BERNOULLIN LUVUT JA EULER-MACLAURININ SUMMAKAAVA

JANNE KOPONEN

Pro Gradu-tutkielma
Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2007

Sisältö

1. Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään Bernoullin lukuja ja Bernoullin polynomeja sekä todistetaan Euler-MacLaurinin summakaava. Merkittävin lähde tutkielmalle on Ernst Lindelöfin teos "Differentiaali- ja Integraalilaskenta 1". Yksittäisten tulosten kohdalla ratkaisevassa osassa ovat olleet Ernst Hairerin ja Gerhart Wannerin "Analysis by its history" ja Lars V. Ahlforsin "Complex analysis".

Luvussa 2 on todistettu muutama yleisempi tulos. Luvun tarkoituksena on selkeyttää ja tiivistää myöhempiä lukuja, jotta niissä voidaan keskittyä tiiviimmin juuri käsiteltävään aiheeseen.

Luvussa 3 keskitytään Bernoullin numeroihin ja niiden ominaisuuksiin. Tutkielmassa Bernoullin luvut on määritelty käyttäen niiden modernimpaa määritelmää, joka on otettu käyttöön 1900-luvun loppupuolella. Vanhan ja uuden määritelmän ero on selitetty huomautuksessa 3.6.

Luvussa 4 keskitytään Bernoullin polynomeihin ja niiden ominaisuuksiin. Ne ovat olennainen osa Euler-MacLaurinin summakaavaa, mutta niillä on itsenäisiäkin sovelluksia, joista luvussa johdetaan Bernoullin summakaava kokonaislukujen potensseille (lause 4.14).

Päätuloksesta, Euler-MacLaurinin summakaavasta, esitetään kaksi versiota. Luvussa 5 johdetaan kaava määrätyn integraalin arvojen laskemiseen (lause 5.1). Luvussa myös esitellään laajemmin summakaavan käyttöä logaritmien laskemisssa ja tarkastellaan optimaalista tapaa käyttää summakaavaa.

Luvussa 6 johdetaan Euler-MacLaurinin summakaavasta versio summien laskemiseen (lause 6.1) ja sitä sovelletaan harmonisen sarjan osasummien laskemiseen. Luvun lopussa lasketaan Eulerin vakion likiarvo, mihin käytetään summakaavoista luvuissa 5 ja 6 johdettuja versioita.

2. Aputuloksia

Määritelmä 2.1. Funktio $f(z)$ on parillinen, jos kaikilla z

$$f(-z) = f(z),$$

ja pariton, jos kaikilla z

$$f(-z) = -f(z).$$

Lause 2.2. *Olkoon* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *funktion* $f(z)$ *potenssisarjakehitelmä. Funktio on parillinen, jos ja vain jos* $a_k = 0$ *parittomille* $k = 1, 3, 5, \ldots$

Todistus. Jos funktion sarjakehitelmässä on ainoastaan parillisia potensseja, niin $f(-z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}(-z)^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} z^{2j} = f(z)$.

Toiseen suuntaan tehdään vastaoletus, että olisi olemassa ainakin yksi parittoman potenssin kerroin $a_{2j+1} \neq 0$. Tällöin kaikilla z pätee $a_{2j+1}(-z)^{2j+1} = a_{2j+1} z^{2j+1}$. Koska $2j+1$ on pariton, on $-z = z$ eli $z = 0$. $\square$

Huomautus 2.3. Vastaavasti voidaan osoittaa, että funktio $f(z)$ on pariton, jos ja vain jos $a_k = 0$ kaikilla parillisilla $k = 0, 2, 4, \ldots$ Tulosta ei kuitenkaan tarvita myöhemmin, joten sitä ei todisteta. Todistus on samankaltainen kuin parillisuudellekin.

Seuraavaksi osoitetaan, että eräs lauseen 3.5 todistuksessa tarvittava funktio on parillinen.

Lemma 2.4. *Funktio* $f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$ *on parillinen*

Todistus. Muotoillaan ensin funktiota

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\left(\frac{2}{e^z - 1} + \frac{e^z - 1}{e^z - 1}\right) = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}.$$

Ja tarkastellaan parillisuutta sijoittamalla muuttujan z paikalle $-z$.

$$f(-z) = \frac{-z}{2} \cdot \frac{e^{\frac{-z}{2}} + e^{-\frac{-z}{2}}}{e^{\frac{-z}{2}} - e^{-\frac{-z}{2}}} = \frac{-z}{2} \cdot \frac{e^{\frac{-z}{2}} + e^{\frac{z}{2}}}{e^{\frac{-z}{2}} - e^{\frac{z}{2}}} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{\frac{-z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{\frac{-z}{2}}} = f(z).$$

Eli funktio $f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$ on määritelmän 2.1 mukaan parillinen. $\square$

Seuraavaksi osoitetaan lausekkeen $\sin^2 z$ normiin liittyvä väite, jota tarvitaan lauseen 3.7 johdossa.

Lemma 2.5. *Olkoon* $z = x + iy \in \mathbb{Z}$. *Tällöin*

$$|\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x.$$

Todistus. Jaetaan ensin $\sin z$ reaali- ja imaginaariosiinsa

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{ie^{ix-y}-ie^{-ix+y}}{-2} \\
&= \frac{ie^{-y}(\cos x + i\sin x) - ie^{y}(\cos -x + i\sin -x)}{-2} \\
&= \frac{e^{y}\sin x + e^{-y}\sin x}{2} + i\frac{e^{y}\cos x - e^{-y}\cos x}{2}.
\end{aligned}$$

Sitten voidaan laskea normin neliö ja sieventää sitä sopivasti

$$\begin{aligned}
&|\sin z|^2 = \left(\frac{e^{y}\sin x + e^{-y}\sin x}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{y}\cos x - e^{-y}\cos x}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2y}\sin^2 x + 2\sin^2 x + e^{-2y}\sin^2 x + e^{2y}\cos^2 x - 2\cos^2 x + e^{-2y}\cos^2 x}{4} \\
&= \frac{e^{-2y}(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2(\overbrace{\sin^2 x}^{1-\cos^2 x} - \cos^2 x) + e^{2y}(\sin^2 x + \cos^2 x)}{4} \\
&= \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y} - 4\cos^2 x}{4} \\
&= \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)^2 - \cos^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x.
\end{aligned}$$

□

Lausetta 3.7 varten arvioidaan vielä erään yliharmonisen sarjan summaa.

Lemma 2.6. *Olkoon $k \geq 1$. Tällöin*

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} < 2.$$

Todistus. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} > 1$, koska $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} > 0$.

Ylärajaa varten todetaan, että kun $\alpha > 1$, niin

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \Big/_{1}^{\infty} \frac{-1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} < 1 + \frac{1}{2k-1} \leq 2,$$

koska $k \geq 1$. □

3. Bernoullin luvut

Tarkastellaan funktiota $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$. MacLaurinin sarjakehitelmän muodostamista ja suppenemissädettä varten osoitetaan ensin, että kyseinen funktio on analyyttinen, kun $|z| < 2\pi$.

Funktio e^z on analyyttinen kaikkialla ja sillä on MacLaurinin sarjakehitelmä $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ja sama pätee funktiolle $e^z - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Jakamalla tämä termillä z saadaan $g(z) = \frac{e^z-1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$, joka on edelleen analyyttinen määrittelyjoukossaan $z \neq 0$. Origo on poistuva singulariteetti ja $\lim_{z\to 1} g(z) = 1$, sillä sarjakehitelmän vakiotermi on 1, joten voidaan sopia, että $g(0) = 1$. Nimittäjä ei ole nolla muualla, mutta osoittaja $e^z - 1 = 0$, kun $z = i2k\pi$, missä $k \in \mathbb{Z}\backslash 0$. Siis funktio $g(z)$ on määritelty, nollasta eroava ja analyyttinen, kun $|z| < 2\pi$.

Edelläolevasta seuraa, että funktio$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{z}{e^z-1}$ on määritelty ja analyyttinen, kun $|z| < 2\pi$, ja lisäksi $f(0) = \frac{1}{g(0)} = 1$. Isommassa origokeskisessä kiekossa $f(z)$ ei ole määritelty, koska funktiolla $g(z)$ on nollakohdat kaikissa pisteissä $z = i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\backslash 0$.

Määritelmä 3.1 (Bernoullin luvut)**.** Merkitään funktion $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ MacLaurinin sarjaa

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k = B_0 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \cdots,$$

jolloin kertoimia $B_k, k = 0, 1, 2 \ldots$, kutsutaan Bernoullin luvuiksi.

Huomautus 3.2. Määritelmän perusteella Bernoullin luku B_k saadaan raja-arvona

$$B_k = \lim_{z\to 0} \frac{d^n}{dz^n} \frac{z}{e^z-1}.$$

Tämä on hankala käyttää ja käyttökelpoisempi määritelmän kanssa yhtenevä laskukaava todistetaan seuraavaksi lauseessa 3.3, jota joskus käytetään Bernoullin lukujen määritelmänä, vrt. Ireland & Rosen [4].

Lause 3.3. *$B_0 = 1$, ja kun $n = 1, 2, 3, \ldots$, saadaan B_n laskettua rekursiivisesti kaavalla*

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k. \tag{3.1}$$

Todistus. Olkoon $z \neq 0$. Lähdetään liikkeelle määritelmästä 3.1 ja kerrotaan se puolittain jakajalla $e^z - 1$. Käyttämällä tekijästä $e^z - 1$ sarjakehitelmää saadaan lauseke polynomimuotoon.

$$
\begin{aligned}
z &= (e^z - 1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k \\
&= \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\left(\frac{1}{0!}B_0 + \frac{z}{1!}B_1 + \frac{z^2}{2!}B_2 + \dots\right) \\
&= z\left(\frac{B_0}{0!1!}\right) + z^2\left(\frac{B_0}{0!2!} + \frac{B_1}{1!1!}\right) + z^3\left(\frac{B_0}{0!3!} + \frac{B_1}{1!2!} + \frac{B_2}{2!1!}\right) + \cdots \\
&\quad + z^{n+1}\left(\frac{B_0}{0!(n+1)!} + \frac{B_1}{1!n!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!2!} + \frac{B_n}{n!1!}\right) + \dots
\end{aligned}
$$

Yhtälön vasemmalla puolella on vain ensimmäisen asteen termejä, joten $B_0 = 1$. Koska kaikkien termin z^n kertoimien pitää olla nollia, kun $n \geq 2$, saadaan termin z^{n+1} kertoimesta Bernoullin luvulle B_n yhtälö

$$
\begin{aligned}
B_n &= -n!\left(\frac{B_0}{0!(n+1)!} + \frac{B_1}{1!n!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!2!}\right) \\
&= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k.
\end{aligned}
$$

□

Huomautus 3.4. Ensimmäinen Bernoullin luku $B_0 = 1$ on rationaalinen ja kaavan (3.1) perusteella kaikki muut Bernoullin luvut johdetaan tästä kertomalla ja jakamalla kokonaisluvuilla sekä yhteenlaskemalla, joten kaikki Bernoullin luvut ovat rationaalilukuja.

Kaavan (3.1) avulla voidaan helposti laskea Bernoullin lukuja alusta lähtien. Taulukkoon 1 on laskettu 32 ensimmäisen Bernoullin luvun arvot.

$B_0 = 1$	$B_1 = -\frac{1}{2}$	$B_2 = \frac{1}{6}$	$B_3 = 0$
$B_4 = -\frac{1}{30}$	$B_5 = 0$	$B_6 = \frac{1}{42}$	$B_7 = 0$
$B_8 = -\frac{1}{30}$	$B_9 = 0$	$B_{10} = \frac{5}{66}$	$B_{11} = 0$
$B_{12} = -\frac{691}{2730}$	$B_{13} = 0$	$B_{14} = \frac{7}{6}$	$B_{15} = 0$
$B_{16} = -\frac{3617}{510}$	$B_{17} = 0$	$B_{18} = \frac{43867}{798}$	$B_{19} = 0$
$B_{20} = -\frac{174611}{330}$	$B_{21} = 0$	$B_{22} = \frac{854513}{138}$	$B_{23} = 0$
$B_{24} = -\frac{236364091}{2730}$	$B_{25} = 0$	$B_{26} = \frac{8553103}{6}$	$B_{27} = 0$
$B_{28} = -\frac{23749461029}{870}$	$B_{29} = 0$	$B_{30} = \frac{8615841276005}{14322}$	$B_{31} = 0$

TAULUKKO 1. Bernoullin luvut $B_0, \dots, B_{31}$.

Nopeasti huomataan, että ykköstä isommille parittomille indekseille Bernoullin luvut ovat nollia ja parillisilla indekseillä nollasta eroavia. Lisäksi nollasta eroavat arvot vuorottelevat etumerkkiä. Jälkimmäiset väitteet todistetaan myöhemmin (lauseet 3.9 ja 3.10). Ensiksi mainittu todistetaan seuraavassa.

Lause 3.5. *Olkoon $n \geq 3$ pariton. Tällöin $B_n \equiv 0$.*

Todistus. Lauseen 2.2 perusteella riittää osoittaa, että funktiosta $\frac{z}{e^z-1}$ tulee parillinen poistamalla MacLaurinin sarjakehitelmän ensimmäinen pariton termi $B_1 z = -\frac{z}{2}$. Tällöin riittää osoittaa, että funktio $\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2}$ on parillinen. Tämä on osoitettu lemmassa 2.4. □

Huomautus 3.6. Koska ykköstä isommille parittomille indekseille B_n häviää, niin aikaisemmin Bernoullin luvut määriteltiin siten, että kaksi ensimmäistä termiä jätettiin väliin ja lopuista otettiin vain parilliset indeksit. Lisäksi Bernoullin luvut oli määritelty positiivisiksi ja parillisten Bernoullin lukujen merkin vuorottelu (lause 3.10) on huomioitu sarjakehitelmässä. Eli $B_k^*, k > 0$, määriteltiin lukuina $B_k^* = |B_{2k}| = (-1)^k B_{2k}$, kun $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Tällöin määritelmän 3.1 sarjakehitelmä esitettäisiin muodossa

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1^*}{2!}x^2 - \frac{B_2^*}{4!}x^4 + \frac{B_3^*}{6!}x^6 - \frac{B_4^*}{8!}x^8 + \cdots .$$

Tällaisia vanhemman määritelmän mukaisia Bernoullin lukuja on käytetty vielä 1900-luvun puolivälin tienoilla ilmestyneessä kirjallisuudessa, mm. Lindelöf [5] ja Whittaker & Watson [8], joten näitä vertaillessa pitää huomioida erilaiset määritelmät.

Taulukosta 1 huomataan, että indeksin $2n$ kasvaessa itseisarvo $|B_{2n}|$ aluksi pienenee, mutta indeksistä $2n = 10$ lähtien kasvaa. Seuraavaksi esitetäänkin arvio, joka antaa tietoa siitä, miten parilliset Bernoullin luvut käyttäytyvät myös isoilla n. Tätä varten osoitetaan ensin, että $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ (vrt. Ahlfors [1][s. 188 - 189]).

Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}.$$

Funktiolla $f(z)$ on kaksinkertainen napa origossa, joten funktio $z^2 f(z)$ on analyyttinen origossa ja sille on olemassa Taylorin sarjakehitelmä origossa

$$\begin{aligned} z^2 f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \\ &= 1 + 0z + b_0 z^2 + b_1 z^3 + \ldots \end{aligned}$$

Jakamalla tämä termillä z^2 saadaan funktion $f(z)$ Laurentin sarja

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z} + b_0 + b_1 z + \ldots$$

Tällöin funktion $f(z)$ singulaarinen osa origossa on $\frac{1}{z^2}$. Vastaavasti, koska $\sin^2 \pi z = \sin^2 \pi(z-n)$ kaikille $n \in \mathbb{Z}$, niin singulaarinen osa pisteen $z = n$ suhteen on $\frac{1}{(z-n)^2}$.

Muodostetaan seuraavaksi näiden kaikkien singulaariosien summa. Saadaan funktio

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2},$$

jonka singulaariosat ovat luonnollisesti samat kuin funktiolla $f(z)$. On helppo osoittaa, että sarja $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(z)$ suppenee, kun $z \notin \mathbb{Z}$. Valitaan ensin $z \notin \mathbb{Z}$. Tällöin majoranttiperiaatteen mukaan sarja suppenee, jopa itseisesti, sillä $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|(z-n)^2|} < \frac{1}{|z-n_0|^2} + \frac{1}{|z-n_1|^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, missä n_0 ja n_1 ovat muuttujaa z lähinnä olevat kokonaisluvut (tai lähin ja toinen lähimmistä, jos esimerkiksi $z = i$) ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ on tunnetusti suppeneva. Se suppenee kohti vakiota, joka ei riipu muuttujan z arvosta ja joka lemman 2.6 mukaan sijaitsee välillä $[1, 2]$. Lisäksi, koska sarja suppenee tasaisesti kaikissa kompakteissa joukoissa napojen ulkopuolella ja kaikki funktiot $g_n(z)$ ovat analyyttisia napojen ulkopuolella, on funktio $g(z)$ analyyttinen napojen ulkopuolella eli meromorfinen.

Funktiot $f(z)$ ja $g(z)$ ovat meromorfisia ja niillä on myös samat singulaariosat ja luonnollisesti myös samat kaksinkertaiset navat $z \in \mathbb{Z}$. Kirjoitetaan

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + h(z).$$

Funktio $h(z)$ on analyyttinen kaikilla $z \in \mathbb{C}$, myös kohdissa $z \in \mathbb{Z}$. Tämä seuraa siitä, että funktioiden $f(z)$ ja $g(z)$ Laurentin sarjan negatiivisten potenssien osat ovat samoja, joten funktion $h(z)$ Laurentin sarjassa ei ole negatiivisia muuttujan z potensseja. Sillä ei näinollen ole napoja ja Laurentin sarja onkin Taylorin sarja ja $h(z)$ on analyyttinen kaikkialla. Tämän lisäksi $h(z) \equiv 0$, mikä osoitetaan seuraavaksi.

Kirjoitetaan $z = x + iy$ ja tarkastellaan, miten funktiot käyttäytyvät, kun $|y|$ lähestyy ääretöntä. Lemman 2.5 avulla funktion $f(z)$ nimittäjän normille saadaan $|\sin \pi z|^2 = \cosh^2 \pi y - \cos^2 \pi x$, missä $0 \leq \cos^2 \pi x \leq 1$ ja $\cosh^2 \pi y = \left(\frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{2}\right)^2$, joka kasvaa rajatta, kun $|y|$ lähestyy ääretöntä, joten lauseke $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ häviää, kun $|y|$ lähestyy ääretöntä. Vastaavasti jokainen termi $\frac{1}{(z-n)^2}$ häviää, kun $|y|$ lähestyy ääretöntä ja koska sarja $\sum g_n(z)$ suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa napojen ulkopuolella, saadaan $\lim_{|y| \to \infty} g(z) = \lim_{|y| \to \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{|y| \to \infty} \frac{1}{(z-n)^2} = 0$. Tällöin myös $h(z)$ häviää, kun $|y|$ lähestyy ääretöntä.

Muuttujan x suhteen funktiot $f(z)$ ja $g(z)$ ovat jaksollisia jaksolla 1, joten myös $h(z)$ on muuttujan x suhteen jaksollinen jaksolla 1. Se siis saavuttaa kaikki arvonsa, kun $x \in [0, 1]$. Lisäksi, koska $h(z)$ on analyytttinen kaikkialla ja lähestyy nollaa, kun $|y|$ lähestyy ääretöntä, niin tiedetään että $h(z)$ on rajoitettu kaikkialla. Liouvillen teoreeman perusteella voidaan päätellä, että $h(z)$ on vakiofunktio [1][s. 122.]. Ja koska $h(z)$ häviää ainakin silloin, kun $|y|$ lähestyy ääretöntä, niin tiedetään, että $h(z) \equiv 0$. Tästä seuraa, että

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}, \qquad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

Integroimalla saadaan oikealta puolelta $-\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$, joka sellaisenaan hajaantuisi kuten harmoninen sarja. Valitaan siksi jokaiselle sarjan termille integroimisvakioksi $\frac{-1}{n}$, kun $n \neq 0$, ja nolla, kun $n = 0$. Integrointi antaa $-\frac{1}{z} - \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{z} - \sum_{n\neq 0} \frac{z}{n(z-n)}$. Tämä suppenee itseisesti, kuten $\sum \frac{1}{n^2}$, joten sarjan termejä voidaan järjestellä uudelleen ja yhdistää, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z} - \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) &= -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \end{aligned}$$

Tästä muodosta nähdään, että funktio on pariton. Lisäksi myös funktio $\pi \cot \pi z$ on pariton ja sen derivaatta on $-\frac{\pi}{\sin^2 \pi z}$, joten muita integrointivakioita ei tarvita ja integroinnin lopputulokseksi saadaan

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Kertomalla tämä puolittain termillä z saadaan

$$\pi z \cot \pi z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2}. \tag{3.3}$$

Kun muistetaan, että $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ ja $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$, saadaan yhtälö lausuttua eksponenttifunktioiden avulla. Tähän voidaan soveltaa lemman 2.4 todistuksen muotoilua $\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$. Syntyvä lauseke on yhtenevä Bernoullin lukujen generoivan funktion kanssa, joten määritelmän 3.1 mukaan lauseke saadaan ilmoitettua Bernoullin lukujen avulla, jonka jälkeen sitä voidaan sieventää.

(3.4)

$$\begin{aligned}
\pi z \cot \pi z &= \pi z \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = i\pi z \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} \\
&= \frac{2\pi i z}{e^{2\pi i z} - 1} + \frac{2\pi i z}{2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!}(2\pi i z)^l + \frac{1}{2}(2\pi i z) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(2\pi i z) + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{B_l}{l!}(2\pi i z)^l + \frac{1}{2}(2\pi i z) \\
&\overset{L.3.5}{=} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi i z)^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k},
\end{aligned}$$

mikä on voimassa, kun $|z| < 1$ funktion $z \cot \pi z$ Taylorin sarjan suppenemissäteen vuoksi.

Sijoittamalla (3.4) kaavaan (3.3) ja käyttämällä hyväksi tietoa, että sarja suppenee itseisesti, voidaan summien järjestystä vaihtaa, jolloin

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} -2 \frac{z^2}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \\
&= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}.
\end{aligned}$$

Kummallakin puolella termin z^{2k} kertoimien tulee olla yhtäsuuret, joten kaikille $k \geq 1$ saadaan

$$(-1)^k \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}. \tag{3.5}$$

Yhtälöstä (3.5) ratkaisemalla B_{2k} saadaan seuraavassa lauseessa esitetty arvio.

Lause 3.7. *Olkoon $k \geq 1$. Parillisille Bernoullin luvuille B_{2k} pätee*

$$B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \tag{3.6}$$

missä $1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} < 2$.

Todistus. Kaava johdettiin jo edellä ja summalausekkeelle on arviointi $1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} < 2$ suoritettu lemmassa 2.6. $\square$

Seuraus 3.8. *Kääntäen lauseesta 3.7 saadaan Riemannin ζ-funktion $\zeta(x)$ arvot määritellyiksi Bernoullin lukujen avulla kaikilla $x = 2k$, kun $1 \leq k \in \mathbb{N}$.*

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}|B_{2k}|.$$

Lause 3.9. *Kaikille $k = 0, 1, 2, \ldots$ pätee $B_{2k} \neq 0$.*

Todistus. $B_0 = 1$ joten voidaan tarkastella vain arvoja $k \geq 1$. Lauseen 3.7 perusteella

$$B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

joka on erisuuri kuin nolla kaikilla $k > 0$ □

Lause 3.10. *Kaikille $k = 1, 2, 3, \ldots$ pätee, että $B_{4k-2} > 0$ ja $B_{4k} < 0$.*

Todistus. Lauseen 3.7 perusteella luvun B_{4k-2} merkin määrää lauseke $(-1)^{(2k-1)-1} = (-1)^{2k-2} = 1$ ja luvun B_{4k} merkin määrää lauseke $(-1)^{(2k)-1} = (-1)^{2k-1} = -1$. □

Huomautus 3.11. Bernoullin lukujen etumerkistä voidaan tehdä nyt lopullinen yhteenveto. Yleisestä poikkeavia ovat luvut $B_0 = 1 > 0$ ja $B_1 = -\frac{1}{2} < 0$. Kun $n \geq 2$, pätevät seuraavat säännöt.

$$\begin{cases} B_n = 0, & \text{kun } n \text{ on pariton,} \\ B_n > 0, & \text{kun } n \mid 2 \text{ ja } n \nmid 4 \\ B_n < 0, & \text{kun } n \mid 4 \end{cases}$$

4. Bernoullin polynomit

Bernoullin polynomeja määritellään useilla erilaisilla tavoilla, jotka tuottavat saman lopputuloksen. Seuraavassa käytetään Apostolin käyttämää määritelmää [2, s. 264], koska siinä lähtökohta on lähellä samaa generoivaa funktiota, jota aikaisemmin on käytetty Bernoullin lukujen määritelmänä ja jonka avulla on helppo todistaa Bernoullin summakaavan kokonaislukupotensseille (lause 4.14). Tästä määritelmästä johdetaan sitten helpommin käytettävä versio. Apostol on esittänyt määritelmänsä kompleksisessa muodossa.

Generoivana funktiona käytetään funktiota $\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \frac{z}{e^z-1}e^{xz}$. Tekijä $\frac{z}{e^z-1}$ on vain muuttujan z funktio ja Bernoullin lukuihin liittyvän tarkastelun perusteella analyyttinen, kun $|z| < 2\pi$. Toinen tekijä e^{xz} on analyyttinen kaikilla $x, z \in \mathbb{C}$. Näiden tulo on siis analyyttinen, kun $x, z \in \mathbb{C}$ ja $|z| < 2\pi$, ja näinollen seuraava määritelmä on mielekäs.

Määritelmä 4.1 (Bernoullin polynomit)**.** Olkoon $x, z \in \mathbb{C}, |z| < 2\pi$. Bernoullin polynomit $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, määritellään generoivan funktion $\frac{ze^{xz}}{e^z-1}$ avulla seuraavasti

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{n!} z^n.$$

Lause 4.2. *Olkoon $n \geq 0$. Bernoullin polynomi $\varphi_n(x)$ saadaan kaavalla*

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}. \tag{4.1}$$

Todistus. Bernoullin polynomien määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{n!} z^n = \frac{z}{e^z-1} e^{xz} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n\right) \\ &= z^0 \left(\frac{B_0 x^0}{0!0!}\right) + z^1 \left(\frac{B_0 x^1}{0!1!} + \frac{B_1 x^0}{1!0!}\right) + \dots \\ &\quad + z^n \left(\frac{B_0 x^n}{0!n!} + \frac{B_1 x^{n-1}}{1!(n-1)!} + \dots + \frac{B_n x^0}{n!0!}\right) + \dots .\end{aligned}$$

Ottamalla tästä puolittain termin z^n kertoimet saadaan

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} = \frac{B_0 x^n}{0!n!} + \frac{B_1 x^{n-1}}{1!(n-1)!} + \dots + \frac{B_n x^0}{n!0!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k x^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

$$\Longrightarrow \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} B_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

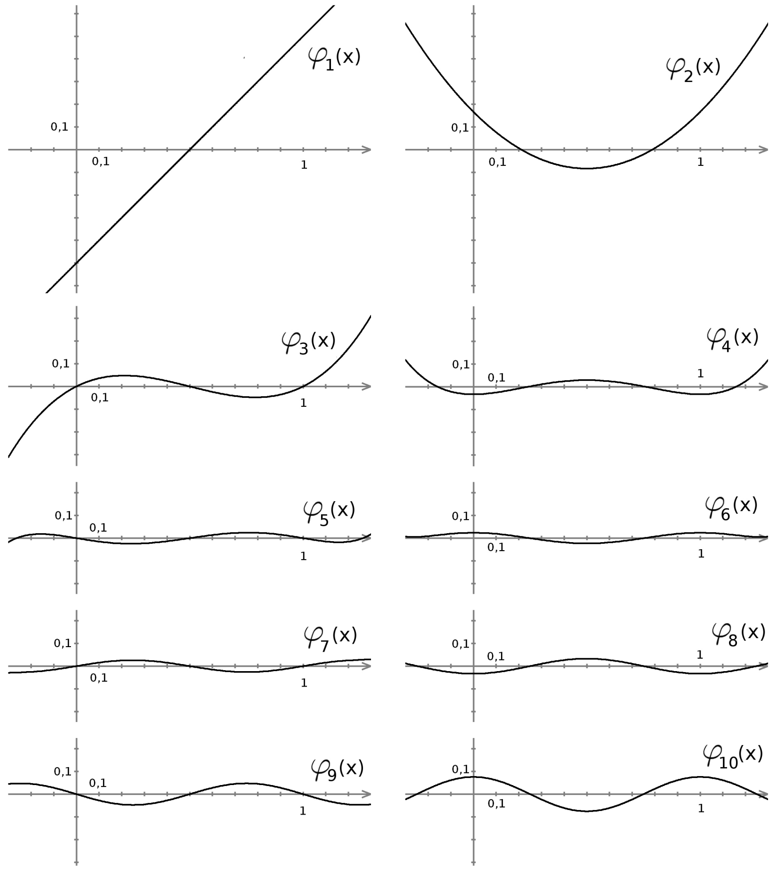
$\square$

Konstruoidaan seuraavaksi Bernoullin polynomien laskukaavan avulla muutamia ensimmäisiä Bernoullin polynomeja käyttäen apuna taulukkoon 1 laskettuja Bernoullin lukuja. Välittömästi huomataan, että koska isoimman potenssin kerroin on aina $B_0 = 1$, on polynomin $\varphi_n(x)$ asteluku n.

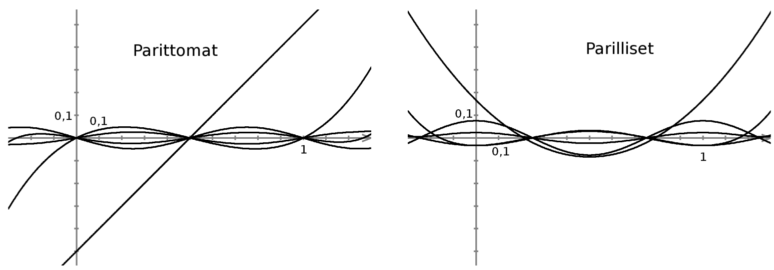
$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1, \\
\varphi_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
\varphi_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
\varphi_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
\varphi_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
\varphi_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \\
\varphi_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}, \\
\varphi_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x \\
\varphi_8(x) &= x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}, \\
\varphi_9(x) &= x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x \quad \text{ja} \\
\varphi_{10}(x) &= x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}.
\end{aligned}
$$

Konstruoimisen vaivaa säästää hieman se, että $B_n = 0$ parittomille $n \geq 3$. Tällöin osa termeistä häviää heti sijoitusvaiheessa ja polynomeissa toiseksi isointa potenssia lukuunottamatta muuttujan x potenssit ovat kaikki joko parillisia tai parittomia.

Polynomit $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{10}(x)$ on myös piirretty kuvaan 1, jokainen omaan koordinaatistoonsa, ja kuvaan 2 on piirretty polynomit siten, että parilliset ovat omassa koordinaatistossaan ja parittomat omassaan. Kuvia tarkastelemalla huomataan selvää säännönmukaisuutta polynomien käyttäytymisessä kohdissa $0, \frac{1}{2}$ ja 1, kun $n \geq 3$. Parittomilla polynomeilla pisteissä on nollakohdat ja vastaavasti parillisilla polynomeilla derivaatan nollakohdat. Tämä todistetaan myöhemmin lauseessa 4.10. Sen sijaan parittomien polynomien derivaatan nollakohdat ja parillisten polynomien nollakohdat eivät ole samoissa kohdissa, vaikka pikaisesti kuvia katsomalla näin voisi toivoa. Lisäksi havaitaan, että parittomat polynomit ovat symmetrisiä pisteen $(\frac{1}{2}, 0)$ suhteen ja parilliset polynomit suoran $x = \frac{1}{2}$ suhteen (lause 4.6).



KUVA 1. Bernoullin polynomit $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{10}(x)$.



KUVA 2. Bernoullin polynomit $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{10}(x)$. Parittomat omassa koordinaatistossaan ja parilliset omassa koordinaatistossaan.

Polynomeja konstruoidessa huomataan myös, että polynomin $\varphi_n(x)$ vakiotermi on aina B_n, mistä seuraa seuraava lause.

Lause 4.3. *Kaikille Bernoullin polynomeille $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, pätee*

$$\varphi_n(0) = B_n.$$

Todistus. Kun $x = 0$, saadaan polynomin arvo laskettua kaavalla (4.1)

$$\begin{aligned}\varphi_n(0) =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k 0^{n-k} \\ =& \binom{n}{0} B_0 0^n + \ldots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} 0^1 + \binom{n}{n} B_n 0^0 = B_n.\end{aligned}$$

□

Lause 4.4. *Bernoullin polynomin $\varphi_n(x), n \geq 1$, derivaatalle pätee*

$$\varphi_n'(x) = n\varphi_{n-1}(x).$$

Todistus.

$$\begin{aligned}\varphi_n'(x) =& \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k) B_k x^{n-k-1} \\ =& \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k x^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} B_k x^{(n-1)-k} \\ =& n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k x^{(n-1)-k} = n\varphi_{n-1}(x).\end{aligned}$$

□

Lause 4.5. *Olkoon $n \geq 1$. Kaikille Bernoullin polynomeille $\varphi_n(x)$ välin $[0, 1]$ määrätty integraali katoaa, eli*

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = 0.$$

Todistus. Olkoon $n > 0$. Lasketaan integraali auki ja korvataan B_n Bernoullin lukujen rekursiivisen laskukaavan (3.1) lausekkeella, mistä saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi_n(x) =& \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}\, dx = \Big/_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1} \binom{n}{k} B_k x^{n-k+1} \\ =& \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{n-k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \\ =& \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k + B_n \\ \overset{(3.1)}{=}& \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k = 0.\end{aligned}$$

□

Seuraavan tuloksen Lindelöf muotoili määrätyn integraalin arviointia varten konstruoimilleen polynomeille jo ennen kuin totesi niiden olevan Bernoullin polynomeja [5][s. 380]. Tällöin hän jätti väitteestään pois myös ensimmäisen Bernoullin polynomin $\varphi_0(x)$, joka seuraavassa kuitenkin on mukana.

Lause 4.6. *Kun $k = 0, 1, 2, \ldots$, niin kaikille $t \in \mathbb{C}$ pätee*

$$\begin{cases} \varphi_{2k}(1-t) = \varphi_{2k}(t) \\ \varphi_{2k+1}(1-t) = -\varphi_{2k+1}(t). \end{cases}$$

Todistus. Todistus induktiolla. Kun $k = 0$, niin $\varphi_0(x) \equiv 1$. Parittomalle indeksille puolestaan $\varphi_1(1-t) = 1 - t - \frac{1}{2} = -(t - \frac{1}{2}) = -\varphi_1(t)$.

Oletetaan, että väite pätee arvolla k. Lauseen 4.4 mukaan $\varphi_{2k+1}(t)$ on lausekkeen $\frac{\varphi_{2k+2}(t)}{2k+2}$ derivaatta, jolloin induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \int \varphi_{2k+1}(1-t)\,dt &= \int -\varphi_{2k+1}(t)\,dt \\ \frac{-1}{2k+2}\varphi_{2k+2}(1-t) &= \frac{-1}{2k+2}\varphi_{2k+2}(t) + \frac{-1}{2k+2}C \\ \varphi_{2k+2}(1-t) &= \varphi_{2k+2}(t) + C. \end{aligned}$$

Integroimisvakio C saadaan selville sijoituksella $t = \frac{1}{2}$.

$$\varphi_{2k+2}(1 - \frac{1}{2}) = \varphi_{2k+2}(\frac{1}{2}) + C,$$

joten $C = 0$ ja $\varphi_{2k+2}(1-t) = \varphi_{2k+2}(t)$. Vielä pitää osoittaa, että $\varphi_{2k+3}(1-t) = -\varphi_{2k+3}(t)$.

Tulosta edelleen integroimalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+3}\varphi_{2k+3}(t) &= -\frac{1}{2k+3}\varphi_{2k+3}(1-t) + \frac{1}{2k+3}\tilde{C} \\ \tilde{C} &= \varphi_{2k+3}(t) + \varphi_{2k+3}(1-t). \end{aligned}$$

Tästä voidaan ottaa määrätyt integraalit väliltä $[0, 1]$ ja käyttää lausetta 4.5 integraalien laskemisessa.

$$\int_0^1 \tilde{C}\,dt = \int_0^1 \varphi_{2k+3}(t)\,dt + \int_0^1 \varphi_{2k+3}(1-t)\,dt = 0,$$

joten myös $\tilde{C} = 0$ ja $\varphi_{2k+3}(t) = -\varphi_{2k+3}(1-t)$. □

Huomautus 4.7. Edellä oleva lause vaikuttaa ensinäkemältä melko merkityksettömältä, mutta syvempi tarkastelu osoittaa, että se kertoo kuitenkin yllättävän paljon Bernoullin polynomien kulusta. Kaikki polynomit, joiden indeksi on parillinen, ovat symmetrisiä kohdan $x = \frac{1}{2}$ suhteen. Vastaavasti kaikki polynomit, joiden indeksi on pariton, ovat antisymmetrisiä kohdan $x = \frac{1}{2}$ suhteen.

Tämän huomaa myös kuvien 1 ja 2 polynomien kuvaajista. Parillisten polynomien kuvaajat ovat symmetrisiä suoran $x = \frac{1}{2}$ suhteen ja vastavasti parittomat polynomit pisteen $(\frac{1}{2}, 0)$ suhteen.

Esimerkiksi seuraava lause on hyvä osoitus tämän lauseen käyttökelpoisuudesta.

Lause 4.8. *Kaikille $\varphi_n(x)$, $n \neq 1$, pätee*

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = B_n.$$

Todistus. Jos $n = 3, 5, 7, \ldots$, niin lauseiden 3.5 ja 4.3 mukaan on $\varphi_n(0) = B_n = 0$ ja tällöin lauseen 4.6 mukaan $\varphi_n(1) = -\varphi_n(0) = 0$, jolloin $\varphi_n(1) = \varphi_n(0) = B_n$.

Jos taas $n = 0, 2, 4, \ldots$, niin lauseiden 4.6 ja 4.3 perusteella saadaan $\varphi_n(1) = \varphi_n(0) = B_n$. □

Huomautus 4.9. Edellisestä tuloksesta poikkeaa polynomi $\varphi_1(x)$, jolle $\varphi_1(0) = 0 + B_1 = -\frac{1}{2}$ ja $\varphi_1(1) = 1 + B_1 = \frac{1}{2}$, eli

$$\varphi_1(0) = -\varphi_1(1) = B_1. \tag{4.2}$$

Seuraavaksi tarkastellaan polynomien ja niiden derivaattojen nollakohtia välillä $[0, 1]$.

Lause 4.10. *Olkoon $n \geq 3$.*

Parittomilla Bernoullin polynomeilla $\varphi_n(x)$ on kolme nollakohtaa välillä $[0, 1]$ ja ne ovat $0, \frac{1}{2}$ ja 1. Derivaatan nollakohtia on kaksi, ensimmäinen sijaitsee avoimella välillä $]0, \frac{1}{2}[$ ja toinen avoimella välillä $]\frac{1}{2}, 1[$.

Parillisilla Bernoullin polynomilla $\varphi_n(x)$ on kaksi nollakohtaa välillä $[0, 1]$, ensimmäinen sijaitsee avoimella välillä $]0, \frac{1}{2}[$ ja toinen avoimella välillä $]\frac{1}{2}, 1[$. Derivaatan nollakohtia välillä on kolme: $0, \frac{1}{2}$ ja 1.

Todistus. Todistus induktiolla. Kun $n = 3$, on Bernoullin polynomi $\varphi_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Sen nollakohdat ovat $0, \frac{1}{2}$ ja 1, ja derivaatan nollakohdat ovat $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{24}}\right) \in]0, \frac{1}{2}[$ ja $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{24}}\right) \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Kun $n = 4$, lauseen 4.4 mukaan polynomin $\varphi_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$ derivaatan nollakohdat ovat polynomin $\varphi_3(x)$ nollakohdat $0, \frac{1}{2}$ ja 1. Lisäksi $\varphi_4(0) = \varphi_4(1) = -\frac{1}{30} < 0$ ja $\varphi_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{240} > 0$, joten väliarvolauseen perusteella sillä on olemassa nollakohdat $\xi_{4_1} \in]0, \frac{1}{2}[$ ja $\xi_{4_2} \in]\frac{1}{2}, 1[$. Useampia nollakohtia ei välillä $[0, 1]$ ole, koska muita derivaatan nollakohtia ei ole.

Oletetaan, että väitteet pätevät, kun $n = 2k - 2$ ja osoitetaan, että väitteet pätevät, kun $n = 2k - 1$ ja $n = 2k$. Lauseen 4.8 mukaan $\varphi_{2k-1}(1) = \varphi_{2k-1}(0) = 0$ ja 4.6 mukaan $\varphi_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\varphi_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, joten $\varphi_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Lauseen 4.4 mukaan derivaatan nollakohdat ovat polynomin $\varphi_{2k-2}(x)$ nollakohdat, joita oletuksen perusteella on välillä $[0, 1]$ tasan kaksi ja ne sijaitsevat avoimilla väleillä $]0, \frac{1}{2}[$ ja $]\frac{1}{2}, 1[$. Eli myöskään enempiä nollakohtia ei välillä $[0, 1]$ ole.

Lauseen 4.4 mukaan polynomin $\varphi_{2k}(x)$ derivaatan nollakohdat ovat polynomin $\varphi_{2k-1}(x)$ nollakohdat eli $0, \frac{1}{2}$ ja 1. Lauseen 4.8 perusteella $\varphi_{2k}(0) = \varphi_{2k}(1)$ ja lauseen 4.5 perusteella $\int_0^1 \varphi_{2k}(x)\,dx = 0$, joten koska $\varphi_{2k}(x)$ ei voi olla vakio, on $\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)$ erimerkkinen kuin $\varphi_{2k}(0) = \varphi_{2k}(1)$, jolloin väliarvolauseen perusteella polynomilla $\varphi_{2k}(x)$ on nollakohdat $\xi_{2k_1} \in]0, \frac{1}{2}[$ ja $\xi_{2k_2} \in]\frac{1}{2}, 1[$. Useampia nollakohtia sillä ei välillä $[0, 1]$ ole, koska muita derivaatan nollakohtia ei välillä ole. $\square$

Huomautus 4.11. Edellinen lause pätee kaikilla Bernoullin polynomeilla indeksistä 3 alkaen, mutta myös polynomit $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ täyttävät osan näistä ominaisuuksista.

Polynomin $\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2}$ nollakohta on $\frac{1}{2}$ ja näinollen se on myös polynomin $\varphi_2(x)$ ainoa derivaatan nollakohta. Lisäksi polynomin $\varphi_2(x)$ nollakohdat $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{24}}\right) \in]0, \frac{1}{2}[$ ja $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{24}}\right) \in]\frac{1}{2}, 1[$ täyttävät parillisten polynomien nollakohtaehdon.

Tämän jälkeen voidaan arvioida, minkä arvon $\varphi_{2k}(\frac{1}{2})$ saa. (Vrt. Lindelöf [5][s.385 - 386].)

Lause 4.12. *Kaikille $k = 1, 2, 3, \ldots$ pätee*

$$\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2k}\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right).$$

Todistus. Muodostetaan polynomista $\varphi_{2k+1}(t)$ Taylorin sarja pisteessä $t_0 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\varphi_{2k+1}(t) &= \sum_{m=0}^{2k+1} \varphi_{2k+1}^{\{m\}}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(t-\frac{1}{2})^m}{m!} \\
&\overset{L.4.4}{=} \sum_{m=0}^{2k+1} \frac{(2k+1)!}{(2k+1-m)!}\ \varphi_{2k+1-m}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^m}{m!} \\
&= \sum_{m=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{m}\varphi_{2k+1-m}\left(\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)^m \\
&= \sum_{m=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{m}\varphi_{m}\left(\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)^{2k+1-m}.
\end{aligned}$$

Tehdään tähän sijoitus $t = 1$. Koska $k \geq 1$, on lauseen 4.10 perusteella $\varphi_{2k+1}(0) = \varphi_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$. Merkitään lisäksi $\tilde{B}_m := \varphi_m(\frac{1}{2})$, jolloin lauseen 4.10 ja huomautuksen 4.11 perusteella $\tilde{B}_m = 0$ kaikille parittomille $m \geq 1$. Tällöin saadaan

$$0 = \sum_{m=0}^{2k} \binom{2k+1}{m}\tilde{B}_m\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1-m}.$$

Muodostetaan polynomista $\varphi_{2k+1}(x)$ kehitelmä myös kaavan (4.1) avulla ja tehdään siihen sijoitus $x = \frac{1}{2}$, jolloin $\varphi_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$ ja saadaan

$$0 = \sum_{m=0}^{2k} \binom{2k+1}{m} B_m \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1-m}.$$

Laskemalla nämä kaksi sarjakehitelmää yhteen saadaan

$$0 = \sum_{m=0}^{2k} \binom{2k+1}{m} (B_m + \tilde{B}_m) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1-m}.$$

Kerrotaan tämä termillä 2^{2k}, siirretään summan viimeinen summattava $(2k+1)(B_{2k} + \tilde{B}_{2k})2^{2k-1}$ vasemmalle puolelle ja jaetaan puolittain kertoimella $-(2k+1)$, jolloin saadaan

$$(B_{2k} + \tilde{B}_{2k})2^{2k-1} = -\frac{1}{2k+1} \sum_{m=0}^{2k-1} \binom{2k+1}{m} (B_m + \tilde{B}_m)2^{m-1}.$$

Tämä on yhtenevä Bernoullin lukujen rekursiivisen laskukaavan (3.1) kanssa. Lisäksi $(B_0 + \tilde{B}_0)\frac{1}{2} = 1$ ja $\tilde{B}_m = 0$ kaikille parittomille m, joten $(B_1 + \tilde{B}_1)2^0 = -\frac{1}{2}$ ja $(B_m + \tilde{B}_m)2^{m-1} = 0$ kaikille parittomille $m \geq 3$. Tällöin voidaan merkitä

$$B_{2k} = (B_{2k} + \tilde{B}_{2k})2^{2k-1}, \quad \text{jolloin}$$
$$\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \tilde{B}_{2k} = -B_{2k}\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right)$$

□

Edellinen lause on oleellinen osa seuraavaa todistusta, joka antaa rajat siihen, kuinka paljon parilliset Bernoullin polynomit voivat heilahdella välillä $[0, 1]$.

Lause 4.13. *Olkoon $x \in [0, 1]$. Tällöin kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$ pätee*

$$|\varphi_{2k}(x)| \leq |B_{2k}|$$

Todistus. $\varphi_0(x) \equiv B_0 = 1$. $\varphi_2(0) = \varphi_2(1) = \frac{1}{6}$ ja derivaatan nollakohdassa $\varphi_2(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{12}$, joten tapaukset $k \leq 1$ ovat selviä.

Olkoon $k \geq 2$. Lauseen 4.10 perusteella polynomin $\varphi_{2k}(x)$ derivaatan nollakohdat ovat $x = 0, \frac{1}{2}$ ja 1, joista 0 ja 1 ovat välin päätepisteet. Edellisen lauseen 4.12 perusteella $|\varphi_{2k}(\frac{1}{2})| = |B_{2k}\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right)| < |B_{2k}|$ ja toisaalta lauseesta 4.8 seuraa $\varphi_{2k}(0) = \varphi_{2k}(1) = B_{2k}$. □

Alunperin Jakob Bernoulli on keksinyt Bernoullin luvut ja Bernoullin polynomit tutkiessaan kokonaislukujen potenssien summia ja kehittäessään kaavan niiden laskemista varten [7]. Seuraavaksi esitettävän lauseen todistus perustuu Bernoullin polynomien generoivaan funktioon (vrt. [5][s. 148.])

Lause 4.14 (Bernoullin summakaava kokonaislukujen potensseille)**.** *Olkoot $n \geq 1$ ja $m \geq 2$ kokonaislukuja. Tällöin*

$$n\sum_{k=1}^{m-1} k^{n-1} = \varphi_n(m) - \varphi_n(0). \tag{4.3}$$

Todistus. Olkoon $e^z \neq 1$. Tarkastellaan lauseketta

$$(*) \qquad \frac{ze^{mz}}{e^z-1} - \frac{z}{e^z-1} = z(1+e^z+\ldots+e^{(m-1)z}) = z\sum_{k=0}^{m-1} e^{kz}$$

$$= z\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kz)^n}{n!} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{m-1}k^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}n\sum_{k=0}^{m-1}k^{n-1}.$$

Toisaalta lauseketta $(*)$ voidaan käsitellä Bernoullin lukujen määritelmän 3.1 ja Bernoullin polynomien määritelmän 4.1 avulla.

$$\frac{ze^{mz}}{e^z-1} - \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(m)}{n!}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}[\varphi_n(m)-B_n]$$

$$= \underbrace{\varphi_0(m)-B_0}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}[\varphi_n(m)-B_n].$$

Molemmissa tapauksissa termin z^n kertoimien tulee olla yhtenevät kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$, ja lisäksi lauseen 4.3 mukaan $B_n = \varphi_n(0)$, joten

$$n\sum_{k=0}^{m-1} k^{n-1} = \varphi_n(m) - \varphi_n(0).$$

□

Esimerkki 4.15. Sovelletaan edellä todistettua Bernoullin summakaavaa kokonaislukupotensseille summaan $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\varphi_3(n+1)-\varphi_3(0)}{3} = \frac{(n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) - 0}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. Euler-MacLaurinin summakaava

Tässä luvussa johdetaan kuuluisa Euler-MacLaurinin summakaava. Sen avulla summia voidaan laskea määrätyn integraalin avulla ja määrättyjä integraaleja summalausekkeiden avulla. Ensin johdetaan ja esitellään kaavasta versio, jolla lasketaan integraalien arvoja, ja seuraavassa luvussa esitellään alkuperäisempi versio, jolla lasketaan summien arvoja hyödyntäen sopivaa integraalia.

Kaavan johtaminen myötäilee Ernst Lindelöfin summakaavan johtoa [5, s. 377–389], joka taas myötäilee saksalaisen W. Wirtingerin summakaavalle keksimää johtoa. Lindelöf on käyttänyt vanhan määritelmän mukaisia Bernoullin lukuja, mutta tässä on johtaminen muutettu uudemman määritelmän mukaiseksi.

5.1. **Euler-MacLaurinin summakaavan johtaminen.** Arvioidaan integraalia

$$\int_0^1 f(t)\,dt, \tag{5.1}$$

ja oletetaan, että $f(t)$ ja sen kaikki tarvittavat derivaatat ovat jatkuvia välillä $[0,1]$. Merkitään

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= t + A_1 \quad \text{jolloin} \\ \psi_1'(t) &= 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Edellä A_1 on toistaiseksi määrittelemätön vakio. Kaavaa (5.2) käyttäen integraali (5.1) kirjoitetaan muodossa $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\psi_1'(t)\,dt$, ja osittaisintegroinnilla saadaan se muotoon

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\psi_1'(t)\,dt = \Big/_{0}^{1} f(t)\psi_1(t) - \int_0^1 f'(t)\psi_1(t)\,dt. \tag{5.3}$$

Nyt viimeisessä integraalissa merkitään $\psi_1(t) = \frac{1}{2}\psi_2'(t)$, jolloin

$$\psi_2(t) = 2\int \psi_1(t)\,dt = t^2 + 2A_1 t + A_2. \tag{5.4}$$

Tämän avulla (5.3) saadaan edelleen muotoon

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \Big/_{0}^{1} f(t)\psi_1(t) - \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} f'(t)\psi_2(t) + \frac{1}{2}\int f''(t)\psi_2(t)\,dt. \tag{5.5}$$

Yleisesti, kun $j = 1, 2, 3, \ldots$, asetetaan

$$\psi_j(t) = \frac{1}{n+1}\psi_{j+1}' \quad \text{eli} \tag{5.6}$$

$$\psi_{j+1} = (j+1)\int \psi_j(t)\,dt. \tag{5.7}$$

Kaavalla (5.7) saadaan kaavasta (5.4) edelleen

$$\psi_3(t) = 3\int t^2 + 2A_1 t + A_2\,dt = t^3 + 3A_1 t^2 + 3A_2 t + A_3$$

$$\psi_4(t) = 4\int \psi_3\,dt = t^4 + 4A_1 t^3 + 6A_2 t^2 + 4A_3 t + A_4,$$

ja yleisesti

$$(5.8)\quad \psi_j(t) = \binom{j}{0}A_0 t^j + \binom{j}{1}A_1 t^{j-1} + \ldots + \binom{j}{j-1}A_{j-1}t + \binom{j}{j}A_j,$$

mihin on yhtenäisyyden vuoksi merkitty kertoimet $\binom{j}{0} = A_0 = 1$. Tulos on helppo osoittaa induktiolla.

Todistus. Lähtöoletuksen (5.2) mukaan $\psi_1 = t + A_1$. Oletetaan, että yhtälö (5.8) pätee, kun $j = k - 1$. Nyt (5.7) antaa

$$\begin{aligned}
\psi_k &= k\int \psi_{k-1}\,dt \\
&\overset{\text{ind.}}{=} k\int \binom{k-1}{0}A_0 t^{k-1} + \binom{k-1}{1}A_1 t^{k-2} + \ldots + \binom{k-1}{k-1}A_{k-1}\,dt \\
&= \frac{k}{k}\binom{k-1}{0}A_0 t^k + \frac{k}{k-1}\binom{k-1}{1}A_1 t^{k-1} + \ldots + k\binom{k-1}{k-1}A_{k-1}t + A_k \\
&= \binom{k}{0}A_0 t^k + \binom{k}{1}A_1 t^{k-1} + \ldots + \binom{k}{k-1}A_{k-1}t + \binom{k}{k}A_k,
\end{aligned}$$

missä A_k on integroimisvakio. □

Nyt kaikilla $j \geq 1$ saadaan

(5.9)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,dt = \Big/_{0}^{1} f(t)\psi_1(t) - \frac{1}{2!}\Big/_{0}^{1} f'(t)\psi_2(t) + \frac{1}{3!}\Big/_{0}^{1} f''(t)\psi_3(t) - \ldots \\
+ \frac{(-1)^{j-1}}{j!}\Big/_{0}^{1} f^{\{j-1\}}(t)\psi_j(t) + \frac{(-1)^j}{j!}\int_0^1 f^{\{j\}}(t)\psi_j(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi määritellään vakioiden A_i arvot. Lindelöf [5, s. 378–379] käytti seuraavaksi esiteltäviä oletuksia, jotka tuottavat hyvän tuloksen ainakin polynomeilla.

Tutkitaan ensin tapausta $j = 1$ ja ajatellaan tilannetta, jossa $f'(t)$ on vakiofunktio välillä $[0, 1]$ eli $f(t)$ on ensimmäisen asteen polynomi. Pyritään valitsemaan A_1 siten, että jäännösintegraali eroaisi mahdollisimman vähän nollasta. Tällä valinnalla yhtälön (5.9) jäännösintegraalille pätee

$$\int_0^1 f'(t)\psi_1(t)\,dt = f'(t)\int_0^1 \psi_1(t)\,dt$$

ja integraali poikkeaa vähiten nollasta, kun

$$0 = \int_0^1 \psi_1(t)\,dt = \int_0^1 t + A_1\,dt = \Big/_{0}^{1} \frac{t^2}{2} + A_1 t = \frac{1}{2} + A_1$$

eli $A_1 = -\frac{1}{2}$.

Yleisesti, kun $j \geq 1$, kuvaa kaava (5.9) jälleen hyvin polynomia, jonka aste on j. Tällöin $f^{\{j\}}(t)$ on vakio ja asetetaan

$$\int_0^1 \psi_j(t)\,dt = 0. \tag{5.10}$$

Tämä voidaan kaavaa (5.8) apuna käyttäen laskea auki.

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \psi_j(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \binom{j}{0} A_0 t^j + \binom{j}{1} A_1 t^{j-1} + \ldots + \binom{j}{j-1} A_{j-1} t + \binom{j}{j} A_j\,dt \\
&= \frac{1}{j+1}\binom{j}{0} A_0 + \frac{1}{j}\binom{j}{1} A_1 + \ldots + \frac{1}{2}\binom{j}{j-1} A_{j-1} + \binom{j}{j} A_j.
\end{aligned}$$

Jo aikaisemmin oli määritelty, että vakio $A_0 = 1$, joten vakiot A_j saadaan laskettua lopuillekin $j = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{-1}{j+1}\binom{j}{0} A_0 - \frac{1}{j}\binom{j}{1} A_1 - \ldots - \frac{1}{2}\binom{j}{j-1} A_{j-1} \\
&= \frac{-1}{j+1}\binom{j+1}{0} A_0 - \frac{1}{j+1}\binom{j+1}{1} A_1 - \ldots - \frac{1}{j+1}\binom{j+1}{j-1} A_{j-1} \\
&= \frac{-1}{j+1}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{j+1}{k} A_k.
\end{aligned}$$

Tämä on yhtenevä Bernoullin lukujen rekursiivisen laskukaavan (3.1) kanssa ja lisäksi $A_0 = 1 = B_0$, joten $A_j = B_j$ kaikilla $j = 0, 1, 2, \ldots$

Myös polynomien $\psi_j(t)$, $j \geq 1$, laskukaava (5.8) saadaan lausuttua Bernoullin lukujen avulla.

$$\begin{aligned}
\psi_j(t) &= \binom{j}{0} B_0 t^j + \binom{j}{1} B_1 t^{j-1} + \ldots + \binom{j}{j-1} B_{j-1} t + \binom{j}{j} B_j \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} B_k t^{j-k} \overset{L.4.2}{=} \varphi_j(t).
\end{aligned}$$

Eli saadaan tulos, että polynomit $\psi_j(t)$, $j \geq 1$, ovat Bernoullin polynonomeja ja niistä käytetään tästä eteenpäin merkintää $\varphi_j(t)$.

Tässä vaiheessa voidaan palata yhtälöön (5.9) ja tarkastella sen oikean puolen sijoituslausekkeita. Yhtälön ensimmäisestä sijoituslausekkeesta saadaan

$$\Big/_{0}^{1} f(t)\varphi_1(t) = \varphi_1(1)f(1) - \varphi_1(0)f(0) \overset{(4.2)}{=} -B_1\left[f(1) + f(0)\right]$$

ja lopuille $j = 2, 3, 4, ...$ saadaan lauseen 4.8 avulla

$$\begin{aligned}\Big/_{0}^{1} f^{\{j-1\}}(t)\varphi_j(t) &= \varphi_j(1)f^{\{j-1\}}(1) - \varphi_j(0)f^{\{j-1\}}(0) \\ &\overset{L.4.8}{=} B_j\left[f^{\{j-1\}}(1) - f^{\{j-1\}}(0)\right].\end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (5.9) saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt = -B_1\left[f(1) + f(0)\right] &- \frac{B_2}{2!}\left[f'(1) - f'(0)\right] + \dots \\ &+ (-1)^{j-1}\frac{B_j}{j!}\left[f^{\{j-1\}}(1) - f^{\{j-1\}}(0)\right] \\ &+ \frac{(-1)^j}{j!}\int_0^1 f^{\{j\}}(t)\varphi_j(t)\,dt.\end{aligned}$$

Tämä saadaan vielä sievempään muotoon, kun muistetaan, että $B_j = 0$ kaikille parittomille $j \geq 3$. Tästä seuraa, että kaikki positiiviset summattavat katoavat poislukien viimeisenä olevaa integraalia, joten yhtälö voidaan esittää muodossa

(5.11)
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt = -B_1\left[f(1) + f(0)\right] &- \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{\{2k-1\}}(1) - f^{\{2k-1\}}(0)\right] \\ &+ \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{\{2n\}}(t)\varphi_{2n}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Edellä saatu yhtälö (5.11) on erikoistapaus Euler-MacLaurinin summakaavasta. Tällä kaavalla ei vielä saada kovinkaan tarkkaa likiarvoa kuin hyvin harvoissa tapauksissa, kuten polynomeilla. Lisäksi kaavaa voidaan sellaisenaan käyttää vain välin $[0, 1]$ määrätyn integraalin laskemiseen. Seuraavaksi kehitämme kaavaa edelleen, jotta sitä voisi käyttää millä tahansa integroimisvälillä ja kehitämme myös kaavan tarkkuutta jakamalla integroimisvälin pienempiin osiin.

Tarkastellaan integraalia, jolla on integroimisrajat $a < b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Jaetaan integroimisväli yhtäsuuriin osiin, joita on m kappaletta. Merkitään jakovälin pituutta $h = \frac{b-a}{m}$, jolloin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a+(m-1)h}^{a+mh} f(x)\,dx. \tag{5.12}$$

Jokaiselle oikean puolen integraalille $\int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(x)\,dx$ tehdään oma lineaarinen muuttujanvaihto, jossa $x = (a+kh)+ht$ ja $dx = h\,dt$. Tällöin

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(x)\,dx = h\int_0^1 f(a+(k-1)h+ht)\,dt.$$

Sijoittamalla nämä kaavaan (5.12) saadaan

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= h\int_0^1 f(a+ht)\,dt + h\int_0^1 f(a+h+ht)\,dt \\ &\quad + \ldots + h\int_0^1 f(a+(m-1)h+ht)\,dt \\ &= h\int_0^1 F(t)\,dt,\end{aligned} \tag{5.13}$$

missä

$$F(t) = f(a+ht) + f(a+h+ht) + \ldots + f(a+(m-1)h+ht). \tag{5.14}$$

Kaavan (5.13) avulla voidaan soveltaa yhtälöä (5.11) mielivaltaisille integroimisrajoille. Tätä ennen lasketaan kuitenkin pari lauseketta funktiota $F(t)$ käyttäen.

Sijoitetaan funktio $F(t)$ yhtälöön (5.11). Tällöin oikean puolen ensimmäisestä termistä saadaan

$$\begin{aligned}&-B_1[F(1)+F(0)] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\big[f(a+h)+f(a+h+h)+\ldots+f(a+(m-1)h+h)\big] \\ &\qquad + \big[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(m-1)h)\big]\Big] \\ &= \frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(m-1)h)+\frac{1}{2}f(a+mh).\end{aligned} \tag{5.15}$$

Derivoimalla k kertaa $F(t)$ saadaan kaavasta (5.14)

$$\begin{aligned}F^{\{k\}}(t) = h^k\big[&f^{\{k\}}(a+ht) + f^{\{k\}}(a+h+ht) + \ldots \\ &+ f^{\{k\}}(a+(m-1)h+ht)\big].\end{aligned} \tag{5.16}$$

Tämän avulla kaikille $k = 1, 2, 3, \dots, n$ saadaan

$$
\begin{aligned}
&(5.17)\quad F^{\{k\}}(1) - F^{\{k\}}(0)\\
&= h^k\big[f^{\{k\}}(a+h) + f^{\{k\}}(a+h+h) + \ldots + f^{\{k\}}(a+(m-1)h+h)\big]\\
&\quad -h^k\big[f^{\{k\}}(a) + f^{\{k\}}(a+h) + \ldots + f^{\{k\}}(a+(m-1)h)\big]\\
&= h^k\big[f^{\{k\}}(b) - f^{\{k\}}(a)\big].
\end{aligned}
$$

Nyt on käytettävissä tarvittavat aputulokset, joilla voidaan arvioida integraalia $\int_a^b f(t)\,dt$. Jaetaan integrointitiväli $[a,b]$ ensin h-mittaisiin osiin ja palautetaan saadut integraalit funktion $F(t)$ integraaleiksi välillä $[0,1]$ kaavan (5.13) avulla. Integrointivälin ollessa $[0,1]$ voimme soveltaa aikaisemmin saatua kaavaa (5.11). Tällöin saadaan

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,dx \overset{(5.13)}{=} h\int_0^1 F(t)\,dt\\
&\overset{(5.11)}{=} h\Bigg[-B_1[F(1)+F(0)] - \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[F^{\{2k-1\}}(1) - F^{\{2k-1\}}(0)]\\
&\qquad + \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 F^{\{2n\}}(t)\varphi_{2n}(t)\,dt\Bigg].
\end{aligned}
$$

Ensimmäinen osa saadaan esitettyä kaavan (5.15) avulla funktion $f(t)$ (puolisuunnikassäännön mukaisina) summina, toisesta osasta saadaan kaavan (5.17) avulla Bernoullin lukujen avulla laskettavia korjaustermejä ja kolmas integraaliosa on virhetermi, jota joudutaan arvioimaan tapauskohtaisesti. Lopullinen esitys on seuraavassa lauseessa.

Lause 5.1 (Euler-MacLaurinin summakaava, "toinen muoto" integraalien laskemiseen)**.** *Olkoon $f(x)$ jatkuva ja sillä on jatkuvat derivaatat $2n$-kertalukuun asti suljetulla välillä $[a,b]$. Olkoon lisäksi m välin $[a,b]$ jako ja $h = \frac{b-a}{m}$. Tällöin*

$$
(5.18)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{m-1} f(a+kh) + \frac{1}{2}f(b)\right] - \sum_{k=1}^{n} T_{2k} + R_{2n+1},
$$

missä

$$
(5.19)\qquad T_{2k} = \frac{B_{2k}h^{2k}}{(2k)!}\left[f^{\{2k-1\}}(b) - f^{\{2k-1\}}(a)\right] \quad \textit{ja}
$$

$$
(5.20)\qquad R_{2n+1} = \frac{h}{(2n)!}\int_0^1 F^{\{2n\}}(t)\varphi_{2n}(t)\,dt.
$$

Seuraus 5.2. *Kun $f(x)$ on astetta j oleva polynomi $P_j(x)$, valinnalla $2n \geq j$ saadaan $R_{2n+1} = 0$, koska $P_j^{\{2n\}}(x)$ on vakio. Soveltamalla*

Eulerin summakaavaa valinnalla $m = 1$ polynomille $P_j(x)$ saadaan

$$\int_a^b P_j(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,[P_j(a) + P_j(b)]$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}h^{2k}}{(2k)!}\left[P_j^{\{2k-1\}}(b) - P_j^{\{2k-1\}}(a)\right].$$

Huomautus 5.3. Kaavalla (5.18) saadaan siis polynomien integraaleille laskettua tarkat arvot, kunhan $2n$ valitaan riittävän suureksi. Tämä ei tosin ole kovinkaan yllättävää, koska kaavan johtamisessa ratkaisut tehtiin juuri siten, että se toimisi hyvin polynomeilla.

Jos $f(x)$ ei ole polynomi, antaa kaava (5.18) integraalille tarkan arvon, jos integraali R_{2n+1} osataan laskea. Integraalin arvoa ei kuitenkaan useimmiten ole helppo laskea, mutta joissakin erikoistapauksissa sopivilla muuttujien m ja n valinnoilla sen itseisarvo saadaan arvioitua pieneksi.

Käsitellään erikseen tapausta, jossa tiedetään, että $f^{\{2n\}}(x)$ merkki pysyy samana välillä $[a, b]$ (vrt. Lindelöf [5][s. 391 – 393]). Tällöin kaavan (5.14) mukaan sama pätee derivaatalle $F^{\{2n\}}(t)$ välillä $[0, 1]$, jolloin määrätyn integraalin väliarvolauseen perusteella saadaan Bernoullin polynomi pois integraalista. On siis olemassa $\xi \in]0, 1[$, jolle

$$R_{2n+1} = \frac{h\varphi_{2n}(\xi)}{(2n)!}\int_0^1 F^{\{2n\}}(t)\,dt = \frac{h\varphi_{2n}(\xi)}{(2n)!}[F^{\{2n-1\}}(1) - F^{\{2n-1\}}(0)]$$
$$\overset{(5.17)}{=} \frac{h^{2n}\varphi_{2n}(\xi)}{(2n)!}[f^{\{2n-1\}}(b) - f^{\{2n-1\}}(a)].$$

Lauseen 4.13 mukaan $|\varphi_{2n}(x)| \le |B_{2n}|$ välillä $[0, 1]$, joten

$$|R_{2n+1}| \le \frac{h^{2n}|B_{2n}|}{(2n)!}\left|f^{\{2n-1\}}(b) - f^{\{2n-1\}}(a)\right|.$$

Vertaamalla tätä kaavaan (5.19) todetaan, että $|R_{2n+1}| \le |T_{2n}|$, ja saadaan seuraava lause.

Lause 5.4. *Jos derivaatan $f^{\{2n\}}(x)$ merkki pysyy samana välillä $[a, b]$, niin Euler-MacLaurinin summakaavassa (5.18) jäännöstermille R_{2n+1} pätee*

$$|R_{2n+1}| \le |T_{2n}|, \tag{5.21}$$

missä T_{2n} on korjaustermien summan $\sum_{k=0}^{n} T_{2k}$ viimeinen yhteenlaskettava.

Tarkastellaan tilannetta, jossa edellisen lauseen ehtojen lisäksi derivaatan $f^{\{2n+2\}}(x)$ merkki pysyy välillä $[a, b]$ samana kuin derivaatan $f^{\{2n\}}(x)$ merkki. Kasvatetaan korjaustermien määrää yhdellä, jolloin

$$R_{2n+1} = T_{2n+2} + R_{2n+3},$$

missä lauseen 5.4 mukaan $|R_{2n+3}| \leq |T_{2n+2}|$, joten termin R_{2n+1} merkki on sama kuin termin T_{2n+2}.

Kaavasta (5.19) puolestaan seuraa, että T_{2n} ja T_{2n+2} ovat eri merkkisiä, koska lauseen 3.10 perusteella B_{2n} ja B_{2n+2} ovat erimerkkisiä ja derivaattojen $f^{\{2n\}}$ ja $f^{\{2n+2\}}$ merkeistä seuraa, että $f^{\{2n-1\}}(b) - f^{\{2n-1\}}(a)$ ja $f^{\{2n+1\}}(b) - f^{\{2n+1\}}(a)$ ovat samanmerkkisiä.

Edelläolevasta seuraa, että B_{2n+1} on erimerkkinen kuin T_{2n}, joten esitellään hieman lausetta 5.4 vahvempi lause.

Lause 5.5. *Olkoon $2n \geq 2$. Jos derivaatoilla $f^{\{2n\}}$ ja $f^{\{2n+2\}}$ pysyy sama yhteinen merkki välillä $[a, b]$, niin jäännöstermillä R_{2n+1} on vastakkainen merkki kuin termillä T_{2n} ja lisäksi*

$$|R_{2n+1}| \leq |T_{2n}|.$$

Seuraus 5.6. *Lauseen 5.5 ehtojen täyttyessä kaava (5.18) voidaan esittää myös muodossa*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = h &\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{m-1} f(a+kh) + \frac{1}{2}f(a+mh)\right] \\ &- \sum_{k=1}^{n} T_{2k} - \frac{1}{2}T_{2n} + \tilde{R}_{2n+1},\end{aligned} \tag{5.22}$$

missä $-\frac{1}{2}|T_{2n}| \leq \tilde{R}_{2n+1} \leq \frac{1}{2}|T_{2n}|$.

5.2. **Euler-MacLaurinin summakaavan soveltaminen logaritmien laskemiseen.** Seuraavaksi sovelletaan Eulerin summakaavaa logaritmien laskemiseen ja tarkastellaan sen toimivuutta. (Vrt. Lindelöf [5][s. 393 – 394].)

Esimerkki 5.7. Tarkastellaan integraalia

$$\int_1^2 \frac{1}{x} = \log 2.$$

Nyt $f(x) = \frac{1}{x}$ ja näinollen $f^{\{k\}}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$, joten Eulerin summakaavan korjaustermeiksi saadaan

$$T_{2k} = \frac{B_{2k}h^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{(2k-1)!}{2^{2k}} - \frac{(k-1)!}{1^{2k}}\right) = \frac{B_{2k}h^{2k}}{2k}\left(\frac{1}{2^{2k}} - 1\right).$$

Edelleen kaikille $k \geq 1$ pätee $f^{\{2k\}} > 0$ ja $f^{\{2k+2\}} > 0$, joten lauseen 5.5 perusteella voidaan antaa arvio Eulerin summakaavan virheelle.

Tällöin kaavaa (5.22) soveltaen $\log 2$ saadaan laskettua kaavalla

$$\begin{aligned}\log 2 = h &\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+2h} + \ldots + \frac{1}{1+(m-1)h} + \frac{1}{4}\right] \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}h^{2k}}{2k}\left(\frac{1}{2^{2k}} - 1\right) - \frac{1}{2}T_{2n} - \tilde{R}_{2n+1},\end{aligned} \tag{5.23}$$

missä $|\tilde{R}_{2n+1}| \leq \frac{1}{2}|T_{2n}|$ kertoo virherajat.

Nyt kaavaa (5.23) käyttäen saadaan laskettua likiarvot virheineen. Tulokset ovat taulukoissa 2 ja 3.

$2n$	$m = 1$	$m = 2$
Ei korj.	0,7500	0,70833333
2	**0,7**188 $\pm$ 0,0313	**0,70**052083 $\pm$ 0,00781250
4	**0,69**14 $\pm$ 0,0040	**0,692**95247 $\pm$ 0,00024415
6	**0,69**34 $\pm$ 0,0020	**0,6931**6610 $\pm$ 0,00003052
8	**0,69**35 $\pm$ 0,0021	**0,69314**369 $\pm$ 0,00000811
10	**0,69**18 $\pm$ 0,0038	**0,69314**810 $\pm$ 0,00000370
12	**0,6**985 $\pm$ 0,0106	**0,69314**698 $\pm$ 0,00000258
14	**0,6**674 $\pm$ 0,0417	**0,69314**701 $\pm$ 0,00000255
16	**0,**8474 $\pm$ 0,2217	**0,69314**785 $\pm$ 0,00000339
18	$-$0,4580 $\pm$ 1,5270	**0,69314**540 $\pm$ 0,00000583
20	11,4232 $\pm$ 13,2281	**0,6931**5219 $\pm$ 0,00001262

TAULUKKO 2. Luvun $\log 2$ likiarvoja virheineen, kun $m = 1$ ja $m = 2$. Lihavoituna desimaalit, joiden virhe on alle 1 numeron. Virheet pyöristetty ylöspäin.

$2n$	$m = 3$	$m = 4$
Ei	0,700000000	0,697023809524
2	**0,69**6527778 $\pm 3{,}48 \cdot 10^{-3}$	**0,69**5070684524 $\pm 1{,}96 \cdot 10^{-3}$
4	**0,6931**03781 $\pm 4{,}83 \cdot 10^{-5}$	**0,6931**32818313 $\pm 1{,}53 \cdot 10^{-5}$
6	**0,69314**9327 $\pm 2{,}68 \cdot 10^{-6}$	**0,693147**600265 $\pm 4{,}77 \cdot 10^{-7}$
8	**0,693146**964 $\pm 3{,}17 \cdot 10^{-7}$	**0,6931471**55093 $\pm 3{,}17 \cdot 10^{-8}$
10	**0,6931472**16 $\pm 6{,}41 \cdot 10^{-8}$	**0,69314718**3149 $\pm 3{,}61 \cdot 10^{-9}$
12	**0,6931471**72 $\pm 1{,}99 \cdot 10^{-8}$	**0,693147183**168 $\pm 6{,}29 \cdot 10^{-10}$
14	**0,69314718**3 $\pm 8{,}72 \cdot 10^{-9}$	**0,6931471806**42 $\pm 1{,}56 \cdot 10^{-10}$
16	**0,69314718**0 $\pm 5{,}15 \cdot 10^{-9}$	**0,6931471805**38 $\pm 5{,}17 \cdot 10^{-11}$
18	**0,69314718**1 $\pm 3{,}95 \cdot 10^{-9}$	**0,6931471805**67 $\pm 2{,}23 \cdot 10^{-11}$
20	**0,69314718**1 $\pm 3{,}80 \cdot 10^{-9}$	**0,6931471805**57 $\pm 1{,}21 \cdot 10^{-11}$
22	**0,69314718**0 $\pm 4{,}49 \cdot 10^{-9}$	**0,69314718056**1 $\pm 8{,}00 \cdot 10^{-12}$
24	**0,69314718**2 $\pm 6{,}39 \cdot 10^{-9}$	**0,69314718056**0 $\pm 6{,}41 \cdot 10^{-12}$
26	**0,6931471**77 $\pm 1{,}08 \cdot 10^{-8}$	**0,69314718056**0 $\pm 6{,}09 \cdot 10^{-12}$
28	**0,6931471**88 $\pm 2{,}14 \cdot 10^{-8}$	**0,69314718056**1 $\pm 6{,}77 \cdot 10^{-12}$
30	**0,6931471**61 $\pm 4{,}87 \cdot 10^{-8}$	**0,69314718055**9 $\pm 8{,}70 \cdot 10^{-12}$

TAULUKKO 3. Luvun $\log 2$ likiarvoja virheineen, kun $m = 3$ ja $m = 4$. Lihavoituna desimaalit, joiden virhe on alle 1 numeron. Virheet pyöristetty ylöspäin.

Jos integoimisväliä ei ole ollenkaan jaettu eli $m = 1$, saadaan pienin virhetermin arvo $\pm$0,0020 kolmannen korjaustermin kohdalla. Toisaalta jakamalla väli kahteen osaan $m = 2$ saadaan melkein desimaalin verran parempi virhetermi jo toisen korjaustermin $\pm 0{,}00024415$ kohdalla ja viidennen termin kohdalla virhe jää jo kuudenteen desimaaliin.

Tuloksista huomataan, ettei korjaustermejä kannata lisätä pienillä m kovinkaan montaa, koska virhetermi lähtee kasvamaan jonkun muuttujasta m riippuvan indeksin jälkeen. Syy tähän selviää lauseen 3.7 arviosta Bernoullin luvulle B_{2n}, sillä muuttujan n kasvaessa kasvaa $|B_{2n}|$ olennaisesti kuten $(2k)!$ eli voimakkaammin kuin h^{2n}. Tällöin tiedetään, että jollakin n virhetermi alkaa joka tapauksessa kasvamaan riippumatta siitä, mikä m on valittu. Valitsemalla kuitenkin riittävän iso m saadaan h^{2n} niin pieneksi, että virhetermikin jää pieneksi sopivalla korjaustermien määrällä.

Taulukosta 3 huomataan, miten jakoväliä tihentämällä virhe jää jo yhdeksänteen desimaaliin, kun $m = 3$, ja 12 desimaaliin, kun $m = 4$. Näissäkään korjaustermien määrän kasvattaminen ei paranna tulosta loputtomiin, vaan korjaustermien arvot lähtevät kasvamaan vain vähän isommilla n.

Likiarvon kasvattamiseen tarvitaan siis jakovälin tihentämistä entisestään. Valinnalla $m = 10$ saadaan $T_{30} \approx 2 \cdot 10^{-23}$, valinnalla $m = 100$ saadaan $T_{30} \approx 2 \cdot 10^{-53}$ ja valinnalla $m = 1000$ saadaan $T_{30} \approx 2 \cdot 10^{-83}$.

Toisaalta jakovälin tihentyessä pienenevät korjaustermien arvotkin isommille n, mikä mahdollistaa paremman tarkkuuden korjaustermejä lisäämällä, ja kun on laskettu enemmän Bernoullin lukuja, ei niitä tarvitse enää laskea uudelleen joka kerta. Jos valmiiksi lasketut luvut kelpaavat, on tähän tarkoitukseen julkaisuja, joissa on lueteltu useimpiin tapauksiin riittävä määrä Bernoullin lukuja. Yksi tällainen on Plouffen julkaisu "The first 498 Bernoulli Numbers" [6].

Jakovälin tihentämisen lisäksi on siis hyvä ottaa käyttöön myös lisää korjaustermejä. Valitsemalla $m = 28$, saadaan $T_{60} \approx 5 \cdot 10^{-55}$, eli summakaavan yhteenlaskettavat vähenivät 72 ja korjaustermit lisääntyivät 15 termillä verrattuna siihen, että viimeinen korjaustermi olisi ollut T_{30}. Selvemmin etu tulee kuitenkin esille vaadittaessa isompaa tarkkuutta. Valitsemalla $m = 84$ saadaan $T_{60} \approx 1 \cdot 10^{-83}$. Tässä 15 korjaustermin lisääminen säästää yli 900 yhteenlaskettavan laskemisen summakaavassa, mikä on jo huomattava etu. Ja jos halutaan ennemmin käyttää pyöreitä lukuja, saadaan valinnalla $m = 100$ viimeiseksi korjaustermiksi $T_{60} \approx 2 \cdot 10^{-88}$.

Edellä valitut korjaustermien arvot eivät suinkaan ole pienimpiä kyseisillä muuttujan m arvoilla saatavia virherajoja, vaan ne ovat esimerkkejä siitä, kuinka virhe saadaan helposti riittävän pieneksi, jos jakovälien määrää m kasvatetaan. Myöhemmin huomautuksessa 5.10 johdetaan arvio pienimmän virheen indeksin arvolle. Tällöin, kun $m = 84$, on pienin virhe indeksillä $2n \approx 528$, jolloin $T_{528} \approx 6,65 \cdot 10^{-231}$, ja kun $m = 100$, saadaan pienin virhe indeksillä $2n \approx 628$, jolloin $T_{628} \approx 1,34 \cdot 10^{-274}$.

Ennen kuin suoritetaan tarkempia arvioita siitä, millä indeksillä pienin korjaustermi esiintyy, tarkastellaan vielä yleisemmin logaritmien laskemista Eulerin summakaavan avulla.

Oletetaan, että $x > 1$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt. \tag{5.24}$$

Kuten esimerkissä 5.7 on $f(t) = \frac{1}{t}$ ja derivaatta $f^{\{k\}}(t) = (-1)^k \frac{k!}{t^{k+1}}$, jolloin korjaustermien lausekkeiksi saadaan

$$T_{2k} = \frac{B_{2k}h^{2k}}{2k}\left(\frac{1}{x^{2k}} - 1\right), \tag{5.25}$$

missä $0 > \frac{1}{x^{2k}} - 1 > -1$. Lauseen 5.5 mukaan virhetermille saadaan tällöin seuraavan lauseen mukainen arvio.

Lause 5.8. *Olkoon $x > 1$. Laskettaessa kaavan (5.22) avulla likiarvoa lausekkeelle $\log x$, sen virheelle on olemassa yläraja*

$$|\tilde{R}_{2n+1}| \leq \frac{1}{2}|T_{2n}| < \frac{1}{2}\left|\frac{B_{2n}h^{2n}}{2n}\right|.$$

Virheen yläraja ei siis ole riippuvainen halutun logaritmin arvosta x, vaan se pysyy samana jakovälin h pysyessä samana, tällöin m luonnollisesti muuttuu ja samassa suhteessa summakaavan yhteenlaskettavien määrä.

Esimerkki 5.9. Lasketaan $\log 10$ arvo Eulerin summakaavan avulla ja käytetään siinä kaavaa (5.22). Valitaan $h = 0{,}25$, mikä esimerkissä 5.7 vastaa tilannetta $m = 4$, mutta nyt $m = \frac{10-1}{h} = 36$ ja valitaan viimeiseksi korjaustermin indeksiksi $2n = 20$.

$$\begin{aligned}\log 10 &= \int_1^{10} \frac{1}{x}\,dx \\ &= 0{,}25\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1+0{,}25} + \frac{1}{1+2\cdot 0{,}25} + \ldots + \frac{1}{1+35\cdot 0{,}25} + \frac{1}{2\cdot 10}\right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{10} T_{2k} - \frac{1}{2}T_{20} + \tilde{R}_{21},\end{aligned}$$

missä kaavan (5.25) mukaan

$$T_{2k} = \frac{B_{2k}h^{2k}}{2k}\left(\frac{1}{10^{2k}} - 1\right),$$

ja $-\frac{1}{2}|T_{20}| \leq \tilde{R}_{21} \leq \frac{1}{2}|T_{20}|$.

Vastaus on $\log 10 = \mathbf{2{,}30258509299}1 \pm 0{,}000000000012$ eli saatiin sama tarkkuus kuin $\log 2$ tapauksessakin. Työtä tosin jouduttiin tekemään enemmän, koska summakaavan termejä laskettiin 37 kappaletta, kun $\log 2$ tapauksessa summakaavassa oli vain 5 termiä. Vähän helpotusta saadaan, kun hyväksikäytetään integraalin laskusääntöjä ja mahdollisesti aikaisemmin laskettuja logaritmin arvoja.

$$\begin{aligned}\log 10 &= \int_1^{10} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{8} \frac{1}{x}\,dx + \int_8^{10} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \log 8 + \int_8^{10} \frac{1}{x}\,dx = 3\log 2 + \int_8^{10} \frac{1}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Tässä $\log 2$ on jo tunnettu tai se on vaivattomampi laskea halutulla tarkkuudella kuin $\log 10$. Kun jäljelle jääneeseen integraaliin sovelletaan Eulerin summakaavaa, tulee korjaustermeistä T_{2k} seuraavia

$$T_{2k} = \frac{B_{2k}h^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{(2k-1)!}{10^{2k}} - \frac{(2k-1)!}{8^{2k}}\right) = \frac{B_{2k}h^{2k}}{2k}\left(\frac{1}{10^{2k}} - \frac{1}{8^{2k}}\right).$$

Tämä supistuu nopeasti, eli kun $m = 4$, on $T_8 = 3{,}15 \cdot 10^{-15}$. Ottamalla tarkimman tähän asti lasketun $\log 2$ arvon ja neljä korjaustermiä $\int_8^{10} \frac{1}{x}\,dx$ laskemiseen saadaan

$$\begin{aligned}\log 10 &= 3(0{,}693147180560 \pm 6,09 \cdot 10^{-12}) + 0{,}223143551314 \pm 2 \cdot 10^{-15} \\ &= \mathbf{2{,}30258509299}6 \pm 19 \cdot 10^{-12},\end{aligned}$$

missä integraalin virhe on niin pieni, ettei se vaikuta lopputulokseen.

Tästä huomataankinkin, että laskettaessa tällä menetelmällä isompia logaritmeja virhe suppenee huomattavan nopeasti verrattuna esimerkiksi $\log 2$ laskemiseen. Integraalin $\int_8^{10} \frac{1}{x}\,dx$ virhe on pieni verrattuna aikaisemmin laskettuun $\log 2$ virheeseen, ja jos lasketaan esimerkiksi $\log 1025 = 3\log 10 + \int_{1000}^{1025} \frac{1}{x}\,dx$, niin äsken lasketun $\log 10$ virhe, joka oli $\pm 21 \cdot 10^{-12}$, kolminkertaistuu. Mutta integraalin virhe arvolla $m = 1$ (eli ilman jakoa) on jo neljännen korjaustermin kohdalla $R_9 = \pm 5,7 \cdot 10^{-17}$.

Hyvin suuri merkitys on silläkin, miten logaritmi jaetaan osiin. Jos lasketaan $\log 9000 = 3\log 10 + \int_{1000}^{9000} \frac{1}{x}\,dx$, vaatii integraalin virheen kurissapitäminen riittävän tiheän jakovälin, mikä taas lisää summakaavan laskettavien määrää. Jos $h = 100$ eli $m = 40$ saadaan 15 korjaustermillä $\pm 10^{-14}$ luokkaa oleva virhe. Toisaalta sama logaritmi voidaan ilmaista myös muodossa $\log 9000 = 13\log 2 + \int_{8192}^{9000} \frac{1}{x}\,dx$ on integraalin virhe luokkaa $1{,}5 \cdot 10^{-16}$ jo neljällä korjaustermillä, kun $m = 4$. Eli supistamalla integroitavaa aluetta pienemmäksi saadaan pienemmällä vaivalla haluttu tarkkuus.

Huomautus 5.10. Edellä paras tarkkuus on löydetty haarukoimalla ja kokeilemalla. Ja jos riittävää tarkkuutta ei saavuteta, pitää valita tiheämpi jako. Työtä helpottaa huomattavasti, kun tiedetään etukäteen, millä arvolla termi T_{2n} saa pienimmän arvonsa. Luonnollisesti tämä pienin arvo saavutetaan silloin, kun suhde $\frac{|T_{2n}|}{|T_{2n+2}|}$ on lähellä ykköstä.

Arvioidaan esimerkin 5.9 kaltaista integraalia $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$, $1 \leq a < b$. Tällöin korjaustermin itseisarvot ovat muotoa

$$|T_{2n}| = \left| \frac{B_{2n}h^{2n}}{2n} \left(\frac{1}{b^{2n}} - \frac{1}{a^{2n}} \right) \right| \overset{L.3.7}{=} \frac{(2n-1)!h^{2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \left(\frac{1}{a^{2n}} - \frac{1}{b^{2n}} \right)$$

ja tästä saadaan

$$\frac{|T_{2n}|}{|T_{2n+2}|} = \frac{\frac{(2n-1)!h^{2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \left(\frac{1}{a^{2n}} - \frac{1}{b^{2n}} \right)}{\frac{(2n+1)!h^{2n+2}}{2^{2n+1}\pi^{2n+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n+2}} \left(\frac{1}{a^{2n+2}} - \frac{1}{b^{2n+2}} \right)}.$$

Tässä esiintyville sarjoille pätee $1 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n+2}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} < 2$ ja indeksin $2n$ kasvaessa molemmat ovat hyvin lähellä toisiaan ja ykköstä, joten tehdään pyöristys ja supistetaan ne pois. Lisäksi sieventämällä saadaan

$$\left| \frac{T_{2n}}{T_{2n+2}} \right| \approx \frac{2^2\pi^2}{2n(2n+1)h^2}(ab)^2 \frac{b^{2n} - a^{2n}}{b^{2n+2} - a^{2n+2}}.$$

Jos a ja b ovat lähellä toisiaan, supistuvat korjaustermitkin nopeasti, joten oletetaan siis lisäksi, että $a << b$. Tällöin termien a^{2n} ja a^{2n+2} vaikutus on hyvin pieni ja lisäksi keskenään yhdensuuntainen, joten ne voidaan jättää arviosta pois ja saadaan

$$\left| \frac{T_{2n}}{T_{2n+2}} \right| \approx \frac{2^2\pi^2}{2n(2n+1)h^2}(ab)^2 \frac{b^{2n}}{b^{2n+2}} = \frac{2^2\pi^2}{2n(2n+1)h^2} a^2.$$

Ratkaistaan tästä, millä indeksin $2n$ arvolla $\left| \frac{T_{2n}}{T_{2n+2}} \right| \approx 1$, jolloin positiiviseksi ratkaisuksi saadaan

$$2n \approx \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\frac{2^2\pi^2a^2}{h^2}}}{2} \approx \frac{2\pi a}{h},$$

missä termit -1 ja 1 on arvioitu muihin verrattuna pieniksi ja lisäksi niiden vaikutukset osittain kumoavat toisensa.

Edelläolevasta tarkastelusta saadaan suuntaa-antava approksimaatio sille, millä indeksin $2n$ arvolla $|T_{2n}|$ on pieni.

$$2n \approx \frac{2\pi a}{h} = 2\pi am. \tag{5.26}$$

Verrataan tätä tapauksiin, jotka jo tiedetään esimerkistä 5.7. Aloituspiste $a = 1$.Kun $m = 1$, saadaan kaavalla (5.26) tulos $2n \approx 6{,}2$ ja taulukon 2 mukaan pienin korjaustermi saadaan indeksillä $2n = 6$. Vastaavasti, kun $m = 4$, saadaan kaavalla (5.26) tulos $2n \approx 25{,}1$ ja taulukon 3 mukaan pienin korjaustermi tulee indeksillä 26. Eli arvio pitää hyvin paikkansa.

Esimerkin 5.9 tapauksessa integraalin $\int_8^{10} \frac{1}{x}\,dx$ pienin korjaustermi saadaan kaavan (5.26) mukaan vasta indeksillä $2n = 201{,}06 \approx 202$.

Plouffen julkaisusta [6] saadaan tarvittavat Bernoullin luvut, joiden avulla korjaustermeistä saadaan $\tilde{R}_{200} \approx 8{,}52 \cdot 10^{-89}$, $\tilde{R}_{202} \approx 8{,}46 \cdot 10^{-89}$ ja $\tilde{R}_{204} \approx 8{,}57 \cdot 10^{-89}$. Arvio pitää siis paikkansa tässäkin tapauksessa, joskaan ei olisi ollut suuri yllätys, jos pienin arvo olisikin ollut indeksillä $2n = 200$, koska pienimmän indeksin arvio oli niin lähellä pyöristyä alaspäin ja kaava (5.26) antaa kuitenkin vain arvion.

Vähän hankalampi on laskea esimerkin 5.7 viimeisiä pienimpiä virheitä. Tapauksessa $m = 84$, saadaan pienimmän virheen indeksiksi $2n \approx 2\pi 84 = 527{,}8 \approx 528$. Koska B_{528} ei ole tiedossa, pitää se laskea tai arvioida, jolloin voimme käyttää kaavaa (3.6)

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}.$$

Koska $2n = 528$ on iso, voidaan arvioida heti, että $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \approx 1$. Sen sijaan kertoma $528!$ on normaalikeinoilla mahdoton laskea, mutta voimme käyttää siihen Stirlingin kaavaa $k! \approx \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$. Lisäksi etumerkillä ei ole väliä, kun arvioinnin kohteena on virheen itseisarvo, joten saamme vähän siistimmän kaavan

$$|B_{2n}| \approx \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi 2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

Sijoittamalla tämä virheen itseisarvon kaavaan saadaan

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_{2n}| &= \frac{1}{2}|T_{2n}| = \frac{1}{2}\left|\frac{B_{2n}h^{2n}}{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{1^{2n}}\right)\right| \\ &\approx \frac{1}{2}\frac{\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}}}{2nm^{2n}} = \frac{\sqrt{2\pi 2n}}{2n}\left(\frac{2n}{2m\pi e}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Tähän sijoittamalla $2n = 528$ ja $m = 84$ saadaan $|\tilde{R}_{528}| \approx 6{,}646 \cdot 10^{-231}$. Vastaavasti saadaan $|\tilde{R}_{526}| \approx 6{,}678 \cdot 10^{-231}$ ja $|\tilde{R}_{530}| \approx 6{,}664 \cdot 10^{-231}$. Eli pienin arvo todella saadaan indeksillä 528.

Tapauksessa $m = 100$ arvio pienimmän virheen indeksiksi on vastaavasti $2n \approx 2\pi 100 = 628{,}3 \approx 628$. Sijoittamalla virheen kaavaan $2n = 628$ ja $m = 100$ saadaan $|\tilde{R}_{628}| \approx 1{,}333 \cdot 10^{-274}$. Vertailukohdiksi saadaan $|\tilde{R}_{626}| \approx 1{,}341 \cdot 10^{-274}$ ja $|\tilde{R}_{630}| \approx 1{,}334 \cdot 10^{-274}$. Eli tässäkin tapauksessa pienin arvo saadaan siis indeksillä 628, mikä ei sinällään ole yllätys, koska arvion johdossa tehdyt likimääräistykset toimivat sitä paremmin, mitä isompi m on.

6. Euler-MacLaurinin summakaava summien laskemisessa

Euler on kehittänyt ja käyttänyt summakaavaa (5.18) nimenomaan summien laskemista varten, jolloin siitä on muokattava hieman erilainen versio (vrt. Hairer [3][s. 160 – 162]). Integraalien laskemiseen käytetty versio on

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=0}^{m-1} f(a+kh) + \frac{1}{2}f(a+mh)\right] - \sum_{k=1}^{n} T_{2k} + R_{2n+1},$$

missä

$$T_{2k} = \frac{B_{2k}h^{2k}}{(2k)!}\left[f^{\{2k-1\}}(b) - f^{\{2k-1\}}(a)\right] \quad \text{ja}$$
$$R_{2n+1} = \frac{h}{(2n)!}\int_0^1 F^{\{2n\}}(t)\varphi_{2n}(t)\,dt.$$

Tarkastellaan erikoistapausta $h = 1$, jolloin on oltava $a + m = b$. Täydentämällä summalauseketta siten, että termi $f(a+mh)$ tulee kokonaiseksi ja siirtämällä $f(a)$ pois summasta, saadaan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} f(a+k) - \frac{1}{2}[f(b) - f(a)] - \sum_{k=1}^{n} T_{2k} + R_{2n+1},$$

josta ratkaisemalla $\sum f(a+jh)$ saadaan seuraava lause.

Lause 6.1 (Euler-MacLaurinin summakaava, summien laskemiseen)**.** *Olkoon $f(x)$ jatkuva ja sillä on jatkuvat derivaatat $2n$-kertalukuun asti suljetulla välillä $[a,b]$. Olkoon lisäksi $m = b - a$ kokonaisluku. Tällöin*

$$\sum_{k=1}^{m} f(a+k) = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(b) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n} T_{2k} - R_{2n+1}, \tag{6.1}$$

missä

$$T_{2k} = \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{\{2k-1\}}(b) - f^{\{2k-1\}}(a)\right] \quad \textit{ja}$$
$$R_{2n+1} = \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 F^{\{2n\}}(t)\varphi_{2n}(t)\,dt.$$

Huomautus 6.2. Summien laskemiseen tarkoitetusta summakaavastakin on käytössä eri muotoja. Lindelöf [5][s. 395] esittelee muodon, jossa h on mukana ja $f(a)$ on myös lisätty summaan mukaan, jolloin kaava saa muodon

$$\sum_{k=0}^{m} f(a+kh) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(a) + f(b)] + \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n} T_{2k} - \frac{1}{h}R_{2n+1}.$$

Luonnollisesti tämä versio on monikäyttöisempi siinä mielessä, että summanlisäyksen ei tarvitse olla kokonaisluku, joskin tämä asia on helposti hoidettavissa myös kaavassa (6.1).

Toinen ero, mikä taas on hieman kaavan (6.1) eduksi näkyy laskulausekkeiden muodostamisessa, kuten lausekkeessa (6.4). Kun summan sisältä on otettu ensin osa termeistä pois, on kaavassa (6.4) viimeinen summalausekkeesta eteen siirretty termi $f(a)$ ja samalla summakaavan alaraja on a, eikä $a+h$, kuten Lindelöfin esityksessä.

Seuraavaksi kokeillaan summakaavan käyttöä. Kaava (6.1) on erityisen käyttökelpoinen esimerkiksi harmonisen sarjan osasummien laskemisessa. (Vrt. Hairer [3][s. 161].)

Esimerkki 6.3. Lasketaan summa $S(1000000) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1000000}$. Kaavan (6.1) avulla saadaan

$$\begin{aligned} S(1000000) &= \sum_{j=1}^{1000000} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{j=1}^{999999} \frac{1}{1+j} \\ &= 1 + \int_1^{1000000} \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1000000} - \frac{1}{1}\right] + \sum_{k=2}^{n} T_{2k} - R_{2n+1} \\ &= 1 + \log 1000000 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1000000} - \frac{1}{1}\right] + \sum_{k=2}^{n} T_{2k} - R_{2n+1}, \end{aligned}$$

missä siis $a = 1$ ja $b = 1000000$. Käsiteltävä funktio on $f(x) = \frac{1}{x}$, joten $f^{\{k\}}(t) = (-1)^k \frac{k!}{t^{k+1}}$ ja

$$T_{2k} = \frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{a^{2k}} - \frac{1}{b^{2k}}\right) = \frac{B_{2k}}{2k}\left(1 - \frac{1}{1000000^{2k}}\right). \tag{6.2}$$

Virhearviointi saadaan lauseen 5.5 avulla, joten laskukaava saadaan muotoon

$$\begin{aligned} S(1000000) = 1 + \log 1000000 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1000000} - 1\right] \\ + \sum_{k=2}^{n} T_{2k} - \frac{1}{2}T_{2n} + \tilde{R}_{2n+1}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

missä $|\tilde{R}_{2n+1}| \leq \frac{1}{2}|T_{2n}|$.

Tulokset ovat taulukossa 4 ja ne eivät ole kovinkaan tarkkoja. Paras virhe 0,001984 on huomattavasti isompi kuin viimeinen summan mukaanotettava termi $\frac{1}{1000000}$.

	$a = 1$
Ei korj.	14,315511
$2n = 2$	**14,3**57178 $\pm$ 0,041667
$2n = 4$	**14,39**4678 $\pm$ 0,004167
$2n = 6$	**14,39**2495 $\pm$ 0,001985
$2n = 8$	**14,39**2396 $\pm$ 0,002084
$2n = 10$	**14,39**4101 $\pm$ 0,003788
$2n = 12$	**14,3**87342 $\pm$ 0,010547
$2n = 14$	**14,4**18462 $\pm$ 0,041667

TAULUKKO 4. Summan $S(1000000)$ likiarvoja virheineen, kun $a = 1$. Lihavoituna desimaalinumerot, joiden virhe on alle 1 numeron. Virheet pyöristetty ylöspäin.

Tarkastelemalla korjaustermien kaavaa (6.2) huomataan, että ainoa keino tarkkuuden parantamiseen on kasvattaa vakiota a. Tällöin kaavasta (6.3) saadaan

$$
\begin{aligned}
(6.4)\qquad S(1000000) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{a} + \sum_{j=a}^{999999} \frac{1}{1+j} \\
&= \sum_{j=1}^{a} \frac{1}{a} + \int_a^{1000000} \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1000000} - \frac{1}{a}\right] \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} T_{2k} - \frac{1}{2} T_{2n} + R_{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{a} \frac{1}{a} + \log 1000000 - \log a + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1000000} - \frac{1}{a}\right] \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} T_{2k} - \frac{1}{2} T_{2n} + R_{2n+1}
\end{aligned}
$$

missä $T_{2k} = \frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{a^{2k}} - \frac{1}{1000000^{2k}}\right)$ ja $|R_{2n+1}| \leq \frac{1}{2}|T_{2n}|$.

Taulukkoihin 5 ja 6 on laskettu lukuarvot virheineen, kun on valittu $a = 5$ ja $a = 10$.

Periaatteessa siis melko helposti saadaan laskettua jo tarkempia arvoja, mihin laskimet tai taulukkolaskentaohjelmat pystyvät, mikä on yleensä enintään 12 tai 15 merkitsevää numeroa. Virheiden suuruusluokkia pystytään kuitenkin laskemaan, vaikka merkitsevien numeroiden määrä olisikin näin rajoitettu. Tällä tavalla on helposti selvitettävissä millä muuttujan a arvolla kannattaa laskea ja kuinka monta virhetermiä tarvitaan, jotta päästäisiin haluttuun tarkkuuteen. Lisäksi tätäkin haarukointia auttaa huomautuksen 5.10 kaavaa, joka kertoo,

$2n$	$a = 5$
Ei	14,3894064789
2	**14,39**10731455301 $\pm 1{,}67 \cdot 10^{-3}$
4	**14,39273**31455301 $\pm 6{,}67 \cdot 10^{-6}$
6	**14,392726**6058476 $\pm 1{,}27 \cdot 10^{-7}$
8	**14,39272672**74983 $\pm 5{,}34 \cdot 10^{-9}$
10	**14,392726722**5529 $\pm 3{,}88 \cdot 10^{-10}$
12	**14,3927267228**976 $\pm 4{,}32 \cdot 10^{-11}$
14	**14,39272672286**12 $\pm 6{,}83 \cdot 10^{-12}$
16	**14,39272672286**66 $\pm 1{,}46 \cdot 10^{-12}$
18	**14,392726722865**5 $\pm 4{,}01 \cdot 10^{-13}$
20	**14,392726722865**8 $\pm 1{,}39 \cdot 10^{-13}$

TAULUKKO 5. Summan $S(1000000)$ likiarvoja virheineen, kun $a = 5$. Lihavoituna desimaalinumerot, joiden virhe on alle 1 numeron. Virheet pyöristetty ylöspäin.

$2n$	$a = 10$
Ei	14,3894064789
2	**14,392**3108856051 $\pm 4{,}17 \cdot 10^{-4}$
4	**14,3927271**356051 $\pm 4{,}17 \cdot 10^{-7}$
6	**14,39272672**09225 $\pm 1{,}99 \cdot 10^{-9}$
8	**14,3927267228**858 $\pm 2{,}09 \cdot 10^{-11}$
10	**14,392726722865**4 $\pm 3{,}79 \cdot 10^{-13}$
12	**14,3927267228657** $\pm 1{,}06 \cdot 10^{-14}$
14	**14,3927267228657** $\pm 4{,}17 \cdot 10^{-16}$
16	**14,3927267228657** $\pm 2{,}22 \cdot 10^{-17}$
18	**14,3927267228657** $\pm 1{,}53 \cdot 10^{-18}$
20	**14,3927267228657** $\pm 1{,}33 \cdot 10^{-19}$

TAULUKKO 6. Summan $S(1000000)$ likiarvoja virheineen, kun $a = 10$. Lihavoituna desimaalinumerot, joiden virhe on alle 1 numeron. Virheet pyöristetty ylöspäin.

että pienimmän virheen indeksi $2n \approx 2\pi a$. Lopullinen laskutoimitus pitää sitten tehdä käsin tai tietokoneohjelmilla, joilla pystyy laskemaan riittävällä tarkkuudella.

Lopuksi lasketaan vielä likiarvo Eulerin vakiolle ja käytetään siinä Euler-MacLaurinin summakaavoja. Esimerkissä 6.4 noudatetaan Eulerin esimerkkiä (Vrt. Hairer [3][s. 168.]) ja esimerkissä 6.5 lasketaan Eulerin vakion arvo 20 desimaalin tarkkuudella.

Esimerkki 6.4 (Eulerin vakion laskeminen)**.** Eulerin vakio on määritelty raja-arvona

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n \right).$$

Suppenemista varten tarkastellaan termiä

$$\gamma_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \log(n+1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n + \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, dt,$$

missä $\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{t} td < \frac{1}{n}$. Merkitsemällä $\gamma_{n+1} = \gamma_n + a_{n+1}$, saadaan $|a_{n+1}| < |\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$ ja majoranttiperiaatteen perusteella tiedetään, että jono (γ_n) suppenee kohti arvoa γ, koska $\sum \frac{1}{n^2}$ suppenee.

Kaavan (6.1) avulla saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i} &= \int_n^m \frac{1}{t}\, dt + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{l} T_{2k} + \tilde{R}_{2l+1} \\ &= \log m - \log n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{l} T_{2k} + R_{2l+1},\end{aligned}$$

missä $T_{2k} = \frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{n^{2k}} - \frac{1}{m^{2k}}\right)$.

Tällöin γ_m on esitettävissä muodossa

$$\begin{aligned}\gamma_m &= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} - \log m = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i} - \log m \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{l} \frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{n^{2k}} - \frac{1}{m^{2k}}\right) + R_{2l+1}.\end{aligned}$$

Kun $m \to \infty$, saadaan

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{l} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + R_{2l+1}.$$

Hairer on valinnut Eulerin esimerkkiä noudattaen $l = 4$. Lisäksi virhearviossa voidaan käyttää lausetta 5.5 jolloin $R_{2l+1} = -\frac{1}{2}T_{2l} + \tilde{R}_{2l+1}$, missä $|\tilde{R}_{2l+1}| < \frac{1}{2}|T_{2l}|$. Laskukaava saa tällöin muodon

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{4} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} - \frac{1}{2}\frac{B_8}{8n^8} + \tilde{R}_9,$$

missä $|\tilde{R}_9| < \frac{1}{2}|\frac{B_8}{8n^8}| = \frac{1}{480}\frac{1}{n^8}$.

Likiarvon laskemista varten valitaan $n = 10$, kuten Hairerkin on Eulerin alkuperäistä esimerkkiä noudattaen valinnut. Tällöin

$$\gamma = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} - \log 10 - \frac{1}{20} + \frac{1}{12 \cdot 10^2} - \frac{1}{120 \cdot 10^4} + \frac{1}{252 \cdot 10^6} - \frac{1}{240 \cdot 10^8} + \tilde{R}_9,$$

missä $|\tilde{R}_9| < \frac{1}{480 \cdot 10^8} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-11}$. Hairer on tehnyt paremman virhearvion, mutta siihen on käytetty tietoa $|\varphi_9(x)| < 0{,}04756$, kun $x \in [0,1]$ minkä laskeminen itsessään on työlästä ja helpommalla pääsee, jos ottaa laskuun mukaan vaikka yhden korjaustermin enemmän. Luonnollisesti $\log 10$ on laskettavissa esimerkin 5.9 tapaan halutulla tarkkuudella.

Lopputulokseksi saadaan $\gamma = \mathbf{0{,}5772156649}216 \pm 2{,}08 \cdot 10^{-11}$

Esimerkki 6.5. Lasketaan Eulerin vakion arvo 20 desimaalin tarkkuudella. Tätä varten tarkastellaan ensin, millä arvoilla mitäkin kannattaa lähteä laskemaan. Edellisen erimerkin mukaan Eulerin vakion saa laskettua kaavalla

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{l} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} - \frac{1}{2}\frac{B_{2l}}{2ln^{2l}} + \tilde{R}_{2l+1}, \tag{6.5}$$

missä $|\tilde{R}_{2l+1}| \leq \frac{1}{2}|T_{2l}| = |\frac{B_{2l}}{4ln^{2l}}|$. Laskimella kokeilemalla eri arvoilla voidaan todeta, että mielekäs n voisi olla luokkaa 10 – 20 ja l tulee luonnollisesti sovittaa siihen sopivaksi.

Koska tarkkuudeksi halutaan 20 desimaalia, pitää huomioida myös, että $\log n$ pitää laskea käsin, sillä laskimella ei päästä riittävään tarkkuuteen. Esimerkissä 5.7 on käyty läpi, miten $\log 2$ lasketaan ja esimerkiksi $\log 10$ laskemiseen tarvitsee nähdä jo paljon enemmän vaivaa, joten logaritmin laskemisen takia valitaan $n = 16$, jolloin $\log 16 = 4 \log 2$.

Lasketaan ensin $\log 2$ riittävällä tarkkuudella. Aikaisemmin on käytetty kaavaa (5.23), jota voidaan käyttää tässäkin.

$$\log 2 = h\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+2h} + \ldots + \frac{1}{1+(m-1)h} + \frac{1}{4}\right] + \sum_{k=1}^{l} \frac{B_{2k}h^{2k}}{2k}\left(\frac{1}{2^{2k}} - 1\right) - \frac{1}{2}T_{2l} - \tilde{R}'_{2l+1}, \tag{6.6}$$

missä $|\tilde{R}'_{2l+1}| \leq \frac{1}{2}|T_{2l}| = |\frac{B_{2l}h^{2l}}{4l}\left(\frac{1}{2^{2l}} - 1\right)|$ kertoo virherajat.

Valinnalla $m = 10$ eli $h = 0{,}1$ on $\frac{1}{2}T_{24} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-21}$, mutta koska virhekin tullaan kertomaan vielä neljällä ja jotakin virhemahdollisuuksia pitää jättää vielä kaavan (6.5) virheellekin, valitaan $2l = 26$, jolloin virhetermiksi tulee $\tilde{R}'_{27} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-22}$.

Näillä valinnoilla kaavan (6.6) puolisuunnikasosasta saadaan arvo 0,693771403175427943229801, korjaustermien summaksi saadaan puolestaan $-0{,}000624222615482633812376$ ja lopputulokseksi virheineen $\log 2 = 0{,}693147180559945309417425 \pm 2{,}74 \cdot 10^{-22}$. Kertomalla tämä neljällä saadaan $\log 16 = 2{,}77258872223978123766971 \pm 1{,}10 \cdot 10^{-21}$.

Tämän jälkeen voidaan laskea kaavan (6.5) harmonisen summan osasumma $\sum_{i=1}^{16} \frac{1}{i} = 3{,}380728993228993228993229 \pm 5 \cdot 10^{-24}$, jonka virhe on saatu maksimivirheenä sille, että käsin laskiessa summassa on viisi päättymätöntä desimaalilukua, jotka on katkaistu 24:nnen desimaalin jälkeen. Päättymättömiä desimaalilukuja tulisi helposti enemmänkin, mutta esimerkiksi $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0{,}5$, jolloin kahdesta päättymättömästä desimaaliluvusta tulee yksi päättyvä. Näiden lisäksi lasketaan vielä lyhyt, mutta helposti unohtuva termi $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2 \cdot 16} = 0{,}03125$, mikä on tarkka arvo.

Kun kaikki muu on laskettu, lasketaan vielä kaavan (6.5) korjaustermien summa ja virhe. Valinnalla $2l = 18$ saadaan korjaustermien summaksi 0,00032539391232086928191 ja virherajoiksi $\tilde{R}_{19} = \pm 3{,}23 \cdot 10^{-22}$

Lopuksi kaikkien näiden sijoitus kaavaan (6.5) antaa

$$\gamma = \mathbf{0{,}57721566490153286060}543 \pm 1{,}424 \cdot 10^{-21}.$$

Tummennus kertoo desimaalit, joiden virhe on alle 1 numeroa, joten likiarvo on haluttu 20 desimaalia. Tulos on kuitenkin siinä mielessä harmillinen, ettei siitä tiedä pyöristyykö 20. desimaali ylöspäin vai ei, joten sen varmistamiseksi lasketaan tulos virheineen vielä hieman tarkemmin.

Suurin virhelähde on tuloksen $\log 16$ virhe eli käytännössä tuloksen $\log 2$ virhe. Ottamalla tähän tulokseen mukaan kaksi korjaustermiä lisää saadaan virheeksi $1{,}00263 \cdot 10^{-23}$ ja edelleen $\log 16$ virheeksi $4{,}01054 \cdot 10^{-23}$. Luonnollisesti $\log 2$ edelliseen tulokseen pitää lisätä myös aikaisemman virheen puolittamistermi $\frac{1}{2}T_{26}$, jolloin kaikenkaikkiaan pitää lisätä termit $\frac{1}{2}T_{26} + T_{28} + \frac{1}{2}T_{30}$. Korjauksien jälkeen saadaan tulos $\log 2 = 0{,}693147180559945309417238400 \pm 1{,}00263 \cdot 10^{-23}$ ja edelleen $\log 16 = 2{,}772588722239781237668953600 \pm 4{,}01054 \cdot 10^{-23}$. Kun aikaisempi $\log 16$ tulos virheineen korvataan uudella saadaan Eulerin vakioksi hieman tarkempi tulos

$$\gamma = \mathbf{0{,}577215664901532860606}18 \pm 3{,}69 \cdot 10^{-22}.$$

Tästä tuloksesta nähdään, että 20. desimaali pyöristettäisiin ylöspäin, jos se olisi viimeinen mukaanotettava desimaali. Jos taas tulos pyöristettäisiin virheen perusteella, olisi viimeinen mukaanotettava desimaali 21. desimaali ja se pyöristyisi numeroon 6, vaikka periaatteessa virhe antaisi mahdollisuuden siihenkin, että se voisi olla 5.

Viitteet

[1] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company. New York, 1979.

[2] Tom M. Apostol, *Intoduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag Berlin. New York, 1976.

[3] Ernst Hairer, Gerhart Wanner *Analysis by its history*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] Kenneth Ireland, Michael Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] Ernst Lindelöf, *Differentiaali- ja Integraalilaskenta 1*, Werner Södeström Oy, Porvoo, 1965.

[6] Simon Plouffe *The first 498 Bernoulli Numbers* April, 2001, [Etext #2586]. `http://www.gutenberg.org/dirs/etext01/brnll10.txt`

[7] Weisstein, Eric W. *"Bernoulli Polynomial."From MathWorld–A Wolfram Web Resource.* http://mathworld.wolfram.com/BernoulliPolynomial.html

[8] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Neljäs uudistettu painoksen, uusintapainos, Cambridge university press, New York, 1963.