Värivaraus

Kandidaatintutkielma, 30.7.2024

Tekijä:

Markku Jokivalli

Ohjaaja:

Tuomas Lappi

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

© 2024 Markku Jokivalli
Julkaisu on tekijänoikeussäännösten alainen. Teosta voi lukea ja tulostaa henkilökohtaista käyttöä varten. Käyttö kaupallisiin tarkoituksiin on kielletty. This publication is copyrighted. You may download, display and print it for Your own personal use. Commercial use is prohibited.

Tiivistelmä

Jokivalli, Markku
Värivaraus
Kandidaatintutkielma
Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2023, 27 sivua

Tämän opinnäytetyön tarkoituksena on esittää SU(3)-pohjainen malli värivaraukselle, joka toimii analogisesti spiniin nähden. Ensin tarkastellaan relevanttia kvanttimekaniikkaa, jonka jälkeen annetaan yleinen kuvaus värivarauksesta. Jälkimmäisellä puoliskolla käsitellään monen kappaleen järjestelmän vuorovaikutusta ja niiden aikakehitystä.

Abstract

Jokivalli, Markku
Color charge
Bachelor's thesis
Department of Physics, University of Jyväskylä, 2023, 27 pages.

The purpose of this thesis is to present a SU(3) based model for color charge which works anagolously to spin. First the relevant quantum mechanics is reviewed after which a general description of color charge is given. On the latter half the interaction of many body systems and their time-evolution is discussed.

Sisällys

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä värivarausta ja varauslähteiden välistä vuorovaikutusta kuvaavaa klassista mallia. Fysiikan kandidaatinopinnoissa käsitellään kolmea neljästä perusvuorovaikutuksesta. Vahvaan vuorovaikutusta ei kuitenkaan käsitellä mainitsemista enemmän. Näin ollen on hyvä myös osoittaa, että sitä voidaan tarkastella yksityiskohtaisemmin kandidaatinopintojen rajoissa.

Värivaraus on kvarkkien ja gluonien sähkövaraukseen nähden analoginen ominaisuus. Värivarauksen olemassaolon esitti kolmen vapausasteen varauksena O.W. Greenberg[1], lyhyesti sen jälkeen kun M. Gell-Mann ja G. Zweig olivat toisistaan riippumatta postuloineet kvarkkien olemassaolon[2][3]. SU(3)-mittasymmetrian puitteissa värivarausta käsittelivät ensimmäisen kerran M.Y. Han ja Y.Nambu[4].

Tutkielmassa ensimmäisenä käsitellään tarvittavia esitietoja. Näihin kuuluvat spinin kvanttimekaniikka, mikä vastaa rakenteeltaan SU(2)-ryhmää ja Heisenbergin spin-ketjut.[5] Lisäksi tarkastellaan tensorituloa ja sen soveltamista spin 1/2 hiukkasten väliseen vuorovaikutukseen.[6] Seuraavaksi tarkastellaan värivarauksen SU(3)-ryhmän rakenteeseen perustuvaa mallia spinin avulla.[5] Viimeiseksi käydään läpi useiden varauslähteiden välistä vuorovaikutusta.[5] Erityisesti kolmen kappaleen väliseen vuorovaikutukseen keskitytään, sillä baryoneja voi käitellä kolmen kappaleen sidottuna tilana.[5] Lopuksi on sisällytetty yhteenveto.

2 SU(2)-dynamiikkaa

Jotta aihetta voi käsitellä tehokkaasti on hyvä kerrata joitakin kvanttimekaniikan perusteita sekä tensoritulon käsite. SU(2) on joukko kompleksiavaruuden $\times$-matriiseja, joiden determinantin arvo on yksi eli $SU(2) \equiv 2\times2$ matriisit, joille det.=1. SU(2):n generaattorit ovat jo tutut Paulin matriisit

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

jotka ovat myös operaattorit spin-$\frac{1}{2}$-järjestelmälle, jossa spiniä kuvataan tavalliseen tapaan sarakevektoreilla

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle = |\chi\rangle. \tag{4}$$

Tässä a ja b vastaavat spin ylös - ja alas tilojen todennäköisyysamplitudeja. Täten amplitudit jokaiselle spinin komponentille jossakin tilassa χ on löydettävissä laskemalla

$$\langle\chi|\hat{S}_v|\chi\rangle. \tag{5}$$

Tässä $\hat{S}_v$ eli v=x,y,z. Tarvittava spinoperaattori on määritelty seuraavasti:

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar\hat{I}, \tag{6}$$

missä oikeanpuoleinen $\hat{I}$ on identiteettimatriisi. [5] Lähteessä [5] näytetään vielä ,että on mahdollista mallintaa spinin vuorovaikutusta $\frac{1}{2}$ järjestelmissä, joissa on ulkoinen magneettikenttä käyttäen esitettyjä yhtälöitä. Vahvan vuorovaikutuksen kannalta on kuitenkin parempi keskittyä kahden spinin väliseen vuorovaikutukseen ja useamman spinin järjestelmiin.

2.1 Tensoritulo

Edellisen lisäksi on hyödyllistä käsitellä tensorituloa, jota tarvitaan värivarauksen ja oheisten aiheiden käsittelyyn. Esimerkki tästä on

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \tag{7}$$

ja operaatio voidaan tietenkin suorittaa mille tahansa $n \times m$-matriisille lisäämällä operaatioiden määrää yllä olevan kaavan mukaisesti.

3 Heisenbergin spin-ketjut

Observaabeleita voi mallintaa käyttämällä 2×2-matriiseja, mikä käytännössä tarkoittaa niiden välisten tensoritulon laskemista 4×4-matriisien saamiseksi. Näistä jokainen matriisi vastaa yhtä spinin komponenttia. Nämä operaattorit operoivat tensoriavaruuteen. Näin toimivat Heisenbergin spin-ketjut ovat hyödyllisiä kuvaamaan järjestelmiä, joissa on useampi kuin yksi spin. Mekanismin ymmärtäminen on välttämätöntä, jotta usean värivarauksen välisen vuorovaikutuksen mallintaminen on mahdollista. Mekanismi halutaan yleistää useampaan ulottuvuuteen ja tätä varten tarvitaan edellä mainittua tensorituloa. Käyteään Paulin matriiseja esimerkkinä ja mallinetaan kahden spinin välistä vuorovaikutusta. Tätä varten tarvitaan seuraavasti määritellyt operaattorit

$$\hat{S}_i^1 \otimes \hat{I} \tag{8}$$

$$\hat{I} \otimes \hat{S}_k^2, \tag{9}$$

joissa $i = x,y,z$ $k = x,y,z$ vastaa matriisia ja yläindeksi spinin paikkaa. [6] Observaabelit saadaan siis laskemalla tensoritulo sitä vastaavan Paulin matriisin ja identiteettimatriisin välillä. Esimerkiksi, tulos kun halutaan ensimmäisen paikan x-komponenttia vastaava operaattori $\hat{S}_x^1$, on

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Sen sijaan, että operaattorit operoisivat sarakevektoreihin, ne operoivat tensoritulon muodostamiin avaruuksiin, joiden elementit ovat muotoa

$$|\chi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Yhtälö (11) siis kuvaa kahden spinin järjestelmän kokonaistilaa. Tilaa vastaavan operaattorin odotusarvot saadaan laskemalla operaattorin (8) tai (9) odotusarvo tilassa (11) Hamiltonin operaattori kahden paikan tapaukselle on.

$$\hat{S}^1 * \hat{S}^2 = \sum_i \hat{S}_i^1 \otimes \hat{S}_i^2 \tag{12}$$

Tässä $*$ merkitsee eri operaattoreiden samojen komponenttien välisten tensoritulojen laskemista. Observaabelien määrää voidaan lisätä mihin tahansa määrään n asti. Näin myös listätään samalla yhtälön (11) mukaisen vektoriavaruuden dimensioiden määrää. Eli mikä tahansa n-ulotteinen ja n-määrän spinejä sisältävä spin-ketju on muotoa

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} H_{n,n+1} \tag{13}$$

tai

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} H_{n,n+1} + H_{N,1} \tag{14}$$

riippuen topologiasta. [6]

4 Värivaraus

Käyttäen yllä esitettyjä menetelmiä voimme luoda mallin, joka kuvaa värivarausta spinin sijaan, mutta toimii käytännössä samalla tavalla. Värivarauksen tapauksessa operaattorit ovat Gell-Mann-matriisit, joista jokainen vastaa yhtä värivarauksen komponenttia.Nämä toimivat analogisesti spinoperaattoreihin nähden.[5]

$$\hat{t}^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{t}^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\hat{t}^{(3)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{t}^{(4)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\hat{t}^{(5)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{t}^{(6)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\hat{t}^{(7)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{t}^{(8)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Matriisit ovat -lineaarisesti riippumattomia- SU(3):n generaattoreita kuten Paulin matriisit ovat SU(2):n.[5] Analogisesti spiniin nähden tarvitaan myös vektorit kuvaamaan värivarauksen perustiloja; ylös, outo ja alas. Näihin voidaan viitata ja viitataan myöhemmin myös tiloina r,g ja b.

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Värioperaattorien odotusarvot voidaan laskea seuraavalla tavalla.

$$\langle\psi|\hat{t}^{(i)}|\psi\rangle, \tag{20}$$

missä $|\psi\rangle$ on yksi väritiloista ja $\hat{t}^{(i)}$ on yksi SU(3):n generaattoreista. Esimerkiksi lasku punaiselle ja vihreälle tilalle kolmannen komponentin kanssa.

$$Q_r{}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}. \tag{21}$$

$$Q_g{}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \tag{22}$$

Tässä $Q_i{}^j$ tarkoittaa väritilan odotuusarvoa mikä on laskettu käyttämällä alaindeksin osoittamalle tilalle yläindeksin osoittaman operaattorin kanssa. Laskemalla odotusarvot jokaiselle operaattorille ja tilalle käyttäen yhtälöitä (15)-(18)päädytään seuraaviin nollasta poikkeaviin odotusarvoihin:

$$Q_r = \frac{1}{2}\hat{v}^{(3)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\hat{v}^{(8)} \tag{23}$$

$$Q_g = -\frac{1}{2}\hat{v}^{(3)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\hat{v}^{(8)} \tag{24}$$

$$Q_b = -\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{v}^{(8)} \tag{25}$$

Tässä $\hat{v}^n$ on yksikkövektori kahdeksanulotteisessa vektoriavaruudessa johon SU(3)-operaattorit operoivat.

Kun kvarkki emittoi tai absorboi gluonin sen on sen muutettava värivaraustaan sen säilyttämiseksi, joskin muutos voi olla myös samaan väriin. Tähän asti esitetyllä tiedolla ilmiötä on mahdollista kuvailla. Värivarauksen muuttaminen tarkoittaa perustilan vaihtamista toiseen. Tätä varten tarvitaan sopivat operaattorit, jotka saadaan laskemalla seuraavanlainen ulkotulo.

$$\hat{A}_{i\to k} \equiv |\psi_i\rangle\langle\psi_k| \tag{26}$$

Lasku tässä on tensoritulo yhtälön (7) tapaan perustilojen i ja k välillä.[5] Tässä i ja k vastaavat joitakin yhtälön (19)

Näin saadut matriisit vastaavat gluoneja. Gluoneja vastaavat matriisit on kuitenkin välttämätöntä esittää alkuperäisten SU(3)generaattoreiden lineaarikombinaatioina, sillä SU(3) on määritelty joukkona 3×3 hermiittisia ja jäljettömiä matriiseja, mitä yhtälön (20) kautta saadut matriisit eivät välttämättä ole. Nämä ehdot täyttäviä matriiseja on kuusi kappaletta, joista jokainen vastaa mahdollista värivarauksen muutosta. Näihin kuuluu myös varauksen säilyttävät matriisit

$$\hat{A}_{r\to r} - \hat{A}_{g\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{A}_{g\to g} - \hat{A}_{b\to b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$\hat{A}_{r\to r} - \hat{A}_{b\to b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

jotka ovat kaikki yhtälön (15)-(18) matriisien lineaarikombinaatioita.[5]

5 Vuorovaikutus

Tähän asti esitetyillä tiedoilla on mahdollista mallintaa useamman värivarauslähteen välistä vuorovaikutusta.[5] Laskuoperaatioiden käytännöllisyyden säilyttämiseksi käytetään esimerkkeinä kahden ja kolmen värillisen hiukkasen välistä vuorovaikutusta.

5.1 Kahden kappaleen vuorovaikutus

Käyttäen yhtälöitä (8),(9) ja (12) on mahdollista kirjoittaa kahden värivarauslähteen välisen vuorovaikutusta kuvaava termi

$$\hat{H}_2 = J \sum_{a=1}^{8} \hat{t}^{(a)} \otimes \hat{t}^{(a)}. \tag{29}$$

Tässä J on positiivinen vakio. Mallin järkevyys tulee esille kun tarkastellaan kahta lähdettä, jotka ovat jossain sekatilassa $|\psi\rangle_{1,2}$, jotka koostuvat yhtälön (19) perustiloista. Nämä muodostavat taas yhden järjestelmän, joka on

$$|\psi\rangle_{1,2} = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \tag{30}$$

Nyt voidaan vuorovaikutusenergia E_{int} määrittää laskemalla yhtälön (29) odotusarvo tilassa (30). Tästä seuraa, että vuorovaikutus voidaan ilmaista seuraavasti.

$$E_{int}[\psi_{1,2}] = \langle \psi_{1,2}| J \sum_{a=1}^{8} \hat{t}^{(a)} \otimes \hat{t}^{(a)} |\psi_{1,2}\rangle \tag{31}$$

.Tämä voidaan edelleen kirjoittaa

$$E_{int}[\psi_1, \psi_2] = J Q_1 * Q_2. \tag{32}$$

Vektorin $Q^a_{(1,2)}$ komponentit saadaan edelleen yhtälön (20) tapaan. Vuorovaikutuksen esittäminen tähän tapaan on sikäli hyödyllistä, että nyt voidaan tulkita onko varauslähteiden välinen voima attraktiivinen vai repulsiivinen. Jos $Q * Q > 0$ on voima repulsiivinen, ja taas jos $Q * Q < 0$ on se attraktiivinen. Tästä on huomattavissa esimerkiksi, että sisätulo kvarkin ja antikvarkin välillä on maksimaalisen negatiivinen. [5]

5.2 Kolmen kappaleen vuorovaikutus

Kolmen kappaleen vuorovaikutus toimii edellisen kaltaisesti. Yhtälö (22):a voidaan laajentaa kolmen varauslähteen järjestelmää kuvaavaksi lausekkeeksi.

$$\hat{H}_{pairs} = J \sum_{a=1}^{8} [\hat{t}_1^{(a)} \cdot \hat{t}_2^{(a)} + \hat{t}_1^{(a)} \cdot \hat{t}_3^{(a)} + \hat{t}_2^{(a)} \cdot \hat{t}_3^{(a)}] \tag{33}$$

Tässä kertomerkki tarkoittaa kahden Gell-Mann-matriisin sisätuloa identiteettimatriisin kanssa. Kolmen varauslähteen tila vastaa yhtälöä (11), mutta perustiloja on tässä tapauksessa kolme kahden sijaan.

Esimerkki kolmen kappaleen järjestelmästä on baryoni joiden on oltava spinin singlet konfiguraatiota vastaavassa tilassa eli

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|r \otimes g \otimes b\rangle - |r \otimes b \otimes g\rangle + |g \otimes b \otimes r\rangle - |g \otimes r \otimes b\rangle + |b \otimes r \otimes g\rangle - |b \otimes g \otimes r\rangle). \tag{34}$$

Vastaava vuorovaikutusenergia on

$$E_{int}[r,g,b] = J(Q_r \cdot Q_g + Q_r \cdot Q_b + Q_g \cdot Q_b) = \frac{-J}{2} \tag{35}$$

Tämä tarkoittaa, että vuorovaikutus baryonin kvarkkien välillä on attraktiivinen niin kuin täytyykin olla.

Yhtälöissä (33)-(35) kuvattu systeemi on analoginen antiferromagneettijärjestelmään, jossa on N-määrä Spin-$\frac{1}{2}$ hiukkasia, joiden vuorovaikutusta lähimpien hiukkasten kanssa kuvaa

$$\hat{H}_{ferrom.} = J \sum_{j=1}^{N-1} [\hat{S}_j^{+} \hat{S}_{j+1}^{-} + \hat{S}_j^{-} \hat{S}_{j+1}^{+} + \hat{S}_j^{z} \hat{S}_{j+1}^{z}]. \tag{36}$$

Tässä J:n etumerkki määrittää onko vuorovaikutus antiferromagneettinen vai ei. Jos positiivinen on vuorovaikutus antiferromagneettinen, ja jos J on negatiivinen se on ferromagneettinen. Koska yhtälön (29) operaattoria voidaan käyttää kuvaamaan kolmen spinin välistä vorovaikutusta on järkevää kehittää samanlainen operaattori kolmelle värivarauslähteelle.

$$\hat{H}_{3k} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} g_{\alpha\beta\gamma}\hat{t}^{(\alpha)} \otimes \hat{t}^{(\beta)} \otimes \hat{t}^{(\gamma)} \tag{37}$$

Tiedetään, että tilojen on oltava invariantteja SU(3)-muunnoksiin nähden. Tästä seuraa, että operaattorin on kommutoitava jokaisen kokonaisen varauskomponentin kanssa. Kokonainen värivarauskomponentti on määritelty seuraavasti.

$$t^{(a)}_{koko} = \hat{t}^{(a)} \otimes \hat{I} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{t}^{(a)} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{I} \otimes \hat{t}^{(a)} \tag{38}$$

SU(3):n generaattorit toteuttavat kommutaatioehdon mikäli otetaan huomioon rakennevakioiden olemassaolo. Kommutaattori on

$$[\hat{t}^{(a)}, \hat{t}^{(b)}] = i \sum_{\gamma} f^{\alpha\beta\gamma}\hat{t}^{(\gamma)} \tag{39}$$

antikommutaattori on

$$\{\hat{t}^{(a)}, \hat{t}^{(b)}\} = \frac{1}{3}\delta^{\alpha+\beta} i \sum_{\gamma} d^{\alpha\beta\gamma}\hat{t}^{(\gamma)}. \tag{40}$$

Rakennevakioille on olemassa 8^3 yhdistelmää, mutta suurin osa näistä saa arvoksi nollan. Nollasta poikkeaviksi arvoiksi jää seuraavat

$$d^{118} = d^{228} = d^{338} = -d^{888} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{41}$$

$$d^{146} = d^{157} = d^{256} = -d^{344} = d^{355} = \frac{1}{2} \tag{42}$$

$$d^{247} = d^{366} = d^{377} = -\frac{1}{2} \tag{43}$$

$$d^{448} = d^{558} = d^{668} = d^{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{44}$$

$$f^{123} = 1 \tag{45}$$

$$f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -\frac{1}{2} \tag{46}$$

$$f^{156} = f^{367} = -\frac{1}{2} \tag{47}$$

$$f^{458} = f^{678} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{48}$$

joissa indeksin numerot merkitsevät SU(3) generaattorin järjestyslukua, mitkä on annettu yhtälöissä (15)-(18). Rakennevakioita käyttäen on mahdollista määrittää mittaskalaareita, jotka ovat muotoa:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} d^{\alpha\beta\gamma}\hat{t}^{(\alpha)}\hat{t}^{(\beta)}\hat{t}^{(u,s,d)}, \sum_{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\beta\gamma}\hat{t}^{(\alpha)}\hat{t}^{(\beta)}\hat{t}^{(u,s,d)}.[5] \tag{49}$$

Mittaskalaarit ovat invariantteja SU(3)-muunnosten suhteeen. Mikäli matriisien välinen laskuoperaatio vaihdetaan matriisitulosta tensorituloon, saadaan 27·27 matriisi, joka kommutoi Gellman-matriisien kanssa. Tämä ominaisuus toimii perusteena aiemmin esitetyille kahden-ja-kolmen kappaleen vuorovaikutustermeille.[5] Rakennevakiot eroavat toisistaan symmetrian suhteen. D-alkuiset ovat symmetrisiä indeksiensä suhteen ja f-alkuiset antisymmetrisiä indeksiensä suhteen. Aiemmin lasketuilla arvoilla ovat molemmat kuitenkin symmetrisiä SU(3) rotaatioiden suhteen. Lisäksi, koska aravot ovat nollasta poikkeavia ovat Yhtälöiden 40-41 kommutaatiorelaatiot päteviä.

6 Dynamiikkaa

Tähän astisilla tiedoilla on mahdollista muodostaa SU(2)-dynamiikkaan nähden analoginen malli. Kahden spinin järjestelmän sijasta lähtökohtana on

$$|q_1\rangle \otimes |q_2\rangle \otimes |q_3\rangle \otimes |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ . \\ . \\ . \\ c_{27} \end{pmatrix}, \tag{50}$$

jossa komponentit ovat kompleksilukuja. Järjestelmän aikakehitystä kuvaava hamiltonin operaattori saadaan laskemalla yhteen (37) ja (33) mistä saadaan:

$$J\sum_{\alpha}[\hat{t}_1^{(a)} \cdot \hat{t}_2^{(a)} + \hat{t}_1^{(a)} \cdot \hat{t}_3^{(a)} + \hat{t}_2^{(a)} \cdot \hat{t}_3^{(a)}] + \sum_{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\beta\gamma}\hat{t}^{(a)} \otimes \hat{t}_1^{(\beta)} \otimes \hat{t}_1^{(\gamma)}. \tag{51}$$

Nyt on mahdollista ratkaista järjestelmän ajasta riippuva Schrödingerin yhtälö, josta on edelleen ratkaistavissa värivarauskomponenttien odotusarvot.

Yksinkertaisin tapaus on kahden kappaleen järjestelmä, jossa vain $\hat{H}_{pairs}$:a on merkitystä. Schrödingerin yhtälö voidaan muodostaa käyttämällä yhtälöitä (50) ja (33)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_0\rangle = \hat{H}_{pairs}|\Psi_0\rangle \tag{52}$$

Yhtälön ratkaisut voidaan jakaan kahteen joukkoon, joista toinen sisältää vain kaikki nollasta poikkeavat ratkaisut. Näille ratkaisuille alkuehdoksi voidaan valita $c_6(0) = 1$. Tämä seuraa siitä, että ainoastaan ratkaisut, jotka sisältävät c_6:n voivat olla nollasta poikkeavia.[5] Tämä on nähtävissä sijoittamalla yhtälön(15) matriisit yhtälöön (52).

Odotusarvot voidaan nyt laskea laajentamalla yhtälö (12).

$$\langle \Psi(t)|\hat{t}^{(a)} \otimes \hat{I} \otimes \hat{I}|\Psi(t)\rangle \tag{53}$$

Tosin menetelmä toimii vain kolmen kappaleen järjestelmille.

Kolmen tai useamman kappaleen vuorovaikutusta on epäkäytännöllistä tarkastella yksityiskohtaisesti. Yleisellä tasolla järjestelmät kuitenkin toimivat edellisen kaltaisesti. Tarvitaan aikakehitystä kuvaava Hamiltonin operaattori, yhtälön (50) tyyppinen tila ja vastaava Schrödingerin yhtälö. Mikä tahansa tällaisen järjestelmän tila voidaan esittää seuraavalla tavalla:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{n=1}^{N} c_n|\phi_n\rangle \tag{54}$$

. Edellisessä $c_n = \langle\phi_n|\Psi_0\rangle$. Tilojen aikakehitys on muotoa

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-ie_n t}|\phi_n\rangle, \tag{55}$$

ja

$$|\phi_n(t)\rangle = e^{ie_n t}|\phi_n\rangle \tag{56}$$

Tässä n vastaa Hamiltonin operaattorin ominaistilan järjestyslukua ja fii operaattorin ominaistilaa.

7 Yhteenveto

Tutkielman tarkoituksena on esitelty värivarausta kuvaava SU(3)-rakenteeseen pohjautuva malli. Värivarauksen komponentit voidaan esittää ajan funktiona annetussa tilassa. Kahden ja kolmen kappaleen vuorovaikutusta on tarkasteltu, ja vuorovaikutusta kuvaavien tilojen aikakehitystä on käsitelty.

Lähteet

[1] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 598-602 doi:10.1103/PhysRevLett.13.598

[2] G. Zweig, CERN-TH-412.

[3] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964), 214-215 doi:10.1016/S0031-9163(64)92001-3

[4] M. Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **139** (1965), B1006-B1010 doi:10.1103/PhysRev.139.B1006

[5] B. L. Inscoe and J. L. Lancaster, Am. J. Phys. **89** (2021) no.2, 172-184 doi:10.1119/10.0002004 [arXiv:1907.12520 [physics.ed-ph]].

[6] R. I. Nepomechie, Int. J. Mod. Phys. B **13** (1999), 2973-2986 doi:10.1142/S0217979299002800 [arXiv:hep-th/9810032 [hep-th]].