



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTO-
TIETEEN LAITOS

PRO GRADU-TUTKIELMA

Eulerin kaavat ja radikaali konstruktivismi

Jasmin Haverinen

8. elokuuta 2024



TekijäJasmin Haverinen

OtsikkoEulerin kaavat ja radikaali
konstruktivismi (engl. Euler's formulae and radical constructivism)

Tutkinto-ohjelmaMatematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä

8. elokuuta 2024

Sivumäärä70

Tiivistelmä

Tämä tutkielma tarkastelee matematiikan yliopisto-opetusta erityisesti radikaalin konstruktivismin epistemologian näkökulmasta. Tutkielman matemaattinen osa käsittelee verkkoteoriaa ja tutkielman keskeisin tulos on Eulerin toinen kaava. Pedagogisena pyrkimyksenä on korostaa konkreettisten esimerkkien ja havainnollistusten merkitystä abstraktien käsitteiden ymmärtämisessä. Tämä ilmenee tutkielmassa muiden muassa verkkojen ja Suomen kartalle piirrettyjen tieverkkojen välisenä rinnastuksena. Tutkielman lopussa esitellään opetuskokeilu, joka toteutettiin Jyväskylän yliopiston *Johdatus diskreettiin matematiikkaan* -kurssilla. Opetuskokeilussa sovellettiin radikaalia konstruktivismia ja Kolbin oppimisen kehää käytännön opetustilanteessa.

Sisällys

Johdanto	3
1 Konstruktivismi	4
2 Konstruktivismin historia	5
3 Radikaali konstruktivismi	9
4 Tutkielman pedagogiset lähtökohdat	11
5 Verkot	13
5.1 Verkkojen määritelmä	14
5.2 Verkkojen isomorfisuus	16
5.3 Liikkuminen verkolla	20
6 Puut	22
7 Tason topologiaa	34
8 Tasoverkot	38
9 Eulerin ensimmäinen kaava	45
10 Verkon ja pinnan genus	50
10.1 Verkon genus	53
10.2 Verkkojen upottamisesta pinnoille	58
11 Eulerin toinen kaava	60
12 Opetuskokeilu yliopiston matematiikan aineopintojen kursilla	65

Johdanto

Tämän tutkielman epistemologiseksi lähtökohdaksi on otettu radikaalin konstruktivismin tietokäsitys. Tähän epistemologiaan lukijaa johdatellaan ensin konstruktivistisen tietokäsityksen kautta. Konstruktivistinen oppimisteoria on 1900-luvulla muotoutunut tietokäsitys, jossa korostetaan yksilön aktiivista roolia oppimisprosessissa. Tämän käsityksen mukaan tietoa ei voida suoraan kaataa oppijan päähän, vaan oppiminen vaatii oppijan aktiivista tiedon omaksumista. Tieto rakentuu yksilön kokemusten pohjalta muodostuneiden aiempien tietokäsitysten, eli konstruktioiden, varaan [23].

Radikaalin konstruktivismin tarjoama tulkinta tiedon ja todellisuuden välisestä suhteesta poikkeaa radikaalisti perinteisempien epistemologioiden tarjoamista tulkinnoista. Radikaalin konstruktivismin mukaan kahdesta eri todellisuuden tulkinnasta kumpikin voi sopia ristiriidattomasti ympäröivään todellisuuteen, eikä kummankaan voida empiirisesti todistaa olevan ristiriidassa vallitsevan todellisuuden kanssa. Radikaalin konstruktivismin luoja Ernst von Glasersfeld on havainnollistanut tätä ajatusta avaimen ja lukon avulla, jossa erilaisia todellisuuden tulkintoja verrataan avaimen ja ympäröivää todellisuutta lukkoon. Samaan lukkoon voi sopia monia erilaisia avaimia ja näin ollen voidaan ajatella, että sopivuus on avaimen ominaisuus, ei lukon [8, 23]. Radikaali konstruktivismi on matematiikan opetuksen näkökulmasta keskeinen oppimisteoria, sillä se ohjaa opettajaa suunnittelemaan opetusta oppijoiden konstruktioista lähtöisin omien konstruktioidensa sijaan.

Tämän tutkielman matemaattinen osio alkaa luvusta 5, jossa lukijaa johdatellaan verkkoteorian alkeisiin. Pedagogisen osion ajatuksia on pyritty tuomaan osaksi tutkielman matemaattista osiota rinnastamalla verkot Suomen kartalle piirrettyihin tieverkkoihin luvuissa 5–10. Tämän tarkoituksena on ollut ilmentää sitä, kuinka matematiikan oppimateriaalissa voitaisiin kuljettaa abstraktia ja konkreettista tasoa rinnakkain. Luvussa 6 käsitellään yksinkertaisinta esimerkkiä yhtenäisistä verkoista, eli puita. Tutkielman päätuloksena toimivan Eulerin toisen kaavan kannalta keskeistä luvussa 6 on puiden karakterisaatiolauseen 6.6 kohdan d) identiteetti, jonka voidaan ajatella vastaavan Eulerin kaavaa puille. Luku 7 tarjoaa topologisia työkaluja tutkielman matemaattisesta näkökulmasta kaikkein keskeisimmille luvuille 9–11. Eulerin toisen kaavan 11.4 todistus pohjautuu lähteisiin [6, 25], joista molemmat nojaavat Youngsin vuonna 1963 todistamaan verkkojen minimaalisia upotuksia koskevaan lauseeseen, jota ei tässä tutkielmassa tai lähteissä [6, 25] ole todistettu.

1 Konstruktivismi

Konstruktivistisessa epistemologiassa ajatellaan, että tietoa ei voida sellaisenaan välittää yksilölle, vaan tiedon omaksuminen edellyttää yksilön aktiivista tiedon muodostamista [23]. Konstruktivistisen tietokäsityksen mukaan yksilön tieto rakentuu tämän kokemusten pohjalta muodostuneiden tietorakenteiden, eli **konstruktioiden**, varaan. Koska jokainen rakentaa tietoa omien henkilökohtaisten kokemuksiansa pohjalta ja tulkitsee uutta tietoa omien tietokonstruktioidensa perusteella, niin voidaan ajatella, ettei ole olemassa tietäjästä riippumatonta objektiivista heijastumaa maailmasta [23].

Tarkasteltaessa oppimista konstruktivismiin näkökulmasta, keskeistä on oppijan aktiivinen rooli oppimisprosessissa. Lisäksi opetuksessa ja sen suunnittelussa tulisi huomioida oppijoiden erilaiset ja toisistaan poikkeavat kokemuspohjat ja tietokonstruktiot. Erityisesti opettajan tulee välttää opettamista omien tietokäsitystensä pohjalta, koska ne eivät tavanomaisesti vastaa oppijoiden käsityksiä. Tästä johtuen oppijat eivät pysty rakentamaan uutta tietoa kuulemansa pohjalta, jos heidän konstruktionsa poikkeavat liikaa opettajan tietorakenteista. Oppijan virheellisten konstruktioiden tyrmäämisen sijaan opettajan tulisi ensisijaisesti pyrkiä tuomaan näkyväksi konstruktioiden pohjalta rakentuvien ajatusmallien ristiriitaisuuksia. Esimerkiksi matematiikan opetuksessa oppijoiden konstruktioita voidaan haastaa esittämällä oppijoiden käsitysten kanssa ristiriidassa olevia vastaesimerkkejä, jotka tarjoavat oppijoille mahdollisuuden reflektoida omia käsityksiään suhteessa vastaesimerkkeihin [14, s. 22]. Reflektoinnin pohjalta tehtyjen havaintojen perusteella oppija pystyy itse aktiivisesti lähteä korjaamaan virheellisiä ajatusmallejaan. Tässä prosessissa on hyödyllistä myös se, jos oppijoille tarjoutuu mahdollisuuksia verrata omia tietokäsityksiään kanssaoppijoidensa käsityksiin. Tätä voidaan edistää esimerkiksi ryhmätyöskentelyn, vertaisopetuksen ja -arvioinnin avulla [16].

Toinen keskeinen näkökulma konstruktivistislähtöisen opetuksen suunnittelussa on, että oppijan uusien konstruktioiden muodostaminen on vaikeaa, jos pohjana toimivat aikaisemmat konstruktiot ovat ristiriitaisia ja huonosti strukturoituja. Jos esimerkiksi oppijalla on merkittäviä haasteita kokonaislukulaskutoimituksissa, niin myös muuttujilla tehtyjen laskutoimitusten laskemisessa tulee oletettavasti vastaan haasteita aikaisempien virhekäsityksien heijastuessa myös uusiin käsitteisiin. Tämän vuoksi oppitunteja suunniteltaessa ja toteutettaessa on tärkeää tuoda näkyväksi aiemmin opittujen asioiden ja niiden pohjalta muodostuvien abstraktimpien käsitteiden väliset yhteydet ja riippuvuudet. Tätä yhteyttä voidaan ylläpitää ja huomioida kuljettamalla abstraktia teoriaa ja konkreettisia tosielämän esimerkkejä rinnakkain. Erityisesti matematiikan opetuksessa myös kuvien avulla voidaan

edistää abstraktien käsitteiden konkreettista hahmottamista.

Konstruktivistiseen ajatteluun pohjautuvan opetuksen kolmantena näkökulmana voidaan pitää sitä, että opittavan aiheen ympärille muodostuvilla merkityksillä tuetaan oppijan aktiivista osallistumista oppimisprosessissa. Matematiikan abstrakteista käsitteistä voidaan tehdä oppijoille merkityksellisiä esimerkiksi rinnastamalla ne konkreettisiin esimerkkeihin, joille pystytään löytämään käytännön elämän sovelluksia. Hyvin usein juuri tämänkaltaiset esimerkit puuttuvat matematiikan yliopisto-opetuksesta, vaikka juuri niillä saataisiin lisättyä oppijoiden opittavaa aihetta kohtaan tuntemaa merkityksellisyuden ja omakohtaisuuden tunnetta. Opiskeltavien käsitteiden merkityksellisyuden korostaminen opetuksessa on erityisen tärkeää, koska sen on huomattu lisäävän oppijoiden opiskelumotivaatiota [18].

2 Konstruktiivismin historia

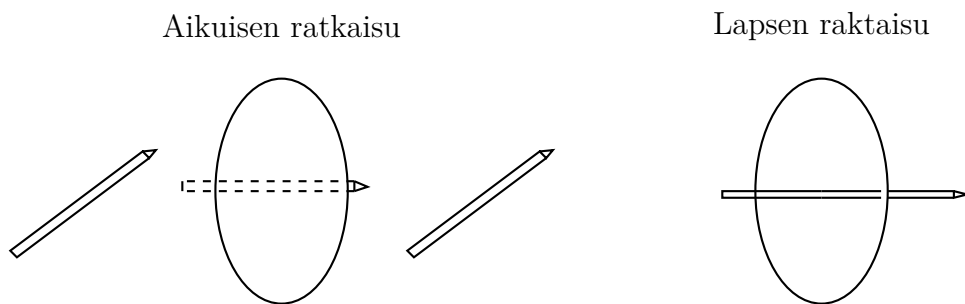
Konstruktivistinen oppimisteoria syntyi 1900-luvulla sveitsiläisen psykologin Jean Piaget'n (1896–1980) **kognitiivisen kehityksen** ja venäläisen psykologin Lev Vygotskyn (1896–1934) **sosiaalisen konstruktivismin** teorioiden pohjalta. Teorian syntyyn ja leviämiseen vaikuttivat keskeisesti myös esimerkiksi yhdysvaltalaisen filosofin ja psykologin John Dewey'n (1859–1952) ja ranskalaisen filosofin Jean-Jacques Rousseau'n (1712–1778) ajatukset. Konstruktivistisella oppimisteorialla on ollut hyvin merkittävä rooli länsimaisen koulutuksen kehityksessä 1900-luvun lopusta alkaen. Esimerkiksi Maria Montessorin, Jerome Brunerin, Paulo Freiren, Donald Schönin, David Kolbin ja Jack Mezirowin voidaan ajatella monien muiden ajattelijoiden ohella jakavan useita konstruktivistisen oppimisteorian haaran ajatuksia.

Piaget'n kognitiivisen kehityksen teorian perustana toimi hänen kiinnostuksensa lapsen kehitykseen ja tapaan oppia ja ajatella. Lisäksi häntä kiinnostivat myös lasten ja aikuisten ajattelussa ilmenevät eroavaisuudet. Hänen teorian mukaan lapsen oppimisen edellytyksenä voidaan pitää lapsen vuorovaikutusta ympäristönsä kanssa. Pelkän lapsen ja ympäristön välisen vuorovaikutussuhteen muodostumisen ei voida kuitenkaan katsota johtavan vielä oppimiseen. Tämän lisäksi oppiminen edellyttää myös, että lapsi kykenee muodostamaan merkityksiä ympäristöstä saamiensa kokemusten perusteella. Näiden merkityksien pohjalta lapsi rakentaa eli konstruoi tietoa. Konstruktivistisen oppimisteorian kannalta Piaget'n ajattelun yhtenä keskeisimpänä käsitteenä voidaan pitää **skeemaa**, jolla tarkoitetaan yksilön käsitteiden ideoihin yhdistettyjä mielen sisäisiä malleja [2, s. 43], [23, s. 41].

Piaget'n näkemyksen mukaan ihmisen mieli pyrkii alati **tasapainotilaan**,

jossa yksilö kykenee selittämään ympäristössään tapahtuvia ilmiöitä senhetkisten skeemojensa pohjalta. Jos yksilölle tulee vastaan tilanne, jossa hänen skeemansa eivät riittävän hyvin pysty selittämään ympäristön tapahtumia, haluttu tasapainotila järkkyy. Tällöin yksilön kognition sanotaan ajautuvan niin kutsutun **kognitiivisen konfliktin** seurauksena **tasapainottomuuden** tilaan. Tällaiseen tilaan jouduttuaan ihmisen mieli pyrkii korjaamaan ja muovaamaan skeemarakenteita päästäkseen takaisin tasapainotilaan. Piaget luokitteli skeemojen korjauksen ja mukauttamisen kahteen kognitiiviseen prosessiin, joita hän kutsui **assimilaatioksi** ja **akkomodaatioksi**. Assimilaatiossa yksilö täsmentää tai laajentaa jo olemassa olevaa skeemaansa. Esimerkiksi, jos yksilöllä on olemassa linnun skeema ja hän kohtaa uuden lintulajin, niin hän voi laajentaa olemassa olevaa linnun skeemaansa sisäistämällä myös kohtaamansa lintulajin osaksi tätä skeemaa. Akkomodaatiossa yksilö luo täysin uuden skeeman kohtaamansa ilmiön selittämiseksi. Esimerkiksi, jos yksilö näkee taivaalla lentokoneen, vaikka molemmissa on yhtäläisyyksiä, niin ei lentokonetta voi sisällyttää assimilaatiolla linnun skeemaan. Tällöin yksilö joutuu luomaan täysin uuden lentokoneen skeeman [2, s. 43].

Kognitiivisen kehityksen teoriassa Piaget myös luokitteli lapsen kehityksen eri tasoihin heidän ikänsä mukaan. Tämän ajatuksen näkökulmasta lapsen kognitiiviset ominaisuudet kehittyvät vaiheittain iän myötä. Kehitys tapahtuu siirtymällä tasolta seuraavalle, kun ymmärrys laajentuu ja edellisen tason konstruktiot ovat riittävän kehittyneitä. Lasten ja aikuisten kognitiivisten ominaisuuksien välisten eroavaisuuksien seurauksena voidaan ajatella, että he tulkitsevat ympäröivää maailmaa eri lähtökohdista. Jos esimerkiksi lapselle ja aikuiselle annetaan rengas ja käsketään heitä pujottamaan kynä renkaan läpi, niin aikuinen pujottaa todennäköisemmin kynän kokonaan renkaan läpi, kun lapsi puolestaan jättää todennäköisemmin kynän puolitiehen.



Kuva 2.1: Kynä-renkas -esimerkki.

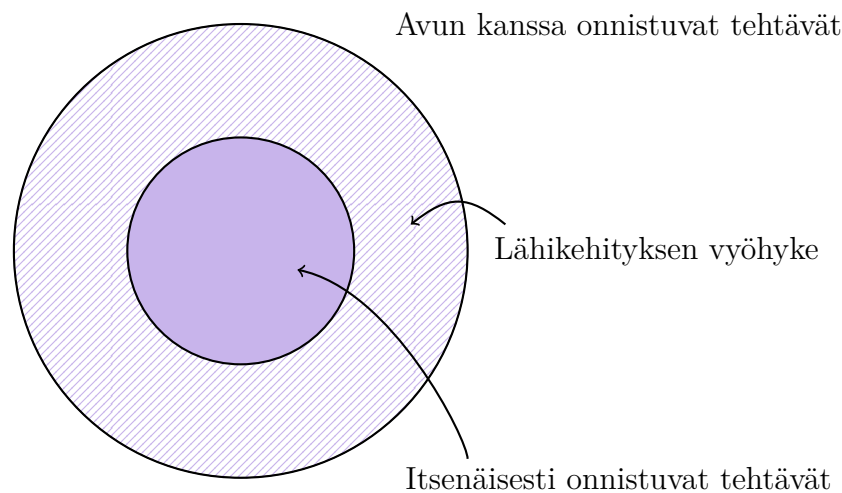
Tämän kaltaisessa esimerkissä sekä aikuisen että lapsen ratkaisut voivat

olla täysin ristiriidattomia heidän sisäisten malliensa kanssa, mistä johtuen kumpaakaan ratkaisua ei voida pitää enemmän oikeana tai vääränä, vaan kyse on merkityksien erilaisesta tulkinnasta. Jos Piaget'n ajattelua halutaan laajentaa myös lapsuuden jälkeiseen oppimiseen, niin voidaan ajatella, että yksilön kognitiivinen kehitys ja oppiminen jatkuu läpi elämän. Tästä näkökulmasta katsottuna myös esimerkiksi korkeakouluopiskelijoiden ja -opettajien skeemat ja tulkinnat voivat perustellusti poiketa toisistaan.

Lev Vygotskyn konstruktivistisessa ajattelussa korostuu sosiaalisen vuorovaikutuksen merkitys oppimisprosessissa ja tiedon rakentamisessa. Hänen mukaansa yksilön kognitiivista toimintaa ja ajattelua voidaan ymmärtää ainoastaan tulkitsemalla sitä osana sosiaalista ja kulttuurista ympäristöä, joiden vaikutuspiirissä tämä on kehittynyt [1, s.35], [2, s. 57–59]. Hyvänä esimerkkinä tästä voidaan pitää edellä mainittua rengas–kynä -esimerkkiä, jossa yksilön kulttuurisen integroitumisen taso määrittää millä tavalla yksilö tulkitsee annettua ongelmaa. Vygotskyn teoriassa korostuu kielen, symbolien ja niiden varaan rakentuvien mallien, tarinoiden ja taiteen kaltaisten **kulttuuristen työkalujen** merkitys yksilön oppimisessa. Kaikkein tärkeimpänä kulttuurisena työkaluna lapsen kehityksen kannalta Vygotsky piti kieltä, sillä esimerkiksi ajattelun hän käsitti sisäisenä kielenä [2, s. 58], [17]. Lisäksi kieli mahdollistaa reflektion, suunnitelmien tekemisen, ongelmien ratkaisemisen ja asioiden jäsentämisen ääneen puhumalla [2, s. 58], [15]. Koska yksilön sosiaalinen ympäristö ja häntä ympäröivä kulttuuri määrittävät ja rajaavat vahvasti hänen käyttämänsä kieltä, niin tämän seurauksena nämä vaikuttavat merkittävällä tavalla myös yksilön ajatteluun kielen välityksellä. Esimerkiksi suomen kielessä käytettyihin ammattinimikkeisiin, kuten palomies, sairaanhoitaja, keittäjä ja siivooja yhdistyy vahvoja sosiaalisia ja kulttuurisia mielle yhtymiä.

Kaikkein keskeisimpänä ja tunnetuimpana Vygotskyn sosiaalisen konstruktivismiin käsitteenä voidaan pitää **lähikehityksen vyöhykettä**, jolla tarkoitetaan yksilön itsenäisesti suoritettavien tehtävien pystyvyyden tason ja hänen taitotasolleen hieman vaikeampien avun kanssa suoritettavien tehtävien väliin jäävää tilaa. Vygotskyn näkemyksen mukaan yksilön kognitiivisen ajattelun tasoa ei voida perustellusti mitata tämän tietotason vastaavilla itsenäisesti suoritettavilla tehtävillä. Esimerkiksi korkeamman sosioekonomisen taustan omaavilla lapsilla on lähtökohtaisesti enemmän työkaluja kulttuurista tietämystä edellyttävien yksilöllisten koulutehtävien ratkaisemiseen, kuin matalamman sosioekonomisen taustan omaavilla lapsilla [2, s. 60]. Tämän ajatuksen pohjalta Vygotsky perusteli, että yksilön ajattelua mittaa paremmin tämän kyky suoriutua ajattelua edellyttävistä tehtävistä kokeneemman ja enemmän kulttuurista pääomaa omaavan yksilön avustuksella, kuin kyky suoriutua näistä tehtävistä täysin itsenäisesti. Lähikehityksen vyöhykkeen

avulla Vygotsky pyrki mittaamaan näin ilmenevää yksilön ajattelun todellista potentiaalia. Hänellä ei kuitenkaan ollut antaa työkaluja tämän ajatuksen pohjalta tapahtuvaan yksilön ohjaukseen, vaan hänen ajatuksiaan täydensi näiltä osin niin kutsutulla **scaffoldingilla**, eli **tuetulla oppimisella**, myöhemmin Jerome Bruner (1915–2016) [2, s. 117], [4, 5]. Esimerkkinä tuetusta opetuksesta korkeakoulussa voidaan pitää niin kutsuttua Ratkomo-ohjausta, jossa opiskelijat tekevät tehtäviä ja kurssien opettajat ovat tarvittaessa ohjaamassa ja auttamassa opiskelijoita [24, s. 7]. Myös korkeakouluopiskelijan ja ohjaajan välinen työskentely oppinäytetöitä tehdessä voi rakentua tuetun oppimisen mallin varaan.



Kuva 2.2: Havainnollistava kuva lähikehityksen vyöhykkeestä.

Konstruktivistisen epistemologian voidaan ajatella ainakin osin syntyneen kritiikkinä **behaviorismille**, joka hallitsi pedagogista ajattelua aina 1900-luvun puoleen väliin asti. Behavioristisen teorian mukaan oppiminen on vahvistamisella säädeltävää ärsyke-reaktiokytkentöjen muodostumista. Tämän suuntauksen keskeisimpinä ajattelijoina voidaan pitää B. F. Skinneriä (1904–1990), joka syvensi Ivan Pavlovin (1849–1936) koirien ehdollisen oppimisen pohjalta syntynyttä teoriaa. Tavanomaisena esimerkkinä behavioristista oppimista mittaavista kokeista voidaan pitää rotilla suoritettavaa labyrintti-koetta, jossa rottien ulospääsyä labyrintista ohjataan palkkioiden ja rangais-tusten avulla [23, s. 29]. Sekä Pavlovin koirakokeissa että edellä mainituissa rottakokeissa ideana on palkita tietynlainen käytös ja tämän kautta vahvis-taa tietynlaista toimintaa. Näiden kokeiden pohjalta ajateltiin, että samat

palkkioiden ja rangaistuksien kautta toimintaa vahvistavat ja heikentävät lainalaisuudet pätevät myös ihmisiin. Behaviorismin mukaan ihmisen käytös on ympäristön ärsykkeiden ja reaktioiden assosiaatioiden kautta ymmärrettävissä ja oppimisen ajatellaan tapahtuvan tietoa siirtämällä opettajalta oppijalle [23, s. 31]. Erityisesti tätä tiedonsiirron ajatusta on haastettu ja kritisoitu aktiivisesti konstruktivistisissä teorioissa.

3 Radikaali konstruktivismi

Radikaalilla konstruktivismilla viitataan Ernst von Glasersfeldin (1917–2010) luomaan epistemologiseen teoriaan, joka pohjautuu muiden muassa Giambattista Vicon (1668–1744), George Berkleyn (1685–1753), Immanuel Kantin (1724–1804), Ludwig Wittgensteinin (1889–1951), Jean Piaget’n (1896–1980) ja Silvio Ceccaton (1914–1997) ajatuksiin. Näistä kaikkein keskeisimpänä teoriaansa vaikuttaneena ajattelijana von Glasersfeld on pitänyt Piagetia. Radikaali konstruktivismi on löytänyt paikkansa erityisesti matematiikan ja luonnontieteiden oppimisen ja opetuksen tutkimuksessa [9], [23, s. 39]. Tähän on epäilemättä vaikuttanut von Glasersfeldin oma tausta matematiikan parissa [10, s. 3].

Radikaalista konstruktivismista tekee **radikaalia** sen tarjoama tulkinta tiedon ja todellisuuden välisestä suhteesta, joka poikkeaa merkittävällä tavalla perinteisempien epistemologioiden tarjoamista tulkinnoista. Perinteisissä tiedon luonnetta käsittelevissä epistemologioissa tietoa pidetään “totena”, jos ja vain jos se vastaa objektiivista todellisuutta. Tällöin tietoa voidaan pitää todellisen maailman heijastumana, jonka voidaan ajatella olevan olemassa yksilöistä riippumatta. Von Glasersfeldin mukaan yksilöt tulkitsevat todellisuutta kuitenkin omien henkilökohtaisten konstruktionsensa pohjalta, ja yksilöiden konstruktioiden voidaan aina ajatella poikkeavan jollain tapaa toisistaan. Tällöin yksilöt voidaan ajatella eräänlaisiksi **epistemologisiksi yksiköiksi** [19, s. 51], joista jokaisella on henkilökohtainen todellisuuden tulkintansa.

Radikaali konstruktivismi kyseenalaistaa sen, että ihmisen olisi mahdollista todistaa todellisuuden ja jonkin tiedon vastaavan täydellisesti toisiaan. Tämä johtuu siitä, että kahdesta eri todellisuuden tulkinnasta kumpikin voi sopia ristiriidattomalla tavalla ympäröivään todellisuuteen, eikä kummankaan voida empiirisesti osoittaa olevan ristiriidassa vallitsevan todellisuuden kanssa. Von Glasersfeld havainnollistaa tätä asemaa avain-lukko -metaforalla, jossa avaimet vertautuvat erilaisiin todellisuuden tulkintoihin ja lukko ympäröivään todellisuuteen. Samaan lukkoon voi sopia monia erilaisia avaimia, minkä seurauksena voidaan ajatella, että sopivuus riippuu avaimen ominai-

suuksista, ei lukon [8, s. 8], [23, s. 40].

Radikaalissa konstruktivismissa tiedon todenperäisyyttä testataan käytännön kautta ja tiedon voidaan ajatella olevan totta, jos se johtaa ympäröivän todellisuuden kanssa hyvin yhteensopiviin lopputuloksiin. Erityisesti tiedon voidaan katsoa olevan ajasta sekä paikasta riippuvaa ja sen ajatellaan muovautuvan evoluutioon rinnastuvalla tavalla [10, s. 42–45]. Toisin sanoen radikaalissa konstruktivismissa tiedon totuutta mitataan sen elinkelpoisuudella ja käytettävyydellä [10, s. 68–69].

Silloin kun radikaalia konstruktivismia sovelletaan opetuksessa, niin keskeiseksi nousee niin kutsutun **suhteellisen yhteisymmärryksen alueen** (eng. consensual domain) muodostaminen. Tällä alueella viitataan kahden tai useamman yksilön tietokonstruktioiden yhtäläisyyksien muodostamaan abstraktiin alueeseen. Tämän alueen muodostumista voidaan pitää välttämättömyytenä mielekkäälle vuorovaikutukselle ja sen muodostumisen edellytyksenä on yksilöiden kyky muuttaa omia tulkintojaan ja tämän myötä omia tietokonstruktioitaan. Suhteellista yhteisymmärryksen aluetta voidaan havainnollistaa esimerkiksi, jossa kaksi henkilöä näkevät pöydällä muki. Jos molemmat henkilöt ovat yhtä mieltä siitä, että muki on väriltään musta, niin silloin tämän mukiin liittyvän ominaisuuden voidaan ajatella kuuluvan suhteellisen yhteisymmärryksen alueelle. Jos sitä vastoin toisen mielestä muki onkin tummansininen, niin silloin mukiin liittyvän yhdistyvän mielekkään kommunikaation jatkuminen edellyttää, että yksilöt pääsevät jonkinlaiseen yhteisymmärrykseen tai kompromissiin mukiin väristä. Päästyään yhteisymmärrykseen mukiin väristä, henkilöiden välinen suhteellisen yhteisymmärryksen alue laajenee ja myös yksilöiden henkilökohtaiset konstruktiot lähenevät toisiaan. Matematiikan korkeakouluopetuksessa suhteellisen yhteisymmärryksen alueen merkitys korostuu matemaattisiin määritelmiin ja lauseisiin yhdistyvissä erilaisissa tulkinnoissa. Ristiriitaiset tulkinnat johtavat helposti loogisesti toisistaan poikkeaviin lopputuloksiin.

Vaikka suhteellisen yhteisymmärryksen alueen muodostamista ja sen laajentamista voidaan pitää keskeisinä opetuksen pedagogisina edellytyksinä, niin tavoite ei kuitenkaan ole muodostaa oppijalle täysin opettajan konstruktioita vastaavia tietorakenteita, sillä myös opettajan konstruktiot voivat olla vajavaisia ja ristiriitaisia. Lisäksi opettaja ei voi suoraan siirtää omia konstruktioitaan oppijalle, vaan oppijan tietorakenteiden muuttaminen edellyttää tämän aktiivista toimintaa ja neuvottelua todellisuuteen liittyvistä tulkinnoista opettajan ja muiden oppijoiden kanssa. Tästä syystä sekä opetusta että oppimistilanteissa keskeiseksi muodostuvat oppijan käsitteenmuodostusprosessiin liittyvät yksityiskohdat. Opettajan näkökulmasta on erityisen tärkeää huomioida, että eri vaiheissa oppijan käsitteenmuodostusprosessia syntyy vääjäämättä hyvinkin ristiriitaisia väliaikaisia konstruktioita, joiden ris-

tiriitaisuutta oppija ei itse vielä hahmota. Opettajan ei tulisi kuitenkaan pyrkiä suoraan korjaamaan näitä virhekäsityksiä, vaan tarjota ristiriitatilanteita, esimerkiksi erilaisten vastaesimerkkien muodossa, joiden seurauksena oppijan tietorakenteet ajautuvat **kognitiiviseen konfliktiin** [14, s. 20–22]. Kognitiivisen konfliktin seurauksena oppijan kognitio aloittaa aktiivisen tietorakenteiden korjausprosessin.

Radikaaliin konstruktivismiin pohjautuvan opetuksen edellytyksenä on vuorovaikutus luokkahuoneessa, jonka muodostaminen matematiikan korkeakouluopetuksessa on osoittautunut monella tapaa vaikeaksi. Tällaisen oppimisympäristön saavuttamisella olisi monia konstruktivistisiin teorioihin pohjautuvaa opetusta edesauttavia vaikutuksia. Tästä syystä olisi tärkeää pohdita millä tavoin opetuksen ja oppimisen vuorovaikutuksellisuutta voitaisiin syventää matematiikan korkeakouluopetuksessa.

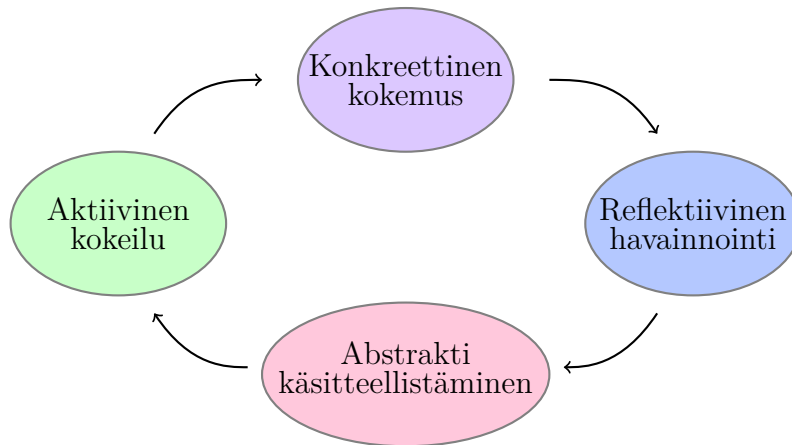
4 Tutkielman pedagogiset lähtökohdat

Tässä tutkielmassa tarkastellaan matematiikan yliopisto-opetusta konstruktivististen oppimiskäsitysten pohjalta. Erityisesti opetukseen liittyviä kysymyksiä pyritään hahmottamaan radikaalin konstruktivismin kautta. Tämä tutkielma käsittelee näitä aiheita verkkoteorian opettamisen näkökulmasta, mutta ajatuksena on, että tutkielman tarjoamia työkaluja ja näkökulmia voitaisiin soveltaa myös muilla matematiikan osa-alueilla. On kuitenkin hyvä huomioida, että joidenkin osa-alueiden kohdalla tutkielman tarjoamien ajatusten soveltaminen voi olla haastavampaa. Luvuissa 1–3 esiin nostettujen havaintojen pohjalta tämän tutkielman pedagogisiksi lähtökohdiksi on asetettu seuraavien matematiikan korkeakouluopetukseen yhdistyvien tavoitteiden edistäminen.

- (1) Oppijan aktiivisen roolin ja reflektion korostaminen.
- (2) Oppijan erilaisten tietokonstruktioiden, kokemuspohjien ja lähtökohdienten huomioiminen opetuksen suunnittelussa.
- (3) Käsitteiden abstraktin ja konkreettisen tason kuljettaminen rinnakkain opetuksessa.
- (4) Opiskeltavan asian merkityksellisyyden korostaminen konkreettisten esimerkkien ja havainnollistusten kautta.
- (5) Opetuksen vuorovaikutuksellisuuden tukeminen ja lisääminen.

Tutkielmassa oppijoiden erilaisuutta, opittavan asian merkityksellisyyttä sekä abstraktien ja konkreettisten tasojen välistä yhteyttä on pyritty huomioimaan lähestymällä verkkoteorian käsitteitä konkretian kautta. Tässä tutkielmassa tämä ajatus on toteutettu rinnastamalla verkot Suomen kartalle piirrettyihin tieverkkoihin. Tämän rinnastuksen kautta verkkoteorian abstrakteja määritelmiä ja tuloksia on lähdetty purkamaan lukijalle tieverkkojen näkökulmasta. Tässä yhteydessä tutkielmassa on myös painotettu kuvien tärkeyttä pedagogisena työkaluna matematiikan opetuksessa. Lukijaa kehoitetaan pohtimaan millaista esimerkiksi tutkielman matematiikkaa käsittelevien lukujen 5–11 lukeminen olisi ollut ilman niiden sisältämiä kuvia.

Koska kaikkia yllämainittuja tavoitteita ei pystytä oman kokemuksemme mukaan mallintamaan ja havainnollistamaan lukijalle riittävän tarkasti oppimateriaaliin rinnastuvalla tutkielmakokonaisuudella, niin osana tätä tutkielmaa suoritettiin opetuskokeilu Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen *Johdatus diskreettiin matematiikkaan* -kurssilla. Opetuskokeilu koski kurssin yhden luentokerran toteutusta, joka käsitteli tämän tutkielman keskeisimpiä käsitteitä ja Eulerin kaavoja. Luennon pedagogisen lähestymistavan suunnittelussa sovellettiin radikaalin konstruktivismin teoriaa ja yleisemmin myös muita konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen pohjautuvia teorioita. Radikaalin konstruktivismin lisäksi keskeisessä roolissa oli muiden muassa kokemuksellisen oppimisen teorian tarjoama Kolbin oppimisen kehä, katso kuva 4.1 [2, s. 199], [12].



Kuva 4.1: Kolbin oppimisen kehä.

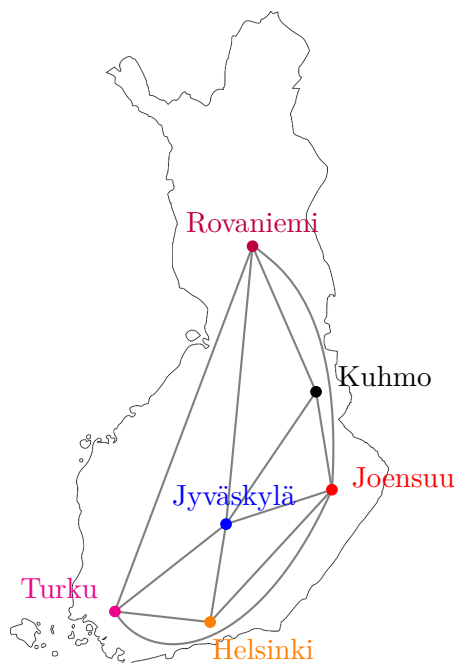
Opetuskokeilussa pyrittiin huomioimaan kaikki yllämainitut tavoitteet (1)–(5) ja sen tarkoituksena on tarjota lukijalle eräs nämä tavoitteet huomioiva opetusmalli. Tähän opetuskokeiluun perehdytään tarkemmin luvussa 12.

5 Verkot

Tutkielmassa käsitellään geometrisia kuvioita ja kappaleita, sekä niiden topologia ominaisuuksia niin kutsun **verkkoteorian** näkökulmasta. Verkko-teoria sai alkunsa 1700-luvulla esitetystä Köningsbergin siltaongelmasta, jonka ratkaisi sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler (1707–1783) vuonna 1736. Köningsbergin siltaongelman ratkaisuhetkeä pidetään verkkoteorian ja myös esimerkiksi erilaisten matemaattisten kappaleiden muotoja tutkivan **topologian** alkuna [11, s. 1–2]. Verkko-teoria ja topologia ovat sidoksissa toisiinsa erityisesti niin kutsuttujen **Eulerin kaavojen** kautta, jotka ovat tämän tutkielman kaikkein keskeisimmät matemaattiset tarkastelukohteet.

Köningsbergin siltaongelma. Alkuperäinen Köningsbergin siltaongelma voidaan rinnastaa seuraavaan matemaattiseen pulmaan:

Oletetaan, että kuva 5.1 esittää kuuden Suomen kaupungin välistä tieverkkoa, missä kuvassa näkyvillä käyrillä kuvataan kaupunkien välisiä teitä. Voidaanko tieverkolta löytää sellainen ajo-reitti, jossa jokaista tietä pitkin ajetaan täsmälleen kerran ja lopuksi päädytään takaisin lähtökaupunkiin?



Kuva 5.1: Kuuden kaupungin välinen tieverkko.

Alla kuvan 5.1 tieyhteydet on taulukoitu, siten että merkillä "x" on merkitty kahden kaupungin välillä kulkeva tie.

	Rovaniemi	Kuhmo	Joensuu	Jyväskylä	Helsinki	Turku
Rovaniemi		x	x	x		x
Kuhmo	x		x	x		
Joensuu	x	x		x	x	x
Jyväskylä	x	x	x		x	x
Helsinki			x	x		x
Turku	x		x	x	x	

Taulukko 1: Kaupunkien väliset tieyhteydet taulukoituna.

Edellä esitetty tieverkko-ongelma ei ole täysin samankaltainen Königsbergin siltaongelman kanssa, mutta teoreettisesta näkökulmasta näiden voidaan katsoa vastaavan toisiaan. Joka tapauksessa Königsbergin siltaongelma voidaan tulkita eräänlaisena logistisena ongelmana. Tässä tutkielmassa Königsbergin siltaongelmaa ei käsitellä tarkemmin vaan sen yksityiskohtaisempi tarkastelu jätetään lukijalle. Ongelmaa voidaan tässä yhteydessä pitää verkkoteoriaa kohtaan mielenkiintoa herättävänä pulmana, johon lukija voi halutessaan syventyä joko omatoimisesti tai esimerkiksi lähteiden [11, s. 1–2, 64–70] ja [6, s. 85–92] avulla.

5.1 Verkkojen määritelmä

Eräs keskeisimpiä Königsbergin siltaongelmaan liittyviä havaintoja on se, että ongelman ratkaisu ei ole sidoksissa tason geometriaan vaan ongelman kannalta oleellinen informaatio on sisällytetty taulukon 1 ilmoittamiin kaupunkien välisiin riippuvuussuhteisiin. Juuri tästä on kyse alla olevassa verkkojen määritelmässä, joka edellyttää ainoastaan niin kutsuttujen kärkien ja niiden välisten riippuvuussuhteiden kuvaamista.

Määritelmä 5.1 (Verkko). Olkoon V epätyhjä äärellinen joukko ja olkoon joukko E kokoelma sen kaksialkioisia osajoukkoja. Tällöin järjestettyä paria

$$G = (V, E)$$

kutsutaan **verkoksi**. Lisäksi

- joukon V alkioita kutsutaan verkon **kärjiksi**.
- joukon E alkioita kutsutaan verkon **sivuiksi**.

Kahta verkon kärkeä kutsutaan **naapureiksi**, jos ne kuuluvat samaan sivuun eli niitä yhdistää joku verkon sivuista.

Verkon kärkien lukumäärää merkitään $|V|$ ja samoin verkon sivujen lukumäärää merkitään $|E|$.

Huomautus 5.2. Joukko E voi sisältää jokaisen alkioparin vain kerran. Tämä tarkoittaa siis sitä, että yksikään verkon sivu ei voi esiintyä verkossa useammin kuin kerran.

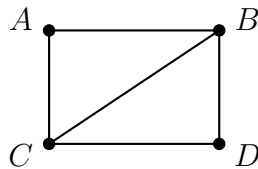
Esimerkki 5.3. *Olkoon*

$$G = (V, E),$$

missä

$$\begin{cases} V = \{A, B, C, D\} \\ E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}. \end{cases}$$

Verkko G voidaan mallintaa esimerkiksi kuvan 5.2 kaltaisesti:



Kuva 5.2: Esimerkki verkosta.

Määritelmä 5.4 (Aliverkko). Verkkoa

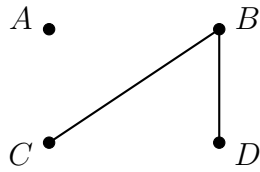
$$\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$$

kutsutaan verkon

$$G = (V, E)$$

aliverkoksi, jos

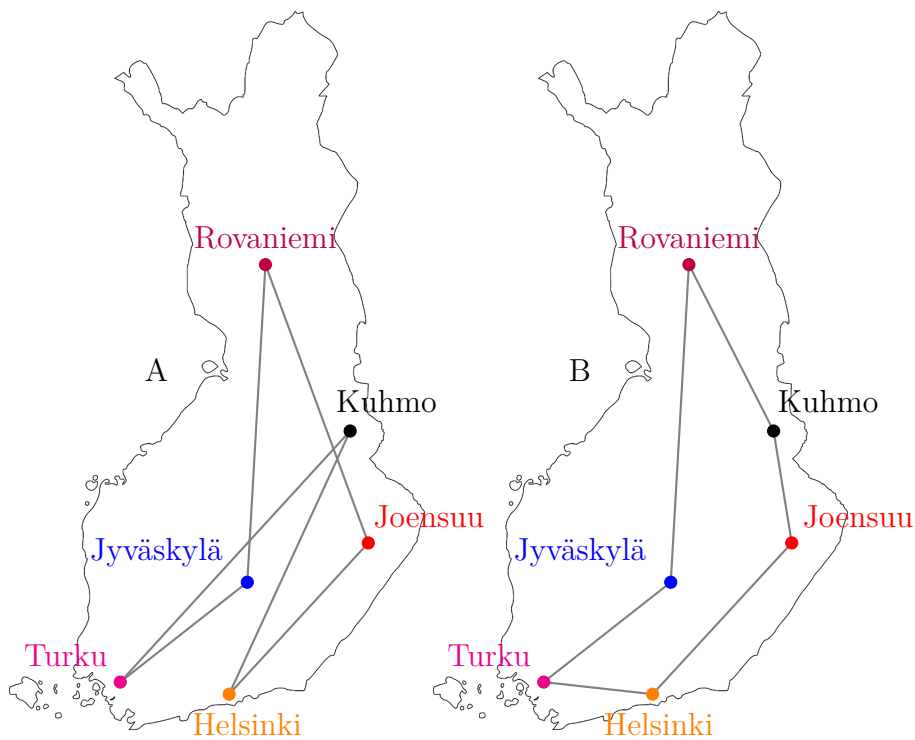
$$\hat{V} \subset V \quad \text{ja} \quad \hat{E} \subset E.$$



Kuva 5.3: Esimerkki kuvan 5.2 aliverkosta.

5.2 Verkkojen isomorfisuus

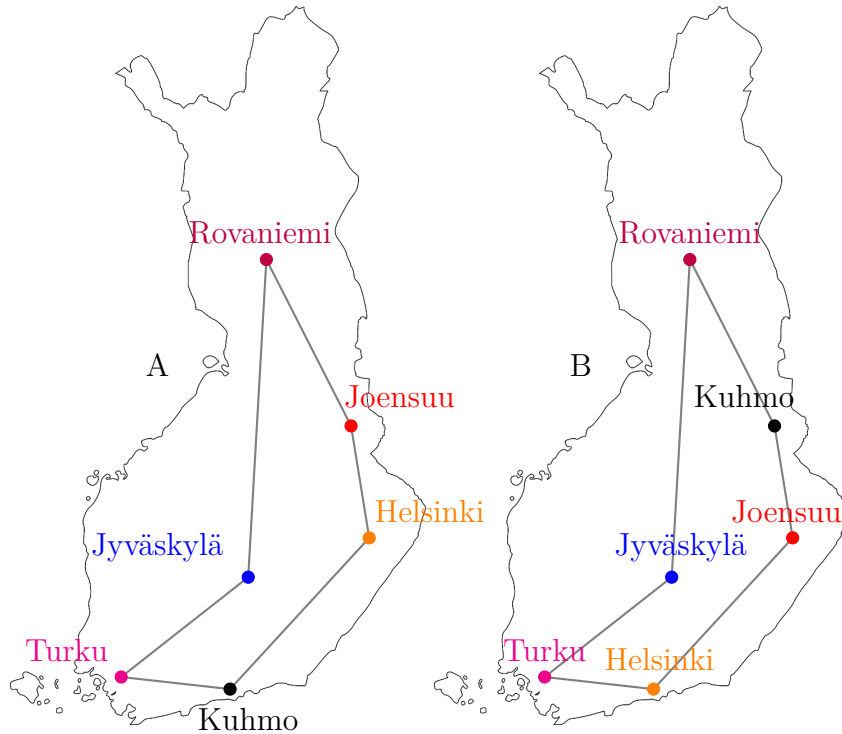
Alla olevassa kuvassa on esitetty kaksi erilaista reittiä kaupunkien välille niin, että ensimmäisestä kaupungista kierretään kaikki kaupungit ja lopuksi palataan lähtökaupunkiin. Ovatko reitit keskenään jossain määrin samanmuotoisia eli isomorfisia? Lähdetään seuraavaksi pohtimaan tätä kysymystä tarkemmin.



Kuva 5.4: Kaksi erilaista reittiä kaupunkien välillä.

Tarkastelemalla kuvan 5.4 tieverkkoja hieman tarkemmin huomataan, että siirtelemällä tieverkon A kaupunkeja päästään kuvan 5.5 kaltaiseen tilanteeseen. Tämän jälkeen vielä nimeämällä kaupungit uudelleen päädytään kuvan täysin samanmuotoisiin tieverkkoihin, katso kuva 5.5. Näin ollen tieverkkoja

A ja B kutsutaan keskenään **isomorfisiksi**. Seuraavaksi verkkojen isomorfiisuutta lähdetään määrittelemään tarkemmin.



Kuva 5.5: Siirretyt kaupungit.

Määritelmä 5.5 (Äärellisten joukkojen 1-1-vastaavuus). Jos A ja B ovat äärellisiä joukkoja, niin tällöin niiden välisellä **1-1-vastaavuudella** tarkoitetaan joukon A ja B alkuiden välistä paritusta siten, että

- 1) jokaiselle joukon A alkion on täsmälleen yksi pari joukossa B ja
- 2) jokaiselle joukon B alkion on täsmälleen yksi pari joukossa A .

Toisin sanoen 1-1 vastaavuudella tarkoitetaan bijektiota

$$f : A \rightarrow B.$$

Bijektio on usein oppijalle hankala käsite, sillä sen sisäistäminen edellyttää sekä kuvauksen injektiiivisyyden että surjektiiivisen määritelmien ymmärtämistä, jotka ovat jo itsessään hankalasti sisäistettäviä käsitteitä. Tästä johtuen bijektiiiviset kuvaukset esitellään oppijalle hyvin usein vasta korkeakoulumatematiikan kursseilla. Isomorfiisuuden käsite rakennetaan kuitenkin

monesti bijektiivisyyden varaan, vaikka oppijalla ei välttämättä ole bijektiivisyydelle valmista konstruktiota. Tästä syystä isomorfisuuden ymmärtäminen voi olla haastavaa ja sen takia on mielekkäämpää määritellä paritus 1-1-vastaavuuden kautta. Vastaavaa isomorfisuuden 1-1-vastaavuuksiin pohjautuvaa määritelmää on käytetty myös lähteessä [21].

Esimerkki 5.6. *Olkoot*

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{ja} \quad B = \{a, b, c, d, e\}$$

joukkoja. Tällöin näiden välinen paritus

$$1 \leftrightarrow a$$

$$2 \leftrightarrow b$$

$$3 \leftrightarrow c$$

$$4 \leftrightarrow d$$

$$5 \leftrightarrow e$$

määrittelee joukkojen A ja B välille 1-1-vastaavuuden. Vastaavasti myös paritus

$$1 \leftrightarrow e$$

$$2 \leftrightarrow d$$

$$3 \leftrightarrow c$$

$$4 \leftrightarrow b$$

$$5 \leftrightarrow a$$

määrittelee joukkojen A ja B välisen 1-1-vastaavuuden.

Määritelmä 5.7 (Verkkojen isomorfisuus). Verkkojen

$$G_1 = (V_1, E_1) \quad \text{ja} \quad G_2 = (V_2, E_2)$$

sanotaan olevan keskenään **isomorfisia**, jos niiden kärkijoukkojen V_1 ja V_2 välille löytyy 1-1-vastaavuus siten, että molemmissa verkoissa kaksi kärkeä ovat naapureita keskenään täsmälleen silloin, kun niitä vastaavat kärjet ovat naapureita myös toisessa verkossa. Toisin sanoen verkkojen G_1 ja G_2 kärkijoukkojen välille löytyy bijektio

$$f : V_1 \rightarrow V_2$$

siten, että kaikille kärjille pätee

$$\{v, w\} \in E_1 \iff \{f(v), f(w)\} \in E_2.$$

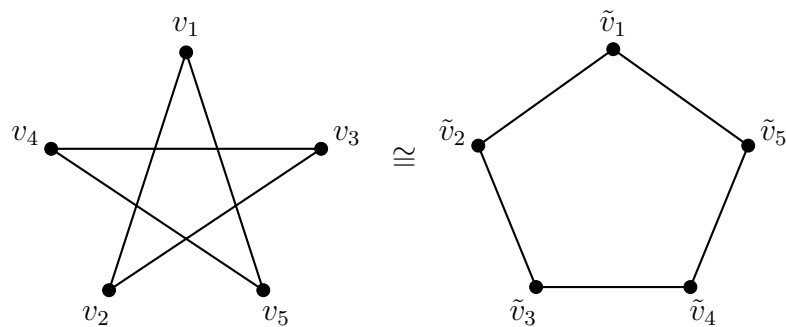
Jos verkot G_1 ja G_2 ovat isomorfisia keskenään, niin merkitään

$$G_1 \cong G_2.$$

Vastaavasti, jos verkot G_1 ja G_2 eivät ole isomorfisia keskenään, niin merkitään

$$G_1 \not\cong G_2.$$

Kuvassa 5.6 on esimerkki kahdesta isomorfisesta verkosta.



Kuva 5.6: Isomorfiset verkot, joista toinen on piirretty siten, että sen sivut eivät leikkaa toisiaan.

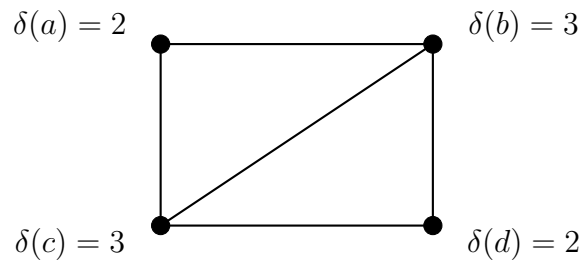
Kahden verkon välisen isomorfisuuden todentaminen voi olla usein haastavaa. Hyvin usein isomorfisuustarkasteluissa toimiva keino on kuitenkin lähteä vertailemaan verkkojen kärkien **asteita**, eli kärjestä lähtevien sivujen lukumääriä.

Määritelmä 5.8 (Verkon kärjen aste). Verkon

$$G = (V, E)$$

kärjen $v \in V$ **asteella** $\delta(v)$ tarkoitetaan kärjen v sisältävien verkon G sivujen lukumäärää, eli

$$\delta(v) = |\{e \in E : v \in e\}|.$$



Kuva 5.7: Esimerkki erään verkon kärkien asteista.

5.3 Liikkuminen verkolla

Aikaisemmissa luvuissa verkkoja on jo havainnollistettu Suomen kartalle piirrettyjen tieverkkojen avulla. Lisäksi luvun 5 alussa Königsbergin siltaongelman yhteydessä tarkasteltiin verkolla liikkumista. Seuraavaksi verkolla liikkumiseen ja siihen liittyvään käsitteistöön perehdytään hieman tarkemmin.

Määritelmä 5.9 (Verkon kävelyt, polut ja kierrokset). Verkon

$$G = (V, E)$$

kävelyksi kutsutaan sellaista verkon G kärkien jonoa

$$(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im}),$$

jossa jokaiset kaksi peräkkäistä kärkeä ovat naapureita keskenään. Kävely sisältää sivun

$$\{v, w\} \in E,$$

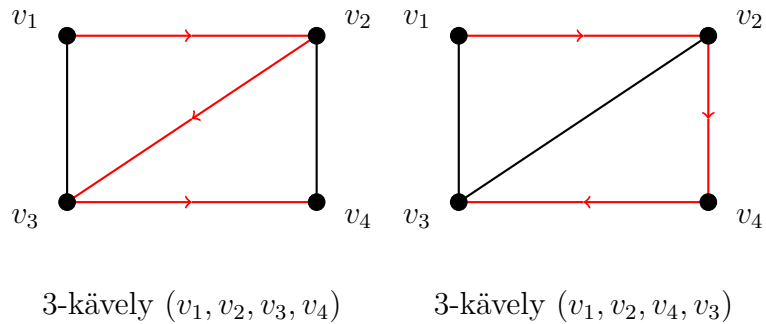
k kertaa, jos kyseistä kävelyä vastaavassa jonossa

$$(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im})$$

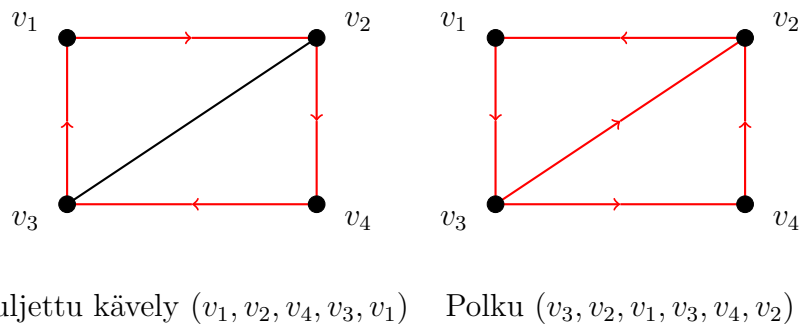
kärjet v ja w esiintyvät peräkkäisinä kärkinä täsmälleen k kertaa. Kävelyä kutsutaan

- **suljetuksi**, jos se lähtee ja päättyy samaan kärkeen.
- **poluksi**, jos se sisältää verkon jokaisen sivun korkeintaan kerran.

- **kierrokseksi**, jos se on suljettu polku.
- **triviaaliksi**, jos siinä on vain yksi kärki.
- **epätriviaaliksi**, jos se ei ole triviaali.



Kuva 5.8: Esimerkki kävelyistä.



Kuva 5.9: Esimerkkejä kierroksista

Huomautus 5.10. Vaikka verkossa ei olisi yhtään sivua, niin siinä on aina olemassa kävely (v) jokaiselle $v \in V$.

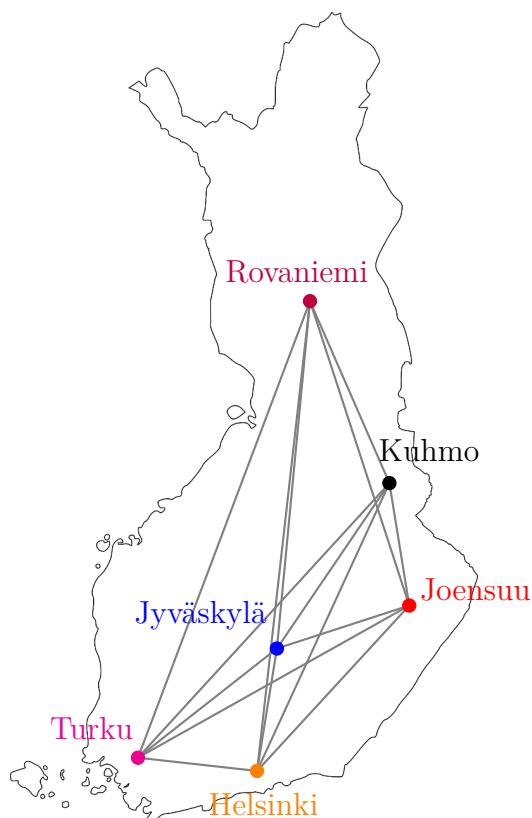
Määritelmä 5.11 (Verkkojen yhtenäisyys). Verkkoa

$$G = (V, E)$$

kutsutaan **yhtenäiseksi**, jos verkon G jokaisen kahden kärjen $v \in V$ ja $w \in V$ välille löytyy ainakin yksi kävely. Verkkoa kutsutaan **epäyhtenäiseksi**, jos se ei ole yhtenäinen.

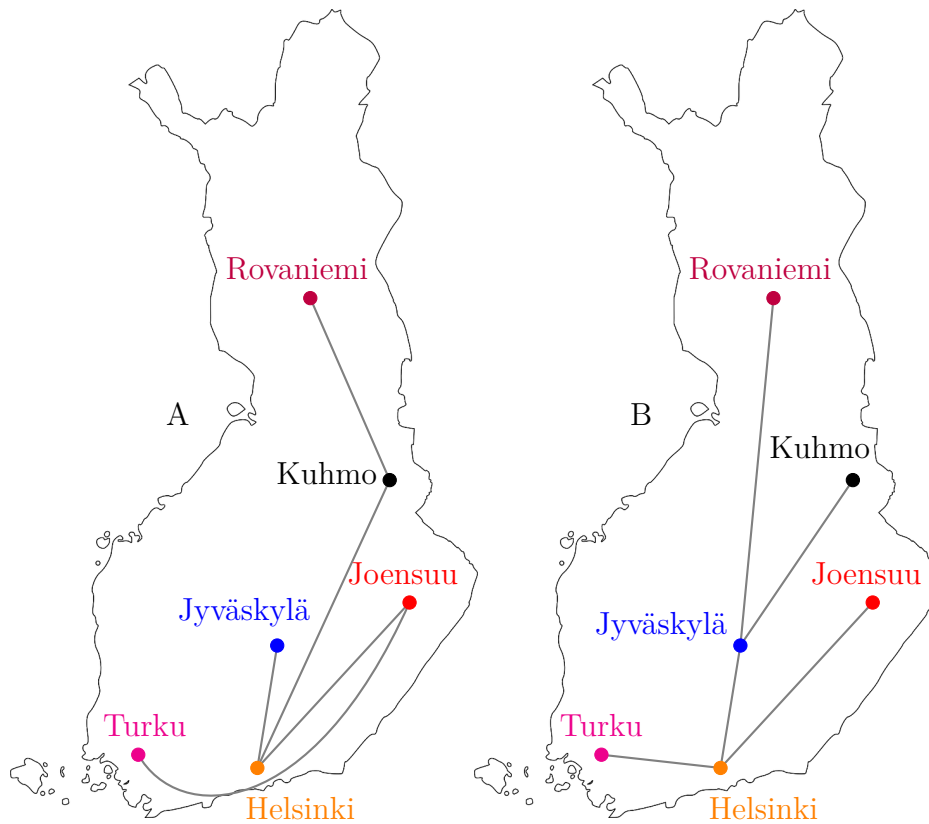
6 Puut

Palataan taas tieverkkoon. Alla olevassa kuvassa 6.1 on eräs esimerkki runsaasti tieyhteyksiä sisältävästä yhtenäisestä tieverkosta. Muodostetaan tieverkolle kaksi erilaista aliverkkoa kuvan 6.2 mukaisesti. Kuvan 6.2 aliverkkoja A ja B yhdistävä ominaisuus on, että ne molemmat ovat pienimpiä mahdollisia alkuperäisen verkon yhtenäisiä aliverkkoja. Tämän kaltaisia aliverkkoja kutsutaan annetun verkon **virittäjäpuiksi**. Tieverkkojen näkökulmasta virittäjäpuuta voidaan pitää pienimpänä kaikki kaupungit yhdistävänä yhtenäisen tieverkon alitieverkkona.



Kuva 6.1: Runsas yhtenäinen tieverkko.

Virittäjäpuuta voidaan pitää erikoistapauksena niin kutsutusta **puusta** eli yhtenäisestä verkosta, jossa ei ole ylimääräisiä reittejä. Tässä yhteydessä ylimääräisellä reitillä tarkoitetaan tieverkon sellaista tieyhteyttä, jonka poistaminen ei tee tieverkosta epäyhtenäistä. Yhtäpitävästi voidaan sanoa, että tieverkolla ei ole määritelmän 5.9 nojalla epätriviaaleja kierroksia.



Kuva 6.2: Kaksi erilaista aliverkkoa tieverkolle.

Määritelmä 6.1 (Puu). Yhtenäistä yksinkertaista verkkoa

$$P = (V, E)$$

kutsutaan **puuksi**, jos siinä ei ole epätriviaaleja kierroksia.

Määritelmä 6.2 (Virittäjäpuu). Olkoon

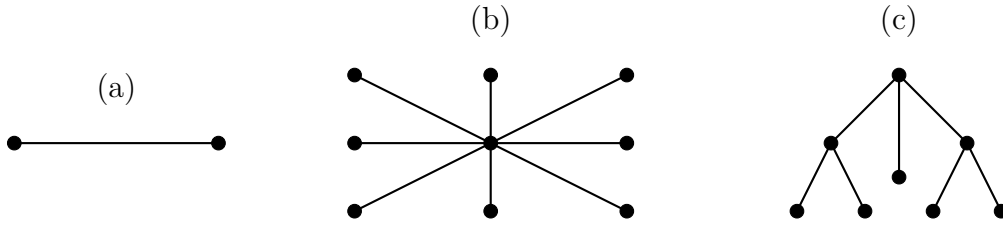
$$G = (V, E)$$

yhtenäinen verkko ja olkoon

$$\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$$

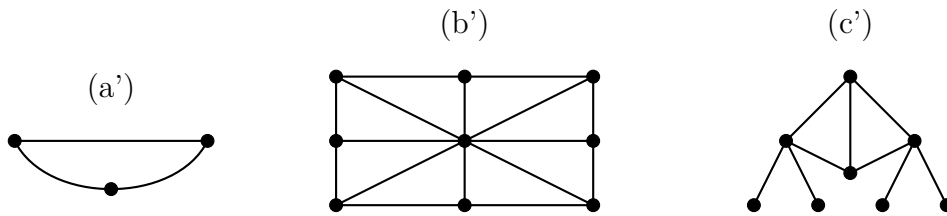
sen jokin aliverkko, joka sisältää kaikki verkon G kärjet ja on puu. Tällöin aliverkkoa \hat{G} kutsutaan **virittäjäpuuksi**. Virittäjäpuu ei ole yksikäsitteinen.

Esimerkki 6.3. *Esimerkiksi seuraavat verkot ovat puita:*



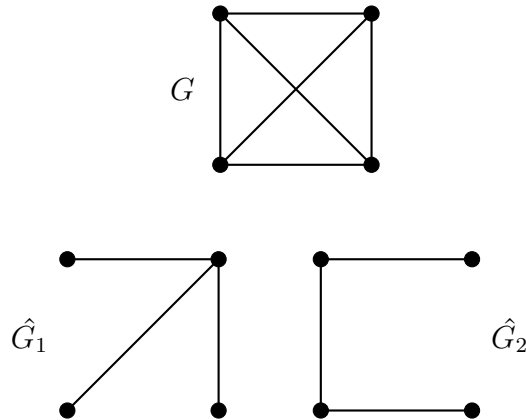
Kuva 6.3: Esimerkkejä verkoista, jotka ovat puita.

Vastaavasti esimerkiksi seuraavat verkot eivät ole puita:



Kuva 6.4: Esimerkkejä verkoista, jotka eivät ole puita.

Esimerkkejä alla olevan verkon G virittäjäpuista:



Kuva 6.5: Kuvassa on kaksi esimerkkiä verkon G virittäjäpuista.

Lemma 6.4. *Jokaisella yhtenäisellä verkolla*

$$G = (V, E)$$

on olemassa virittäjäpuu.

Todistus. Voidaan olettaa, että verkko

$$G = (V, E)$$

ei ole puu, koska muutoin se kelpaa itsensä virittäjäpuuksi. Siispä voidaan olettaa, että verkossa G on sivuja toistamaton epätriviaalikierto K . Poistetaan verkosta G yksi edellä mainitun kierroksen käyttämistä sivuista

$$e = \{v, w\}.$$

Näin saadaan uusi yhtenäinen verkko

$$G_1 = (V, E \setminus \{v, w\}).$$

Verkon G_1 yhtenäisyyden osoittamiseksi näytetään, että mille tahansa kärjelle $x \in V$ löytyy verkon G_1 kävely kärkeen v . Verkon G yhtenäisyyden nojalla tiedetään, että kärjestä x löytyy verkon G sivuja toistamaton kävely K_1 kärkeen v . Tällöin havaitaan kaksi mahdollista tapausta:

- Jos kävely K_1 ei käytä sivua e , niin silloin se käy myös verkon G_1 kärkiä x ja v yhdistäväksi kävelyksi.
- Jos kävely K_1 käyttää sivua e , niin tässä tapauksessa kuljetaan ensin kävelyä K_1 pitkin kärjestä x kärkeen w ja sen jälkeen kierretään kärjestä w kärkeen v kiertäen kierrosta K joko myötä- tai vastapäivään kulkematta sivun e kautta. Näin saadaan määriteltyä verkon G_1 kävely kärjestä x kärkeen v .

Edellä esitettyjen kohtien nojalla verkko G_1 on yhtenäinen ja jos se on lisäksi puu, niin se käy verkon G virittäjäpuuksi. Jos taas verkko G_1 ei ole puu, niin siitä löytyy edelleen epätriviaali kierros, josta poistamalla yhden sivun päädytään edellä kuvatun kaltaisella prosessilla verkkoon G_2 . Toistamalla tätä prosessia riittävän pitkään päädytään lopulta verkon G kaikki kärjet sisältävään yhtenäiseen aliverkkoon G_n , josta yhdenkin sivun poistaminen tekee verkosta epäyhtenäisen. Tämä merkitsee sitä, että verkossa G_n ei ole yhtään epätriviaalia kierrosta, jolloin sen on oltava puu. Erityisesti verkko G_n kelpaa verkon G virittäjäpuuksi.

□

Lemma 6.5. *Jokaiselle puulle*

$$P = (V, E)$$

on voimassa se ominaisuus, että jos puusta poistaa minkä tahansa sivun $e \in E$, niin näin saatu verkko

$$\tilde{P} = (V, E \setminus \{e\})$$

voidaan esittää kahden puun yhdisteenä, joilla ei ole keskenään yhteisiä kärkiä.

Todistus. Todistus noudattaa syksyn 2023 *Johdatus diskreettiin matematiikkaan* -kurssin [20] demotehtävän malliratkaisuiden ideaa.

Olkoon verkko

$$P = (V, E)$$

puu ja verkko

$$\tilde{P} = (V, E \setminus \{e\})$$

sen jokin aliverkko. Olkoon poistettava sivu

$$e = \{x, y\} \in E.$$

Halutaan kaksi puuta

$$P_x = (V_x, E_x) \quad \text{ja} \quad P_y = (V_y, E_y),$$

jotka yhdessä toteuttavat väitteen eli muodostavat aliverkon \tilde{P} :

1) Kärkijoukkojen määrittäminen:

Määritellään kärkien joukon V kaksi osajoukkoa asettamalla

$$V_x := \{v \in V : \text{on olemassa verkon } \tilde{P} \text{ kävely kärjestä } x \text{ kärkeen } v\}$$

ja

$$V_y := V \setminus V_x.$$

Tästä seuraa, että

$$V = V_x \cup V_y \quad \text{ja} \quad V_x \cap V_y = \emptyset.$$

Koska lisäksi $x \in V_x$, niin

$$V_x \neq \emptyset$$

ja toisaalta $y \in V_y$, koska jos näin ei olisi, niin olisi olemassa verkon \tilde{P} kävely

$$K_{x,y} := (x, \dots, y)$$

ja löytyisi erityisesti puun P epätriviaali kierros

$$K_{x,x} := (x, \dots, y, x),$$

mikä on ristiriidassa puun määritelmän kanssa.

2) Joukon V_y vaihtoehtoinen esitys:

Todistuksen myöhempien kohtien helpottamiseksi osoitetaan, että

$$V_y := \{v \in V : \text{on olemassa verkon } \tilde{P} \text{ kävely kärjestä } y \text{ kärkeen } v\}.$$

Todistetaan seuraavaksi inklusiot molempiin suuntiin:

“ \subset ”: Jos

$$v \in V_y := V \setminus V_x,$$

niin olkoon tällöin

$$K_{y,v} = (y, \dots, v)$$

puun P lyhin kävely kärjestä y kärkeen v . Oletuksen $v \in V_y$ nojalla tähän kävelyyn ei voi sisältyä sivua $\{x, y\}$, koska muutoin kävelyn $K_{y,x}$ määritelmän nojalla sivua $\{x, y\}$ käytettäisiin vain ja ainoastaan kävelyssä $K_{y,v}$ alussa:

$$K_{y,v} = (y, x, \dots, v).$$

Tällöin poistamalla ensimmäisen askeleen kävelystä $K_{y,v}$ päädyttäisiin verkon \tilde{P} kävelyyn

$$K_{x,v} = (x, \dots, v)$$

kärjestä x kärkeen v ja tämä on ristiriidassa oletuksen $v \in V \setminus V_x$ kanssa. Tämä todistaa ensimmäisen suunnan inklusiosta.

“ \supset ”: Oletetaan seuraavaksi, että

$$v \in \{v \in V : \text{on olemassa verkon } \tilde{P} \text{ kävely kärjestä } y \text{ kärkeen } v\}.$$

Nyt löytyy ainakin yksi verkon \tilde{P} kävely

$$K_{v,y} = (v, \dots, y)$$

kärjestä v kärkeen y . Jotta nyt löytyisi verkon \tilde{P} kävely kärjestä x kärkeen v , niin löytyisi myös puun P epätriviaali kierros

$$K_{x,x} = (x, \dots, v, \dots, y, x)$$

ja tämä on ristiriidassa puun määritelmän kanssa. Siispä $v \in V \setminus V_x$. Tämä todistaa toisen suunnan inklusiosta.

3) Sivujoukkojen määrittäminen:

Määritellään seuraavaksi sivujen joukon $E \setminus \{e\}$ kaksi osajoukkoa

$$E_x := \{\{v, w\} \in E \setminus \{e\} : v, w \in V_x\} \quad \text{ja} \quad E_y := (E \setminus \{e\}) \setminus E_x.$$

Nyt huomataan, että

$$E \setminus \{e\} = E_x \cup E_y \quad \text{ja} \quad E_x \cap E_y = \emptyset.$$

Lisäksi huomataan, että jos $\{v, w\} \in E_y$, niin tällöin

$$v \in V_y \quad \text{ja} \quad w \in V_y,$$

ja jos näin ei olisi, niin voitaisiin olettaa, että

$$v \in V_x \quad \text{ja} \quad w \in V_y.$$

Näin ollen kärkijoukkojen V_x ja V_y määritelmien nojalla löytyisi verkon \tilde{P} kävelyt

$$K_{x,v} = (x, \dots, v) \quad \text{ja} \quad K_{w,y} = (w, \dots, y).$$

Tämän seurauksena voitaisiin muodostaa epätriviaali kierros

$$K_{x,x} = (x, \dots, v, w, \dots, y, x)$$

puulle P ja tämä on ristiriidassa puun määritelmän kanssa.

4) Aliverkkojen määrittäminen:

Olkoon

$$P_x = (V_x, E_x) \quad \text{ja} \quad P_y = (V_y, E_y).$$

Nyt aiempien kohtien (1)–(3) perusteella saadaan, että verkot P_x ja P_y ovat verkon \tilde{P} aliverkkoja, joiden yhdisteenä saadaan koko verkko \tilde{P} ja joiden kärkijoukot V_x ja V_y ovat erillisiä.

5) Muodostettujen aliverkkojen yhtenäisyys:

Riittää osoittaa, että verkko P_x on yhtenäinen, sillä verkon P_y yhtenäisyys saadaan vastaavasti kohdan (2) nojalla. Verkon P_x yhtenäisyyden osoittamiseksi näytetään, että sen mielivaltaisten kärkien

$$v \in V_x \quad \text{ja} \quad w \in V_x$$

välille löytyy verkon P_x kävely. Joukon V_x määritelmän nojalla löytyy verkon \tilde{P} kävelyt

$$K_{v,x} = (v, \dots, x) \quad \text{ja} \quad K_{x,w} = (x, \dots, w),$$

joten liittämällä nämä kävelyt yhteen, saadaan muodostettua verkon \tilde{P} kävely

$$K_{v,w} = (v, \dots, x, \dots, w)$$

kärjestä v kärkeen w . Lisäksi tämän kävelyn jokaisen kärjen z täytyy olla joukon V_x kärki, koska pienellä lisätyöllä voitaisiin muodostaa puuhun P epätriviaali kierros

$$K_{x,x} = (x, \dots, z, \dots, y, \dots, x).$$

Aiempien kohtien (1)–(4) perusteella kävelyn $K_{v,w}$ sivut ovat välttämättä sivuja verkosta P_x . Näin ollen verkon P_x mielivaltaisten kärkien välille löydettiin kävely ja verkon P_x on välttämättä yhtenäinen.

6) Muodostetut aliverkot ovat puita:

Osoitetaan, että aliverkko P_x on puu. Aiemmin saatiin, että P_x on yhtenäinen, eli osoitetaan seuraavaksi, että verkossa P_x ei ole epätriviaaleja kierroksia. Jos verkossa P_x olisi epätriviaali kierros K , niin myös puussa P olisi tämä sama epätriviaali kierros ja tämä on ristiriidassa puun määritelmän kanssa. Siispä P_x on puu. Aliverkon P_y todistus etenee vastaavasti.

□

Lause 6.6 (Puiden karakterisaatio). *Olkoon*

$$P = (V, E)$$

yhtenäinen verkko. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (a) *P on puu.*
- (b) *Verkon P jokaista kahta kärkeä yhdistää täsmälleen yksi polku.*
- (c) *Jos verkosta P poistaa minkä tahansa sivun, niin siitä tulee epäyhtenäinen.*
- (d) *Verkon P kärjille ja sivuille on voimassa $|E| = |V| - 1$.*

Todistus. “(a) \Rightarrow (b)” : Todistetaan väite antiteesillä olettamalla, että kärjestä v kärkeen \hat{v} on olemassa vähintään kaksi eri polkua. Olkoot nämä verkon P polut

$$\gamma_1 := (v_1 = v, v_2, \dots, v_n = \hat{v}) \quad \text{ja} \quad \gamma_2 := (w_1 = v, w_2, \dots, w_m = \hat{v}).$$

Koska γ_1 ja γ_2 ovat kärkiä v ja \hat{v} yhdistäviä eri polkuja, niin on olemassa pienin indeksi $i_0 \geq 2$ siten, että

$$v_{i_0} \neq w_{i_0}$$

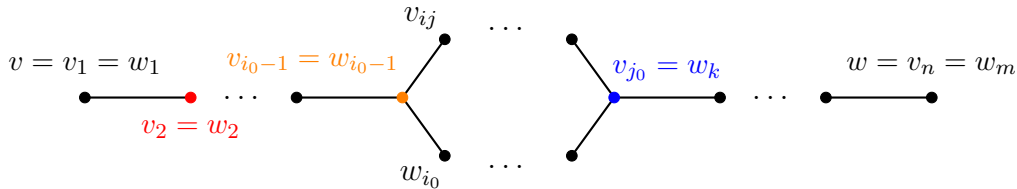
ja pienin indeksi $j_0 \geq i_0$ siten, että

$$v_{j_0} = w_k, \quad \text{jollekin } k \geq i_0 + 1.$$

Siispä polku

$$\gamma = (v_{i_0-1}, \dots, v_{j_0} = w_k, w_k, w_{k-1}, \dots, w_{i_0+1}, w_{i_0}, w_{i_0-1} = v_{i_0-1})$$

määritteli epätriviaalin kierroksen puuhun P , mikä on ristiriidassa puun määritelmän kanssa.



Kuva 6.6: Esimerkki tapauksessa “(a) \Rightarrow (b)” muodostuvasta verkosta P .

“(b) \Rightarrow (c)” : Todistetaan väite antiteesillä olettamalla, että verkosta

$$P = (V, E)$$

löytyy sivu $e \in E$ siten, että myös verkko

$$\tilde{P} = (V, E \setminus \{e\})$$

on yhtenäinen. Merkitään

$$e = \{v, w\}.$$

Tällöin verkon \tilde{P} yhtenäisyyden nojalla on olemassa kärkiä v ja w yhdistävä polku

$$\gamma = (v_1 = v, v_2, \dots, v_n = w).$$

Tällöin polut

$$\eta = (v, w) \quad \text{ja} \quad \gamma = (v_1 = v, v_2, \dots, v_n = w)$$

muodostavat alkuperäisen verkon P kaksi eri polkua kärkien v ja w välille. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joka sanoo, että verkon P jokaista kahta kärkeä yhdistää täsmälleen yksi polku.

“(c) \Rightarrow (a)” : Todistetaan väite antiteesillä olettamalla, että verkko

$$P = (V, E)$$

ei ole puu. Tällöin verkossa P on olemassa epätriviaali, sivuja toistamaton, kierros

$$\gamma = (v = v_1, v_2, \dots, v_n = v).$$

Tarkastellaan verkkoa

$$\tilde{P} = (V, E \setminus \{v_1, v_2\}),$$

joka on oletuksen nojalla epäyhtenäinen. Tällöin löytyy kärjet

$$z_1 \in V \quad \text{ja} \quad z_2 \in V,$$

joiden välille ei löydy verkon \tilde{P} kävelyä. Verkon P yhtenäisyyden nojalla on kuitenkin olemassa verkon P kävely

$$\eta = (\hat{v}_1 = z_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_m = z_2),$$

jonka on sisällettävä sivu (v_1, v_2) . Nimeämällä kärjet v_1 ja v_2 uudestaan, voidaan olettaa, että

$$v_1 = \hat{v}_{i_0} \quad \text{ja} \quad v_2 = \hat{v}_{i_0+1},$$

jollekin indeksille $i_0 = 1, \dots, m$. Tällöin kuitenkin kävely

$$\nu = (\hat{v}_1 = z_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_{i_0} = v_1 = v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_2 = \hat{v}_{i_0+1}, \hat{v}_{i_0+2}, \dots, \hat{v}_m = z_2)$$

muodostaa verkon \tilde{P} kävelyn kärkien z_1 ja z_2 välille. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, että kärkien z_1 ja z_2 välillä.

“(a) \Rightarrow (d)” : Todistetaan väite induktiolla kärkien lukumäärän suhteen:

Alkuaskel: Jos $|V| = 1$, niin verkossa ei ole yhtään sivua, eli

$$|E| = 0 = 1 - 1 = |V| - 1,$$

ja väite pätee.

Induktio-oletus: Oletetaan, että väite pätee, kun sivuja on n kappaletta eli $|E| = n$, jolloin pätee

$$|E| = |V| - 1.$$

Induktioaskel: Olkoon puussa

$$P = (V, E)$$

$n + 1$ kärkeä ja poistetaan verkosta yksi sivu. Nyt verkko P on jakautunut Lemman 6.5 nojalla kahteen erilliseen puuhun

$$P_1 = (V_1, E_1) \quad \text{ja} \quad P_2 = (V_2, E_2),$$

joilla ei ole yhteisiä kärkiä. Koska edellä poistettiin yksi sivu, mutta ei yhtään kärkeä, niin pätee

$$|V_1| + |V_2| = |V| \quad \text{ja} \quad |E_1| + |E_2| = |E| - 1.$$

Lisäksi soveltamalla induktio-oletusta puihin P_1 ja P_2 saadaan

$$|E_1| = |V_1| - 1 \quad \text{ja} \quad |E_2| = |V_2| - 1.$$

Yhdistämällä yllä olevat identiteetit saadaan

$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = (|V_1| + |V_2|) - 1 = |V| - 1,$$

mistä väite seuraa.

“(d) \Rightarrow (a)” : Oletetaan, että yhtenäiselle verkolle

$$P = (V, E)$$

pätee $|E| = |V| - 1$. Tällöin Lemman 6.4 nojalla verkolle P on olemassa virittäjäpuu

$$\tilde{P} = (\tilde{V}, \tilde{E}).$$

Koska \tilde{P} on verkon P virittäjäpuu, niin

$$\tilde{V} = V \quad \text{ja} \quad \tilde{E} \subset E,$$

Jos verkko P ei ole puu, niin on välttämättä oltava

$$|E| \geq |\tilde{E}| + 1.$$

Nyt saadaan

$$|V| = |\tilde{V}| = |\tilde{E}| + 1 \leq |E|,$$

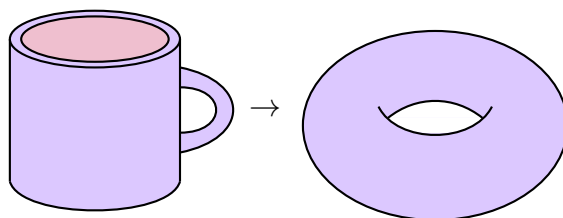
mikä on ristiriidassa oletuksen $|E| = |V| - 1$ kanssa.

□

Kohdan d) identiteetti on ikään kuin Eulerin kaava 9.1 puille.

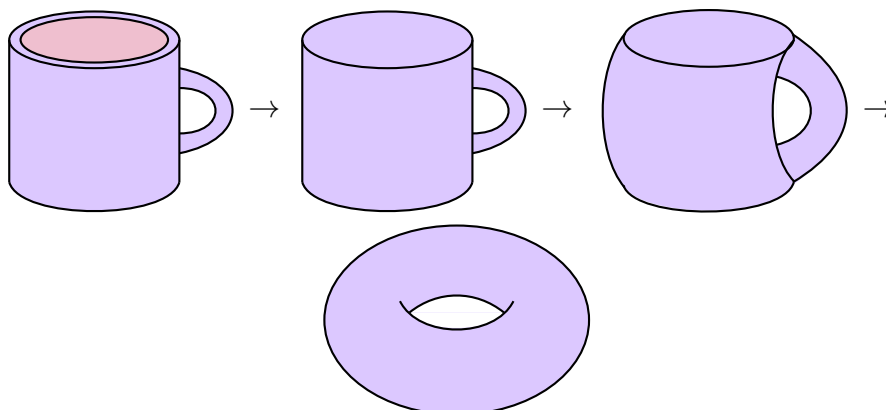
7 Tason topologiaa

Verkkojen avulla voidaan tutkia kappaleiden **homeomorfsuuteen** liittyviä kysymyksiä. Kappaleiden homeomorfsuutta voidaan pitää topologian kaikkein keskeisimpänä käsitteenä ja intuitiivisella tasolla kahden kappaleen sanotaan olevan homeomorfsia, jos ne ovat tietyssä mielessä muodoiltaan samoja. Tarkemmin sanottuna topologisessa mielessä kappaleiden ajatellaan olevan samanlaisia, jos niiden välille löytyy **homeomorfinen kuvaus**. Myöhemmin luvussa 10 tullaan havaitsemaan, että tarkastelemalla verkkoja eri pinnoilla, voidaan tutkia pintojen välistä homeomorfsuutta. Matemaattisen topologian tutkimushaaran ajatellaan yleisesti syntyneen tämän kaltaisten verkkoteorian kysymyksien tarkastelujen seurauksina. Yleinen esimerkki kahdesta homeomorfsista kappaleista on kahvikuppi ja torus, eli ontto rinkieli.



Kuva 7.1: Kahvikuppi ja torus.

Kahvikupista saadaan torus täyttämällä kuppi täyteen ja sen jälkeen muovaamalla kahvaa paksummaksi ja kuppia ohuemmaksi.



Kuva 7.2: Kahvikupista torukseksi.

Koska kahvikuppi voidaan muotoilla torukseksi ja toisinpäin, niin topologisesti ne ovat samat.

Määritelmä 7.1 (Homeomorfinen kuvaus). Jatkuvaa bijektiota

$$f : A \rightarrow B.$$

kutsutaan **homeomorfiseksi kuvaukseksi**, jos myös sen käänteiskuvaus

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

on jatkuva.

Määritelmä 7.2 (Verkkojen homeomorfisuus). Verkon

$$G = (V, E)$$

sanotaan olevan **homeomorfinen** verkon

$$\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$$

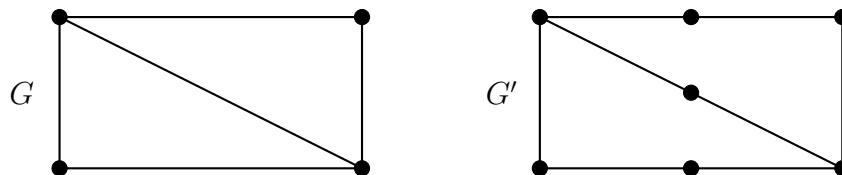
kanssa, jos on olemassa verkko

$$H = (V, E),$$

jolle pätee ehdot:

- 1) Lisäämällä kaksiasteisia apukärkiä verkkoon H , saadaan verkon G kanssa isomorfinen verkko G' .
- 2) Lisäämällä kaksiasteisia apukärkiä verkkoon H , saadaan verkon \hat{G} kanssa isomorfinen verkko \hat{G}' .

Alla olevassa kuvassa 7.3 verkko G' on saatu lisäämällä verkkoon G kolme kaksiasteista apukärkeä.



Kuva 7.3: Esimerkki verkosta G , johon on lisätty kolme kaksiasteista apukärkeä.

Määritelmä 7.3 (Stereografinen projektio). Niin kutsutulla **stereografisella projektioilla** tarkoitetaan homeomorfista kuvausta

$$P : \overline{\mathbb{R}^2} \rightarrow S^2\left(\frac{e_3}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad P(x) = e_3 + \frac{x - e_3}{|x - e_3|^2},$$

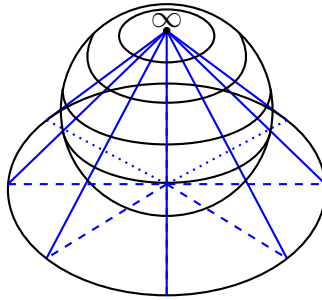
joka kuvaa kolmiulotteiseen euklidiseen avaruuteen upotetun jatkettun laajennetun tason

$$\overline{\mathbb{R}^2} := \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{R}^3$$

pallopinnaksi

$$S^2\left(\frac{e_3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - \frac{e_3}{2}| = \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}^3,$$

missä $e_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ ja merkinnällä $|z|$ tarkoitetaan pisteen $z \in \mathbb{R}^3$ tavanomaista euklidista normia. Stereografinen projektio määrittelee itse itsensä käänteiskuvauksen, katso kuva 7.4.



Kuva 7.4: Stereografinen projektio.

Lause 7.4 (Jordanin käyrälause). *Olkoon*

$$f : S^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

jatkuva injektio. Tällöin kuvajoukko

$$\Gamma = f(S^1(0, 1))$$

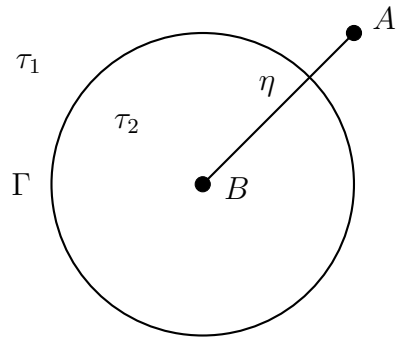
jakaa tason kahteen yhtenäiseen tasoalueeseen τ_1 ja τ_2 siten, että

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = \tau_1 \cup \tau_2,$$

missä A on rajoitettu yhdesti yhtenäinen alue ja B on rajoittamaton tasoalue. Lisäksi

$$\partial\tau_1 = \Gamma = \partial\tau_2.$$

Erityisesti, jokainen annettuja pisteitä $A \in \tau_1$ ja $B \in \tau_2$ yhdistävä tasokäyrä η leikkaa käyrää Γ .



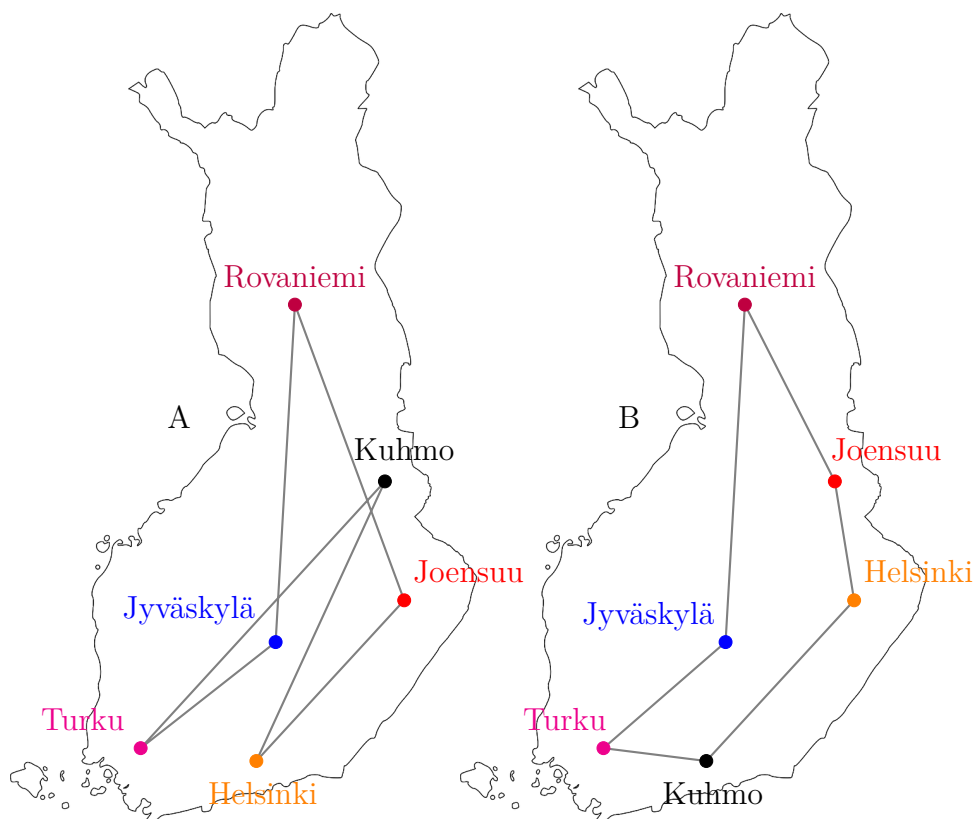
Kuva 7.5: Jordanin käyrälause.

Todistus. Katso [7, Lause 7.10] tai [22].

□

8 Tasoverkot

Kuvassa 8.1 on piirretty aiemmin luvussa 5.2 nähdyt isomorfiset tieverkot. Tieverkosta B nähdään, että sen mitkään tiet eivät leikkaa toisiaan. Koska tieverkot A ja B ovat isomorfisia, siirtelemällä tieverkon A kaupunkeja se voidaan piirtää uudestaan siten, että sen tiet eivät leikkaa toisiaan, katso kuva 8.1.



Kuva 8.1: Isomorfiset tieverkot piirrettynä kahdella eri tavalla.

Edellä tehty tieverkkojen A ja B tarkastelu johtaa niin kutsuttujen tasoverkkojen käsitteisiin.

Määritelmä 8.1 (Tasoverkko). Verkko

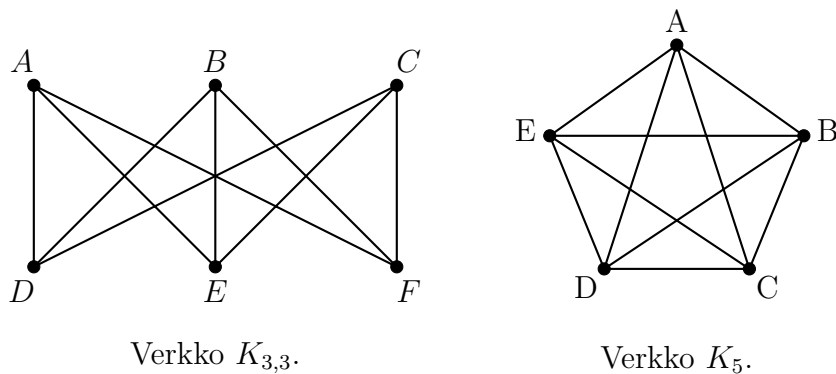
$$G = (V, E)$$

on **tasoverkko**, jos se voidaan piirtää tasoon siten, että sen sivut eivät leikkaa muuten kuin sivujen lähtö- ja päätepisteissä. **Tasoesitykseksi** kutsutaan

geometristä esitystä, jossa tasoverkko piirretään tasoon siten, että sen sivut eivät leikkaa toisiaan. Tasoverkon tasoesitys jakaa tason yhtenäisiin alueisiin, joita kutsutaan verkon **tahkoiksi**. Verkon tahkojen joukosta käytetään merkintää F .

Jos verkko on isomorfinen tasoon piirretyn itseään leikkaamattoman verkon kanssa, niin se on tasoverkko. On siis mahdollista, että on olemassa verkko, joka on piirretty siten, että sen sivut leikkaavat, mutta se voidaan piirtää myös ilman, että sen sivut leikkaavat. Kuvassa 5.6 on esimerkki isomorfisista verkoista, joista toinen on piirretty niin, että sivut leikkaavat ja toinen niin, että ne eivät leikkaa eli kyseisen tasoverkon tasoesityksellä.

Kuvassa 8.1 on kaksi tieverkkoa, jotka ovat isomorfisia ja toinen niistä on selkeästi tasoverkko, jolloin isomorfisuuden nojalla molemmat ovat tasoverkkoja. Ei siis välttämättä voida suoraan kuvasta päätellä, onko verkko tasoverkko vai ei, sillä kärkiä siirtämällä voi olla mahdollista muuttaa verkkoa niin, että sen sivut eivät leikkaa. Tässä luvussa tullaan huomaamaan, että kaikki verkot eivät ole tasoverkkoja. Jotta tämä voidaan todistaa, tarvitaan verkko, josta tiedetään varmaksi, ettei se ole tasoverkko. Tällaisia verkkoja ovat esimerkiksi **Kuratowskin verkot** $K_{3,3}$ ja K_5 , jotka löytyvät kuvasta 8.2. Todistetaan ensimmäiseksi, miksi $K_{3,3}$ ei ole tasoverkko.



Kuva 8.2: Verkot $K_{3,3}$ ja K_5 .

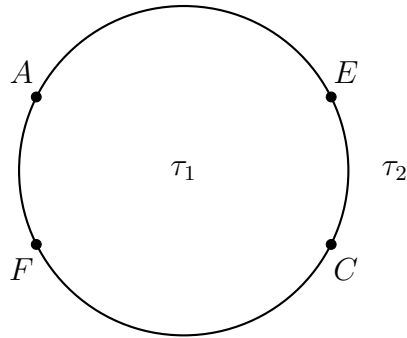
Lause 8.2. *Verkko $K_{3,3}$ ei ole tasoverkko.*

Todistus. Tehdään antiteesi olettamalla, että $K_{3,3}$ on tasoverkko. Olkoon

$$G = (V, E)$$

verkon $K_{3,3}$ tasoesitys, jolloin sen kärkien A, E, F ja C välisien sivu-
juje voidaan

olettaa muodostavan kuvan 8.3 kaltaisen suljetun Jordan-käyrän γ . Tämä Jordan-käyrä jakaa tason kahteen yhtenäiseen tasoalueeseen τ_1 ja τ_2 , joista tahkon τ_2 oletetaan olevan rajoittamaton.



Kuva 8.3: Verkon $K_{3,3}$ aliverkko.

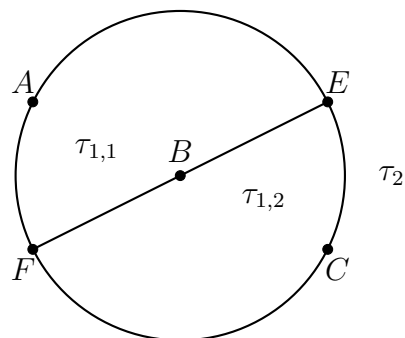
Seuraavaksi voidaan olettaa, että kärki B kuuluu γ rajoittaman alueen τ_1 sisäpuolelle. Jos näin ei ole, niin soveltamalla homeomorfismia

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|^2},$$

jolle on voimassa

$$f(\tau_1) = f(\tau_2) \quad \text{ja} \quad f(\tau_2) = f(\tau_1),$$

saadaan kärki B pakotettua Jordan-käyrän γ rajoittaman alueen sisälle. Lisäksi yksinkertaisuuden vuoksi voidaan olettaa, että kärki B vastaa piirretyn ympyrän keskipistettä siirtämällä sitä hieman alkuperäisessä kuvassa.



Kuva 8.4: Verkon $K_{3,3}$ aliverkko.

Sivut (F, B) ja (E, B) jakavat suljetun Jordan-käyrän γ sisäpuolen kahteen tahkoon $\tau_{1,1}$ ja $\tau_{1,2}$, missä Jordan-käyrä (A, F, B, E, A) rajaa tahkoa $\tau_{1,1}$ ja (E, B, F, C, E) rajaa tahkoa $\tau_{1,2}$, katso kuva 8.4. Tällöin havaitaan kolme eri tapausta sen mukaan, missä verkon viimeinen kärki D sijaitsee suhteessa edellä mainittuihin suljettuihin Jordan käyriin.

- 1) Jos kärki D on tahkon $\tau_{1,1}$ sisällä, niin Jordanin käyrälauseen 7.4 nojalla sivu (D, C) leikkaa välttämättä suljettua Jordan-käyrää (E, B, F, C, E) .
- 2) Jos kärki D on tahkon $\tau_{1,2}$ sisällä, niin Jordanin käyrälauseen 7.4 nojalla sivu (D, A) leikkaa välttämättä suljettua Jordan-käyrää (A, F, B, E, A) .
- 3) Jos kärki D on tahkolla τ_2 , niin tällöin edelleen Jordanin käyrälauseen 7.4 nojalla sivu (D, B) leikkaa välttämättä suljettua Jordan-käyrää (A, F, C, E, A) eli käyrää γ .

Näin ollen verkko $K_{3,3}$ ei voi olla tasoverkko, koska sitä ei voida piirtää tasoon ilman, että sen sivut leikkaavat.

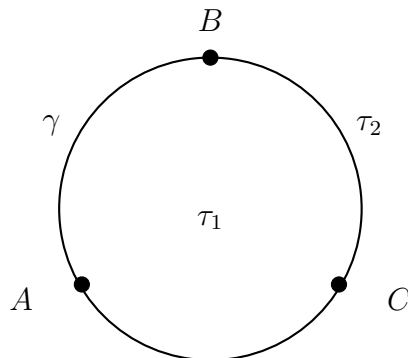
□

Lause 8.3. Verkko K_5 ei ole tasoverkko.

Todistus. Tehdään antiteesi olettamalla, että verkko K_5 on tasoverkko. Olkoon

$$G = (V, E)$$

verkon K_5 tasoesitys, jolloin sen kärkien A, B, C ja A välisien sivujen voidaan olettaa muodostavan kuvan 8.5 kaltaisen suljetun Jordan-käyrän γ .



Kuva 8.5: Verkon K_5 aliverkko.

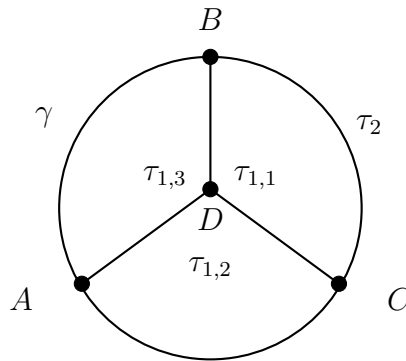
Tämä Jordan-käyrä jakaa tason kahteen yhtenäiseen tasoalueeseen τ_1 ja τ_2 , joista tahkon τ_2 oletetaan olevan rajoittamaton. Seuraavaksi voidaan olettaa, että kärki D kuuluu γ rajoittaman alueen τ_1 sisäpuolelle. Jos näin ei ole, niin soveltamalla homeomorfismia

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|^2},$$

jolle on voimassa

$$f(\tau_1) = f(\tau_2) \quad \text{ja} \quad f(\tau_2) = f(\tau_1),$$

saadaan kärki D pakotettua Jordan-käyrän γ rajoittaman alueen sisälle. Lisäksi yksinkertaisuuden vuoksi voidaan olettaa, että kärki D vastaa piirretyn ympyrän keskipistettä siirtämällä sitä hieman ympyrän määräämän rajoitetun alueen sisällä.



Kuva 8.6: Verkon K_5 aliverkon rajaamat tasoalueet.

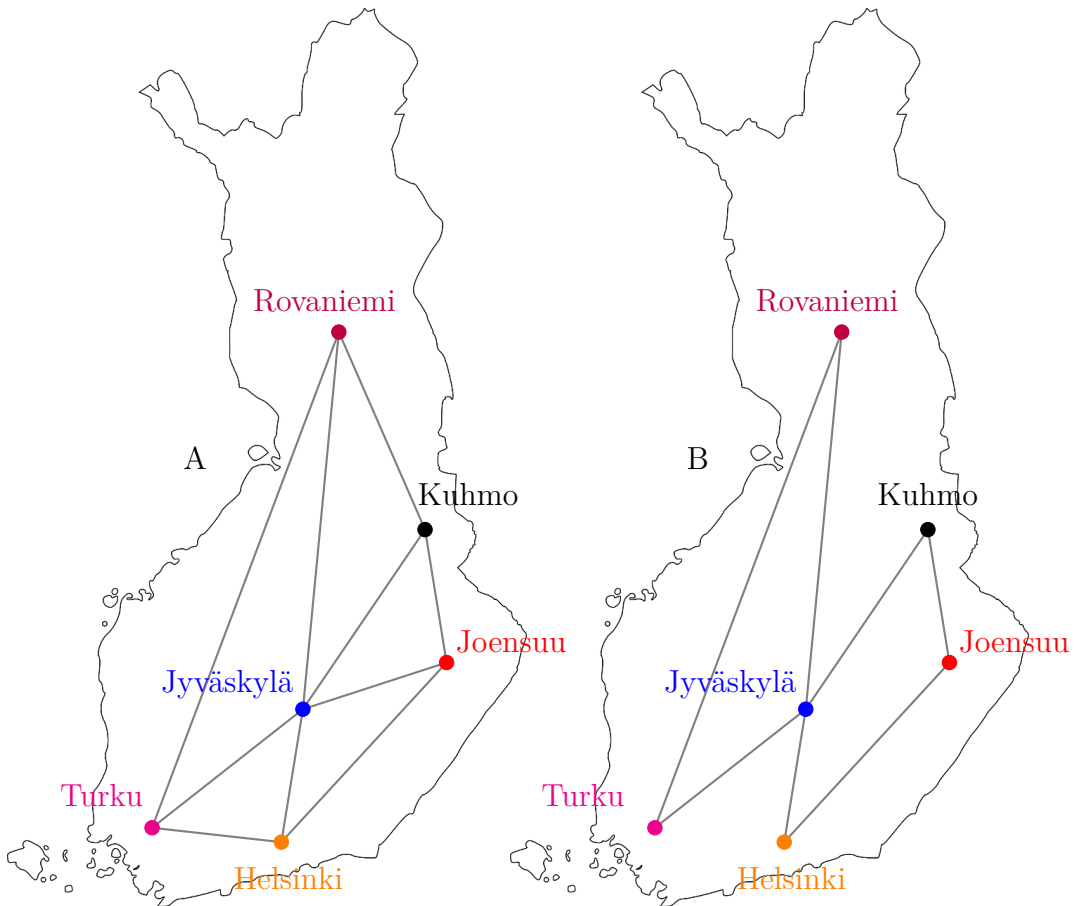
Sivut (A, D) , (B, D) ja (C, D) jakavat suljetun Jordan-käyrän γ sisäpuolen kolmeen tahkoon $\tau_{1,1}$, $\tau_{1,2}$ ja $\tau_{1,3}$, missä Jordan-käyrä (B, C, D, B) rajaa tahkoa $\tau_{1,1}$, käyrä (A, D, C, A) rajaa tahkoa $\tau_{1,2}$ ja käyrä (A, B, D, A) rajaa tahkoa $\tau_{1,3}$, katso kuva 8.6. Tällöin havaitaan neljä eri tapausta sen mukaan, missä verkon viimeinen kärki E sijaitsee suhteessa edellä mainittuihin suljettuihin Jordan käyriin.

- 1) Jos kärki E on tahkon $\tau_{1,1}$ sisällä, niin Jordanin käyrälauseen 7.4 nojalla sivu (A, E) leikkaa välttämättä suljettua Jordan-käyrää (B, C, D, B) .
- 2) Jos kärki E on tahkon $\tau_{1,2}$ sisällä, niin Jordanin käyrälauseen 7.4 nojalla sivu (B, E) leikkaa välttämättä suljettua Jordan-käyrää (A, D, C, A) .

- 3) Jos kärki E on tahkon $\tau_{1,3}$ sisällä, niin Jordanin käyrälauseen 7.4 nojalla sivu (C, E) leikkaa välttämättä suljettua Jordan-käyrää (A, B, D, A) .
- 4) Jos kärki E on tahkolla τ_2 , niin tällöin edelleen Jordanin käyrälauseen 7.4 nojalla sivu (D, E) leikkaa välttämättä suljettua Jordan-käyrää (A, B, C, A) eli käyrää γ .

Näin ollen verkko K_5 ei voi olla tasoverkko, koska sitä ei voida piirtää tasoon ilman, että sen sivut leikkaavat.

□



Kuva 8.7: Kartalla B on tieverkon A aliverkko.

Kuvassa 8.7 on annettu tasoverkko A ja sen eräs aliverkko B. Kuvasta katsottuna on ilmeistä, että verkon A tasoverkko-ominaisuus periytyy myös aliverkolle B. Tämä havainto on sisällytetty seuraavaan lauseeseen.

Lause 8.4. *Jokainen tasoverkon aliverkko on tasoverkko.*

Todistus. Olkoon

$$G = (V, E)$$

mikä tahansa tasoverkko ja olkoon

$$\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$$

sen jokin aliverkko. Oletetaan, että

$$G_T = (V_T, E_T)$$

on verkon G jokin tasoesitys ja olkoon

$$f : V \rightarrow V_T$$

jokin verkkojen G ja G_T välinen isomorfismi. Muodostetaan tasoesityksen G_T aliverkko

$$\hat{G}_T = (\hat{V}_T, \hat{E}_T)$$

asettamalla $\hat{V}_T = f(\hat{V})$ ja

$$\{\hat{v}, \hat{w}\} \in \hat{E}_T \iff \{f^{-1}(\hat{v}), f^{-1}(\hat{w})\} \in \hat{E}.$$

Tällöin isomorfismin f rajoittama kuvaus

$$f|_{\hat{V}} : \hat{V} \rightarrow \hat{V}_T$$

indusoi verkkojen \hat{G} ja \hat{G}_T välisen isomorfismin, joten \hat{G}_T määrittää verkon \hat{G} erään tasoesityksen. Siispä verkko \hat{G} on tasoverkko ja väite seuraa. \square

Aiemmin mainitut verkot $K_{3,3}$ ja K_5 ovat niin kutsuttuja **Kuratowskin verkkoja**.

9 Eulerin ensimmäinen kaava

Tässä luvussa esitellään Eulerin ensimmäinen kaava 9.1, johon kiteytyy tasoverkkojen topologiset ominaisuudet. Eulerin ensimmäistä kaavaa voidaan pitää luvussa 6 havaitun puihin liitetyn kaavan

$$|E| = |V| - 1$$

yleistyksenä. Koska puiden tahkojen lukumäärälle pätee $|F| = 1$, niin edellä annettu kaava voidaan laajentaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} |E| = |V| - 1 &\iff |E| + |F| = |V| - 1 + |F| \\ &\iff |E| + 1 = |V| - 1 + |F| \\ &\iff 2 = |V| - |E| + |F|. \end{aligned}$$

Eulerin ensimmäisen kaavan nojalla edellisen päättelyketjun viimeisellä rivillä näkyvä identiteetti on yleisemmin totta kaikille tasoverkoille.

Lause 9.1 (Eulerin ensimmäinen kaava). *Yhtenäisen tasoverkon*

$$G = (V, E)$$

kärkien, sivujen ja tahkojen lukumäärille on voimassa seuraava identiteetti

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Todistus. Jos yhtenäisessä tasoverkossa

$$G = (V, E)$$

on epätriviaali kierros, niin poistetaan siitä yksi sivu siten, että jäljelle jäävä verkko

$$G_1 = (V_1, E_1)$$

on yhtenäinen tasoverkko, jolla on yksi sivu ja tahko vähemmän, kuin alkuperäisellä verkolla G , katso kuva 9.1. Tällöin huomataan, että

$$|V_1| - |E_1| + |F_1| = |V| - (|E| - 1) + (|F| - 1) = |V| - |E| + |F|,$$

missä

$$|F_1| = \text{"verkon } G_1 \text{ tahkojen lukumäärä"}$$

Jatketaan samoin, kunnes kaikki epätriviaalit kierrokset on poistettu. Tämän seurauksena päädytään lopulta puuhun (katso määritelmä 6.1)

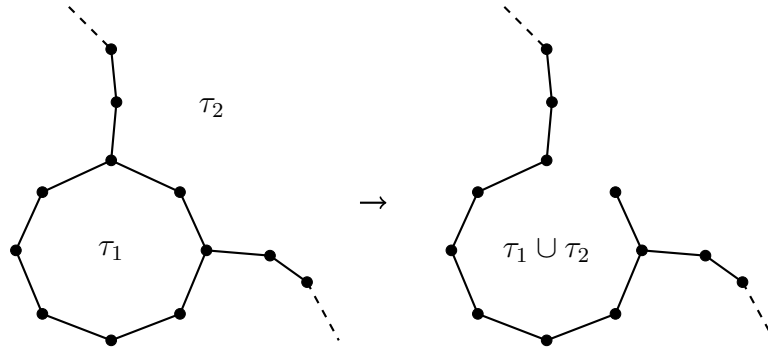
$$G_n = (V_n, E_n),$$

jolle voidaan johtaa vaiheittain vastaavanlainen identiteetti

$$\begin{aligned} |V| - |E| + |F| &= |V_1| - |E_1| + |F_1| \\ &= |V_2| - |E_2| + |F_2| \\ &= \dots \\ &= |V_{n-1}| - |E_{n-1}| + |F_{n-1}| \\ &= |V_n| - |E_n| + |F_n|, \end{aligned} \tag{9.1}$$

missä

$$|F_i| = \text{"verkon } G_i \text{ tahkojen lukumäärä"}$$



Kuva 9.1: Poistetaan sivu tasoverkosta.

Verkko G_n on puu, jolloin siinä on täsmälleen yksi tahko

$$|F_n| = 1. \tag{9.2}$$

Lisäksi puiden karakterisaation 6.6 nojalla

$$|E_n| = |V_n| - 1. \tag{9.3}$$

Nyt yhdistämällä kohdat (9.1)–(9.3) saadaan

$$|V| - |E| + |F| = |V_n| - |E_n| + |F_n| = |V_n| - (|V_n| - 1) + 1 = 2,$$

mistä väite seuraa. □

Luvussa 8 esitetyt lauseet 8.2 ja 8.3 voidaan todistaa myös vaihtoehtoisesti Eulerin kaavaan pohjautuvalla algebrallisella todistuksella, jossa todistuksen topologinen ulottuvuus on piilotettu alla olevaan Eulerin ensimmäiseen kaavaan pohjautuvaan lemmaan, jonka todistus pohjautuu *Johdatus diskreettiin matematiikkaan* -kurssin [20] harjoitustehtävään.

Lemma 9.2. *Olkoon*

$$G = (V, E) \quad (|V| \geq 3)$$

yhtenäinen tasoverkko. Tällöin

a) verkon sivujen lukumäärälle pätee

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

b) jos G ei sisällä kolmioita, eli kierroksia, joiden sivujen lukumäärä on 3, niin silloin sen sivujen lukumäärälle pätee

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

Todistus. a) Voidaan olettaa, että $|E| \geq 3$, sillä muut tapaukset voidaan käsitellä helposti erikseen. Tällöin jokaista tahkoa rajoittaa vähintään kolme sivua, eli

$$|\{e \in E : e \text{ rajoittaa tahkoa } f\}| \geq 3 \quad \text{kaikilla } f \in F.$$

Lisäksi jokainen sivu rajoittaa korkeintaan kahta tahkoa, mistä saadaan summamalla yli kaikkien tahkojen, että

$$\sum_{f \in F} |\{e \in E : e \text{ rajoittaa tahkoa } f\}| \leq 2|E|.$$

Yhdistämällä edelliset arviot, saadaan

$$3|F| \leq \sum_{f \in F} |\{e \in E : e \text{ rajoittaa tahkoa } f\}| \leq 2|E|.$$

Tästä seuraa Eulerin ensimmäisen kaavan

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

nojalla

$$|E| + 2 = |V| + |F| \leq |V| + \frac{2}{3}|E|.$$

Siispä

$$|E| \leq 3(|V| - 2) = |V| - 6,$$

kuten haluttin.

b) Nyt voidaan olettaa, että $|E| \geq 4$, sillä jälleen kerran muut tapaukset voidaan käsitellä helposti erikseen. Koska verkko ei sisällä kolmioita, niin voidaan olettaa, että sen jokaista tahkoa rajaa vähintään neljä sivua. Tällöin a)-kohdan todistuksen kaltainen päättely antaa

$$4|F| \leq \sum_{f \in F} |\{e \in E : e \text{ rajoittaa tahkoa } f\}| \leq 2|E|.$$

Tästä seuraa Eulerin ensimmäisen kaavan

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

nojalla

$$|E| + 2 = |V| + |F| \leq |V| + \frac{2}{4}|E|.$$

Siispä

$$|E| \leq 2(|V| - 2) = 2|V| - 4,$$

kuten haluttin.

□

Esimerkki 9.3. Osoitetaan Lemman 9.2 avulla, että Kuratowskin verkot

$$a) K_5 \quad \text{ja} \quad b) K_{3,3}$$

eivät ole tasoverkkoja.

Todistus. a) Oletetaan, että verkko K_5 on tasoverkko. Tiedetään, että

$$|V| = 5 \quad \text{ja} \quad |E| = 10.$$

Tällöin Lemman 9.2 a)-kohdan nojalla pätee

$$10 = |E| \leq 3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9,$$

mikä ei pidä paikkaansa, joten verkko K_5 ei ole tasoverkko.

b) Oletetaan, että verkko $K_{3,3}$ on tasoverkko. Tiedetään, että

$$|V| = 6 \quad \text{ja} \quad |E| = 9.$$

Nyt, koska tiedetään, että verkko $K_{3,3}$ ei sisällä kolmioita, niin Lemman 9.2 b)-kohdan nojalla pätee

$$9 = |E| \leq 2|V| - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8,$$

mikä ei pidä paikkaansa, joten verkko $K_{3,3}$ ei ole tasoverkko.

□

Verkon tunnistaminen tasoverkoksi voi olla haastavaa ainoastaan Eulerin ensimmäisen kaavan 9.1 ja lemmän 9.3 avulla. Alla oleva Kazimierz Kuratowskin (1896–1980) vuonna 1930 todistama tasoverkkojen karakterisaatiolause antaa kuitenkin hyvin tehokkaan työkalun tasoverkkojen tunnistamiseksi. Kuratowskin lauseen todistuksen helpompi suunta seuraa melko suoraan Eulerin ensimmäisestä kaavasta 9.1, mutta lauseen toisen suunnan todistaminen on huomattavasti haastavampaa.

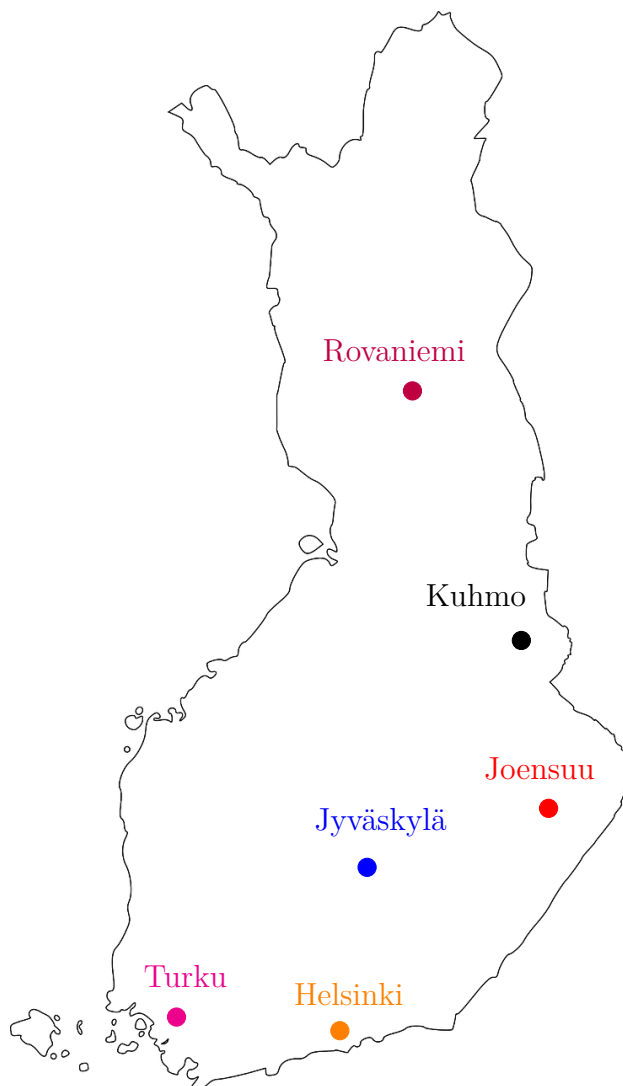
Lause 9.4 (Kuratowskin lause). *Verkko on tasoverkko, jos ja vain jos se ei sisällä aliverkkonaan verkkoa $K_{3,3}$, K_5 tai mitään verkkoa, joka saadaan näistä lisäämällä niihin 2-asteisia apukärkiä.*

Todistus. Katso [11, s. 108–112] tai [13].

□

10 Verkon ja pinnan genus

Kaupunkiongelma. Otetaan tämän luvun alkuun pieni pähkinä purtavaksi tarkastelemalla ongelmaa, jossa kuvan 10.1 kaupungeista Rovaniemi, Jyväskylä ja Turku jokainen halutaan yhdistää Kuhmoon, Joensuuhun ja Helsinkiin niin, että tiet eivät leikkaa muualla kuin teiden lähtö- ja päätekaupungeissa. Tavoitteena on siis löytää taulukon 2 antaman tieverkon ta-soesitys.

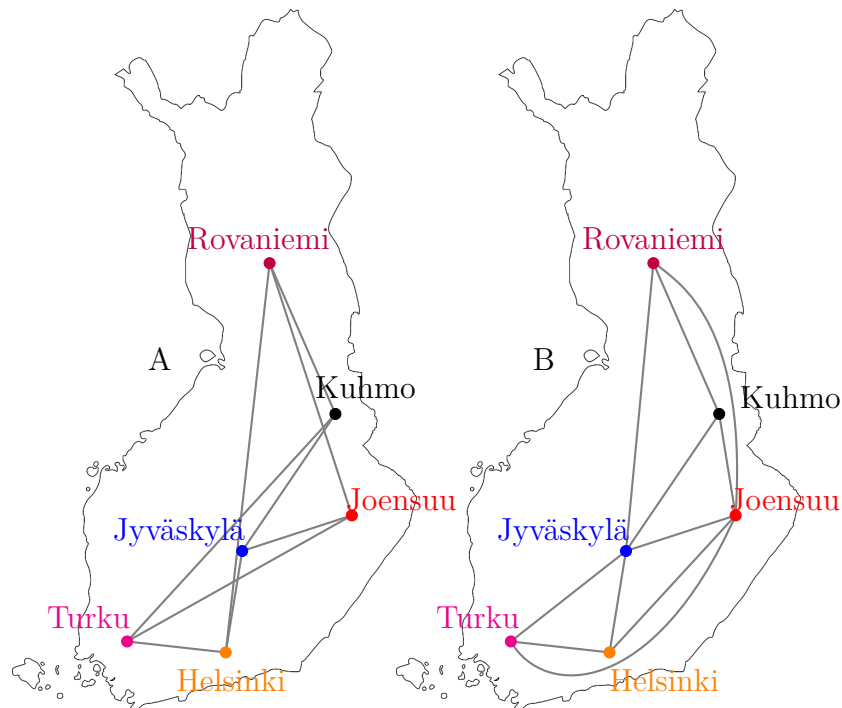


Kuva 10.1: Suomen kartta ja kuusi kaupunkia.

	Rovaniemi	Kuhmo	Joensuu	Jyväskylä	Helsinki	Turku
Rovaniemi		x	x		x	
Kuhmo	x			x		x
Joensuu	x			x		x
Jyväskylä		x	x		x	
Helsinki	x			x		x
Turku		x	x		x	

Taulukko 2: Kaupunkiongelman taulukoituna.

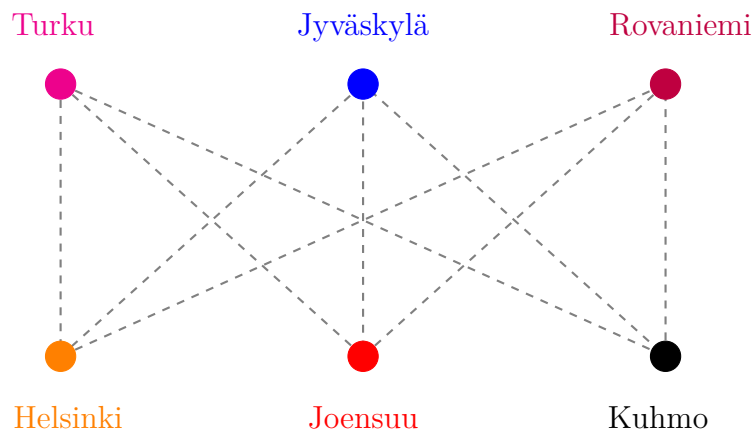
Alla olevassa kuvassa on esitetty kaikki halutut tieyhteydet ja eräs esimerkki, miten osa kaupungeista voidaan yhdistää ilman uusia risteyskäsiä.



Kuva 10.2: Kartalle A on piirretty kaikki halutut tieyhteydet ja kartalle B osa näistä yhteyksistä.

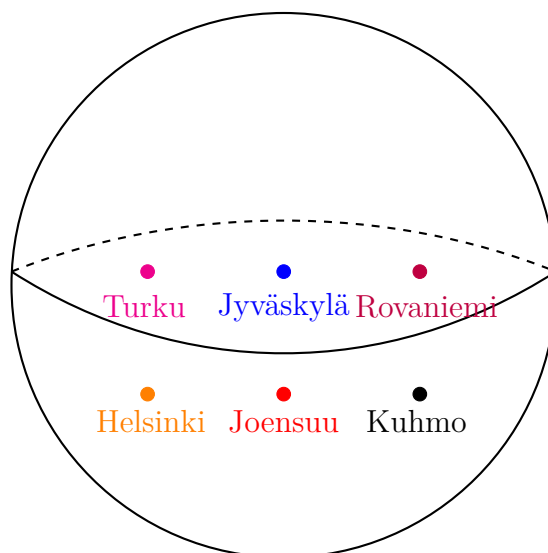
Piirretään seuraavaksi kuvan 10.2 tieverkko A tasoon hieman selkeämmin, jotta tieyhteydet hahmotetaan paremmin. Tällöin päädytään kuvan 10.3 kaltaiseen tilanteeseen, josta huomataan, että etsitty tieverkko on isomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa. Näin ollen esimerkin 9.3 nojalla kaupungeja ei ole mah-

dollista yhdistää tasossa, eikä täten Manner-Suomen rajojen sisäpuolella, jonka voidaan sanoa olevan homeomorfinen tason kanssa.



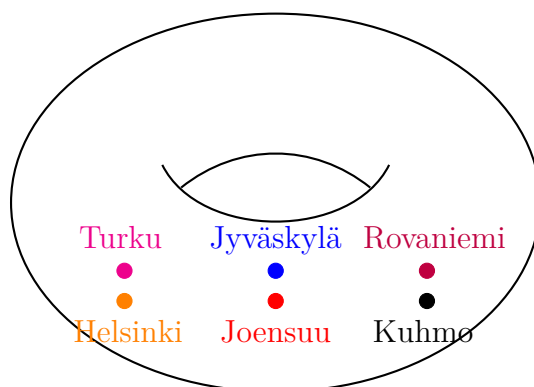
Kuva 10.3: Kuvan tieverkko A piirrettynä selkeämmin tasoon.

Edellä havaittiin, että tasossa kaikkien kaupunkien yhdistäminen ei ole mahdollista halutulla tavalla. Onnistuisiko haluttu kaupunkien yhdistäminen pallon pinnalla, jos käytössä olisi koko maapallo, katso kuva 10.4?



Kuva 10.4: Kaupungit pallon pinnalla.

Entä onnistuuko yhdistäminen yksireikäisellä toruksella, kuten kuvassa 10.5?



Kuva 10.5: Kaupungit yksireikäisellä toruksella.

Edellä kysytyt verkkojen erilaisille pinnoille piirtämiseen liittyvät kysymyksen osoittautuvat tämän luvun kannalta keskeisiksi. Pian tullaan havaitsemaan, että verkon piirtäminen pinnalle ilman, että sen sivut eivät leikkaa toisiaan riippuu merkittävällä tavalla pinnalla olevien “kahvojen” lukumääristä. Tämä on itseasiassa ilmeistä, sillä esimerkiksi verkon $K_{3,3}$ kaltaisen tieverkon tapauksessa leikkaavat sivut saadaan leikkaamattomaksi rakentamalla silta toisen tien yli. Tämä vastaa prosessia, jossa pinnan topologiaa muutetaan liittämällä siihen sillan kaltainen kahva.

10.1 Verkon genus

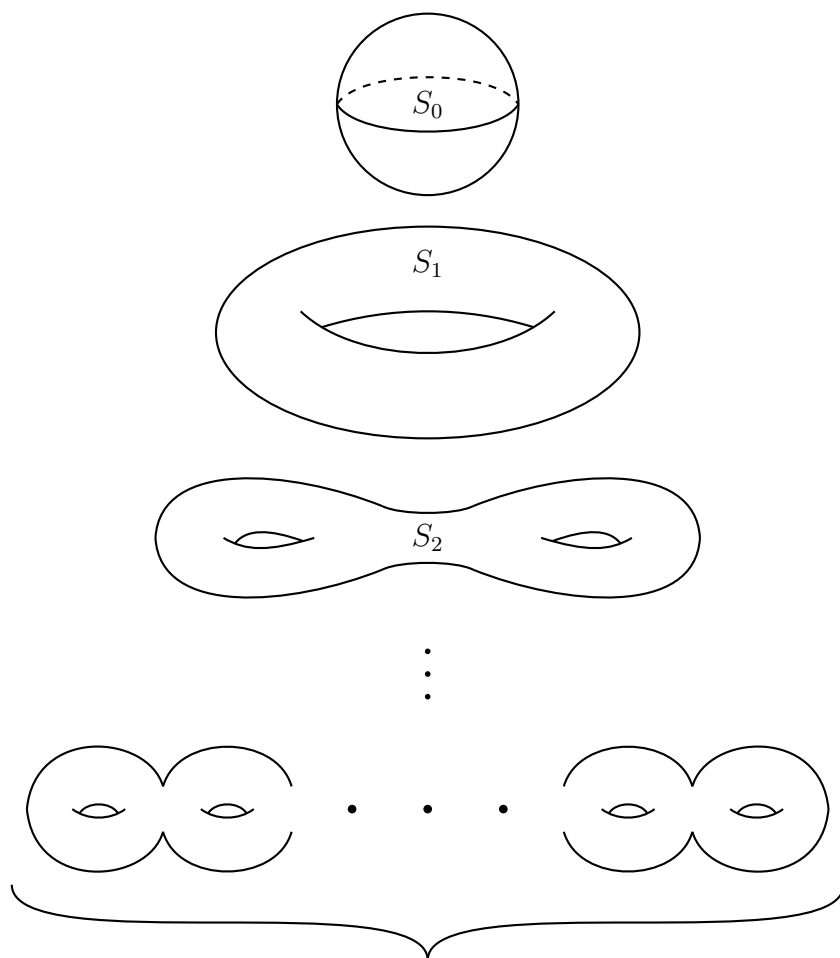
Tässä luvussa tarkastellaan verkon **genusta**, jota käytetään verkkojen topologiseen luokitteluun. Verkon genuksen määrittelemiseksi tarkastellaan verkkojen upotuksia niin kutsutuille k -kahvaisille toruksille S_k :

Pintojen joukkoon kuuluu S_0, S_1, S_2, \dots , katso kuva 10.6. S_0 eli pallo kannattaa ajatella ennemmin pallon kuorena kuin täytettynä eli rantapallona ennemmin kuin pesäpallona. Pinta S_1 eli yksireikäinen torus kannattaa ajatella venttiilittömänä sisäkumina ennemmin kuin donitsina. Samoin pinnat S_2, \dots kannattaa ajatella pelkkinä “kuorina”, ei täytettyinä.

Määritelmä 10.1 (Verkon upotus pinnalle S_k). Verkon

$$G = (V, E)$$

upotukseksi pinnalle S_k kutsutaan geometrasta esitystä, jossa verkko piirretään pinnalle S_k siten, että sen sivut eivät leikkaa toisiaan. Verkon upotus



S_k eli k -kahvainen torus, jossa on k kappaletta kahvoja

Kuva 10.6: Pintoja S_k alkaen pallostani eli S_0 .

jakaa pinnan S_k yhtenäisiin alueisiin, joita kutsutaan **tahkoiksi** pinnalla S_k . Verkon G sanotaan uppoavan pinnalle S_k , jos sille löytyy upotus pinnalle S_k . Jos verkko G uppoaa pinnalle S_k , niin sitä kutsutaan S_k -verkoksi.

Määritelmä 10.2 (Verkon genus ja verkon minimaalinen upotus).
Verkon

$$G = (V, E)$$

genuksella tarkoitetaan lukua

$$g = \min\{k \geq 0: \text{verkko } G \text{ uppoaa pinnalle } S_k\}.$$

Jos verkon G genus on g , niin silloin sen upotusta pinnalle S_g kutsutaan sen **minimaaliseksi upotukseksi**.

Geometrisessa topologiassa suunnistuvia suljettuja pintoja voidaan luokitella niissä olevien reikien eli “kahvojen” mukaan. Tässä asianyhteydessä suunnistetun suljetun pinnan genuksella tarkoitetaan siinä esiintyvien kahvojen lukumäärää. Tällöin siis pinnan S_k genus on

$$g = k.$$

Erityisesti verkon G genus vastaa sen suunnistetun suljetun pinnan S_k genus-ta, jolle verkolle G löytyy minimaalinen upotus. Seuraavaksi tullaan osoittamaan, että jokaisella verkolla G on olemassa minimaalinen upotus jollekin pinnalle S_g . Ennen tätä osoitetaan, että tasoverkkojen ja palloverkkojen luokat vastaavat toisiaan:

Lause 10.3. *Tasoverkkojen joukko on yhtä suuri S_0 -verkkojen joukon kanssa. Toisin sanoen*

- 1) *jokainen tasoverko on isomorfinen jonkin S_0 -verkon kanssa ja*
- 2) *jokainen S_0 -verkko on isomorfinen jonkin tasoverkon kanssa.*

Todistus.

1) Oletetaan ensin että verkko

$$G = (V, E)$$

on jonkin verkon tasoesitys ja olkoon

$$P^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_0 \setminus \{(0, 0, 1)\}$$

stereografisen projektion käänteiskuvaus. Tällöin

$$\hat{G} := P^{-1}(G) = (P^{-1}(V), P^{-1}(E)) =: (\hat{V}, \hat{E})$$

määrittelee verkon G kanssa isomorfisen S_0 -verkon eli palloverkon.

2) Oletetaan seuraavaksi kääntäen, että

$$\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$$

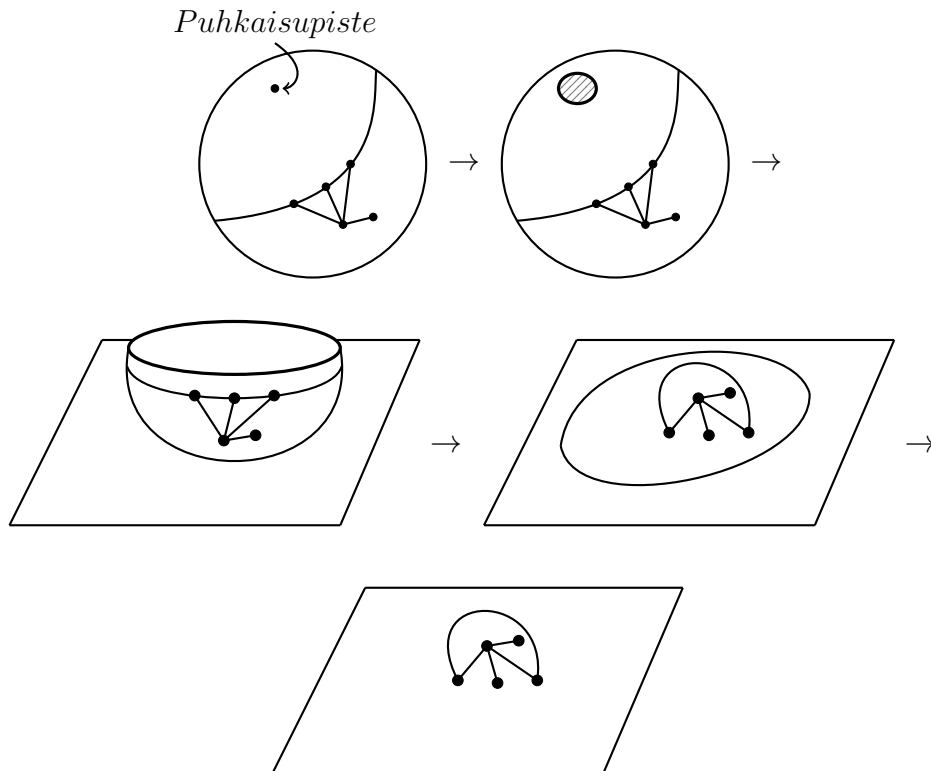
on jonkin S_0 -verkon upotus pinnalle S_0 ja olkoon

$$P : S_0 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

stereografinen projektio. Rotatoimalla palloa S_0 hieman avaruudessa \mathbb{R}^3 tarvittaessa voidaan olettaa, että piste $(0, 0, 1)$ ei leikkaa verkon \hat{G} upotusta. Tällöin

$$G := P(\hat{G}) = (P(\hat{V}), P(\hat{E})) =: (V, E)$$

määrittelee verkon \hat{G} kanssa isomorfisen tasoverkon.



Kuva 10.7: Palloverkko avattuna tasoon.

□

Edellisen lauseen nojalla tasoverkkojen ja palloverkkojen luokat S_0 vastaavat siis toisiaan.

Koska taso- ja palloverkkojen luokat ovat samat, niin tästä saadaan, että luvun alun kaupunkiongelman kaupunkeja ei voida yhdistää halutulla tavalla pallopinnallakaan.

Lause 10.4. *Jokaisella verkolla on genus.*

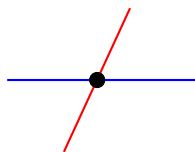
Todistus. Olkoon

$$G = (V, E)$$

mikä tahansa verkko. Jos G on tasoverkko, niin Lauseen 10.3 nojalla sen genus on nolla, joten oletetaan, että G ei ole tasoverkko. Piirretään verkko G pallopinnalle S_0 siten, että

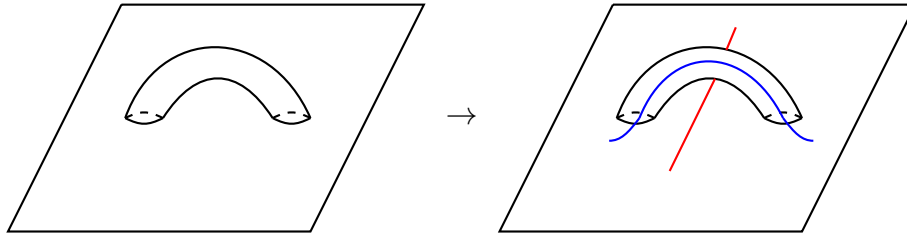
- 1) sen verkon sivujen leikkaamispisteet ovat erillisiä,
- 2) sivujen leikkaamispisteissä leikkaa täsmälleen kaksi sivua,
- 3) sivujen leikkaamispisteissä leikkaavat sivut leikkaavat toisiaan kyseisessä pisteessä täsmälleen kerran ja
- 4) jokaisella leikkaamispisteellä on ympäristö, jonka kautta ei kulje kahden leikkaavan sivun lisäksi muita verkon sivuja.

Kun verkko piirretään pallopinnalle S_0 siten, että piirros täyttää edelliset ehdot, niin jokaisessa verkon sivujen leikkauspisteessä sen piirroksen voidaan olettaa muistuttavan kuvan 10.8 esittämää tilannetta.



Kuva 10.8: Lauseen 10.4 kohta 2) kuvattuna.

Lisätään seuraavaksi jokaiseen kuvan 10.8 esittämään kahden sivun leikkauspisteeseen ympäristöön putkimainen kahva kuvan 10.9 osoittamalla tavalla ja laitetaan toinen leikkaavista sivuista kulkemaan kahvaa pitkin ja toinen sen ali.



Kuva 10.9: Toinen leikkaavista sivuista kulkee kahvaa pitkin ja toinen sen ali.

Toimimalla edellä kuvatulla tavalla havaitaan, että verkko G voidaan upottaa ainakin pinnalle S_k , missä k vastaa todistuksen alussa annetussa piirroksessa esiintyvien sivujen leikkauspisteiden lukumäärää. Toisin sanoen ei-negatiivisten kokonaislukujen osajoukko

$$A = \{k \geq 0: \text{verkko } G \text{ uppoaa pinnalle } S_k\}$$

on epätyhjä. Tällöin, koska joukko A on epätyhjä ja alhaalta rajoitettu, niin sillä on olemassa pienin jäsen

$$g = \min\{k \geq 0: \text{verkko } G \text{ uppoaa pinnalle } S_k\},$$

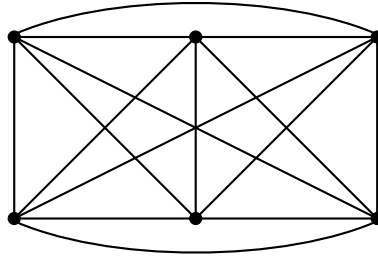
joka vastaa verkon G genusta.

□

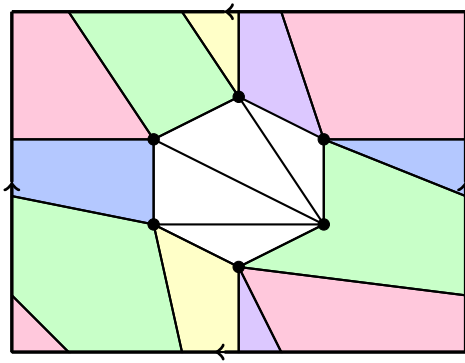
10.2 Verkkojen upottamisesta pinnoille

Palataan taas luvun alussa olleeseen kaupunkiongelmahan. Kaupunkeja ei voi yhdistää toisiinsa tasossa eikä pallolla ilman, että uudet tieyhteydet leikkaisivat toisiaan. Erilaisista kokeiluista huolimatta huomataan, että jokaisessa vaihtoehdossa tulee välttämättä vähintään yksi tieyhteyksien leikkaus. Tämän kaltaisessa yhden leikkauksen tilanteessa voidaan tehdä samoin, kuin yllä olevan lauseen 10.4 todistuksessa eli lisätä pinnalle yksi kahva tieyhteyksien leikkauspisteeseen estämään leikkaus. Tästä huomataan, että yhdistäminen onnistuu yksikahvaiselle pinnalle S_1 , joka voidaan muotoilla uudestaan muistuttamaan muodoltaan kuvan 10.5 kaltaista yksireikäistä torusta ja ongelma on ratkaistu.

Esimerkki 10.5. Alla olevan kuvan 10.10 verkko K_6 ei ole S_0 -verkko, sillä se sisältää aliverkkonaan verkon $K_{3,3}$.



Kuva 10.10: Verkko K_6 .



Kuva 10.11: Verkko K_6 toruksella.

Kuva 10.11 osoittaa, että verkko K_6 voidaan kuitenkin upottaa toruspinnalle S_1 . Näin ollen verkon K_6 genus on yksi.

Lause 10.6. Jos verkon

$$G = (V, E)$$

genus on g , niin se voidaan upottaa mille tahansa pinnalle S_n , jolle $n \geq g$, ilman, että sen sivut leikkaavat.

Todistus. Oletetaan, että verkko

$$G = (V, E)$$

on upotettu pinnalle S_g ja kiinnitetään mikä tahansa pinnan S_g avoin ja epätyhjä alue, mikä ei sisällä yhtään verkon G kärkeä tai sivua. Liitetään nyt pintaan S_g edellä kiinnitetyn avoimen alueen sisällä $n-g$ putkimaista kahvaa. Saatu pinta voidaan jatkuvasti muotoilla pinnaksi S_n , eli toisin sanoen se on homeomorfinen pinnan S_n kanssa, jossa verkko G on edelleen mukana. Lopputuloksena saadaan pinta S_n , jonne verkko G on upotettu.

□

11 Eulerin toinen kaava

Aikaisemmissa luvuissa havaittiin, että tasoverkkojen topologiset ominaisuudet voidaan kiteyttää Eulerin ensimmäiseen kaavaan 9.1. Erityisesti tämä kaava mahdollistaa lemmän 9.2 ja Kuratowskin lauseen 9.4 kaltaisten tehokkaiden työkalujen todistamisen. Luonnollisesti Eulerin ensimmäisen kaavan kaltainen tehokas topologinen työkalu halutaan käyttöön myös verkoille, joiden genus on g . Tällainen yleistys löytyy niin kutsutun **Eulerin toisen kaavan** 11.4 muodossa, jonka tässä tutkielmassa annettu todistus pohjautuu lähteisiin [25], [6]. Todistus nojaa osin Youngsin vuonna 1963 todistamaan verkkojen minimaalisia upotuksia koskevaan lauseeseen 11.3, jota ei tässä tutkielmassa todisteta.

Määritelmä 11.1 (Verkon 2-solu-upotus). Verkon G upotus pinnalle S_n on 2-solu-upotus, jos upotuksen kaikki tahkot ovat homeomorfisia avoimen yksikkökiekon

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$$

kanssa.

Lause 11.2. *Olkoon*

$$G = (V, E)$$

yhtenäisen verkon 2-solu-upotus pinnalle S_g . Tällöin kyseisen upotuksen kärkien, sivujen ja tahkojen lukumäärille pätee

$$|V| - |E| + |F| = 2 - 2g.$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla genuksen g suhteen.

Alkuaske: Oletetaan aluksi, että

$$g = 0.$$

Tällöin verkko G on palloverkko, joten lause seuraa suoraan Eulerin ensimmäisestä kaavasta 9.1.

Induktio-oletus: Oletetaan, että väite pätee jokaisen yhtenäisen verkon

$$G = (V, E)$$

2-solu-upotukselle, joka on upotettu pinnalle S_{g-1} , missä

$$g > 0.$$

Induktioaskel: Oletetaan, että

$$G = (V, E)$$

on yhtenäisen verkon 2-solu-upotus pinnalle S_g . Tällöin pinnalla S_g on vähintään yksi kahva. Piirretään suljettu itseäänleikkaamaton pinnan S_g käyrä C pinnan yhden kahvan ympärille siten, että käyrä C ei sisällä yhtään verkon G kärkeä. Tällöin voidaan olettaa, että käyrä C leikkaa verkkoa G , koska jos näin ei olisi, niin käyrä C sisältyisi kokonaan johonkin verkon G tahkoon ja sitä ei voitaisi supistaa yhdeksi pisteeksi tällä tahkolla, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että verkko G on 2-solu-upotus.

Seuraavaksi huomataan, että upottamalla verkko G tarvittaessa uudelleen pinnalle S_g voidaan olettaa, että käyrä C leikkaa verkkoa G äärellisen monta kertaa, eli leikkauksien lukumäärää kuvastava positiivinen kokonaisluku

$$k := |\{x \in S_g : x \in C \text{ ja } x \in G\}|$$

on äärellinen. Toisin sanoen, jos

$$e_1, e_2, \dots, e_t, \quad \text{missä } 1 \leq t \leq k,$$

ovat verkon G käyrää C leikkaavat sivut ja positiivinen kokonaisluku ℓ_i vastaa sivun e_i ja käyrän C välisten leikkauspisteiden lukumäärää, niin silloin

$$\sum_{i=1}^t \ell_i = k.$$

Olkoot edellä mainitut verkon G ja käyrän C leikkauspisteet

$$w_1, w_2, \dots, w_k.$$

Muodostetaan nyt uusi pinnan S_g itseäänleikkaamaton verkko

$$G' = (V', E')$$

seuraavalla tavalla:

- (i) Kärkien joukko V' muodostetaan lisäämällä verkon G kärkien joukkoon V kaikki leikkauspisteet w_1, w_2, \dots, w_k eli

$$V' = V \cup \{w_1, w_2, \dots, w_k\}.$$

Tällöin

$$|V'| = |V| + k.$$

- (ii) Muodostetaan aluksi sivujen joukko \hat{E} verkon G sivujen joukosta E korvaamalla kukin sivu

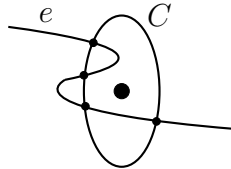
$$e_i \in E \quad (i = 1, 2, \dots, t)$$

kyseisen sivun ja käyrän C leikkauspisteiden w_1, w_2, \dots, w_k välissä kulkevilla osakäyrillä, jotka leikkaavat toisiaan korkeintaan päätepisteissään. Tällöin siis jokainen sivu e_i korvaantuu siis $\ell_i + 1$ uudella sivulla, katso kuva 11.1. Tällöin

$$\begin{aligned} |\hat{E}| &= |E| - t + \sum_{i=1}^t (\ell_i + 1) \\ &= |E| + \sum_{i=1}^t \ell_i \\ &= |E| + k \end{aligned}$$

Nyt sivujen joukko E' muodostetaan lisäämällä sivujen joukkoon \hat{E} käyrän C eri leikkauspisteiden w_1, w_2, \dots, w_k väliset käyrän C osakäyrät, jotka leikkaavat toisiaan korkeintaan päätepisteissään. Näitä osakäyriä on yhteensä k kappaletta, mistä saadaan, että

$$|E'| = |\hat{E}| + k = |E| + 2k.$$

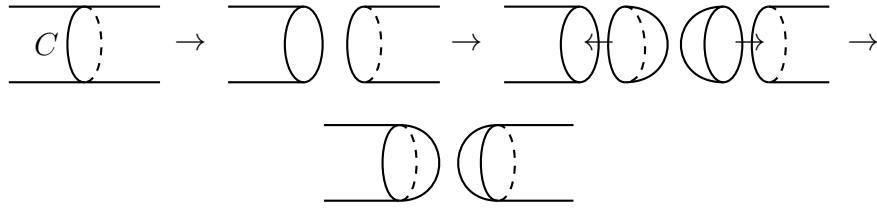


Kuva 11.1: Jonkun sivun e ja käyrän C leikkauspisteet.

Tarkastellaan seuraavaksi verkon G' tahkojen lukumäärää $|F'|$. Nyt jokainen niistä verkon G' kohdan (ii) lopussa mainituista sivuista, joka vastaavaa käyrän C jotakin osakäyriä e' sisältyy päätepisteitään lukuunottamatta johonkin verkon G tahkoon τ . Koska τ on 2-solu, niin tällöin e' jakaa tahkon τ kahdeksi 2-soluksi τ_1 ja τ_2 . Koska tällaisia sivuja e' on k kappaletta, niin

$$|F'| = |F| + k.$$

Lisäksi, koska jokainen verkon G tahko on 2-solu, niin myös jokainen verkon G' tahko on 2-solu. Toisin sanoen verkko G' on 2-solu-upotus pinnalle S_g .

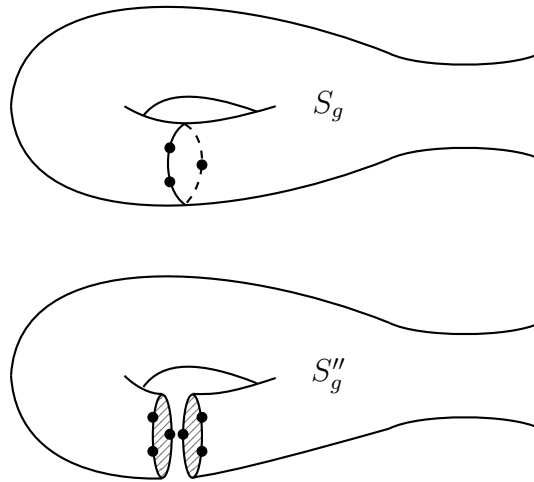


Kuva 11.2: Leikataan kahva käyrän C kohdalta kahteen osaan ja liimataan päätyihin puolipallon kuoret.

Seuraavaksi puolitetaan kahva kahteen osaan leikkaamalla se käyrää C pitkin, katso kuva 11.2. Tämän jälkeen leikkaamisprosessissa syntyvät kaksi aukkoa paikataan liimaamalla molempiin aukkoihin puolipallon kuoret. Tämän rajausoperaation seurauksena pinta S_g korvataan pinnalla S_g'' . Koska pinnalla S_g'' on yksi kahva vähemmän, kuin pinnalla S_g , niin pinnan S_g'' genus on $g - 1$. Lisäksi tässä prosessissa verkko G' korvataan pinnan S_g'' verkolla

$$G'' = (V'', E''),$$

jossa verkon G' käyrän C muodostamat kärjet ja sivut jaetaan kahteen kopian kuvan 11.3 osoittamalla tavalla.



Kuva 11.3: Verkko G' jaettuna käyrän C kohdalta kahteen osaan.

Tällöin verkon G'' kärkien, sivujen ja tahkojen lukumäärille pinnalla S_g'' pätee

$$\begin{aligned} |V''| &= |V'| + k = |V| + 2k, \\ |E''| &= |E'| + k = |E| + 3k, \\ |F''| &= |F'| + 2 = |F| + k + 2. \end{aligned}$$

Koska myös verkon G'' jokainen tahko on 2-solu pinnalla S_g'' , niin verkon G'' on oltava yhtenäinen. Toisin sanoen verkko G'' vastaa yhtenäisen verkon 2-solu-upotusta pinnalle S_g'' . Siispä soveltamalla induktio-oletusta genus $(g-1)$ -pinnan 2-solu-upotukseen G'' saadaan

$$|V''| - |E''| + |F''| = 2 - 2(g - 1),$$

eli

$$(|V| + 2k) - (|E| + 3k) + (|F| + k + 2) = 2 - 2(g - 1),$$

ja näin ollen

$$|V| - |E| + |F| = 2 - 2g,$$

mistä väite seuraa. □

Lause 11.3. *Yhtenäisen verkon*

$$G = (V, E)$$

jokainen minimaalinen upotus on 2-solu-upotus.

Todistus. Todistus seuraa suoraan Youngsin lauseesta [25, Lause 4.3.], jonka todistusta ei käsitellä tässä tutkielmassa. □

Lause 11.4 (Eulerin toinen kaava). *Olkoon*

$$G = (V, E)$$

yhtenäisen verkon minimaalinen upotus pinnalle S_g . Tällöin sen kärkien, sivujen ja tahkojen lukumäärille pätee

$$|V| - |E| + |F| = 2 - 2g.$$

Todistus. Lauseen 11.3 nojalla verkko G on yhtenäisen verkon 2-solu-upotus pinnalle S_g , joten väite seuraa suoraan Lauseesta 11.2. □

12 Opetuskokeilu yliopiston matematiikan ai- neopintojen kurssilla

Osana tätä tutkielmaa suoritettiin opetuskokeilu Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella. Opetuskokeilussa tämän tutkielman kirjoittaja, sekä tutkielman ohjaaja suunnittelivat yhteistyössä luennon syksyllä 2023 järjestetyille *Johdatus diskreettiin matematiikkaan* -kurssille. Tämän tutkielman ohjaaja toimi myös kurssin vastuupettajana ja hän piti kyseisen luennon opiskelijoille opetuskokeilussa yhdessä laaditun tuntisuunnitelman mukaisesti. Luento käsitteli tasoverkkoja ja Eulerin kaavoja. Kurssilla kokonaisuudessaan noudatettiin Kolbin oppimisen kehää 4.1 ja luento suunniteltiin radikaalin konstruktivismin teemoja käyttäen. Kurssilla Kolbin oppimisen kehän eri vaiheet toteutettiin seuraavilla tavoilla:

- 1) **Konkreettinen kokemus.** Luentojen alussa esitettiin yksinkertainen, mutta teorian kannalta hyvin keskeinen kysymys, jonka ratkaisuun opiskelijoilla ei vielä välttämättä ollut työkaluja. Tämän tarkoituksen oli aiheuttaa opiskelijoissa radikaalin konstruktivismin teorian mukainen kognitiivinen konflikti. Opetuskokeilun luennolla kyseinen tehtävä oli kaupunkiongelmaan verrattavissa oleva niin kutsuttu voimalaongelma [3, s. 142].
- 2) **Reflektiivinen havainnointi.** Opiskelijoita ohjattiin peilaamaan omaa aikaisempaa tietämystään esitettyä ongelmaa ja myös vertaistensa tietämystä vasten ohjaamalla heidät työskentelemään esitetyn ongelman parissa noin kolmen hengen ryhmissä. Ryhmätyöskentelyvaiheen jälkeen opettaja toi esille miksi tehtävää pohdittiin, mutta ei suoraan antanut ratkaisua ongelmaan. Esimerkiksi tällä tuettiin reflektion jatkumista myös luennon jälkeen.
- 3) **Abstrakti käsitteellistäminen.** Luennon teoriaosuus tapahtui perinteisemmin opettajajohtoisesti, jossa ongelman ratkaisun avaimet tuotiin pikkuhiljaa esille, mutta niitä ei korostettu tai niiden yhteyttä annettuun ongelmaan ei kerrottu suoraan opiskelijoille.
- 4) **Aktiivinen kokeilu.** Kurssin harjoitustehtävien tarkoituksena oli ohjata opiskelijoita aikaisemmissa vaiheissa opitun teoreettisen tiedon aktiiviseen kokeiluun ja soveltamiseen. Yksi harjoitustehtävistä oli aikaisemmin konkreettisen kokeilun vaiheessa esitetty ongelma. Tämän opetuskokeilun tilanteessa kyseessä oli voimalaongelma.

Tässä opetuskokeilussa keskeistä oli pohtia niitä taapoja, joilla matematiikan korkeakouluopetuksessa voitaisiin kuljettaa opiskeltavan asian konkreet-

tista tasoa abstraktin tason rinnalla. Opetuskokeilussa konkreettiseen tasoon pyrittiin pääsemään käsiksi seuraavien esimerkkien kautta:

- 1) **Voimalaongelma tasossa.** Luennon alussa esitetty kognitiiviseen konfliktiin johtava kaupunkiongelmaan verrattava tehtävä [3, s. 142].
- 2) **Voimalaongelma pallo- ja torusverkolla.** Samaa voimalaongelmaa pohdittiin pienryhmissä myöhemmin uudelleen pallo- ja torusverkoilla. Opettaja ohjeisti opiskelijoita hahmottelemaan verkkoja torukselle kuvan 10.11 kaltaisella tavalla.
- 3) **Lentoreitit.** Kuusi vapaaehtoista opiskelijaa muodostivat yhdeksän langanpätkän avulla $K_{3,3}$ verkon, jossa opiskelijat itse esittivät verkon kärkiä ja pitivät kiinni kolmesta erivärisestä langasta. Ensin huomattiin, että langat osuvat toisiinsa, joka ei lentoreiteille ole suotavaa, minkä jälkeen alettiin pohtimaan miten lankojen korkeuksia muuttamalla onnistuttaisiin saamaan lentoreitit eli langat siten, että ne eivät osu toisiinsa.
- 4) **Eulerin ensimmäisen kaavan todistuksen konkretisointi.** Aluksi opettaja piirsi taululle sattumanvaraisen esimerkin tasoverkosta, minkä jälkeen sen kärkien, sivujen ja tahkojen lukumäärät laskettiin yhdessä opiskelajoiden kanssa. Tästä nähtiin, että lukumäärät toteuttavat Eulerin ensimmäisen kaavan 9.1 kaltaisen yhtälön

$$\text{“kärjet”} - \text{“sivut”} + \text{“tahkot”} = 2. \quad (12.1)$$

Tämän jälkeen opiskelijoita pyydettiin valitsemaan verkosta yksi sivu, jonka poistaminen ei tee verkosta epäyhtenäistä, minkä jälkeen kyseinen sivu pyyhittiin taululta. Uuden verkon kärkien, sivujen ja tahkojen lukumäärät laskettiin ja todettiin, että edelleen identiteetti (12.1) pätee kyseiselle verkolle. Tällaista yhden sivun poistamista jatkettiin kunnes päädyttiin puuhun ja todettiin, että vastaava identiteetti pätee myös puihin ja todettiin edelleen, että havainto sisältyy kurssilla aiemmin esitettyy puiden karakterisaatiolauseeseen 6.6. Tämän havaittiin todistavan Eulerin ensimmäisen kaavan.

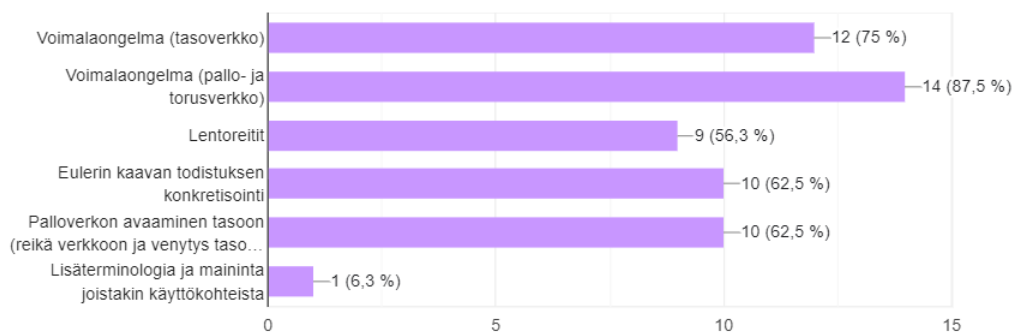
- 5) **Palloverkon avaaminen tasoon.** Verkkojen kuvaamista stereografisella projektiolla havainnollistettiin kuvan 10.7 kaltaisella tavalla.

Opetuskokeilun tavoitteena oli päästä käsiksi havainnollistavien esimerkkien opiskelijoissa synnyttämiin ajatuksiin ja kokemuksiin. Erityisesti tavoitteena

oli selvittää, kuinka hyödyllisinä opiskelijat pitivät oppimisen kannalta luennolla sovellettuja abstraktien asioiden konkretisointeja. Opiskelijat saivat antaa palautetta luennosta luennon lopussa toteutetun Google Forms -kyselyn kautta, sekä kommentoida esimerkiksi, mitkä tekijät tukivat oppimista ja mitkä eivät. Alla tutkielman kannalta kyselyn oleellimmat vastaukset.

Mitkä havainnollistavista esimerkeistä koit hyödyllisiksi?

16 vastausta

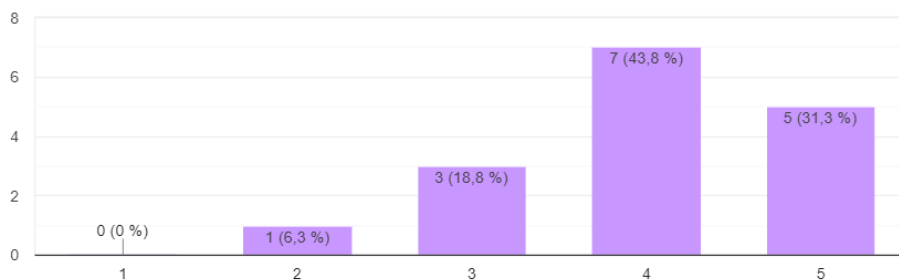


Kuva 12.1: Havainnollistavien esimerkkien hyödyllisyyden jakauma.

Koen oppineeni luennon asiat:

(1 = En ymmärtänyt tai oppinut mitään - 3 = En osaa sanoa - 5 = Opin ja ymmärsin luennon asiat hyvin)

16 vastausta



Kuva 12.2: Opiskelijoiden kokemus oppimisesta luennon aikana.

Viitteet

- [1] ARDICHIVILI, ALEXANDER: *Fifty Modern Thinkers on Education: From Piaget to the present*. London, Great Britain, 2001.
- [2] AUBREY, KARL; RILEY ALISON: *Understanding and Using Educational Theories*. London, Great Britain, 2015.
- [3] BIGGS, NORMAN L; LLOYD, E. KEITH; WILSON, ROBIN J: *Graph theory 1736–1936*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York 1986.
- [4] BRUNER, JEROME; ROSS, G; WOOD, D, J: *The role of tutoring in problem solving*. *Journal of Child Psychiatry and Psychology*, 17(2), 89–100. New York, 1976.
- [5] BRUNER, JEROME: *In Search of Pedagogy, Volumes I & II*. Routledge, 2006.
- [6] CHARTRAND, GARY; LESNIAK, LINDA *Graphs & digraphs, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL*. 2005.
- [7] MADSEN, IB; TORNEHAVE JXRGEN *From Calculus to Cohomology: De Rham Cohomology and Characteristic Classes 1st Edition*, 1997.
- [8] GLASERSFELD, ERNST VON: *An Introduction to Radical Constructivism*
- [9] GLASERSFELD, ERNST VON: *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [10] GLASERSFELD, ERNST VON: *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. Hoboken Routledge, 1995.
- [11] HARARY, FRANK: *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-Menlo Park, Calif. London 1969
- [12] KOLB, DAVID: *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. Engelwood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.
- [13] KULTALAHTI, JULIUS. 2022 “Kuratowskin lause”, kandidaatin tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteenlaitos. Luettu 15.4.2024. <https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/83830/URN%3aNBN%3afi%3ajyu-202211095131.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- [14] HAAPASALO, LENNI; KUPARI, PEKKA: *Konstruktivismi matematiikan opetuksessa ja opetussuunnitelman kehittämisessä*. Jyväskylän yliopisto, opettajankoulutuslaitos, 1993.
- [15] JOHN- STEINER, VERA; SOUBERMAN, ELLEN *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press, 1978.
- [16] PALM, PINJA. 2021. "Itse- ja vertaisarviointi matematiikan opetuksessa." Pro gradu -tutkielma, Turun yliopisto. Luettu 12.6.2024. https://www.utupub.fi/bitstream/handle/10024/151154/Palm_Pinja_opinnayte.pdf?sequence=1
- [17] PALMER, SUE; DOLYA, GALINA: *Freedom of thought*. Julkaistu 30.7.2004. Luettu 14.6.2024. <https://www.tes.com/magazine/archive/freedom-thought>
- [18] PAULOAHO, NINA. 2021. "Kiinnostuksen yhteys opiskelumotivaatioon." Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto. Luettu 12.6.2024. <https://helda.helsinki.fi/server/api/core/bitstreams/b2e41df6-020e-4ba2-aa8a-3e37954e7f31/content>
- [19] REICH, KERSTEN: *Three Constructivism: Diversity of Approaches and Connections with Pragmatism*, kappale kirjasta John Dewey Between Pragmatism and Constructivism. 2009.
- [20] TENGVALL, VILLE: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan -luentomoniste*, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2023. https://tim.jyu.fi/files/610395/JoDiMA_2023_luentomoniste.pdf
- [21] TRUDEAU, RICHARD J.: *Introduction to Graph Theory*. Garden City, New York, 2021.
- [22] TUOMINEN, LAURI: *Jordanin käyrälause*, Matematiikan Pro gradu -tutkielma. Luettu 23.3.2024. <https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/37481/URN%3aNBN%3afi%3ajyu-201203021330.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [23] TYNJÄLÄ, PÄIVI: *Oppiminen tiedon rakentamisena : konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita*. Helsinki: Kirjayhtymä, 1999.

- [24] VUORENPÄÄ, VIKKE. 2020. *"Oikea-aikainen tukeminen laskutuvassa."* Diplomityö, Tampereen yliopisto. Luettu 18.6.2024. [https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/121475/Vuorenp%
c3%a4%c3%a4Vikke.pdf?sequence=2&isAllowed=y](https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/121475/Vuorenp%c3%a4%c3%a4Vikke.pdf?sequence=2&isAllowed=y)
- [25] YOUNGS, JOHN WILLIAM THEODORE: *Minimal imbeddings and the genus of a graph*. Published By: Indiana University Mathematics Department, 1963.