



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTO-
TIETEEN LAITOS

PRO GRADU-TUTKIELMA

Koeben $\frac{1}{4}$ -lause ja Haymanin- Wun lause

Reetta Koskelo

1. heinäkuuta 2024



TekijäReetta Koskelo

OtsikkoKoeben $\frac{1}{4}$ -lause ja Haymanin-Wun lause (engl. Koebe's $\frac{1}{4}$ Theorem and Hayman-Wu Theorem)

Tutkinto-ohjelmaMatematiikan maisteriohjelma

Päivämäärä

1. heinäkuuta 2024

Sivumäärä69

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa osoitetaan päätuloksina Koeben $\frac{1}{4}$ -lause sekä Haymanin-Wun lause. Koeben $\frac{1}{4}$ -lause kertoo, että analyyttinen injektio f ei voi kutistaa yksikkökierokkoa \mathbb{D} pienemmäksi kuin yhteen neljäsosaan alkuperäisestä, kun funktio f häviää origossa ja derivaatan arvo origossa on 1. Haymanin-Wun lause puolestaan antaa käyrän $\varphi^{-1}(\Omega \cap L)$ pituudelle ylärajan 4π , kun Ω on yhdesti yhtenäinen kompleksitason alue, L on mielivaltainen aluetta Ω leikkaava suora ja φ on konformikuvaus yksikkökierokolta \mathbb{D} alueelle Ω .

Tutkielmassa esitellään aluksi hyödyllisiä aputuloksia sekä määritelmiä, joita tarvitaan myöhemmin toisten tulosten todistamiseksi. Osalle näistä aputuloksista esitellään myös todistukset.

Tutkielman teorian pohjalla on tärkeässä roolissa konformikuvaukset, joten niihin tutustutaan aputulosten jälkeen ensimmäiseksi. Konformikuvauksista tarkastellaan erityisesti Möbius-kuvauksia, jotka ovat hyödyllinen konformikuvausten kategoria, minkä jälkeen esitellään kaksoissuhde sekä Möbius-kuvausten löytäminen sen avulla. Lisäksi todistetaan keskeinen konformikuvauksiin liittyvä tulos Riemannin kuvauslause, jonka nojalla mielivaltaiselta kompleksitason yhdesti yhtenäiseltä alueelta on olemassa konformikuvaus yksikkökierokolle \mathbb{D} .

Haymanin-Wun lauseen todistuksessa käytetään apuna hyperbolista ja pseudohyperbolista metriikkaa yksikkökierokossa \mathbb{D} sekä harmonisen mitan ominaisuuksia. Näistä esitellään perusominaisuuksia sekä todistuksille tarpeelliset tulokset. Lisäksi osoitetaan Schwarzin lemma sekä Schwarzin-Pickin lause. Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen todistus puolestaan pohjaa konformiseen moduliin sekä sen ominaisuuksiin, erityisesti Grötzschin lauseeseen sekä polkuperheiden konformiseen moduliin annuluksessa. Tutkielmassa tarkastellaan myös kahdesti yhtenäisiä alueita sekä niiden välisiä konformikuvauksia.

Sisällys

Johdanto	3
Esitiedot	4
1 Aputuloksia	5
2 Konformikuvaukset ja Möbius-kuvaukset	10
2.1 Konformikuvaukset	11
2.2 Möbius-kuvaukset ja kaksoissuhde	13
2.3 Riemannin kuvauslause	25
3 Hyperbolinen metriikka yksikkökiekossa \mathbb{D}	29
3.1 Pseudohyperbolinen metriikka	29
3.2 Hyperbolinen metriikka	33
3.3 Schwarzin lemma ja Schwarzin-Pickin lause	37
4 Konforminen moduli	39
4.1 Määritelmiä ja perusominaisuuksia	39
4.2 Konforminen moduli annuluksessa	42
4.3 Konformisen modulin symmetrisyys	46
5 Harmoninen mitta	50
6 Kahdesti yhtenäiset alueet	53
7 Koeben kuvaus ja Koeben $\frac{1}{4}$-lause	57
7.1 Koeben kuvaus	57
7.2 Koeben $\frac{1}{4}$ -lause	59
8 Haymanin-Wun lause	62

Johdanto

Tämän tutkielman päätuloksina on Haymanin-Wun lause sekä Koeben $\frac{1}{4}$ -lause. Jos f on konformikuvaus yksikkökielelta $\mathbb{D} = D(0, 1)$ kompleksitason avoimeen ja yhtenäiseen osajoukkoon Ω , niin Haymanin-Wun lause kertoo, että leikattaessa aluetta Ω suoralla L leikkausjoukon alkukuvan $f^{-1}(\Omega \cap L)$ pituus on korkeintaan 4π . Koeben $\frac{1}{4}$ -lause puolestaan kertoo, että analyyttinen injektio, joka kuvaa yksikkökielelta \mathbb{D} itselleen kiinnittäen origon ja jonka derivaatta origossa saa arvon 1, kutistaa yksikkökielelta korkeintaan neljäsosaan alkuperäisestä.

Vuonna 1978 George Piranian ja Allen Weitsman pohtivat, onko joukon $f^{-1}(\Omega \cap L)$ pituus äärellinen analyyttiselle injektiolle f [14]. Walter Hayman ja Jang Mei Wu vastasivat kysymykseen vuonna 1981 osoittamalla tuloksen suurelle tuntemattomalle vakiolle [8]. Knut Øyima saavutti vakion 4π vuonna 1992 [17], ja Steffen Rohde puolestaan osoitti vuonna 2002, että paras vakio on aidosti pienempi kuin 4π [15]. Vuonna 1993 Øyima osoitti parhaan vakion olevan vähintään π^2 [18]. Lauseen tarkkaa vakiota ei nykytiedon valossa tunneta. Luvussa 8 esitellään vakion 4π todistus Øyiman todistuksen pohjalta John Garnettin ja Donald Marshallin kirjasta [7]. Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen puolestaan muotoili Paul Koebe vuonna 1907, ja sen todisti Ludwig Bieberbach vuonna 1916 [4]. Osiossa 7.2 esiteltävä Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen todistus mukailee Miodrag Mateljevićin todistusta lähteestä [11].

Tutkielma alkaa aputulosten esittelyllä, minkä jälkeen tarkastellaan konformikuvauksia sekä Möbius-kuvauksia. Sanotaan, että analyyttinen funktio $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on konforminen pisteessä z_0 , mikäli se säilyttää pisteessä z_0 leikkaavien käyrien välisen kulman suuruuden ja suunnan. Funktiota f kutsutaan konformikuvaukseksi, jos se on konforminen bijektio jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä. Konformikuvauksille annetaan myös toinen määritelmä ja osoitetaan, että määritelmät ovat yhtäpitävät. Lisäksi tarkastellaan tärkeää konformikuvausten kategoriaa Möbius-kuvauksia, eli funktiota $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ muotoa

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

ja osoitetaan, jokainen yksikkökielelta $\mathbb{D} = D(0, 1)$ konformisesti itselleen kuvaava funktio f on Möbius-kuvaus muotoa

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

Tämän jälkeen osoitetaan Riemannin kuvauslause, joka kertoo, että jokaiselta kompleksitason yhdesti yhtenäiseltä osajoukolta on olemassa konformikuvaus yksikkökielelkelelle \mathbb{D} .

Konformikuvausten jälkeen tarkastellaan pseudohyperbolista metriikkaa sekä hyperbolista metriikkaa yksikkökiekossa. Metriikoille osoitetaan, että ne säilyvät konformikuvauksissa. Lisäksi tarkastellaan kiekkoja pseudohyperbolisen metriikan suhteen sekä pseudohyperbolisen metriikan rajoittumista puolitasoihin. Tämän jälkeen osoitetaan Schwarzin lemma, jonka avulla voidaan arvioida kuvausten moduleita, sekä Schwarzin-Pickin lause, joka on invariantti versio Schwarzin lemmasta.

Hyperbolisesta metriikasta siirrytään lukuun 4 tarkastelemaan konformista modulia sekä sen ominaisuuksia. Konforminen moduli on mitta kompleksitason polkuperheen Γ koolle. Luvussa osoitetaan, että konforminen moduli säilyy konformikuvauksissa ja että se on monotoninen. Lisäksi osoitetaan modulin arvo annuluksessa, kun polkuperheen Γ polut yhdistävät ja separoivat annuluksen reunaympyrät. Luvun lopussa osoitetaan modulin symmetriaominaisuus, sekä Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen kannalta olennainen Grötzschin lause.

Ennen päätulosten osoittamista tarkastellaan vielä pintaraapaisun verran harmonista mitta ja puolitasossa että yksikkökiekossa. Harmoninen mitta yksikkökiekossa on tärkeä apu Haymanin-Wun lauseen todistuksessa. Harmonisen mitan jälkeen osoitetaan vielä konformista modulia apuna käyttäen kahden annuluksen olevan konformisesti ekvivalentteja toistensa kanssa, mikäli reunaympyröiden säteiden suhteet ovat yhtä suuret. Vastaava tulos todistetaan myös yleiselle kahdesti yhtenäiselle alueelle näyttämällä yleiseltä kahdesti yhtenäiseltä alueelta olevan analyyttinen injektio annulukselle, jonka ulkoympyrän säde on 1.

Tutkielmassa käytetään päälähteinä Bruce Palkan kirjaa [12] konformikuvausten, Möbius-kuvausten sekä konformisen modulin osalta, Christopher Bishopin luentokalvoja [5] konformisen modulin sekä pseudohyperbolisen metriikan osalta, John Garnett ja Donald Marshallin kirjaa [7] harmonisen mitan sekä Haymanin-Wun lauseen osalta sekä Dmitry Beliaevin kirjaa [3] kahdesti yhtenäisten alueiden osalta.

Esitiedot

Tämän tutkielman ymmärtämiseksi on hyvä osata kompleksianalyysin perusteet. Kompleksianalyysiin voi tutustua esimerkiksi Dennis Zillin ja Patrick Shanahanin kirjan [16] tai Bruce Palkan kirjan [12] avulla. Lukijan oletetaan tunnevan matemaattisen analyysin periaatteet.

1 Aputuloksia

Tässä luvussa esitellään tämän työn kannalta tarpeellisia määritelmiä ja tuloksia, joista kaikkien todistaminen ei ole kuitenkaan tärkeää. Aloitetaan määrittelemällä laajennettu kompleksitaso.

Määritelmä 1.1. Joukkoa $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kutsutaan *laajennetuksi kompleksitasoksi*. Laajennetussa kompleksitasossa pätee seuraavat laskutoimitukset:

$$\begin{cases} \infty \pm z = z \pm \infty = \infty & \text{kaikilla } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty & \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}, \\ z/\infty = 0 & \text{kaikilla } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ z/0 = \infty & \text{kaikilla } z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Laajennettua kompleksitasoa kutsutaan myös *Riemannin palloksi*. Lisätietoa aiheesta löytyy Palkan kirjasta [12]. Määritellään seuraavaksi alue.

Määritelmä 1.2. Avointa ja yhtenäistä joukkoa Ω laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$ kutsutaan *alueeksi*.

Määritellään nyt yhdesti ja kahdesti yhtenäiset alueet. Määritelmä on erittäin olennainen, sillä lähes kaikki tässä työssä esiintyvät alueet ovat yhdesti tai kahdesti yhtenäisiä.

Määritelmä 1.3. Alue Ω on *yhdesti yhtenäinen*, jos ja vain jos komplementti $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ on yhtenäinen. Alue Ω' on *kahdesti yhtenäinen*, jos ja vain jos komplementti $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega'$ koostuu kahdesta erillisestä komponentista.

Tulokset lauseeseen 1.9 asti ovat tärkeitä Riemannin kuvauslauseen 2.26 todistuksessa. Näistä ensimmäisen avulla todistetaan lemma 2.25, joka puolestaan on apuna Riemannin kuvauslauseen todistuksessa.

Lause 1.4. *Olkoon Ω alue kompleksitasossa ja olkoon f funktio siten, että f on analyyttinen sekä nollakohdaton alueessa Ω . Tällöin Ω on yhdesti yhtenäinen jos ja vain jos funktiolle f on olemassa logaritmin haara $\log f(z)$ alueessa Ω .*

Todistus. Palkan kirjassa [12] sivulla 196. □

Seuraava Cauchyn esimaattina tunnettu lause antaa välineet analyyttisen ja määrittelyjoukossaan rajoitetun analyyttisen funktion derivaattojen arvioimiseen.

Lause 1.5 (Cauchyn estimaatti). *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa kiekossa $D = D(z_0, r)$ ja että $|f(z)| < m$, missä m on vakio, pätee kaikkialla kiekossa D . Tällöin kaikille positiivisille kokonaisluvuille k pätee arvio*

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!mr}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}$$

kaikille pisteille z joukossa D . Erityisesti,

$$|f^{(k)}(z)| \leq k!mr^{-k}.$$

Todistus. Todistus Palkan kirjassa [12] sivulla 167. □

Määritellään seuraavaksi normaalin perheen käsite.

Määritelmä 1.6. Olkoon \mathcal{F} kokoelma analyyttisiä funktioita alueessa Ω . Sanotaan, että \mathcal{F} on *normaali perhe*, jos jokaiselle funktiojonolle $\{f_n\}$ perheessä \mathcal{F} on olemassa alueen Ω kompakteissa osajoukoissa tasaisesti suppeva osajono.

Muotoillaan seuraavaksi Montelin lause. Se kertoo, että kokoelma lokaa- listi rajoitettuja analyyttisiä funktioita on normaali perhe.

Lause 1.7 (Montelin lause). *Olkoon \mathcal{F} kokoelma analyyttisiä funktioita avoi- messa joukossa U . Oletetaan, että \mathcal{F} on lokaalisti rajoitettu joukossa U . Täl- löin \mathcal{F} on normaali perhe kyseisessä joukossa.*

Todistus. Palkan kirjassa [12] sivulla 285. □

Seuraava lause on Hurwitzin lauseen seuraus. Hurwitzin lause ja todis- tuksineen löytyvät Palkan kirjasta [12] sivulta 348. Tässä työssä tarvitaan vain seurausta, jonka nojalla tasaisesti suppenevien analyyttisten injektioi- den muodostaman jonon rajafunktio on joko analyyttinen injektio tai vakio.

Lause 1.8. *Olkoon jokainen funktiojonon $\{f_n\}$ alkio on analyyttinen ja in- jektio alueessa Ω ja oletetaan, että $f_n \rightarrow f$ tasaisesti alueessa Ω . Tällöin f on joko analyyttinen ja injektio alueessa Ω tai vakio alueessa Ω .*

Todistus. Palkan kirjassa [12] sivulla 349. □

Versio seuraavasta lauseesta tunnetaan englanniksi nimellä Open Map- ping Theorem. Tämän työn kannalta olennainen versio kertoo, että ei-vakio analyyttinen funktio kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi.

Lause 1.9. *Olkoon f ei-vakio analyyttinen funktio alueessa Ω . Tällöin f on avoin kuvaus.*

Todistus. Kilpeläisen luentomonisteesta [10] sivulla 132. □

Seuraavia tuloksia tarvitaan konformisen modulien ominaisuuksien todistamiseksi. Ensimmäinen kaksoisintegraalien muuttujanvaihtokaava on kätevä apu modulien konformisen invarianttiuden osoittamisessa, toinen on tuttu Cauchy-Schwarz-epäyhtälö integraaleille.

Olkoot $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ konformikuvaus alueessa Ω , joka sisältää joukon G ja $\rho: f(G) \rightarrow [0, \infty[$ jatkuva funktio. Tällöin pätee muuttujanvaihtokaava

$$\iint_{f(G)} \rho(w) \, dudv = \iint_G \rho(f(z)) |f'(z)|^2 \, dx dy \quad (1.1)$$

Olkoot f ja g reaaliarvoisia Riemann-integroituvia funktioita välillä $[a, b]$. Tällöin

$$\left(\int_a^b f(z)g(z) \, dz \right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(z))^2 \, dz \right) \left(\int_a^b (g(z))^2 \, dz \right) \quad (1.2)$$

Määritellään nyt, mitä tarkoittaa harmoninen funktio ja tarkastellaan sitten harmonisten funktioiden ominaisuuksia. Harmonisia funktioita tarvitaan luvussa 5 harmonisen mitan määrittelemiseksi.

Määritelmä 1.10. Reaaliarvoinen funktio u on *harmoninen*, mikäli se on vähintään kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva ja se toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

avoimessa joukossa U .

Osoitetaan seuraavaksi, että analyyttisen funktion reali- ja imaginaariosat ovat harmonisia. Todistus mukalee lähteen [9] todistusta.

Lemma 1.11. *Olkoon f analyyttinen funktio. Tällöin $\operatorname{Re}(f)$ ja $\operatorname{Im}(f)$ ovat harmonisia.*

Todistus. Koska $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ on analyyttinen, niin se toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Derivoimalla ylempää yhtälöä muuttujan x suhteen ja alemmaa muuttujan y suhteen saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Analyttisenä funktiona f on äärettömästi derivoituva ja koska

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

niin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

joten funktio $\operatorname{Re}(f) = u(x, y)$ on harmoninen. Vastaavalla päättelyllä nähdään, että myös funktio $\operatorname{Im}(f) = v(x, y)$ on harmoninen. \square

Muotoillaan seuraavaksi tuttu maksimiperiaate, toiselta nimeltään maksimimodululause, sekä seuraus, jota käytetään apuna Schwarzin lemmän todistuksessa.

Lause 1.12 (Maksimiperiaate/Maksimimodulilause). *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ alue ja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analyttinen. Jos on olemassa sellainen alueen Ω piste z_0 , jolle $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla alueen Ω pisteillä z , niin f on vakio alueessa Ω .*

Todistus. Kilpeläisen luentomonisteesta [10] sivulla 85. \square

Seuraus 1.13. *Olkoon Ω rajoitettu alue kompleksitasossa. Jos $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva ja analyttinen alueessa Ω niin $|f(z)|$ saavuttaa maksiminsa jossakin pisteessä $z_0 \in \partial\Omega$.*

Todistus. Palkan kirjassa [12] sivulla 171. \square

Seuraava lemma on maksimiperiaatteen versio harmonisille funktioille ja se tunnetaan nimellä Lindelöfin maksimiperiaate. Todistus mukailee Garnettin ja Marshallin kirjan [7] sivun 2 todistusta.

Lemma 1.14 (Lindelöfin maksimiperiaate). *Olkoon u harmoninen ja ylhäältä rajoitettu funktio alueessa Ω , jolle $\bar{\Omega} \neq \mathbb{C}$. Olkoon F joukon $\partial\Omega$ äärellinen osajoukko, ja oletetaan, että*

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0 \tag{1.3}$$

kaikilla $\zeta \in \partial\Omega \setminus F$. Tällöin $u(z) \leq 0$ joukossa Ω .

Todistus. Kiinnitetään piste $z_0 \notin \bar{\Omega}$. Tällöin kuvaus $1/(z - z_0)$ kuvaa alueen Ω rajoitetulle alueelle ja näin ollen voidaan olettaa, että myös Ω on rajoitettu. Jos oletus (1.3) pätee kaikille ζ joukossa $\partial\Omega$, niin lemma on tavallinen maksimiperiaate (Lause 1.12).

Olkoot nyt $F = \{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$ ja $\varepsilon > 0$, ja olkoon

$$u_\varepsilon(z) = u(z) - \varepsilon \sum_{j=1}^N \log \left(\frac{\text{diam}(\Omega)}{|z - \zeta_j|} \right),$$

missä $\text{diam}(\Omega) = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in \Omega\}$ on alueen Ω halkaisija. Tällöin u_ε on harmoninen funktio alueessa Ω , sillä u on harmoninen funktio, ja

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x^2} - \varepsilon \sum_{j=1}^N \frac{1}{|z - \zeta_j|} + \frac{\partial u}{\partial y^2} + \varepsilon \sum_{j=1}^N \frac{1}{|z - \zeta_j|} = 0.$$

Lisäksi $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u_\varepsilon(z) \leq 0$ kaikilla $\zeta \in \partial\Omega$. Näin ollen $u_\varepsilon \leq 0$ kaikilla ε , ja

$$u(z) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{j=1}^N \log \left(\frac{\text{diam}(\Omega)}{|z - \zeta_j|} \right) = 0. \quad \square$$

Soveltamalla Lindelöfin maksimiperiaatetta kahteen ehtotäyttävään ja melkein kaikkialla yhtä suureen harmoniseen funktioon voidaan muotoilla seuraava seuraus.

Seuraus 1.15. *Olkoot u ja v harmonisia ja ylhäältä rajoitettuja funktioita alueessa Ω ja jatkuvia joukossa $\bar{\Omega} \neq \mathbb{C}$. Olkoon F joukon $\partial\Omega$ äärellinen osajoukko, ja oletetaan, että*

$$u(z) = v(z)$$

kaikilla $z \in \partial\Omega \setminus F$. Tällöin $u(z) = v(z)$ alueessa Ω .

Seuraavaa lausetta käytetään luvussa 6 kahdesti yhtenäisten alueiden konformisen ekvivalenttiuden osoittamiseen. Lause on kätevä apuväline käyräintegraalien tarkastelussa, sillä se yhdistää käyrän kierrosluvun analyttisen funktion nollakohtien ja napojen lukumäärään.

Lause 1.16 (Argumentin periaate). *Olkoon f analyyttinen funktio kaikkialla muualla avoimessa joukossa U paitsi navoissaan. Olkoon γ positiivisuuntainen, yksinkertainen, suljettu ja paloittain sileä käyrä joukossa U siten, että Jordanin käyrä $|\gamma|$ ei kulje minkään funktion f nollakohdan tai navan yli ja olkoon käyrän $|\gamma|$ sisus D kokonaan joukon U sisällä. Tällöin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

missä Z ja P ovat funktion f nollakohdat ja navat joukossa D , kun jokainen nollakohta ja napa lasketaan monikertojensa verran.

Todistus. Palkan kirjassa [12] sivulla 340. □

Seuraavaa tangentin summakaavaa tarvitaan Haymanin-Wun lauseen todistuksessa.

Lemma 1.17. *Tangentille pätee seuraava laskukaava:*

$$\tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \theta \pm 1}{1 \mp \tan \theta}. \quad (1.4)$$

Todistus. Saadaan johtamalla sinin ja kosinin summakaavoista

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad \text{ja} \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\text{kun } x = \theta \text{ ja } y = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

Määritellään lopuksi Jordanin joukko ja muotoillaan Carathéodoryn lause.

Määritelmä 1.18. Yhdesti yhtenäinen joukko Ω on *Jordanin joukko*, jos sen reuna $\partial\Omega$ on suljettu polku.

Esitellään vielä lopuksi Haymanin-Wun lauseen todistuksessa tarpeellinen Carathéodory-Osgood-lauseen seuraus. Carathéodory-Osgood-lauseesta kerrotaan Palkan kirjassa [12] sivulla 445. Tässä työssä käytettävä seuraus kertoo, että Jordanin joukolta toiselle määritelty konformikuvaus voidaan jatkaa jatkuvaksi bijektioksi määrittelyjoukkonsa reunalle.

Lause 1.19 (Carathéodory). *Olkoon f konformikuvaus Jordanin joukolta Ω toiselle Jordanin joukolle Ω' . Tällöin f voidaan jatkaa jatkuvaksi bijektioksi $\tilde{f}: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}'$.*

Todistus. Palkan kirjassa [12] sivulla 446. □

2 Konformikuvaukset ja Möbius-kuvaukset

Tässä luvussa esitellään, mitä ovat konformikuvaukset ja Möbius-kuvaukset. Lisäksi tutustutaan kaksoisuhteeseen ja siihen, miten sen avulla voidaan määrittellä Möbius-kuvauksia, kun valitaan kolmen pisteen kuvautuminen. Lopuksi osoitetaan vielä Riemannin kuvauslause. Luvun pääasialliset lähteet ovat Zillin ja Shanahanin kirja [16], Palkan kirja [12] sekä Kilpeläisen luentomoniste [10].

2.1 Konformikuvaukset

Määriteellään ensiksi konformikuvauksen käsite.

Määritelmä 2.1 (Konformikuvaus). Olkoon Ω alue kompleksitasossa. Analyyttinen funktio $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on *konforminen pisteessä* z_0 , jos se säilyttää pisteessä z_0 leikkaavien käyrien välisen kulman suuruuden sekä suunnan.

Jos f kuvaa alueen Ω alueelle Ω' ja f on bijektio ja konforminen jokaisessa pisteessä $z \in \Omega$, niin kuvausta f kutsutaan *konformikuvaukseksi* alueelta Ω alueelle Ω' . Tällöin sanotaan, että alueet Ω ja Ω' ovat *konformisesti ekvivalentit*.

Määritelmässä käyrien välisellä kulmalla tarkoitetaan käyrien tangenttisuorien välistä terävää kulmaa käyrien leikkauspisteessä. Kyseisen määritelmän lisäksi analyttisen funktion f konformisuus pisteessä z_0 voidaan määrittellä myös funktion derivaatan avulla: jos funktion derivaatta eroaa nolasta pisteessä z_0 , niin funktio on konforminen kyseisessä pisteessä. Seuraava lause kertoo, että konformisuuden kaksi eri määritelmää ovat ekvivalentit. Lauseen todistus mukailee kirjan [16] sivun 392 todistusta.

Lause 2.2. *Olkoon z_0 piste alueessa Ω . Jos f on analyttinen funktio alueessa Ω , ja jos $f'(z_0) \neq 0$, niin f on konforminen pisteessä z_0 .*

Todistus. Olkoot C_1 ja C_2 sileitä käyriä alueessa Ω ja olkoot niiden parametrisaatiot $z_i(t_0) = z_0$, kun $i = 1, 2$. Olkoot C'_i käyrien C_i kuvat kuvauksen f suhteen. Merkitään käyrien C_i välistä kulmaa pisteessä z_0 kirjaimella θ ja kuvakäyrien C'_i välistä kulmaa pisteessä $f(z_0)$ kirjaimella ϕ . Tavoitteena on osoittaa, että kulmat θ ja ϕ ovat yhtä suuret sekä suuruuden että suunnan suhteen.

Voidaan olettaa, että tangenttivektori $z'_1 = z'_1(t_0)$ voidaan kiertää origon suhteen kulman θ verran vastapäivään tangentille $z'_2 = z'_1(t_0)$ tavittaessa numeroimalla käyrät C_i uudelleen. Näin ollen kulma θ on yksikäsitteinen argumenttien erotus

$$\theta = \arg(z'_2) - \arg(z'_1) \tag{2.1}$$

välillä $[0, \pi.]$

Käyrien C_i parametrisaatioiden avulla saadaan käyrien C'_i parametrisaatiot $f(z_i(t))$. Nyt yhdistetyn kuvauksen ketjusäännön nojalla kuvakäyrien C'_i tangenttivektorit pisteessä $f(z_0) = f(z_i(t_0))$ ovat

$$f'(z_i(t_0)) \cdot z'_i(t_0) = f'(z_0) \cdot z'_i.$$

Koska käyrät C_i ovat sileitä, niin tangenttivektorit z'_i eroavat nolasta. Lisäksi oletusten nojalla $f'(z_0) \neq 0$, joten myös tangenttivektorit $f'(z_0) \cdot z'_i$

eroavat nollasta. Näin ollen käyrien C'_i välinen kulma ϕ pisteessä $f(z_0)$ saa arvon

$$\phi = \arg(f'(z_0) \cdot z'_2) - \arg(f'(z_0) \cdot z'_1)$$

Nyt argumentin laskusääntöjen nojalla ϕ saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \phi &= \arg(f'(z_0) \cdot z'_2) - \arg(f'(z_0) \cdot z'_1) \\ &= \arg(f'(z_0)) + \arg(z'_2) - (\arg(f'(z_0)) + \arg(z'_1)) \\ &= \arg(z'_2) - \arg(z'_1). \end{aligned}$$

Huomataan, että kulman θ arvo (2.1) on yhtä suuri kulman ϕ kanssa, joten $\phi = \theta$ sekä suuruuden että suunnan suhteen, ja näin ollen f on konforminen pisteessä z_0 . \square

Edellisen lauseen myötä herää kysymys, mitä käyrien väliselle kulmalle tapahtuu derivaatan nollakohdassa. Määritellään ensiksi analyyttisen funktion kriittinen piste.

Määritelmä 2.3. Jos analyyttinen funktio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $f'(z_0) = 0$, niin pistettä z_0 kutsutaan funktion f *kriittiseksi pisteeksi*.

Osoitetaan nyt lause, joka kertoo kahden sileän käyrän välisen kulman käyttäytymisestä analyyttisen funktion f kriittisessä pisteessä, kun funktiolla f on derivaatta, jonka arvo eroaa nollasta kyseisessä pisteessä. Lause löytyy kirjasta [16] sivulta 393.

Lause 2.4. *Olkkoon f analyyttinen kriittisessä pisteessä z_0 . Jos $n > 1$ on kokonaisluku siten, että $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ ja $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ niin kahden sileän käyrän välinen kulma pisteessä z_0 kasvaa kertoimen n verran kuvauksessa f . Erityisesti, f ei ole konforminen pisteessä z_0 .*

Todistus. Koska f on analyyttinen, niin sille on olemassa Taylorin sarjakehitelmä

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Koska funktion f derivaatoista $n - 1$ ensimmäistä häviää, niin Taylorin sarja

voidaan kirjoittaa uudelleen muodossa

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(z_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\
&\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \\
&= f(z_0) + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!} (z - z_0)^{n+k} \\
&= f(z_0) + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n (1 + g(z)), \tag{2.2}
\end{aligned}$$

missä

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{f^{(n)}(z_0)} \frac{n!}{(n+k)!} (z - z_0)^k$$

on konformikuvaus, jolle $g(z) \rightarrow 0$, kun $z \rightarrow z_0$.

Funktion f muodosta (2.2) huomataan, että termi $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ määrää funktion f käyttäytymisen, ja koska funktio z^n kasvattaa kahden sileän käyrän välistä kulmaa kertoimen n verran, niin myös funktio f kasvattaa käyrien välistä kulmaa kertoimen n verran. Erityisesti, koska f ei säilytä kahden sileän käyrän välistä kulmaa pisteessä z_0 , niin f ei ole konforminen pisteessä z_0 . \square

2.2 Möbius-kuvaukset ja kaksoisuhde

Tässä osiossa käsitellään Möbius-kuvauksia, jotka ovat erityisen tärkeä konformikuvausten kategoria. Möbius-kuvaukset ovat saaneet nimensä saksalaiselta matemaatikolta August Möbiukselta (1790-1868). Määritellään ensiksi, mitä tarkoittaa Möbius-kuvaus.

Määritelmä 2.5. Olkoon $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vakioita siten, että $ad - bc \neq 0$. Tällöin funktiota $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2.3}$$

kutsutaan *Möbius-kuvaukseksi*.

Määritelmästä huomataan, että Möbius-kuvausten normaalimuoto (2.3) on hyvin yksinkertainen. Möbius-kuvaukset voidaan kuitenkin pilkkoa vielä yksinkertaisempiin osiin, joita kutsutaan yksinkertaisiksi Möbius-kuvauksiksi. Tarkastellaan kyseisiä kuvauksia seuraavassa huomautuksessa, joka seurailee luentomonisteen [10] huomautusta sivulta 138.

Huomautus 2.6 (Yksinkertaiset Möbius-kuvaukset). Yksinkertaiset Möbius-kuvaukset ovat sellaisia Möbius-kuvauksia, joissa yksi tai useampi normaali-muodon (2.3) kertoimista a , b , c ja d häviää.

Möbius-kuvausta

$$f(z) = z + b, \quad b \in \mathbb{C}$$

kutsutaan siirroksi tai translaatioksi. Siirto pitää äärettömyyspisteen paikallaan: $f(\infty) = \infty$.

Kuvausta

$$g(z) = az, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

kutsutaan kierroksi, mikäli $|a| = 1$. Kuvaus kiertää kompleksitasoa origon ympäri kulman $\text{Arg}(a)$ verran, missä $\text{Arg}(a)$ on argumentin päähaara. Myös kierto pitää äärettömyyspisteen paikallaan: $g(\infty) = \infty$.

Jos kuvauksen g kerroin a on reaaliluku, niin tällöin kyseessä on dilaatio. Erityisesti kyseessä on kutistus, mikäli $|a| < 1$, ja jos $|a| > 1$, niin kyseessä on venytys.

Kierto, venytys ja kutistus voidaan niputtaa yhdeksi yleiseksi tapaukseksi $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sillä

$$a = |a| \frac{a}{|a|}.$$

Tässäkin tapauksessa äärettömyyspiste pysyy paikallaan: $g(\infty) = \infty$.

Viimeinen tyyppi yksinkertaisia Möbius-kuvauksia on inversio

$$h(z) = \frac{1}{z}.$$

Edellisistä poiketen inversio ei pidä äärettömyyspistettä paikallaan, vaan se vaihtaa paikkaa origon kanssa: $h(\infty) = 0$ ja $h(0) = \infty$.

Kuten aiemmin jo vihjattiin, kaikki Möbius-kuvaukset voidaan kirjoittaa edellä esiteltyjen yksinkertaisten Möbius-kuvausten yhdisteenä. Seuraavan lauseen todistus seurailee kirjan [12] todistusta sivulla 391.

Lause 2.7. *Jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää yksinkertaisten Möbius-kuvausten $z \mapsto z + b$, $z \mapsto az$ ja $z \mapsto \frac{1}{z}$ yhdisteenä.*

Todistus. Kun $c = 0$, niin normalisoitu Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

saa muodon

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

mistä helposti nähdään, että se on dilaation ja siirron yhdiste.

Kun $c \neq 0$, niin Möbius-kuvaus f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}, \quad (2.4)$$

joka yksinkertaisten Möbius-kuvausten

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + \frac{d}{c}, \\ f_2(z) &= \frac{1}{z} \\ f_3(z) &= \frac{bc - ad}{c^2} z \quad \text{ja} \\ f_4(z) &= z + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

yhdistetty kuvaus

$$f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z),$$

kuten haluttiin. □

Möbius-kuvausten rakenteen tarkastelun jälkeen voidaan siirtyä käsittelemään niiden perusominaisuuksia. Todistetaan ensimmäiseksi, että Möbius-kuvaukset ovat konformikuvauksia kaikkialla muualla paitsi kriittisessä pisteessään. Todistus löytyy lähteestä [10] sivulta 137.

Lause 2.8. *Möbius-kuvaus $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ on homeomorfismi ja konformikuvaus alueessa $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.*

Todistus. Normaalimuodossa (2.3) kirjoitettu Möbius-kuvaus f on lineaarikuvauksen ja rationaalisen funktion yhdisteenä jatkuva bijektio alueelta $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ kompleksitasolle \mathbb{C} . Lisäksi

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

ja koska

$$ad - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0,$$

niin funktion f käänteisfunktio f^{-1} on edelleen Möbius-kuvaus ja näin ollen jatkuva bijektio alueelta $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ kompleksitasolle \mathbb{C} , joten f on homeomorfismi kyseisessä alueessa.

Lisäksi f on analyyttinen alueessa $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, ja koska $z = -\frac{d}{c}$ on Möbius-kuvauksen f ainoa kriittinen piste, niin f on konformikuvaus alueessa $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. □

Jos $c = 0$, niin alue $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ on kompleksitaso \mathbb{C} ja funktio f on lineaarikuvaus, ja joten edellisestä lauseesta saadaan seuraava seuraus.

Seuraus 2.9. *Jos $c = 0$, niin Möbius-kuvaus $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on konformikuvaus koko kompleksitasossa \mathbb{C} .*

Siirrytään nyt tarkastelemaan Möbius-kuvausten käyttäytymistä kompleksitasossa ja sitä, kuinka ne kuvaavat erilaisia käyriä ja alueita. Määritellään ensiksi funktion f napa.

Määritelmä 2.10. Olkoon f analyyttinen ja olkoon $f(z) \neq 0$ jossakin pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä. Piste z_0 on funktion *napa*, jos se on funktion $1/f$ nollakohta.

Seuraava lause on näppärä apuväline tarkastelemaan, kuinka ympyrät, kuten yksikkökierros \mathbb{D} , kuvautuvat Möbius-kuvauksien suhteen. Lause kertoo, että Möbius-kuvaukset kuvaavat ympyrät joko ympyröiksi tai suoriksi riippuen siitä, onko funktion napa kuvattavalla ympyrällä. Laajennetussa kompleksitasossa suorat voidaan myös ajatella ympyröinä, jotka kulkevat äärettömyyspisteen kautta ja siksi suoria ja ympyröitä kutsutaan myös nimellä *yleistetyt ympyrät*. Todistus on muotoiltu kirjan [16] sivun 402 todistuksen pohjalta.

Lause 2.11. *Jos C on ympyrä kompleksitasossa ja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on Möbius-kuvaus, niin kuva $f(C) \subset \mathbb{C}$ on joko ympyrä tai suora. Kuva on suora, jos ja vain jos $c \neq 0$ ja funktion f napa $z = -\frac{d}{c}$ on ympyrän C kehällä.*

Todistus. Kun $c = 0$, niin f on lineaarikuvaus, joten se kuvaa ympyrät ympyröiksi. Riittää siis osoittaa tapaus $c \neq 0$. Möbius-kuvauksen muodon (2.4) avulla f voidaan kirjoittaa yksinkertaisten Möbius-kuvausten yhdisteenä $f(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$, missä

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + \frac{d}{c}, \\ f_2(z) &= \frac{1}{z} \quad \text{ja} \\ f_3(z) &= Az + B. \end{aligned}$$

Tällöin f_1 ja f_3 ovat lineaarikuvauksia ja f_2 on inversio, ja näin ollen ympyrän C kuva $f_1(C) = C'$ on ympyrä. Tarkastellaan seuraavaksi kahta tapausta: (i) origo on ympyrän C' kehällä ja (ii) origo ei ole ympyrän C' kehällä.

(i) Oletetaan, että origo $z = 0$ on ympyrän $f_1(C) = C'$ kehällä. Tällöin kuvauksen f napa $z = -\frac{d}{c}$ on ympyrän C kehällä, sillä $f_1(-\frac{d}{c}) = 0$.

Tarkastellaan seuraavaksi, kuinka kuvaus f_2 kuvaa suoria. Yhdistetty kuvaus $f_2 = g^{-1} \circ f_2 \circ g$, missä g on kierto, kuvaa origon kautta kulkevan suoran reaali- tai imaginaariakselin suuntaiselle suoralle. Koska g sekä käänteiskuvaus g^{-1} kuvaavat suorat suoriksi ja ympyrät ympyröiksi, niin riittää tarkastella vain akseleiden suuntaisten suorien kuvautumista. Laskemalla kolmen imaginaariakselin suuntaisella suoralla $x = k \neq 0$ olevan pisteen kuvautumisen saadaan

$$f_2(k + ik) = \frac{1 - i}{2k}, \quad f_2(k) = \frac{2}{2k} \quad \text{ja} \quad f_2(k - ik) = \frac{1 + i}{2k}.$$

Koska pisteet $1 - i$, 2 ja $1 + i$ ovat ympyrällä $|z - 1| = 1$, niin testipisteet kuvautuvat ympyrälle $|z - \frac{1}{2k}| = |\frac{1}{2k}|$. Vastaavasti huomataan, että reaaliakselin suuntaisen suoran $y = k$ kuva kuvauksen f_2 suhteen on ympyrä $|z + \frac{1}{2k}i| = |\frac{1}{2k}|$. Nyt, koska $f_2^{-1}(z) = \frac{1}{z} = f_2(z)$, niin jos piste $z = 0$ on ympyrällä C' , niin ympyrän C' kuva kuvauksen f_2 suhteen on joko reaali- tai imaginaariakselin suuntainen suora L . Lopuksi, koska f_3 on lineaarikuvaus, niin suoran L kuva kuvauksen f_3 suhteen on myös suora. Näin ollen, jos napa $z = -\frac{d}{c}$ on ympyrällä C , niin ympyrän C kuva kuvauksen f suhteen on suora.

(ii) Oletetaan nyt, että origo $z = 0$ ei ole ympyrän $f_1(C) = C'$ kehällä. Tällöin edellisen tapauksen nojalla kuvauksen f napa $z = -\frac{d}{c}$ ei ole ympyrän C kehällä. Tarkastellaan seuraavaksi ympyrän C' kaavaa $|z - z_0| = \rho$. Jos valitaan $\zeta = f_2(z) = \frac{1}{z}$ ja $\zeta_0 = f_2(z_0) = \frac{1}{z_0}$, niin kaikille pisteille z ympyrän C' kehällä pätee

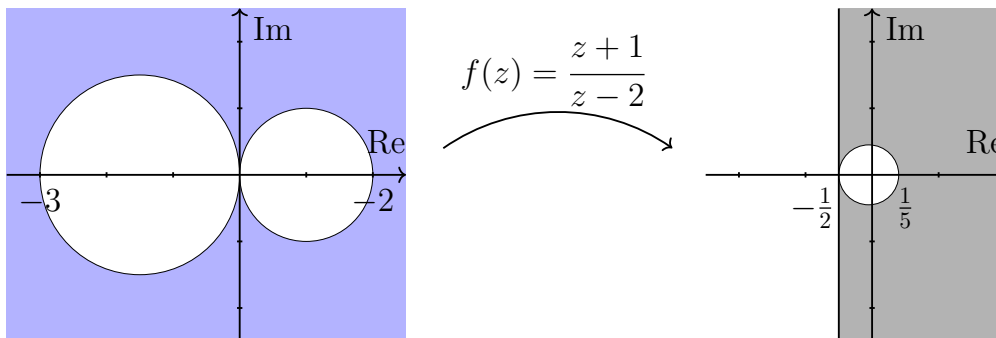
$$|\zeta - \zeta_0| = \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z||z_0|} = \rho |\zeta| |\zeta_0|. \quad (2.5)$$

Voidaan myös osoittaa, että yhtälön

$$|\zeta - a| = \lambda |\zeta - b| \quad (2.6)$$

toteuttavat pisteet ovat suora, jos $\lambda = 1$ ja ympyrä, jos $\lambda > 0$ ja $\lambda \neq 1$. Näin ollen jos $a = \zeta_0$, $b = 0$ ja $\lambda = \rho |\zeta_0|$, niin yhtälö (2.5) voidaan kirjoittaa muodossa (2.6). Koska origo $z = 0$ ei ole ympyrällä C' , eli se ei toteuta yhtälöä $|z - z_0| = \rho$, niin $|z_0| \neq \rho$. Näin ollen $\lambda = \rho |\zeta_0| = \frac{\rho}{|z_0|} \neq 1$, jolloin yhtälön (2.5) toteuttavat pisteet ovat jokin ympyrä C'' . Lopuksi, koska f_3 on lineaarikuvaus, niin ympyrän C'' kuva kuvauksen f_3 suhteen on edelleen ympyrä, joten ympyrän C kuva kuvauksen f suhteen on ympyrä. \square

Vastaavanlaisella päättelyketjulla voidaan osoittaa myös seuraava, edellistä lausetta vastaava tulos suorien kuvautumisesta Möbius-kuvausten suhteen. Seuraus löytyy kirjasta [16] sivulta 403.



Kuva 2.1: Alueen kuvautuminen esimerkissä 2.13.

Lause 2.12. Jos $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on Möbius-kuvaus, niin suoran L kuva on joko ympyrä tai suora. Kuva on ympyrä jos ja vain jos $c \neq 0$ ja napa $z = -\frac{d}{c}$ ei ole suoralla L .

Seuraavassa esimerkissä käydään läpi, miten edellisiä lauseita voidaan käyttää apuna tarkastelemaan, kuinka erilaiset suorien ja ympyröiden rajaamat laajennetun kompleksitason osajoukot kuvautuvat Möbius-kuvauksen suhteen. Esimerkki on harjoitustehtävä kirjan [16] sivulta 409 (tehtävä 15).

Esimerkki 2.13. Määritetään, miten Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{z+1}{z-2}$$

kuvaa joukon $\left\{z: \left|z + \frac{3}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right\} \cap \left\{z: |z-1| \geq 1\right\}$.

Koska kuvauksen f napa $z = 2$ on ympyrän $C_1 = \{z: |z-1| = 1\}$ kehällä, niin lauseen 2.11 nojalla ympyrän C_1 kuva on suora L . Toisaalta napa ei ole ympyrän $C_2 = \left\{z: \left|z + \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}\right\}$ kehällä, joten sen kuva puolestaan on ympyrä C'_2 . Koska ympyrät leikkaavat origossa, niin kuvajoukot $f(C_1)$ ja $f(C_2)$ leikkaavat pisteessä $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Huomataan, että molemmat ympyrät C_1 ja C_2 ovat symmetrisiä reaaliakselin suhteen, eli jos piste z on ympyrän kehällä, niin myös piste \bar{z} on ympyrän kehällä. Lisäksi huomataan, että kaikille z pätee

$$f(\bar{z}) = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-2} = \overline{\frac{z+1}{z-2}} = \overline{f(z)}.$$

Näin ollen, jos pisteet z ja \bar{z} ovat ympyrällä C_i , $i = 1, 2$, niin myös pisteet $w = f(z)$ ja $\bar{w} = f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ ovat ympyrän C_i kuvajoukossa. Näin ollen sekä suora L että ympyrä C'_2 ovat symmetrisiä reaaliakselin suhteen.

Koska suora L on symmetrinen reaaliakselin suhteen ja se kulkee pisteen $z = -\frac{1}{2}$ kautta, niin on oltava $L = \{z: \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}\}$. Lisäksi, koska pisteet $z = -3$ ja $z = 0$ ovat ympyrällä C_2 , niin pisteet $f(-3) = \frac{2}{5}$ ja $f(0) = -\frac{1}{2}$ ovat ympyrällä C'_2 ja symmetrian nojalla ne ovat sen halkaisijan päätepisteet. Ympyrä C_2 kuvautuu siis joukoksi $C'_2 = \left\{ \left| z + \frac{1}{20} \right| = \frac{9}{20} \right\}$. Koska $f(3) = 4$ on ympyrän C'_2 ulkopuolella ja suoran L oikealla puolella, niin joukko $\left\{ z: \left| z + \frac{3}{2} \right| \geq \frac{3}{2} \right\} \cap \left\{ z: |z - 1| \geq 1 \right\}$ kuvautuu joukoksi

$$\left\{ \operatorname{Re}(z) \geq -\frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ \left| z + \frac{1}{20} \right| \geq \frac{9}{20} \right\}.$$

Aiemmin Möbius-kuvaukset määriteltiin muodossa

$$f(z) = \frac{az + b}{cd + d}, \quad ad - bd \neq 0.$$

Möbius-kuvaus voidaan esittää myös eri muodossa, kunhan samat periaatteet pätevät edelleen. Seuraava lause kertoo, että Möbius-kuvaus

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad \alpha \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R}$$

on konforminen bijektio kaikkialla yksikkökiekossa \mathbb{D} . Todistus löytyy lähteestä [10] sivulta 145.

Lause 2.14. *Olkoot $\alpha \in \mathbb{D}$ ja $\theta \in \mathbb{R}$. Tällöin Möbius-kuvaus*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \tag{2.7}$$

määrää konformisen bijektion $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, jolle $f(\alpha) = 0$.

Todistus. Tarkistetaan ensin, että f on Möbius-kuvaus, eli normaalimuotoon kirjoitettuna sille pätee $ad - bc \neq 0$:

$$e^{i\theta}(1 - \alpha\bar{\alpha}) = e^{i\theta}(1 - |\alpha|^2) \neq 0,$$

sillä $|\alpha| < 1$.

Tarkastellaan nyt, mihin f kuvaa yksikkökiekon \mathbb{D} kehän. Kun $|z| = 1$, niin

$$|f(z)| = |e^{i\theta}| \frac{|z - \alpha|}{|1 - \bar{\alpha}z|} = \frac{|z - \alpha|}{|z| \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} - \bar{\alpha} \right|} = \frac{|z - \alpha|}{|\bar{z} - \bar{\alpha}|} = \frac{|z - \alpha|}{|z - \alpha|} = 1,$$

eli

$$f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}.$$

Yksikkökieron kehä siis kuvautuu itselleen. Lopuksi, koska α on yksikkökieron sisäpiste, ja koska $f(\alpha) = 0$, niin yksikkökieron sisäpisteet kuvautuvat yksikkökieron sisäpisteiksi. Näin ollen f on bijektiivinen konformikuvaus yksikkökierolta itselleen. \square

Osoitetaan nyt, että edellisen lauseen oletukset pätevät myös toiseen suuntaan. Todistus on muotoiltu kirjan [12] sivun 388 todistuksen pohjalta.

Lause 2.15. *Funktiot, jotka kuvaavat yksikkökieron \mathbb{D} konformisesti itselleen ovat muotoa $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$,*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad (2.8)$$

missä θ on reaaliluku ja α on kompleksiluku, jolle $|\alpha| < 1$.

Huomautus 2.16. Lauseen 2.15 todistuksessa käytetään apuna myöhemmin todistettavaa Schwarzin lemmaa (Lause 3.13). Näin voidaan tehdä, sillä lausetta 2.15 ei käytetä Schwarzin lemmän todistuksessa.

Lauseen 2.15 todistus. Osoitetaan, että mielivaltainen yksikkökieron \mathbb{D} konformisesti itselleen kuvaava funktio on muotoa (2.7). Olkoon $\alpha = f^{-1}(0)$. Tarkastellaan funktiota $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $g = f \circ k$, missä $k: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$,

$$k(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z}.$$

Tällöin myös funktio g kuvaa yksikkökieron konformisesti itselleen ja sille pätee

$$g(0) = f(k(0)) = f(\alpha) = f(f^{-1}(0)) = 0.$$

Tällöin myöhemmin todistettavan Schwarzin lemmän (Lause 3.13) nojalla $|g'(0)| \leq 1$. Myös käänteisfunktio g^{-1} kuvaa yksikkökieron konformisesti itselleen ja pitää origon paikallaan, joten soveltamalla Schwarzin lemmaa käänteisfunktioon saadaan epäyhtälö

$$\frac{1}{|g'(0)|} = |(g^{-1})'(0)| \leq 1,$$

mistä seuraa, että $|g'(0)| = 1$. Edelleen Schwarzin lemmän nojalla näin tapahtuu vain, mikäli $g(z) = e^{i\theta}z$ jollekin reaaliluvulle θ . Tarkastellaan nyt funktiota $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$,

$$h(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

Koska

$$k(h(z)) = \frac{z(1 - |\alpha|^2)}{1 - |\alpha|^2} = z,$$

niin h on funktion k käänteiskuvaus ja näin ollen $f = g \circ k^{-1} = g \circ h$, joka on haluttua muotoa (2.8). \square

Kun edellisen lauseen funktioon (2.8) valitaan $\alpha = 0$, huomataan, että kyseessä on kierto kuvaus.

Seuraus 2.17. *Olkoon f yksikkökieken itselleen konformisesti kuvaava funktio, jolle $f(0) = 0$. Tällöin f on kierto, eli*

$$f(z) = e^{i\theta} z,$$

kun θ on reaalityyppi.

Huomautus 2.18. Yksikkökieken itselleen kuvaava konformikuvaus kirjoitetaan joskus myös muodossa

$$f(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

missä $|\lambda| < 1$ ja $|\alpha| < 1$.

Edellä tarkasteltiin joitakin Möbius-kuvausten ominaisuuksia. Seuraavaksi herääkin kysymys, kuinka Möbius-kuvauksia voidaan muodostaa. Myöhemmin esiteltävä kaksoissuhde antaa keinon muodostaa Möbius-kuvauksia kompleksitason osajoukkojen välille. Käsitellään sitä ennen vielä kaksi lausetta, jotka antavat kaksoissuhteelle pohjaa.

Muistetaan, että (laajennetun) kompleksitason piste z_0 on kuvauksen f kiintopiste, mikäli $f(z_0) = z_0$. Seuraava lause kertoo, että Möbius-kuvauksella on korkeintaan kaksi kiintopistettä. Todistus pohjautuu kirjan [12] sivun 394 todistukseen.

Lause 2.19. *Olkoon f Möbius-kuvaus. Jos f ei ole identtinen kuvaus $f(z) = z$, niin kuvauksella f on korkeintaan kaksi kiintopistettä.*

Todistus. Oletetaan, että f on normaalimuodossa

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Oletetaan ensiksi, että $c = 0$. Tällöin $ad = 1$, ja f on muotoa $f(z) = \alpha z + \beta$, missä $\alpha = \frac{a}{d}$ ja $\beta = \frac{b}{d}$. Kuvaus on lineaarikuvaus ja se kiinnittää äärettömyyspisteen ∞ . Mikäli lisäksi $\alpha \neq 1$, niin kuvaus kiinnittää myös pisteen $-\beta/(\alpha - 1)$, sillä

$$f\left(\frac{-\beta}{\alpha - 1}\right) = \frac{-\alpha\beta}{\alpha - 1} + \beta = \frac{-\alpha\beta + \beta\alpha - \beta}{\alpha - 1} = \frac{-\beta}{\alpha - 1}.$$

Mikäli $\alpha = 1$ ja $\beta = 0$, niin f on identtinen kuvaus, joten yhtälöllä $\alpha z + \beta = z$ ei ole muita ratkaisuja. Näin ollen kuvauksella f on korkeintaan kaksi kiintopistettä, kun $c = 0$.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $c \neq 0$. Tällöin

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{ja} \quad f(\infty) = \frac{a}{c},$$

joten kumpikaan pisteistä $-d/c$ tai ∞ ei ole kuvauksen f kiintopiste. Ainoat kiintopisteet ovat siis yhtälön

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

äärelliset juuret. Järjestämällä termit uudelleen saadaan toisen asteen yhtälö

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

jolla on korkeintaan kaksi juurta. Näin ollen Möbius-kuvauksella f , joka ei ole identtinen kuvaus, on kaikissa tapauksissa korkeintaan kaksi kiintopistettä. \square

Seuraava lause on hyvin tärkeä tulos Möbius-kuvauksille. Se kertoo, että laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbb{C}}$ kolmelle eri pisteelle z_1, z_2 ja z_3 voidaan valita toiset kolme eri pistettä w_1, w_2 ja w_3 , joihin ensimmäiset kolme kuvautuvat. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus, joka kuvaa valitut pisteet halutulla tavalla. Lause ja sen todistus yhdistävät kirjan [12] lauseen ja seurauksen sivulta 395.

Lause 2.20. *Olkoot z_1, z_2 ja z_3 kolme eri pistettä laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$. Jos w_1, w_2 ja w_3 ovat kolme eri pistettä laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$, niin on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ jolle*

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2 \quad \text{ja} \quad f(z_3) = w_3.$$

Todistus. Olemassaolon osoittamiseksi oletetaan ensin, että pisteet z_1, z_2 ja z_3 ovat äärellisiä. Tällöin

$$f(z) = \frac{(z_1 - z_3)(z - z_2)}{(z_1 - z_2)(z - z_3)} = \frac{(z_1 - z_3)z + (z_3z_2 - z_1z_2)}{(z_1 - z_2)z + (z_2z_3 - z_1z_3)} \quad (2.9)$$

on Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet z_1, z_2 ja z_3 pisteiksi $1, 0$ ja ∞ . Jos jokin pisteistä z_1, z_2 tai z_3 on äärettömyyspiste ∞ , niin vastaava kuvaus saadaan, kun oikea termi funktiossa (2.9) lähestyy ääretöntä. Tällöin

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z - z_2}{z - z_3}, & \text{jos } z_1 = \infty \\ \frac{z_1 - z_3}{z - z_3}, & \text{jos } z_2 = \infty \\ \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}, & \text{jos } z_3 = \infty. \end{cases}$$

Valitaan nyt Möbius-kuvaukset g ja h siten, että $g(z_1) = 1 = h(w_1)$, $g(z_2) = 0 = h(w_2)$ ja $g(z_3) = \infty = h(w_3)$. Tällöin $f = h^{-1} \circ g$ on Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet z_1, z_2 ja z_3 pisteiksi w_1, w_2 ja w_3 .

Yksikäsitteisyyden osoittamiseksi olkoot f ja g Möbius-kuvauksia, jotka kuvaavat pisteet z_1, z_2 ja z_3 pisteiksi $1, 0$ ja ∞ tässä järjestyksessä. Tällöin kuvaus $h = f^{-1} \circ g$ on Möbius-kuvaus, joka kiinnittää pisteet z_1, z_2 ja z_3 . Kuvauksella h on siis kolme kiintopistettä ja näin ollen lauseen 2.19 nojalla se on identtinen kuvaus, joten $g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f \circ h = f$. \square

Tarkastellaan seuraavaksi, mikä on kaksoissuhde ja miten sen avulla voidaan muodostaa Möbius-kuvauksia. Kuten kirjassa [16] sivulla 405 kerrotaan, usein sovelluksissa tarvitaan konformikuvausta esimerkiksi ympyrän rajoittamalta alueelta Ω suoran rajoittamalle alueelle Ω' . Aiemmin osoitettiin, että Möbius-kuvaukset kuvaavat yleistettyjä ympyröitä yleistetyiksi ympyröiksi ja näin ollen ne soveltuvatkin tähän tehtävään mainiosti. Onkin määriteltävä keino rakentaa sellaisen Möbius-kuvaus f , joka kuvaa lähtöjoukon Ω reunalta halutut pisteet kuvajoukon Ω' reunan pisteiksi. Tällaisen Möbius-kuvauksen rakentamiseen voidaan käyttää kaksoissuhdetta.

Määritelmä 2.21. Kompleksitason \mathbb{C} eri pisteiden z_1, z_2, z_3 ja z_4 *kaksoissuhde* on

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}.$$

On huomattava, että kaksoissuhdetta laskiessa kompleksilukujen järjestyksellä on väliä: lukujen $0, 2, i$ ja 1 kaksoissuhde on

$$[0, 2, i, 1] = \frac{0 - i}{0 - 2} \frac{2 - 1}{i - 1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i,$$

kun taas lukujen $0, i, 2$ ja 1 kaksoissuhde on on

$$[0, i, 2, 1] = \frac{0 - 2i - 1}{0 - i2 - 1} = 2 + 2i.$$

Kaksoissuhde voidaan myös laajentaa laajennettuun kompleksitasoon $\hat{\mathbb{C}}$. Tällöin, mikäli jokin pisteistä z_1, z_2, z_3 tai z_4 on ∞ , kaksoissuhde saadaan laskemalla raja-arvo, kun kyseinen piste lähestyy ääretöntä:

$$\begin{cases} [\infty, z_2, z_3, z_4] = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} = \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}, \\ [z_1, \infty, z_3, z_4] = \lim_{z_2 \rightarrow \infty} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_4 - z_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}, \\ [z_1, z_2, \infty, z_4] = \lim_{z_3 \rightarrow \infty} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_1} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_1}, \\ [z_1, z_2, z_3, \infty] = \lim_{z_4 \rightarrow \infty} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Huomautus 2.22. Kaksoissuhde $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ kuvastaa kompleksilukua $f(z_4)$, missä f on yksikäsitteinen Möbius-kuvaus, jolle

$$f(z_1) = 1, \quad f(z_2) = 0, \quad \text{ja} \quad f(z_3) = \infty,$$

kuten funktio (2.9) lauseen 2.20 todistuksessa. Kaksoissuhde on äärellinen luku, joka ei koskaan saavuta arvoa 0 tai 1 , sillä määritelmän nojalla pisteet z_i ovat eri pisteitä.

Seuraava lause on avainasemassa määriteltäessä Möbius-kuvausta kompleksitason pisteiden avulla, sillä se kertoo, että Möbius-kuvaus säilyttää kaksoissuhteen. Todistus löytyy kirjan [12] sivulta 396.

Lause 2.23. *Jos $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ on Möbius-kuvaus ja z_1, z_2, z_3 ja z_4 neljä eri pistettä laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$, niin*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)].$$

Todistus. Olkoon

$$g(z) = [z_1, z_2, z_3, z]$$

se yksikäsitteinen Möbius-kuvaus, jolle

$$g(f(z_1)) = 1, \quad g(f(z_2)) = 0, \quad \text{ja} \quad g(f(z_3)) = \infty.$$

Tällöin huomautuksen 2.22 nojalla

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = g \circ f(z_4) = g(f(z_4)) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)],$$

kuten haluttiin. □

Lause 2.23 antaa välineet muodostaa Möbius-kuvaus, joka kuvaa annetut pisteet z_1, z_2 ja z_3 kolmeksi pisteeksi w_1, w_2 ja w_3 , sillä kun $z \neq z_1, z_2, z_3$, niin $f(z)$ voidaan ratkaista yhtälöstä

$$[z_1, z_2, z_3, z] = [w_1, w_2, w_3, f(z)]. \quad (2.11)$$

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä kyseisestä prosessista.

Esimerkki 2.24. Muodostetaan Möbius-kuvaus, joka kuvaa yksikkökierokkeen \mathbb{D} reunan pisteet $i, 1$ ja $-i$ origon kautta kulkevalle suoralle pisteiksi $-2 - 2i, 1 + i$ ja ∞ .

Lasketaan ensiksi pisteiden $z_1 = i, z_2 = 1, z_3 = -i$ ja z kaksoissuhde:

$$[i, 1, -i, z] = \frac{i - (-i)}{i - 1} \frac{1 - z}{-i - z} = \frac{(1 - i)(1 - z)}{-z - i}.$$

Pisteiden $w_1 = -2 - 2i, w_2 = 1 + i, w_3 = \infty$ ja $f(z)$ kaksoissuhde saadaan tuloksesta (2.10):

$$[-2 - 2i, 1 + i, \infty, f(z)] = \frac{1 + i - f(z)}{1 + i - (-2 - 2i)} = \frac{1 + i - f(z)}{3 + 3i}.$$

Nyt tuloksen (2.11) nojalla

$$[i, 1, -i, z] = [-2 - 2i, 1 + i, \infty, f(z)],$$

eli

$$\frac{(1 - i)(1 - z)}{-z - i} = \frac{1 + i - f(z)}{3 + 3i},$$

josta ratkaisemalla $f(z)$ saadaan kaava

$$f(z) = \frac{(-5 + i)z + 5 + i}{z + i}.$$

2.3 Riemannin kuvauslause

Tässä osiossa todistetaan Riemannin kuvauslause, joka on hyvin keskeinen lause konformikuvauksia tutkittaessa. Lause kertoo, että jokainen yhdesti yhtenäinen alue voidaan kuvata konformikuvauksella yksikkökierokkeelle. Koska konformikuvaukset ovat bijektioita, niin Riemannin kuvauslauseen seurauksena kaikki yhdesti yhtenäiset alueet ovat konformisesti ekvivalentteja. Lause on nimetty saksalaisen matemaatikon Bernhard Riemannin (1826-1866) mukaan, sillä hän esitteli sen ensimmäisen kerran vuonna 1851 väitöskirjassaan.

Riemannin alkuperäinen todistus lauseelle ei kuitenkaan ollut aukoton, mutta myöhemmin lause on todistettu aukottomasti.

Osoitetaan ensiksi kätevä lemma, jota käytetään Riemannin kuvauslauseen todistuksessa apuna olemassaolon todistamiseen. Todistus löytyy kirjan [12] sivulta 418.

Lemma 2.25. *Olkkoon $\Omega \neq \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue, ja olkkoon z_0 piste alueessa Ω . Olkkoon $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ injektiivinen konformikuvaus siten, että seuraavat ehdot täyttyvät:*

$$(i) f(\Omega) \subset \mathbb{D}$$

$$(ii) f(z_0) = 0 \text{ ja } f'(z_0) > 0.$$

Oletetaan, että $f(\Omega) \neq \mathbb{D}$. Tällöin on olemassa konformikuvaus $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, jolla on myös nämä ominaisuudet, mutta $g'(z_0) > f'(z_0)$.

Todistus. Merkitään $f(\Omega) = \Omega_0$. Kirjoitetaan g yhdistettynä kuvauksena

$$g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f,$$

missä kuvaukset g_1 , g_2 ja g_3 rakennetaan seuraavasti.

Määritellään ensimmäiseksi funktio g_1 . Valitaan aluksi piste b alueesta $\mathbb{D} \setminus \Omega_0$. Koska origo $f(z_0) = 0$ on alueessa Ω_0 , niin $b \neq 0$. Lauseen 2.14 nojalla Möbius-kuvaus

$$g_1(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

kuvaa yksikkökierokkeen \mathbb{D} konformisesti itselleen. Ω_0 on yksikkökierokkeen \mathbb{D} yhdesti yhtenäinen osajoukko, joten g_1 kuvaa sen toiselle yhdesti yhtenäiselle yksikkökierokkeen \mathbb{D} osajoukolle. Merkitään sitä $\Omega_1 = g_1(\Omega_0) \subset \mathbb{D}$. Koska piste b ei ole alueessa Ω_0 ja koska $g_1(b) = 0$, niin origo ei ole alueessa Ω_1 . Toisaalta, koska alue Ω_0 taas sisältää origon, niin piste

$$g_1(0) = -b$$

sisältyy alueeseen Ω_1 .

Todistuksen lopussa lasketaan funktion g derivaatta sekä derivaatan arvo pisteessä z_0 . Ketjusäännön nojalla ne lasketaan jokaiselle yhdistetyn funktion osafunktiolle. Funktion g_1 derivaatta ja sen arvo pisteessä $f(z_0) = 0$ ovat

$$g_1'(z) = \frac{1 - |b|^2}{(1 - \bar{b}z)^2}, \quad g_1'(0) = 1 - |b|^2.$$

Määritellään seuraavaksi funktio g_2 . Koska alue Ω_1 on yhdesti yhtenäinen, niin lauseen 1.4 nojalla alueessa Ω_1 on olemassa logaritmin haara. Valitaan haaroista yksi ja merkitään sitä kirjaimella L . Lisäksi tärkeimpänä, alueessa Ω_1 logaritmin haaralle L on olemassa neliöjuurifunktion haara

$$g_2(z) = \exp\left(\frac{L(z)}{2}\right).$$

Tällöin $|g_2(z)| = \sqrt{|z|} < 1$ kaikkialla alueessa Ω_1 . Lisäksi g_2 on analyyttinen injektio alueessa Ω_1 , sillä jos $g_2(z) = g_2(\tilde{z})$, niin $z = (g_2(z))^2 = (g_2(\tilde{z}))^2 = \tilde{z}$. Toisin sanoen g_2 on konformikuvaus alueessa Ω_1 ja $\Omega_2 = g_2(\Omega_1) \subset \mathbb{D}$ on yhdesti yhtenäinen yksikkökiekon osajoukko. Koska alue Ω_1 sisältää pisteen $-b$, niin $c = g_2(-b)$ on piste alueessa Ω_2 . Lasketaan lopuksi funktion g_2 derivaatta sekä sen arvo pisteessä $g_1(f(z_0)) = g_1(0) = -b$:

$$g_2'(z) = g_2(z) \cdot \frac{1}{2}L'(z) = g_2(z) \frac{1}{2(g_2(z))^2} = \frac{1}{2g_2(z)}$$

ja

$$g_2'(-b) = \frac{1}{2g_2(-b)} = \frac{1}{2c}.$$

Määritellään lopuksi funktio g_3 . Olkoon g_3 konformikuvaus yksikkökielekoltta \mathbb{D} itselleen,

$$g_3(z) = \frac{u(z-c)}{1-\bar{c}z},$$

missä $u = \exp(i\text{Arg } c)$. Alue $\Omega_3 = g_3(\Omega_2)$ on yksikkökiekon yhdesti yhtenäinen osajoukko, joka sisältää origon $g_3(c) = 0$. Lasketaan lopuksi vielä funktion g_3 derivaatta sekä sen arvo pisteessä $g_2(g_1(f(z_0))) = g_2(-b) = c$:

$$g_3'(z) = \frac{u(1-|c|^2)}{(1-\bar{c}z)^2} \quad \text{ja} \quad g_3'(c) = \frac{u}{1-|c|^2}.$$

Näiden määritelmien nojalla yhdistetty kuvaus $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$ kuvaa yksikkökiekon \mathbb{D} konformisesti alueelle Ω_3 siten, että piste z_0 kuvautuu origoksi, sillä $g(z_0) = g_3(g_2(g_1(f(z_0)))) = g_3(c) = 0$. Lisäksi funktion g derivaatta pisteessä z_0 on ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned} g'(z_0) &= g_3'(c) \cdot g_2'(-b) \cdot g_1'(0) \cdot f'(z_0) = \frac{u}{1-|c|^2} \frac{1}{2c} (1-|b|^2) f'(z_0) \\ &= \frac{u}{2c} \frac{(1+|b|)(1-|b|)}{1-|b|} \cdot f'(z_0) = \frac{1+|c|^2}{2|c|} f'(z_0) > f'(z_0), \end{aligned}$$

sillä $\frac{u}{c} = \frac{1}{|c|}$, $|c|^2 = |g_2(-b)|^2 = (\sqrt{|-b|})^2 = |b|$ ja $1+|c|^2 > 2|c|$. □

Muotoillaan nyt Riemannin kuvauslause.

Lause 2.26 (Riemannin kuvauslause). *Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue kompleksitasossa siten, että $\Omega \neq \mathbb{C}$ ja olkoon z_0 piste alueessa Ω . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen konformikuvaus $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, siten, että $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.*

Huomautus 2.27. Riemannin kuvauslause voidaan muotoilla myös seuraavasti: Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$. Tällöin Ω on konformisesti ekvivalentti joko

- (a.) yksikkökierokkeen \mathbb{D} kanssa, mikäli komplementti $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ sisältää vähintään kaksi pistettä,
- (b.) kompleksitason \mathbb{C} kanssa, mikäli komplementti sisältää yhden pisteen tai
- (c.) laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbb{C}}$ kanssa, mikäli komplementti on tyhjä.

Seuraava todistus nojautuu kirjan [12] sivun 420 todistukseen.

Lauseen 2.26 todistus. Olkoon \mathcal{F} kokoelma funktioita $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, joille pätevät seuraavat ehdot: f on konformikuvaus alueelta Ω alueen \mathbb{D} osajoukolle, $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$. Lemma 2.25 varmistaa, että kokoelma \mathcal{F} ei ole tyhjä.

Olkoon nyt $r > 0$ reaaliluku ja olkoon $D(z_0, r) \subset \Omega$. Cauchyn estimaatin (Lause 1.5) nojalla arvio

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| \leq r^{-1}$$

pätee jokaiselle funktiolle f kokoelmassa \mathcal{F} . Näin ollen joukko

$$\{f'(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$$

on rajoitettu joukko positiivisia reaalilukuja, ja joukolla on ainakin supremum. Merkitään tätä kirjaimella ℓ . Nyt jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle n voidaan valita funktio f_n kokoelmasta \mathcal{F} siten, että

$$\ell - \frac{1}{n} \leq f_n(z_0) \leq \ell.$$

Näin ollen kokoelma \mathcal{F} on lokaalisti rajoitettu alueessa Ω , ja Montelin lauseen (Lause 1.7) nojalla kokoelma \mathcal{F} on normaali perhe alueessa Ω . Määritelmän nojalla perheen \mathcal{F} funktiojonolla $\{f_n\}$ on alueessa Ω lokaalisti tasaisesti supeneva osajono $\{f_{n_k}\}$. Lisäksi

$$f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(z_0) = \ell > 0.$$

Koska funktion f derivaatta eroaa nolasta, niin se ei ole vakio alueessa Ω . Lisäksi, koska jokainen funktiojonon $\{f_{n_k}\}$ alkio on analyyttinen injektio alueessa Ω ja jono suppenee lokaalisti tasaisesti funktioon f , niin lauseen 1.8 nojalla myös f on analyyttinen injektio alueessa Ω , sillä se ei ole vakio. Lisäksi koska $f(\Omega) \subset \mathbb{D} \subset \overline{\mathbb{D}}$, niin lauseen 1.9 nojalla joukko $f(\Omega)$ on avoin, joten se on avoimen yksikkökierokkeen \mathbb{D} osajoukko. Näin ollen f kuuluu kokoelmaan \mathcal{F} .

Lopuksi konformikuvauksen f olemassaolosta on osoitettava, että $f(\Omega) = \mathbb{D}$. Osoitetaan tämä käyttäen antiteesiä. Oletetaan, että $f(\Omega) \neq \mathbb{D}$. Tällöin lemma 2.25 mahdollistaisi kokoelman \mathcal{F} sellaisen alkion, jonka derivaatan arvo pisteessä z_0 ylittäisi arvon $f'(z_0) = \ell$. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista luvun ℓ määritelmän nojalla. Näin ollen antiteesi ei päde, joten f kuvaa alueen Ω konformisesti yksikkökierokseksi \mathbb{D} .

Konformikuvauksen f olemassaolo on nyt osoitettu, joten enää tarvitsee osoittaa sen yksikäsitteisyys. Oletetaan nyt, että on olemassa toinen konformikuvaus g alueelta Ω yksikkökierokseen \mathbb{D} siten, että

$$g(z_0) = 0 \quad \text{ja} \quad g'(z_0) > 0.$$

Tarkastellaan funktiota $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $\varphi = g \circ f^{-1}$. Koska sekä f että g kuvaavat alueen Ω konformisesti yksikkökierokseen, niin funktio φ kuvaa yksikkökierokkeen konformisesti itselleen, ja sille pätee, että

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{ja} \quad \varphi'(0) = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} > 0.$$

Seurauksen 2.17 nojalla origon paikallaan pitävä ja yksikkökierokkeen konformisesti itselleen kuvaava funktio on kierto origon suhteen. Ainoa kierto, jolle $\varphi'(0) > 0$ on triviaali kierto $\varphi(z) = z$. Näin ollen $g(z) = \varphi(f(z)) = f(z)$ kaikkialla yksikkökierokossa, joten g ja f ovat sama funktio. \square

3 Hyperbolinen metriikka yksikkökierokossa \mathbb{D}

Tässä luvussa esitellään ensiksi pseudohyperbolinen metriikka, jota kutsutaan myös Ahlforsin metriikaksi suomalaisen matemaatikon Lars Ahlforsin (1907-1996) mukaan. Pseudohyperbolisesta metriikasta siirrytään hyperboliseen metriikkaan, jonka osalta käydään läpi sen perusominaisuuksia. Lopuksi todistetaan vielä Schwarzin lemma sekä Schwarzin-Pickin lause.

3.1 Pseudohyperbolinen metriikka

Määritellään ensiksi pseudohyperbolinen eli Ahlforsin metriikka.

Määritelmä 3.1. Olkoon $\delta : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\delta(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|.$$

Tällöin δ on metriikka, ja sitä kutsutaan *pseudohyperboliseksi metriikaksi* tai *Ahlforsin metriikaksi*.

Lause 2.15 kertoi, että yksikkökierokkon konformisesti itselleen kuvaavat funktiot ovat Möbius-kuvauksia muotoa

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

missä θ on reaalinen ja α on yksikkökierokossa \mathbb{D} . Käytetään tälle joukolle merkintää

$$\mathcal{A}(\mathbb{D}) = \left\{ e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} : \theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{D} \right\}.$$

Seuraava lause kertoo, että pseudohyperbolinen metriikka on konformisesti invariantti, eli yksikkökierokkon konformikuvaus itselleen säilyttää etäisyydet pseudohyperbolisen metriikan suhteen. Lause löytyy lähteestä [6] sivulta 3.

Lause 3.2. *Pseudohyperbolinen metriikka on konformisesti invariantti, eli kaikille $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ pätee*

$$\delta(f(z), f(w)) = \delta(z, w).$$

Todistus. Sijoitetaan yhtälön vasemmalle puolelle

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad \text{ja} \quad f(w) = e^{i\theta} \frac{w - \alpha}{1 - \bar{\alpha}w}$$

ja muistetaan, että

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad \text{ja} \quad \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 1$$

kaikilla reaaliluvuilla θ ja kaikilla kompleksiluvuilla z . Näin ollen

$$\begin{aligned}
\delta(f(w), f(z)) &= \left| \frac{e^{i\theta} \frac{w-\alpha}{1-\bar{\alpha}w} - e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}}{1 - \left(e^{i\theta} \frac{w-\alpha}{1-\bar{\alpha}w} \right) e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}} \right| \\
&= \left| e^{i\theta} \left| \frac{\frac{w-\alpha}{1-\bar{\alpha}w} - \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}}{\frac{(1-\bar{\alpha}w)(1-\bar{\alpha}z)}{(1-\bar{\alpha}w)(1-\bar{\alpha}z)} - |e^{i\theta}|^2 \frac{(w-\alpha)(z-\alpha)}{(1-\bar{\alpha}w)(1-\bar{\alpha}z)}}} \right| \right| \\
&= \left| \frac{(w-\alpha)(1-\bar{\alpha}z) - (z-\alpha)(1-\bar{\alpha}w)}{(1-\bar{\alpha}w)(1-\bar{\alpha}z)} \right| \\
&= \left| \frac{(1-\bar{\alpha}w)(1-\bar{\alpha}z) - (w-\alpha)(z-\alpha)}{(1-\bar{\alpha}w)(1-\bar{\alpha}z)} \right| \\
&= \left| \frac{(1-\bar{\alpha}w)}{(1-\bar{\alpha}w)} \right| \left| \frac{(w-\alpha)(1-\bar{\alpha}z) - (z-\alpha)(1-\bar{\alpha}w)}{(1-\bar{\alpha}w)(1-\bar{\alpha}z) - (\bar{w}-\bar{\alpha})(z-\alpha)} \right| \\
&= \left| \frac{(w-z)(1-|\alpha|^2)}{(1-\bar{w}z)(1-|\alpha|^2)} \right| = \left| \frac{w-z}{1-\bar{w}z} \right| = \delta(w, z),
\end{aligned}$$

kuten haluttiin. □

Seuraavassa esimerkissä käsitellään kiekkoja pseudohyperbolisen metriikan suhteen, sekä miten ne suhtautuvat kiekkoihin euklidisessa metriikassa. Esimerkki seuraa lähteen [6] sivun 2 esimerkkiä.

Esimerkki 3.3. Tarkastellaan kiekkoja pseudohyperbolisen metriikan suhteen. Olkoot w yksikkökiekossa \mathbb{D} , R reaaliakselilla ja merkitään $D_R = D(0, R)$. Olkoon lisäksi

$$f(z) = \frac{w-z}{1-\bar{w}z}.$$

Tutkitaan seuraavaksi kiekon D_R kuvaa $f(D_R)$. Tapauksessa $w = 0$ huomataan, että $f(z) = -z$, eli f kuvaa origokeskisen kiekon D_R itselleen.

Kun $w \neq 0$, niin $f(0) = w$ ja $f(\partial D_R)$ on lauseen 2.11 nojalla ympyrä jos ja vain jos $w \neq 1/R$. Voidaan olettaa, että w on reaaliakselilla. Mikäli näin ei ole, se saadaan reaaliakselille kiertokuvauksella. Tällöin $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, sillä $\bar{w} = w$.

Olkoon nyt $z, -z \in \mathbb{R}$ kiekon D_R kehän reaaliakselia leikkaavat pisteet.

Tällöin $|z| = |-z| = R$ ja

$$\begin{aligned} f(z) - f(-z) &= \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} - \frac{w + z}{1 + \bar{w}z} \\ &= \frac{(w - z)(1 + \bar{w}z) - (w + z)(1 - \bar{w}z)}{(1 - \bar{w}z)(1 + \bar{w}z)} \\ &= 2z \frac{-1 + |w|^2}{1 + \bar{w}^2 z^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Kun yhtälöstä (3.1) otetaan itseisarvot molemmin puolin, saadaan

$$\begin{aligned} |f(z) - f(-z)| &= 2|z| \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2 |z|^2} \\ &= 2R \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2 R^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Koska w on reaaliakselilla, niin

$$\overline{f(z)} = \overline{\left(\frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right)} = \frac{\bar{w} - \bar{z}}{1 - \overline{\bar{w}z}} = \frac{w - \bar{z}}{1 - \bar{w}\bar{z}} = f(\bar{z}),$$

joten kiekko $f(D_R)$ on symmetrinen reaaliakselin suhteen. Tästä seuraa, että (3.2) on kiekon $f(D_R)$ halkaisija, eli sen säde on $R \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2 R^2}$. Näin ollen w -keskinen R -säteinen pseudohyperbolisen metriikan kiekko

$$\{z \in \mathbb{D} : \delta(z, w) < R\}$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left\{ z \in \mathbb{D} : \left| z - w \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2 R^2} \right| < R \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2 R^2} \right\},$$

joka puolestaan on euklidisen metriikan kiekko. Yllä olevasta esityksestä huomataan, että pisteen w kertoimen $\frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2 R^2}$ vuoksi pseudohyperbolisen metriikan kiekon keskipiste on euklidisen keskipisteen ja origon kanssa samalla suoralla ja origoa lähempänä. Lisäksi nähdään, että pseudohyperbolisen metriikan yksikkökiekko on topologisesti yhtenevä euklidisen metriikan yksikkökiekkoon.

Tarkastellaan seuraavaksi pseudohyperbolisen metriikan rajoittumista puolitasoihin. Erityisesti oikean puolitason rajoittumasta on apua myöhemmin Haymanin-Wun lauseen todistuksessa (Lause 8.2).

Huomautus 3.4 (Pseudohyperbolinen metriikka puolitasoissa). Kun z ja w ovat ylempässä puolitasossa \mathbb{H} , niin pseudohyperbolinen metriikka saa muodon

$$\delta_{\mathbb{H}}(z, w) = \left| \frac{z - w}{w - \bar{z}} \right|.$$

Koska alempi puolitaso \mathbb{H}_- saadaan kertomalla ylempää puolitasoa luvulla -1 , niin pseudohyperbolinen metriikka on alemmassa puolitasossa sama kuin ylempässä puolitasossa:

$$\delta_{\mathbb{H}_-}(z, w) = \delta_{\mathbb{H}}(-z, -w) = \left| \frac{-z - (-w)}{-w - (-\bar{z})} \right| = \left| \frac{z - w}{w - \bar{z}} \right|.$$

Oikea puolitaso saadaan ylempästä puolitasosta kertomalla sitä luvulla $-i$. Näin ollen oikeassa puolitasossa $-i\mathbb{H}$ pseudohyperbolinen metriikka taas saa muodon

$$\delta_{-i\mathbb{H}}(z, w) = \delta_{\mathbb{H}}(-iz, -iw) = \left| \frac{z - w}{z + w} \right|.$$

Vastaavasti vasen puolitaso saadaan kertomalla oikeaa puolitasoa luvulla -1 eli kertomalla ylempää puolitasoa luvulla i , ja näin ollen pseudohyperbolinen metriikka vasemmassa puolitasossa on sama kuin oikeassa puolitasossa:

$$\delta_{i\mathbb{H}}(z, w) = \delta_{\mathbb{H}}(iz, iw) = \left| \frac{z - w}{z + w} \right|.$$

3.2 Hyperbolinen metriikka

Tässä osiossa perehdytään hyperboliseen metriikkaan sekä sen ominaisuuksiin. Aluksi esitellään tarvittavat määritelmät ja osoitetaan, että Möbiuskuvaukset ovat hyperbolisen metriikan isometrioita. Määritellään ensiksi hyperbolinen metriikka yksikkökiekossa \mathbb{D} .

Määritelmä 3.5. *Hyperbolinen metriikka* yksikkökiekossa \mathbb{D} on

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Yksikkökiekkoa yhdessä hyperbolisen metriikan kanssa kutsutaan *hyperboliseksi tasoksi*.

Huomautus 3.6. Joissakin lähteissä hyperbolisesta metriikasta käytetään myös muotoa

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Tätä muotoa käyttävät esimerkiksi Beardon ja Minda lähteessä [2]. Tässä työssä käytetään muotoa ilman kerrointa 2, kuten Garnettin ja Marshallin kirjassa [7].

Hyperbolisen metriikan avulla saadaan määriteltyä sileän käyrän hyperbolinen pituus sekä Borel-mitallisen joukon ala:

Määritelmä 3.7. Sileän käyrän γ *hyperbolinen pituus* on

$$\ell_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda_{\mathbb{D}}(z) |dz| = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Yksikkökierokkeen \mathbb{D} Borel-mitallisen osajoukon E *hyperbolinen ala* on

$$A_{\mathbb{D}}(E) = \iint_E (\lambda_{\mathbb{D}}(z))^2 dx dy.$$

Lopuksi, hyperbolinen pituus antaa luonnollisesti myös hyperbolisen etäisyyden.

Määritelmä 3.8. Kahden pisteen $z, w \in \mathbb{D}$ *hyperbolinen etäisyys* on

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \inf_{\gamma} \ell_{\mathbb{D}}(\gamma) = \inf \int_z^w \frac{|dz|}{1 - |z|^2},$$

missä infimum otetaan pisteet z ja w yhdistävien polkujen yli.

Nyt kun on määritelty hyperbolinen metriikka δ , herää kysymys, mikä yhteys sillä on pseudohyperboliseen metriikkaan $d_{\mathbb{D}}$. Tarkastellaan seuraavaksi näiden kahden metriikan yhteyttä. Huomautus seuraa kirjan [7] sivuja 16-17.

Huomautus 3.9. Olkoon $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$,

$$f(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}.$$

Tällöin yksikkökierokkeen \mathbb{D} kahden pisteen hyperbolinen etäisyys voidaan kirjoittaa uudelleen muodossa

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = d_{\mathbb{D}}(0, f(w)) = \int_0^{f(w)} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Tästä seuraa, että lyhin käyrä origosta pisteeseen $f(w)$ on jana $[0, f(w)] = \{z \in \mathbb{D}: z = f(w)t, 0 \leq t \leq 1\}$ ja sen hyperbolinen pituus on

$$\ell_{\mathbb{D}}([0, f(w)]) = d_{\mathbb{D}}(0, f(w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f(w)|}{1 - |f(w)|} \right).$$

Yleistettynä kahden pisteen hyperbolinen etäisyys saadaan muotoon

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|}{1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|} \right), \quad (3.3)$$

ja hyperbolisesti lyhin käyrä eli *geodeesi* pisteestä z pisteeseen w on yksikkökierokkeen \mathbb{D} halkaisijan segmentti kohtisuorassa reunaa $\partial\mathbb{D}$ vastaan. Ratkaistaan nyt yhtälöstä (3.3) termi $|(z-w)/(1-\bar{w}z)|$. Poistamalla logaritmi yhtälö saadaan muotoon

$$e^{2d_{\mathbb{D}}(z,w)} = \frac{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|}{1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|}.$$

Nyt kertomalla yhtälöä puolittain oikean puolen nimittäjällä ja ottamalla yhtälöstä termi $|(z-w)/(1-\bar{w}z)|$ yhteiseksi tekijäksi nähdään, että

$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| (e^{2d_{\mathbb{D}}(z,w)} + 1) = e^{2d_{\mathbb{D}}(z,w)} - 1.$$

Lopuksi yhtälöstä voidaan ratkaista pseudohyperbolinen metriikka, jolloin huomataan, että

$$\delta(z, w) = \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| = \frac{e^{2d_{\mathbb{D}}(z,w)} - 1}{e^{2d_{\mathbb{D}}(z,w)} + 1} = \tanh d_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Näin ollen pseudohyperbolinen etäisyys $\delta(z, w)$ voidaan kirjoittaa hyperbolisen tangentin sekä hyperbolisen metriikan avulla. Vastaavasti viimeisestä yhtälöstä voidaan ratkaista hyperbolinen etäisyys areahyperbolisella tangentilla.

Määritellään nyt analyyttisen funktion f hyperbolinen gradientti, jotta voidaan siirtyä tarkastelemaan isometrioita hyperbolisen metriikan suhteen.

Määritelmä 3.10. Analyyttisen funktion $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ *hyperbolinen gradientti* on

$$D_H^H f(z) = |f'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2}.$$

Määritellään lisäksi isometriat sekä hyperbolisen metriikan että hyperbolisen etäisyyden suhteen.

Määritelmä 3.11. Analyyttinen funktio $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ on *isometria hyperbolisen metriikan* $\lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz|$ suhteen, jos kaikille z yksikkökiekossa \mathbb{D} pätee

$$\lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z).$$

Funktio f on *isometria hyperbolisen etäisyyden* $d_{\mathbb{D}}$ suhteen, jos kaikille z ja w yksikkökiekossa \mathbb{D} pätee

$$d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) = d_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Osoitetaan seuraavaksi, että yksikkökiekon \mathbb{D} konformikuvaukset itselleen ovat isometrioita hyperbolisen metriikan suhteen. Todistus löytyy lähteestä [5] sivulta 56.

Lause 3.12. *Olkoon $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ konformikuvaus. Tällöin f on isometria hyperbolisen metriikan suhteen.*

Todistus. Kun f on konformikuvaus yksikkökiekossa, niin

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{ja} \quad f'(z) = -e^{i\theta} \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} D_H^H f(z) &= |f'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \frac{1 - |z|^2}{1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2} \\ &= \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2} \\ &= \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{(1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) - (z - a)(\bar{z} - \bar{a})} \\ &= \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Huomataan, että

$$\ell_{\mathbb{D}}(f(\gamma)) \leq \int_{\gamma} D_H^H f(z) \frac{|dz|}{1 - |z|^2} = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Näin ollen yksikkökiekon konformikuvaukset moninkertaistavat hyperbolista pituutta korkeintaan kertoimella 1. Koska käänteiskuvauksella on sama ominaisuus, niin konformikuvaukset säilyttävät hyperbolisen pituuden. \square

3.3 Schwarzin lemma ja Schwarzin-Pickin lause

Tässä osiossa todistetaan sekä Schwarzin lemma että Schwarzin-Pickin lause. Schwarzin lemma on keskeinen tulos funktioiden rajoittumisen arvioimisessa. Se kertoo, että jos yksikkökieron \mathbb{D} itselleen kuvaava analyyttinen funktio pitää origon paikallaan, niin se on joko kutistava kuvaus tai kierto. Lause on saanut nimensä Hermann Schwarzilta (1843-1921), vaikka sen nyt jo klassisen muoto on Constantin Carathéodoryn (1873-1950) ansiota. Todistus löytyy kirjasta [12] sivulta 173.

Lause 3.13 (Schwarzin lemma). *Olkoon $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analyyttinen. Jos $f(0) = 0$, niin*

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{ja} \quad |f(z)| \leq |z|$$

kaikilla z yksikkökiekossa \mathbb{D} . Lisäksi, ellei f ole kiertokuvaus, eli muotoa $f(z) = e^{i\theta} z$ jollekin reaaliluvulle θ , pätee

$$|f'(0)| < 1 \quad \text{ja} \quad |f(z)| < |z|,$$

kun $0 < |z| < 1$.

Todistus. Määritellään funktio $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{kun } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Tällöin g on jatkuva yksikkökiekossa ja analyyttinen alueessa $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Yhden pisteen poisto ei vaikuta funktion analyyttisyyteen, joten g on analyyttinen koko yksikkökiekossa \mathbb{D} .

Kiinnitetään nyt piste z yksikkökiekosta \mathbb{D} ja olkoon r reaaliluku siten, että $|z| < r < 1$. Masimiperiaatteen seurauksen 1.13 nojalla suljetussa kiekossa $\overline{D(0, r)}$ pätee

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \leq \frac{1}{r}.$$

Kun $r \rightarrow 1$, niin nähdään, että $|g(z)| \leq 1$. Koska z valittiin mielivaltaisesti yksikkökiekosta, niin arvio pätee kaikille yksikkökiekon \mathbb{D} pisteille. Erityisesti

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1 \quad \text{ja} \quad |f(z)| = |g(z)||z| \leq |z|$$

kaikille z yksikkökiekossa \mathbb{D} .

Maksimiperiaatteen (Lause 1.12) nojalla $|g(z)| < 1$ kaikkialla yksikkökiekossa \mathbb{D} , ellei g ole vakiofunktio, jonka moduli on 1. Näin ollen

$$|f'(0)| < 1 \quad \text{ja} \quad |f(z)| < |z|,$$

kun $0 < |z| < 1$, ellei $f(z) = e^{i\theta} z$ jollekin reaalille θ . □

Seuraava lause on invariantti versio Schwarzin lemmasta. Vuonna 1915 Georg Pick (1859-1942) huomasi, että hyperbolisen geometrian tapauksessa funktiolla f ei tarvitse olla kiintopistettä yksikkökiekossa \mathbb{D} [13]. Todistus lähteestä [6] sivulta 6.

Lause 3.14 (Schwarz-Pick). *Olkoon $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analyyttinen. Tällöin f säilyttää tai kutistaa etäisyydet pseudohyperbolisen ja hyperbolisen metriikan suhteen, eli*

$$\delta(f(z), f(w)) = \left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right| = \delta(z, w) \quad (3.4)$$

ja

$$\lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)| = \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} = \lambda_{\mathbb{D}}|dz| \quad (3.5)$$

Lisäksi, nämä kaksi epäyhtälöä ovat keskenään ekvivalentit, ja mikäli on olemassa piste z_0 yksikkökiekossa \mathbb{D} siten, että jompi kumpi epäyhtälöistä saavuttaa yhtäsuuruuden, niin funktio f kuvaa yksikkökiekon konformisesti itselleen.

Todistus. Osoitetaan ensiksi epäyhtälöiden ekvivalenttius. Epäyhtälö (3.5) seuraa ensimmäisestä epäyhtälöstä (3.4) jakamalla puolittain termillä $|z-w|$, kun $w \rightarrow z$. Toisen suunnan osoittamiseksi valitaan kaksi pistettä z ja w yksikkökiekosta \mathbb{D} ; olkoon lisäksi γ nämä pisteet yhdistävä sileä polku. Tällöin $\ell(f \circ \gamma) \leq \ell(\gamma)$, ja näin ollen $d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq d_{\mathbb{D}}(z, w)$. Huomautuksen 3.9 nojalla pseudohyperbolinen metriikka δ voidaan kirjoittaa hyperbolisen tangentin ja hyperbolisen metriikan $d_{\mathbb{D}}$ avulla, ja koska hyperbolinen tangentti on kasvava, niin $\delta(f(z), f(w)) \leq \delta(z, w)$.

Osoitetaan nyt epäyhtälöt itsessään. Koska epäyhtälöt ovat ekvivalentit, riittää osoittaa vain ylempi epäyhtälö (3.4). Kiinnitetään piste w yksikkökiekossa \mathbb{D} ja olkoot $g_w, h_w: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$,

$$g_w(z) = \frac{z - f(w)}{1 - \overline{f(w)}z} \quad \text{ja} \quad h_w(z) = \frac{z - w}{\overline{w}z - 1}.$$

Huomataan, että

$$g_w(f(h_w(0))) = g_w(f(w)) = \frac{f(w) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(w)} = 0,$$

joten yhdistetyllä funktiolla $g_w \circ f \circ h_w$ on kiintopiste origossa. Näin ollen Schwarzin lemmän (Lause 3.13) nojalla

$$|g_w(f(h_w(z)))| \leq |z|. \quad (3.6)$$

Lisäksi huomataan, että

$$h_w \circ h_w(z) = \frac{z - |w|^2 z}{1 - |w|^2} = z,$$

eli funktio h_w on itsensä käänteisfunktio; $h_w = h_w^{-1}$. Näin ollen sijoittamalla muuttujan z paikalle termi $h_w^{-1}(z)$ epäyhtälö (3.6) saadaan muotoon

$$\delta(f(z), f(w)) = |g_w(f(z))| \leq |h_w^{-1}(z)| = \delta(z, w).$$

Viimeisen väitteen osoittamiseksi oletetaan, että yksikkökiekossa \mathbb{D} on pisteet α ja β siten, että $\delta(f(\alpha), f(\beta)) = \delta(\alpha, \beta)$. Tällöin

$$|g_\beta(f(h_\beta(\alpha)))| = |\alpha|.$$

Siis $g_\beta \circ f \circ h_\beta$ on kierto. Koska g_β ja h_β kuvaavat yksikkökiekon konformisesti itselleen, niin myös f kuvaa yksikkökiekon konformisesti itselleen. \square

4 Konforminen moduli

Tässä luvussa esitellään konforminen moduli sekä sen perusominaisuuksia. Lisäksi tarkastellaan myöhemmin todistettavan Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen todistuksen kannalta tärkeitä modulin ominaisuuksia sekä tuloksia.

Olkoon Γ kokoelma polkuja alueessa Ω . Kokoelmaa Γ kutsutaan *polkuperheeksi* ja sen alkioita γ *poluiksi*. Konforminen moduli on mitta polkuperheen Γ koolle ja se on konformikuvausten suhteen invariantti.

Konformisen modulin teorian taustalla on Ahlforsin sekä ruotsalaisen matemaatikon Arne Beurlingin (1905-1986) vuonna 1950 julkaisema artikkeli [1]. Ahlfors ja Beurling käyttävät artikkelissa ekstremaalista pituutta, mutta tässä työssä käytetään konformista modulia, ja kuten myöhemmin huomataan, ne ovat toistensa käänteisluvut.

4.1 Määritelmiä ja perusominaisuuksia

Olkoon Ω avoin ja yhtenäinen alue ja olkoon $\rho: \Omega \rightarrow [0, \infty[$ jatkuva positiivinen funktio alueessa Ω . Funktiota ρ kutsutaan *tiheysfunktioiksi*.

Voidaan ajatella, että funktio ρ vastaa funktiota $|f'|$, missä f on konformikuvaus alueessa Ω . Tiedetään, että integroimalla funktiota $|f'|$ voidaan laskea polun $f(\gamma)$ pituus:

$$\ell(f(\gamma)) = \int_\gamma |f'(z)| dz.$$

Vastaavasti polulle γ voidaan laskea ρ -pituus integroimalla tiheysfunktioita:

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z) |dz|. \quad (4.1)$$

Edelleen alueen $f(\Omega)$ kuvapinta-ala voidaan laskea integroimalla funktiota $|f'|^2$:

$$A(f(\Omega)) = \iint_\Omega |f'(z)|^2 dx dy,$$

muuttujanvaihdolla

$$\int_{f(\Omega)} \varphi dy = \int_\Omega \varphi \circ f J_f(z) dz$$

missä $J_f(z)$ on Jacobin determinantti, sillä analyyttiselle funktiolle f Jacobin determinantti on $J_f(z) = |f'(z)|^2$, ja $\varphi = 1$ alueessa $f(\Omega)$. Tätä vastaavasti voidaan laskea alueen Ω ρ -ala:

$$A_\rho(\Omega) = \iint_\Omega (\rho(z))^2 dx dy. \quad (4.2)$$

Huomautus 4.1. Kun $\rho \equiv 1$ alueessa Ω , niin (4.1) ja (4.2) palautuvat tavallisiksi käyrän γ pituudeksi $\ell(\gamma)$ ja alueen Ω alaksi $A(\Omega)$.

Määritellään seuraavaksi sallittu tiheysfunktio ρ sekä sen avulla polkuperheen Γ moduli.

Määritelmä 4.2. Olkoon Γ polkuperhe ja olkoon ρ ei-negatiivinen Borel-funktio alueessa Ω .

Sanotaan, että tiheysfunktio ρ on *sallittu* polkuperheelle Γ , merkitään $\rho \in \mathcal{A}(\Gamma)$, jos

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z) |dz| \geq 1$$

kaikilla polkuperheen Γ poluilla γ .

Polkuperheen Γ (*konforminen*) *moduli* on

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathcal{A}(\Gamma)} \iint_\Omega (\rho(z))^2 dx dy.$$

Määritellään nyt Ahlforsin ja Beurlingin konformisen modulin sijasta työssään käyttämä ekstremaalinen etäisyys.

Määritelmä 4.3. Olkoon Γ polkuperhe, joka sisältää kaikki kahdesti yhtenäisen alueen Ω reunakomponentit yhdistävät polut. Tällöin polkuperheen Γ *ekstremaalinen etäisyys* on

$$\lambda(\Gamma) = \frac{1}{M(\Gamma)}.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että konforminen moduli säilyy konformikuvauksissa, eli se on konformisesti invariantti. Tämä ominaisuus on yksi keskeisimmistä konformisen modulin ominaisuuksista, ja se tekeekin modulista kätevän työkalun kahdesti yhtenäisten alueiden tutkimiseen. Todistus seuraa kirjan [12] sivun 431 todistusta.

Lemma 4.4 (Modulin konforminen invarianttius). *Jos Γ on polkuperhe alueessa Ω ja f on konformikuvaus alueelta Ω alueelle Ω' , niin $M(\Gamma) = M(f(\Gamma))$.*

Todistus. Riittää osoittaa, että $M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma))$, sillä toinen suunta seuraa, kun tarkastellaan funktiota f^{-1} . Edelleen voidaan olettaa, että $M(f(\Gamma)) < \infty$, sillä muuten epäyhtälö on aina totta.

Olkoon nyt $\tilde{\rho}$ sallittu tiheysfunktio polkuperheelle $f(\Gamma)$. Määritellään tiheysfunktio ρ alueessa Ω kaavalla

$$\rho(z) = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)|.$$

Osoitetaan nyt, että ρ on sallittu tiheysfunktio polkuperheelle Γ . Olkoon $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ polkuperheen Γ polku. Tällöin $\beta = f \circ \gamma$ on polkuperheen $f(\Gamma)$ polku, ja koska $\tilde{\rho}$ on sallittu tiheysfunktio polkuperheelle $f(\Gamma)$, niin

$$\begin{aligned} 1 \leq \int_{\beta} \tilde{\rho}(z) |dz| &= \int_a^b \tilde{\rho}(\beta(t)) |\beta'(t)| dt = \int_a^b \tilde{\rho}(f(\gamma(t))) |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_a^b \rho(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} \rho(z) dz, \end{aligned}$$

joten ρ on sallittu tiheysfunktio polkuperheelle Γ . Näin ollen moduli $M(\Gamma)$ ei ylitä arvoa $A_{\rho}(\Omega)$. Muuttujanvaihtokaava (1.1) kaksoisintegraaleille antaa

$$\begin{aligned} M(\Gamma) \leq A_{\rho}(\Omega) &= \iint_{\Omega} (\rho(z))^2 dx dy = \iint_{\Omega} (\tilde{\rho}(f(z)))^2 |f'(z)|^2 dx dy \\ &= \iint_{f(\Omega)} (\rho(z))^2 du dv = A_{\tilde{\rho}}(f(\Omega)). \end{aligned}$$

Koska $\tilde{\rho}$ oli mielivaltainen sallittu tiheysfunktio polkuperheelle Γ , niin voidaan päätellä, että $M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma))$, kuten haluttiin. \square

Osoitetaan seuraavaksi, että konforminen moduli on monotoninen. Lemma löytyy lähteestä [5] sivulta 12.

Lemma 4.5 (Monotonisuus). *Jos Γ_1 ja Γ_2 ovat polkuperheitä siten, että jokaisella polulla $\gamma \in \Gamma_1$ on osapolku polkuperheessä Γ_2 , niin*

$$M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2).$$

Todistus. Olkoon ρ sallittu tiheysfunktio polkuperheelle Γ_2 . Tällöin kaikille polkuperheen Γ_2 poluille γ pätee

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z) |dz| \geq 1.$$

Olkoon nyt γ_1 polkuperheen Γ_1 alkio. Koska γ_1 sisältää jonkin käyrän γ_2 polkuperheestä Γ_2 , niin

$$\ell_\rho(\gamma_1) = \int_{\gamma_1} \rho(z) |dz| \geq \int_{\gamma_2} \rho(z) |dz| \geq 1,$$

joten tiheysfunktio ρ on sallittu myös polkuperheelle Γ_1 ja näin ollen $\mathcal{A}(\Gamma_1) \supset \mathcal{A}(\Gamma_2)$.

Polkuperheen moduli on määritelmän nojalla integraalin infimum kaikkien sallittujen tiheysfunktioiden yli. Koska pienemmän joukon $\mathcal{A}(\Gamma_2)$ yli infimum on suurempi kuin suuremman joukon $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ yli, niin

$$M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2). \quad \square$$

4.2 Konforminen moduli annuluksessa

Olkoon $A(r_0, r_1) = \{z: r_0 < |z| < r_1, 0 < r_0 < r_1 < \infty\}$. Aluetta $A(r_0, r_1)$ kutsutaan *annulukseksi*. Tässä osiossa osoitetaan, että annuluksessa määriteltyjen polkuperheiden konforminen moduli riippuu vain annuluksen reunaympyröiden säteiden suhteesta sekä yhdistävien että separoivien polkujen polkuperheen tapauksessa.

Osoitetaan ensiksi reunaympyrät yhdistävien polkujen polkuperheen modulus. Lemman todistus noudattelee Palkan kirjan [12] sivun 437 todistusta, ja on näin ollen hyvin pitkä ja yksityiskohdiltaan tarkka. Lemma voidaan todistaa myös helpommin; toinen todistustapa nähdään lemmän 4.7 todistuksessa.

Lemma 4.6. *Olko $0 < r_0 < r_1 < \infty$ reaalityyppisiä lukuja ja olkoon $A(r_0, r_1)$ annulus. Jos Γ on polkuperhe, jonka polut yhdistävät annuluksen $A(r_0, r_1)$ reunakomponentit, niin*

$$M(\Gamma) = 2\pi \left(\log \frac{r_1}{r_0} \right)^{-1}.$$

Todistus. Riittää tarkastella tilannetta, jossa annuluksen keskipiste on origo, sillä yleinen tapaus voidaan palauttaa tähän tilanteeseen translaatiolla modulin konformisen invarianttiuden (Lemma 4.4) vuoksi.

Olkoon ρ mielivaltainen polkuperheelle Γ sallittu tiheysfunktio. Osoitetaan ensin, että

$$A_\rho(\mathbb{C}) \geq 2\pi \left(\log \frac{r_1}{r_0} \right)^{-1}. \quad (4.3)$$

Kiinnitetään θ väliltä $[0, 2\pi]$ ja määritellään $\gamma_\theta: [r_0, r_1]$, $\gamma_\theta(r) = re^{i\theta}$. Tällöin polku γ_θ on annuluksen $A(r_0, r_1)$ reunakomponentit yhdistävä polku ja näin ollen polkuperheen Γ alkio, ja koska $|\gamma'_\theta(r)| = |e^{i\theta}| = 1$ kaikilla r , niin

$$1 \leq \int_{\gamma_\theta} \rho(z) |dz| = \int_{r_0}^{r_1} \rho(\gamma_\theta(r)) |\gamma'_\theta(r)| dr = \int_{r_0}^{r_1} \rho(re^{i\theta}) dr.$$

Korottamalla saatu epäyhtälö toiseen potenssiin voidaan arvioinnissa käyttää apuna Cauchy-Schwarz-epäyhtälöä (1.2). Lisäksi kertomalla ja jakamalla funktiota ρ termillä \sqrt{r} epäyhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\int_{r_0}^{r_1} \rho(re^{i\theta}) \sqrt{r} \frac{1}{\sqrt{r}} dr \right)^2 \leq \left(\int_{r_0}^{r_1} (\rho(re^{i\theta}))^2 r dr \right) \left(\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} \right) \\ &= \left(\log \frac{r_1}{r_0} \right) \int_{r_0}^{r_1} (\rho(re^{i\theta}))^2 r dr. \end{aligned}$$

Nyt kompleksitason ρ -alaa $A_\rho(\mathbb{C})$ voidaan arvioida annuluksen $A(r_0, r_1)$ ρ -alan avulla:

$$\begin{aligned} A_\rho(\mathbb{C}) &\geq A_\rho(A(r_0, r_1)) = \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_0}^{r_1} (\rho(re^{i\theta}))^2 r dr \right) d\theta \\ &\geq \int_0^{2\pi} \left(\log \frac{r_1}{r_0} \right)^{-1} d\theta = 2\pi \left(\log \frac{r_1}{r_0} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Näin ollen epäyhtälö (4.3) on osoitettu. Koska sallittu tiheysfunktio ρ valittiin mielivaltaisesti, niin epäyhtälön (4.3) nojalla

$$M(\Gamma) \geq 2\pi \left(\log \frac{r_1}{r_0} \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

Vielä on osoitettava, että epäyhtälö (4.4) pätee myös silloin, kun epäyhtälömerkki käännetään toisin päin. Sen näyttämiseksi osoitetaan ensin, että

$$M(\Gamma) \leq 2\pi \left(\log \frac{s_1}{s_0} \right) \left(\log \frac{r_1}{r_0} \right)^{-2}, \quad (4.5)$$

kun $0 < s_0 < r_0$ ja $r_1 < s_1 < \infty$. Tämä osoittaa väiteen, kun $s_0 \rightarrow r_0$ ja $s_1 \rightarrow r_1$. Kiinnitetään s_0 ja s_1 , jotka täyttävät nämä ehdot. Olkoon $h: [0, \infty[\rightarrow$

$[0, \infty[$ jatkuva funktio,

$$h(r) = \begin{cases} 0, & \text{kun } r < s_0 \text{ tai } r > s_1 \\ \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}, & \text{kun } r_0 \leq r \leq r_1 \\ \text{lineaarinen,} & \text{kun } s_0 \leq r \leq r_0 \text{ tai } s_1 \leq r \leq r_1. \end{cases}$$

Nyt funktion h avulla voidaan määritellä jatkuva tiheysfunktio $\rho: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty[$,

$$\rho(z) = \begin{cases} \frac{h(|z|)}{|z|}, & \text{kun } z \neq 0 \\ 0, & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Seuraavaksi täytyy osoittaa, että ρ on sallittu tiheysfunktio polkuperheelle Γ . Olkoon γ sileä polku, joka kuuluu perheeseen Γ ja olkoot a ja b sen alku- ja päätepisteet. Voidaan olettaa, että toinen polun γ päätepisteistä on annuluksen $A(r_0, r_1)$ sisemmän reunaympyrän kehällä ja toinen ulommalla reunaympyrällä, ja että polkun jälki $|\gamma|$ on kokonaan annuluksen sisällä. Mikäli päätepisteet ovat annuluksen ulkopuolella, lyhennetään polkua γ tarvittaessa niin, että sen alku- ja päätepisteet ovat annuluksen reunaympyröillä ja jälki $|\gamma|$ on kokonaan annuluksen sisällä. Tiheysfunktion ρ määritelmän nojalla huomataan, että $\rho(\gamma(t)) = (|\gamma(t)| \log(r_1/r_0))^{-1}$, kun t kuuluu välille $[a, b]$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \rho(z) |dz| &= \int_a^b \rho(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^{-1} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)| dt}{|\gamma(t)|} \\ &= \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^{-1} \int_a^b \frac{|\overline{\gamma(t)} \gamma'(t)| dt}{|\gamma(t)|^2} \geq \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^{-1} \int_a^b \frac{\operatorname{Re}(\overline{\gamma(t)} \gamma'(t)) dt}{|\gamma(t)|^2} \\ &= \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^{-1} \int_a^b \frac{d}{dt} (\log |\gamma(t)|) dt = \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^{-1} \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right) = 1, \end{aligned}$$

joten ρ on sallittu tiheysfunktio polkuperheelle Γ . Funktion h määritelmän nojalla $h(r) \leq (\log(r_1/r_0))^{-1}$ kaikilla r , joten $\rho(z) \leq (|z| \log(r_1/r_0))^{-1}$. Lisäksi, koska $\rho(z) = 0$, kun $|z| \leq s_0$ tai $|z| \geq s_1$, niin polkuperheen Γ modulin arvioksi saadaan

$$\begin{aligned} M(\Gamma) &\leq A_{\rho}(\mathbb{C}) = \iint_{\mathbb{C}} (\rho(z))^2 dx dy \\ &= \iint_{s_0 \leq |z| \leq s_1} (\rho(z))^2 dx dy \leq \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^{-2} \iint_{s_0 \leq |z| \leq s_1} \frac{dx dy}{|z|^2} \\ &= \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^{-2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{s_0}^{s_1} \frac{r dr}{r^2}\right) d\theta = 2\pi \left(\log \frac{s_1}{s_0}\right) \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

Nyt, kun $s_0 \rightarrow r_0$ ja $s_1 \rightarrow r_1$, niin väite on todistettu. \square

Edellinen lemma antaa siis modulin polkuperheelle, jonka polut yhdistävät annuluksen $A(r_0, r_1)$ reunaympyrät. Todistuksen loppuosa, jossa osoitetaan arvio polkuperheen Γ modulin ylärajalle, on hankala ja monimutkainen; sen voisi tehdä helpomminkin kätevästi valitun tiheysfunktion ρ avulla. Todistetaan tällä helpommalla tavalla seuraava lemma, joka antaa annuluksen reunaympyrät separoivien polkujen polkuperheen modulin.

Lemma 4.7. *Olko $0 < r_0 < r_1 < \infty$ reaalityyppisiä lukuja ja $A(r_0, r_1)$ annulus. Jos Γ on polkuperhe, jonka polut separoivat annuluksen $A(r_0, r_1)$ reunakomponentit, niin*

$$M(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_0}.$$

Todistus. Olkoon ρ mielivaltainen polkuperheelle Γ sallittu tiheysfunktio. Osoitetaan ensin, että

$$M(\Gamma) \geq \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_0}. \quad (4.6)$$

Kiinnitetään luku r väliltä $]r_0, r_1[$ ja määritellään $\gamma_r: [0, 2\pi], \gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$. Tällöin polku γ_r separoi annuluksen $A(r_0, r_1)$ reunaympyrät, ja koska ρ on sallittu, niin

$$1 \leq \int_{\gamma_r} \rho(z) |dz| = \int_0^{2\pi} r |ie^{i\theta}| \rho(re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} r \rho(re^{i\theta}) d\theta.$$

Korottamalla tämä epäyhtälö toiseen potenssiin ja arvioimalla sitä Cauchy-Schwarzin epäyhtälöllä (1.2) saadaan arvio

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\int_0^{2\pi} r \rho(re^{i\theta}) d\theta \right)^2 \leq \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} r^2 (\rho(re^{i\theta}))^2 d\theta \right) \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} r^2 (\rho(re^{i\theta}))^2 d\theta. \end{aligned}$$

Näin ollen laskemalla annuluksen $A(r_0, r_1)$ ρ -ala saadaan

$$\begin{aligned} A_\rho(A(r_0, r_1)) &= \int_{A(r_0, r_1)} (\rho(z))^2 dz = \int_{r_0}^{r_1} r \left(\int_0^{2\pi} (\rho(re^{i\theta}))^2 d\theta \right) dr \\ &\geq \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r} \left(\int_0^{2\pi} r^2 (\rho(re^{i\theta}))^2 d\theta \right) dr \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_0}, \end{aligned}$$

ja koska ρ valittiin mielivaltaisesti, niin epäyhtälö (4.6) on osoitettu.

Enää tarvitsee osoittaa, että epäyhtälön (4.6) merkki voidaan kääntää toisin päin. Koska kaikille annuluksen reunaympyrät separoiville poluille γ pätee

$$2\pi \leq |k2\pi i| = \left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \right| \leq \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|},$$

kun $k \neq 0$ on polun γ kierrosluku origon suhteen, niin $\rho(z) = a/|z|$, missä $a = (2\pi)^{-1}$, on sallittu tiheysfunktio polkuperheelle Γ . Näin ollen annuluksen $A(r_0, r_1)$ ρ -alan avulla voidaan arvioida polkuperheen Γ modulia:

$$\begin{aligned} M(\Gamma) &\leq A_{\rho}(A(r_0, r_1)) = \int_{A(r_0, r_1)} \frac{a^2}{|z|^2} dz = a^2 \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} \frac{r}{r^2} dr d\theta \\ &= (2\pi)^{-2} \cdot 2\pi \log \frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_0}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä tämä tulos epäyhtälön (4.6) kanssa saadaan yhtäsuuruus

$$M(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_0}. \quad \square$$

Yhdistämällä kahden edellisen lemmän tulokset huomataan, että annuluksen $A(r_0, r_1)$ reunaympyrät separoivien polkujen polkuperheen Γ_s moduli on itse asiassa reunaympyrät yhdistävien polkujen polkuperheen Γ_y käännteisluku. Muotoillaan tämä vielä seuraukseksi.

Seuraus 4.8. *Olkoon A annulus. Olkoon Γ_y annuluksen A reunaympyrät yhdistävien polkujen polkuperhe ja olkoon Γ_s reunaympyrät separoivien polkujen polkuperhe. Tällöin*

$$M(\Gamma_s) = \frac{1}{M(\Gamma_y)}.$$

4.3 Konformisen modulin symmetrisyys

Tässä osiossa tarkastellaan konformisen modulin symmetrisyyttä, jota käytetään luvussa 7 apuna Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen todistuksessa. Määritellään ensiksi polkujen ja polkuperheiden heijastus eli kompleksikonjugaatti sekä positiiviosa.

Määritelmä 4.9. Olkoon γ polku tasossa. Polun γ kompleksikonjugaatti $\bar{\gamma}$ on polun heijastus reaaliakselin suhteen. Polun γ positiiviosa saadaan heijastamalla polun γ alemman puolitason \mathbb{H}_- kanssa leikkaava osa ylemmälle puolitasolle \mathbb{H} :

$$\gamma^+ = (\gamma \cap \mathbb{H}) \cup \overline{(\gamma \cap \mathbb{H}_-)}.$$

Määritellään polkuperheelle Γ vastaavasti:

$$\bar{\Gamma} = \{\bar{\gamma} : \gamma \in \Gamma\} \quad \text{ja} \quad \Gamma^+ = \{\gamma^+ : \gamma \in \Gamma\}.$$

Jos polkuperhe Γ on symmetrinen reaaliakselin suhteen, niin sen moduli on kaksinkertainen ylemmälle puolitasolle heijastetun polkuperheen positiiviosan Γ^+ moduliin nähden. Tätä ominaisuutta käytetään myöhemmin apuna osoittamaan lause 4.12, joka puolestaan on tärkeä Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen (Lause 7.1) osoittamisessa. Lemman todistus löytyy lähteestä [5] sivulta 34.

Lemma 4.10 (Symmetriasääntö). *Jos $\Gamma = \bar{\Gamma}$, niin $M(\Gamma) = 2M(\Gamma^+)$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että

$$M(\Gamma) \leq 2M(\Gamma^+). \quad (4.7)$$

Olkoon ρ tiheysfunktio ja määritellään sen avulla toinen tiheysfunktio $\tilde{\rho}(z) = \max\{\rho(z), \rho(\bar{z})\}$. Tällöin kaikille polkuperheen Γ poluille γ pätee

$$\int_{\gamma^+} \tilde{\rho}(z) |dz| \geq \int_{\gamma^+} \rho(z) |dz| \geq \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho(z) |dz|.$$

Jos siis ρ on sallittu tiheysfunktio polkuperheelle Γ^+ , niin $\tilde{\rho}$ on sallittu tiheysfunktio polkuperheelle Γ . Näin ollen polkuperheen Γ modulille saadaan arvio

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathcal{A}(\Gamma)} \iint_{\Omega} (\rho(z))^2 |dz| \leq \iint_{\Omega} (\tilde{\rho}(z))^2 |dz|.$$

Koska kaikille reaalityyppisille a ja b pätee $\max\{a, b\}^2 \leq a^2 + b^2$, niin voidaan edelleen arvioida

$$\begin{aligned} M(\Gamma) &\leq \iint_{\Omega} (\tilde{\rho}(z))^2 dx dy \leq \iint_{\Omega} (\rho(z))^2 dx dy + \int_{\gamma} (\rho(\bar{z}))^2 dx dy \\ &\leq 2 \iint_{\Omega} (\rho(z))^2 dx dy. \end{aligned}$$

Ottamalla nyt puolittain infimum kaikkien polkuperheelle Γ^+ sallittujen tiheysfunktioiden ρ yli epäyhtälön oikeasta puolesta saadaan $2M(\Gamma^+)$, joten väite (4.7) on todistettu.

Osoitetaan nyt, että epäyhtälön (4.7) merkki voidaan kääntää toisin päin. Olkoon ρ mielivaltaisen tiheysfunktio ja määritellään nyt tiheysfunktio $\tilde{\rho}$ seuraavasti:

$$\tilde{\rho}(z) = \begin{cases} \rho(z) + \rho(\bar{z}), & \text{kun } z \in \mathbb{H} \\ 0, & \text{kun } z \in \mathbb{H}_-, \end{cases}$$

missä \mathbb{H} ja \mathbb{H}_- ovat ylempi ja alempi puolitaso. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^+} \tilde{\rho}(z) |dz| &= \int_{\gamma^+} (\rho(z) + \rho(\bar{z})) |dz| \\
&= \int_{\gamma \cap \mathbb{H}} \rho(z) |dz| + \int_{\gamma \cap \mathbb{H}} \rho(\bar{z}) |dz| + \int_{\gamma \cap \mathbb{H}_-} \rho(z) |dz| + \int_{\gamma \cap \mathbb{H}_-} \rho(\bar{z}) |dz| \\
&= \int_{\gamma} \rho(z) |dz| + \int_{\bar{\gamma}} \rho(z) |dz| \\
&\geq 2 \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho(z) |dz|.
\end{aligned}$$

Näin ollen, jos tiheysfunktio ρ on sallittu poluperheelle Γ , niin tiheysfunktio $\frac{1}{2}\tilde{\rho}$ on sallittu polkuperheelle Γ^+ . Koska $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, niin polkuperheen Γ^+ modulille saadaan yläraja

$$\begin{aligned}
M(\Gamma^+) &\leq \iint_{\mathbb{H}} \left(\frac{1}{2}\tilde{\rho}(z)\right)^2 dx dy \\
&= \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{H}} (\rho(z) + \rho(\bar{z}))^2 dx dy \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\iint_{\mathbb{H}} (\rho(z))^2 dx dy + \iint_{\mathbb{H}} (\rho(\bar{z}))^2 dx dy \right) \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{H}} (\rho(z))^2 dx dy.
\end{aligned}$$

Ottamalla infimum polkuperheelle Γ sallittujen tiheysfunktioiden ρ yli epäyhtälön oikealle puolelle saadaan $\frac{1}{2}M(\Gamma)$, jolloin lemma on todistettu. \square

Määritellään seuraavaksi Grötzschin annulus, joka on keskeinen konformisen modulin tutkimisessa käytetty alue. Grötzschin annulus on kompleksitason osajoukko, joka saadaan poistamalla kompleksitasosta suljettu r -säteinen origokeskinen kiekko sekä lukua $R > r$ suuremmat reaalityöt. Grötzschin annulus on nimetty saksalaisen matemaatikon Camillo Herbert Grötzschin (1902-1993) mukaan.

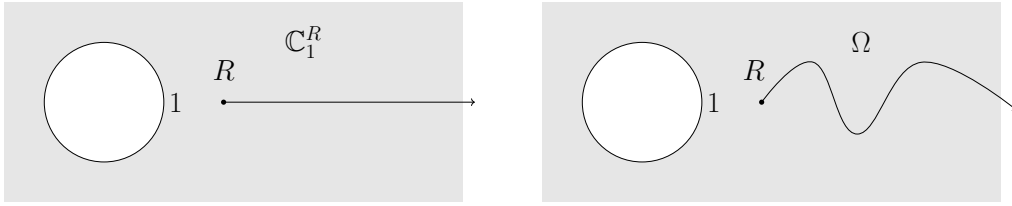
Määritelmä 4.11. Olkoot $0 < r < R$ reaalityöitä. Kompleksitasoa, josta on poistettu lukua R suuremmat reaalityöt merkitään

$$\mathbb{C}^R = \mathbb{C} \setminus \{z : z = Rt, t \geq 1\}.$$

Aluetta

$$\mathbb{C}_r^R = \mathbb{C}^R \setminus \overline{D(0, r)}$$

kutsutaan *Grötzschin annulukseksi*.



Kuva 4.1: Lauseen 4.12 alueet \mathbb{C}_1^R ja Ω .

Olkoon Γ_G Grötzschin annuluksen \mathbb{C}_1^R reunakomponentit separoiva polkuperhe. Olkoon lisäksi Ω kahdesti yhtenäinen alue, jonka komplementin komponenteista yksi on suljettu yksikkökierros \mathbb{D} ja toinen suljettu ja rajoittamaton alue, joka yhdistää pisteen R äärettömyyspisteeseen ∞ . Grötzschin lause kertoo, että näistä kahdesta polkuperheestä polkuperheen Γ_G moduli on suurempi. Grötzschin lause on myöhemmin pohjana Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen todistuksessa. Lauseen todistus mukaillee lähteen [5] sivun 39 todistusta.

Lause 4.12 (Grötzschin lause). *Olkoot $R > 1$ ja \mathbb{C}_1^R Grötzschin annulus, ja olkoon Γ_G Grötzschin annuluksen reunakomponentit separoivista poluista koostuva polkuperhe. Olkoon lisäksi $D^* = \{z : |z| > 1\}$ ja $\Omega = D^* \setminus K$, missä K on suljettu, rajoittamaton ja yhtenäinen alueen D^* osajoukko, joka sisältää pisteen $\{R\}$ ja olkoon Γ alueen Ω reunakomponentit separoivien polkujen polkuperhe. Tällöin*

$$M(\Gamma_G) \geq M(\Gamma).$$

Todistus. Koska Grötzschin annulus \mathbb{C}_1^R on reaaliakselin suhteen symmetrinen alue, niin polkuperhe Γ_G on symmetrinen, eli $\bar{\Gamma}_G = \Gamma_G$, joten symmetriasäännön (Lemma 4.10) nojalla

$$M(\Gamma_G^+) = \frac{1}{2}M(\Gamma_G). \quad (4.8)$$

Perhe Γ sen sijaan ei välttämättä ole symmetrinen, mutta se voidaan korvata suuremmalla polkuperheellä Γ_R , joka on symmetrinen. Olkoon Γ_R polkuperhe, jonka polut separoivat kahdesti yhtenäisen alueen $D^* \setminus \{R\}$ reunakomponentit ja joiden kierrosluku pisteen R suhteen on nolla, mutta eroaa nollostä origon suhteen. Koska $\Gamma \subset \Gamma_R$, niin $\mathcal{A}(\Gamma_R) \subset \mathcal{A}(\Gamma)$, ja koska polkuperheen moduli on määritelty infimumina kaikkien sallittujen tiheysfunktioiden yli, niin

$$M(\Gamma) \leq M(\Gamma_R) = 2M(\Gamma_R^+), \quad (4.9)$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa polkuperheen Γ_R symmetrisyydestä. Riittää siis osoittaa, että $M(\Gamma_R^+) = M(\Gamma_G^+)$. Osoitetaan tämä näyttämällä, että $\Gamma_R^+ = \Gamma_G^+$. Koska $\Gamma_G \subset \Gamma_R$, niin riittää osoittaa, että $\Gamma_R^+ \subset \Gamma_G^+$.

Olkoon γ polkuperheen Γ_R polku. Määritelmän nojalla polun γ kierros-
lu origon suhteen on nolla, joten se leikkaa sekä positiivista että negatiivista
reaaliakselia ainakin kerran. Lisäksi polun γ on leikattava reaaliakselin avoin-
ta väliä $]0, R[$, sillä jos se ei leikkaisi kyseistä väliä, niin polun γ kierrosluvut
origon ja pisteen R suhteen olisivat yhä suuret.

Olkoot z_- ja z_+ eräät polun γ ja reaaliakselin leikkauspisteet, joille pätee

$$z_- \in \gamma \cap]-\infty, 0[\quad \text{ja} \quad z_+ \in \gamma \cap]0, R[.$$

Nämä kaksi pistettä jakavat polun γ kahteen osakäyrään γ_1 ja γ_2 . Tällöin
 $\gamma^+ = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+$. Heijastamalla positiiviosa γ_2^+ alemmalle puolitasolle ja liittämällä
se poitiiviosaan γ_1^+ muodostuu suljettu polku γ_G joka kuuluu polku-
perheeseen Γ_G , ja $\gamma_G^+ = \gamma^+$. Näin ollen $\gamma^+ \in \Gamma_G^+$, eli $M(\Gamma_R^+) = M(\Gamma_G^+)$, ja
näin ollen

$$M(\Gamma) \leq M(\Gamma_R) = 2M(\Gamma_R^+) = 2M(\Gamma_G^+) = 2 \cdot \frac{1}{2}M(\Gamma_G) = M(\Gamma_G). \quad \square$$

5 Harmoninen mitta

Tutustutaan seuraavaksi harmoniseen mittaan ja määritellään Haymanin-
Wun lauseen (Lause 8.2) kannalta tärkeimmät ominaisuudet. Koska harmo-
nisesta mitasta käydään läpi vain kyseiseen todistukseen tarvittava teoria,
on tämä luku vain kevyt pintaraapaisu aiheeseen. Tässä luvussa on käytetty
lähteenä Garnettin ja Marshallin kirjan [7] ensimmäisen luvun ensimmäistä
osiota.

Olkoot a ja b lukuja reaaliakselilla siten, että $a < b$. Tällöin funktio

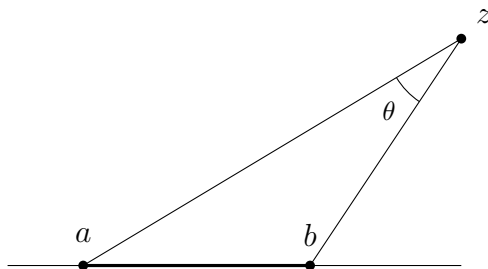
$$\theta(z) = \arg \left(\frac{z - b}{z - a} \right) = \text{Im} \left(\log \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \right)$$

on lemmän 1.11 nojalla harmoninen ylemmässä puolitasossa \mathbb{H} . Lisäksi funk-
tion θ määritelmästä huomataan, että $\theta(z) = \pi$, kun z on avoimella välillä
 $]a, b[$, ja toisaalta $\theta(z) = 0$, kun $z < a$ tai $z > b$ reaaliakselilla. Olkoon $\varphi(z)$
mielivaltainen konformikuvaus, joka kuvaa välin $]a, b[$ joukkoon $\{z: \text{Re}(z) = \pi\}$
ja joukon $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ joukkoon $\{z: \text{Re}(z) = 0\}$. Tällöin $\theta(z) = \text{Re}(\varphi(z))$,
kun tarkastellaan funktion θ käyttäytymistä geometrisesti.

Määritellään seuraavaksi funktion θ avulla joukon E harmoninen mitta
ylemman puolitason \mathbb{H} pisteessä z .

Määritelmä 5.1. Olkoon $E = \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j[$, missä $]a_j, b_j[$ ovat avoimia välejä
reaaliakselilla. Olkoon lisäksi

$$\theta_j(z) = \arg \left(\frac{z - b_j}{z - a_j} \right).$$



Kuva 5.1: Harmoninen funktio $\theta(z)$.

Joukon E harmoninen mitta pisteessä $z \in \mathbb{H}$ on

$$\omega(z, E, \mathbb{H}) = \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\pi}. \quad (5.1)$$

Huomautus 5.2. Seuraavat ominaisuudet pätevät harmoniselle mitalle:

- (i) $0 < \omega(z, E, \mathbb{H}) < 1$, kun $z \in \mathbb{H}$,
- (ii) $\omega(z, E, \mathbb{H}) \rightarrow 1$, kun $z \rightarrow E$ ja
- (iii) $\omega(z, E, \mathbb{H}) \rightarrow 0$, kun $z \rightarrow \mathbb{R} \setminus \overline{E}$.

Lisäksi funktio $\omega(z, E, \mathbb{H})$ on yksikäsitteinen harmoninen funktio, joka toteuttaa ehdot (i)-(iii). Yksikäsitteisyys seuraa Lindelöfin maksimiperiaatteesta (Lause 1.14).

Harmoninen mitta voidaan määritellä myös integraalin avulla, sillä kun lasketaan avoimen välin $]a, b[$ harmoninen mitta ylemmän puolitason \mathbb{H} pisteessä $z = x + iy$ saadaan

$$\begin{aligned} \omega(x + iy,]a, b[, \mathbb{H}) &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan \left(\frac{x-a}{y} \right) - \arctan \left(\frac{x-b}{y} \right) \right) \\ &= \int_a^b \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} \frac{dt}{\pi}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Muotoillaan tämä määritelmäksi.

Määritelmä 5.3. Jos $E \subset \mathbb{R}$ on Lebesgue-mitallinen, niin joukon E harmoninen mitta pisteessä $z \in \mathbb{H}$ on

$$\omega(z, E, \mathbb{H}) = \int_E \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} \frac{dt}{\pi}. \quad (5.3)$$

Kun $z = x + iy$ on ylemmässä puolitasossa \mathbb{H} , niin ydintä

$$P_z(t) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}$$

kutsutaan puolitason \mathbb{H} Poissonin ytimeksi.

Huomautus 5.4. Kun E on äärellinen yhdiste avoimia välejä, niin laskun (5.2) nojalla yllä oleva määritelmä on sama kuin harmonisen mitan määritelmä (5.1).

Haymanin-Wun lauseen todistuksessa tarvitaan harmonista mittaa puolitasojen lisäksi myös yksikkökiekossa. Luvussa 2 todettiin konformikuvausten olevan usein hyödyllisiä siirryttäessä puolitason ja yksikkökieken välillä. Olkoon nyt φ mielivaltainen konformikuvaus, joka kuvaa yksikkökieken \mathbb{D} ylemmälle puolitasolle \mathbb{H} . Tällaisen konformikuvausten φ avulla voidaan määrittellä yksikkökieken reunan $\partial\mathbb{D}$ osajoukon E harmoninen mitta yksikkökieken \mathbb{D} pisteessä z .

Määritelmä 5.5. Olkoon E äärellinen yhdiste avoimia välejä yksikkökieken reunalla $\partial\mathbb{D}$ ja olkoon $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ konformikuvaus. Tällöin *joukon E harmoninen mitta yksikkökieken \mathbb{D} pisteessä z on*

$$\omega(z, E, \mathbb{D}) \equiv \omega(\varphi(z), \varphi(E), \mathbb{H}). \quad (5.4)$$

Tarkastellaan nyt harmonista mittaa yksikkökiekossa.

Huomautus 5.6. Olkoon

$$\varphi(z) = i \frac{1+z}{1-z}.$$

Koska $i - (-i) \neq 0$, niin φ on Möbius-kuvaus. Lauseen 2.11 nojalla φ kuvaa yksikkökieken kehän suoraksi, sillä napa $z = 1$ on yksikkökieken kehällä. Testipisteiden avulla huomataan, että kyseinen suora on reaaliakseli, ja koska $\varphi(0) = i$, niin φ kuvaa yksikkökieken \mathbb{D} ylemmäksi puolitasoksi \mathbb{H} . Näin ollen määritelmän 5.5 nojalla

$$\omega(z, E, \mathbb{D}) = \omega(\varphi(z), \varphi(E), \mathbb{H}).$$

Nyt harmonisen mitan integraalimuodoksi saadaan

$$\omega(z, E, \mathbb{D}) = \int_E \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (5.5)$$

ja tällöin Poissonin ydin on

$$P_z(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}.$$

Lisäksi muuttujanvaihdon nojalla yksikkökieken \mathbb{D} reunan osajoukon E harmoniselle mitalle yksikkökieken pisteessä z pätevät myös huomautuksen 5.2 ehtoja (i)-(iii) vastaavat ehdot yksikkökiekossa \mathbb{D} .

6 Kahdesti yhtenäiset alueet

Osiossa 2.3 käsiteltiin Riemannin kuvauslausetta, joka kertoo yhdesti yhtenäisten alueiden olevan konformisesti ekvivalentteja yksikkökiekon ja näin ollen toistensa kanssa. Tässä luvussa perehdytään kahdesti yhtenäisten alueiden välisiin konformikuvauksiin sekä konformiseen ekvivalenttiuteen. Luvussa on käytetty lähteenä Beliaevin artikkelin [3] lukua 2.7.

Ensimmäinen lause käsittelee yksinkertaisimman esimerkin kahdesti yhtenäisten alueiden konformisuudesta.

Lause 6.1. *Origokeskiseltä annulukselta $A_1 = A(r_1, R_1)$ on olemassa bijektiivinen konformikuvaus origokeskiselle annulukselle $A_2 = A(r_2, R_2)$ jos ja vain jos $R_1/r_1 = R_2/r_2$.*

Lauseen väite seuraa, kun seuraavaa propositiota sovelletaan funktion f lisäksi käänteisfunktioon f^{-1} . Propositiolle löytyy toisenlainen todistus lähteestä [3] sivulta 28.

Propositio 6.2. *Olko $A_1 = A(r_1, R_1)$ ja $A_2 = A(r_2, R_2)$ origokeskisiä annuluksia. Jos on olemassa konformikuvaus $f: A_1 \rightarrow A_2$, niin*

$$\frac{R_1}{r_1} \leq \frac{R_2}{r_2}.$$

Todistus. Olkoon Γ_1 polkuperhe, joka sisältää kaikki annuluksen A_1 reunaympyrät separoivat polut, ja olkoon Γ_2 vastaava polkuperhe annulukselle A_2 . Olkoon nyt γ polkuperheen Γ_1 polku. Tällöin polku $f \circ \gamma$ on polkuperheen $f(\Gamma_1) = \{f \circ \gamma: \gamma \in \Gamma_1\} \subset \Gamma_2$ polku, ja näin ollen

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{R_1}{r_1} = M(\Gamma_1) = M(f(\Gamma_1)) \leq M(\Gamma_2) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R_2}{r_2},$$

mistä ratkaisemalla saadaan

$$\frac{R_1}{r_1} \leq \frac{R_2}{r_2}. \quad \square$$

Yllä oleva tulos herättää luonnollisesti kysymyksen, voiko mielivaltaisia kahdesti yhtenäisiä alueita kuvata konformisesti toisilleen. Olkoon Ω on kahdesti yhtenäinen alue ja A on jokin annulus, jonka ulomman ympyrän säde on 1. Seuraava lause kertoo, että on olemassa analyyttinen injektio, joka kuvaa joukon Ω joukkoon A . Tulos voidaan osoittaa myös niin, että sisemmän ympyrän säde on 1. Todistus löytyy lähteestä [3] sivulta 30.

Lause 6.3. *Olko $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ kahdesti yhtenäinen alue.*

- (a.) Jos $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = \{z_1, z_2\}$ jollekin $z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$, niin on olemassa konforminen bijektio $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- (b.) Jos $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = A \cup B$, missä $A \neq \{z_0\}$, niin on olemassa konforminen bijektio annulukselle, jonka ulkoympyrän säde on 1. Tämä kuvaus on annuluksen kiertoa ja inversiota vaille yksikäsitteinen.

Todistus. Osoitetaan ensimmäiseksi funktion olemassaolo. Tapauksessa (a.) f kuvaa alueen Ω annulukselle $A(0, \infty)$. Funktio f on Möbius-kuvaus, joka kuvaa toisen komplementin pisteen origoksi ja toisen äärettömyyspisteeksi. Tapauksessa (b.) triviaali tapaus on se, jossa toinen komplementin komponenteista on yksittäinen piste. Tällöin Ω voidaan kuvata annulukselle $A(0, 1)$, jolloin komplementin yksittäisen pisteen komponentti kuvautuu origoon.

Triviaalien erikoistapausten jälkeen jäljelle jää ainoa mielenkiintoinen tapaus, eli se, jossa kumpikaan komplementin komponenteista ei ole yksittäinen piste. Riemannin kuvauslauseen (Lause 2.26) nojalla voidaan olettaa, että kahdesti yhtenäisen alueen Ω toinen komplementin komponenteista on yksikkökierkon \mathbb{D} komplementti ja toinen on analyyttisen käyrän rajoittama alue yksikkökierkon sisällä, ja että origo on jälkimmäisen komponentin sisällä tarvittaessa yhdistämällä Möbius-kuvauksia.

Tarkastellaan ensiksi logaritmfunktiota alueessa Ω . Koska origo on alueen ulkopuolella, niin logaritmi on analyyttinen mutta ei yksiarvoinen alueessa Ω , sillä jokaisella kierroksella alueen sisäreunan ympäri logaritmin arvo kasvaa luvun $2\pi i$ verran. Logaritmfunktio kuvaa alueen Ω imaginaariakselin suuntaiselle kaistaleelle S siten, että kaistaleen oikea reuna on imaginaariakseli ja vasen reuna on $2\pi i$ -jaksollinen käyrä.

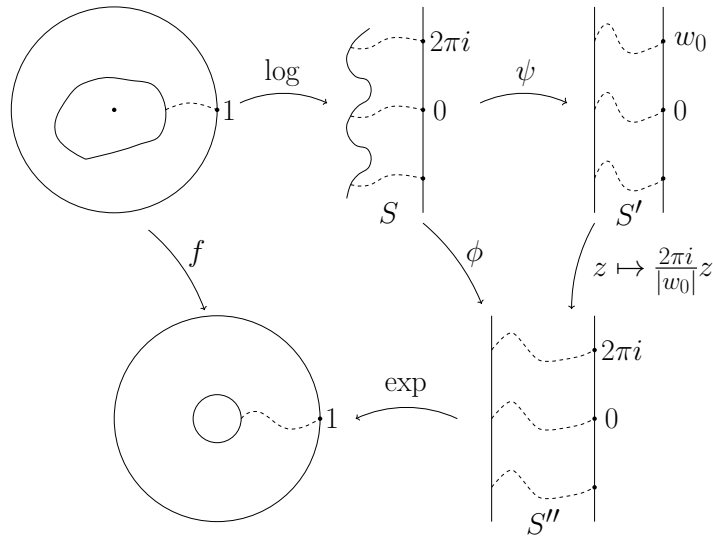
Riemannin kuvauslauseen (Lause 2.26) nojalla on olemassa konformi-kuvaus ψ kaistaleelta S toiselle imaginaariakselin suuntaiselle kaistaleelle $S' = \{z: -1 < \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Voidaan olettaa, että ψ kuvaa pisteet $\pm i\infty$ ja origon itselleen. Lisäksi kuvaus ψ kuvaa pisteen $2\pi i$ johonkin pisteeseen w_0 positiivisella imaginaariakselilla. Skaalaamalla nyt kuvausta ψ termillä $2\pi i/|w_0|$ löydetään kuvaus

$$\phi = \frac{2\pi i}{|w_0|} \psi,$$

joka kuvaa kaistaleen S joukkoon $S'' = \{z: -2\pi/|w_0| \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Kuvaus ϕ kiinnittää pisteet $\infty, 0$ ja $2\pi i$. Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaukselle ϕ sekä käänteiskuvaukselle ϕ^{-1} pätee seuraava yhtäsuuruus:

$$\phi(z + 2k\pi i) = \phi(z) + 2k\pi i. \quad (6.1)$$

Induktioperiaatteen nojalla yllä olevan väitteen todistamiseksi riittää näyttää väitteen pätevän tapauksessa $k = 1$. Koska kaistaleet S ja S''



Kuva 6.1: Kuvauksen $f(z)$ muodostuminen

ovat $2\pi i$ -jaksollisia, niin kuvaus $z \mapsto z + 2\pi i$ kuvaa kummankin kaistaleen itselleen. Näin ollen sekä $\phi(z) + 2\pi i$ että $\phi(z + 2\pi i)$ kuvaavat kaistaleen S kaistaleeksi S'' siten, että reunapisteen ∞ , $2\pi i$ ja origo kuvautuvat pisteiksi ∞ , $4\pi i$ ja $2\pi i$. Kolme eri pistettä toisiksi kolmeksi eri pisteeksi kuvaava Riemannin kuvauslauseen antama kuvaus on yksikäsitteinen, joten kuvaukset $\phi(z) + 2\pi i$ ja $\phi(z + 2\pi i)$ ovat sama kuvaus. Sama argumentti pätee käänteiskuvaukselle ϕ^{-1} .

Yhdistämällä nyt logaritmifunktio \log , Riemannin kuvauslauseen avulla rakennettu kuvaus ϕ sekä logaritmin käänteisfunktio \exp , joka kuvaa pystysuoran kaistaleen annulukselle saadaan funktio

$$f(z) = e^{\phi(\log(z))}.$$

Analyyttisten funktioiden yhdisteenä f on analyyttinen ja se kuvaa alueen Ω annulukselle $A(e^{-2\pi/|w_0|}, 1)$. Logaritmifunktio että eksponenttifunktio ovat moniarvoisia funktioita, joten ei voida heti todeta, että f olisi yksiarvoinen funktio ja näin ollen injektio. Logaritmifunktio kuvaa pisteen z imaginaariakselin suuntaiselle $2\pi i$ -jaksolliseksi lukujonoksi. Tuloksen (6.1) nojalla kuvaus ϕ kuvaa $2\pi i$ -jaksollisen lukujonon toiseksi $2\pi i$ -jaksolliseksi lukujonoksi. Lopuksi eksponenttifunktio kuvaa $2\pi i$ -jaksollisen lukujonon yhdeksi pisteeksi. Näin ollen funktio f on injektio, sekä vastaavalla argumentilla myös surjektio, joten funktio f on etsitty konformikuvaus.

Yksikäsitteisyys osoittamiseksi oletetaan, että f ja g ovat konformikuvauksia alueelta Ω annulukselle A . Tällöin kuvaus $h = g^{-1} \circ f$ kuvaa alueen

Ω konformisesti itselleen, ja näin ollen $f = g$ on kierto kuvaus. \square

Luvussa 4 todettiin, että annuluksen $A(r_0, r_1)$ reunaympyrät separoivien polkujen polkuperheen moduli on reunaympyrät yhdistävien polkujen polkuperheen käänteisluku. Nyt kahden edellisen lauseen avulla seuraus 4.8 voidaan yleistää annulusten lisäksi myös yleiselle kahdesti yhtenäiselle alueelle Ω .

Seuraus 6.4. *Olkkoon Ω kahdesti yhtenäinen alue. Olkkoon Γ_s alueen Ω reunakomponentit separoivien polkujen polkuperhe ja olkkoon Γ_y reunakomponentit yhdistävien polkujen polkuperhe. Tällöin*

$$M(\Gamma_s) = \frac{1}{M(\Gamma_y)}.$$

Olkkoon nyt Ω kahdesti yhtenäinen alue ja olkkoon $A(r_0, r_1)$ annulus. Luvussa 4 laskettiin annuluksen separoivien ja yhdistävien polkujen polkuperheen modulit, ja koska moduli säilyy konformikuvauksessa, niin alueelta Ω on olemassa konformikuvaus annulukselle $A(r_0, r_1)$ jos ja vain jos niiden separoivien polkuperheiden modulit ovat yhtä suuret. Yllä olevan seurauksen nojalla sama voitaisiin todistaa myös reunakomponentit yhdistävien polkuperheiden avulla.

Lemma 6.5. *Olkkoon Ω kahdesti yhtenäinen alue ja olkkoon $A(r_0, r_1)$ annulus. Olkkoon lisäksi Γ_Ω alueen Ω reunakomponentit separoivien polkujen polkuperhe. Tällöin alueelta Ω annulukselle $A(r_0, r_1)$ on olemassa konformikuvaus jos ja vain jos*

$$M(\Gamma_\Omega) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_0}. \quad (6.2)$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että konformikuvauksen alueelta Ω annulukselle $A(r_0, r_1)$ olemassaolosta seuraa väite (6.2). Lauseen 6.3 nojalla on olemassa konformikuvaus f kahdesti yhtenäiseltä alueelta Ω annulukselle $A(r, 1)$. Lisäksi lauseen 6.1 nojalla annulukselta $A(r, 1)$ on olemassa konformikuvaus g annulukselle $A(r_0, r_1)$, jos ja vain jos $r/1 = r_0/r_1$. Näin ollen modulin konformisen invarianttiuden sekä lemmän 4.7 nojalla

$$M(\Gamma_\Omega) = M(f(\Gamma_\Omega)) = M(g(f(\Gamma_\Omega))) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{1} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_0}.$$

Osoitetaan nyt väitteen toinen suunta. Lauseen 6.3 nojalla on olemassa konformikuvaus f alueelta Ω annulukselle $A(r, 1)$ kuten edellä. Jos väite (6.2) pätee, niin on olemassa konformikuvaus h annulukselta $A(r, 1)$ annulukselle $A(r_0, r_1)$, jos ja vain jos $r/1 = r_0/r_1$. Nyt funktio $g = h \circ f$ kahdesti yhtenäiseltä alueelta Ω annulukselle $A(r_0, r_1)$ on kahden konformikuvauksen yhdisteenä edelleen konformikuvaus. \square

7 Koeben kuvaus ja Koeben $\frac{1}{4}$ -lause

Tässä luvussa tarkastellaan Koeben funktioita sekä todistetaan ensimmäinen tutkielman päätuloksista, Koeben $\frac{1}{4}$ -lause. Aluksi tutustutaan Koeben funktioiden muodostumiseen sekä yleisemmässä muodossa että eräässä erikoistapauksessa. Lisäksi tutkitaan sitä, miten Koeben funktiot kuvaavat yksikkökiekon. Lopuksi osoitetaan Koeben $\frac{1}{4}$ -lause. Luvun tulokset on nimetty saksalaisen matemaatikon Paul Koeben (1882-1945) mukaan.

7.1 Koeben kuvaus

Tarkastellaan kuvausta

$$z \mapsto \frac{1}{1-z}.$$

Kyseessä on geometrisen sarjan summa, joten kuvauksen sarjakehitelmä on tällöin

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Derivoimalla kuvauksen sarjakehitelmää puolittain ja kertomalla tätä saatua tulosta vielä puolittain luvulla z saadaan funktio

$$\psi(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^{k+1}.$$

Tällaista kuvausta ψ kutsutaan Koeben kuvaukseksi.

Olkoon nyt λ kompleksiluku, jolle $|\lambda| = 1$. Yleinen muoto Koeben kuvauksesta saadaan ottamalla yhdistetty kuvaus $\psi(\lambda z)$ ja jakamalla tulosta luvulla λ :

$$\psi_{\lambda}(z) = \frac{1}{\lambda} \psi(\lambda z) = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda z}{(1-\lambda z)^2} = \frac{z}{(1-\lambda z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \lambda^{n-1} z^n.$$

Kun valitaan $\lambda = -1$, niin kuvaus

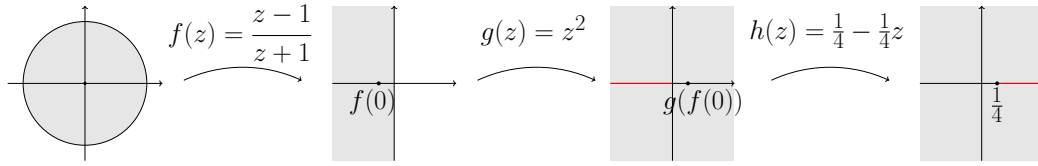
$$k(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$$

voidaan esittää kolmen funktion yhdisteenä, joista kaksi on Möbius-kuvauksia:

$$k(z) = \frac{z}{(1+z)^2} = (h \circ g \circ f)(z),$$

missä

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}, \quad g(z) = z^2, \quad \text{ja} \quad h(z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}z.$$



Kuva 7.1: Yksikkökieron kuvautuminen kuvauksella $k(z) = (h \circ g \circ f)(z)$.

Funktion f napa $z = 1$ on yksikkökieron kehällä, joten lauseen 2.11 nojalla f kuvaa yksikkökieron kehän suoraksi. Testipisteiden avulla huomataan, että yksikkökieron kuva kuvauksen f suhteen on vasen puolitaso, ja origo kuvautuu pisteeseen $f(0) = -1$. Kuvauksen g puolestaan kaksinkertaistaa kulmat, joten se kuvaa imaginaariakselin negatiiviseksi reaaliakseliksi $\{z: z = t, t \leq 0\}$ ja vasen puolitaso kuvautuu kompleksitasoksi, josta on poistettu negatiivinen reaaliakseli $\mathbb{C} \setminus \{z: z = t, t \leq 0\}$. Lisäksi $g(f(0)) = g(-1) = 1$. Lopuksi h kiertää negatiivisen reaaliakselin positiiviselle reaaliakselille ja siirtää sekä venyttää sitä luvun $\frac{1}{4}$ verran. Näin ollen origo palaa paikalleen: $h(g(f(0))) = h(1) = 0$ ja yksikkökierko kuvautuu alueeksi $\mathbb{C}^{\frac{1}{4}} = \mathbb{C} \setminus \{z: z = \frac{1}{4}t, t \geq 1\}$.

Yleinen Koeben kuvaus puolestaan kuvaa yksikkökieron kompleksitasoksi, josta on poistettu pisteestä $-\frac{\bar{\lambda}}{4}$ lähtevä origosta pois päin suuntautuva puolisuora: $\mathbb{C} \setminus \{z: z = -\frac{\bar{\lambda}}{4}t, t \geq 1\}$, sillä

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2} = \bar{\lambda},$$

kun $|\lambda| = 1$, ja

$$\psi_{\lambda}(z) = \frac{z}{(1 - \lambda z)^2} = -\frac{1}{\lambda} \frac{-\lambda z}{(1 - \lambda z)^2} = -\frac{1}{\lambda} k(-\lambda z) = -\bar{\lambda} k(-\lambda z).$$

Tarkastellaan seuraavaksi, miten kuvauksen $k(z) = z/(1+z)^2$ käänteiskuvaus $k^{-1}(z)$ kuvaa Grötzschin annuluksen $\mathbb{C}_{\varepsilon}^R$. Ensin kuvaus $z \mapsto \frac{1}{4R}z$ kuvaa Grötzschin annuluksen $\mathbb{C}_{\varepsilon}^R$ Grötzschin annulukseksi $\mathbb{C}_{\frac{\varepsilon}{4R}}^{\frac{1}{4}}$ ja näin ollen $k^{-1}\left(\frac{1}{4R}z\right)$ kuvaa Grötzschin annuluksen $\mathbb{C}_{\varepsilon}^R$ yksikkökieron sisälle annulukseksi, jonka ulkoreuna on yksikkökieron kehä ja sisäreuna on rajattu $\frac{\varepsilon}{4R}(1 \pm O(\frac{\varepsilon}{R}))$ -säteisten ympyröiden väliin [5]. Näin ollen modulin konformisen invarianttiuden ja lemmän 4.6 nojalla Grötzschin annuluksen $\mathbb{C}_{\varepsilon}^R$ reunakomponentit separoivien polkujen polkuperheen Γ_G moduli on

$$M(\Gamma_G) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{4R}{\varepsilon} + O\left(\frac{\varepsilon}{R}\right). \quad (7.1)$$

7.2 Koeben $\frac{1}{4}$ -lause

Olkoon f analyyttinen injektio, joka kiinnittää origon, ja jonka derivaatta origossa saa arvon 1. Seuraava lause kertoo, että yksikkökiekkon kuva kuvauksen f suhteen sisältää $\frac{1}{4}$ -säteisen kiekon, eli f ei voi kutistaa yksikkökiekkoa pienemmäksi kuin yhteen neljäsosaan alkuperäisestä. Lauseen todistuksessa on taustalla luvussa 6 käsitelty kahdesti yhtenäisten alueiden konforminen ekvivalenttius sekä Grötzschin lause 4.12. Todistus on lähteestä [5] sivulta 44 pienin korjauksin, sekä artikkelista [11] sivulta 304.

Lause 7.1 (Koeben $\frac{1}{4}$ -lause). *Olkoon $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analyyttinen injektio ja oletetaan, että $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Tällöin $D(0, \frac{1}{4}) \subset f(\mathbb{D})$.*

Todistus. Olkoot $R = \text{dist}(0, \partial f(\mathbb{D}))$, $0 < \varepsilon < 1$ ja olkoon Γ origokeskisen annuluksen $A(\varepsilon, 1)$ reunaympyrät separoivien polkujen polkuperhe. Tällöin lemmän 4.7 nojalla polkuperheen Γ moduli on

$$M(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\varepsilon}$$

ja modulin konformisen invarianttiuden nojalla (Lemma 4.4)

$$M(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} = M(f(\Gamma)).$$

Olkoon nyt $\delta = \min\{|f(z)| : |z| = \varepsilon\}$. Koska $f'(0) = 1$, niin funktion f polynomimuoto on $f(z) = z + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ja näin ollen $\delta = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Funktio f kuvaa annuluksen $A(\varepsilon, 1)$ joukkoon $f(\mathbb{D})$, josta on poistettu kiekko $D(0, \delta)$, eli $f(A(\varepsilon, 1)) \subset f(\mathbb{D}) \setminus D(0, \delta)$. Jos Γ_δ on alueen $f(\mathbb{D}) \setminus D(0, \delta)$ reunakomponentit separoivien polkujen polkuperhe, niin modulin monotonisuuden (Lemma 4.5) nojalla

$$M(f(\Gamma)) \leq M(\Gamma_\delta).$$

Osion 7.1 lopussa todettiin Koeben funktion käänteiskuvauksen $k^{-1}\left(\frac{1}{4R}z\right)$ kuvaavan Grötzschin annuluksen \mathbb{C}_ε^R yksikkökielelle \mathbb{D} origokeskiseksi annulukseksi $A\left(\frac{\varepsilon}{4R}(1 \pm O(\frac{\varepsilon}{R})), 1\right)$. Olkoon nyt Γ_G polkuperhe, joka sisältää kaikki Grötzschin annuluksen \mathbb{C}_ε^R reunakomponentit separoivat polut. Grötzschin lauseen (Lause 4.12) avulla voidaan arvioida polkuperheen Γ_δ modulia polkuperheen Γ_G modulin avulla ja tulos (7.1) antaa polkuperheen Γ_G modulille arvon

$$M(\Gamma_\delta) \leq M(\Gamma_G) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{4R}{\delta} + O\left(\frac{\delta}{R}\right).$$

Yhdistämällä yllä olevat tulokset saadaan epäyhtälö

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{4R}{\delta} + O\left(\frac{\delta}{R}\right) \geq \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Logaritmin laskusääntöjen nojalla epäyhtälö saa muodon

$$\log 4R \geq \log \frac{\delta}{\varepsilon},$$

ja koska $f'(0) = 1$, niin $\frac{\delta}{\varepsilon} \rightarrow 1$, kun $\varepsilon \rightarrow 0$, joten $\log 4R \geq 0$, eli $R \geq \frac{1}{4}$. \square

Tarkastellaan seuraavaksi Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen sovelluksia. Lausetta voidaan käyttää apuna luvussa 4 osoitettua Grötzschin lausetta (Lause 4.12) vastaavan moduliongelman todistamiseksi. Osoitetaan ensiksi Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen seuraus, joka tunnetaan nimellä Koeben estimaatti. Todistus löytyy kirjasta [7] sivulta 20.

Lause 7.2 (Koeben estimaatti). *Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue ja olkoon $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ konformikuvaus. Tällöin kaikille z yksikkökiekossa \mathbb{D} pätee*

$$\frac{1}{4} |f'(z)| (1 - |z|^2) \leq \text{dist}(f(z), \partial\Omega) \leq (1 - |z|^2). \quad (7.2)$$

Todistus. Kiinnitetään piste z_0 yksikkökiekosta \mathbb{D} . Tällöin analyyttiselle injektiolelle

$$\psi(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right) - f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z|^2)}$$

pätee $\psi(0) = 0$ ja $\psi'(0) = 1$. Jos nyt $w \notin f(\mathbb{D})$, niin Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen nojalla

$$\left| \frac{w - f(z_0)}{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)} \right| \geq \frac{1}{4},$$

ja näin ollen epäyhtälön (7.2) vasen epäyhtälö on osoitettu.

Oikeanpuoleisen epäyhtälön osoittamiseksi kiinnitetään piste z yksikkökiekosta \mathbb{D} . Määritellään nyt funktio φ ,

$$\varphi(w) = f^{-1}(f(z) + \text{dist}(f(z), \partial\Omega)w),$$

ja olkoon

$$g(w) = \frac{\varphi(w) - z}{1 - \bar{z}\varphi(w)}.$$

Kun $w = 0$, niin epäyhtälö seuraa soveltamalla Schwarzin lemmaa (Lemma 3.13) funktioon g . \square

Yllä oleva lause voidaan muotoilla myös seuraavalla tavalla. Lause löytyy lähteestä [3].

Lause 7.3. *Olkoon $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ analyyttinen injektio ja olkoon z piste alueessa Ω . Tällöin*

$$\frac{1}{4} \text{dist}(f(z), \partial\Omega') \leq |f'(z)| \text{dist}(z, \partial\Omega) \leq 4 \text{dist}(f(z), \partial\Omega').$$

Seuraavan moduliongelman ratkaisi saksalainen matemaatikko Oswald Teichmüller (1913-1943) [11], ja lause tunnetaan Teichmüllerin lauseena. Lause voidaan todistaa myös ilman Koeben $\frac{1}{4}$ -lausesta käyttäen apuna alueet separoivien polkujen polkuperheiden moduleita. Todistus löytyy lähteestä [11] sivulta 303.

Lause 7.4 (Teichmüllerin lause). *Olkoon Ω kahdesti yhtenäinen alue, joka separoi parin $\{-1, 0\}$ parista $\{\omega_0, \infty\}$, $|\omega_0| = R$, ja olkoon Γ_0 polkuperhe, joka sisältää kaikki alueen Ω reunakomponentit separoivat polut. Olkoon lisäksi*

$$D = \mathbb{C} \setminus (\{z: -t, 0 \leq t \leq 1\} \cup \{z: Rs, s \geq 1\})$$

Teichmüllerin annulus ja olkoon Γ polkuperhe, joka sisältää kaikkialueen D reunakomponentit separoivat polut. Tällöin

$$M(\Gamma) \geq M(\Gamma_0).$$

Todistus. Määritellään ensiksi seuraavat Koeben funktiot:

$$k(z) = \frac{z}{(1+z)^2}, \quad k_R(z) = 4R \frac{z}{(1+z)^2}, \quad k_R^+(\rho) = 4R \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$k_R^-(\rho) = 4R \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \quad \text{ja} \quad k^+ = k_1^+.$$

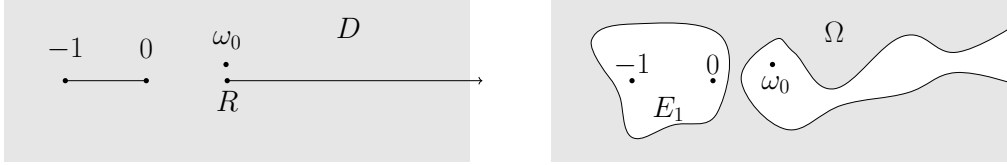
Olkoon nyt f konformikuvaus yksikkökielelta \mathbb{D} itselleen siten, että $f(0) = 0$, jolloin piste ω_0 jää huomiotta. Tällöin Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen nojalla

$$|f'(0)| \leq 4R,$$

ja näin ollen Koeben estimaatin (Lause 7.2) nojalla

$$|f(z)| \leq k^+(|z|)|f'(0)| \leq 4Rk^+(|z|) = k_R^+(|z|).$$

Olkoon E_1 alueen Ω rajoitettu komponentti, eli se, joka sisältää pisteet 0 ja -1 . Riemannin kuvauslauseen (Lause 2.26) nojalla on olemassa analyyttinen injektio ϕ yksikkökielelta \mathbb{D} joukkoon $\Omega \cup E_1$ siten, että $\phi(0) = 0$. Olkoon ω pisteen -1 alkukuva, eli $\phi(\omega) = -1$. Alueen Ω reunakomponentit



Kuva 7.2: Lauseen 7.4 todistuksen alueet D ja Ω .

separoivien polkujen polkuperheen Γ_0 moduli on joukon $\phi^{-1}(E_1)$ ja yksikkökieken reunan $\partial\mathbb{D}$ separoivien polkujen polkuperheen moduli ja Grötzschin lauseen (Lause 4.12) ja seurauksen 4.8 nojalla moduli on suurin, kun $\phi^{-1}(E_1)$ on origon ja pisteen ω yhdistävä jana. Olkoon nyt $\omega^* = k_R^{-1}(-1)$. Tällöin kuvaus k_R kuvaa alueen $\mathbb{D} \setminus \{z: t\omega^*, 0 \leq t \leq 1\}$ janojen $\{z: -r, 0 \leq r \leq 1\}$ ja $\{z: Rs, s \geq 1\}$ komplementiksi.

Toisaalta, Koeben $\frac{1}{4}$ -lauseen nojalla $|\phi'(0)| \leq 4R$ ja näin ollen Koeben estimaatin nojalla

$$|\phi(z)| \leq k^+(|z|)|\phi'(0)| \leq 4Rk^+(|z|) = k_R^+(|z|),$$

kun z on yksikkökiekkossa \mathbb{D} . Koska $k_R(\omega^*) = -1$, niin $\omega^* = -|\omega^*|$. Näin ollen

$$k_R^+(|\omega^*|) = |k_R(|\omega^*|)| = |-1| = |\phi(\omega)| \leq k_R^+(|\omega|),$$

joten $|\omega| \geq |\omega^*|$. Näin ollen Teichmüllerin annuluksen D separoivien polkujen poluperheen Γ moduli on suurempi kuin alueen Ω separoivien polkujen polkuperheen Γ_0 moduli. □

8 Haymanin-Wun lause

Tässä luvussa todistetaan tutkielman päätuloksista toinen eli Haymanin-Wun lause. Kyseinen lause kertoo, että jos φ on konformikuvaus yksikkökiekolta \mathbb{D} yhdesti yhtenäiselle alueelle Ω , niin mielivaltaiselle aluetta Ω leikkaavalle suoralle L pätee, että käyrän $\Omega \cap L$ alkukuvan pituus kuvauksen φ suhteen on korkeintaan 4π .

Osoitetaan ensiksi Haymanin-Wun lauseen todistuksen kannalta kätevä lemma ja muotoillaan sitten itse Haymanin-Wun lause.

Lemma 8.1. *Olkoot Φ konformikuvaus ja γ sileä käyrä. Tällöin*

$$\ell(\Phi \circ \gamma) \leq \max |\nabla \Phi| \cdot \ell(\gamma).$$

Todistus. Käyrän pituuden määritelmän sekä ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}
\ell(\Phi \circ \gamma) &= \int_{\Phi \circ \gamma} |dz| = \int_a^b |(\Phi \circ \gamma)'(t)| dt \\
&= \int_a^b |(\Phi' \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t)| dt = \int_a^b |\nabla \Phi| |\gamma'(t)| dt \\
&\leq \max |\nabla \Phi| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\
&= \max |\nabla \Phi| \cdot \ell(\gamma),
\end{aligned}$$

missä a ja b ovat käyrän $\Phi \circ \gamma$ päätepisteet. \square

Lause 8.2 (Hayman-Wu). *Olkoon φ konformikuvaus yksikkökielelta \mathbb{D} yhdesti yhtenäiselle alueelle Ω ja olkoon L suora. Tällöin*

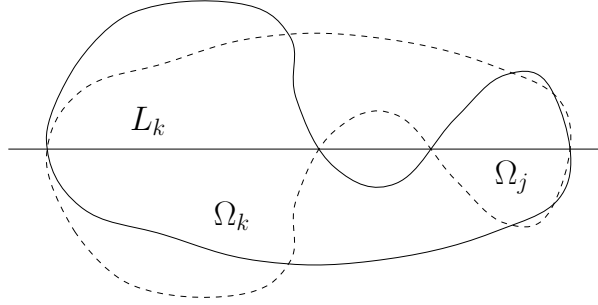
$$\ell(\varphi^{-1}(L \cap \Omega)) \leq 4\pi. \quad (8.1)$$

Hayman ja Wu todistivat tuloksen ensiksi suurelle tuntemattomalle vakiolle vuonna 1981 [8]. Øyma saavutti vakion 4π vuonna 1992 [17], ja Rohde osoitti vuonna 2002, että paras vakio on aidosti pienempi kuin 4π [15]. Øyma osoitti parhaan vakion olevan vähintään π^2 . Lauseen tarkkaa vakiota ei nykytiedon valossa tunneta. Seuraava todistus pohjaa Øyman todistukseen ja sen pohja löytyy kirjasta [7] sivulta 23.

Todistus. Voidaan olettaa, että φ on analyyttinen injektio suljetun yksikkökielellä \mathbb{D} ympäristössä ja että $L = \mathbb{R}$. Olkoot L_k , $k = 1, 2, \dots$ suoran L ja alueen Ω leikkauksen $L \cap \Omega$ komponentit. Heijastamalla alue Ω reaaliakselin suhteen ja leikkaamalla heijastusta alueella Ω muodostuu joukko $\Omega \cap \{\bar{z} : z \in \Omega\}$. Indeksoidaan tämän joukon komponentit samoin kuin joukot L_k . Tällöin Ω_k on se komponentti, jolle $L_k \subset \Omega_k$. Lisäksi joukko Ω_k on reaaliakselin suhteen symmetrinen Jordanin alue. Kun $k \neq j$, niin $\partial\Omega_k \cap \partial\Omega_j$ on reaaliakselilla, ja koska alue Ω on yhdesti yhtenäinen, niin $\partial\Omega_k \cap \partial\Omega_j$ sisältää korkeintaan yhden pisteen.

Alueen Ω_k symmetrisyyden nojalla on olemassa konformikuvaus $\psi_k: \Omega_k \rightarrow -i\mathbb{H}$, missä $-i\mathbb{H}$ on oikea puolitaso. Funktiolle ψ_k pätee, että $\psi_k(L_k) = \mathbb{R}^+$ ja Carathéodoryn lauseen (Lause 1.19) nojalla ψ_k voidaan jatkaa jatkuvaksi sulkeumaan $\overline{\Omega_k}$. Olkoon nyt $\zeta \in \partial\varphi^{-1}(\Omega_k) \cap \partial\mathbb{D}$ ja määritellään

$$\alpha = \varphi(\zeta), \quad x = |\psi_k(\alpha)|, \quad \beta = \psi_k^{-1}(x), \quad \text{ja} \quad z = \varphi^{-1}(\beta).$$



Kuva 8.1: Joukko Ω_k .

Tällöin yhdistetty kuvaus

$$\Phi \equiv \varphi^{-1} \circ \psi_k^{-1}(|\psi_k \circ \varphi|) \quad (8.2)$$

on sileä kuvaus joukolta $\varphi^{-1}(\cup \partial\Omega_k \cap \partial\mathbb{D} \setminus P) \subset \partial\mathbb{D}$ joukolle $\varphi^{-1}(\cup L_k) \setminus P'$, missä P ja P' ovat äärellisiä joukkoja (kuva 8.2).

Olkoot $a_k, b_k \in \partial\mathbb{D}$ käyrän $\varphi^{-1}(L_k)$ alku- ja päätepisteet yksikkökieron reunalla ja olkoon $\gamma_k =]a_k, b_k[$ avoin väli yksikkökieron reunalla. Tällöin

$$\varphi^{-1}(L_k) = \Phi \circ \gamma_k,$$

ja lemmän 8.1 nojalla

$$\ell(\varphi^{-1}(L_k)) = \ell(\Phi \circ \gamma_k) \leq |\nabla\Phi| \cdot \ell(\gamma_k).$$

Täten käyrän $\varphi^{-1}(L \cap \Omega)$ pituudelle saadaan arvio

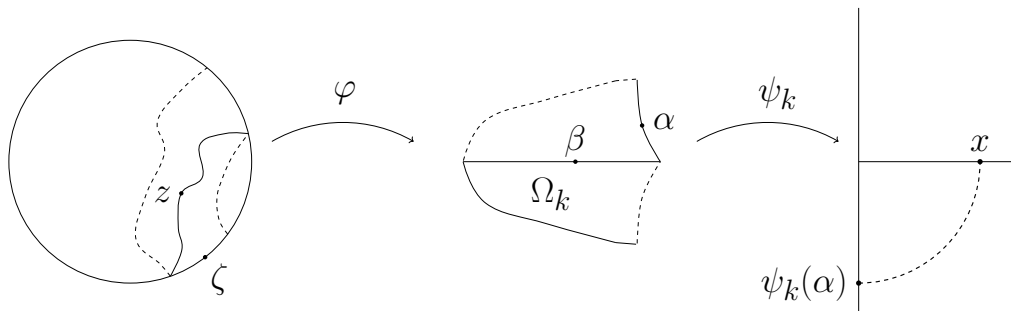
$$\begin{aligned} \ell(\varphi^{-1}(L \cap \Omega)) &= \ell\left(\varphi^{-1}\left(\sum_k L_k\right)\right) = \ell\left(\sum_k \varphi^{-1}(L_k)\right) = \sum_k \ell(\varphi^{-1}(L_k)) \\ &\leq |\nabla\Phi| \cdot \sum_k \ell(\gamma_k) \\ &\leq |\nabla\Phi| \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

ja näin ollen riittää osoittaa, että

$$|\nabla\Phi| \leq 2. \quad (8.3)$$

Oletetaan nyt, että $I =]\zeta, \zeta'[$ on joukkoon $\varphi^{-1}(\partial\Omega_k) \cap \partial\mathbb{D}$ sisältyvä avoin väli. Asetetaan

$$\alpha' = \varphi(\zeta'), \quad x' = |\psi_k(\alpha')|, \quad \beta' = \psi_k^{-1}(x'), \quad \text{ja} \quad z' = \varphi^{-1}(\beta').$$



Kuva 8.2: Kuvaus $z = \Phi(\zeta)$.

Tällöin pisteiden $\Phi(\zeta)$ ja $\Phi(\zeta')$ etäisyys pseudohyperbolisen metriikan suhteen on

$$\delta_{\mathbb{D}}(\Phi(\zeta), \Phi(\zeta')) = \delta_{\Omega}(\beta, \beta') \leq \delta_{\Omega_k}(\beta, \beta') = \delta_{-i\mathbb{H}}(x, x') = \left| \frac{x - x'}{x + x'} \right|,$$

missä ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa funktion φ konformisuudesta, epäyhtälö seuraa Schwarzin-Pickin lauseesta (Lause 3.14), toinen yhtäsuuruus seuraa pisteiden määritelmästä ja viimeinen yhtäsuuruus seuraa pseudohyperbolisesta metriikasta oikeassa puolitasossa (Huomautus 3.4).

Merkitään nyt

$$x' = (1 + \delta)x. \quad (8.4)$$

Tällöin

$$\left| \frac{x - x'}{x + x'} \right| = \left| \frac{-\delta x}{2x + \delta x} \right| = \frac{\delta}{2 + \delta}.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että

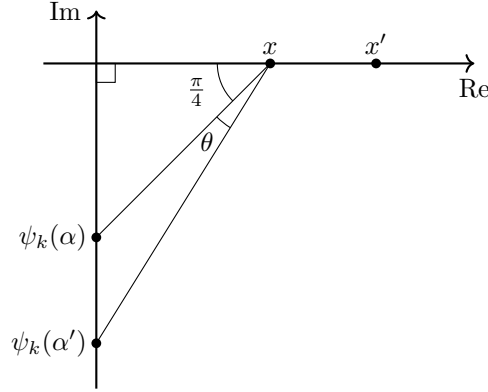
$$\frac{\delta}{2 + \delta} = \frac{\delta}{2} + o(\delta),$$

missä $o(\delta)$ on luvusta δ riippuva termi, joka lähestyy nollaa nopeammin kuin δ . Laskemalla erotus

$$\frac{\delta}{2 + \delta} - \frac{\delta}{2} = \frac{2\delta - 2\delta - \delta^2}{2(2 + \delta)} = -\frac{\delta^2}{2(2 + \delta)} = o(\delta)$$

nähdään, että yllä oleva väite pätee. Näin ollen

$$\left| \frac{x - x'}{x + x'} \right| = \frac{\delta}{2} + o(\delta).$$



Kuva 8.3: Kulma θ .

Tarkastellaan seuraavaksi joukon $\Psi_k(\varphi(I))$ harmonista mittaa alueen $-i\mathbb{H}$ pisteessä x . Harmonisen mitan määritelmän (5.1) nojalla

$$\omega(x, \Psi_k(\varphi(I)), -i\mathbb{H}) = \frac{\theta}{\pi}. \quad (8.5)$$

Tarkastellaan lisäksi harmonista mittaa geometrisesti (kuva 8.3). Pisteeseen x' määritelmän (8.4) sekä tangentin laskukaavan (1.4) nojalla

$$1 + \delta = \frac{x'}{x} = \tanh\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta}.$$

Tämän yhtäsuuruuden avulla saadaan ratkaistua yhtälöstä luku θ :

$$1 + \delta = \frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta} \iff \tan \theta = \frac{\delta}{2 + \delta} \iff \theta = \arctan\left(\frac{\delta}{2 + \delta}\right).$$

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla

$$\tan \theta - \tan(0) = \frac{1}{\cos^2 \xi}(\theta - 0) = \frac{\theta}{\cos^2 \xi} = \frac{\theta}{1 - \sin^2 \xi}$$

jollakin $\xi \in [0, \theta]$, ja näin ollen

$$\theta = \tan \theta(1 - \sin^2 \xi) \leq \tan \theta = \frac{\delta}{2 + \delta} = \frac{\delta}{2} + o(\delta).$$

Arvioidaan seuraavaksi tulosta (8.5). Koska

$$\omega(z, I, \mathbb{D}) - \omega(z, I, \varphi^{-1}(\Omega_k)) \begin{cases} = 0, & \text{kun } z \in I \\ = 0, & \text{kun } z \in \partial\mathbb{D} \cap \varphi^{-1}(\partial\Omega_k) \setminus P \\ \geq 0, & \text{kun } z \in \varphi^{-1}(\partial\Omega_k) \cap \mathbb{D}, \end{cases}$$

niin Lindelöfin maksimiperiaatteen (Lemma 1.14) nojalla

$$\omega(x, \Psi_k(\varphi(I)), -i\mathbb{H}) = \omega(z, I, \varphi^{-1}(\Omega_k)) \leq \omega(\Phi(\zeta), I, \mathbb{D}),$$

missä ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa kuvausten φ ja Ψ_k konformisesta invarianssiudesta. Harmonisen mitan integraalimuodon (5.5) nojalla harmonisen mitta on

$$\omega(\Phi(\zeta), I, \mathbb{D}) = \int_I \frac{1 - |\Phi(\zeta)|^2}{|e^{i\theta} - \Phi(\zeta)|^2} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Yhdistämällä tulokset saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{D}}(\Phi(\zeta), \Phi(\zeta')) &\leq \frac{x - x'}{x + x'} = \frac{\delta}{2} + o(\delta) \\ &= \theta = \pi \cdot \omega(x, \Psi_k(\varphi(I)), -i\mathbb{H}) + o(\delta) \\ &\leq \pi \cdot \omega(\Phi(\zeta), I, \mathbb{D}) + o(|x - x'|) \\ &= \pi \int_I \frac{1 - |\Phi(\zeta)|^2}{|e^{i\theta} - \Phi(\zeta)|^2} \frac{d\theta}{2\pi} + o(|x - x'|). \end{aligned}$$

Kirjoittamalla epäyhtälön vasen puoli auki pseudohyperbolisen metriikan määritelmän mukaisesti ja jakamalla puolittain termillä $|\zeta - \zeta'|$ epäyhtälö saa muodon

$$\frac{|\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta')|}{|\zeta - \zeta'| |1 - \overline{\Phi(\zeta')}\Phi(\zeta)|} \leq \frac{1}{|\zeta - \zeta'|} \left(\pi \int_I \frac{1 - |\Phi(\zeta)|^2}{|e^{i\theta} - \Phi(\zeta)|^2} \frac{d\theta}{2\pi} + o(|x - x'|) \right).$$

Kun $\zeta' \rightarrow \zeta$, epäyhtälö saadaan muotoon

$$\frac{|\nabla\Phi|}{1 - |\Phi(\zeta)|^2} \leq \pi \cdot \frac{1 - |\Phi(\zeta)|^2}{2\pi |\zeta - \Phi(\zeta)|^2}.$$

Käyttämällä tämän epäyhtälön vasemman puolen nimittäjään ja oikean puolen osoittajaan neliöiden erotuksen laskukaavaa, arvioimalla oikean puolen nimittäjää käänteisellä kolmioepäyhtälöllä ja käyttämällä tietoa $|\Phi(\zeta)| \leq 1$ seuraa väite (8.3). \square

Viitteet

- [1] L. Ahlfors ja A. Beurling. “Conformal invariants and function-theoretic null-sets”. *Acta Math.* 83 (1950), s. 101–129. DOI: [10.1007/BF02392634](https://doi.org/10.1007/BF02392634).
- [2] A. F. Beardon ja D. Minda. “The hyperbolic metric and geometric function theory” (2006). URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:30848074> (viitattu 23. 01. 2024).
- [3] D. Beliaev. “Conformal Maps and Geometry” (2015). URL: https://people.maths.ox.ac.uk/belyaev/TCC/lecture_notes.pdf (viitattu 15. 03. 2024).
- [4] L. Bieberbach. “Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln”. *Berl. Ber.* (1916), s. 940–955.
- [5] C. Bishop. *Topics in Complex Analysis: Conformal Fractals, Part I: DLA*. 2022. URL: https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/classes/math627.S22/cf_notes.pdf (viitattu 12. 01. 2024).
- [6] C. Fan. *The Hyperbolic Metric in Complex Analysis*. 2019. URL: https://reu.dimacs.rutgers.edu/~cjf151/The_Hyperbolic_Metric_in_Complex_Analysis.pdf (viitattu 08. 01. 2024).
- [7] J. B. Garnett ja D. E. Marshall. *Harmonic Measure*. Cambridge University Press, 2005.
- [8] W.K. Hayman ja J.-M.G. Wu. “Level sets of univalent functions”. *Comment. Math. Helvetici* 56 (1981), s. 366–403. DOI: [10.1007/BF02566219](https://doi.org/10.1007/BF02566219).
- [9] *How to show the real part of a holomorphic function is harmonic*. URL: <https://math.stackexchange.com/questions/1901977/how-to-show-the-real-part-of-a-holomorphic-function-is-harmonic> (viitattu 06. 05. 2024).
- [10] T. Kilpeläinen. *Kompleksianalyysi*. 2006. URL: <http://users.jyu.fi/~terok/opetus/kompleksi/kompleksianalyysi.pdf> (viitattu 23. 01. 2024).
- [11] M. Mateljević. “Quasiconformal and quasiregular harmonic analogues of Koebe’s theorem and applications”. *Ann. Fenn. Math.* 32.2 (2007), s. 301–315.
- [12] B. P. Palka. *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer New York, 1990.

- [13] G. Pick. “Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche”. *Math. Ann.* 77 (1915), s. 1–6. DOI: [10.1007/BF01456816](https://doi.org/10.1007/BF01456816).
- [14] G. Piranian ja A. Weitsman. “Level sets of infinite length”. *Commen. Math. Helvetici* 53 (1978), s. 161–164. DOI: [10.1007/BF02566072](https://doi.org/10.1007/BF02566072).
- [15] S. Rohde. “On the theorem of Hayman and Wu”. *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002). DOI: [10.1090/S0002-9939-01-06209-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-01-06209-8).
- [16] D. Zill ja P. Shanahan. *A First Course in Complex Analysis with Applications*. Jones & Bartlett Learning, 2009.
- [17] K. Øyama. “Harmonic Measure and Conformal Length”. *Proc. Amer. Math. Soc.* 115.3 (1992), s. 687–689. DOI: [10.1090/S0002-9939-1992-1101991-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1992-1101991-1).
- [18] Knut Øyama. “The Hayman-Wu constant”. *Proc. Amer. Math. Soc.* 119 (1993), s. 337–338. DOI: [10.1090/S0002-9939-1993-1149976-4](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1993-1149976-4).