tangentteja”. Hän siis päätyi oman geometrisen derivaatta-käsityksensä avulla siihen, että derivoituvuuden ja jatkuvuuden välillä ei ole yhteyttä.

Toinen opiskelijoista luotti metodiin, jossa hän derivoi paloittain määritetyn funktion molemmat puolet erikseen rajapisteessä ja vertasi tuloksia toisiinsa. Funktio i oli hänelle ongelmallinen, sillä hän muisti, että epäjatkuva funktio ei voi olla derivoituva, joten, koska i oli kuvan perusteella selvästi epäjatkuva, ei se voinut olla derivoituva. Hän kuitenkin laski metodinsa mukaisesti funktion molempien palojen derivaatat rajapisteessä ja totesi ne yhtä suuriksi. Hänen luottamuksensa omaan metodiinsa oli niin luja, että hän totesi muistikuvansa olevan väärä ja päätyi siihen, että funktio *i* on derivoituva, vaikka se onkin epäjatkuva. Näiden kahden esimerkin jälkeen herää kysymys siitä, miten lukiolaiset hahmottavat derivaatta -käsitteen sekä *derivoituvuuden* ja *jatkuvuuden* välisen yhteyden, jos opettajaksi valmistuvillekin ne ovat näin epäselviä? Tämä innosti myös tutkimaan, kuinka käsitteiden välinen yhteys esitetään lukion oppikirjoissa, käydäänkö se läpi niin selvästi, että arvailujen varaa ei jää. Oppikirjoja on tarkasteltu luvussa 3.

1.3 Tietokoneet derivaatta-käsitteen opetuksessa

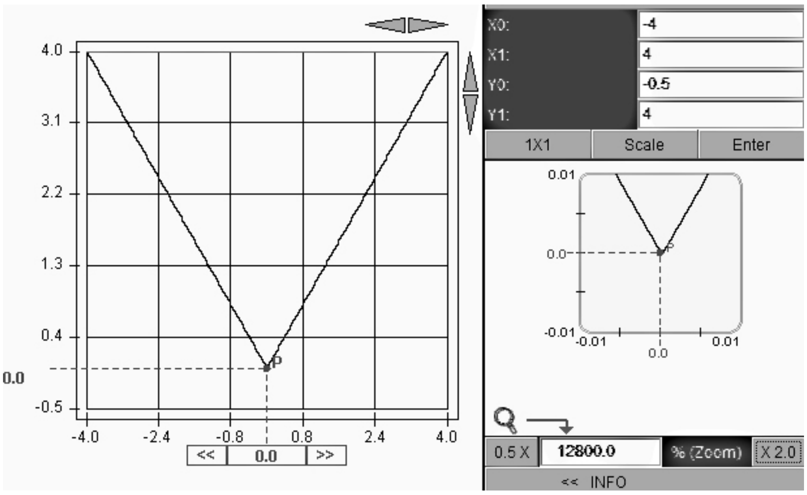
Tall [34] esittää metodin, jolla voidaan tutkia funktion derivoituvuutta graafisesti tietokoneen avulla. Funktion kuvaajaa lähennetään pisteessä, jossa derivoituvuutta tutkitaan. Tall määrittelee *kognitiivisen juuren* (*cognitive root*) käsitteeksi, joka on opiskelijalle ymmärrettävä sillä hetkellä ja toimii siemenenä muodollisen käsitteen määrittelyssä [34, s.12]. Esimerkiksi *paikallinen suoruus* on kognitiivinen juuri derivoituvuuden käsitteelle. Tarkastellaan paikallisen suoruuden käsitettä muutaman esimerkin avulla, joita on demonstroitu Kawasakin *Visual Calculus* -ohjelmalla[1]. Tutkitaan ensiksi funktiota $f(x) = \sin(x)$, jonka kuvaaja piirretään ensin välillä $[-4, 4]$, ja sen jälkeen lähennetään kuvaa kohdassa $x = 1$ (kuva 1.2). Ohjelman avulla nähdään selvästi, kuinka kuvaaja paikallisesti lähestyy suoraa kohdassa $x = 1$, kun kuvaa lähennetään tarpeeksi.



Kuva 1.2: Funktion f(x) = sin(x) kuvaaja ja suurennos piirrettynä Visual Calculus -ohjelmalla.

[1] *Visual Calculus* -ohjelmaa voi käyttää osoitteessa:
http://www.mat.ufmg.br/~protem/Calc/javaClasses/VCPackage/Applet.html

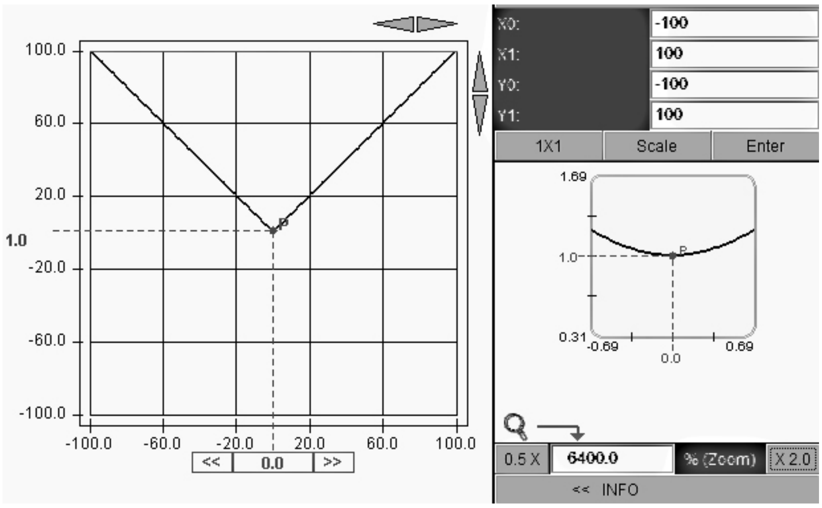
Toisena esimerkkinä tutkitaan funktion $f(x)=|x|$ kuvaajaa kohdassa $x=0$. Ohjelman avulla nähdään helposti, että kuvaaja ei suoristu origossa, vaikka kuvaa lähennettäisiin kuinka paljon tahansa (kuva 1.3). Näin opiskelijat voivat geometrisesti tutkia funktioiden derivoituvuutta ja ”nähdä”, mitä derivoituvuus on. Heille voidaan luoda derivoituvuudesta ja epäderivoituvuudesta ymmärrettävä visuaalinen havainto. Paikallista suoruutta voi tutkia myös ilman tietokonetta esimerkiksi graafisen laskimen ZOOM-toiminnon avulla.



Kuva 1.3: Funktion $f(x)=|x|$ kuvaaja ja suurennos piirrettynä Visual Calculus -ohjelmalla.

Jotta opiskelijat voisivat ymmärtää muodollisen todistuksen merkityksen matematiikassa, tulisi Tallin mukaan [34, s. 10-11] heille esittää esimerkkejä siitä, mikä voi mennä pieleen käsitteiden intuitiivisessa tulkinnassa. Opiskelijoille voidaan näyttää esimerkiksi, että on olemassa funktioita, jotka eivät ole missään pisteessä paikallisesti suoria, jolloin heille muodostuu visuaalinen mielikuva siitä, mitä funktion epäderivoituvuus tarkoittaa. Tämä ei onnistu helposti enää *Visual Calculus* -ohjelmalla, mutta tarkastelu voidaan toteuttaa esimerkiksi *Mathematica*lla, kuten luvussa 6.3 on tehty tutkittaessa Weierstrassin funktiota geometrisesti.

Opetuksessa voidaan käyttää hyväksi tilanteita, joissa tietokoneen esitysmuoto ja vastaava teoreettinen muotoilu muodostavat ristiriidan [9]. Tutkitaan esimerkiksi funktiota $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ kohdassa $x=0$. Kun on opiskeltu derivaatan ketjusääntö, voivat opiskelijat laskea funktion f derivaatan analyyttisesti. Laskemisen jälkeen voidaan piirtää funktion kuvaaja välillä $[-100,100]$. Kuvaajaan näyttää muodostuvan terävä piikki, joten geometrisen tarkastelun mukaan funktio ei olisi derivoituva kohdassa $x = 0$. Lähentämällä kuvaajaa havaitaan kuitenkin, että kyseiseen kohtaan ei muodostu terävää kärkeä vaan se ”oikenee” eli kuvaaja lähestyy paikallisesti suoraa, jolloin funktio voidaan perustella derivoituvaksi kohdassa $x = 0$ myös geometrisesti. Tilanne on esitetty kuvassa 1.4. Kun opiskelijoiden kanssa on tarkasteltu aikaisemmin derivaattaa tangentin kulmakertoimena, voi painottaa, että tutkittavassa kohdassa derivoituvan funktion kuvaaja lähenee paikallisesti nimenomaan tangenttia.



Kuva 1.4: Tilanne, jossa kuvaaja voi antaa väärän mielikuvan derivoituvuudesta.

Tämä esimerkki selventää myös sitä, että derivoituvuus on funktion lokaali ominaisuus. Kun tutkitaan funktion derivoituvuutta annetussa kohdassa, pitää kuvaajaakin tutkia lokaalisti. Tarkasteltaessa funktion kuvaajaa isolla alueella, kuten esimerkissä on aluksi tehty, ei voida sanoa sen derivoituvuudesta yksittäisessä kohdassa mitään. Vasta kun kuva on lähennetty tarkasteltavan kohdan ”lähiympäristöön”, voidaan tutkia lokaalia ominaisuutta *derivoituvuus*.

2 LUKION OPETUSSUUNNITELMAN PERUSTEISTA

Lukion opetussuunnitelman perusteet uudistuivat vuonna 2003. Niihin perustuvien opetussuunnitelmien käyttöönotto lukioissa aloitettiin elokuussa 2005, ja se etenee vaiheittain. Tätä tutkielmaa kirjoitettaessa lukioissa on siis käytössä sekä vuoden 1994 että vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteisiin pohjautuvia opetussuunnitelmia. Jatkossa esitellään vanhat vuoden 1994 ja uudet vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteet matematiikan pitkän oppimäärän sekä erityisesti jatkuvuuden ja derivoituvuuden osalta. Lisäksi vertaillaan opetussuunnitelman perusteissa tapahtuneita muutoksia pakollisten ja syventävien kurssien osalta.

Opetushallituksen ylitarkastaja Leo Pahkin [32, s.10-12] kirjoitti uusista vuoden 2003 opetussuunnitelmien perusteista *Dimensio*-lehdessä vuoden 2003 lopulla. Opetussuunnitelman perusteissa on matematiikan opetukselle lukioissa asetettu sekä yleiset tavoitteet että erikseen omat tavoitteensa pitkälle ja lyhyelle matematiikalle. Lisäksi kursseille on asetettu omat tavoitteensa. Matematiikan opetuksen on tarjottava opiskelijalle mahdollisuuksia tutustua matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin sekä matemaattisen ajattelun malleihin. Hänen tulisi oppia käyttämään sekä puhuttua että kirjoitettua matematiikan kieltä ja kehittää laskemiseen ja ongelmanratkaisuun liittyviä taitojaan. Pitkän matematiikan opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opiskelijaa tulisi ohjata hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin.

Matemaattisten käsitteiden, kuten *jatkuvuus* ja *derivoituvuus*, omaksuminen ja niiden merkitysten hahmottaminen ovat siis pitkän matematiikan keskeisiä tavoitteita. Opiskelijoiden tulisi myös ymmärtää, kuinka käsitteet liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin, esimerkiksi kuinka käsitteet *raja-arvo*, *jatkuvuus* ja *derivoituvuus* liittyvät toisiinsa, minkälainen riippuvuus niiden kesken on ja kuinka kaksi jälkimmäistä luokittelevat funktioita.

2.1 Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994

Vuoden 1994 opetussuunnitelmien perusteet olivat melko väljät ja antoivat reilusti liikkumavaraa koulukohtaisten opetussuunnitelmien tekoon. Opetussuunnitelman perusteissa derivaattaa käsitellään kahdessa pakollisessa ja yhdessä syventävässä kurssissa. Seuraavassa esitellään pakollisten kurssien *Differentiaalilaskenta 1* ja *2* sekä analyysia käsittelevän syventävän kurssin sisällöt.

2.1.1 Differentiaalilaskenta 1

Kurssissa tutustutaan *raja-arvon*, *jatkuvuuden* ja *derivoituvuuden* käsitteisiin sekä perehdytään niiden keskeisiin ominaisuuksiin ja soveltamismahdollisuuksiin. Lisäksi tarkoituksena on sisäistää derivaatta-käsite sekä oppia käyttämään sitä hyväksi polynomifunktioiden ja algebrallisten funktioiden tutkimisessa ja ongelmien ratkaisussa. Ks. [23, s.72].

2.1.2 Differentiaalilaskenta 2

Differentiaalilaskennan toisessa kurssissa laajennetaan käsiteltävien funktioiden joukkoa transsendenttisiin funktioihin sekä tutkitaan niiden ominaisuuksia, derivoituvuutta ja käyttöä. Lisäksi sovelletaan matemaattisen analyysin keinoja opittujen funktioiden tutkimiseen sekä yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemiseen. Kurssilla opiskellaan myös analyysin teorian soveltamista käytännön tilanteisiin. *Differentiaalilaskenta 2* -kurssi on varsin laskennallinen eikä niinkään enää derivaatan ominaisuuksiin perehtyvä kurssi. Ks. [23, s.72].

2.1.3 Analyysi

Syventävistä kursseista derivaattaa käsitellään analyysin kurssissa. Kurssilla voi olla koulukohtaisesti eri nimiä, esimerkiksi *Analyysin jatkokurssi* tai *Differentiaalilaskennan jatkokurssi*. Kurssilla laajennetaan tutkittavien funktioiden joukkoa, tutustutaan kahden muuttujan funktioihin, osittaisderivaattoihin sekä differentiaaliyhtälöihin, täydennetään integroimismenetelmiä ja tutkitaan käyräparvia [23, s.75]. Derivaatta-käsitettä kurssi laajentaa vain osittaisderivaatoilla. Muuten kurssi täydentää laskuteknisiä taitoja sekä esittelee uuden tyyppisiä funktioita.

2.2 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003

Uusia vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteita laatiessaan Opetushallitus on pitänyt tärkeänä, että ne ovat normiluonteisemmat kuin edeltävät vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteet. Edelleen opetussuunnitelman perusteet antavat kuitenkin vahvan paikallisen liikkumavaran opetuksen järjestämiseen sekä paikallisten painotusten tekemiseen.

Uudistuksen myötä lukion yleissivistävää luonnetta on pyritty vahvistamaan sekä määrittelemään selkeämmin oppiaineen keskeisiä tavoitteita ja sisältöjä. Ks. [32, s.10-12].

Miksi sitten vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteita lähdettiin uudistamaan? Vuonna 2002 Juha Nurmi [29, s.28-32] listasi *Dimensio*-lehdessä asioita, jotka Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton MAOL ry:n mielestä kaipasivat parannusta uusien opetussuunnitelman perusteiden myötä. Hän kirjoitti, että vuoden 1994 opetussuunnitelma on oppimäärältään liian laaja. Vain harvat pysyvät kyydissä mukana, ja nekin jotka pysyvät, oppivat vain pintapuolisesti. ”Pikajunamatematiikasta” on päästävä eroon. Pakollisten kurssien sisältöjä tulisi karsia ja panostaa laatuun määrän sijaan. MAOL ry:n mielestä opetussuunnitelman perusteet tulisi kirjoittaa niin selkeästi, että oppikirjojen tekijöille, opettajille ja ylioppilastutkintolautakunnalle syntyisi perusteista yhtenäinen käsitys ilman suurta tulkinnanvaraisuutta. Tavoitteena tulee olla, että sekä opetuksen että oppimisen arviointi ovat opetussuunnitelmalle alisteisia. Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteet on kirjoitettu niin väljästi, että ylioppilastutkintolautakunta on joutunut ottamaan opetussuunnitelman perusteiden ylimmän tulkitsijan roolin. Ylioppilaskirjoitukset eivät kuitenkaan saisi ohjata opetusta kuin tiettyyn rajaan saakka.

Vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteissa derivaatta esiintyy pakollisissa kursseissa *Derivaatta, Juuri- ja logaritmifunktiot* sekä *Trigonometriset funktiot ja lukujonot* ja syventävässä kurssissa *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Seuraavassa *Derivaatta*-kurssin ja *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin* sisällöt on esitelty kokonaisuudessaan ja *Juuri- ja logaritmifunktiot* sekä *Trigonometriset funktiot ja lukujonot* -kurssien sisällöt derivaatan osalta.

2.2.1 Derivaatta (MAA7)

Derivaatta-kurssissa tavoitteena on, että opiskelija osaa määrittää rationaalifunktion nollakohdat sekä ratkaista yksinkertaisia rationaaliepäyhtälöitä. Opiskelijan tulisi omaksua havainnollinen käsitys funktion *raja-arvosta*, *jatkuvuudesta* ja *derivaatasta*. Laskennallisesti opiskelijan tulisi osata määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat sekä tutkia derivaatan avulla polynomifunktion kulkua ja määrittää sen ääriarvot. Lisäksi opiskelijan tulisi osata määrittää rationaalifunktion suurin ja pienin arvo sovellusongelmien yhteydessä. Keskeisimmiksi sisällöiksi Opetushallitus listaa seuraavat asiat:

- rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö
- funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
- polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen
- polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen

Ks. [24, s.121-122].

2.2.2 Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8)

Kurssissa *Juuri- ja logaritmifunktiot* käsitellään derivaattaa tutkittaessa näitä funktioita derivaatan avulla ja opiskeltaessa yhdistetyn funktion derivointi. Kurssin keskeisimmät sisällöt derivaatan osalta ovat yhdistetyn funktion derivaatta sekä juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat. Ks. [24, s.122].

2.2.3 Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9)

Kurssissa *Trigonometriset funktiot ja lukujonot* käsitellään derivaattaa tutkittaessa trigonometrisia funktioita derivaatan avulla. Keskeisin sisältö derivaatan osalta kurssissa on trigonometristen funktioiden derivaatat. Ks. [24, s.122-123].

2.2.4 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13)

Syventävässä kurssissa *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi* tavoitteena on täydentää opiskelijan integraalilaskennan taitoja soveltaen niitä muun muassa jatkuvien todennäköisyysjakaumien tutkimiseen sekä syventää differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemusta. Lisäksi tavoitteena on tutkia lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia. Keskeisimmiksi sisällöiksi Opetushallitus listaa seuraavat asiat:

- funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen
- jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia
- funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä
- epäoleelliset integraalit

Ks. [24, s.124].

2.3 Opetussuunnitelmien perusteiden vertailua

Opetushallituksen ylitarkastaja Leo Pahkin [32, s.10-12] toteaa, että opetussuunnitelman perusteisiin tehdyt muutokset ovat olleet varsin maltillisia. Joidenkin kurssien osasisällöt ovat vaihtaneet paikkaansa ja kurssien nimet ovat osittain tai kokonaan vaihtuneet.

2.3.1 Pakolliset kurssit

Pakollisten kurssien kokonaissisällössä ei derivaatan osalta ole tapahtunut suuria muutoksia. Joitain osasisältöjä on vaihdettu toisiin kursseihin ja joitain painotuksia hieman vaihdettu. Keskeiset sisällöt on määritelty tarkemmin vuoden 2003 perusteissa kuin vuoden 1994, joten tässä suhteessa uudet opetussuunnitelman perusteet ovat toteuttaneet MAOL ry:n toiveita.

Seuraavassa tarkastellaan hieman tarkemmin, miten kurssisisällöt ovat muuttuneet. Uusi *Derivaatta*-kurssi pitää sisällään vanhasta *Differentiaalilaskenta 1* -kurssista käsitteiden *raja-arvo*, *jatkuvuus* ja *derivoituvuus* käsittelyn. Vanhoissa perusteissa puhutaan näiden käsitteiden keskeisiin ominaisuuksiin ja soveltamismahdollisuuksiin perehtymisestä, kun taas uusien perusteiden mukaan opiskelijalle tulisi muodostua havainnollinen kuva kyseessä olevista käsitteistä. Mielestäni painotus tässä asiassa on parempi uusissa perusteissa, sillä jos opiskelijalle muodostuu hyvä ja havainnollinen kuva matemaattisesta käsitteestä, on sen analyyttinen oppiminen ja soveltaminen helpompi oppia. *Differentiaalilaskenta 1* -kurssissa tavoitteena oli sisäistää derivaatta-käsite. Tämä on tavoitteena kunnianhimoinen ja tarkkaan otettuna varsin laaja. Jos ajatellaan, että käsitteen sisäistäminen tarkoittaa ymmärrystä sen historiallisesta kehittymisestä ja soveltamismahdollisuuksista, niin voidaan kysyä, kuinka moni yliopisto-opiskelijakaan on sisäistänyt derivaatta-käsitteen hyvin? Ainakaan tutkielman kirjoittaja ei voinut näin väittää ennen kuin oli kirjoittanut Luonnontieteiden kandidaatin -tutkielman derivaatan historiasta (ks. [13]). Edelleenkin voidaan epäillä, onko tutkielman kirjoittaja sisäistänyt derivaatta-käsitteen täydellisesti. Tässä sanamuodossaan tavoitetta ei onneksi enää löydy uusista opetussuunnitelman perusteista. Uusien opetussuunnitelman perusteiden *Derivaatta*-kurssin tavoite derivaatta-käsitteen havainnollisen kuvan omaksumisesta pitää käsittääkseni sisällään saman tavoitteen kuin mitä aikaisemmin haettiin derivaatta-käsitteen sisäistämisellä. Tutustuttaessa *jatkuvuuden* ja *derivoituvuuden* käsitteisiin tulisi opiskelijalle muodostua niistä sekä geometrinen että analyyttinen käsitys. Tulisi myös ymmärtää, että derivoituvuus on vahvempi ominaisuus kuin jatkuvuus.

Derivaatta-kurssissa käsitellään yksinkertaisten funktioiden derivaatat, mikä käsitykseni mukaan voisi tarkoittaa polynomifunktioita sekä tulon ja osamäärän derivointia. Lisäksi käsitellään polynomifunktion kulku ja ääriarvot. Tämä vastaa siis suunnilleen *Differentiaalilaskenta 1* -kurssiin kuulunutta polynomifunktioiden ja algebrallisten funktioiden tutkimista ja ongelmien ratkaisemista. *Derivaatta*-kurssiin kuuluvat rationaalifunktioiden suurimman ja pienimmän arvon ratkaiseminen sekä rationaaliset epäyhtälöt. Aikaisemmin näitä asioita on käsitelty *Differentiaalilaskenta 1*-kurssissa, jossa on tutkittu algebrallisia funktioita, ja *Differentiaalilaskenta 2* -kurssissa, jossa on käsitelty epäyhtälöitä ja käytännön sovelluksia.

Nykyinen *Derivaatta*-kurssi sisältää pääpiirteittäin siis samat asiat kuin vanha *Differentiaalilaskenta 1* -kurssi sekä osan vanhan *Differentiaalilaskenta 2* -kurssin sisällöstä. Näin ollen *Derivaatta*-kurssi on sisällöltään varsin laaja, kun vanha *Differentiaalilaskenta 1* -kurssikaan ei ollut kovin suppea. On mielenkiintoista nähdä, kuinka laajasti oppikirjojen tekijät käsittelevät kurssin sisältöjä kirjoissaan, jotka ilmestyvät kevään ja kesän 2006 aikana.

Juuri- ja logaritmifunktiot -kurssiin kuuluvat entisestä *Differentiaalilaskenta 2* -kurssista juuri-, logaritmi- ja eksponenttifunktioiden derivaatat. Lisäksi kurssissa käsitellään yhdistetyn funktion derivaatta, joka on aikaisemmin oppikirjasta riippuen käsitelty joko *Differentiaalilaskenta 1* tai *2* -kurssissa. *Trigonometriset funktiot ja lukujonot* -kurssissa käsitellään trigonometristen funktioiden derivaatat, jotka niin ikään aikaisemmin kuuluivat *Differentiaalilaskenta 2* -kurssiin.

Vanhojen opetussuunnitelman perusteiden *Differentiaalilaskenta 1* -kurssin sisältö käsitellään uusissa opetussuunnitelman perusteissa *Derivaatta*-kurssissa. Vanhojen perusteiden *Differentiaalilaskenta 2* -kurssin sisältö on hajautettu uusissa opetussuunnitelman perusteissa kursseihin *Derivaatta, Juuri- ja logaritmifunktiot* ja *Trigonometriset funktiot ja lukujonot*. Uusien opetussuunnitelman perusteiden mukaisissa kursseissa opiskellaan ensin derivaatta -käsite ja vasta myöhemmissä kursseissa sitä opetellaan käyttämään esille tuleviin funktioihin. Vaikuttaa mielekkäältä, että esimerkiksi trigonometristen funktioiden derivaatat opiskellaan samassa kurssissa, kuin trigonometriset funktiotkin, eikä kuten vanhoissa opetussuunnitelman perusteissa, joissa trigonometriset funktiot opiskeltiin omassa kurssissaan ensin ja niiden derivointi myöhemmin *Differentiaalilaskenta 2* -kurssissa. Vaikuttaa myös mielekkäältä nimetä oma kurssi juuri- ja logaritmifunktioille ja opiskella tässä kurssissa sekä nämä funktiot että niiden derivointi sen sijaan, että ennen nämä funktiot opiskeltiin *Differentiaalilaskenta 2* -kurssissa niiden derivoinnin opiskelun yhteydessä.

2.3.2 Syventävät kurssit

Molemmissa opetussuunnitelman perusteissa analyysiin on suunniteltu yksi syventävä kurssi. Vuoden 1994 perusteissa kurssi määriteltiin varsin väljästi nimeä myöten. Vuoden 2003 perusteissa kurssi on nimetty *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*ksi ja sen sisältö on määritelty entistä tarkemmin. Uutena syventävään kurssiin ovat tulleet funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen sekä jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisten ominaisuuksien tarkastelu. Tämä on mielestäni hyvä asia ja toivottavasti ehkäisee väärien mielikuvien syntymistä koskien jatkuvien funktioiden derivoituvuutta. Tätä aihekokonaisuutta opetettaessa voisi mielestäni tutkia myös jatkuvien funktioiden erikoistapauksia, kuten *jatkuvia ei-missään derivoituvia* funktioita. Luvussa 8 on esitetty yksi vaihtoehto aihealueen opettamiseksi. Kurssissa on tarkoitus syventää integraalilaskennan taitoja, kuten oli vanhankin opetussuunnitelman perusteiden mukaisessa analyysin syventävässä kurssissa. Uusien opetussuunnitelman perusteiden *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*ssa ei käsitellä kahden muuttujan funktiota, osittaisderivaattoja eikä differentiaaliyhtälöitä, jotka sisältyivät vanhoissa perusteissa analyysin syventävään kurssiin. Onkin käsittääkseni mielekkäämpää syventää opiskelijoiden ymmärrystä funktioiden jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta sekä niiden välisestä yhteydestä kuin opetella osittaisderivointia tai differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista. Osittaisderivointi ja differentiaaliyhtälöt kun saattavat jäädä varsin laskuteknisiksi taidoiksi ilman syvällisempää ymmärrystä. Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteissa todetaan, että analyysin syventävässä kurssissa laajennetaan tutkittavien funktioiden joukkoa. Tämä on varsin väljä ilmaisu, minkä seurauksena eri oppikirjat ovatkin käsitelleet eri funktioita, esimerkiksi kompleksifunktioita tai arkusfunktioita. Uudet opetussuunnitelman perusteet määrittelevät kurssin sisällön huomattavasti tarkemmin, joten niiden normiluonteisuus tulee tässäkin esille.

2.3.3 Lopuksi

Mielestäni kehitys opetussuunnitelman perusteissa on ollut positiivista. On ollut oikea ratkaisu sisällyttää erilaisten funktioiden derivoimisen opiskelu kursseihin, joissa nämä funktiot opiskellaan. Erinomaista on myös, että keskeisten käsitteiden, *raja-arvo*, *jatkuvuus* ja *derivoituvuus*, ymmärtämiselle ja hahmottamiselle on annettu suurempi rooli. Varsinkin syventävän kurssin kehitys kurssiksi, joka uusien funktio- ja yhtälötyyppien esittelyn sijaan syventää analyysin käsitteiden ymmärrystä, on ollut oikea.

3 LUKION PITKÄN MATEMATIIKAN OPPIKIRJOISTA

Kuten aikaisemmin on todettu, lukion uusiin vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteisiin pohjautuvien opetussuunnitelmien käyttöönotto alkoi lukioissa asteittain elokuussa 2005. Osa lukion pitkän matematiikan oppikirjoista on jo uudistettu uusien opetussuunnitelman perusteiden mukaisiksi, mutta osa kirjoista on vasta tekeillä. Näin on laita esimerkiksi jatkuvuutta ja derivoituvuutta käsittelevien kurssien kohdalla, jotka on suunnattu toisen ja kolmannen vuositason opiskelijoille. Siitä johtuen tässä työssä on tarkasteltu vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden mukaisia oppikirjoja. Kirjoja on tarkasteltu varsin yleispiirteisesti, koska ne poistuvat pian käytöstä. Tavoitteena on saada yleiskäsitys siitä, kuinka käsitteet *jatkuvuus* ja *derivoituvuus* käsitellään lukion pitkän matematiikan oppikirjoissa, eikä niinkään vertailla eri kirjoja keskenään. Tarkastelun kohteena on ollut neljästä pitkän matematiikan kirjasarjasta kustakin pakollisten kurssien, *Differentiaalilaskenta 1* ja *2,* sekä syventävän kurssin, *Analyysi,* kirjat. Tarkasteltavat kirjasarjat olivat WSOY:n *Pitkä matematiikka* [19, 20, 21] ja *Matematiikan Taito* [25, 26] sekä Otavan *Calculus* [17, 18] ja Tammen *Pyramidi* [22, 30]. Pakollisten kurssien kirjoista on mukaan otettu vain osuudet, joissa opetetaan käsitteet *raja-arvo*, *jatkuvuus* ja *derivoituvuus*. *Analyysi*-kurssin oppikirjojen sisältöjä on tarkasteltu erikseen.

3.1 Raja-arvo -käsite oppikirjoissa

Kirjoissa on aluksi esitelty *ympäristön* käsite sanallisesti ja graafisesti. Osassa kirjoista on esitelty myös *poikkeaman* käsite. Seuraavaksi oppikirjat tarkastelevat esimerkkien kautta *raja-arvo* -käsitettä määrittäen numeerisesti ja graafisesti raja-arvoja. Johdattelevien esimerkkien määrät vaihtelevat yhdestä neljään. Esimerkkeinä on käytetty paloittain määriteltyjä funktioita ja rationaalifunktioita. Esimerkiksi *Pyramidi 3* -kirjassa on tutkittu funktion $f(x)=\dfrac{1-x^3}{1-x}$ arvoja numeerisesti ja graafisesti, kun muuttuja x lähenee kohtaa 1 [22, s.43]. Johdattelevien esimerkkien jälkeen kaikki kirjoissa annetaan hyvin samantyyppiset sanalliset määritelmät raja-arvolle. Ainoa ero on siinä sanotaanko funktion olevan määritelty tarkasteltavan kohdan ympäristössä, aidossa ympäristössä vai läheisyydessä. Esimerkiksi

Matematiikan Taito 6-7 määrittelee raja-arvon seuraavasti:

> Olkoon funktio *f* määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuun ottamatta. Funktiolla *f* on kohdassa x_0 *raja-arvo a*, jos funktion *f* arvot saadaan *mielivaltaisen lähelle* lukua *a* aina, kun muuttujan *x* ($\neq x_0$) arvot valitaan *tarpeeksi läheltä* lukua x_0. Ks. [25, s.11].

Kaikissa kirjoissa painotetaan, että funktion ei tarvitse olla määritelty kohdassa, jossa raja-arvoa määritetään. Määritelmän yhteydessä kirjat esittelevät raja-arvon *lim*-merkinnän $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$. Kolme kirjoista esittelee raja-arvolle myös vaihtoehtoisen merkinnän $f(x) \to a$, kun $x \to x_0$, ja vain yksi kirja pidättäytyy ainoastaan *lim*-merkinnässä. Raja-arvon täsmällinen (ε,δ)-määritelmä[2] on esitelty kahdessa oppikirjassa, toisessa esimerkkinä ja toisessa *Lisätietoa*-osiossa.

Määriteltyään raja-arvon oppikirjat käyvät läpi sen laskutekniikkaa. Laskusääntöjen käsittelyn tarkkuudessa ja esimerkkien määrässä on eroavaisuuksia. Yhdessä kirjassa käsitellään raja-arvojen määrittäminen vain esimerkkien kautta, kun taas muissa kirjoissa määritellään ennen esimerkkejä raja-arvon laskusääntöjä, kuten summan ja tulon raja-arvo. Kaikissa kirjoissa on perehdytty erikseen rationaalifunktioiden raja-arvon määrittämiseen tilanteessa, jossa funktiota ei ole määritelty tarkasteltavassa kohdassa.

Toispuolisten raja-arvojen käsitteeseen johdatellaan kirjoissa sanallisten ja graafisten esimerkkien avulla. Yhtä kirjaa lukuun ottamatta toispuolisille raja-arvoille on annettu sanallinen määritelmä vastaavalla tavalla kuin raja-arvollekin. Esimerkiksi *Pyramidi 3* -kirjassa määritellään vasemmanpuolinen raja-arvo seuraavasti:

> Funktion *f* **vasemmanpuolinen raja-arvo** kohdassa x_0 on *a*, jos funktion arvot $f(x)$ lähestyvät lukua *a*, kun muuttuja *x* lähestyy kohtaa x_0 vasemmalta, $x \neq x_0$. Ks. [22, s.52].

---

[2] Olkoon funktio *f* määritelty x_0:n aidossa ympäristössä. Luku *a* on funktion *f* *raja-arvo* pisteessä x_0, jos mielivaltaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - a| < \varepsilon$, kun $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$.

Kirjoissa esitellään myös merkinnät $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ja $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Toispuolisten raja-arvojen määrittelyn jälkeen kirjoissa esitetään ehto raja-arvon olemassaololle toispuolisten raja-arvojen avulla. Esimerkiksi *Calculus 3* -kirjassa määritellään seuraavasti:

> Funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvona a vain, jos $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$. Ks. [17, s.25].

Yksikään kirjoista ei käsittele raja-arvo -käsitteen historiaa. Uutta käsitettä opetettaessa olisi mielestäni mielenkiintoista esitellä lyhyesti sen historiallista kehittymistä. Opiskelijoiden motivoimiseksi voisi ottaa muutaman esimerkin raja-arvon historiallisista määritelmistä. Esimerkiksi Newtonin vuonna 1687 *Principia*ssa esittämä määritelmä kuvastaa hyvin raja-arvo -käsitteen määrittelyyn liittyneitä ongelmia:

> Suureet, ja suureiden suhteet, jotka äärellisessä ajassa konvergoivat jatkuvasti toisiaan kohti, ja jotka ennen tämän ajan loppumista ovat lähempänä toisiaan kuin yksikään annettu ero, tulevat lopulta yhtä suuriksi. Ks. [4, s.560].

Lisäksi voisi esittää esimerkiksi Cauchyn täsmällisemmän määrittelyn 1800-luvun alkupuolelta:

> Kun muuttujalle annetut peräkkäiset arvot lähestyvät kiinteää arvoa rajatta ja ne poikkeavat siitä viimein niin vähän kuin halutaan, tätä kiinteää arvoa sanotaan kaikkien muiden raja-arvoksi. Ks. [4, s.719].

Opiskelijoille muodostuisi näin mielikuva siitä, kuinka raja-arvon nykyiseen määrittelyyn on päädytty.

3.2 Jatkuvuus-käsite oppikirjoissa

Vain yhdessä oppikirjassa on korostettu, että jatkuvuus on tärkeä funktioita kuvaileva käsite. Muissa oppikirjoissa ei mainita lainkaan, että jatkuvuus on funktioita kuvaileva ja luokitteleva ominaisuus. Kuten raja-arvon ei myöskään jatkuvuuden käsittelyssä ole lainkaan esitetty käsitteen historiallista kehitystä. Myös jatkuvuus-käsitteen yhteydessä voisi lyhyt historiallinen katsaus sen kehittymisestä motivoida opiskelijoita uuden käsitteen opiskeluun.

Kirjoissa jatkuvuuden käsitteeseen on yhtä kirjaa lukuun ottamatta johdateltu jatkuvien ja epäjatkuvien funktioiden kuvasarjoilla tai käytännön esimerkkeihin liittyvillä kuvasarjoilla. Varsinkin *Pyramidi*-kirjassa käytännön esimerkkejä tarkastelemalla toteutettu johdanto käsitteisiin *jatkuva* ja *epäjatkuva* on mielestäni hyvä. Lukiolaisen on helppo ymmärtää, miksi lämpötila on jatkuva suure ja tilin saldo epäjatkuva. Vain yhdessä oppikirjassa on lähdetty laskennallisen esimerkin avulla liikkeelle ja sitä kautta päädytty jatkuvuuden havainnolliseen kuvailuun. Kuvasarjojen kautta tapahtuva jatkuvuuden geometrinen johdattelu on mielestäni hyvä tapa, josta monen lukiolaisen on helppo alkaa hahmottaa jatkuvuus-käsitettä.

Kun jatkuvuudesta on saatu luotua havainnollinen käsitys, oppikirjat määrittelevät sen sanallisesti. Esimerkiksi *Pitkä matematiikka* -kirjassa jatkuvuus tietyssä kohdassa määritellään seuraavasti:

> Funktio f on jatkuva määrittelyjoukkonsa kohdassa a, jos funktion arvo kohdassa a on yhtä suuri kuin funktion raja-arvo kohdassa a eli jos $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Ks. [20, s.32].

Osassa kirjoista määrittely on lyhyt ja osassa laajemmin kuvaileva, mutta perusidealtaan määrittelyt vastaavat toisiaan. Vain yksi kirja purkaa edellisen määritelmän vielä auki esittäen sen vasemman- ja oikeanpuolisten raja-arvojen avulla muodossa $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Kaikki kirjat painottavat, että funktion jatkuvuudesta voidaan puhua vain, mikäli funktio on määritelty tarkasteltavassa kohdassa. Esimerkkinä jokaisessa kirjassa tarkastellaan perinteistä funktiota $f(x) = \dfrac{1}{x}$, jota moni opiskelija kokemukseni perusteella tarjoaa vielä yliopistossakin esimerkkinä epäjatkuvasta funktiosta. Funktio täydennetään esimerkeissä myös epäjatkuvaksi määrittelemällä sille jokin arvo x:n arvolla nolla. Mielenkiintoista oli havaita, että kirjat, jotka esittävät raja-arvolle (ε,δ)-määritelmän lisätietona, eivät esitä jatkuvuudelle (ε,δ)-määritelmää lainkaan.

Vain yksi kirja määrittelee jatkuvuuden lisäksi myös epäjatkuvuuden. Muissa kirjoissa epäjatkuvuus käsitellään esimerkeissä, joissa tarkastellaan, onko funktio jatkuva tietyssä kohdassa, ja todetaan sen olevan epäjatkuva, mikäli se ei ole jatkuva. Niissä käsitellään tilanteet, joissa raja-arvoa ei ole olemassa tai se on erisuuri kuin funktion arvo kyseisessä kohdassa. Mielenkiintoinen havainto on, että *Matematiikan taito 6-7* esittää esimerkin funktiosta, joka on kaikkialla epäjatkuva [25, s.28]. Muissa kirjoissa vastaavaa erikoistapausta ei mainita lainkaan, jolloin opiskelijalle jää helposti käsitys, että funktiolla voi olla vain yksittäisiä epäjatkuvuuskohtia. Tällaisten erikoistapausten esille tuominen olisi mielestäni suotavaa, jottei käsitteistä syntyisi vääriä mielikuvia. Toki niitä ei tarvitse koulukursseissa käsitellä kovin tarkasti, mutta ainakin niiden olemassaolo tulisi tuoda esille.

Tarkasteltuaan jatkuvuutta ja epäjatkuvuutta yhdessä kohdassa kirjat siirtyvät käsittelemään jatkuvuutta annetulla välillä. Kolmessa kirjassa määritellään, että funktio on jatkuva tutkittavalla välillä, mikäli se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä. Näissä kirjoissa määritellään myös käsitteet *oikealta jatkuva* ja *vasemmalta jatkuva*. Esimerkiksi kirjassa *Matematiikan taito 6-7* määritellään seuraavasti:

> Funktio f on *vasemmalta (oikealta) jatkuva* kohdassa x_0, jos sen vasemmanpuolinen (oikeanpuolinen) raja-arvo ja arvo tässä kohdassa ovat yhtä suuret. Ks. [25, s.27].

Kahdessa näistä kirjoista jatkuvuutta avoimella ja suljetulla välillä tutkitaan tarkemmin vasemmalta ja oikealta jatkuvuuden avulla. Mikään kirjoista ei kuitenkaan totea, että funktio on jatkuva tietyssä kohdassa vain, jos se on siinä sekä vasemmalta että oikealta jatkuva. Raja-arvon olemassaololle kirjoissa esitettiin ehto vasemmanpuolisen ja oikeanpuolisen raja-arvon yhtymisestä, joten olisi mielestäni luontevaa todeta vastaava asia jatkuvuudesta.

Funktion jatkuvuutta suljetulla välillä tarkastellaan lähemmin kolmessa kirjassa. Niissä esitetään seuraavat lauseet:

> Olkoon funktio jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$. Jos funktio saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin funktiolla on avoimella välillä $]a,b[$ ainakin yksi nollakohta. (Bolzanon lause) Ks. [22, s.80].
>
> Suljetulla välillä jatkuva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa ja kaikki arvot niiden väliltä. Ks. [22, s.83].

Alkeisfunktiot todetaan, joko teoriaosassa tai esimerkkien kautta, jatkuviksi määrittelyjoukoissaan. Lisäksi todetaan, että jatkuvuus säilyy peruslaskutoimituksissa ja funktioiden yhdistämisessä.

3.3 Derivoituvuus-käsite oppikirjoissa

Kaikissa kirjoissa lähdetään johdattelemaan derivaatta-käsitteeseen geometrisesti. Johdattelevana esimerkkinä tarkastellaan jotain tunnettua funktiota, esimerkiksi $f(x)=x^2$, tai jotain käytännön esimerkkiä, kuten ihmisen kasvua kuvaavaa käyrää. Esimerkistä määritetään keskimääräisiä muutosnopeuksia joillakin aikaväleillä ja käydään samalla läpi käsitteet *sekantti* ja *sekantin kulmakerroin*. Osa kirjoista määrittelee tässä vaiheessa erotusosamäärän, osa tekee sen vasta myöhemmin siirryttäessä derivaatan analyyttiseen tarkasteluun. Keskimääräisestä muutosnopeudesta siirrytään kohti hetkellistä muutosnopeutta pienentämällä tarkasteltavaa väliä ja piirtämällä kuvaajalle useita sekantteja sekä mahdollisesti laskemalla sekanttien kulmakertoimia. Lopulta päädytään hetkelliseen muutosnopeuteen ja *tangentin* käsitteeseen. Tangentti määritellään sanallisesti, ja useimmissa kirjoissa vihjataan jo erotusosamäärän raja-arvoon. Esimerkkeinä lasketaan erotusosamääriä numeerisesti sekä tutkitaan samalla niiden geometrista merkitystä. Yhtä kirjaa lukuun ottamatta kirjoissa käsitellään graafista derivointia esimerkkeinä ja laskuharjoituksina.

Mielestäni Hähkiöniemi esittää *pro gradu* -työssään [16] hyvän tavan hetkelliseen muutosnopeuteen johdattelemiseksi. Tutkitaan keskimääräisiä nopeuksia ja todetaan, että niitä on helppo määrittää mutta hetkellistä nopeutta tietyllä hetkellä ei käytännössä voida määrittää. Esimerkiksi auton nopeusmittarit ja poliisin nopeustutkat määrittävät keskimääräisen nopeuden tietyllä aikavälillä. Mitä pienempi tämä tutkittava aikaväli on, sitä parempi arvio aina saadaan hetkelliselle nopeudelle. Näin opiskelijoita voidaan johdattaa käytännön esimerkin kautta ymmärtämään derivaatta-käsitteen perusideaa erotusosamäärän raja-arvona.

Pitkä matematiikka -kirjassa tutkitaan derivoituvuutta myös kuvaajien suurennoksien avulla luvussa 1 kuvatun metodin mukaisesti. Tarkastellaan, suoristuuko funktion kuvaaja, mikäli kuvaa lähennetään tarpeeksi tutkittavan kohdan ympäristössä [20, s.42]. Kirjassa määritellään funktio tutkittavassa kohdassa derivoituvaksi, mikäli kuvaaja suoristuu tarpeeksi lähennettäessä, ja epäderivoituvaksi, mikäli kuvaaja ei suoristu lainkaan. Kaikissa kirjoissa derivaatta-käsitteeseen johdatteleva geometrinen tarkastelu on varsin laaja ja perusteellinen, mikä onkin mielestäni erinomaisen tärkeää. Jos derivaatasta muodostuu sekä geometrinen käsitys tangentin kulmakertoimena että käytännöllinen käsitys muutosnopeutena, on käsitteen analyyttisen määritelmän omaksumiselle huomattavasti paremmat lähtökohdat.

Derivaatan historian esittelemisestä voidaan todeta sama seikka kuin raja-arvon ja jatkuvuuden yhteydessä, eli mielestäni käsitteen historiaa kannattaisi esitellä lyhyesti. Yksikään kirjoista ei tätä tee derivaatankaan osalta. Käsitteeseen johdattelun yhteydessä voisi selvittää, kuinka käsitteen määritteleminen on historiallisestikin lähtenyt liikkeelle geometriselta pohjalta. Lyhyesti voi esitellä esimerkiksi Descartesin menetelmän normaalin määrittämiseksi (ks. [13, s.7-8] tai [4, s.486]), Fermat'n menetelmän tangentin määrittämiseksi (ks. [13, s.8-10] tai [4, s.492-494]) tai Barrow'n tangenttisäännön (ks. [13, s.12-14] tai [4, s.548-549]). Näiden jälkeen tulee tietysti mainita varsinaiset derivaatan keksijät Newton ja Leibniz sekä kertoa lyhyesti heidän saavutuksistaan. Kokemukseni mukaan opiskelijoita kiinnostaa historialliset kiistat ja tunnettujen nerojen elämänvaiheet, joten voisi olla mielenkiintoista esitellä derivaatan keksimistä koskenut prioriteettikiista Newtonin ja Leibnizin välillä (ks. [13, s.15-20]). Historiallisen kehityksen esittelyssä voi myös edetä samaa tahtia kuin käsitteen opetuksessa: geometriset määritelmät geometrisen johdattelun yhteydessä ja analyyttiset määritelmät derivaatan analyyttisen käsittelyn yhteydessä.

Geometrisen johdattelun jälkeen kirjoissa määritellään derivaatta analyyttisesti. Esimerkiksi *Pyramidi 3* -kirjassa määritellään:

> Oletetaan, että funktio *f* on määritelty kohdan x_0 ympäristössä. Jos erotusosamäärän raja-arvo
> $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
> on olemassa, niin funktio *f* on **derivoituva** kohdassa x_0.
>
> Erotusosamäärän raja-arvoa sanotaan funktion *f* **derivaataksi** kohdassa x_0 ja merkitään $f'(x_0)$. Ks. [22, s.87].

Määrittelyjen yhteydessä painotetaan vielä derivaatan geometrista merkitystä funktion tiettyyn kohtaan piirretyn tangentin kulmakertoimena ja käytännön merkitystä funktion hetkellisenä muutosnopeutena. Kahdessa kirjassa esitetään derivaatan määritelmän molemmat muodot

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ja } \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

kun taas kahdessa muussa kirjassa käytetään vain jompaakumpaa muotoa.

Kun on määritelty derivoituvuus tietyssä kohdassa, tarkastellaan yhtä kirjaa lukuun ottamatta derivoituvuutta tietyllä välillä. Kirjoissa määritellään, että jos funktiolla f on derivaatta tutkittavan välin jokaisessa kohdassa, niin funktio f on derivoituva tutkittavalla välillä. Määritelmä on kirjoissa hyvin samantyyppinen, ainoastaan yksi kirja määrittelee välin tarkemmin avoimeksi väliksi. Tämän jälkeen kirjoissa määritellään käsitteet *derivaattafunktio* ja *derivointi*.

Kaikissa kirjoissa derivaatan analyyttisen määrittelyn jälkeen tutkitaan jatkuvuuden ja derivoituvuuden välistä yhteyttä. Lauseen muodossa todetaan, että jos funktio on derivoituva tietyssä kohdassa, niin se on myös jatkuva kyseisessä kohdassa. Muutamassa kirjassa tälle esitetään analyyttinen todistus teoriaosiossa tai laskuharjoituksena. Lisäksi tämän lauseen yhteydessä todetaan, että jatkuvuus tietyssä kohdassa ei merkitse välttämättä derivoituvuutta kyseisessä kohdassa ja että tietyssä kohdassa epäjatkuva funktio ei voi olla kyseisessä kohdassa derivoituva. Kirjoissa tähän tulokseen johdattelu ja tuloksen perustelu tapahtuu tutkimalla kuvien avulla, voidaanko kuvaajalle tiettyyn kohtaan piirtää yksikäsitteinen tangentti. Toispuoliset derivaatat tai toispuolinen derivoituvuus määritellään kahdessa kirjassa tässä yhteydessä ja yhdessä kirjassa syventävässä osiossa. Esimerkiksi *Calculus 3* -kirjassa määritellään vasemmanpuolinen derivaatta seuraavasti:

> Funktion f vasemmanpuolinen derivaatta kohdassa x on
> $$f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$ Ks. [17, s.63].

Kirjoissa, joissa toispuoliset derivaatat on määritelty, tutkitaan paloittain määriteltyjen funktioiden derivoituvuutta ja painotetaan, että funktion pitää olla jatkuva ennen kuin on mielekästä tutkia sen derivoituvuutta. Kaikissa kirjoissa esiintyy klassinen esimerkki $f(x) = |x|$ ja sen derivoituvuuden tutkiminen origossa. Esimerkki käsitellään geometrisesti toteamalla, että origoon ei voida piirtää yksikäsitteistä tangenttia. Onneksi vain yhdessä kirjoista on kärkeen piirretty useampi erisuuntainen kärkipisteen kautta kulkeva suora ikään kuin kärkipisteeseen voisi piirtää lukuisan määrän ”tangentteja”. Missään kirjoista ei ole todettu sekantteja tutkimalla, että kärkeen tulisi erotusosamäärän raja-arvon kautta kaksi erisuuntaista tangenttiehdokasta. Kirjoissa, joissa toispuoliset derivaatat on määritelty, lasketaan origossa vasemmanpuolinen ja oikeanpuolinen derivaatta ja todetaan, että yksikäsitteistä derivaattaa ei ole määritelty, koska toispuoliset derivaatat ovat eri suuret. Vain kahdessa kirjassa todetaan, että toispuolisten derivaattojen yhtyminen on välttämätön ehto derivoituvuudelle kohdassa x_0.

Se, että derivoituvuus on vahvempi ominaisuus kuin jatkuvuus, on pyritty kaikissa kirjoissa käymään geometrisin perustein hyvin läpi. Jäin kuitenkin kaipaamaan vielä selvempää painotusta sille, että epäjatkuva funktio ei voi olla derivoituva ja että jatkuvan funktion ei välttämättä tarvitse olla derivoituva. Analyysin kannalta keskeisten käsitteiden *jatkuvuus* ja *derivoituvuus* yhteys toisiinsa pitäisi ilmaista niin selvästi, että tulkinnan varaa ei jää. Mikäli käsitteiden välinen yhteys ei ole opettajalle täysin selvää ja hän ei sitä tunnilla käy tarkasti läpi, voi se opiskelijoille jäädä kirjojen perusteella epäselväksi. *Pyramidi 3* -kirja käsittelee riippuvuutta tarkimmin. Siinä on esitetty mielestäni hyvä joukko-opillinen kuva, joka havainnollistaa käsitteiden *jatkuvuus* ja *derivoituvuus* luokittelevaa ominaisuutta sekä niiden vahvuussuhteita.

Kuva 3.1: Funktioihin liittyviä reaalilukujen osajoukkoja. Ks. [22, s.132].

Kuvasta käy hyvin ilmi, miten funktion ei tarvitse olla määritelty kaikilla reaaliluvuilla, miten funktion ei tarvitse olla jatkuva kaikissa pisteissä, joissa se on määritelty, sekä miten funktion ei tarvitse olla derivoituva kaikissa pisteissä, joissa se on jatkuva. Sama toimii tietenkin toisinkin päin: jos funktio on derivoituva tietyssä pisteessä, niin se on myös jatkuva kyseisessä pisteessä, ja lisäksi funktion pitää olla määritelty kyseisessä pisteessä.

Derivaatta-käsitteen jälkeen oppikirjat siirtyvät tutkimaan derivaatan laskemista ja käyttöä, muun muassa derivoimissääntöjä, funktion kulun tutkimista ja ääriarvojen laskemista.

3.3.1 Erikoistapaukset kirjoissa

Yhdessäkään oppikirjoista ei mainita, että on olemassa myös funktioita, jotka ovat jatkuvia kaikkialla mutta eivät ole missään derivoituvia. Näitä funktioita käsitellään tarkemmin luvussa 6. Funktioiden tarkka käsittely lukion pakollisissa kursseissa ei varmaankaan ole mahdollista, mutta niiden olemassaolon voisi mainita. Funktiota voi mielestäni esitellä tarkemmin syventävissä kursseissa mahdollisuuksien mukaan. Näiden funktioiden esille tuominen kuitenkin jo pakollisissa kursseissa vahvistaisi opiskelijoiden käsitystä siitä, että funktion jatkuvuus ei takaa derivoivuutta ja että jatkuva funktio voi olla epäderivoituva useammassakin kuin vain muutamassa kohdassa. Lisäksi voisi mainita, että yleensä funktion jatkuvuus ei takaa derivoituvuutta vaan jatkuvia funktioita, jotka eivät ole missään derivoituvia, on ”paljon enemmän” kuin jatkuvia funktioita, jotka ovat edes yhdessä pisteessä derivoituvia (ks. luku 6.6). Lahjakkaille asiasta enemmän kiinnostuville opiskelijoille voisi antaa vinkkejä, mistä lähteistä asiasta saa tarkempaa tietoa. Lähteitä voisi mainita esimerkiksi oppikirjojen opettajien oppaissa.

3.4 Analyysi-kurssin oppikirjoista

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteissa syventävän kurssin *Analyysi* sisältö oli määritetty hyvin väljästi. Tästä johtuen oppikirjojen sisällöissäkin on jonkin verran vaihtelua. Kaikissa kirjoissa *Pyramidi*a lukuun ottamatta on laajennettu integroimiskeinoja, kuten opetussuunnitelman perusteissa sanotaan. Opetussuunnitelman perusteissa mainittu tutkittavien funktioiden joukon laajennus on osassa kirjoista toteutettu tutkimalla trigonometristen funktioiden käänteisfunktioita tai kompleksilukuja ja -funktiota. Osassa kirjoista tätä osuutta ei löydy lainkaan. Differentiaaliyhtälöitä on käsitelty kaikissa kirjoissa jotakuinkin yhtä laajasti. Kirjojen sisältöjen eroavaisuutta kuvaa myös muun muassa se, että *Matematiikan Taito* -kirja käsittelee ainoana kirjana $f(x, y) = 0$ tyyppisten funktioiden implisiittistä derivointia ja napakoordinaatisto-käsitteen.

Pitkä matematiikka on ainut kirja, joka kertaa ja syventää *raja-arvon*, *jatkuvuuden* ja *derivoituvuuden* määritelmiä. Tuntuu kuin kirja olisi jo enteillyt tulevaa, sillä vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteiden mukaisessa *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*ssa perehdytään nimenomaan tarkemmin jatkuvuuden ja derivoituvuuden ominaisuuksiin. Kirjassa tutkitaan hieman jatkuvuuden ja derivoituvuuden välistä yhteyttä ja todistetaan, että kohdassa a derivoituva funktio on jatkuva kohdassa a, sekä todetaan todistuksen seurauksena, että funktio ei ole derivoituva epäjatkuvuuskohdassaan [19, s.26].

Opetussuunnitelman perusteissa esiintynyt kahden muuttujan funktioiden tarkastelu löytyy kaikista oppikirjoista. *Pyramidi* lähtee liikkeelle kahden muuttujan funktioiden raja-arvon ja jatkuvuuden määrittelystä ja päätyy tätä kautta tutkimaan derivoituvuutta ja osittaisderivaattoja. Muissa kirjoissa tutkitaan suoraan osittaisderivaattoja. Kaikissa kirjoissa osittaisderivaatan määrittely lähtee liikkeelle koordinaattiakseleiden suuntaisten tangenttien tarkastelusta ja päätyy tästä johtopäätökseen, että osittaisderivaatta on koordinaattiakselin suuntaisen tangentin kulmakerroin. Osassa kirjoista osittaisderivaatta on määritelty analyyttisesti, osassa tyydytään vain esimerkein toteamaan, miten niitä lasketaan. Yhtä kirjaa lukuun ottamatta osittaisderivaatoista päädytään kahden muuttujan yhtälön derivoituvuuteen sekä *tangenttitaso*-käsitteeseen, joka esitetään geometrisesti. Tangenttitason tarkastelu on mielestäni hyvä derivaatta-käsitteen kannalta, jotta opiskelijalle muodostuu ainakin aavistus siitä, että derivaatta-käsite on yleistettävissä myös vektoriarvoisille funktioille. Mielestäni osittaisderivaatta saattaa kuitenkin jäädä opiskelijoille melko laskennalliseksi taidoksi ilman derivaatta-käsitteen ymmärryksen syventymistä.

Tarkempaa analysointia kirjoista ei ole mielekästä tehdä, koska ne ovat käytöstä poistuvia ja uusien vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteiden syventävä kurssi *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi* poikkeaa sisällöiltään huomattavasti *Analyysi*-kurssista. Toivotaan, että uudet vuoden 2003 opetussuunnitelmien perusteiden mukaiset kirjat ovat yhdenmukaisempia sisällöiltään kuin vanhat vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden mukaiset kirjat, jotta eri kirjasarjaa käyttävät opiskelijat olisivat tasapuolisemmassa asemassa myös ylioppilaskirjoituksissa. Toki edelleen oppikirjoissa voi olla erilaisia painotuksia ja opettajat voivat opetuksessaan painottaa eri asioita. Mielestäni olisi kuitenkin toivottavaa, että opiskelijoille tarjottaisiin perussisällöiltään yhdenmukaisia kursseja koulusta ja kirjasarjasta riippumatta. Syventävillä kursseilla voi tietenkin edistyneempien opiskelijoiden kanssa käydä läpi laajemman kokonaisuuden kuin kurssin perusrunkoon kuuluu.

4 TUTKIMUSONGELMAT

Tutkimuksessa haluttiin selvittää, minkälainen käsitys lukion pitkän matematiikan opiskelijoilla on *jatkuvuus*- ja *derivoituvuus*-käsitteiden välisestä yhteydestä. Tätä tutkittiin seuraavien alaongelmien avulla:

1. Kuinka hyvin opiskelijat ymmärtävät, että jatkuvuus on välttämätön ehto derivoituvuudelle?
2. Kuinka hyvin opiskelijat ymmärtävät, että jatkuvuus ei ole riittävä ehto derivoituvuudelle?
3. Voiko jatkuva funktio olla opiskelijoiden mielestä epäderivoituva kaikkialla?
4. Miten opiskelijat osaavat tulkita funktioiden kuvaajista jatkuvuuden ja derivoituvuuden?
5. Miten opiskelijat osaavat piirtää tiettyjen ehtojen mukaisia funktioiden kuvaajia?
6. Onko tytöillä ja pojilla eroja osaamisessa?

4.1 Tutkimuksen mittari

Opiskelijoille suoritetussa kyselyssä (liite 1) on kolme tehtävää. Ensimmäisessä tehtävässä on 12 väittämää, joihin vastataan *totta* tai *tarua*. Väitteillä testataan *derivoituvuus*- ja *jatkuvuus* -käsitteiden välisen yhteyden hallintaa. Toisessa tehtävässä annetaan kuuden funktion lausekkeet ja kuvaajat ja kysytään, onko funktio jatkuva ja derivoituva. Jos funktio ei ole jatkuva tai derivoituva, kysytään lisäksi, missä kohdassa näin ei ole. Tehtävässä testataan jatkuvuuden ja derivoituvuuden hahmottamista funktion kuvaajasta. Kolmannessa tehtävässä pitää piirtää neljä funktiota, joista kukin toteuttaa sille asetetut ehdot. Tehtävässä testataan, kuinka hyvin opiskelijat hallitsevat epäjatkuvien ja epäderivoituvien funktioiden piirtämisen.

4.2 Tutkimuksen suorittaminen ja kohdejoukko

Aikaa kyselyyn vastaamiseen oli 20 minuuttia. Ennen kyselyn alkua opiskelijoille esitettiin kalvolta lomakkeessa olleet määritelmät *jatkuvuudelle* ja *derivoituvuudelle* sekä käytiin läpi kyselyn rakenne ja painotettiin, että tehtävässä 2 on tarkoitus käyttää annettuja funktioiden kuvaajia hyväksi.

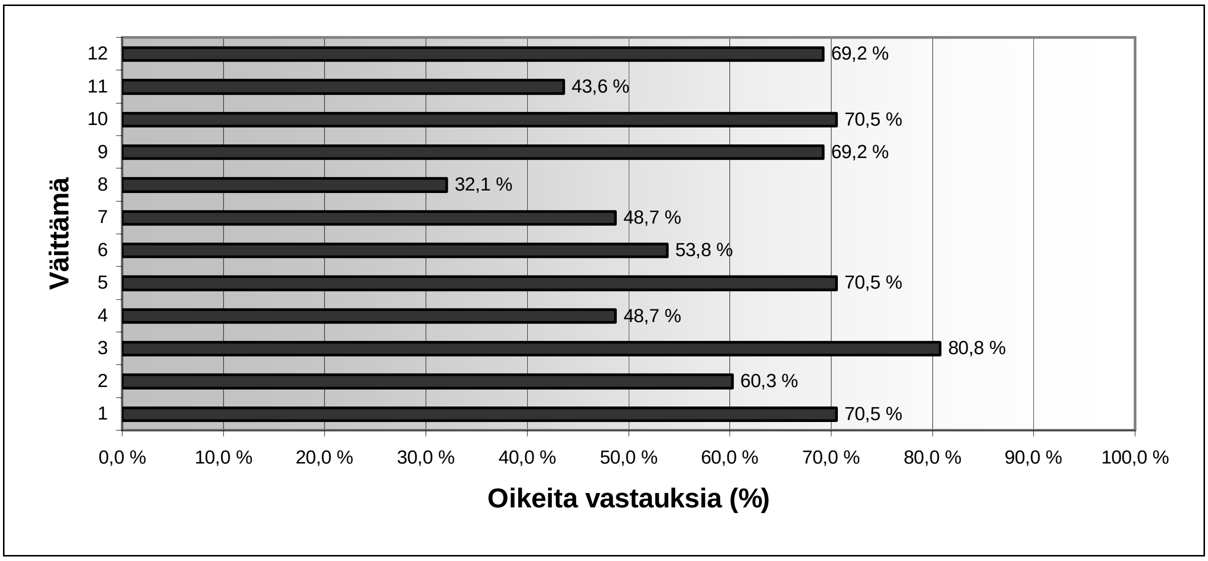
Kyselyyn vastasi yhteensä 78 lukion toisen vuositason opiskelijaa kahdesta koulusta. He olivat opiskelleet derivaatan vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti. Kysely suoritettiin maaliskuussa. Kaikki opiskelijat olivat opiskelleet *Differentiaalilaskenta 1* ja *2* -kurssit syksyn aikana. Kyselyyn vastanneista 60 % (47) oli poikia ja 40 % (31) tyttöjä. Kaikkien vastanneiden keskimääräinen arvosana *Differentiaalilaskenta 1* -kurssista oli 7,5 ja keskihajonta 1,4. Pojilla vastaavat luvut olivat 7,4 ja 1,5 ja tytöillä 7,5 ja 1,3. *Differentiaalilaskenta 2* -kurssin kaikkien vastanneiden keskimääräinen arvosana oli 7,0 ja keskihajonta 1,7. Pojilla vastaavat luvut olivat 7,0 ja 1,7 ja tytöillä 7,0 ja 1,6. Arvosanoissa ei siis ollut eroja sukupuolten kesken.

5 KYSELYN TULOKSET

5.1 Sanalliset väittämät

Ensimmäisessä tehtävässä opiskelijoilta kysyttiin, ovatko seuraavat väittämät totta vai tarua:

1. Derivoituva funktio on aina myös jatkuva.
2. Jatkuva funktio on aina myös derivoituva.
3. Jos $f'(2)=4$, niin funktio f on jatkuva kohdassa $x=2$.
4. Jos funktio on jatkuva suljetulla välillä [1, 5], niin se on derivoituva avoimella välillä]1, 5[.
5. Jos funktio ei ole jatkuva kohdassa $x=1$, niin se ei ole derivoituva kohdassa $x=1$.
6. Jos funktio on jatkuva kohdassa $x=1$, niin se välttämättä on myös derivoituva kohdassa $x=1$.
7. Jatkuva funktio voi olla epäderivoituva yhdessä kohdassa.
8. On olemassa funktioita, jotka ovat jatkuvia mutta eivät ole missään derivoituvia.
9. Jos funktio ei ole jatkuva kohdassa $x=1$, niin se voi silti olla derivoituva kohdassa $x=1$.
10. Jos funktio on jatkuva, niin se on derivoituva lukuun ottamatta korkeintaan muutamia pisteitä.
11. Funktio f ei ole derivoituva kohdassa $x=5$. Tällöin funktio f ei voi olla jatkuva kohdassa $x=5$.
12. Jos funktio on derivoituva kohdassa $x=1$, niin se voi olla epäjatkuva kohdassa $x=1$.



Kuvio 5.1: Tehtävän 1 väittämien oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

Kuviossa 5.1 on esitetty kaikkien väittämien oikeiden vastausten suhteellinen jakauma. Kuviosta huomataan, että selvästi huonoiten on mennyt väittämä numero 8, jossa kysyttiin *jatkuvien ei-missään derivoituvien* funktioiden olemassaoloa. Kaikkiin muihin väittämiin on oikein vastannut vähintään lähes puolet opiskelijoista ja seitsemään väittämään oikein on vastannut yli 60 % opiskelijoista. Oikeiden vastausten moodi on 8, keskiarvo on 7,1 ja keskihajonta 2,1. Heikoimmin selvinneellä opiskelijalla oikeiden vastausten lukumäärä oli 2 ja parhaalla 11. Seuraavaksi samantyyppisistä väittämistä on tehty omat ryhmänsä ja vertailtu kussakin ryhmässä oikeiden vastausten jakautumista.

5.1.1 Jatkuvuus on välttämätön ehto derivoituvuudelle

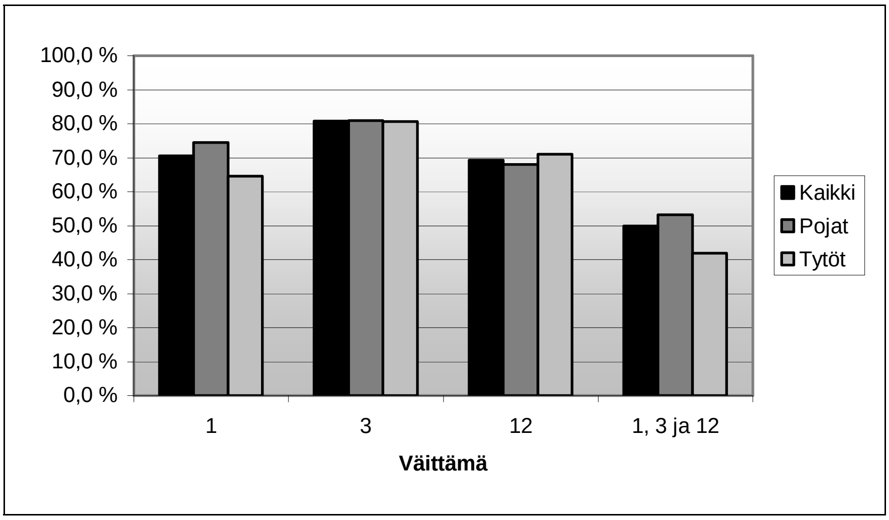
Väitteissä

1. *Derivoituva funktio on aina myös jatkuva.*

3. *Jos* $f'(2)=4$*, niin funktio f on jatkuva kohdassa* $x=2$.

12. *Jos funktio on derivoituva kohdassa* $x=1$*, niin se voi olla epäjatkuva kohdassa* $x=1$.

testataan, tietääkö opiskelija, että derivoituva funktio on aina myös jatkuva. Kuviossa 5.2 on esitetty väitteiden oikeiden vastausten suhteelliset jakaumat kaikkien vastanneiden osalta sekä erikseen tyttöjen ja poikien vastausten osalta.



Kuvio 5.2: "Derivoituva funktio on jatkuva" -tyyppisten väittämien oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

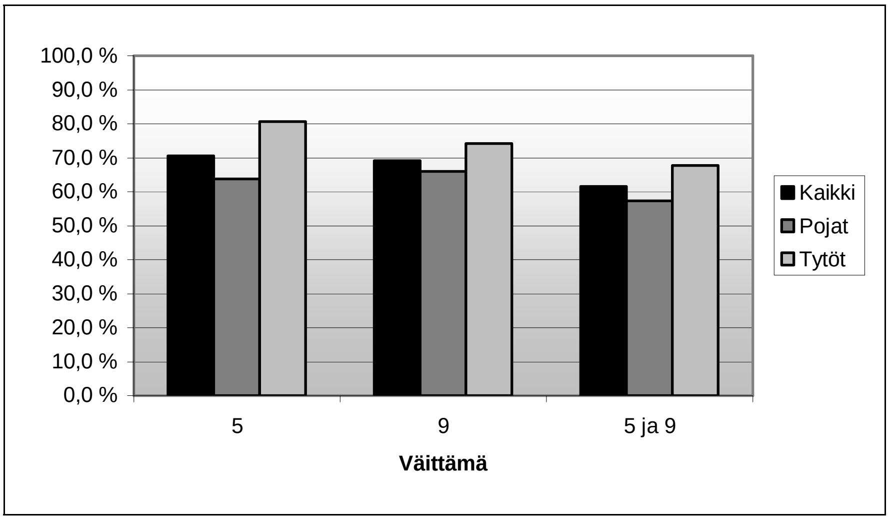
Noin 70 % vastanneista on tiennyt derivoituvan funktion myös jatkuvaksi. Väitteiden 1 ja 12 oikeiden vastausten määrät ovat lähestulkoon samat. Väitteeseen 1 vastanneista 80 % on vastannut oikein myös väitteeseen 12, ja 58 % kaikista vastaajista on vastannut molempiin väittämiin oikein. Väittämään 3, jossa derivaatta oli numeerisesti annettu, opiskelijat ovat vastanneet selvästi paremmin, oikeiden vastausten määrä on peräti noin 10 prosenttiyksikköä suurempi kuin väittämien 1 ja 12 kohdalla. Kaikkiin kolmeen väittämään oikein vastasi 50 % opiskelijoista, mikä on mielestäni kohtuullinen tulos.

Väitteissä

5. *Jos funktio ei ole jatkuva kohdassa* $x = 1$*, niin se ei ole derivoituva kohdassa* $x = 1$.

9. *Jos funktio ei ole jatkuva kohdassa* $x = 1$*, niin se voi silti olla derivoituva kohdassa* $x = 1$.

testataan samoin kuin väitteissä 1, 3 ja 12, tietääkö opiskelija jatkuvuuden olevan välttämätön ehto derivoituvuudelle. Nyt väitteiden asettelu on vaan toisinpäin ja tutkitaan epäjatkuvia funktioita. Oikeiden vastausten suhteelliset jakaumat on esitetty kuviossa 5.3.



Kuvio 5.3: Epäjatkuvaan funktioon liittyvien väittämien oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

Kuviosta huomataan, että edelleen noin 70 % opiskelijoista on vastannut jompaankumpaan väitteistä oikein ja 62 % on vastannut molempiin väittämiin oikein. Huomattavaa on, että väittämiin 1, 3 ja 12 olivat pojat vastanneet hieman tyttöjä paremmin mutta väittämissä 5 ja 9 tytöt pärjäsivät hieman poikia paremmin. Kuitenkaan merkittävää eroa sukupuolten välille ei synny. Kaikkiin viiteen jatkuvuutta derivoituvuuden välttämättömänä ehtona testanneeseen väittämään oikein vastasi vain 40 % opiskelijoista. Tuloksen perusteella näyttää siltä, että opiskelijoille tulisi painottaa selvemmin, että derivoituvuus on vahvempi ominaisuus kuin jatkuvuus. Samaan johtopäätökseen päädyttiin lukion oppikirjoja tarkasteltaessa. On kuitenkin positiivista, että 79 % opiskelijoista, jotka vastasivat oikein väittämiin 1, 3 ja 12, vastasivat oikein myös väittämiin 5 ja 9.

5.1.2 Jatkuvuus ei ole riittävä ehto derivoituvuudelle

Väittämissä

2. *Jatkuva funktio on aina myös derivoituva.*

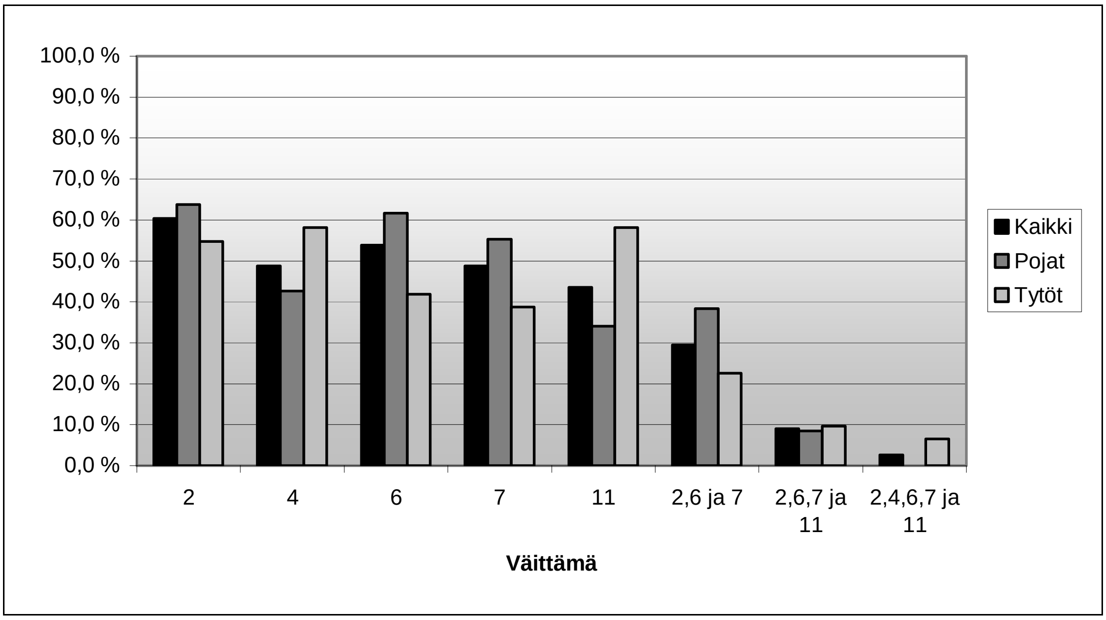
4. *Jos funktio on jatkuva suljetulla välillä [1, 5], niin se on derivoituva avoimella välillä]1, 5[.*

6. *Jos funktio on jatkuva kohdassa* $x=1$*, niin se välttämättä on myös derivoituva kohdassa* $x=1$.

7. *Jatkuva funktio voi olla epäderivoituva yhdessä kohdassa.*

11. *Funktio* f *ei ole derivoituva kohdassa* $x=5$. *Tällöin funktio* f *ei voi olla jatkuva kohdassa* $x=5$.

testataan, tietävätkö opiskelijat, että jatkuvuus ei ole riittävä ehto derivoituvuudelle. Kuviossa 5.4 on esitetty väittämien oikeiden vastausten jakaumat.



Kuvio 5.4:"Jatkuva funktio on derivoituva" -tyyppisten väittämien oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

Parhaiten opiskelijat ovat vastanneet väitteisiin 2 ja 6. Molempiin on vastannut oikein yli 40 % vastaajista. Yllättävän moni on vastannut väärin väitteeseen 4. Tämä saattaa johtua lukiolaisille tutusta lauseesta "Jos funktio on jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a,b[$, niin suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välille kuuluvista derivaatan nollakohdista”. Voi olla, että opiskelijat muistivat kuulleensa tällaisen lauseen ja yhdistivät tehtävän väittämän tähän lauseeseen. Väitteet 2, 6 ja 7 olivat varsin selviä muotoiluiltaan ja niihin kaikkiin oikein vastasi 30 % opiskelijoista. Väite 11 oli muotoilultaan hankalampi, ja siihen opiskelijat ovat osanneet vastata selkeästi huonommin kuin väitteisiin 2, 6 ja 7. Huomattavaa on, että vaikeaksi osoittautuneisiin väitteisiin tytöt ovat osanneet vastata poikia paremmin. Lisäksi tytöt ovat osanneet vastata niihin paremmin kuin muihin tämän ryhmän väitteisiin. Pojilla tilanne on juuri toisin päin. Kaiken kaikkiaan suuria eroja ei ole kuitenkaan havaittavissa sukupuolten välillä. Kaikkiin kysymyksiin oikein on osannut vastata vain 3 % opiskelijoista (2 tyttöä).

Tulos viittaa siihen, että opiskelijat tuntevat paremmin sen, että jatkuvuus on derivoituvuuden välttämätön ehto kuin sen, että jatkuvuus ei ole riittävä ehto derivoituvuudelle. Vain 48 % prosenttia opiskelijoista, jotka vastasivat oikein kaikkiin välttämätöntä ehtoa testaaviin väitteisiin (1,3,5,9 ja 12), vastasivat oikein väitteisiin 2, 6 ja 7.

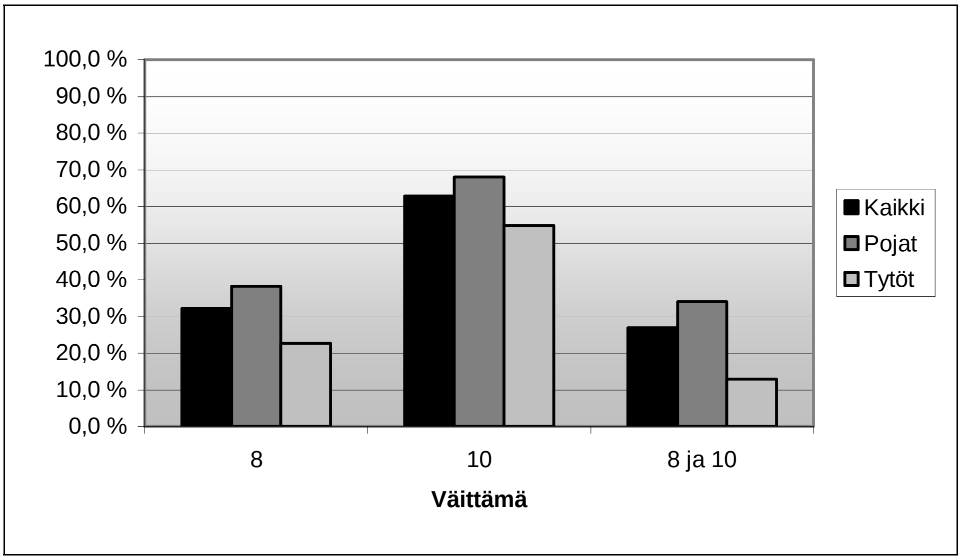
5.1.3 ”Jatkuvia ei missään derivoituvia funktioita”

Väittämissä

8. *On olemassa funktioita, jotka ovat jatkuvia mutta eivät ole missään derivoituvia.*

10. *Jos funktio on jatkuva, niin se on derivoituva lukuun ottamatta korkeintaan muutamia pisteitä.*

testataan, uskovatko opiskelijat, että jatkuva funktio voisi olla äärettömän monessa pisteessä epäderivoituva, jopa *ei-missään derivoituva*. Oikeiden vastausten suhteelliset jakaumat on esitetty kuviossa 5.5.



Kuvio 5.5: Jatkuvia funktioita, jotka ei ole missään derivoituva koskevien väittämien oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

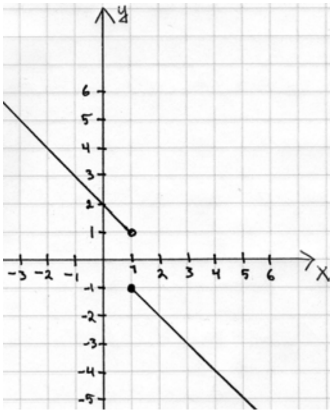
Kuviosta havaitaan selvästi, että opiskelijat eivät usko *jatkuvien ei-missään derivoituvien* funktioiden olemassaoloon. Vain 31 % opiskelijoista on vastannut väittämään 8 oikein. Väittämään 10 on kuitenkin vastannut oikein 63 % opiskelijoista. Muutamaa opiskelijaa lukuun ottamatta kaikki, jotka vastasivat oikein väitteeseen 8, vastasivat oikein myös väitteeseen 10. Vaikuttaa siltä, että molempiin kysymyksiin oikein vastanneet opiskelijat (27 %) tietävät, että jatkuvuus ei takaa derivoituvuutta missään pisteessä. Väitteen 10 suurempaa onnistumisprosenttia voi selittää se, että opiskelijat ovat saattaneet olla sitä mieltä, että jatkuva funktio on derivoituva, jolloin he ovat vastanneet oikein kyseiseen väitteeseen mutta väärin perustein. Tätä selitystä tukee myös se, että väitteeseen 10 oikein ja väitteeseen 8 väärin vastanneista 31 % on ollut väitteissä 2 ja 6 sitä mieltä, että jatkuva funktio on derivoituva.

5.2 Kuvaajien tulkinta

Toisessa tehtävässä annettiin kuvassa 5.1 esitetyt funktioiden kuvaajat ja lausekkeet ja kysyttiin, onko funktio jatkuva ja derivoituva.

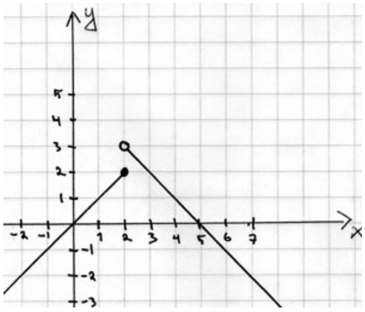
Funktio 1

$$g(x)=\begin{cases}-x+2, & x<1\\ -x, & x\geq 1\end{cases}$$



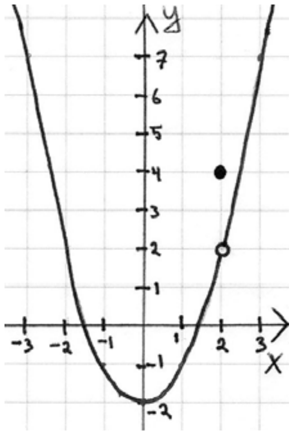
Funktio 2

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leq 2\\ -x+5, & x>2\end{cases}$$



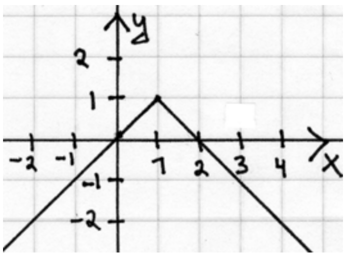
Funktio 3

$$h(x)=\begin{cases}x^2-2, & x\neq 2\\ 4, & x=2\end{cases}$$



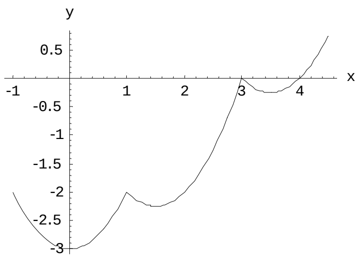
Funktio 4

$$k(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ 2-x, & x\geq 1\end{cases}$$



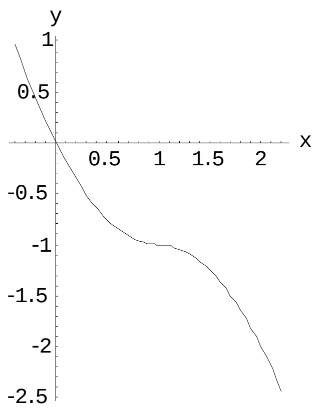
Funktio 5

$$m(x)=\begin{cases}x^2-3, & x<1\\ x^2-3x, & 1\leq x<3\\ x^2-7x+12, & x\geq 3\end{cases}$$



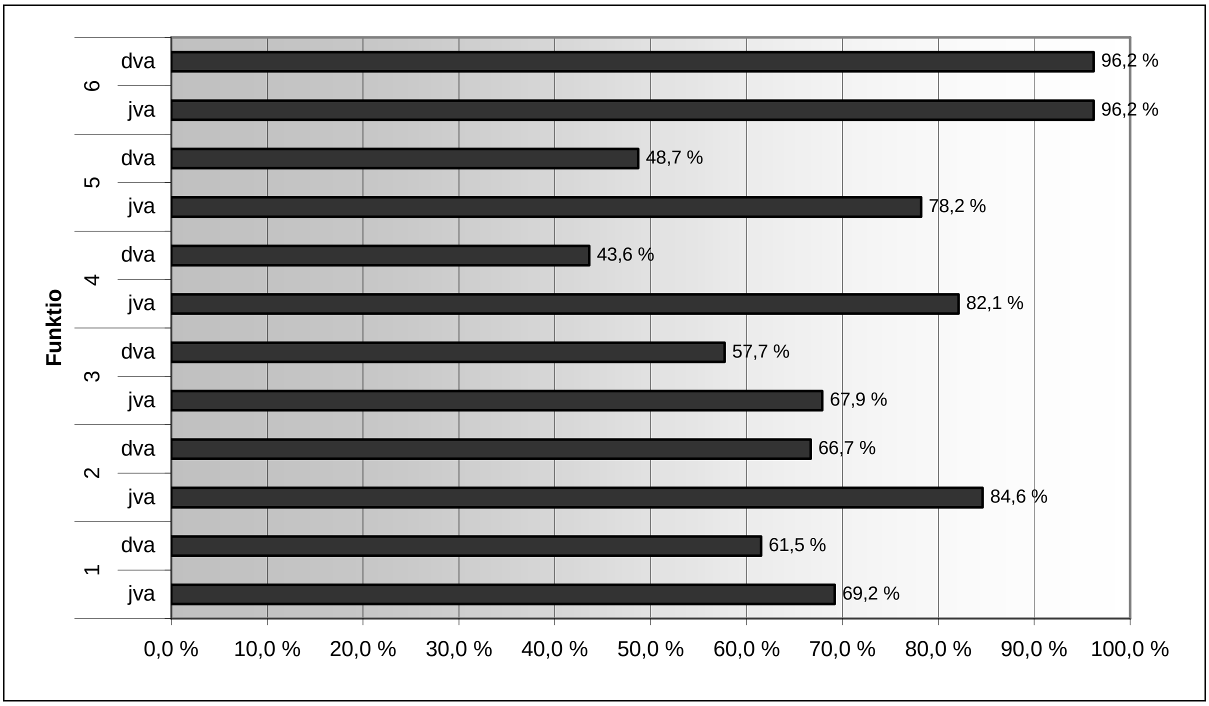
Funktio 6

$$n(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\leq 1\\ -x^2+2x-2, & x>1\end{cases}$$



Kuva 5.1: Tehtävän 2 funktioiden lausekkeet ja kuvaajat.

Funktiota 6 lukuun ottamatta jatkuvuuden tarkastelu on sujunut paremmin kuin derivoituvuuden tarkastelu. Kaikkien funktioiden oikeiden vastausten suhteellinen jakauma on esitetty kuviossa 5.6.



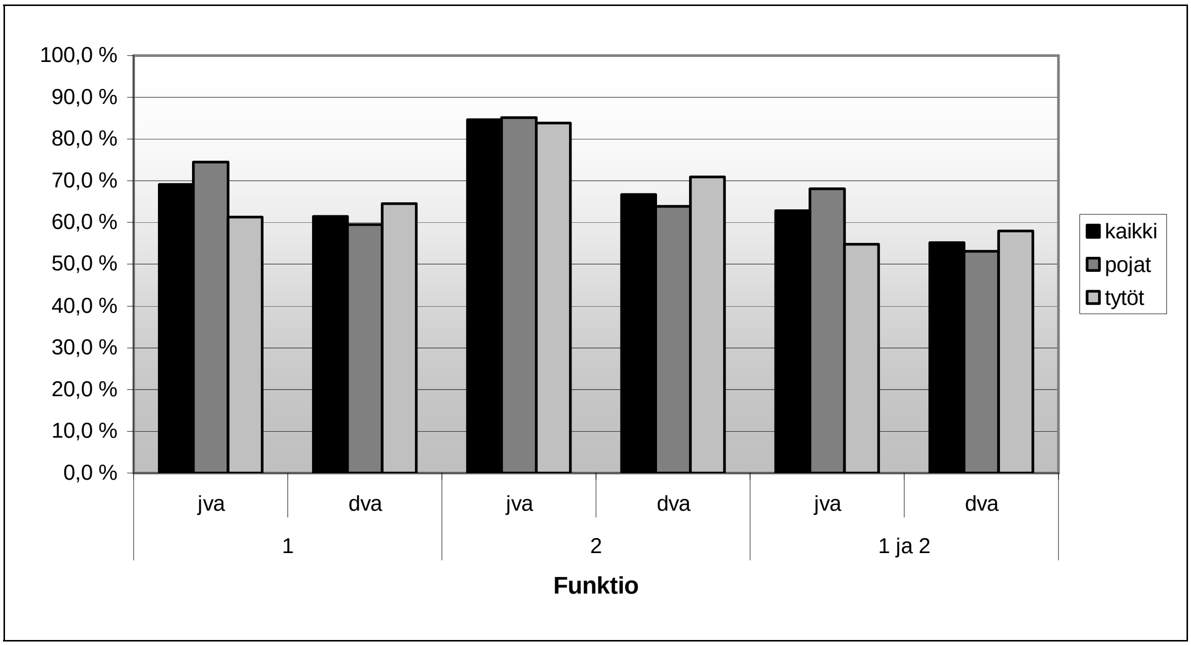
Kuvio 5.6: Tehtävän 2 oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

Kaikkiin kysymyksiin oikein on vastannut 17 % opiskelijoista, kaikkiin jatkuvuutta koskeviin kysymyksiin oikein on vastannut 37 % ja kaikkiin derivoituvuutta koskeviin 26 %. Jatkuvuuden tarkastelu on opiskelijoilta sujunut siis selvästi paremmin kuin derivoituvuuden. Kuvaajien tulkinta on sujunut paremmin kuin sanalliset väitteet, sillä niistä ei kukaan tiennyt kaikkia oikein. Seuraavaksi tarkastellaan tarkemmin epäjatkuvia, jatkuvia mutta epäderivoituvia ja derivoituvia funktioita erikseen.

5.2.1 Epäjatkuvat funktiot

Funktioissa 1 ja 2 epäjatkuvuuskohdassa on kuvaajassa hyppy. Epäjatkuvuuden opiskelijat tunnistivat selvästi paremmin funktiossa 2, joka on nouseva ennen epäjatkuvuuskohtaa ja laskeva sen jälkeen, kuin funktiossa 1, jolla on sama kulmakerroin ennen ja jälkeen epäjatkuvuuskohdan. Oikeiden vastausten suhteelliset jakaumat on esitetty kuviossa 5.7. Vaikuttaa siltä, että opiskelijoilla ei ole selvää käsitystä funktion jatkuvuudesta, koska 26 %

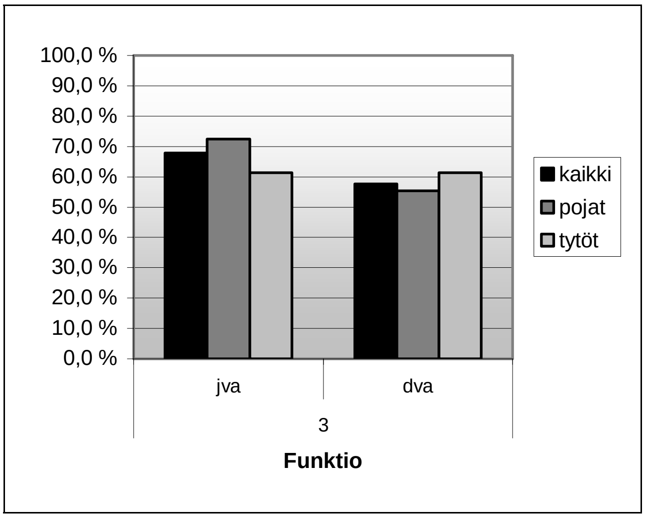
opiskelijoista, jotka ovat tienneet funktion 2 epäjatkuvaksi, on vastannut, että funktio 1 on jatkuva.



Kuvio 5.7: Funktioiden 1 ja 2 oikeiden vastausten suhteelliset jakaumat.

Ensimmäisen funktion epäjatkuvaksi tienneistä 24 % on vastannut, että se on kuitenkin derivoituva. Vastaavasti toisen funktion epäjatkuvaksi tienneistä 27 % on vastannut, että se on derivoituva. Näiden funktioiden tarkastelussa päädytään samaan tulokseen kuin sanallisten väittämien tarkastelussa luvussa 5.1.1, eli että opiskelijat näyttävät hallitsevan kohtuullisen hyvin sen, että jatkuvuus on välttämätön ehto derivoituvuudelle. Mutta koska näinkin moni vastaa, että epäjatkuva funktio on derivoituva, voisi asiaa painottaa enemmän. Mielestäni on huomionarvoista, että peräti 37 % opiskelijoista on pitänyt jatkuvana jompaakumpaa selkeästi epäjatkuvasta funktiosta 1 ja 2. Funktiot epäderivoituviksi on tiennyt vain 55 % opiskelijoista, mitä ei voi mielestäni pitää kovin hyvänä tuloksena. Pojat ovat hallinneet jatkuvuuden näissä funktioissa hieman tyttöjä paremmin ja tytöt vastaavasti derivoituvuuden hieman poikia paremmin.

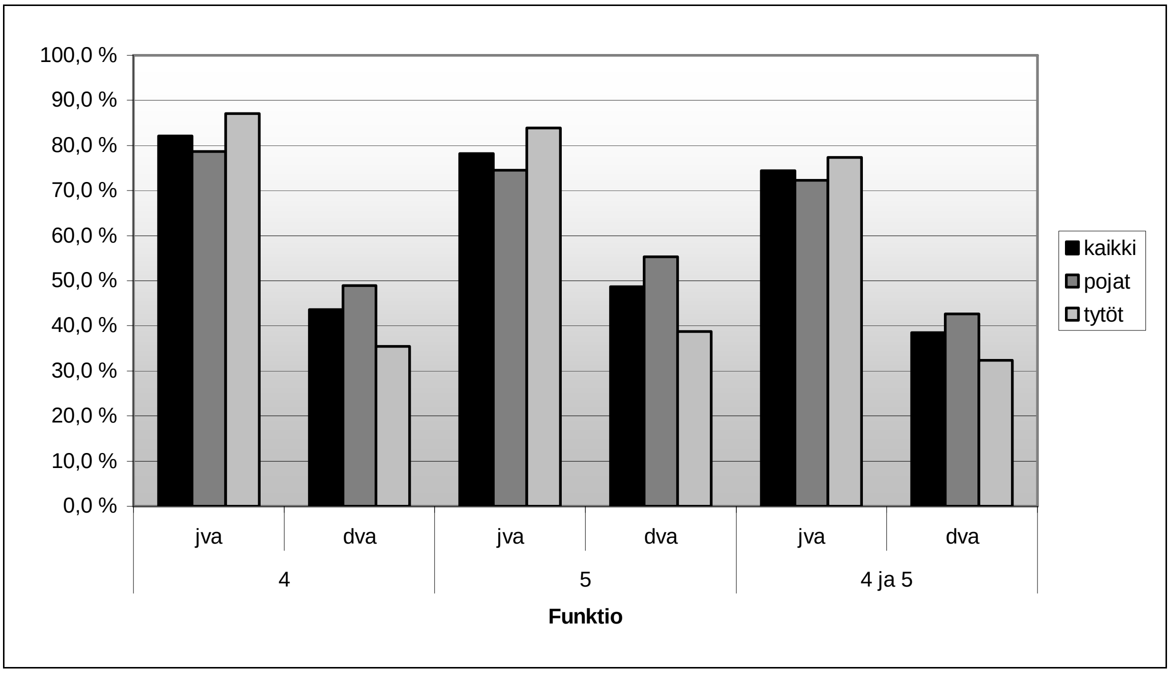
Kolmannen funktion on tiennyt epäjatkuvaksi ja epäderivoituvaksi lähes yhtä moni kuin ensimmäisen funktion. Oikeiden vastausten suhteellinen jakauma on esitetty kuviossa 5.8. Tämän funktion epäjatkuvuus ja epäderivoituvuus eivät ole mielestäni visuaalisesti yhtä selviä kuin funktioiden 1 ja 2 ”*hyppäys*-epäjatkuvuus”, joten tulosta voi pitää varsin hyvänä. Lisäksi lukiolaisilla saavutettua lähes 60 prosentin oikeiden vastausten määrää voidaan pitää hyvänä, koska Viholaisen [37] tutkimuksessa vain kolme neljästä matematiikan opettajaksi opiskelevasta vastasi, että vastaava funktio ei ole derivoituva. Tämän funktion epäjatkuvaksi tienneistä 28 % on väittänyt funktiota kuitenkin derivoituvaksi. Tulos on samaa suuruusluokkaa kuin funktioissa 1 ja 2.



Kuvio 5.8:Funktion 3 oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

5.2.2 Jatkuvat ja epäderivoituvat funktiot

Funktiot 4 ja 5 ovat molemmat jatkuvia funktioita, jotka ovat epäderivoituvia. Oikeiden vastausten suhteelliset jakaumat on esitetty kuviossa 5.9.

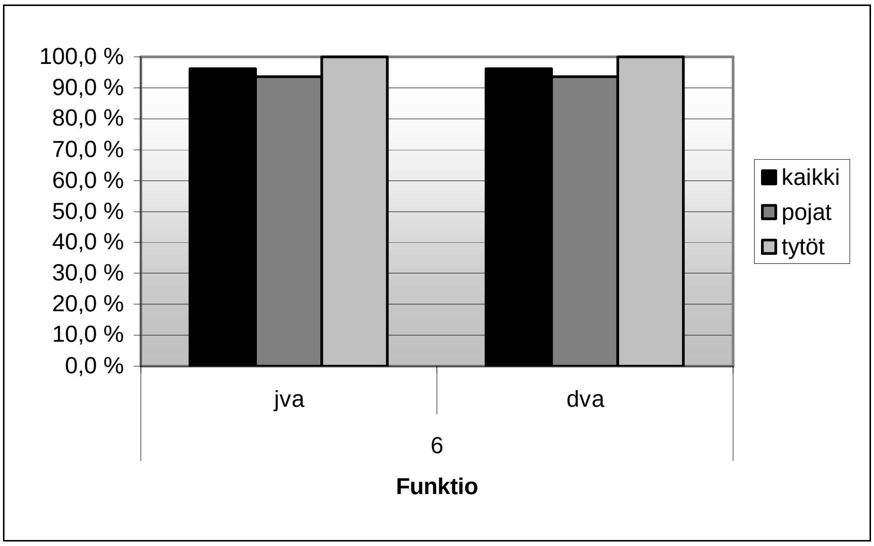


Kuvio 5.9: Funktioiden 4 ja 5 oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

Molemmat funktiot jatkuviksi on tiennyt 74 % opiskelijoista, mitä voidaan pitää hyvänä tuloksena. Derivoituvuuden osalta tulos on sen sijaan varsin kehno, sillä vain 39 % opiskelijoista on tiennyt funktiot epäderivoituviksi kärkipisteissä. 36 % opiskelijoista on vastannut, että molemmat funktiot ovat sekä jatkuvia että derivoituvia. Tämä tukee sanallisten väittämien yhteydessä tehtyä johtopäätöstä, että moni opiskelija näyttää pitävän jatkuvuutta riittävänä ehtona derivoituvuudelle. Tytöt ovat hallinneet jatkuvuuden näissä funktioissa hieman poikia paremmin ja pojat vastaavasti derivoituvuuden hieman tyttöjä paremmin.

5.2.3 Derivoituva funktio

Kuudennen funktion lähes kaikki opiskelijat ovat tienneet sekä jatkuvaksi että derivoituvaksi. Opiskelijat eivät ole siis hämääntyneet ”tavallisen” funktion kohdalla. Oikeiden vastausten suhteellinen jakauma on esitetty kuviossa 5.10.



Kuvio 5.10: Funktion 6 oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

5.3 Kuvaajien piirtäminen

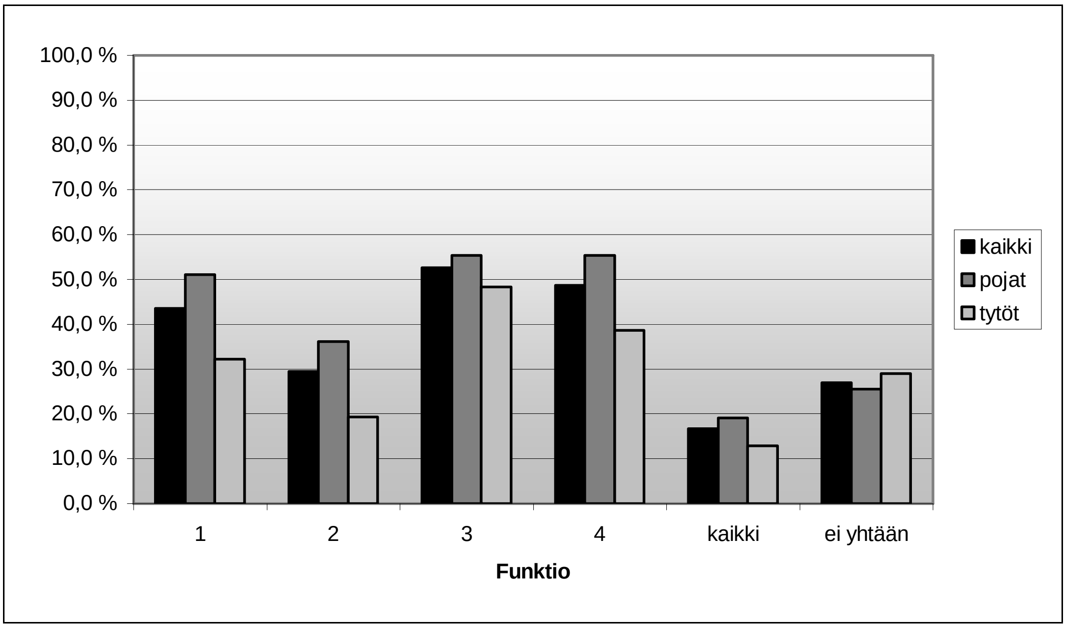
Kolmannessa tehtävässä opiskelijoiden piti piirtää seuraavien ehtojen mukaiset funktioiden kuvaajat:

13. Funktio on kaikkialla jatkuva mutta ei ole derivoituva kohdassa $x = 3$.

14. Funktiolla on 2 epäjatkuvuuskohtaa ja 3 epäderivoituvuuskohtaa.

15. Funktio on jatkuva muualla paitsi kohdassa $x = 2$.

16. Funktiolla on viisi epäderivoituvuuskohtaa.

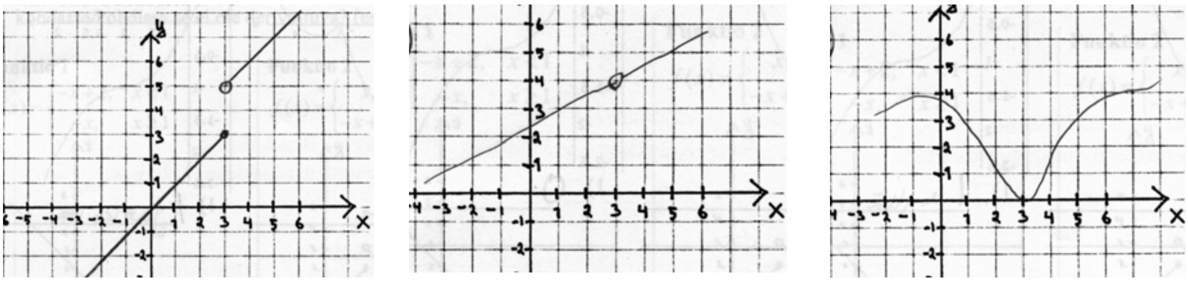


Kuvio 5.11: Kuvaajien piirtäminen. Oikeiden vastausten suhteellinen jakauma.

Opiskelijat menestyivät kuvaajien piirtämistehtävässä varsin heikosti. Oikeiden vastausten suhteelliset jakaumat on esitetty kuviossa 5.11. Vain yhden tehtävän osasi yli puolet opiskelijoista. Peräti 27 % opiskelijoista piirsi jokaisessa kohdassa vääränlaisen kuvaajan ja ainoastaan 17 % opiskelijoista osasi piirtää oikein kaikki neljä vaadittua kuvaajaa. Huomattavaa on, että pojat onnistuivat jokaisen kuvaajan piirtämisessä tyttöjä paremmin ja tytöistä myös suurempi osa kuin pojista piirsi jokaisen kuvaajan väärin. Seuraavaksi tutkitaan tarkemmin jokaista kuvaajan piirtotehtävää sekä tarkastellaan tyypillisimpiä vastauksia ja yleisimpiä virheitä.

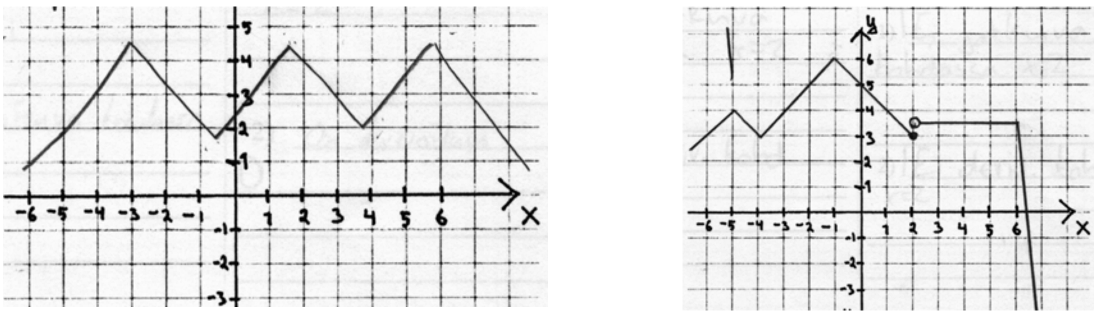
5.3.1 Epäderivoituva funktio

Ensimmäiseksi opiskelijoiden piti piirtää jatkuva funktio, joka ei ole derivoituva kohdassa $x = 3$. Vain 44 % opiskelijoista osasi piirtää tällaisen funktion. Vääristä vastauksista erottui kolme eri virhetyyppiä. Yleisimmät virheratkaisut on esitetty kuvassa 5.2. Yleisin virhe oli epäjatkuvan funktion piirtäminen, 22 % opiskelijoista eli 39 % väärin vastanneista teki näin. Huomattavaa on, että lähes puolet epäjatkuvan funktion piirtäneistä oli kuitenkin tiennyt tehtävän 2 ensimmäisen funktion (ks. kuva 5.1) epäjatkuvaksi. Toiseksi yleisin virhe oli piirtää funktio, jota ei ole määritelty kohdassa $x = 3$. Tällaisen funktion piirsi 14 % opiskelijoista eli 25 % vastanneista. Kolmas tyypillinen virhe oli piirtää kuvaaja, joka sivuaa tai leikkaa x-akselin kohdassa $x = 3$. Opiskelijoista 8 % eli väärin vastanneista 14 % piirsi tällaisen kuvaajan. Kokonaan kuvaajan jätti piirtämättä 9 % opiskelijoista, joista kukaan ei ollut myöskään tiennyt tehtävän 2 funktiota 4 (ks. kuva 5.1) jatkuvaksi ja epäderivoituvaksi.



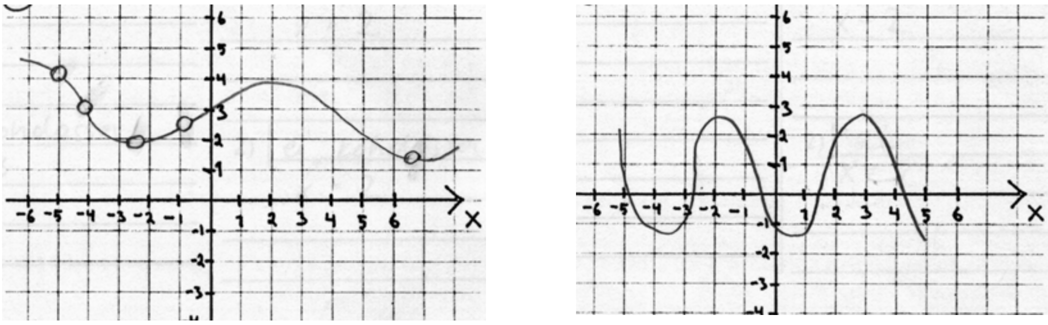
Kuva 5.2: Tyypillisimmät virheratkaisut funktioon 1.

Neljännessä kohdassa opiskelijoiden piti piirtää funktio, jolla on viisi epäderivoituvuuskohtaa. 49 % opiskelijoista osasi piirtää tällaisen funktion. Huomattavaa on, että 21 % ensimmäisen funktion oikein piirtäneistä piirsi neljännen funktion väärin ja 29 % neljännen funktion oikein piirtäneistä piirsi ensimmäisen funktion väärin. Vain 35 % opiskelijoista osasi piirtää molemmat funktiot, vaikka 44 % opiskelijoista piirsi oikein ensimmäisen funktion ja 49 % neljännen funktion. 36 % opiskelijoista eli 74 % oikein vastanneista piirsi funktion, joka on kaikkialla jatkuva. Lopuissa oikeissa vastauksissa oli sekä epäjatkuvuus- että epäderivoituvuuskohtia tai viisi epäjatkuvuuskohtaa. Tyypillisimmät oikeat vastaukset on esitetty kuvassa 5.3.



Kuva 5.3: Tyypillisimmät oikeat ratkaisut funktioon 4.

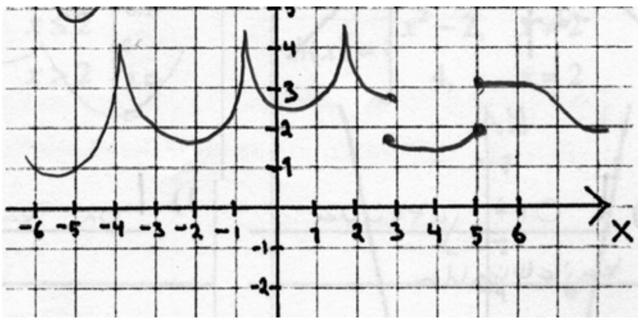
Neljännen funktion piirtämisessä esille nousi kaksi tyypillistä virhettä. Tyypillisimmät virheratkaisut on esitetty kuvassa 5.4. Opiskelijoista 9 % eli väärin vastanneista 18 % piirsi viidestä pisteestä ”punkteeratun” funktion eli funktion, jota ei ole määritelty viidessä pisteessä. Yhtä moni opiskelija piirsi funktion, jolla on viisi nollakohtaa. Kokonaan kuvaajan jätti piirtämättä 13 % opiskelijoista eli 25 % väärin vastanneista.



Kuva 5.4: Tyypillisimmät väärät ratkaisut funktioon 4.

5.3.2 Epäjatkuva ja epäderivoituva funktio

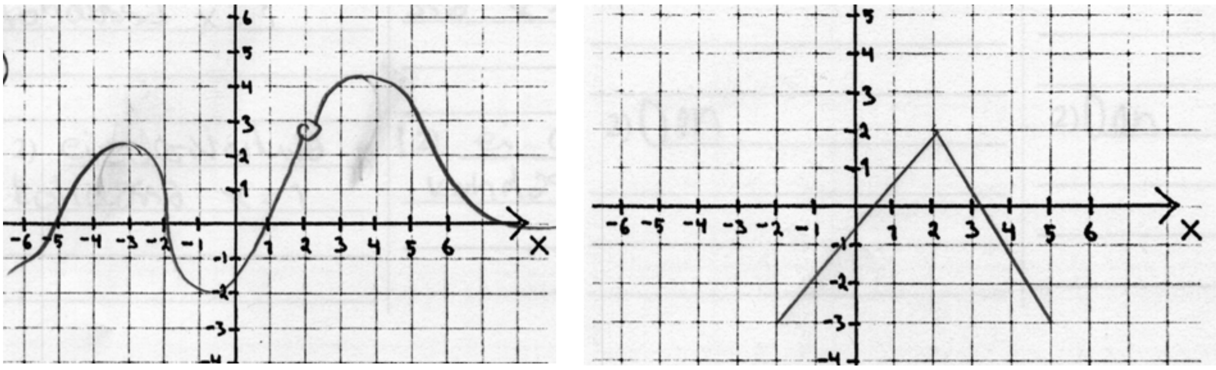
Toisessa kohdassa opiskelijoiden piti piirtää funktio, joka on epäjatkuva kahdessa kohdassa ja epäderivoituva kolmessa kohdassa. Vain 30 % opiskelijoista osasi piirtää oikeanlaisen funktion. Tyypillisin virhe oli, että opiskelija ei huomannut, että epäjatkuvuuskohta on myös epäderivoituvuuskohta, vaan piirsi funktion kuvaajan, joka on kahdessa kohdassa epäjatkuva ja lisäksi kolmessa kohdassa epäderivoituva. Tyypillinen virheratkaisu on esitetty kuvassa 5.5. Tällaisen funktion kuvaajan piirsi 14 % opiskelijoista eli 20 % väärin vastanneista. Kuvaajan jätti piirtämättä 12 % opiskelijoista eli 16 % väärin vastanneista. Muita tyypillisiä virheratkaisuja ei ollut havaittavissa.



Kuva 5.5: Tyypillisin virheratkaisu funktioon 2.

5.3.3 Epäjatkuva funktio

Kolmanneksi piti piirtää funktio, joka on jatkuva muualla paitsi kohdassa $x = 2$. Tällaisen funktion kuvaajan opiskelijat osasivat piirtää parhaiten, 53 % piirsi oikeanlaisen kuvaajan. Tyypillisin virheratkaisu oli piirtää kohdassa $x = 2$ ”punkteerattu” funktio, jollaisen piirsi 23 % opiskelijoista eli 49 % väärin vastanneista. Toiseksi tyypillisin virhe oli piirtää epäderivoituva funktio, jolla on piikki kohdassa $x = 2$. 6 % opiskelijoista eli 14 % väärin vastanneista piirsi tällaisen funktion. Tyypillisimmät virheratkaisut on esitetty kuvassa 5.6. Kokonaan kuvaajan piirtämättä jätti 8 % opiskelijoista eli 16 % väärin vastanneista.



Kuva 5.6: Tyypillisimmät virheratkaisut funktioon 3.

5.4 Johtopäätökset

Kyselyn perusteella vaikuttaa siltä, että lukion pitkän matematiikan opiskelijat hallitsevat varsin heikosti jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen yhteyden. Opiskelijat hallitsevat hieman paremmin lukion oppikirjoissakin lauseena esitetyn asian, että jatkuvuus on välttämätön ehto derivoituvuudelle, kuin sen, että jatkuvuus ei ole riittävä ehto derivoituvuudelle. Tätä puolta ei kirjoissakaan painoteta yhtä paljon kuin jatkuvuutta välttämättömänä ehtona. Näiden analyysin keskeisten käsitteiden välisen yhteyden opettamiseen pitäisi siis kyselyn perusteella kiinnittää tarkempaa huomiota. Lisäksi jatkuvien ei missään derivoituvien funktioiden olemassaolon vahva epäily antaa uskoa sille, että ainakin niiden olemassaolosta olisi hyvä mainita lukiossa.

6 JATKUVISTA EI-MISSÄÄN DERIVOITUVISTA FUNKTIOISTA

6.1 Johdanto

Lukiossa suoritetun kyselyn mukaan monet lukion pitkän matematiikan opiskelijat pitävät outona ajatusta, että on olemassa jatkuvia ei-missään derivoituvia funktioita, lyhyesti CND -funktioita (Continuous Nowhere Differentiable). Monella opiskelijalla on kyselyn perusteella käsitys, että yleensä jatkuvat funktiot ovat derivoituvia lukuun ottamatta muutamia pisteitä. Näinhän tilanne yleensä onkin kaikissa funktioissa, jotka tulevat vastaan lukiossa tai analyysin peruskursseilla yliopistossa. Tyypillisenä esimerkkinä jatkuvasta epäderivoituvasta funktiosta esitetään $f(x)=|x|$, joka ei ole derivoituva kohdassa $x=0$. Monet opiskelijat ymmärtävät kyllä, että jatkuvuus ei takaa derivoituvuutta, mutta heille saattaa jäädä käsitys, että jatkuvalla funktiolla voi olla ”piikkejä” eli epäderivoituvuuskohtia vain äärellinen määrä tietyllä välillä eli että jatkuva funktio voi olla epäderivoituva vain yksittäisissä pisteissä.

Matemaatikot 1700-luvun lopulla ja 1800-luvun alkupuolella laskivat täsmällisesti määritettyjen funktioiden derivaattoja, mikä onnistui yleensä hyvin muutamia pisteitä lukuun ottamatta. Tämä saikin matemaatikot uskomaan, että jatkuvat funktiot olisivat derivoituvia lukuun ottamatta yksittäisiä pisteitä. Ranskalainen matemaatikko ja fyysikko André Marie Ampère (1775 – 1836) yritti jopa todistaa tämän teoreettisesti vuonna 1806. Saksalainen matemaatikko Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) esitti heinäkuussa 1872 luennollaan Berliinin tiedeakatemiassa esimerkin jatkuvasta funktiosta, jolla ei ole derivaattaa missään pisteessä (ks. luku 6.2). Tämä muutti lopullisesti käsityksen jatkuvien funktioiden derivoituvuudesta. Funktio julkaistiin vuonna 1875 Paul du Bois-Reymondin (1831 – 1889) toimesta *Journal für die reine und angewandte Mathematik* -lehdessä. Weierstrassin funktiosta tuli ensimmäinen julkaistu CND-funktio, minkä takia sitä onkin usein pidetty ensimmäisenä esimerkkinä CND-funktiosta. Ks. [35, s.4-5, s.20–22].

Weierstrassin funktio ei kuitenkaan ollut ensimmäinen tällainen funktio vaan muita esimerkkejä oli keksitty jo aikaisemmin. Ilmeisesti ensimmäiset CND-funkiot esittivät tšekkiläinen matemaatikko Bernhard Bolzano (1781 – 1848) noin vuonna 1830 ja sveitsiläinen matemaatikko Charles Cellérier (1818 – 1889) vuonna 1860 (ks. luvut 6.4.1 ja 6.4.2). Heidän esittämiensä funktioiden merkitys jäi kuitenkin pieneksi, koska ne julkaistiin vasta Weierstrassin funktion julkaisun jälkeen, joten ne jäivät heidän aikansa matemaatikoilta huomaamatta. Systemaattisemmin CND-funktioita alettiin tutkia Georg Friedrich Bernhard Riemannin (1826 – 1866) myötä. Ks. [36, s.2-3].

Nykyisin CND-funktioiden olemassaolo on keskeistä uudemmille tutkimuksen ja sovellusten aloille, kuten fraktaaleille ja kaaosteorialle. CND-funktiot ovat hyvä esimerkki siitä, että liiallinen luottamus intuitioon voi olla pettävää matematiikassa. Tässä luvussa esitellään ja todistetaan kaksi esimerkkiä CND-funktioista. Historiallisista syistä aloitetaan Weierstrassin funktiosta ja toisena esimerkkinä käsitellään yksinkertaisempi McCarthyn funktion. Lisäksi esittellään muutamia muita CND-funktioita ilman todistuksia. Lopuksi tarkastellaan myös lyhyesti CND-funktioiden lukumäärää verrattuna jatkuviin jossakin derivoituviin funktioihin.

6.2 Weierstrassin funktio (1872, julkaistu 1875)

Weierstrassin funktio $W:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ määritellään seuraavasti:

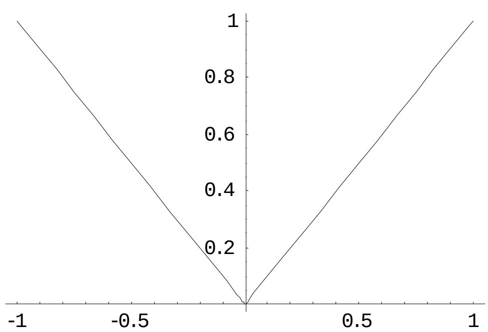
$$W(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x),$$

missä $0<b<1$ ja a on pariton positiivinen kokonaisluku siten, että $ab>1+\frac{3\pi}{2}$.

Tällöin W on jatkuva ja rajoitettu $\mathbf{R}$:ssä mutta ei derivoituva missään pisteessä.

6.2.1 Weierstrassin funktion geometrinen tarkastelu

On helppo määritellä jatkuva funktio, jolla on epäderivoituvuuskohta. Esimerkiksi funktio $f(x)=|x|$ on jatkuva kaikkialla mutta ei ole derivoituva kohdassa $x=0$. Tällöin funktion kuvaajassa on ”piikki” kyseessä olevassa kohdassa (kuva 6.1).

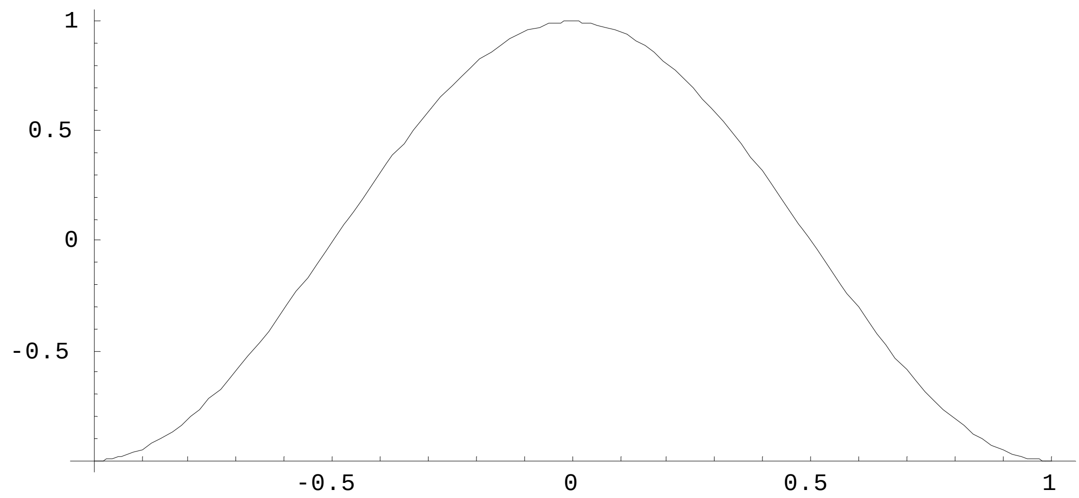


Kuva 6.1: Funktion $f(x)=|x|$ kuvaaja välillä [-1, 1].

Tarkastellaan Weierstrassin funktiota arvoilla $a = 7$ ja $b = 0,9$, eli funktiota

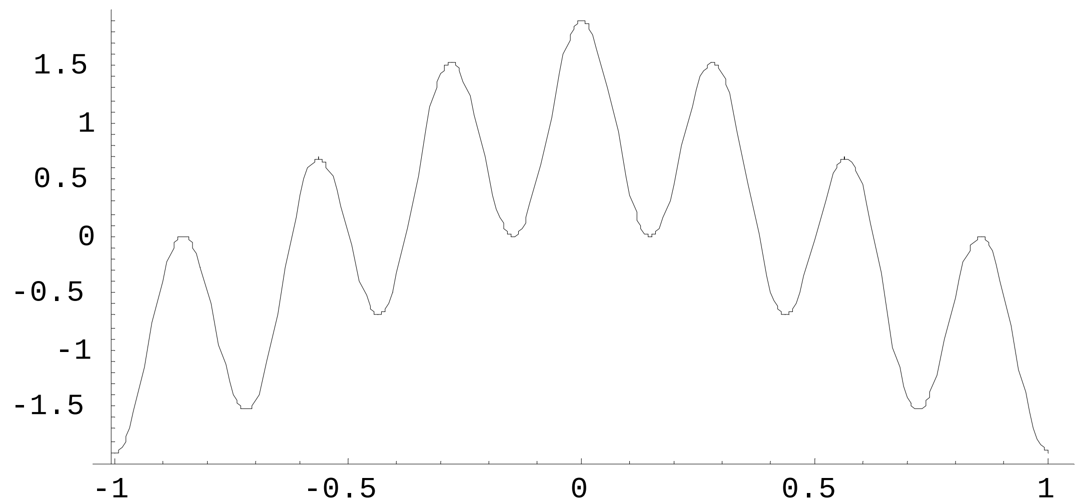
$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 0,9^k \cos(7^k \pi x).$$

Tutkitaan aluksi, mitä funktion osasummille $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 0,9^k \cos(7^k \pi x)$ tapahtuu välillä $[-1,1]$, kun *n*:n arvo kasvaa. Piirretään aluksi osasumma S_1 (kuva 6.2).



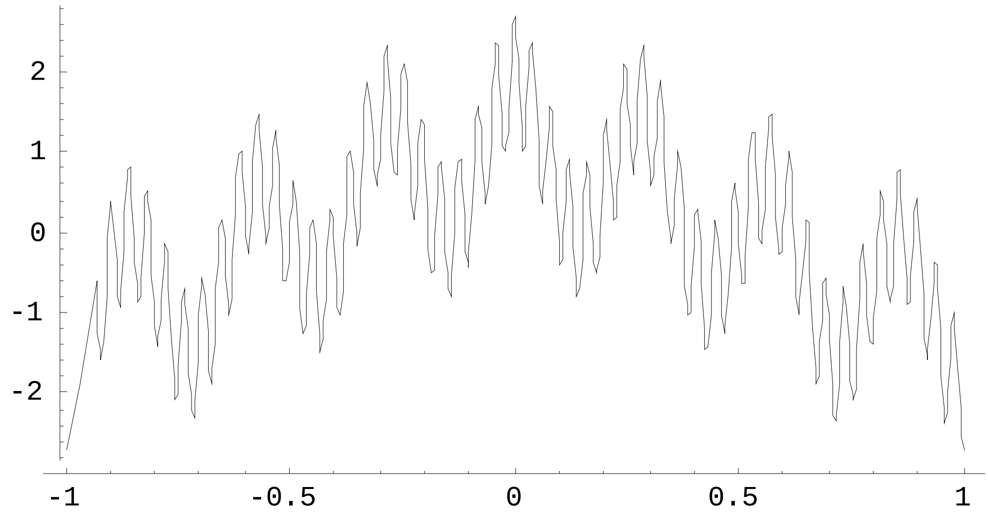
Kuva 6.2: Weierstrassin funktion osasumma S_1 välillä [-1, 1].

Piirretään seuraavaksi osasumma S_2 (kuva 6.3). Jo näinkin pienellä *n*:n arvolla nähdään selvästi, miten Weierstrassin funktion "sahalaitaisuus" tihenee verrattuna osasummaan S_1 ja miten huiput muuttuvat terävämmiksi. Huomataan, että yhden huipun tilalle muodostuu seitsemän huippua (huomaa, että $a = 7$).



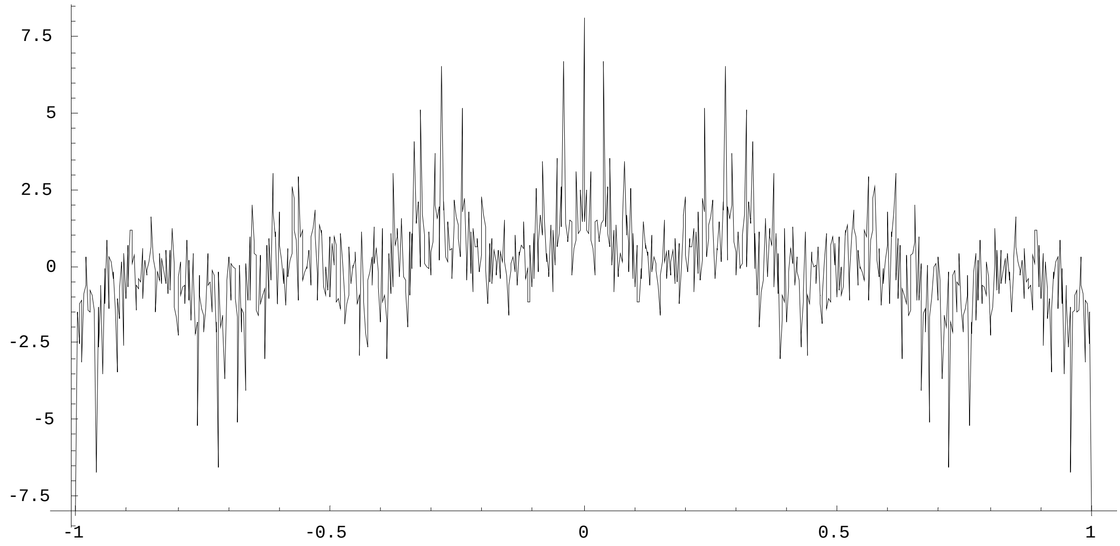
Kuva 6.3: Weierstrassin funktion osasumma S_2 välillä [-1, 1].

Tarkasteltaessa tilannetta n:n arvolla 3 (kuva 6.4) havaitaan, miten huiput muuttuvat yhä terävämmiksi ja niiden tiheys kasvaa entisestään. Jälleen yhden huipun tilalle muodostuu seitsemän huippua.



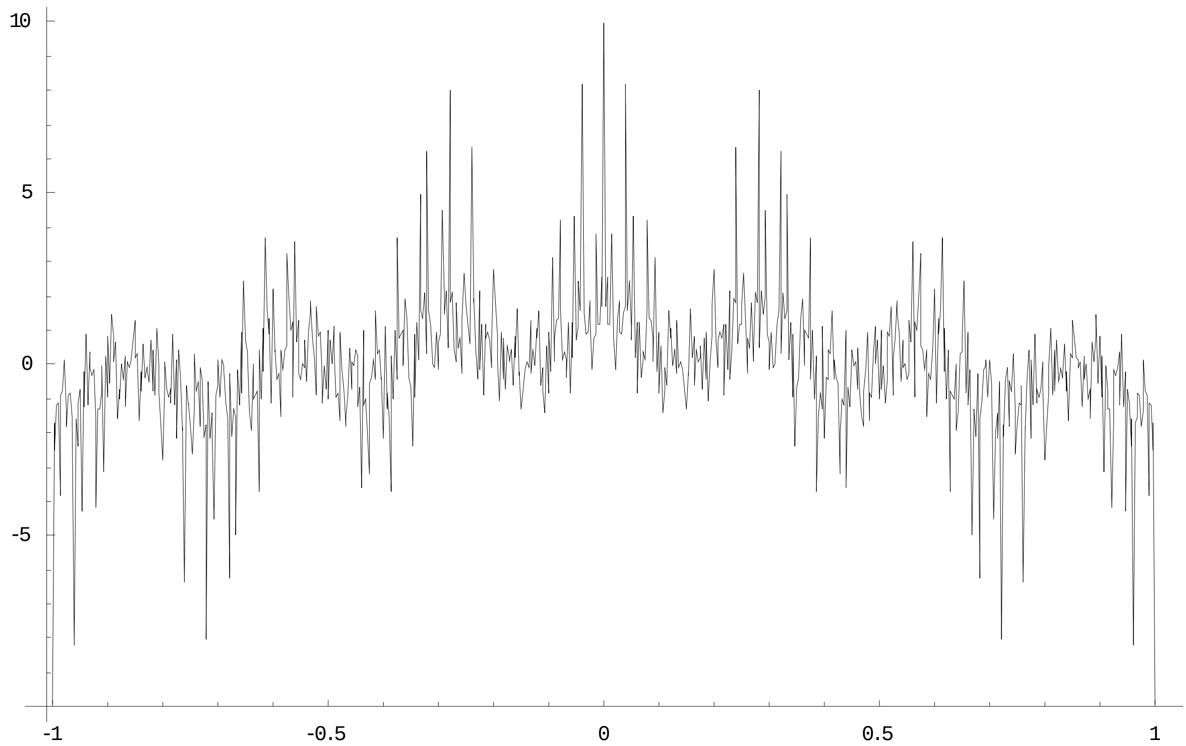
Kuva 6.4: Weierstrassin funktion osasumma S_3 välillä [-1, 1].

Kuvien perusteella näyttää siltä, että mitä suurempia arvoja n saa eli mitä pidemmälle summausta lasketaan, sitä terävämmiksi huiput käyvät ja sitä tiheämmässä niitä on. Näin käy, koska jokaisen huipun tilalle muodostuu seitsemän uutta huippua aina n:n arvon kasvaessa yhdellä. Tällöin voidaan kuvitella, että kun n kasvaa rajatta, huipuista tulee äärettömän teräviä ja niitä on äärettömän tiheässä. Funktioon tulee siis äärettömän monta epäderivoituvuuskohtaa mille tahansa välille. Piirrettäessä esimerkiksi osasumma S_{16} (kuva 6.5) näkyy jo melko selvästi, kuinka ”sahalaitaisuus” käy yhä tiheämmäksi, huiput käyvät yhä jyrkemmiksi ja funktioon alkaa muodostua selvästi ”piikkejä” eli epäderivoituvuuskohtia.



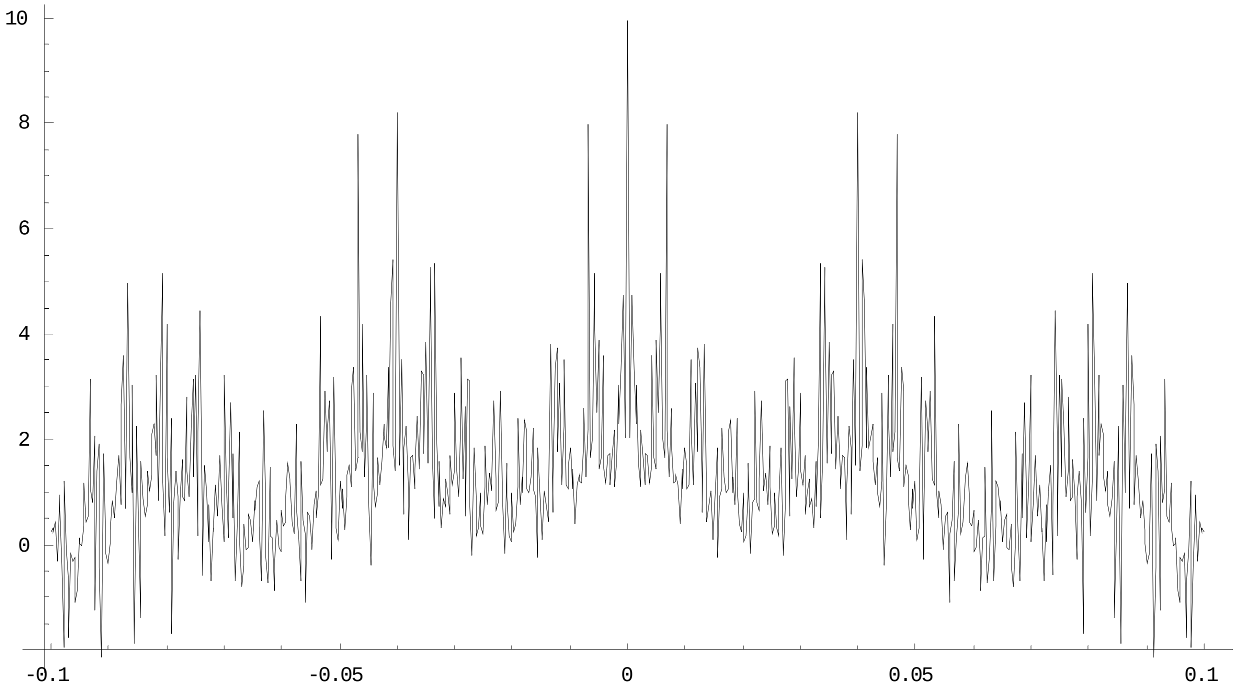
Kuva 6.5: Weierstrassin funktion osasumma S_{16} välillä [-1, 1].

Tarkastellaan seuraavaksi osasummaa $S_{51} = \sum_{k=0}^{50} 0,9^k \cos(7^k \pi x)$ eri väleillä. Tarkoituksena on tutkia, tasoittuvatko funktion piikit, mikäli tarkennamme kuvaa pienemmälle alueelle. Piirretään ensimmäiseksi osasumman S_{51} kuvaaja välillä [-1,1]. Kuva 6.6 osoittaa hyvin, miten funktiosta tulee ”sahalaitainen”.



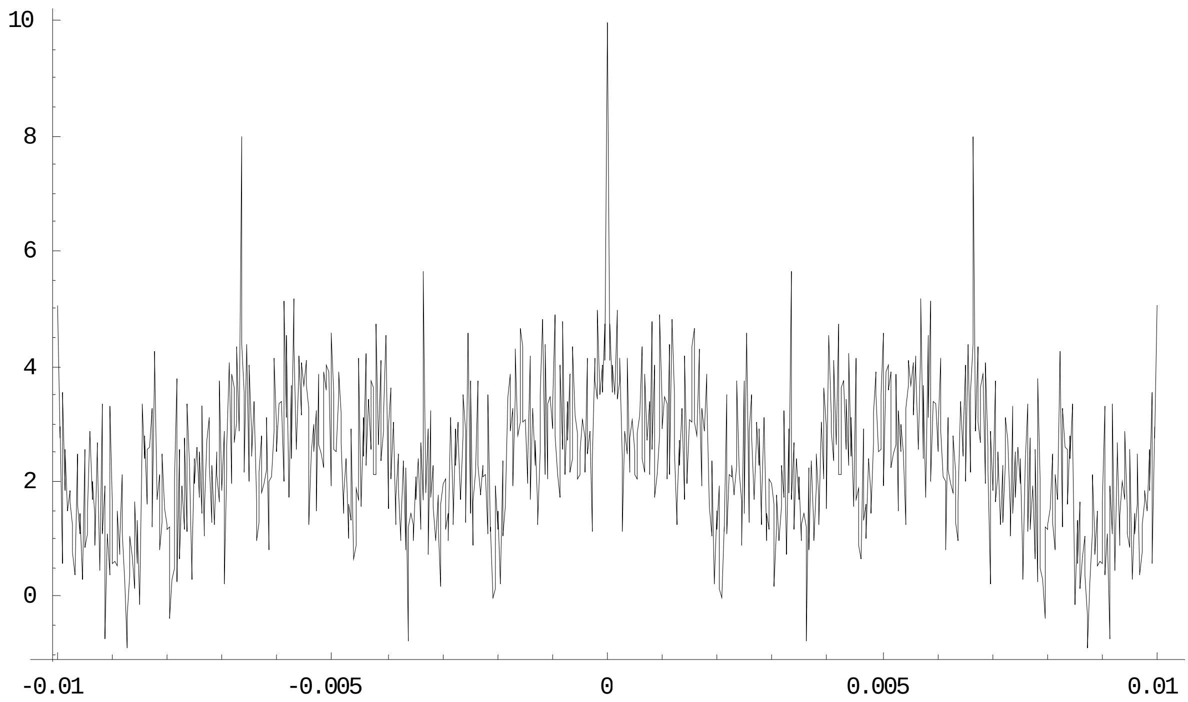
Kuva 6.6: Weierstrassin funktion osasumma S_{51} välillä [-1,1].

Tarkennetaan seuraavaksi kuvaa välille [-0,1, 0,1] (kuva 6.7). Funktion rakenne pysyy yhtä sahalaitaisena, eivätkä piikit näytä tasoittuvan lainkaan.



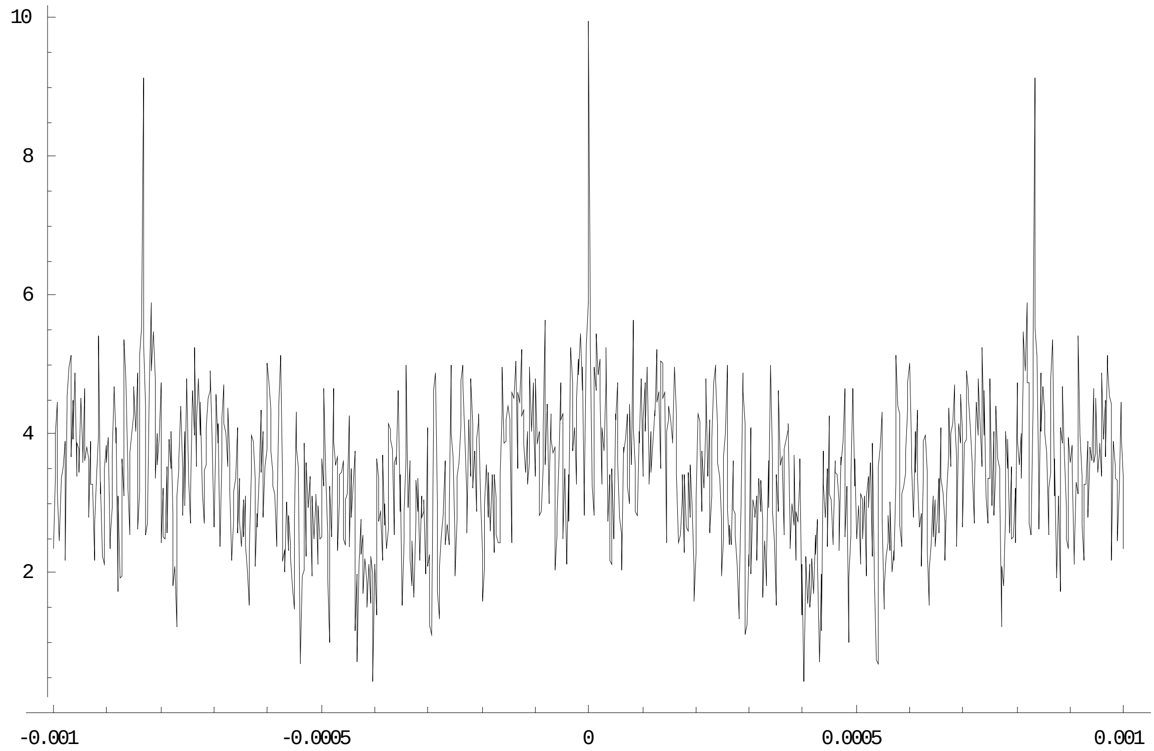
Kuva 6.7: Weierstrassin funktion osasumma S_{51} välillä [-0,1, 0,1].

Tarkennetaan edelleen kuvaa, ja piirretään osasumman kuvaaja välillä $[-0,01,\ 0,01]$ (kuva 6.8). Funktion rakenteessa ei ole vieläkään havaittavissa tasoittumista, vaan rakenne pysyy yhtä ”sahalaitaisena”.



Kuva 6.8: Weierstrassin funktion osasumma S_{51} välillä [-0,01, 0,01].

Piirretään vieläkin tarkempi kuvaaja tarkentamalla välille $[-0{,}001,\ 0{,}001]$ (kuva 6.9). Edelleen funktion rakenne säilyy samanlaisena.



Kuva 6.9: Weierstrassin funktion osasumma S_{51} välillä [-0,001, 0,001].

Vaikka on tarkasteltu vain funktion W osasummaa S_{51}, funktion rakenne ei näytä tasoittuvan, vaikka kuvaajasta tutkittaisiin yhä pienempää osaa. Edellisistä tarkasteluista voidaan havaita, että Weierstrassin funktiolle tulee äärettömän monta piikkiä eli epäderivoituvuuskohtaa mille tahansa välille, kun n kasvaa rajatta. Näin ollen saadaan funktio, joka ei ole derivoituva missään pisteessä mutta on kuitenkin jatkuvien funktioiden tasaisena raja-arvona jatkuva. Seuraavaksi osoitetaan tämä analyyttisesti.

6.2.2 Weierstrassin funktion analyyttinen tarkastelu

Lemma. (Differentiaalilaskennan väliarvolause) Jos $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ on jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a,b[$, niin on olemassa $\xi\in]a,b[$ siten, että

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

TODISTUS:

Katso esimerkiksi Apostol [1, s.182].

Lause. Olkoon $0 < b < 1$ ja a pariton positiivinen kokonaisluku siten, että $ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$.

Weierstrassin funktio $W : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x)$$

on jatkuva ja rajoitettu $\mathbf{R}$:ssä mutta ei ole derivoituva missään pisteessä.

TODISTUS:

Jatkossa on

päättelyä täydentäviä osuuksia kirjoitettu kursiivilla ja sisennettynä.

1) Osoitetaan ensin, että funktio *W* on rajoitettu.

Tämä nähdään suoralla arviolla:

$$\begin{aligned}
|W(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} b^k \left| \cos(a^k \pi x) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} b^k \\
&= \frac{1}{1-b} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} b^k$ *suppenee geometrisena sarjana, koska 0 < b < 1.*

Edelleen b:n valinnasta seuraa, että $1 - b \neq 0$.

Näin ollen W on rajoitettu.

2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktio *W* on jatkuva.

Olkoon $W_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b^k \cos(a^k \pi x)$ ja $x \in \mathbf{R}$ mielivaltainen. Tällöin saamme

$$\begin{aligned}
|W(x) - W_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x) - \sum_{k=0}^{n-1} b^k \cos(a^k \pi x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=n}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x) \right| \\
&\le \sum_{k=n}^{\infty} b^k \left| \cos(a^k \pi x) \right| \\
&\le \sum_{k=n}^{\infty} b^k = \frac{b^n}{1-b} \to 0,
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$.

Sarjan jäännöstermi R_n siis lähenee nollaa tasaisesti kaikille $x \in \mathbf{R}$.

Koska $|W(x) - W_n(x)| \to 0$ tasaisesti, kun $n \to \infty$, niin on olemassa $\varepsilon' > 0$ siten, että kaikille $x \in \mathbf{R}$ on

$$|W(x) - W_n(x)| < \varepsilon'$$

kun $n > n_{\varepsilon'}$.

Olkoon U x:n ympäristö siten, että $|W_n(y) - W_n(x)| < \varepsilon'$ kaikille $y \in U$.

Tällainen epätyhjä U on olemassa, koska $W_n(x)$ on jatkuva äärellisen monen trigonometrisen funktion summana.

Tällöin saamme

$$\begin{aligned}
|W(y) - W(x)| &= |W(y) - W_n(y) + W_n(y) - W_n(x) + W_n(x) - W(x)| \\
&\le |W(y) - W_n(y)| + |W_n(y) - W_n(x)| + |W_n(x) - W(x)| \\
&\le \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' = 3\varepsilon' \qquad \forall y \in U.
\end{aligned}$$

Valitsemalla $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{3}$ saamme

$$|W(y) - W(x)| < \varepsilon$$

kaikille $y \in U$, eli *W* on jatkuva *x*:ssä. Koska $x \in \mathbf{R}$ oli mielivaltainen, on *W* jatkuva $\mathbf{R}$:ssä.

3) Vielä pitää osoittaa, että funktio *W* ei ole derivoituva missään pisteessä.

Olkoon $x \in \mathbf{R}$ mielivaltainen mutta kiinnitetty, $n \in \mathbf{N}$ ja $h > 0$. Tutkitaan erotusosamäärää ja sen *n*:ttä osasummaa S_n ja *n*:ttä jäännöstermiä R_n:

$$\frac{W(x+h)-W(x)}{h} = S_n + R_n,$$

missä $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} b^k \frac{\cos(a^k\pi(x+h)) - \cos(a^k\pi x)}{h}$ ja $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} b^k \frac{\cos(a^k\pi(x+h)) - \cos(a^k\pi x)}{h}$.

Tavoitteena on löytää jono $\{h_n\}$ *siten, että* $\frac{W(x+h_n)-W(x)}{h_n} \to \infty$ *ja* $h_n \to 0$, *kun* $n \to \infty$, *eli jonoderivaatta (ks. luku 7.3, määritelmä 1)* $DW(x) = \infty$.

3a) Tutkitaan ensin *n*:ttä osasummaa S_n.

Pyritään arvioimaan osasummaa siten, että saadaan arvio, joka riippuu vain vakioista *a* ja *b* sekä muuttujasta *n*. Arvioidaan termiä $\frac{\cos(a^k\pi(x+h)) - \cos(a^k\pi x)}{h}$ differentiaalilaskennan väliarvolauseen avulla (lemma), jolloin saamme

$$\frac{\cos(a^k\pi(x+h)) - \cos(a^k\pi x)}{h} = -a^k\pi \sin(a^k\pi(x+\tilde{h})), \tag{1}$$

missä $0 < \tilde{h} < h$.

Differentiaalilaskennan väliarvolausetta käytetään funktioon

$g :]x, x+h[\to \mathbf{R},\ g(\tilde{x}) = \cos(a^k\pi\tilde{x})$.

Koska

$$\left|-a^k\pi \sin(a^k\pi(x+\tilde{h}))\right| = \left|-a^k\pi\right|\left|\sin(a^k\pi(x+\tilde{h}))\right| \le a^k\pi,$$

niin saadaan

$$\begin{aligned}
|S_n| &= \sum_{k=0}^{n-1} |b^k| \left| \frac{\cos(a^k \pi (x+h)) - \cos(a^k \pi x)}{h} \right| \\
&\le \sum_{k=0}^{n-1} |b^k| \cdot a^k \pi \\
&= \pi \sum_{k=0}^{n-1} (ab)^k \\
&= \pi \frac{a^n b^n - 1}{ab-1} < \frac{\pi a^n b^n}{ab-1}.
\end{aligned}$$

On siis saatu arvio *n*:nnelle osasummalle S_n **:**

$$|S_n| < \frac{\pi a^n b^n}{ab-1}. \qquad (2)$$

Osasumman itseisarvoa $|S_n|$ *on arvioitu ylöspäin, joten seuraavaksi pyrimme arvioimaan jäännöstermiä* $|R_n|$ *alaspäin. Tavoitteena on päästä muotoon* $|S_n + R_n| \ge |R_n| - |S_n| > t_n$*, missä* t_n *on n:stä riippuva vakio, jolle* $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$.

3b) Arvioidaan seuraavaksi *n*:ttä jäännöstermiä R_n.

Hajotetaan termi $a^n x$ kokonaisosaan ja desimaaliosaan, $a^n x = \alpha_n + \beta_n$, missä α_n on kokonaisluku ja $-\frac{1}{2} \le \beta_n < \frac{1}{2}$.

Arvioidaan ensin termiä $\cos(a^k \pi (x+h))$.

Pyritään saamaan π *:lle kokonaislukukerroin, jolloin* $\cos(p \cdot \pi)$ *on –1, kun p on pariton ja 1, kun p on parillinen.*

Olkoon $k \ge n$. Tällöin

$$\begin{aligned}
a^k \pi (x+h) &= a^{k-n} a^n \pi (x+h) \\
&= a^{k-n} \pi (a^n x + a^n h) \\
&= a^{k-n} \pi (\alpha_n + \beta_n + a^n h).
\end{aligned}$$

Tarkastellaan jonoa $\{h_n\}$, missä $h_n = \dfrac{1-\beta_n}{a^n}$. Kaikilla $n \in \mathbf{N}$ on $h_n > 0$, koska $\beta_n \in [-½, ½[$ ja $a > 0$.

Tällöin sijoittamalla $h = h_n$ edelliseen lausekkeeseen saamme $a^k \pi(x + h_n) = a^{k-n}\pi(\alpha_n + 1)$, jossa $\alpha_n + 1$ on kokonaisluku.

Edelleen koska *a* on pariton kokonaisluku, niin $a^{k-n}(\alpha_n + 1)$ on pariton, jos $\alpha_n + 1$ on pariton ja parillinen, jos $\alpha_n + 1$ on parillinen. Täten

$$\cos(a^k \pi(x + h_n)) = \cos(a^{k-n}(1+\alpha_n)\pi) = (-1)^{1+\alpha_n}. \tag{3}$$

Vastaavasti, koska $a^{k-n}\alpha_n \in \mathbf{Z}$, saamme

$$\begin{aligned}
-\cos(a^k \pi x) &= -\cos(a^{k-n}a^n \pi x) \\
&= -\cos(a^{k-n}\pi \cdot (\alpha_n + \beta_n)) \\
&= -\cos(a^{k-n}\alpha_n \pi + a^{k-n}\beta_n \pi) \\
&= -\cos(a^{k-n}\alpha_n \pi)\cos(a^{k-n}\beta_n \pi) + \sin(a^{k-n}\alpha_n \pi)\sin(a^{k-n}\beta_n \pi) \\
&= -(-1)^{\alpha_n}\cos(a^{k-n}\beta_n \pi) \\
&= (-1)^{1+\alpha_n}\cos(a^{k-n}\beta_n \pi)
\end{aligned}$$

eli

$$-\cos(a^k \pi x) = (-1)^{1+\alpha_n}\cos(a^{k-n}\beta_n \pi). \tag{4}$$

Asettamalla $h = h_n$ ja sijoittamalla kaavat (3) ja (4) R_n:n lausekkeeseen saamme

$$\begin{aligned}
|R_n| &= \left| \sum_{k=n}^{\infty} b^k \frac{(-1)^{1+\alpha_n} + (-1)^{1+\alpha_n}\cos(a^{k-n}\beta_n \pi)}{h_n} \right| \\
&= \left| \frac{(-1)^{1+\alpha_n}}{h_n} \right| \cdot \left| \sum_{k=n}^{\infty} b^k (1 + \cos(a^{k-n}\beta_n \pi)) \right| \\
&= \frac{1}{h_n} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} b^k (1 + \cos(a^{k-n}\beta_n \pi)) \\
&\geq \frac{1}{h_n} b^n (1 + \cos(\beta_n \pi)) \\
&\geq \frac{1}{h_n} b^n,
\end{aligned}$$

koska $\beta_n \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Tavoitteena oli saada R_n:lle arvio, joka riippuu vain a:sta ja b:stä, joten arvioidaan vielä termiä $(h_n)^{-1}$ alaspäin.

Koska $-\frac{1}{2} \le \beta_n < \frac{1}{2}$, niin $\frac{1}{2} < 1 - \beta_n \le \frac{3}{2}$. Edelleen koska $a > 0$, niin saamme $\frac{1}{2a^n} < \frac{1-\beta_n}{a^n} \le \frac{3}{2a^n}$.

Saamme siis

$$\frac{2a^n}{3} \le \frac{a^n}{1-\beta_n} < 2a^n$$

eli

$$\frac{2a^n}{3} \le \frac{1}{h_n} < 2a^n .$$

Sijoittamalla tämä edelliseen R_n:n arvioon saamme

$$|R_n| \ge \frac{1}{h_n} b^n \ge \frac{2a^n b^n}{3} . \tag{5}$$

Kaavoista (2) ja (5) seuraa, että

$$\begin{aligned}
\left| \frac{W(x+h_n) - W(x)}{h_n} \right| &= |S_n + R_n| \\
&\overset{(\square\text{-ey})}{\ge} |R_n| - |S_n| \\
&> \frac{2a^n b^n}{3} - \frac{\pi a^n b^n}{ab-1} \\
&= (ab)^n \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right).
\end{aligned}$$

Koska oletuksen mukaan $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, niin $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}$ on positiivinen vakio.

Juuri tämän takia on alun perin valittu, että $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Tästä seuraa, että

$$(ab)^n \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right) \to \infty, \text{ kun } n \to \infty$$

eli

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{W(x+h_n)-W(x)}{h_n}\right|=\infty .$$

Koska $a > ab > 1+\frac{3}{2}\pi > 5$ ja $\frac{1}{2} < 1-\beta_n \leq \frac{3}{2}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\beta_n}{a^n}=0 .$$

Koska $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ ja $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{W(x+h_n)-W(x)}{h_n}\right|=\infty$, niin pisteessä x on olemassa ainakin yksi jonoderivaatta, joka ei ole äärellinen. Täten W ei ole derivoituva pisteessä x. Koska x oli mielivaltainen reaaliluku, niin W ei ole derivoituva missään pisteessä $x \in \mathbf{R}$.

□

6.2.3 Huomautus

Vuonna 1916 Godfrey Harold Hardy (1877 – 1947) todisti, että kun $0 < b < 1$, $ab \geq 1$ ja $a > 1$, niin molemmat funktiot

$$M_S(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k \sin(a^k \pi x) \text{ ja } M_C(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x)$$

ovat jatkuvia ja ei-missään derivoituvia. Ks. [12].

6.2.4 Riemannin funktiosta

Riemannin funktio $R:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ määritellään seuraavasti:

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\pi n^2 x) .$$

Weierstrassin mukaan Bernhard Riemann (1826 - 1866) esitti noin vuonna 1861 kyseisen funktion varoituksena matemaatikoille siitä, että jatkuvan funktion ei tarvitse olla kaikkialla derivoituva. Kirjallisia todisteita, jotka liittäisivät tämän funktion joko Riemanniin tai hänen oppilaisiinsa, ei kuitenkaan ilmeisesti ole olemassa. Ks. [27, s.115-118].

Weierstrass ei kyennyt todistamaan että Riemannin funktio on *jatkuva ei-missään derivoituva*. Joseph L. Gerver ([7], [8]) osoitti kuitenkin vuonna 1970, ettei Riemannin funktio itse asiassa olekaan *jatkuva ei-missään derivoituva* funktio, vaan se on derivoituva pisteissä

$$x_0 = \frac{2n+1}{2m+n}, \quad n, m \in \mathbf{Z},$$

jolloin $R'(x_0) = -\frac{1}{2}$. Muualla Riemannin funktio ei ole derivoituva.

6.3 McCarthyn funktio (1953)

Vuonna 1953 John McCarthy (1927-) julkaisi esimerkin kaikkialla jatkuvasta rajoitetusta funktiosta, joka ei ole derivoituva missään. Hän kirjoittaa [31], että tällä funktiolla on CND -funktioista helpoin todistus, jonka hän on nähnyt. Jos todistusta vertaa aikaisemmin käsiteltyyn Weierstrassin funktion todistukseen, vaikuttaa väite varsin uskottavalta.

Määritellään funktio $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ seuraavasti:

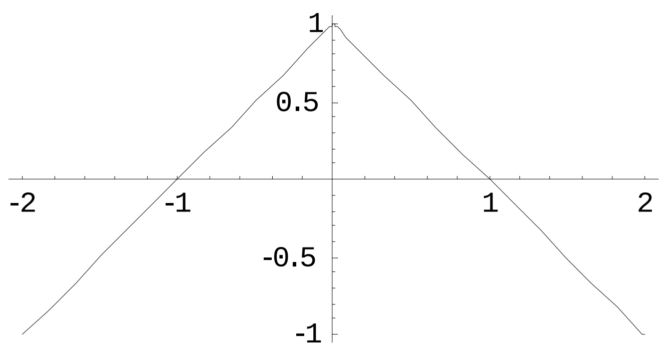
$$g(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in [-2, 0] \\ 1 - x, & x \in [0, 2] \end{cases}$$

ja $g(x+4) = g(x)$. Funktio g on siis jatkuva ja jaksollinen jakson pituutena 4. McCarthyn funktio $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ määritellään funktiosarjana seuraavasti:

$$M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k} x).$$

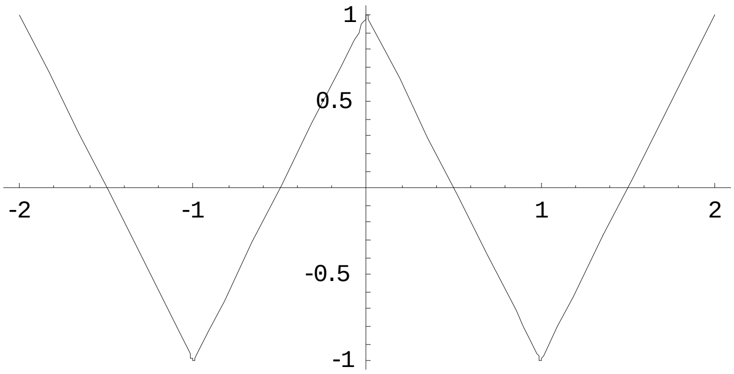
6.3.1 McCarthyn funktion geometrinen tarkastelu

Tarkastellaan aluksi apufunktiota g välillä $-2 < x < 2$. Koska g on jaksollinen jaksonpituutena 4, on g muilla x:n arvoilla kopio ko. välin kuvaajasta. Kuvaajasta (kuva 6.10) havaitaan, että funktiolla g on välillä $-2 < x < 2$ yksi ”piikki” eli epäderivoituvuuskohta.



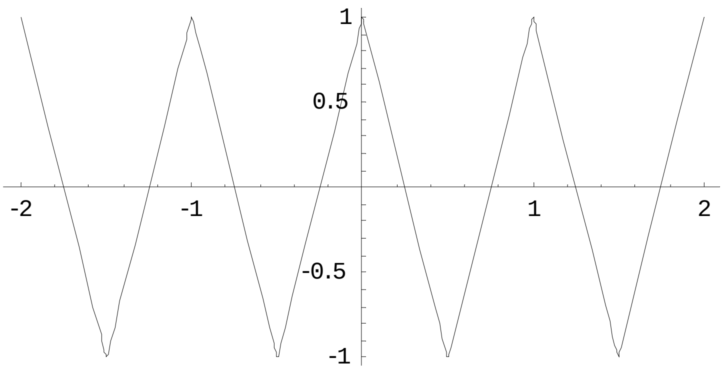
Kuva 6.10: Funktio g välillä -2 < x < 2

Kun argumentti kaksinkertaistuu, jakson pituus puolittuu, eli $g(2x)$:n jakson pituus on 2. Kuvaajasta (kuva 6.11) havaitaan, että funktiolla $g(2x)$ on välillä $-2 < x < 2$ kolme ”piikkiä” eli epäderivoituvuuskohtaa.



Kuva 6.11: g(2x) välillä -2 < x < 2

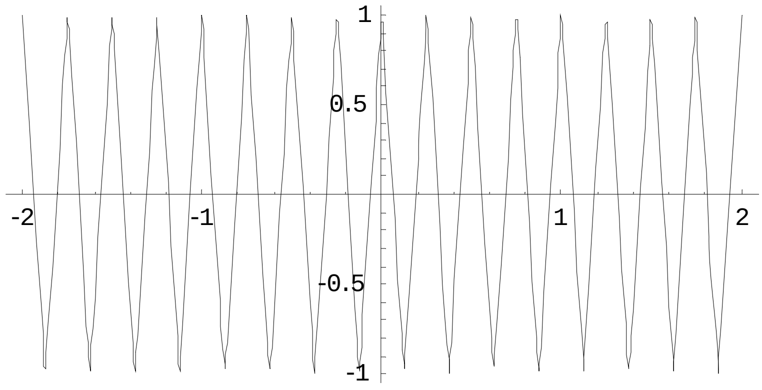
Kun argumentti nelinkertaistuu, jakson pituus pienenee neljäsosaan, eli $g(4x)$:n jakson pituus on 1. Jälleen kuvaajasta (kuva 6.12) voidaan havaita, että argumentin kasvaessa funktiolle g tulee useampi epäderivoituvuuskohta kyseessä olevalle välille. Funktiolla $g(4x)$ on välillä $-2 < x < 2$ seitsemän ”piikkiä” eli epäderivoituvuuskohtaa.



Kuva 6.12: g(4x) välillä -2 < x < 2

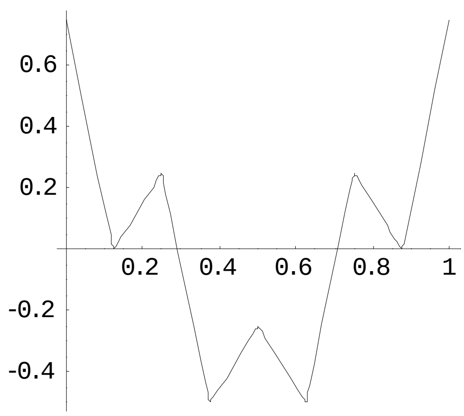
Havaitaan siis, että $g(x)$:n argumentin moninkertaistuessa jakson pituus pienenee samassa suhteessa ja epäderivoituvuuskohtien määrä kasvaa. Funktion $g(m \cdot x)$ jakson pituus on $\dfrac{4}{m}$ ja välillä $-2 < x < 2$ kyseisellä funktiolla on $2m-1$ epäderivoituvuuskohtaa. Tällöin siis McCarthyn funktiossa esiintyvän $g(2^{2^k} x)$:n jakso pienenee ja epäderivoituvuuskohtien määrä tietyllä välillä kasvaa k:n arvojen kasvaessa. Termi 2^{2^k} kasvaa hyvin nopeasti k:n kasvaessa. Esimerkiksi kun $k = 1$ funktiona on $g(4x)$ (kuva 6.12) ja kun $k = 2$ funktiona on $g(16x)$

(kuva 6.13). Funktion $g(2^{2^k} x)$ ”piikit” eli epäderivoituvuuskohdat tulevat siis k:n kasvaessa nopeasti yhä tiheämpään.

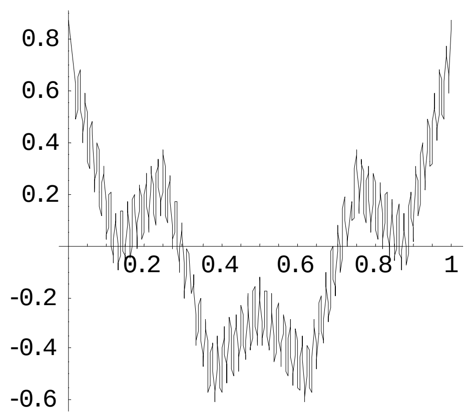


Kuva 6.13: g(16x) välillä -2 < x < 2

McCarthyn funktio M muodostetaan g:n avulla päättymättömänä funktiosarjana. Koska jokainen $g(2^{2^k} x)$ on jatkuva, niin M on jatkuva (osoitetaan lauseessa 6.3.1). McCarthyn funktiosta tulee epäderivoituva kaikkialla, koska $g(2^{2^k} x)$:n ”piikit” ovat äärettömän tiheässä, kun k on kasvaa rajatta. Tutkitaan McCarthyn funktion osasummia $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k} x)$ piirtämällä osasummat $S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k} x)$ (kuva 6.14) ja $S_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k} x)$ (kuva 6.15).



Kuva 6.14: McCarthyn funktion osasumma S_2 *välillä 0 < x < 1.*



Kuva 6.15: McCarthyn funktion osasumma S_3 *välillä 0 < x < 1.*

Havaitsemme, miten McCarthyn funktion rakenne muotoutuu *n*:n kasvaessa ja ”sahanterä” käy yhä tiheämmäksi. Tällöin siis *n*:n kasvaessa funktion *M* epäderivoituvuuskohdat ovat yhä tiheämmässä.

6.3.2 McCarthyn funktion analyyttinen tarkastelu

Lause. McCarthyn funktio $M:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$M(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}g(2^{2^k}x),$$

missä $g(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-2,0]\\ 1-x, & x\in[0,2]\end{cases}$ ja $g(x+4)=g(x)$, on jatkuva ja rajoitettu mutta ei-missään derivoituva $\mathbf{R}$:ssä.

TODISTUS:

1) Osoitetaan, että funktio *M* on rajoitettu.

Koska $|g(x)|\le 1$ selvästi, niin

$$\begin{aligned}|M(x)|&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left|g(2^{2^k}x)\right|\\ &\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{½}{1-½}\\ &=1\end{aligned}$$

kaikilla $x\in\mathbf{R}$, eli funktio M on rajoitettu.

2) Osoitetaan, että funktio *M* on jatkuva.

Olkoon $M_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}g(2^{2^k}x)$. Tällöin saamme

$$\begin{aligned}|M(x)-M_n(x)|&=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}g(2^{2^k}x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}g(2^{2^k}x)\right|\\ &=\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}g(2^{2^k}x)\right|\\ &=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left|g(2^{2^k}x)\right|\\ &\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{(½)^n}{1-½}\\ &=2\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 0,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Koska g on selvästi jatkuva, niin voimme päätellä vastaavalla tavalla kuin Weierstrassin funktion yhteydessä (ks. luku 6.2.2), että funktio M on jatkuva.

3) Osoitetaan, että funktio *M* ei ole derivoituva missään pisteessä.

Olkoon $x \in \mathbf{R}$ mielivaltainen mutta kiinnitetty ja $n \in \mathbf{N}$. Valitaan $h_n = \pm 2^{-2^n}$, missä merkki on valittu siten, että x ja $x + h_n$ kuuluvat funktion $g(2^{2^n} x)$ samaan lineaariseen osaan.

> *h_n voidaan valita näin, koska $g(2^{2^n} x)$:n lineaarisen osan pituus on 2^{-n} ja $|h_n| = \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n \cdot 2^n} \le \frac{1}{2} \cdot 2^{-n}$ (n=1,2,3,...).*

Olkoon $k \in \mathbf{N}$.

> *Tarkastellaan seuraavaksi erotusosamäärän termiä $g(2^{2^k}(x + h_n)) - g(2^{2^k} x)$ eri k:n arvoilla.*

3a) Olkoon $k > n$. Koska

$$2^{2^k} h_n = \pm 2^{2^k - 2^n} = \pm 2^{2^n (2^{k-n} - 1)} = 4m,$$

jollekin $m \in \mathbf{Z}$, ja g on jaksollinen funktio jaksona 4, niin saamme

$$g(2^{2^k}(x + h_n)) - g(2^{2^k} x) = g(2^{2^k} x + 2^{2^k} h_n) - g(2^{2^k} x) = g(2^{2^k} x) - g(2^{2^k} x) = 0. \quad (1)$$

3b) Kun $k = n$, on $\left|2^{2^n} h_n\right| = 1$. Koska x ja $x + h_n$ kuuluvat funktion $g(2^{2^k} x)$ samaan lineaariseen osaan, niin saamme

$$\left|g(2^{2^n}(x + h_n)) - g(2^{2^n} x)\right| = \left|g(2^{2^n} x \pm 1) - g(2^{2^n} x)\right| = 1. \quad (2)$$

3c) Kun $k < n$, saamme arvion

$$\left|g(2^{2^k}(x + h_n)) - g(2^{2^k} x)\right| = \left|2^{2^k} h_n\right| \le 2^{2^{n-1}} 2^{-2^n} = 2^{-2^{n-1}}.$$

Tällöin saamme arvion

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}(g(2^{2^k}(x + h_n)) - g(2^{2^k} x)\right| \le \sum_{k=1}^{n-1} \left|2^{-2^{n-1}}\right| = \underbrace{(n-1)}_{<2^n} \cdot 2^{-2^{n-1}} < 2^n 2^{-2^{n-1}}. \quad (3)$$

Kaavoista (1) - (3) seuraa, että

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{M(x+h_n)-M(x)}{h_n}\right| &= 2^{2^n}\left|\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(g(2^{2^k}(x+h_n))-g(2^{2^k}x)\right| \\
&\overset{(1)}{=} 2^{2^n}\left|\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}(g(2^{2^k}(x+h_n))-g(2^{2^k}x)\right| \\
&\geq 2^{2^n}\left(\left|2^{-n}(g(2^{2^n}(x+h_n))-g(2^{2^n}x)\right|-\left|\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}(g(2^{2^k}(x+h_n))-g(2^{2^k}x)\right|\right) \\
&\overset{(2)}{\geq} 2^{2^n}\left(2^{-n}-\left|\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}(g(2^{2^k}(x+h_n))-g(2^{2^k}x)\right|\right) \\
&\overset{(3)}{\geq} 2^{2^n}\left(2^{-n}-2^n 2^{-2^{n-1}}\right) \\
&= 2^{2^n-n}-2^{2^{n-1}+n} \to \infty,
\end{aligned}
$$

kun $x \to \infty$.

Koska $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ ja $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{M(x+h_n)-M(x)}{h_n}\right| = \infty$, niin pisteessä x on olemassa ainakin yksi jonoderivaatta, joka ei ole äärellinen. Täten *M* ei ole derivoituva pisteessä *x*. Koska *x* oli mielivaltainen reaaliluku, niin McCarthyn funktio *M* ei ole derivoituva missään pisteessä $x \in \mathbf{R}$.

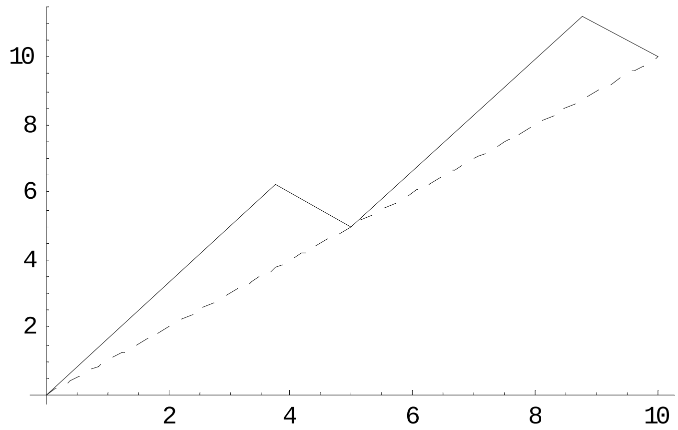
□

6.4 Muita esimerkkejä jatkuvista ei-missään derivoituvista funktioista

Seuraavassa esitellään lyhyesti ilman todistuksia muutamia muita esimerkkejä *jatkuvista ei-missään derivoituvista* funktioista. Lisää esimerkkejä löytyy lähteestä Thim [35].

6.4.1 Bolzanon funktio (n. 1830, julkaistu 1922)

Bolzano esitti esimerkin CND-funktiosta noin vuonna 1830 teoksessaan *Functionenlehre*, jota ei kuitenkaan julkaistu vielä tuolloin. Hänen esimerkkinsä julkaisi vasta vuonna 1922 Karel Rychlík tutkielmassaan Tšekin kuninkaallisessa tiedeakatemiassa, ja teos *Functionenlehre* julkaistiin vasta vuonna 1930 [15, s.5-8]. Bolzanon funktio perustuu geometriseen konstruktioon eikä sarjoihin, joihin useimmat ei-missään derivoituvat funktiot perustuvat. Funktio määritellään jonona paloittain lineaarisia funktioita $\{B_n(x)\}$, jotka suppenevat kohti jatkuvaa ei-missään derivoituvaa funktiota, kun $n \to \infty$. Aluksi valitaan funktion määrittelyjoukko $[a,b]$ ja arvojoukko $[A,B]$. Tarkastellaan funktion rakentumista kuvan avulla tilanteessa $[a,b]=[0,10]$ ja $[A,B]=[0,10]$ (kuva 6.16).



Kuva 6.16: Bolzanon jonon kaksi ensimmäistä jäsentä B_1 (katkoviiva) ja B_2 (yhtenäinen viiva)

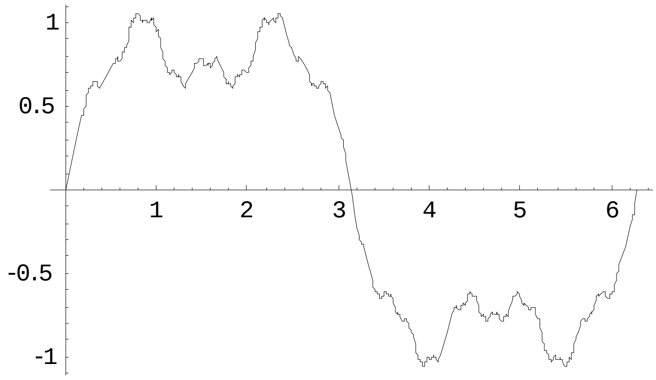
Samaan tapaan jatkettaessa funktion piikkien määrä kasvaa yhä suuremmaksi ja suuremmaksi. Kun tarkastellaan funktiota $B=\lim_{n\to\infty} B_n$, saadaan funktio, joka on jatkuva mutta epäderivoituva jokaisessa pisteessä määrittelyvälillään. Todistus löytyy esimerkiksi lähteestä Thim [35, s.13-17]. Bolzanon funktio voidaan yleistää myös kaikille reaaliluvuille, jolloin siitä tulee *jatkuva ei-missään derivoituva* funktio.

6.4.2 Cellérierin funktio (n. 1860, julkaistu 1890)

Cellérier esitti vuonna 1860 funktion $C:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$C(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^k}\sin(a^k x),\ a>1000,$$

joka oli jatkuva ja ei-missään derivoituva. Hänen funktionsa muistuttaa huomattavasti Weierstrassin funktiota (ks. luku 6.2). Cellérierin funktio julkaistiin vasta vuonna 1890, joten sillä ei ollut suurta merkitystä koska Weierstrassin funktio tunnettiin jo. Hardyn yleistyksestä (huomautus 6.2.3) Weierstrassin funktiolle seuraa, että Cellérierin funktio ei ole missään derivoituva ja ehto $a>1000$ voidaan korvata ehdolla $a>1$.



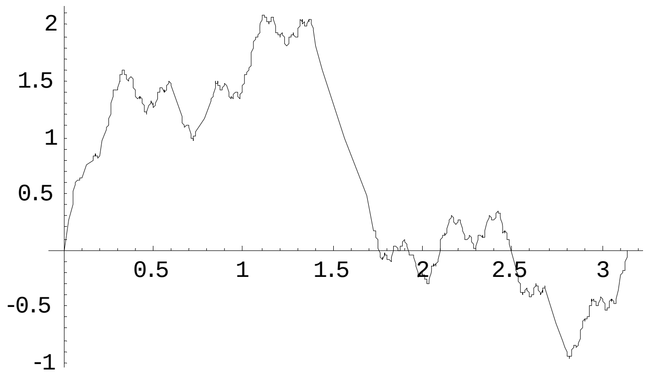
Kuva 6.17: Cellérierin funktio C osasumma S_{100} välillä [0, 2π], kun $a = 3$.

6.4.3 Darboux'n funktio (1873, julkaistu 1875)

Ranskalainen Jean Gaston Darboux (1842 – 1917) esitti vuonna 1873 *jatkuvan ei-missään derivoituvan* funktion $D : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$D(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sin((k+1)!x),$$

joka julkaistiin vuonna 1875 eli samana vuonna kuin Weierstrassin funktio. Myös Darboux'n funktion rakenne on hyvin samantyyppinen kuin Weierstrassin ja Cellérierin funktioiden.



Kuva 6.18: Darboux'n funktion D osasumma S_{100} välillä [0,π].

6.4.4 Takagin funktio (1903) ja Van der Waerdenin funktio (1930)

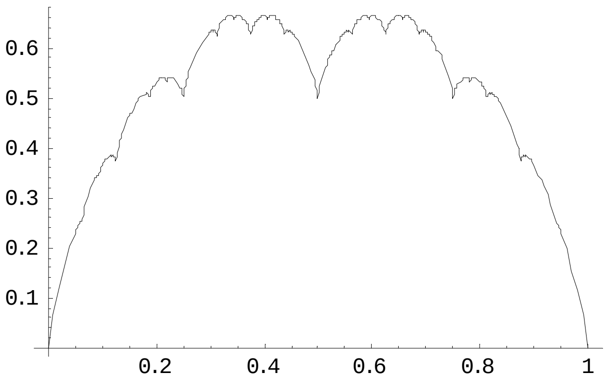
Vuonna 1903 japanilainen Teiji Takagi (1875 – 1960) esitti esimerkin *jatkuvasta ei-missään derivoituvasta* funktiosta, joka on Weierstrassin funktiota "yksinkertaisempi". Weierstrassin funktiossa esiintyvä trigonometrinen funktio on korvattu etäisyysfunktiolla, jossa tarkastellaan termin $2^k x$ pienintä etäisyyttä lähimmästä kokonaisluvusta. Takagin funktio $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ määritellään seuraavasti:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} \left| 2^k x - m \right|.$$

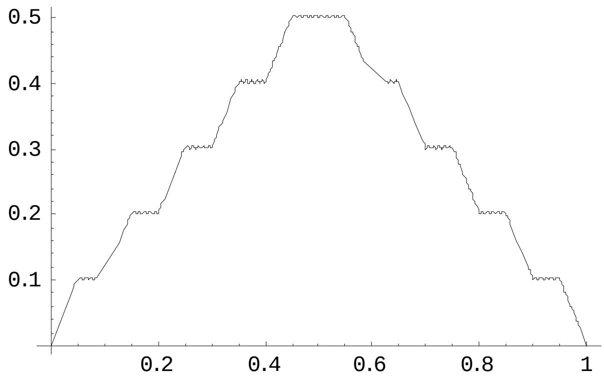
Vuonna 1930 Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996) julkaisi samantyyppisen funktion ilmeisesti tuntematta Takagin funktiota. Van der Waerdenin funktio $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ määritellään seuraavasti:

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} \left| 10^k x - m \right|.$$

Todistus funktioille löytyy esimerkiksi lähteistä Thim [35, s.38-39] ja Billingsley [3].



Kuva 6.19: Takagin funktion T osasumma S_{10} välillä [0, 1].



Kuva 6.20: Van der Waerdenin funktion V osasumma S_{100} välillä [0, 1].

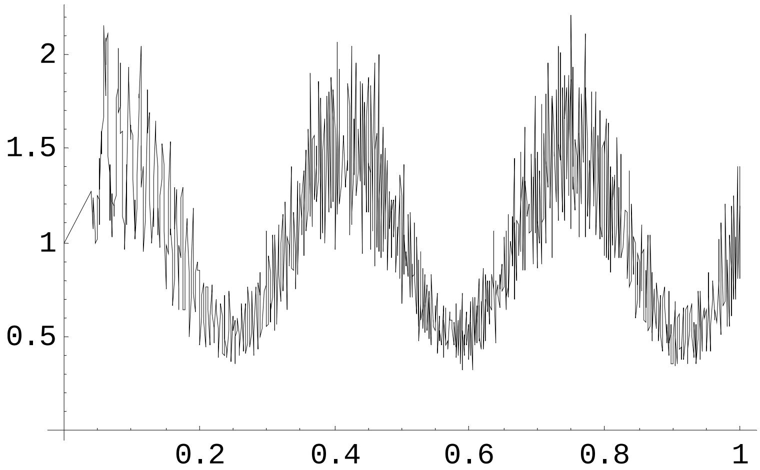
6.4.5 Wenin funktio (2002)

Lopuksi tarkastellaan vielä lyhyesti yhtä esimerkkiä kuluvalta vuosituhannelta. Kiinalainen matemaatikko Liu Wen julkaisi vuonna 2002 *jatkuvan ei-missään derivoituvan* funktion, joka perustuu äärettömään tuloon eikä äärettömään summaan kuten monet muut esimerkit.

Wenin funktio $L : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ määritellään

$$L(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n \sin(b_n \pi x)),$$

missä $0 < a_n < 1$ kaikilla n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ja $b_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$, ja p_k on parillinen kokonaisluku kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Lisäksi vaaditaan, että $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{a_n p_n} = 0$. Todistus löytyy lähteestä Wen [38].



Kuva 6.21: Wenin funktio L välillä [0, 1] kun $a_n = 2^{-n}$ *ja* $p_n = 6^n$.

6.5 Jatkuvien ei-missään derivoituvien funktioiden rakenteesta

Tarkastellaan hieman CND-funktioiden rakennetta. Kuten edellä mainituista esimerkeistä huomaamme, osa funktioista on konstruoitu geometrisesti, osa äärettömien summien avulla ja osa äärettömien tulojen avulla. Muitakin esimerkkejä on olemassa, ks. esimerkiksi Thim [35]. Kun tarkastelemme edellä käsiteltyjen funktioiden kuvaajia, havaitsemme, että kaikissa funktioissa on äärettömän monta piikkiä millä tahansa välillä, mistä seuraa funktioiden epäderivoituvuus. Tarkastellaan rakenteesta esimerkkinä tarkemmin Weierstrassin funktiota

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x).$$

Kosinifunktio on jaksollinen, jolloin funktiosta W tulee myös jaksollinen. Kosinifunktion edessä oleva kerroin b, $0 < b < 1$, pitää summafunktion rajoitettuna (lisäksi kosinifunktio on rajoitettu). Jaksollisella funktiolla (tässä tapauksessa $\cos(a^k \pi x)$) saadaan siis aikaiseksi ”piikit” eli epäderivoituvuuskohdat ja termi b^k huolehtii siitä, että summa pysyy rajoitettuna. Samalla periaatteella on rakennettu muun muassa McCarthyn funktio (ks. luku 6.3) sekä Takagin ja Van der Waerdenin funktiot (ks. luku 6.4.4).

6.6 Onko jatkuvia ei-missään derivoituvia funktioita paljon?

Tähän mennessä on selvää, että CND-funktioita on olemassa. Mutta kuinka paljon niitä sitten on? On selvää, että niitä on äärettömän paljon, sillä esimerkiksi Weierstrassin funktiosta $M_S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \sin(a^k \pi x)$, missä $0 < b < 1$, $ab \geq 1$ ja $a > 1$, saadaan äärettömän monta eri funktiota a:n ja b:n eri arvoilla.

Mielenkiinto kohdistuukin siihen, kumpia on enemmän: jatkuvia funktioita, jotka ovat jossakin pisteessä derivoituvia, vai jatkuvia funktioita, jotka eivät ole missään derivoituvia. Selvästi molempia on äärettömän paljon, mutta pystytään osoittamaan, että *jatkuvia ei-missään derivoituvia* funktioita on paljon enemmän kuin jatkuvia jossakin derivoituvia funktioita. Todistus perustuu Bairen kategorioihin ja Bairen kategorialauseeseen (ks. [5, s.21–23] tai [14, s.68]). Todistuksessa osoitetaan, että *jatkuvat ei-missään derivoituvat* funktiot kuuluvat Bairen toiseen kategoriaan ja jatkuvat jossakin derivoituvat funktiot Bairen ensimmäiseen kategoriaan. *Jatkuvien ei-missään derivoituvien* funktioiden joukko on siis topologisessa mielessä paljon suurempi kuin jatkuvien jossakin pisteessä derivoituvien funktioiden joukko. Tarkempi tarkastelu löytyy lähteistä Thim [35, s.71–84] ja Gaul & Kim [6, s.2-4]. Voidaan siis todeta, että ”ikäviä” funktioita on paljon enemmän kuin ”siistejä” funktioita toisin sanoen mielivaltaisesti valittu jatkuva funktio ei yleensä ole missään derivoituva.

7 MONOTONISEN FUNKTION DERIVAATTA

7.1 Johdanto

Tässä luvussa tarkastellaan, miten monotonisuus vaikuttaa funktion derivoituvuuteen. Todistetaan Henri Lebesguen (1875 – 1941) esittämä lause, että rajoitettu funktio on derivoituva *melkein kaikkialla,* mikäli se on monotoninen. Jotta päästään tähän tulokseen joudutaan aluksi tarkastelemaan hieman mittateoriaa; määritellään Lebesguen mitta sekä todistetaan Vitalin peitelause.

7.2 Lebesguen mitta ja mitalliset joukot

Lebesguen mitta on havaintoa vastaava mitta. $\mathbf{R}$:n väleille se yhtyy geometriseen mittaan eli pituuteen. Välin *I*, jonka päätepisteet ovat *a* ja *b*, $a \le b$, geometrinen mitta on $\lambda(I) = b - a$.

Määritelmä 1. Joukon $A \subset \mathbf{R}$ *Lebesguen ulkomitta* on

$$m^*(A) = m_1^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[, -\infty < a_i < b_i < \infty\}.$$

Määritelmä 2. Joukko $E \subset \mathbf{R}$ on *Lebesgue-mitallinen* eli *m*-mitallinen* jos ja vain jos

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \quad \forall A \subset \mathbf{R}.$$

Määritelmä 3. m^*-mitallisten joukkojen luokka on σ-algebra eli *Lebesguen* σ*-algebra* $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbf{R})$. Joukkoon $\mathcal{M}$ rajoitettua Lebesguen ulkomittaa kutsutaan *Lebesguen mitaksi*, $m = m^*|_{\mathcal{M}}$.

Huomautus. Kaikki ”tavalliset” joukot, kuten avoimet joukot ja välit, ovat Lebesgue-mitallisia. Ks. [33, s.26].

Lause. Lebesquen mitalle on voimassa:

(a) $m(A) \ge 0$ kaikilla $A \subset \mathbf{R}$.

(b) $m(\emptyset) = 0$.

(c) $m(A) \le m(B)$ aina, kun $A \subset B \subset \mathbf{R}$.

(d) $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ kaikilla $A_i \subset \mathbf{R}$ (mitan subadditiivisuus).

(e) $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$, jos $A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$.

(f) Jokaiselle välillä $I \subset \mathbf{R}$ pätee, että $m(I) = \lambda(I)$.

TODISTUS:

(a) Selvä, koska $\lambda(I) \ge 0$ kaikilla $I \subset \mathbf{R}$.

(b) $\emptyset \subset [-\varepsilon, \varepsilon] =: I_\varepsilon$ jokaiselle $\varepsilon > 0$, ja Lebesguen mitan määritelmästä seuraa, että $m(\emptyset) \le \lambda(I_\varepsilon) = 2\varepsilon$ jokaiselle $\varepsilon > 0$. Tällöin $m(\emptyset) = 0$.

(c) Ks. [33, s.21] lauseen 5.2 todistus (ehto UM_2).

(d) Ks. [33, s.21] lauseen 5.2 todistus (ehto UM_3).

(e) Ks. [14, s.129] theorem 10.11.

(f) Ks. [33, s. 27] lause 7.4.

7.3 Vitalin peitelause

Lemma. Olkoot $A_1, A_2, \ldots$ $\mathbf{R}$:n Lebesgue-mitallisia joukkoja.

(a) Jos $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, niin

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n).$$

(b) Jos A_1 on rajoitettu ja $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, niin

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n).$$

TODISTUS:

(a) Olkoon $A_0 = \emptyset$. Silloin $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$ ja joukot $A_n \setminus A_{n-1}$ ovat erillisiä. Luvun 7.2 lauseen (e)-kohdan nojalla saadaan

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \setminus A_{n-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} m(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{n=1}^{k} A_n \setminus A_{n-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} m(A_k). \end{aligned}$$

□

(b) Koska $m(A_1) < \infty$, niin

$$m(A_1) = m(A_1 \setminus A_n) + m(A_n)$$
$$\Rightarrow m(A_n) = m(A_1) - m(A_1 \setminus A_n).$$

Koska $(A_1 \setminus A_1) \subset (A_1 \setminus A_2) \subset (A_1 \setminus A_3) \subset ...$, niin a-kohdan nojalla

$\lim_{n\to\infty} m(A_1 \setminus A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_1 \setminus A_n)$, joten

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} m(A_n) &= m(A_1) - m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)) \\
&= m(A_1) - m(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \\
&= m(A_1) - (m(A_1) - m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)) \\
&= m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n).
\end{aligned}$$

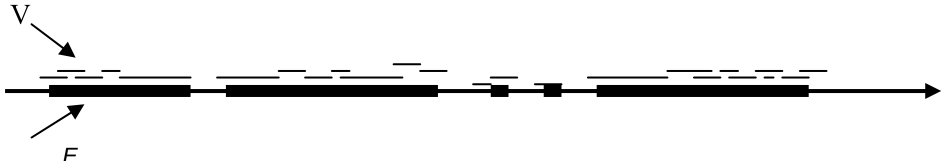
$\square$

Määritelmä 1. Olkoon I avoin väli siten, että $a \in I \subset \mathbf{R}$ ja $f : I \to \mathbf{R}$ sekä jono $\{h_k\} \to 0$ $(h_k \neq 0)$. Määritellään f:n *jonoderivaatta* pisteessä a

$$Df(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}.$$

Määritelmä 2. Olkoon $E \subset \mathbf{R}$ ja V perhe suljettuja ja surkastumattomia $\mathbf{R}$:n välejä. Jos jokaiselle $x \in E$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa väli $I \in \mathrm{V}$ siten, että $x \in I$ ja $\lambda(I) < \varepsilon$ niin perhettä V kutsutaan joukon E *Vitalin peitteeksi.*

Jokainen $x \in E$ kuuluu siis johonkin mielivaltaisen pieneen väliin $I \subset \mathrm{V}$.



Kuva 7.1: Vitalin peite

Vitalin peitelause. Olkoon V Vitalin peite joukolle $E \subset \mathbf{R}$.
Tällöin on olemassa pareittain pistevieras numeroituva perhe $\{I_k\} \subset \mathrm{V}$ siten, että

$$m(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) = 0.$$

Joukko E voidaan siis peittää numeroituvan monella I_k:lla lukuun ottamatta korkeintaan nollamittaista joukkoa.

TODISTUS:
Tarkastellaan erikseen tilanteita, joissa $m(E) < \infty$ ja $m(E) = \infty$.

Tilanne 1: Olkoon $m(E) < \infty$.
Valitaan avoin joukko *A* siten, että $E \subset A$ ja $m(A) < \infty$.

Tällainen joukko A on olemassa, koska joukko E on Lebesgue-mitallinen jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy avoin joukko A siten, että $E \subset A$ ja $m(A \setminus E) < \varepsilon$ (ks. [33, s.30]). Tällöin $m(A) < m(E) + \varepsilon < \infty$.

Muodostetaan *E*:lle uusi Vitalin peite V_0 siten, että $\mathrm{V}_0 = \{I \in \mathrm{V} : I \subset A\}$.

1) Muodostetaan numeroituva pareittain pistevieras jono $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ V_0:n välejä.

Lähdetään liikkeelle valitsemalla yksi väli I_1 ja mikäli $E \not\subset I_1$ niin valitaan toinen väli I_2 siten, että $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ ja niin edelleen. Mikäli äärellisen monella välillä $\{I_1, I_2, ..., I_n\}$ saadaan $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, niin väite on selvä. Muulloin saamme numeroituvan pareittain pistevieraan jonon $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ V_0:n välejä.

Valitaan yksi V_0:n alkio I_1. Jos $m(E \setminus I_1) = 0$, niin väite on selvä.

Joukko E on siis peitetty välillä I_1 lukuun ottamatta korkeintaan nollamittaista joukkoa.

Mikäli $m(E \setminus I_1) > 0$, niin valitaan toinen V_0:n alkio I_2 siten, että $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Jos $m(E \setminus (I_1 \cup I_2)) = 0$, niin väite on selvä.

> *Joukko E on siis peitetty väleillä I_1 ja I_2 lukuun ottamatta korkeintaan nollamittaista joukkoa.*

Mikäli $m(E \setminus (I_1 \cup I_2)) > 0$, niin jatketaan induktiivisesti. Olkoon valittu pareittain pistevieraat V_0:n välit $I_1, I_2, ..., I_n$. Jos $m(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k) = 0$, niin väite on selvä.

> *Joukko E on siis peitetty väleillä $I_1, I_2, ..., I_n$ lukuun ottamatta korkeintaan nollamittaista joukkoa.*

Mikäli $m(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k) > 0$, niin valitaan I_{n+1} seuraavasti:

Todetaan ensiksi, että $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ on suljettu (äärellisen monen suljetun joukon yhdisteenä), $A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ on avoin (avoimen ja suljetun joukon erotuksena) ja $E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k \neq \emptyset$. Olkoon

$$\delta_n = \sup\{m(I) : I \in V_0, I \subset A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k\}. \tag{4}$$

Koska Vitalin peitteen alkiot ovat surkastumattomia, niin $\delta_n > 0$, ja koska jokaiselle $I \in V_0$ pätee $I \in V$, niin $\delta_n < \infty$ (A on rajoitettu). Valitaan nyt $I_{n+1} \in V_0$ siten, että $I_{n+1} \subset A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ ja

$$m(I_{n+1}) > \frac{1}{2}\delta_n. \tag{5}$$

> *Onko tällainen I_{n+1} varmasti olemassa? Koska $E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k \neq \emptyset$ ja V_0 on E:n Vitalin peite, niin jokaiselle $x \in (E \setminus \bigcup_{k=1}^{\mathrm{n}} I_k)$ on olemassa mielivaltaisen pieni väli $I \in V_0$ siten, että $x \in I$. Ja edelleen koska*

$A\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ on avoin, niin jokaiselle $x \in A\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ on olemassa surkastumaton suljettu väli I siten, että $x \in I$ ja $I \subset (A\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k)$.

Tällöin on siis olemassa väli $I_{n+1} \in V_0$ siten, että $I_{n+1} \subset (A\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k)$.

δ_n :n määritelmästä ja siitä, että $\delta_n < \infty$ seuraa, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa väli I siten, että $\delta_n - \lambda(I) < \varepsilon$, eli erityisesti on olemassa I_{n+1} siten, että $m(I_{n+1}) > \frac{1}{2}\delta_n$

Koska $I_{n+1} \subset (A\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k)$ ja $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ on pareittain pistevieras jono, niin $\{I_k\}_{k=1}^{n+1}$ on pareittain pistevieras jono V_0 :n välejä.

Mikäli prosessi päättyy äärellisen monen vaiheen jälkeen, on löydetty pareittain pistevieras äärellinen jono $\{I_k\}_{k=1}^{m}$ siten, että $m(E\setminus\bigcup_{k=1}^{m} I_k) = 0$ ja väite on selvä. Mikäli näin ei käy, on saatu pareittain pistevieras ääretön jono $\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V_0$.

Seuraavaksi pitää siis osoittaa, että saadulle jonolle pätee

$$m(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) = 0.$$

Ideana on peittää joukko $E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ suljetuilla väleillä J_k. Tehdään valinta niin, että jokaisella välillä J_k on sama keskipiste kuin välillä I_k. Pyritään valitsemaan välien J_k pituudet siten, että joukko $\bigcup_{k=p}^{\infty} J_k$ peittää joukon $E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ kaikilla $p \in \mathbf{N}$. Tarkoituksena on siis *osoittaa, että* $E \setminus (\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \subset \bigcup_{k=p}^{\infty} J_k$ *kaikilla* $p \in \mathbf{N}$ *ja* $\lim_{p\to\infty} m(\bigcup_{k=p}^{\infty} J_k) = 0$.

Tällöin tulee osoitettua, että $m(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) = 0$.

Olkoon jokaisella $k \in \mathbf{N}$ J_k suljettu väli, jolla on sama keskipiste kuin välillä I_k. Olkoon lisäksi J_k:n pituus I_k:n pituuden monikerta, eli

$$m(J_k) = a \cdot m(I_k) \tag{6}$$

jollekin reaaliselle *a*. Määritetään *a*:n arvo myöhemmin.

2) Osoitetaan seuraavaksi, että $\boldsymbol{\lim_{p\to\infty} m(\bigcup_{k=p}^{\infty} J_k) = 0}$ **.**

Koska $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} J_k \supset \bigcup_{k=3}^{\infty} J_k \supset \ldots$ ja koska mitan subadditiivisuudesta ja tiedosta $I_n \cap I_m = \emptyset$ kaikilla $n \neq m$ seuraa, että

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(J_k) = a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = a \cdot m(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \le a \cdot m(A) < \infty,$$

niin lemman nojalla $\lim_{p\to\infty} m(\bigcup_{k=p}^{\infty} J_k) = m(\bigcap_{p=1}^{\infty}\bigcup_{k=p}^{\infty} J_k)$.

Mitan ominaisuuksien perusteella jokaiselle $p \in \mathbf{N}$ pätee, että

$$\begin{aligned} m(\bigcap_{p=1}^{\infty}\bigcup_{k=p}^{\infty} J_k) &\le m(\bigcup_{k=p}^{\infty} J_k) \\ &\le \sum_{k=p}^{\infty} m(J_k). \end{aligned}$$

Koska $\sum_{k=1}^{\infty} m(J_k)$ on suppeneva positiiviterminen summa, niin

$$\sum_{k=p}^{\infty} m(J_k) \to 0 \quad ,$$

kun $p \to \infty$. Saadaan siis, että

$$m(\bigcap_{p=1}^{\infty}\bigcup_{k=p}^{\infty} J_k) = 0$$

eli

$$\lim_{p\to\infty} m(\bigcup_{k=p}^{\infty} J_k) = 0 .$$

3) Seuraavaksi osoitetaan, että $E \setminus (\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \subset \bigcup_{k=p}^{\infty} J_k$ kaikilla $p \in \mathbf{N}$.

Valitaan mielivaltainen $p \in \mathbf{N}$ ja kiinnitetään se. Olkoon $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Tällöin $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k \subset A \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k$. Koska $A \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k$ on avoin (todettu aiemmin) ja V_0 on E:n Vitalin peite, niin on olemassa $I \in V_0$ siten, että $x \in I$ ja $I \subset (A \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k)$. I ei ole mikään väli jonostamme $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, koska $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ja $x \in I$.

Koska kuten yllä on todettu $\lim_{k\to\infty} m(I_k) = 0$, niin $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, joten kaavasta (5) seuraa, että on olemassa $b \in \mathbf{N}$ siten, että $\delta_b < m(I)$. Tällöin $I \not\subset A \setminus \bigcup_{k=1}^{b} I_k$ ja siis $I \cap \bigcup_{k=1}^{b} I_k \neq \emptyset$.

Olkoon $q = \min\{j : I \cap \bigcup_{k=1}^{j} I_k \neq \emptyset\}$.

Koska $I \subset (A \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k)$, niin $I \cap \bigcup_{k=1}^{p} I_k = \emptyset$, joten $p < q$.

Koska $I \cap \bigcup_{k=1}^{q} I_k \neq \emptyset$ ja $I \cap \bigcup_{k=1}^{q-1} I_k = \emptyset$, niin

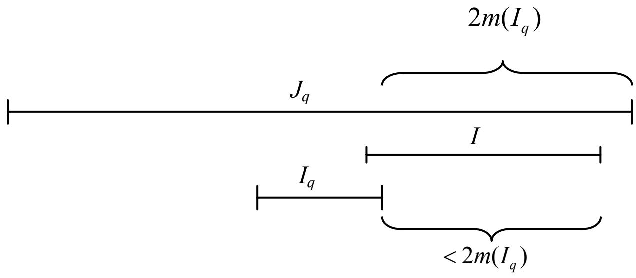
$$I \cap I_q \neq \emptyset . \tag{7}$$

Koska $I \subset (A \setminus \bigcup_{k=1}^{q-1} I_k)$, niin

$$m(I) \le \delta_{q-1} < 2m(I_q) . \tag{8}$$

Aikaisemmin on määritetty, että $m(J_k) = a \cdot \lambda(I_k)$, jollekin reaaliselle a. Valitsemalla $a = 5$ (ks. kuva 7.2), seuraa kaavoista (7) ja (8), että

$$I \subset J_q \subset \bigcup_{k=p}^{\infty} J_k \quad (p < q) .$$



Kuva 7.2: Välien J_k pituuksien valinta.

Koska $x \in I$, niin $x \in \bigcup_{k=p}^{\infty} J_k$ kaikilla $p \in \mathbf{N}$, eli $(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \subset \bigcup_{k=p}^{\infty} J_k$ kaikilla $p \in \mathbf{N}$.

4) Kohdista 1) – 3) seuraa, että $m(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) = 0$.

Tilanne 2: Olkoon $m(E) = \infty$.

Jokaiselle $n \in \mathbf{Z}$ olkoon $E_n = E \cap]n, n+1[$ ja $\mathcal{V}_n = \{I \in \mathcal{V} : I \subset]n, n+1[\}$. Selvästi $\mathcal{V}_n$ on E_n:n Vitalin peite. Tilanteen 1 mukaan on olemassa pareittain pistevieras numeroituva perhe $\mathcal{P}_n = \{I_{n,k}\} \subset \mathcal{V}_n$ siten, että $m(E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}) = 0$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$.

Olkoon $\mathcal{P} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_n$. Tällöin $\mathcal{P}$ on pareittain pistevieras numeroituva $\mathcal{V}$:n aliperhe.

> $\mathcal{P}$ *on numeroituva, koska jokainen* $\mathcal{P}_n$ *on numeroituva ja* $\mathcal{P}$ *on numeroituva yhdiste näistä. Lisäksi koska jokainen* $\mathcal{P}_n$ *on pareittain pistevieras ja* $\mathcal{P}_n$*:n määritelmän nojalla* $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \neq \varnothing$ *kaikilla* $i \neq j$*, niin* $\mathcal{P}$ *on pareittain pistevieras.*

Nyt $E \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k} \subset \mathbf{Z} \cup \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}) \right)$.

Tällöin saadaan

$$m(E \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}) \leq m(\mathbf{Z}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}) = 0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0 = 0.$$

On siis löydetty pareittain pistevieras numeroituva perhe $\mathcal{P}$ siten, että $m(E \setminus \cup \mathcal{P}) = 0$.

$\square$

7.4 Lebesguen lause

Määritelmä. Jos ominaisuus P on voimassa kaikilla $x \in A$ lukuun ottamatta pisteitä x, jotka kuuluvat johonkin nollamittaiseen joukkoon $N \subset A$, $m(N) = 0$, sanotaan, että ominaisuus P on voimassa *melkein kaikkialla* joukossa $A \subset \mathbf{R}$.

Toisin sanoen ominaisuus P on voimassa *melkein kaikkialla* joukossa $A \subset \mathbf{R}$, jos

$$m(\{x \in A : P \text{ ei päde}\}) = 0 .$$

Tällöin merkitään myös $P(x)$ m.k. $x \in A$.

> *Tämä tarkoittaa sitä, että joukko N, jossa ominaisuus P ei ole voimassa, voidaan peittää numeroituvan monella välillä, joiden pituuksien summa on mielivaltaisen pieni..*

Lemma 1. Olkoon f aidosti kasvava välillä $[a,b]$, ja olkoon $E \subset [a,b]$. Jos jokaiselle $x \in E$ on olemassa jonoderivaatta $Df(x) < p$, niin

$$m(f(E)) \leq p \cdot m(E) .$$

TODISTUS:

Olkoon $\varepsilon > 0$.

Olkoon G avoin joukko siten, että $E \subset G$ ja

$$m(G) < m(E) + \varepsilon . \tag{1}$$

Jokaiselle $x_0 \in E$ on olemassa jono $\{h_n\} \to 0$ $(h_n \neq 0)$ siten, että jokaiselle $n \in \mathbf{N}$ $[x_0, x_0 + h_n] \subset G$ (koska G on avoin) ja $\dfrac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} < p$ eli

$$f(x_0 + h_n) - f(x_0) < p \cdot h_n \tag{2}$$

(mikäli $h_n < 0$, niin käsitellään väliä $[x_0 + h_n, x_0]$).

Olkoon jokaiselle $n \in \mathbf{N}$ $I_n(x_0) = [x_0, x_0 + h_n]$ ja $J_n(x_0) = [f(x_0), f(x_0 + h_n)]$.

Koska f on aidosti kasvava, niin $f(I_n(x_0)) \subset J_n(x_0)$ ja $J_n(x_0)$ on surkastumaton suljettu väli.

Kaavasta (2) ja siitä, että $m(I_n(x_0)) = |h_n|$ ja $m(J_n(x_0)) = |f(x_0 + h_n) - f(x_0)|$ seuraa, että

$$m(J_n(x_0)) < p \cdot h_n = p \cdot m(I_n(x_0)). \tag{3}$$

Koska $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, niin $\lim_{n\to\infty} m(I_n(x_0)) = 0$, joten kaavasta (3) seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} m(J_n(x_0)) = 0.$$

Täten perhe V$\equiv \{J_n(x_0) : x_0 \in E, n \in \mathbf{N}\}$ muodostaa Vitalin peitteen joukolle $f(E)$. Vitalin peitelauseen nojalla (luku 7.3) on olemassa pareittain pistevieras numeroituva perhe $\{J_{n_i}(x_i)\}, i \in \mathbf{N}$ siten, että

$$m\left(f(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} J_{n_i}(x_i)\right) = 0. \tag{4}$$

Vitalin peitelause on tärkeässä roolissa todistuksessa. Sen ansiosta voimme valita perheen $\{J_{n_i}(x_i)\}$*, joka melkein peittää joukon ja on pareittain pistevieras.*

Kaavoista (3) ja (4) seuraa, että

$$m(f(E)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(J_{n_i}(x_i)) < p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} m(I_{n_i}(x_i)). \tag{5}$$

Koska *f* on aidosti kasvava, niin välit $I_{n_i}(x_i)$ muodostavat pareittain pistevieraan perheen.

Täten

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(I_{n_i}(x_i)) = m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i)). \tag{6}$$

Vitalin peitelauseen ansiosta saimme valittua pareittain pistevieraan perheen $\{J_{n_i}(x_i)\}$*. Tällöin myös perhe* $\{I_{n_i}(x_i)\}$ *on pareittain pistevieras, koska f on aidosti kasvava.*

Koska $I_n \subset G$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, niin

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i)) \leq m(G). \tag{7}$$

Joukko G on valittu siten, että se on vain ”vähän” joukkoa E suurempi. Täten perhe $\{I_{n_i}(x_i)\}$ ei peitä paljon enempää kuin joukon E.

Kaavoista (1), (6) ja (7) seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(I_{n_i}(x_i)) \leq m(E) + \varepsilon . \tag{8}$$

Kaavoista (5) ja (8) seuraa edelleen, että

$$m(f(E)) < p \cdot (m(E) + \varepsilon) \tag{9}$$

kaikilla $\varepsilon > 0$

Joten kun $\varepsilon \to 0$, niin saadaan

$$m(f(E)) \leq p \cdot m(E) .$$

□

Lemma 2. Olkoon *f* aidosti kasvava välillä $[a,b]$, ja olkoon $E \subset [a,b]$. Jos jokaisessa $x \in E$ on olemassa jonoderivaatta $Df(x) > q \geq 0$, niin

$$m(f(E)) \geq q \cdot m(E) .$$

TODISTUS:

Vastaavasti kuin lemma 1.

Lebesguen lause. Olkoon *f* reaaliarvoinen monotoninen funktio suljetulla välillä $[a,b] \subset \mathbf{R}$, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Tällöin *f* on derivoituva *melkein kaikkialla* välillä $[a,b]$.

TODISTUS:

Olkoon funktio *f* kasvava välillä $[a,b]$ (mikäli *f* on vähenevä välillä $[a,b]$, niin tutkitaan funktiota $-f$). Voidaan olettaa myös, että *f* on aidosti kasvava (jos *f* ei ole aidosti kasvava, niin tutkitaan funktiota $g(x) = f(x) + x$).

1) Jos funktio *f* ei ole derivoituva pisteessä *a*, niin joko

1) $f'(a) = \infty$, eli erotusosamäärän raja-arvo $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ kasvaa rajatta

tai

2) on olemassa jonoderivaatat $D_1 f(a)$ ja $D_2 f(a)$ siten, että $D_1 f(a) < D_2 f(a)$.

2) Olkoon $E_\infty = \{x \in [a,b] : f'(x) = \infty\}$.

Koska f on aidosti kasvava, niin $f(E_\infty) \subset [f(a), f(b)]$ eli $m(f(E_\infty)) \leq f(b) - f(a) < \infty$. Koska $f'(x) = \infty$ kaikilla $x \in E_\infty$, niin lemmasta 2 seuraa, että $q \cdot m(E_\infty) \leq m(f(E_\infty))$ kaikilla $q \in \mathbf{N}$. Saadaan siis

$$q \cdot m(E_\infty) < \infty$$

kaikilla $q \in \mathbf{N}$, eli

$$m(E_\infty) = 0. \tag{1}$$

Nyt on siis osoitettu, että funktion f derivaatta on ääretön korkeintaan nollamittaisessa joukossa. Vielä pitää osoittaa, että pisteet, joissa funktiolla f ei ole määritelty derivaatta, muodostavat nollamittaisen joukon.

3) Jos on olemassa jonoderivaatat $D_1 f(a)$ ja $D_2 f(a)$ siten, että $D_1 f(a) < D_2 f(a)$, niin tällöin on olemassa rationaaliset p ja q siten, että $D_1 f(a) < p < q < D_2 f(a)$.

Olkoon $0 \leq p < q < \infty$ ja

$E_{pq} = \{x :$ on olemassa jonoderivaatat $D_1 f(x)$ ja $D_2 f(x)$ s.e. $D_1 f(x) < p < q < D_2 f(x)\}$.

Lemmoista 1 ja 2 seuraa, että

$$q \cdot m(E_{pq}) \leq m(f(E_{pq})) \leq p \cdot m(E_{pq}).$$

Koska $p < q$, niin täytyy olla

$$m(E_{pq}) = 0. \tag{2}$$

4) Kohdan 1) perusteella $N = \{x : f \text{ ei ole derivoituva}\} \subset E_\infty \cup \bigcup \{E_{p,q} : p, q \in \mathbf{Q}\}$, joten kaavoista (1) ja (2) seuraa, että $m(N) = 0$.

$\square$

7.5 Esimerkki

Koska $\mathbf{Q}$ on numeroituva joukko, voidaan rationaalipisteistä muodostaa jono q_n, olkoon $\mathbf{Q} = \{q_n\}$. Määritellään funktio $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbf{N}, \\ q_n < x}} 2^{-n}.$$

Koska f on muodostettu positiivitermisenä summana ja x:n kasvaessa summan termien lukumäärä kasvaa on *f* selvästi kasvava.

Osoitetaan, että *f* on epäjatkuva rationaalipisteissä.

Olkoon $x = q_k \in \mathbf{Q}$ mielivaltainen ja $y \in \mathbf{R}$ siten, että $y > x$. Tällöin

$$f(y) \geq f(x) + 2^{-k},$$

koska termi 2^{-k} ei ole mukana summassa $f(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbf{N}, \\ q_n < x}} 2^{-n}$ mutta on mukana summassa $f(y) = \sum_{\substack{n \in \mathbf{N}, \\ q_n < y}} 2^{-n}$. Tällöin siis

$$|f(x) - f(y)| \geq 2^{-k},$$

jollekin $k \in \mathbf{N}$, joten f on epäjatkuva pisteessä *x*. Koska *x* oli mielivaltaisesti valittu rationaalipiste on *f* epäjatkuva ja epäderivoituva jokaisessa rationaalipisteessä.

Lebesguen lauseen nojalla funktion f rajoittuma mille tahansa suljetulle välille $[a, b]$ on kuitenkin derivoituva *melkein kaikkialla*. Tällöin funktio on tietenkin myös jatkuva *melkein kaikkialla* välillä $[a, b]$.

8 IDEOITA OPETTAMISEEN

Tässä luvussa pohditaan, kuinka luvuissa 6 ja 7 esitettyjä erikoistapauksia voisi opettaa lukion pitkän matematiikan syventävillä kursseilla.

8.1 Reaalifunktiot ja jatkuvuus

Reaaliarvoiset funktiot ovat olleet 1600-luvulta lähtien yleinen työkalu geometristen käyrien tutkimiseen sekä mekaniikan ja tähtitieteen laskuihin. Funktio-sana ja merkintä $y = f(x)$ ovat peräisin vasta 1700-luvulta. Tuolloin käsitellyt reaalifunktiot olivat pääsääntöisesti alkeisfunkioista muodostettuja, eri määrittelyjoukoissa mahdollisesti eri kaavoilla. Tällöin reaalifunktiot olivat siis jatkuvia lukuun ottamatta korkeintaan määrittelyjoukkojen rajapisteitä. Tämä historia huomioonottaen on aivan luonnollista ajatella, että reaalifunktio on jatkuva lukuun ottamatta korkeintaan yksittäisiä pisteitä. Ei ole siis ollenkaan yllättävää, että monet lukion pitkän matematiikan opiskelijat olettavat funktioiden olevan jatkuvia tai ainakin jatkuvia lukuun ottamatta yksittäisiä pisteitä. Ks. [11, s.202].

1800-luvulla funktion määritelmä alkoi tarkentua. Määriteltiin, että *mikä tahansa piirretty käyrä* on funktio tai *jos jokaista x vastaa yksikäsitteinen äärellinen y, niin y on x:n funktio*. Nykymuotoinen funktion määritelmä on peräisin Lejeune Dirichletiltä (1805 - 1859) vuodelta 1837. Hän määritteli seuraavasti: *Funktio* $f : A \to B$ *koostuu kahdesta joukosta, määrittelyjoukosta A ja arvojoukosta B, ja säännöstä, joka määrittää jokaiselle* $x \in A$ *yksikäsitteisen* $y \in B$. Kun otetaan huomioon, että derivaatta-käsite kehittyi varsin pitkälle jo 1600-luvun lopulla, niin nykyinen funktio-käsite on itse asiassa melko tuore. Ks. [11, s.202].

8.2 Jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta

Jatkuvuuden ja derivoituvuuden opettaminen kuuluu pitkän matematiikan pakollisiin kursseihin. Näiden käsitteiden opettamiseen on tarjolla runsaasti erilaisia oppimateriaaleja. Jatkuvuuden ja derivoituvuuden osalta pitäisi tuoda selkeästi esille niiden välinen yhteys. Derivoituvuuteen johdattelemiseksi keskimääräisten nopeuksien avulla on käsitelty luvussa 3.3 Hähkiöniemen [16] esittelemä hyvä metodi. Lisäksi luvussa 1.3 on esitelty *paikallinen suoruus* -käsite ja muutamia esimerkkejä sen käyttämiseksi tietokoneen avulla derivoituvuuden hahmottamisessa. Tätä metodia voidaan mielestäni hyvin hyödyntää havainnollisen käsityksen aikaansaamiseksi derivoituvuus-käsitteestä.

8.3 Jatkuvat ei-missään derivoituvat funktiot

8.3.1 Weierstrassin funktio

Jatkuvista ei-missään derivoituvista funktioista voidaan tarkastella esimerkkinä Weierstrassin funktiota. Vaikka esimerkiksi McCarthyn funktion (ks. luku 6.3) analyyttinen todistaminen onkin helpompi, niin Weierstrassin funktion määrittely on yksinkertaisempi. Tarkasti Weierstrassin funktio $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ määritellään seuraavasti

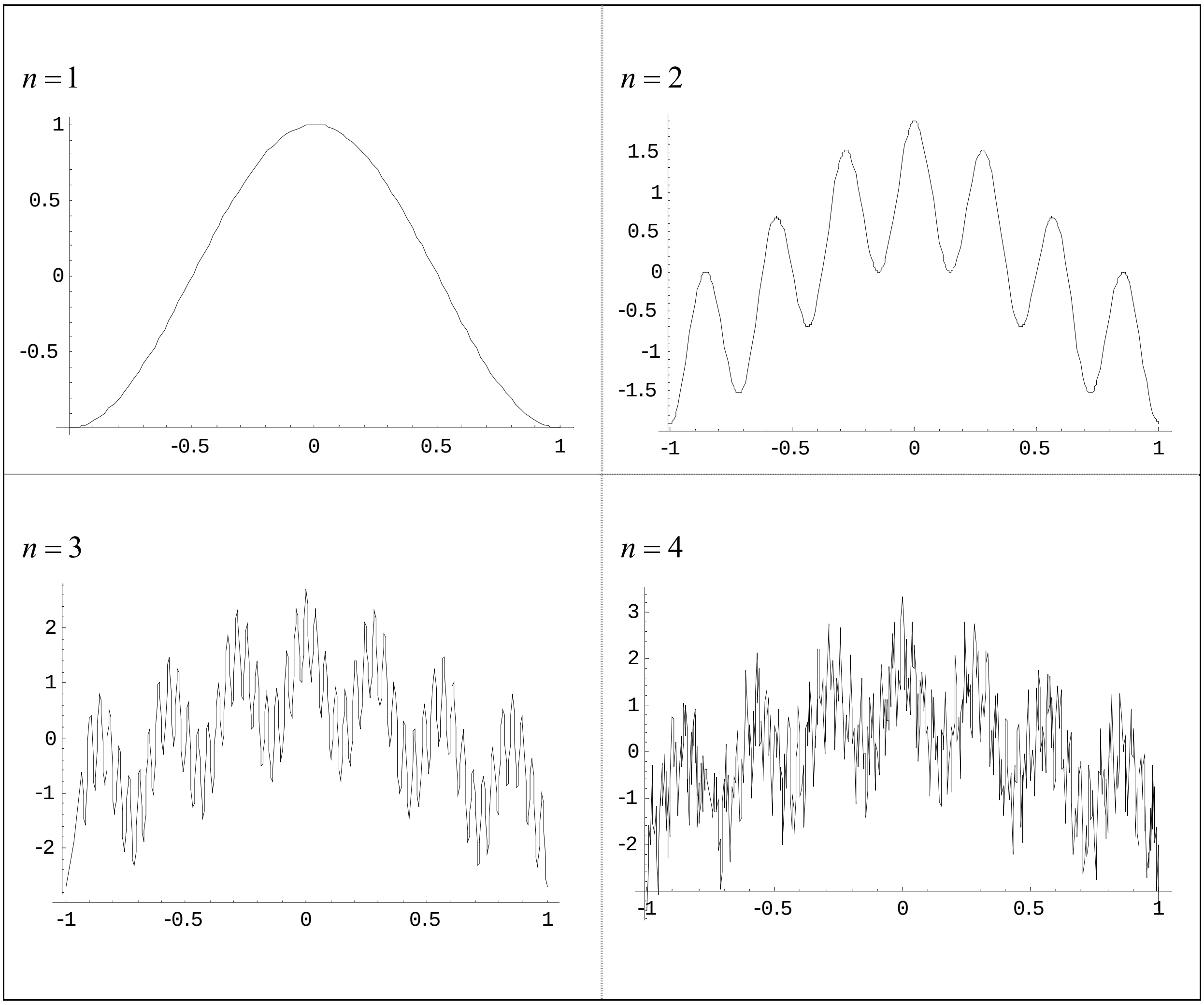
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x),$$

missä $0<b<1$ ja a on pariton positiivinen kokonaisluku siten, että $ab>1+\frac{3\pi}{2}$. Lukiossa funktiosta voisi tarkastella esimerkkinä yhtä erikoistapausta, jossa esimerkiksi $a=7$ ja $b=0,9$. Tällöin funktio saadaan muotoon

$$W(x)=\sum_{k=0}^{\infty} 0,9^k \cos(7^k \pi x).$$

Funktion rakennetta äärettömänä summana voidaan selvittää opiskelijoille kirjoittamalla auki osasummia $S_n=\sum_{k=0}^{n-1} 0,9^k \cos(7^k \pi x)$ ja tarkastelemalla näiden kuvaajia[3]. Weierstrassin funktiohan saadaan raja-arvona $W(x)=\lim_{n\to\infty} S_n$. Kuvassa 8.1 on esitetty osasummien kuvaajat *n*:n arvoilla 1, 2, 3 ja 4 välillä $[-1,1]$. Kuvista voidaan todeta opiskelijoiden kanssa, että aina *n*:n arvon kasvaessa yhdellä muodostuu kuvaajaan yhden huipun tilalle seitsemän huippua (huomaa, että $a=7$).

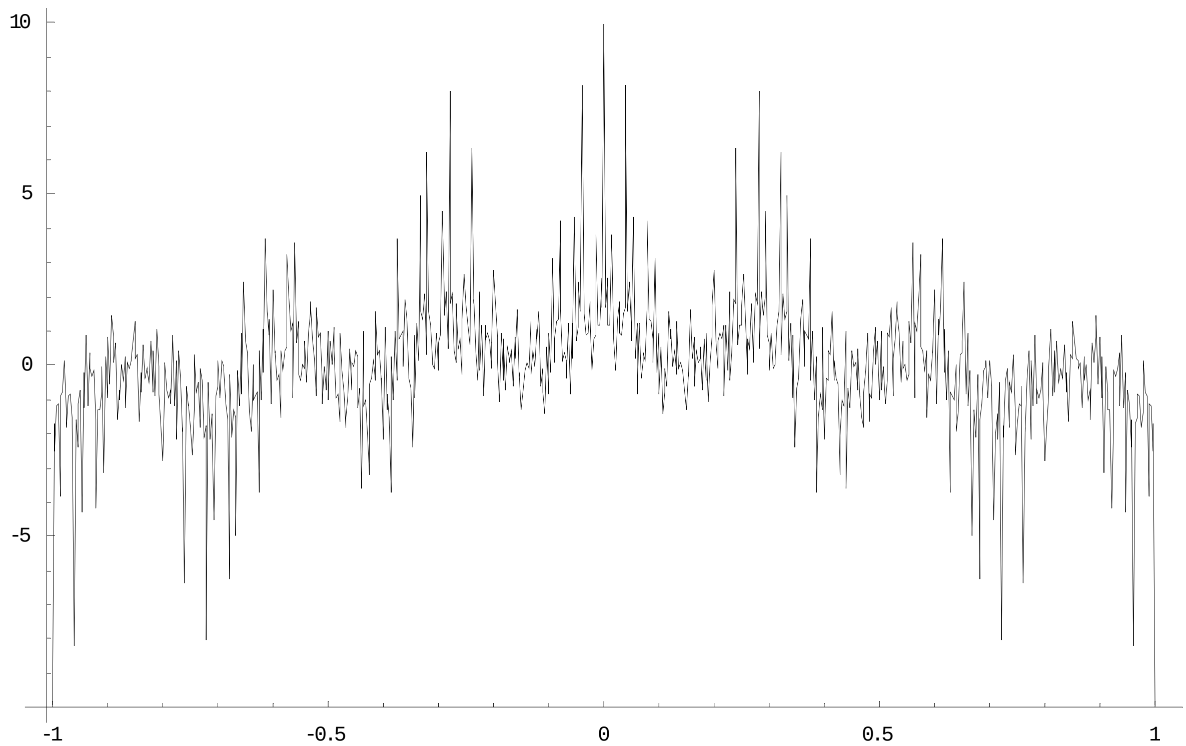
[3] Tämän materiaalin kuvaajat on piirretty *Mathematica*-ohjelmalla.



Kuva 8.1: Weierstrassin funktion osasummien kuvaajia.

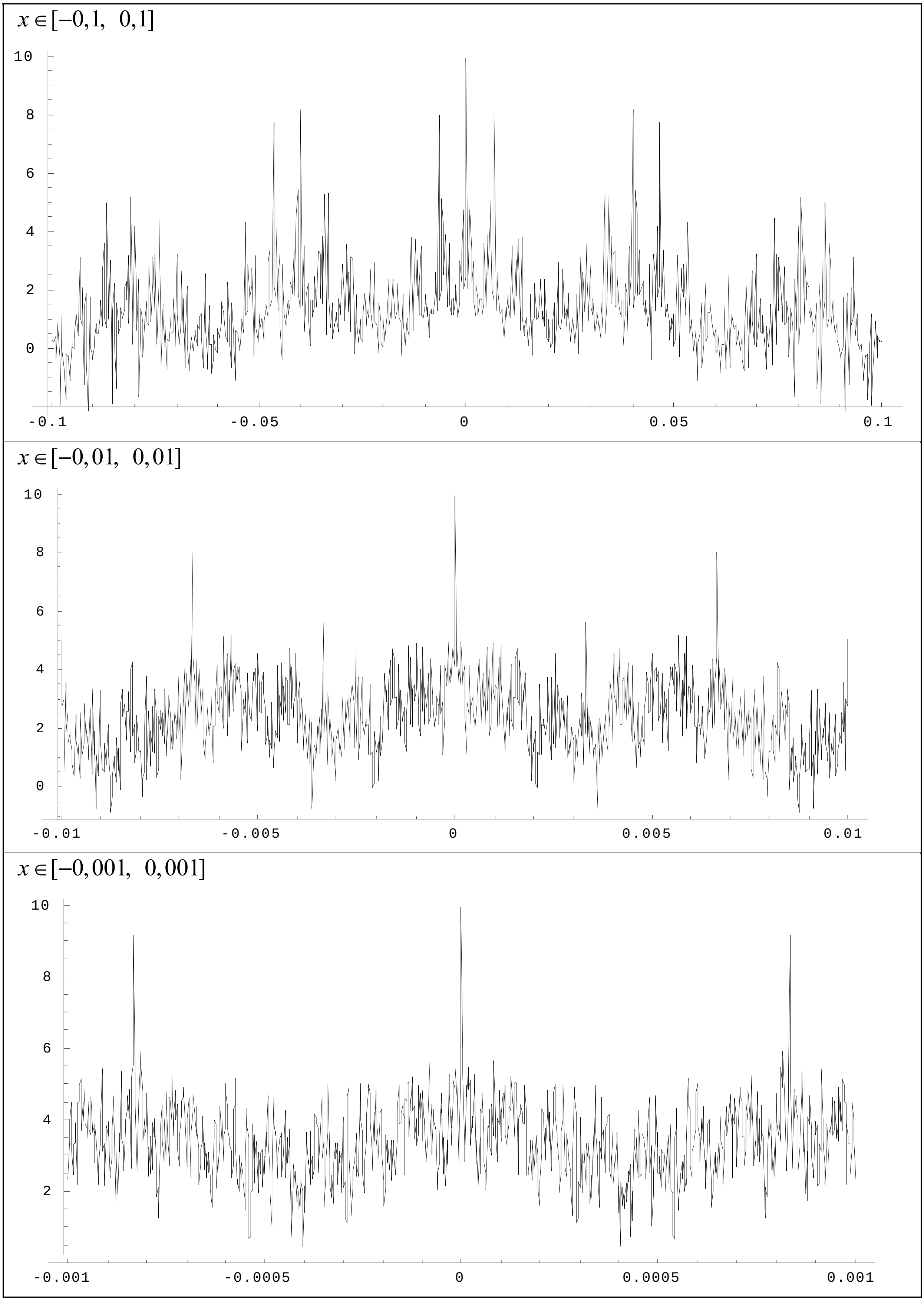
Osasummien kuvaajia tarkastelemalla voidaan luoda havainnollinen kuva siitä, kuinka funktion rakenne kehittyy n:n arvon kasvaessa. Opiskelijoille voidaan korostaa, että monimutkaiselta näyttävä funktio on kuitenkin vain tavallisten trigonometristen funktioiden summa. Kuvaajien avulla nähdään, kuinka funktioon alkaa muodostua yhä terävämpiä huippuja n:n arvon kasvaessa. Tässä yhteydessä on hyvä käydä läpi uutena asiana tai muistuttaa mieleen paikallisen suoruuden käsite derivoituvuutta tutkittaessa, ja että funktio ei ole derivoituva terävässä kärkipisteessä eli ”piikissä”. Kuvaajien tulkintaan opiskelijoiden kanssa kannattaa mielestäni käyttää reilusti aikaa, koska on tärkeää, että opiskelijoille muodostuu selvä geometrinen käsitys, kuinka Weierstrassin funktio rakentuu n:n arvon kasvaessa. Opiskelijoiden kanssa pitää käydä huolella läpi Weierstrassin funktion muodostuminen näiden tutkittujen funktioiden raja-arvona, kun n kasvaa rajatta. Koska emme kuitenkaan voi laskea äärettömän monen funktion summaa, joudumme tarkastelemaan aina osasummia.

Kun funktion rakennetta on käyty läpi ja tutkittu, kuinka huiput käyvät yhä terävämmiksi *k*:n arvon kasvaessa, siirrytään tutkimaan tiettyä osasummaa geometrisesti. Funktion rakenteen tutkiminen onnistuu hyvin jo esimerkiksi osasummalla, jossa *n*:n arvo on 51. Tämän osasumman kuvaajien piirtäminen onnistuu vielä suhteellisen nopeasti, mutta suurempien osasummien kuvaajien piirtäminen alkaa olla jo aika hidasta tavallisella tietokoneella. Osasumman S_{51} kuvaaja välillä $[-1,1]$ on esitetty kuvassa 8.2.



Kuva 8.2: Weierstrassin funktion osasumman S_{51} kuvaaja välillä [-1,1].

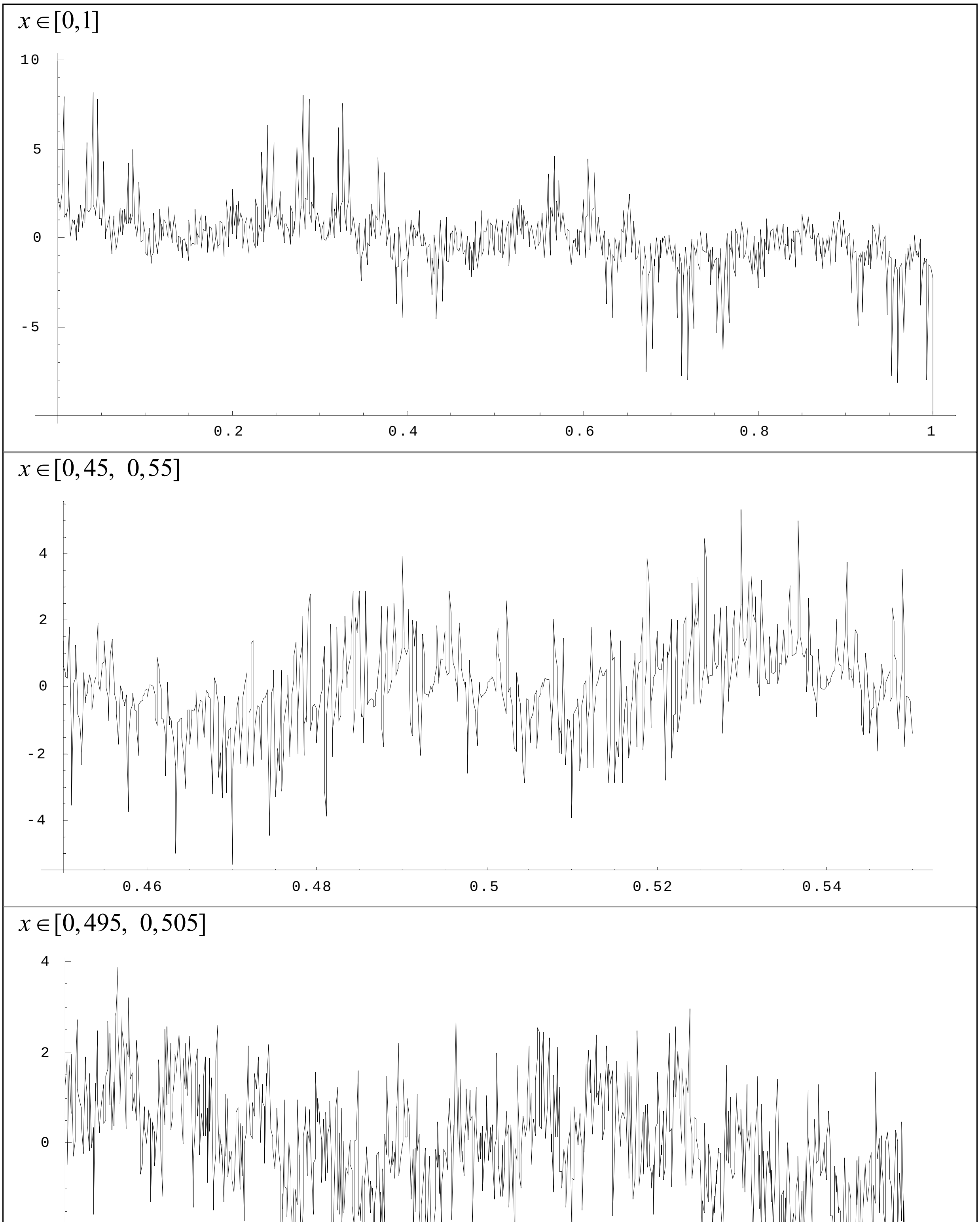
Seuraavaksi tutkitaan Weierstrassin funktion derivoituvuutta origossa osasumman S_{51} avulla. Käytetään luvussa 1.3 esitettyä paikallisen suoruuden käsitettä ja tutkitaan, läheneekö funktion kuvaaja suoraa paikallisesti sitä lähennettäessä. Kuvassa 8.3 on esitetty 10-, 100-, ja 1000-kertaiset suurennokset kuvassa 8.2 esitetystä osasumman S_{51} kuvaajasta origon läheisyydessä.



Kuva 8.3: Weierstrassin funktion osasumman S_{51} kuvaajan lähennys kohdassa x=0.

Suurennoksia tarkastelemalla huomataan, että tutkittavan funktion kuvaaja ei lähene suoraa origon ympäristössä eli että se ei ole derivoituva origossa. Kuitenkin funktio on jatkuva origossa jatkuvien funktioiden tasaisena raja-arvona (osoitettu tarkasti luvussa 6.2.2). Jatkuvuutta voi tarkastella opiskelijoiden kanssa funktion kuvaajista toteamalla esimerkiksi, että kuvien perusteella funktio näyttää olevan jatkuva.

Sama tarkastelu voidaan tehdä missä kohdassa tahansa, ja päädytään samaan tulokseen. Kuvassa 8.4 vastaava tarkastelu on tehty kohdassa $x = 0,5$. Kun vastaava tarkastelu tehdään useammassa opiskelijoiden mielivaltaisesti valitsemassa kohdassa ja tarkastellaan, kuinka kuvaajan perusteella funktio on jatkuva mutta epäderivoituva näissä kohdissa, muodostuu opiskelijoille mielikuva, että on olemassa *jatkuvia ei-missään derivoituvia* funktioita. Kuvaajat kannattaa piirtää koko ruudun kokoisina, jos ne näytetään dataprojektorin kautta, ja A4 kokoisina, jos ne näytetään opiskelijoille kalvolta. Tarkoituksena ei ole, että opiskelijat ymmärtävät funktioiden analyyttisen rakenteen tai että funktioiden ominaisuuksia todistetaan analyyttisesti, vaan että heille muodostuu mielikuva tällaisten funktioiden rakenteesta ja olemassaolosta.



Kuva 8.4: Weierstrassin funktion osasumman S_{51} kuvaajan lähennys kohdassa x=0,5.

8.3.2 Riemannin funktio

Kuten luvussa 6.2.4 todettiin, esitti Riemann (tai Weierstrass) noin vuonna 1861 Riemannin funktiona tunnetun funktion, joka muistuttaa rakenteeltaan Weierstrassin funktiota. Riemannin funktio $R:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ määritellään seuraavasti:

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\pi n^2 x)\,.$$

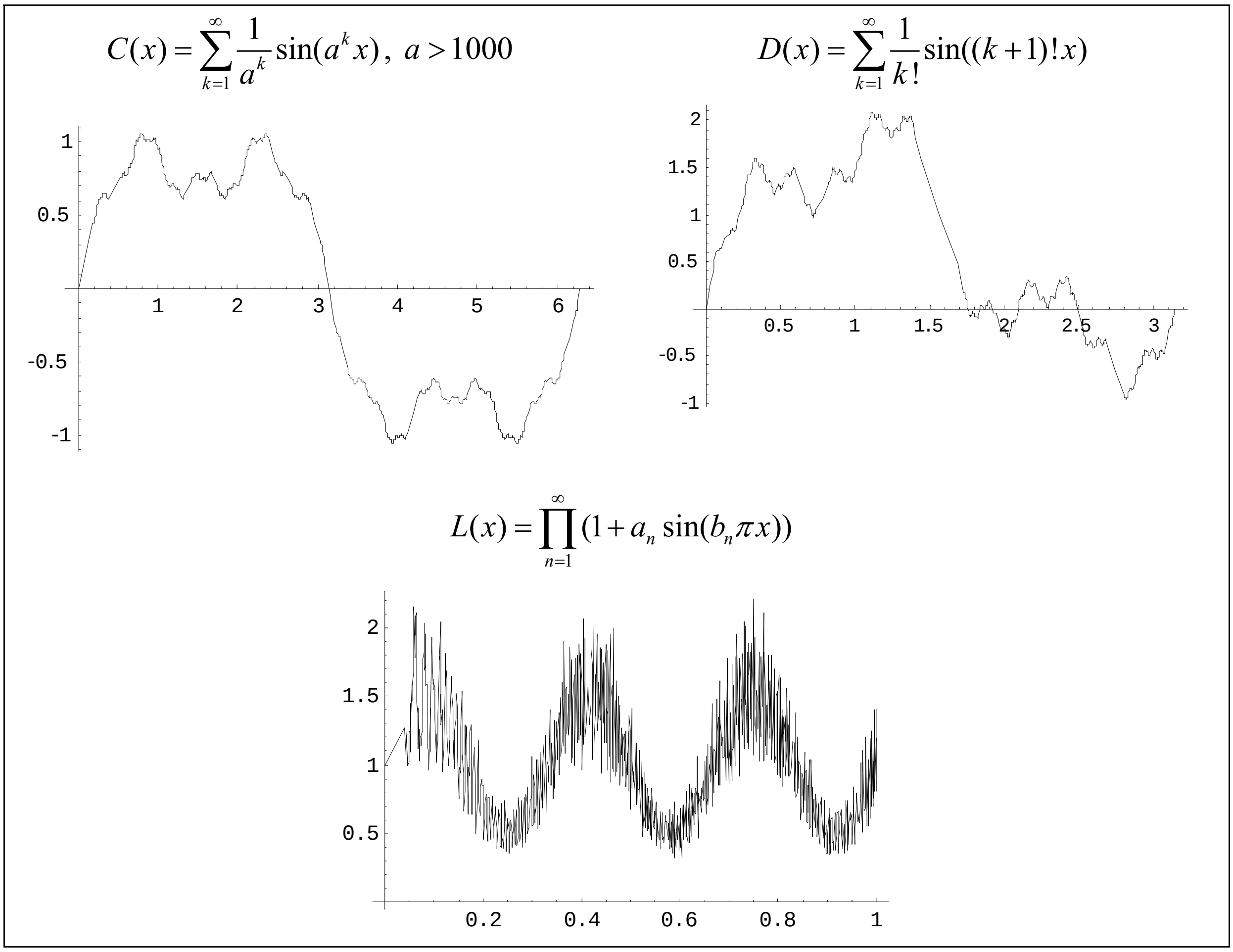
Weierstrass yrittikin osoittaa funktiota *R ei-missään derivoituvaksi*. Riemannin funktio on mielenkiintoinen, koska se muistuttaa huomattavasti Weierstrassin funktiota, mutta on kuitenkin derivoituva täsmälleen pisteissä

$$x_0=\frac{2n+1}{2m+1},\quad n,m\in\mathbf{N}\,,$$

derivaattana $-\frac{1}{2}$. Muissa pisteissä Riemannin funktio ei ole derivoituva. Tämä pystyttiin todistamaan kuitenkin vasta vuonna 1970 (ks. [27, s.115]).

8.3.3 Jatkuvien ei-missään derivoituvien funktioiden rakenteesta

Epäderivoituvuuskohdissa Weierstrassin funktion kuvaajaan muodostuu piikki. Tällöin siis funktio vaihtuu epäderivoituvuuskohdassa kasvavasta laskevaksi tai päinvastoin. *Jatkuva ei-missään derivoituva* funktio on rakenteeltaan ”sahalaitainen”, eli se ei voi olla monotoninen. Myöhemmin tässä luvussa tarkastellaan monotonisen funktion derivoituvuutta. On syytä tuoda esille, että Weierstrassin funktio ei ole ainoa *jatkuva ei-missään derivoituva* funktio. Muita vastaavia funktioita voidaan esitellä opiskelijoille lyhyesti ja tarkastella samalla, kuinka näiden kaikkien rakenne on ”sahalaitainen”. Kuvassa 8.5 on esitetty Cellérierin funktion *C*, Darboux’n funktion *D* ja Wenin funktion *L* (ks. tarkempi määrittely luvusta 6.4.5) lausekkeet ja kuvaajat.



Kuva 8.5: Jatkuvia ei-missään derivoituvia funktiota.

8.3.4 Onko jatkuvia ei-missään derivoituvia funktioita paljon?

On mielenkiintoista pohtia, kumpia on enemmän: jatkuvia funktioita, jotka ovat jossakin pisteessä derivoituvia, vai jatkuvia funktioita, jotka eivät ole missään derivoituvia. Opiskelijoille on varmasti selvää, että ensimmäisiä on äärettömän paljon. Se, että jälkimmäisiä on äärettömän paljon, voidaan perustella esimerkiksi Weierstrassin funktion avulla, koska vakiot a ja b voidaan valita äärettömän monella eri tavalla. Voidaan osoittaa, että ”ikäviä” funktioita on paljon enemmän kuin ”siistejä” funktioita; toisin sanoen mielivaltaisesti valittu jatkuva funktio ei yleensä ole missään derivoituva. Tämän analyyttinen todistaminen ei onnistu koulumatematiikan eikä yliopiston peruskurssien avulla. Todistus perustuu Bairen kategorioihin (ks. luku 6.6)

8.4 Monotonisen funktion derivaatta

Edellisessä luvussa on todettu, että *jatkuvat ei-missään derivoituvat* funktiot ovat rakenteeltaan ”sahalaitaisia”. Seuraavaksi voidaan tutkia, miten funktion derivoituvuus muuttuu, jos funktio onkin monotoninen. Luvussa 7 on osoitettu, että suljetulla välillä monotoninen funktio on derivoituva *melkein kaikkialla* kyseisellä välillä. Luvussa 7.5. on annettu yksi esimerkki monotonisesta funktiosta, joka on epäjatkuva määrittelyvälin jokaisessa rationaalipisteessä mutta silti derivoituva (ja siis jatkuva) melkein kaikkialla. Mutta kuten luvussa 8.1 on todettu on jatkuvuus varsin luonnollinen ominaisuus funktiolle, joten mielestäni lukiossa voidaan keskittyä jatkuviin monotonisiin funktioihin ja tutkia niiden derivoituvuutta.

Kun opiskelijoille on saatu luotua geometrinen käsitys *jatkuvista ei-missään derivoituvista* funktioista, voidaan miettiä, mitä tapahtuu, jos funktio onkin monotoninen, esimerkiksi kasvava. Voidaan piirtää kasvavien funktioiden kuvaajia suljetulla välillä ja todeta, että kuvaajasta ei saada ”sahalaitaista”. Erilaisia jatkuvia funktioita, joilla on epäderivoituvuuskohtia tutkittavalla välillä, voidaan toki määritellä yhdistelemällä eri kulmakertoimisia suoria. Kuvaajien avulla voidaan todeta, että kulmia saadaan helposti monotoniseen funktioon aikaiseksi niin monta kuin halutaan mutta ne ovat silti aina yksittäisiä pisteitä, joiden välissä funktion täytyy olla kasvava. Tällöin epäderivoituuskohdat muodostuvat vain yksittäisiin pisteisiin tutkittavalla välillä. Opiskelijoille voidaan mielestäni mainita, että monotoninen funktio on suljetulla välillä *melkein kaikkialla* derivoituva. Se on siis derivoituva koko välillä lukuun ottamatta joukkoa, jonka poistaminen ei vaikuta välin pituuteen.

8.5 Yhteenveto

Yllä esiteltyjen asioiden läpikäymisen tavoitteena on, että opiskelijoiden käsitys jatkuvuudesta ja derivoituudesta syvenee. Tavoitteena on luoda selkeä kuva siitä, että jatkuvan funktion ei välttämättä tarvitse olla derivoituva ja että jatkuvuus ei välttämättä takaa derivoituvuutta yhdessäkään pisteessä. Lisäksi opiskelijoille pyritään luomaan havainnollinen käsitys *jatkuvien ei-missään derivoituvien* funktioiden rakenteesta ja siitä, kuinka funktion monotonisuus vaikuttaa sen derivoituvuuteen.

9 POHDINTA

9.1 Johtopäätökset

Lukion opetussuunnitelman perusteiden kehitys on mielestäni ollut positiivista. Merkittävämmän roolin antaminen keskeisten käsitteiden - *raja-arvo*, *jatkuvuus* ja *derivoituvuus* - ymmärtämiselle ja hahmottamiselle on ollut erinomainen ratkaisu. Myös syventävän kurssin kehitys kurssiksi, joka uusien asioiden esittämisen sijasta syventää analyysin käsitteiden ymmärrystä, on ollut oikea ratkaisu.

Lukion oppikirjoissa analyysin kannalta keskeisten käsitteiden *jatkuvuus* ja *derivoituvuus* välistä yhteyttä pitäisi mielestäni käsitellä selvemmin. Oppikirjoissa tulisi määritellä käsitteiden välinen suhde niin tarkasti, että tulkinnan varaa ei jää. Kirjoissa pitäisi tehdä selväksi, että epäjatkuva funktio ei voi olla derivoituva, derivoituva funktio on aina myös jatkuva ja että jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituva. Jatkuvuus on siis välttämätön mutta ei riittävä ehto derivoituvuudelle. Tällä hetkellä kirjat eivät mielestäni pääse tähän tavoitteeseen.

Lukion oppikirjoissa ei mainita lainkaan erikoistapauksia, kuten *jatkuvia ei-missään derivoituvia* funktiota. Tällaisten erikoistapausten esitteleminen lukion pitkän matematiikan opiskelijoille selvittäisi jatkuvuuden ja derivoituvuuden ominaisuuksia sekä niiden välistä yhteyttä. Vaikka funktioita ei voida käydä tarkasti analyyttisesti läpi, niiden geometrinen tarkastelu auttaisi käsitteiden hahmottamisessa. Jos opiskelija tietäisi, että on olemassa funktioita, jotka ovat jatkuvia mutta ei-missään derivoituvia, ja ymmärtäisi, millaisia ne ovat rakenteeltaan, olisi hänellä jo varsin paljon tietoa käsitteistä *jatkuvuus* ja *derivoituvuus*. Käsitteiden hahmotus syvenisi entisestään, jos lisäksi tarkasteltaisiin tilannetta, jossa funktio on monotoninen, ja todettaisiin se derivoituvaksi *melkein kaikkialla*.

Lukion pitkän matematiikan opiskelijoille suoritetun kyselyn tulokset antavat olettaa, että opiskelijat hallitsevat varsin heikosti jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen yhteyden. Kovin yleistäviä tuloksia kyselyn perusteella ei voida tehdä, koska otos oli varsin pieni, mutta tulos on kuitenkin suuntaa antava. Koska derivoituvuus on selkeästi vahvempi ominaisuus kuin jatkuvuus, tavoitteena pitää olla, että derivaatan opiskeltuaan opiskelijat hallitsevat näiden käsitteiden välisen yhteyden paremmin.

9.2 Jatkotutkimusehdotuksia

Olisi mielenkiintoista kehittää tässä tutkimuksessa käytettyä kyselylomaketta vielä paremmin jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen yhteyden hallintaa mittaavaksi ja suorittaa kysely suuremmalle otokselle useamman kaupungin lukioissa. Lukiolaisten käsityksiä jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta olisi mielenkiintoista selvittää myös haastattelemalla opiskelijoita. Kiinnostavaa olisi myös tutkia, kuinka hyvin matematiikan opettajat ja matematiikan opettajaksi opiskelevat hallitsevat käsitteiden välisen yhteyden.

Mielenkiintoista olisi suunnitella luvussa 8 esitettyjen opetusideoiden pohjalta opetusmateriaali lukion pitkän matematiikan syventävälle kurssille *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi* ja päästä testaamaan sitä lukioon. Opiskelijoiden käsityksiä jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta voitaisiin testata ennen ja jälkeen opintojakson. Kiinnostavaa olisi tutkia, kuinka lukioissa käytettyjä opetusmateriaaleja voitaisiin kehittää niin, että käsitteiden hahmottaminen saataisiin mahdollisimman selkeäksi. Voitaisiin myös tutkia matematiikan opettajien opetusta yliopistossa, ja kuinka käsitteiden ymmärtämistä ja hahmottamista opinnoissa voitaisiin parantaa.

LÄHDELUETTELO

[1] Apostol, T. M.: *Calculus, Volume 1, (2nd ed.)*. John Wiley & Sons, Singapore, 1967.

[2] Arcavi, A.: *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics.* Educational Studies in Mathematics, 52(3), (2003), 215-241.

[3] Billingsley, P.: *Van Der Waerden's Continuous Nowhere Differentiable Function.* The American Mathematical Monthly, Vol. 89, No. 9 (1982), 691.

[4] Boyer, C.: *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia osat I ja II*. Art House, Juva, 2000.

[5] Bruckner, A. M., Bruckner, J. B. & Thomson, A. S.: *Real Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1997.

[6] Gaul, R. & Kim, N.: *How Many continuous Nowhere Differentiable Functions Are There?* Nebraskan yliopisto: Mathematics Awareness Month 2002. <*http://www.unomaha.edu/wwwmath/MAM/2002/Poster02/Contnondiff.pdf* > 27.1.2006

[7] Gerver, J.: *The Differentiability of the Riemann Function at Certain Rational Multiples of π.* American Journal of Mathematics, Vol. 92, No. 1 (1970), 33-55

[8] Gerver, J.: *More on the Differentiability of the Riemann Function.* American Journal of Mathematics, Vol. 93, No. 1 (1971), 33-41

[9] Giraldo, V., Carvalho, L. M. & Tall, D. (2002): *Theoretical-Computational Conflicts and the Concept Image of Derivative.* Proceedings of the BSRLM Conference, Nottingham, England, 22 (3), 37–42. Saatavana sähköisenä: <*http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002m-giraldo-carv.pdf*> 29.3.2006.

[10] Haapasalo, L., Luotonen, S. & Pellikka, P.: *Miten lukiolaiset hallitsevat funktion jatkuvuuden käsitteen?* Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä, 1997.

[11] Hairer, E. & Wanner, G.: *Analysis by Its History.* Springer – Verlag, New York, 1996.

[12] Hardy, G. H.: *Weierstrass's Non-Differentiable Function.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 17, No. 3 (1916), 301-325.

[13] Heiskanen, P.: *Derivaatta antiikista nykyaikaan*. Matematiikan LuK-tutkielma, Jyväskylän yliopisto: Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2005. Saatavana sähköisenä: <*http://www.cc.jyu.fi/~pave/opiskelu/luk.pdf*> 13.3.2006.

[14] Hewitt, E. & Stromberg, K.: *Real and Abstract Analysis*. Springer – Verlag, Berlin, 1965.

[15] Hykšová, M.: *Karel Rychlík and Bernard Bolzano*. 2000. <*http://euler.fd.cvut.cz/publikace/HTM/MH_BB31.pdf*> 3.2.2006

[16] Hähkiöniemi, M.: *Ajattelun apuvälineet - tapaustutkimus derivaatan representaatioista.* Kasvatustieteen pro gradu -työ, Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteen laitos, 2005.

[17] Jäppinen, P., Kupiainen, A. & Räsänen, M.: *Calculus 3, Lukion pitkä matematiikka*. Otava, Keuruu, 1997.

[18] Jäppinen, P., Kupiainen, A. & Räsänen, M.: *Calculus 6, Lukion pitkä matematiikka*. Otava, Keuruu, 2001.

[19] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J. & Salmela, M.: *Pitkä matematiikka: Analyysi*. WSOY, Porvoo, 2003.

[20] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J. & Salmela, M.: *Pitkä matematiikka: Differentiaalilaskenta 1*. WSOY, Porvoo, 2005.

[21] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J. & Salmela, M.: *Pitkä matematiikka: Differentiaalilaskenta 2*. WSOY, Porvoo, 2002.

[22] Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R. & Savolainen, S.: *Pyramidi 3, Matematiikan tietokirja*. Tammi, Hämeenlinna, 2004.

[23] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994*. Opetushallitus, Helsinki, 1994.

[24] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Opetushallitus, Vammala, 2003. Saatavana sähköisenä: <*http://www.oph.fi/pageLast.asp?path=1;17627;927;1560;9610;23059*> 27.3.2006.

[25] Merikoski, J., Sankilampi, T. & Laurinolli, T.: *Matematiikan taito 6-7: Differentiaalilaskenta 1-2*. WSOY, Porvoo, 2002.

[26] Merkikoski, J., Väänänen, K., Laurinolli, T. & Sankilampi, T.: *Matematiikan taito 13: Analyysi*. WSOY, Porvoo, 1998.

[27] Meyer, Y.: *Wavelets: Algorithms & Applications.* SIAM, Philadelphia, 1993, s. 115-118.

[28] Nieminen, K. & Tenhunen, M.: *Derivaatta-käsitteen hallinta lukion 2. luokan pitkän matematiikan oppilaalla*. Matematiikan pro gradu -työ, Jyväskylän yliopisto: Matematiikan laitos, 1996.

[29] Nurmi, J.: *Pitkän matematiikan opetussuunnitelman uudistus*. Dimensio, Vol. 66, 3/2002, 28-32.

[30] Nurmiainen, R. & Rauhalinna, J.: *Pyramidi, Analyysi*. Tammi, Jyväskylä, 2004.

[31] McCarthy, J.: *An Everywhere Continuous Nowhere Differentiable Function*. The American Mathematical Monthly, Vol. 60, No. 10 (1953), 709.

[32] Pahkin, L.: *Opetussuunnitelmien perusteiden uudistaminen*. Dimensio, Vol. 67, 6/2003, 10-12.

[33] Purmonen, V. T.: *Mitta- ja integraaliteoriaa*. Luentomoniste 14, Jyväskylän yliopisto: Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylä, 2001.

[34] Tall, D.: *Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics*. Teoksessa Carvalho, L.M. & Guimarães, L.C.: *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brasil. Saatavana sähköisenä: <*http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003a-rio-plenary.pdf*> 1.4.2006.

[35] Thim, J.: *Continuous Nowhere Differentiable Functions.* Master Thesis, Luleå tekniska universitet, 2003. Saatavana sähköisenä: <*www.ludd.luth.se/~ivileel/master_thesis.pdf*> 27.1.2006.

[36] Veselý, J.: *Weierstrass' Theorem before Weierstrass*. 2003. <*http://www.math.technion.ac.il/hat/fpapers/jiri.pdf*> 27.1.2006.

[37] Viholainen, A.: *Why is a Discontinuous function differentiable?* Proceedings of PME30, Prague, Czech Rebublic, 2005.

[38] Wen, L.: *A Nowhere Differe*[illegible]*unction Constructed by Infinite Products.* The American Ma[illegible] Vol. 109, No. 4 (2002), 378-380.

LIITE:
KYSELYLOMAKE
•
Henkilötiedot:
Sukupuoli: Mies ••
Nainen ••
Suoritetut kurssit:
MAA6 ••MAA7 ••
Analyysin jatkokurssi ••

LIITE: KYSELYLOMAKE

Henkilötiedot:

Sukupuoli:	Mies ☐	Nainen ☐	
Suoritetut kurssit:	MAA6 ☐	MAA7 ☐	Analyysin jatkokurssi ☐
Kurssien arvosanat:	MAA6:_______	MAA7:______	Analyysin jatkokurssi:_______

Määritelmiä:

Oletetaan, että funktio *f* on määritelty kohdan x_0 ympäristössä.

1) Funktio on **jatkuva kohdassa** x_0, kun

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Jos *f* ei ole jatkuva kohdassa x_0, niin se on **epäjatkuva** tässä kohdassa.
Funktio *f* on **jatkuva**, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa kohdassa.

2) Jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on olemassa, niin funktio *f* on **derivoituva kohdassa** x_0. Saatua raja-arvoa sanotaan funktion *f* derivaataksi kohdassa x_0 ja merkitään $f'(x_0)$.
Jos *f* ei ole derivoituva kohdassa x_0, niin se on **epäderivoituva** tässä kohdassa.
Funktio *f* on **derivoituva**, jos se on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukkonsa kohdassa.

Tehtävä 1

Ovatko seuraavat väittämät totta vai tarua?

	Totta	**Tarua**
1. Derivoituva funktio on aina myös jatkuva.		
2. Jatkuva funktio on aina myös derivoituva.		
3. Jos $f'(2) = 4$, niin funktio *f* on jatkuva kohdassa $x = 2$.		
4. Jos funktio on jatkuva suljetulla välillä [1, 5], niin se on derivoituva avoimella välillä]1, 5[.		
5. Jos funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$, niin se ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$.		
6. Jos funktio on jatkuva kohdassa $x = 1$, niin se välttämättä on myös derivoituva kohdassa $x = 1$.		
7. Jatkuva funktio voi olla epäderivoituva yhdessä kohdassa.		
8. On olemassa funktioita, jotka ovat jatkuvia mutta eivät ole missään derivoituvia.		
9. Jos funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$, niin se voi silti olla derivoituva kohdassa $x = 1$.		
10. Jos funktio on jatkuva, niin se on derivoituva lukuunottamatta korkeintaan muutamia pisteitä.		
11. Funktio *f* ei ole derivoituva kohdassa $x = 5$. Tällöin funktio *f* ei voi olla jatkuva kohdassa $x = 5$.		
12. Jos funktio on derivoituva kohdassa $x = 1$, niin se voi olla epäjatkuva kohdassa $x = 1$.		

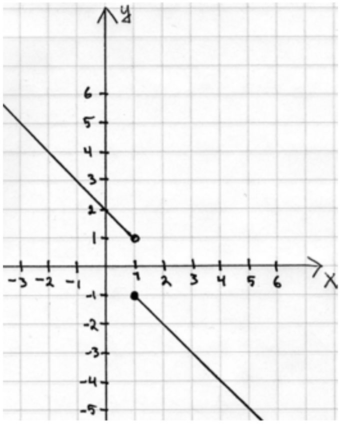
Tehtävä 2

Tarkastele seuraavia funktioita (1-6) ja vastaa jokaisen osalta kysymyksiin 1 ja 2.

1. Onko funktio jatkuva? Mikäli funktio ei mielestäsi ole jatkuva, niin missä kohdassa/kohdissa se ei ole jatkuva? (esim. Ei jatkuva kohdassa $x=5$)
2. Onko funktio derivoituva? Mikäli funktio ei mielestäsi ole derivoituva, niin missä kohdassa/kohdissa se ei ole derivoituva? (esim. Ei derivoituva kohdassa $x=5$)

Funktio 1

$$g(x)=\begin{cases} -x+2, & x<1 \\ -x, & x\geq 1 \end{cases}$$



1) ______________________

____

____

____

2) ______________________

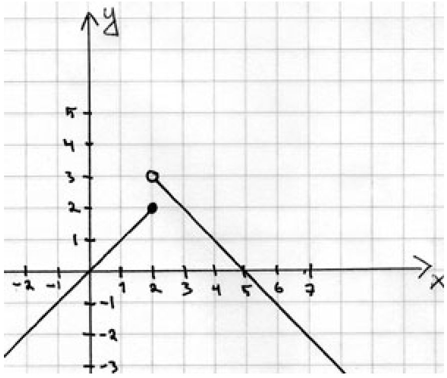
____

____

____

Funktio 2

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 2 \\ -x+5, & x>2 \end{cases}$$



1) ______________________

____

____

____

2) ______________________

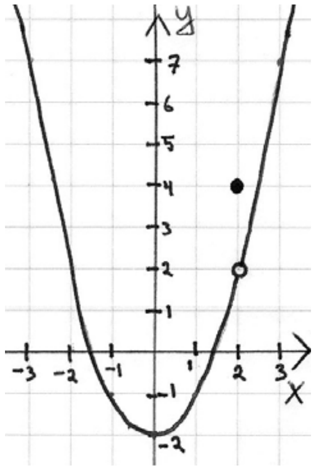
____

____

____

Funktio 3

$$h(x)=\begin{cases} x^2-2, & x\neq 2 \\ 4, & x=2 \end{cases}$$



1) ______________________

____

____

____

2) ______________________

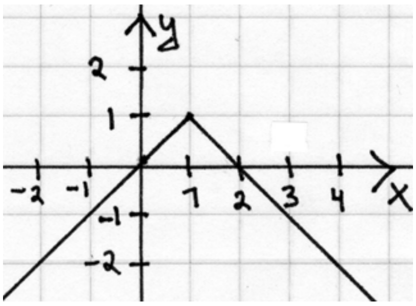
____

____

____

Funktio 4

$$k(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ 2-x, & x\geq 1 \end{cases}$$



1) ____________________

____

____

____

2) ____________________

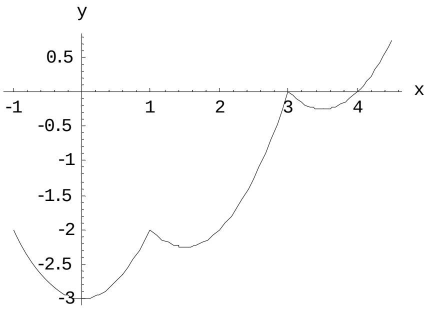
____

____

____

Funktio 5

$$m(x)=\begin{cases} x^2-3, & x<1 \\ x^2-3x, & 1\leq x<3 \\ x^2-7x+12, & x\geq 3 \end{cases}$$



1) ____________________

____

____

____

2) ____________________

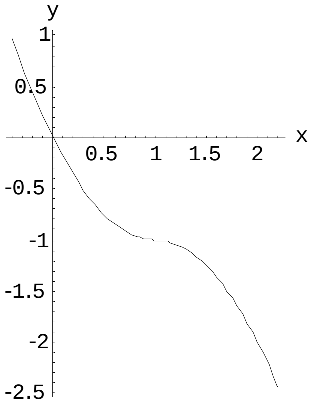
____

____

____

Funktio 6

$$n(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x\leq 1 \\ -x^2+2x-2, & x>1 \end{cases}$$



1) ____________________

____

____

____

2) ____________________

____

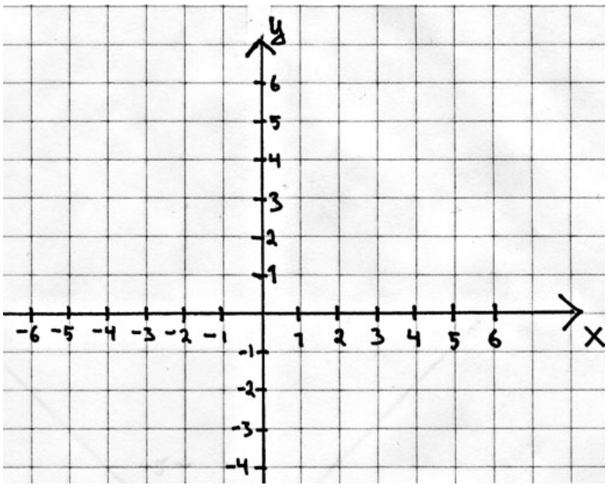
____

____

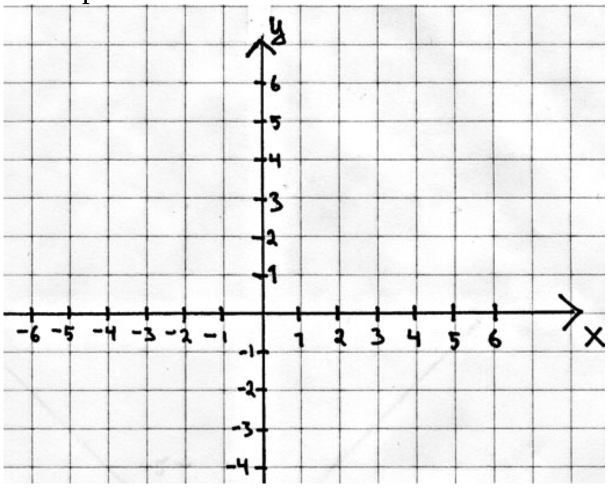
Tehtävä 3

Piirrä jokin funktio, joka toteuttaa annetun ehdon.

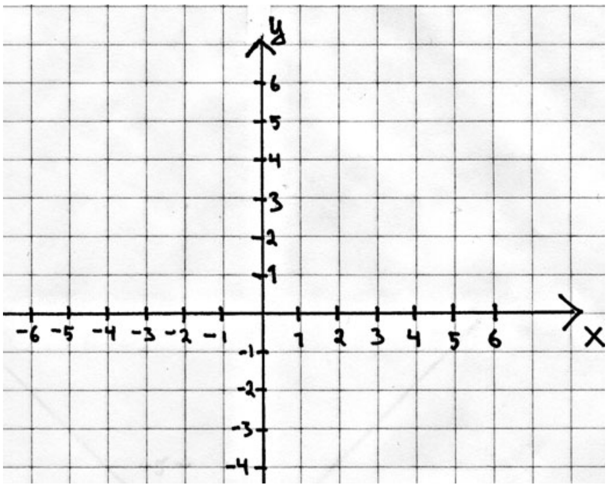
1. Funktio on kaikkialla jatkuva mutta ei ole derivoituva kohdassa $x = 3$



2. Funktiolla on 2 epäjatkuvuuskohtaa ja 3 epäderivoituvuuskohtaa



3. Funktio on jatkuva muualla paitsi kohdassa $x = 2$



4. Funktiolla on viisi epäderivoituvuuskohtaa