



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTO-
TIETEEN LAITOS

PRO GRADU-TUTKIELMA

Diskreetti Fourier-muunnos DFT sekä nopea Fourier-muunnos FFT

Ville Sivil

28. kesäkuuta 2024



TekijäVille Sivil

OtsikkoDiskreetti Fourier-muunnos DFT sekä nopea Fourier-muunnos FFT (engl. Discrete Fourier transform DFT and fast Fourier transform FFT)

Tutkinto-ohjelmaMatematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä

28. kesäkuuta 2024

Sivumäärä38

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa käsitellään Diskreettiä Fourier-muunnosta sekä Nopeaa Fourier-muunnosta, joka on tehokkaampi algoritmi diskreettejä Fourier-muunnoksia varten. Diskreettiä Fourier-muunnosta varten käsitellään lisäksi tarvittavat taustatiedot Fourier-sarjoista.

Fourier-sarja on matemaattinen työkalu, jonka avulla jaksollinen funktio voidaan ilmaista eritaajuisten sini- ja kosinifunktioiden summana. Fourier-sarja toimii lähtökohtana Fourier-muunnokselle, josta on olemassa jatkuva sekä diskreetti versio. Jatkuvaa Fourier-muunnosta hyödynnetään lähinnä matematiikan ja fysiikan teoreettisissa sovelluksissa. Reaalimaailman sovelluksissa käytetään käytännössä aina diskreettiä versiota, jota tässä tutkielmassa käsitellään.

Diskreetti Fourier-muunnos eli DFT on Fourier-analyysissä käytetty työkalu, jonka avulla ajan suhteen diskreetti ja äärellinen signaali saadaan esitettyä taajuuden suhteen. Tämän avulla voidaan selvittää, mitä taajuuksia signaali sisältää ja mikä on kunkin taajuuden amplitudi.

Diskreettiä Fourier-muunnosta hyödynnetään laajasti käytännön sovelluksissa, mutta se on algoritmina kuitenkin hidas. Tämän vuoksi reaalimaailman sovelluksissa hyödynnetäänkin lähes aina nopeaa Fourier-muunnosta eli FFT:tä, jonka avulla päästään samaan lopputulokseen käyttäen huomattavasti tehokkaampia algoritmeja. FFT:n vaatimien laskutoimitusten määrä on vain murto-osa verrattuna DFT:hen, mikä korostuu entisestään näyttöiden määrän kasvaessa suureksi. FFT:n tehokkuuden vuoksi sitä käytetäänkin laajasti erilaisia signaalinkäsittelyä vaativissa sovelluksissa, kuten äänen- ja kuvankäsittelyssä sekä lääketieteellisessä kuvantamisessa.

Avainsanat: Fourier-sarja, ortogonaalisuus, Fourier-kertoimet, diskreetti Fourier-muunnos, nopea Fourier-muunnos.

Sisällys

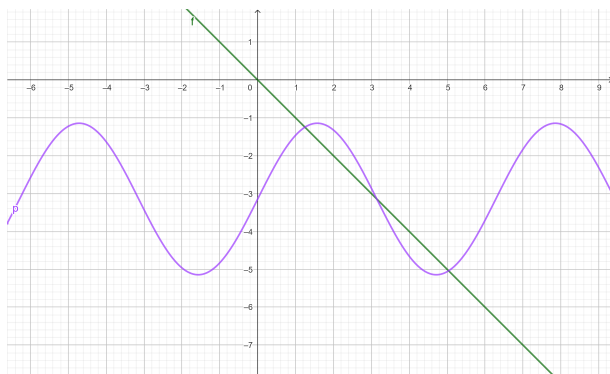
Johdanto	3
1 Fourier-sarja	6
1.1 Trigonometrinen funktioiden ortogonaalisuus	6
1.2 Trigonometrinen Fourier-sarja	7
1.3 Trigonometrisen Fourier-sarjan yleinen muoto	13
1.4 Kompleksinen Fourier-sarja	15
2 Diskreetti Fourier-muunnos	17
2.1 Diskreetti ortogonaalisuus	17
2.2 Diskreetti Fourier-muunnos DFT	20
2.3 Diskreetti eksponentiaalinen Fourier-muunnos	24
2.4 Esimerkkejä	26
3 Nopea Fourier-muunnos FFT	29
3.1 Radix-2 FFT	29
3.2 Sovelluksia	33
3.3 FFT:n esimerkkisovellus	34
3.3.1 Signaalin kohinan poistaminen	34
A Python-koodi	38

Johdanto

Fourier-analyysi on saanut nimensä ranskalaisen matemaatikon Jean-Baptiste Joseph Fourierin (1768-1830) mukaan. Fourier oli etenkin 1800-luvun alkupuolella aikansa merkittävä matemaatikko ja fyysikko, jonka tutkimukset mullistivat muun muassa lämpöopin teorioita.

Tämän tutkielman pääpaino on diskreetissä Fourier-muunnoksessa (DFT) sekä nopeassa Fourier-muunnoksessa (FFT), joita varten tarvitaan taustatietoa Fourier-sarjoista.

Havainnollistetaan Fourier-sarjojen tarkoitusta alla olevien kuvaajien kautta. Kuvassa 0.1 on funktioiden $f(x) = -\pi + 2 \sin x$ ja $g(x) = -x$ kuvaajat.

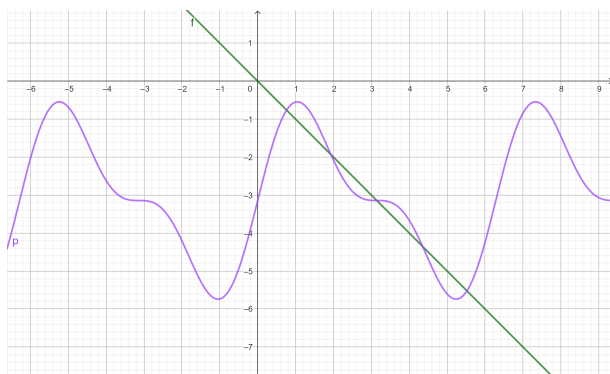


Kuva 0.1: Suora ja sinikäyrä.

Lisätään sinifunktioon $f(x)$ lisää sini-termejä seuraavasti:

$$f(x) = -\pi + 2 \sin x + \sin 2x,$$

jolloin kuvaajat näyttävät tältä:



Kuva 0.2: Suora ja kahden siniaallon lineaariyhdistelmä.

Jatketaan lisäämällä samaan tapaan sini-termejä sarjan

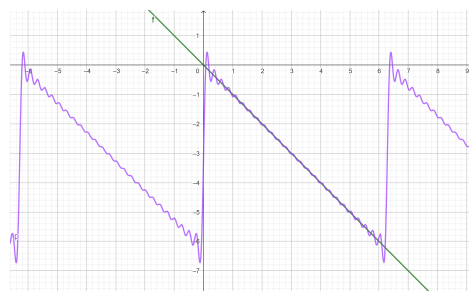
$$f(x) = -\pi + \sum_{n=1}^k \frac{2}{n} \sin nx$$

mukaisesti.

Alla olevissa kuvissa näkyy kuvaajat, kun k :n arvoa kasvatetaan.



(a) $k = 5$.



(b) $k = 25$.

Huomataan, että eritaajuisten siniaaltojen lineaariyhdistelmä $f(x)$ alkaa lähestyä funktiota $g(x) = -x$ siniaaltojen yhteisen jakson 2π -mittaisella välillä $[0, 2\pi]$. Mitä suuremmaksi $f(x)$:n indeksi k kasvaa, sitä lähemmäksi $g(x)$:ää päästään.

Edeltävän esimerkin myötä herää kysymys, onko vastaavilla eritaajuisten sini- tai kosiniaaltojen lineaariyhdistelmillä mahdollista ilmaista tai ainakin approksimoida mitä tahansa funktiota?

Vastauksen tähän kysymykseen antaa luku 1. Luvussa 1 käsitellään trigonometrista Fourier-sarjaa pääosin välillä $[0, 2\pi]$, jolloin Fourier-sarja on muotoa

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

missä a_n ja b_n ovat Fourier-kertoimet.

Trigonometrisen muodon lisäksi määritellään myös Fourier-sarjan eksponentiaalinen muoto, jonka osoitetaan olevan ekvivalentti trigonometrisen muodon kanssa. Eksponentiaalista muotoa käytetään enemmän tulevaisuudessa, kun siirrytään Fourier-sarjasta diskreettiin Fourier-muunnokseen.

Luvussa 2 käsitellään diskreettiä Fourier-muunnosta eli DFT:tä sekä trigonometrisessä että eksponentiaalisessa muodossa. Vaikka Fourier-sarjat ovat matemaattisesti ajatellen luonnollinen lähtökohta, valtaosassa reaali maailman oikeita sovelluksia sovelletaan diskreettiä versiota. Fourier-sarjoja ja jatkuvaa Fourier-muunnosta hyödynnetään enemmänkin matematiikan ja fysiikan teoreettisissa sovelluksissa.

Diskreetti Fourier-muunnos on Fourier-muunnoksen diskreettiaikainen yleistyminen, jonka avulla pystytään tutkimaan jaksollisia signaaleja taajuuden suhteen. Luvun lopussa katsotaan esimerkkien avulla sekä Fourier-muunnoksen laskennallista osuutta että kuvaajien tulkintaa.

Trigonometrisessa muodossa DFT määritellään

$$y_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} [a_p \cos \omega_p t_n + b_p \sin \omega_p t_n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

missä a_p ja b_p ovat Fourier-kertoimet.

Luvun 1 tapaan myös eksponentiaalisen DFT:n muodon osoitetaan olevan ekvivalentti trigonometrisen DFT:n kanssa. Eksponentiaalista muotoa käytetään erityisesti luvussa 3, kun siirrytään käsittelemään nopeaa Fourier-muunnosta.

Luvussa 3 tutustutaan nopeaan Fourier-muunnokseen eli FFT:hen, joka tarkoittaa tehokkaampaa algoritmia DFT:n laskemiseksi. Käytännön sovelluksissa käytetäänkin käytännössä aina FFT:tä, sillä DFT:n käyttäminen vaativissa sovelluksissa olisi aivan liian työlästä ja aikaa vievää. Kun signaalin näytemäärä kasvaa suureksi, FFT:n vaatima laskutoimituksien määrä on vain murto-osa siitä, mitä DFT:tä käytettäessä tarvittaisiin. FFT-algoritmeja on useita, joista yhteen eli Radix-2 -menetelmään tutustutaan tarkemmin. Lisäksi katsotaan vielä tarkemmin, millaisissa signaalinkäsittelyä vaativissa reaali maailman sovelluksissa FFT:tä voidaan hyödyntää.

Ellei toisin mainita, tutkielma mukailee Russell L. Hermanin kirjaa *An introduction to Fourier analysis* [5].

1 Fourier-sarja

Fourier-sarjalla tarkoitetaan ääretöntä summaa eli sarjakehitelmää, jonka avulla jaksollinen funktio voidaan esittää sini- ja kosinifunktioiden avulla. Toisin sanoen esimerkiksi välillä $[0, 2\pi]$ etsitään funktiolle muotoa

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

missä a_n ja b_n ovat Fourier-kertoimet.

1.1 Trigonometrinen funktioiden ortogonaalisuus

Johdannossa jo hieman pohdittiin, onko mahdollista löytää sellaisia kertoimia, joiden avulla mikä tahansa funktio voidaan esittää kosini- ja sini-funktioita summaamalla. Tällaisia kertoimia varten tarvitaan funktiojoukon *ortogonaalisuutta*.

Määritelmä 1.1. Funktiojoukko $\phi_n(x)$ on ortogonaalinen välillä $[a, b]$, jos

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0,$$

kun $n \neq m$.

Funktion ortogonaalisuudella on tärkeä merkitys, kun puhutaan Fourier-sarjoista. Ortogonaalisuus on keskeinen käsite vektorialgebrassa, jossa kahden vektorin sanotaan olevan ortogonaaliset, jos ne ovat kohtisuorassa toisiinsa vasten eli toisin sanoen niiden sisätulo on nolla. Fourier-sarjoista puhuttaessa puhutaan vektoreiden sijaan funktioista.

Fourier-kertoimien johtamista varten osoitetaan ensin seuraava lause:

Lause 1.2. *Joukko*

$$T = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots\}$$

on ortogonaalinen välillä $[0, 2\pi]$.

Todistus. Riittää osoittaa, että

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0, \quad m, n \geq 0, m \neq n, \quad (1.1)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0, \quad m, n \geq 1, m \neq n, \quad (1.2)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0, \quad m \geq 0, n \geq 1. \quad (1.3)$$

Todistetaan näistä tarkemmin yhtälöt 1.2 ja 1.3. Yhtälön 1.1 todistus tapahtuu samaan tapaan kuin yhtälön 1.2.

Yhtälön 1.2 todistuksessa käytetään hyväksi trigonometrista muunnoskaavaa

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2},$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} - \frac{\sin((m+n)x)}{m+n} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

kun $m, n \geq 1$ ja $m \neq n$.

Vastaavasti yhtälön 1.3 todistuksessa käytetään hyväksi trigonometrista muunnoskaavaa

$$\cos A \sin B = \frac{\sin(A + B) - \sin(A - B)}{2},$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin((m+n)x) - \sin((m-n)x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos((m-n)x)}{m-n} - \frac{\cos((m+n)x)}{m+n} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

kun $m \geq 0$ ja $n \geq 1$.

□

1.2 Trigonometrinen Fourier-sarja

Edellisessä kappaleessa osoitetun lauseen 1.2 ortogonaalisuuden tuloksien avulla pystytään johtamaan Fourier-kertoimet. Määritetään ensin sinifunktion kerroin b_n :

Aloitetaan Fourier-sarjan muodosta

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Kerrotaan tätä puolittain termillä $\sin mx$, missä $m = 0, 1, 2, \dots$

Saadaan

$$f(x) \sin mx = \frac{a_0}{2} \sin mx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx].$$

Otetaan puolittain määrätty integraali väliltä $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sin mx \, dx \\ &+ \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{2\pi} [a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx] \, dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin mx \, dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx]. \end{aligned}$$

Soveltamalla lauseen 1.2 ortogonaalisuuden tuloksia ja tietoa $\int_0^{2\pi} \sin^2 x = \pi$, päädytään tulokseen

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx = 0 + 0 + \dots + \pi b_m,$$

josta Fourier-kertoimeksi b_n saadaan

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Fourier-kerroin a_n johdetaan samaan tapaan, mutta Fourier-sarjaa kerrotaan vastaavasti termillä $\cos mx$. Fourier-kertoimeksi a_n saadaan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Katsotaan vielä tapaus $n = 0$. Tällöin $\cos(0 \cdot x) = 1$ ja $\sin(0 \cdot x) = 0$, joten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx, \\ b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Edellä johdettujen Fourier-kertoimien mukaan saadaan trigonometrisen Fourier-sarjan määritelmä välillä $[0, 2\pi]$.

Määritelmä 1.3. Funktion $f(x)$ Fourier-sarja välillä $[0, 2\pi]$ on

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

missä

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

ovat Fourier-kertoimet.

Katsotaan seuraavaksi muutama esimerkki, miten funktion Fourier-kertoimet tai Fourier-sarja lasketaan.

Esimerkki 1.4. Lasketaan funktion $f(x) = 3 \cos(2x)$ Fourier-sarja välillä $x \in [0, 2\pi]$.

Lasketaan Fourier-kertoimet:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 3 \cos(2x) \, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 3 \cos(2x) \cos(nx) \, dx = 0, \quad n \neq 2,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 3 \cos(2x) \sin(nx) \, dx = 0, \quad \text{kaikilla } n.$$

Yllä mainitut tulokset johtuvat funktion $f(x)$ ortogonaalisuudesta. Ortogonaalisuuden määritelmän nojalla ainoastaan tapaus $n = m$ eli tässä tapauksessa $n = 2$ määritetään erikseen:

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 3 \cos^2(2x) \, dx \tag{1.4}$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + \cos(4x)] \, dx \tag{1.5}$$

$$= \frac{3}{2\pi} \left[x + \frac{1}{4} \sin(4x) \right]_0^{2\pi} \tag{1.6}$$

$$= 3. \tag{1.7}$$

Siispä funktion $f(x)$ Fourier-sarjaksi saadaan sama kuin alkuperäinen funktio eli $f(x) = 3 \cos(2x)$.

Kertoimet olisi voinut tässä tapauksessa määrittää helpomminkin, sillä funktio $f(x)$ koostuu vain yksinkertaisesta kosinifunktiosta. Katsotaan seuraavassa esimerkissä, kuinka tietyissä tapauksissa kertoimet saadaan määritettyä ilman integrointia.

Esimerkki 1.5. Määritetään funktion $f(x) = \sin^2 x, x \in [0, 2\pi]$. Fourier-kertoimet.

Tämänkin funktion Fourier-kertoimet voitaisiin määrittää samaan tapaan integroimalla, mutta käytetään nyt hyväksi trigonometrisia ominaisuuksia. Tiedetään, että

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Koska sini-termejä ei löydy ollenkaan, on oltava $b_n = 0$, kaikilla n .

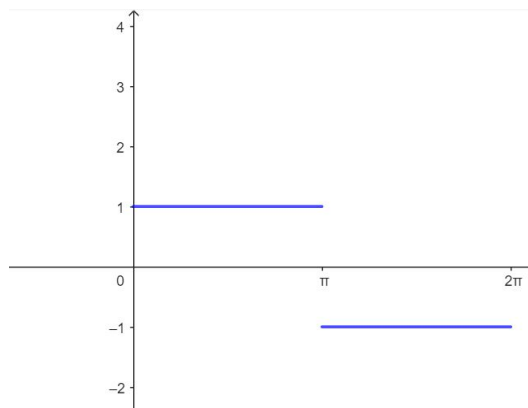
Funktiosta löytyy vakiotermi $\frac{1}{2}$, joten $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$. Siispä $a_0 = 1$.

Lisäksi funktiosta löytyy termi $-\frac{1}{2} \cos 2x$, mikä viittaa tapaukseen $n = 2$, eli $a_2 = -\frac{1}{2}$. Siispä lukuun ottamatta tapauksia $n = 0$ ja $n = 2$ on oltava $a_n = 0$.

Esimerkki 1.6. Määritetään paloittain määritellyn funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x < \pi, \\ -1, & \text{kun } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

Fourier-sarja.



Kuva 1.1: Epäjatkuvan funktion $f(x)$ kuvaaja.

Kuten kuvasta 3.2 nähdään, funktio $f(x)$ on epäjatkuva, joten jaetaan integrointi kahteen osaan välille $[0, \pi]$ ja $[\pi, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-1) dx \\
 &= \frac{\pi}{\pi} + \frac{1}{\pi}(-2\pi + \pi) \\
 &= 0. \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos nx dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos nx dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{1}{n} \sin nx \right)_0^{\pi} - \left(\frac{1}{n} \sin nx \right)_{\pi}^{2\pi} \right] \\
 &= 0. \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin nx dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin nx dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{n} \cos nx \right)_0^{\pi} + \left(\frac{1}{n} \cos nx \right)_{\pi}^{2\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos n\pi \right] \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi).
 \end{aligned}$$

Ennen kuin sijoitetaan saadut kertoimet määritelmän 1.3 mukaisesti, tehdään huomio, että

$$\cos n\pi = \begin{cases} 1, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \\ -1, & \text{kun } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Siispä

$$1 - \cos n\pi = \begin{cases} 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \\ 2, & \text{kun } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Eli kerroin b_n saa nolasta poikkeavan arvon $\frac{4}{n\pi}$ vain silloin, kun n on pariton. Merkitään kokonaislukua n parittomana kokonaislukuna eli $n = 2k-1$, jolloin

$$b_n = \frac{4}{(2k-1)\pi}.$$

Tällöin funktion $f(x)$ Fourier-sarjaksi saadaan

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Miksi esimerkissä 1.4 Fourier-sarja on yhtäsuuri ($=$), kun taas esimerkissä 1.6 Fourier-sarjalle saadaan vain approksimaatio (\approx)? Myös määritelmässä 1.3 esiintyy approksimaatiomerkki.

Seuraavaksi katsotaan ehto, jolloin funktion Fourier-sarja suppenee täsmälleen samaan arvoon kuin funktion arvo eli toisin sanoen näissä tapauksissa määritelmässä 1.3 voisi olla yhtäsuuruusmerkki approksimaation sijaan. Tällaista suppenemista varten tarvitaan *Lipschitz – jatkuvuuden* käsitettä. Erityisesti jokainen jatkuvasti derivoituva jaksollinen funktio on Lipschitz-jatkuva.

Määritelmä 1.7. Olkoon funktio f määritelty välillä I . Funktio f on *Lipschitz – jatkuva* välillä I , jos jollakin $L > 0$, $L \in \mathbb{R}_+$ pätee

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

aina, kun $x_1, x_2 \in I$.

Lause 1.8. *Olkoon funktio f integroitava 2π -jaksollinen funktio. Jos funktio f on Lipschitz-jatkuva pisteessä x , niin funktion Fourier-sarja suppenee pisteessä x arvoon $f(x)$.*

Todistus. Todistuksen yksityiskohdat löytyvät lähteestä [3]. □

Jokainen Lipschitz-jatkuva funktio on jatkuva, mutta jatkuvuus ei ole välttämätön ehto Fourier-sarjan suppenemiselle, sillä myös tietyt ehdot täytävien epäjatkuvien funktioiden Fourier-sarjat suppenevat. Erona lauseen 1.8 suppenemiseen on kuitenkin se, että suppeneminen ei tapahdu tarkalleen funktion f arvoon kaikissa pisteissä vaan sen sijaan funktion vasemman- ja oikeanpuoleisen raja-arvon keskiarvoon. Muun muassa tällaisten tapauksien takia määritelmässä 1.3 on approksimaatio (\approx) yhtäsuuruuden sijaan.

Esimerkissä 1.6 laskettiin Fourier-sarja epäjatkuvalle funktiolle, jonka epäjatkuvuuskohdassa $x = \pi$ Fourier-sarja suppeni vasemman- ja oikeanpuoleisen raja-arvon keskiarvoon. Tämän vuoksi kyseisen funktion Fourier-sarjalle voitiin esittää vain approksimaatio.

Historian saatossa luultiin pitkään, että jatkuvan funktion Fourier-sarja suppenee aina. On olemassa kuitenkin myös jatkuvia funktioita, joiden Fourier-sarja ei suppene kaikissa pisteissä. Esimerkkinä tällaisesta funktiosta toimii jatkuva funktio

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3} + 1)\frac{x}{2}\right],$$

jonka Fourier-sarja hajaantuu pisteessä $x = 0$. Hajaantumisen todistaminen sivuutetaan, mutta sen löytää lähteestä [4].

1.3 Trigonometrisen Fourier-sarjan yleinen muoto

Aiemmassa luvussa olemme käsitelleet selvyuden vuoksi vain tilannetta, jossa funktion tarkasteluvälinä on ollut $[0, 2\pi]$. Otetaan nyt tarkasteluun Fourier-sarja, jossa tarkasteluvälinä on $[a, b]$. Huomataan, että seuraavan lauseen kantafunktioiden jakson pituus on välin $[a, b]$ pituus eli $b - a$.

Lause 1.9. *Funktion $f(x)$ Fourier-sarja välillä $[a, b]$ on*

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi}{b-a} nx + b_n \sin \frac{2\pi}{b-a} nx \right],$$

missä

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi}{b-a} nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ja

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi}{b-a} nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ovat Fourier-kertoimet.

Todistus. Fourier-kertoimien johtaminen menee samaan tapaan kuin edellä, kun tarkasteluvälinä oli $[0, 2\pi]$. \square

Esimerkki 1.10. Lasketaan funktion $f(x) = x$, missä $x \in [1, 2]$, Fourier-sarja.

Nyt $b - a = 1$, joten lauseen 1.9 mukaisesti Fourier-sarja saa muodon

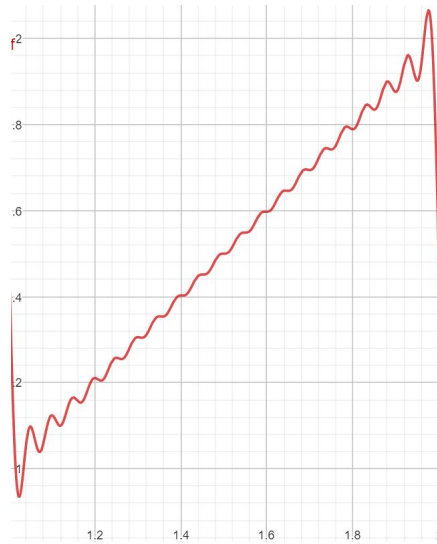
$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x].$$

Lasketaan seuraavaksi Fourier-kertoimet. Kertoimien a_n ja b_n laskemisessa käytetään osittaisintegrointia.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2 \int_1^2 x \, dx = 3. \\
a_n &= 2 \int_1^2 x \cos 2n\pi x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \\
&= 2 \left[\frac{1}{2n\pi} x \sin 2n\pi x + \frac{1}{4n^2\pi^2} \cos 2n\pi x \right]_1^2 \\
&= 0. \\
b_n &= 2 \int_1^2 x \sin 2n\pi x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \\
&= 2 \left[-\frac{1}{2n\pi} x \cos 2n\pi x + \frac{1}{4n^2\pi^2} \sin 2n\pi x \right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Kun saadut kertoimet sijoitetaan paikalleen, funktion $f(x) = x$, missä $x \in [1, 2]$ Fourier-sarjaksi saadaan

$$f(x) \approx \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}. \quad (1.8)$$



Kuva 1.2: Funktion $f(x) = x$ Fourier-sarjan osasumman kuvaaja välillä $x \in [1, 2]$, kun on laskettu 20 ensimmäisen termin summa eli $n = 20$.

Kuvasta 1.2 nähdään, että Fourier-sarjan osasumman kuvaaja muistuttaa jo funktiota $f(x) = x$. Mitä suuremmaksi kasvatettaisiin n :n arvoa, sitä lähemmäksi päästäisiin oikeaa funktiota.

1.4 Kompleksinen Fourier-sarja

Tähän mennessä ollaan käsitelty vain Fourier-sarjan trigonometrista muotoa. Usein Fourier-sarjan ja etenkin seuraavassa luvussa käsiteltävän diskreetin Fourier-muunnoksen esityksessä käytetään kompleksista muotoa.

Määritelmä 1.11. Funktion $f(x)$ kompleksinen Fourier-sarja välillä $[-L, L]$ on

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx.$$

Osoitetaan, että kompleksinen Fourier-sarja on ekvivalentti trigonometrisen Fourier-sarjan kanssa millä tahansa välillä $[-L, L]$. Todistus mukailee lähteen [6] materiaaleja.

Lause 1.12.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right],$$

missä

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{\frac{in\pi x}{L}} dx. \end{aligned}$$

Todistus. Aloitetaan Fourier-sarjan kompleksisesta muodosta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}.$$

Tehdään jälkimmäiseen sarjaan muuttujanvaihto $n = -n$, jolloin saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{(-n)} e^{-\frac{in\pi x}{L}} \tag{1.9}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + c_{(-n)} e^{-\frac{in\pi x}{L}} \right]. \tag{1.10}$$

Hyödyntämällä Eulerin kaavaa $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, lauseke 1.10 voidaan kirjoittaa muodossa

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(c_n + c_{(-n)}) \cos \frac{n\pi x}{L} + i(c_n - c_{(-n)}) \sin \frac{n\pi x}{L} \right]. \quad (1.11)$$

Seuraavaksi hyödynnetään tietoa $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ja lasketaan auki $c_n + c_{(-n)}$:

$$\begin{aligned} c_n + c_{(-n)} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{\frac{in\pi x}{L}} dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(e^{-\frac{in\pi x}{L}} + e^{\frac{in\pi x}{L}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) 2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Vastaavasti hyödyntämällä tietoja $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ja $-i^2 = 1$, voidaan laskea auki $i(c_n - c_{(-n)})$:

$$\begin{aligned} i(c_n - c_{(-n)}) &= \frac{i}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(e^{-\frac{in\pi x}{L}} - e^{\frac{in\pi x}{L}} \right) dx \\ &= \frac{i}{2L} \int_{-L}^L f(x) (-2i) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= b_n. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{i \cdot 0 \cdot \pi x}{L}} dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{0 \cdot \pi x}{L} dx \\ &= \frac{a_0}{2}. \end{aligned}$$

Kun edellä johdetut c_0 , $c_n + c_{(-n)}$ ja $i(c_n - c_{(-n)})$ sijoitetaan yhtälöön 1.11, väite seuraa. \square

2 Diskreetti Fourier-muunnos

Diskreetti Fourier-muunnos eli DFT (Discrete Fourier Transform) on muunnos, jonka avulla diskreetti signaali saadaan muutettua taajuusalueelle. DFT on erittäin hyödyllinen työkalu signaalinkäsittelyssä ja datan analysoinnissa erityisesti silloin, kun operoidaan digitaalisten signaalien parissa.

Ortogonaalisuudesta puhuttiin jo luvussa 1, mutta tutustutaan vielä diskreettiin ortogonaalisuuteen, jonka avulla saadaan johdettua diskreetit Fourier-kertoimet.

2.1 Diskreetti ortogonaalisuus

Diskreettien Fourier-kertoimien johtaminen voidaan tehdä käyttämällä avuksi diskreetin ortogonaalisuuden ominaisuuksia. Todistetaan aluksi seuraava lause:

Lause 2.1.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, N-1 \\ N, & k = 0, N. \end{cases}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = 0, \quad k = 0, \dots, N.$$

Todistus. Todistus on helpointa tehdä käyttämällä eksponentiaalista muotoa, hyödyntäen Eulerin kaavaa $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Nyt

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + i \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ink}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi ik}{N}}\right)^n.$$

Huomataan, että edellä laskettu eksponentiaalinen muoto on geometrinen summa, joten soveltamalla tuttua geometrisen summan kaavaa saadaan

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi ik}{N}}\right)^n = \frac{1 - (e^{2\pi ik/N})^N}{1 - e^{2\pi ik/N}}, \quad k \neq N, \quad (2.1)$$

$$= \frac{1 - e^{2\pi ik}}{1 - e^{2\pi ik/N}}. \quad (2.2)$$

Eulerin kaavan nojalla $1 - e^{2\pi ik} = 0$ ja $1 - e^{2\pi ik/N} \neq 0$, kun $k \neq 0$. Tällöin

$$\frac{1 - e^{2\pi ik}}{1 - e^{2\pi ik/N}} = 0.$$

Lisäksi kun $k = 0$ tai $k = N$, niin $e^{2\pi ink/N} = 1$.

Tällöin

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi ink/N} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

Siispä

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + i \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, N-1, \\ N, & k = 0, N, \end{cases}$$

joten on oltava

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, N-1, \\ N, & k = 0, N. \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = 0, \quad k = 0, \dots, N.$$

□

Hyödyntämällä edellä todistettua lausetta 2.1, voidaan johtaa myös muita hyödyllisiä ortogonaalisuuteen liittyviä tuloksia. Näitä tuloksia hyödynnetään myöhemmin, kun lähdetään johtamaan diskreetin Fourier-muunnoksen Fourier-kertoimia.

Lause 2.2. Oletetaan, että $1 \leq p, q \leq \frac{N}{2}$. Tällöin

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) = \begin{cases} N/2, & p = q \neq N/2, \\ N, & p = q = N/2, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) = 0. \quad (2.4)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \sin\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) = \begin{cases} N/2, & p = q \neq N/2, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Todistus. Hyödyntämällä trigonometrista muunnoskaavaa

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)],$$

saadaan

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos\left(\frac{2\pi(p-q)n}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(p+q)n}{N}\right) \right]. \quad (2.7)$$

Jakamalla lauseke 2.7 kahteen eri summalausekkeeseen, lauseen 2.1 nojalla saadaan

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi(p-q)n}{N}\right) = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ N, & p = q, \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi(p+q)n}{N}\right) = \begin{cases} 0, & p+q \neq N, \\ N, & p+q = N, \end{cases}$$

josta saadaan johdettua ensimmäinen tulos 2.3:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) = \begin{cases} N/2, & p = q \neq N/2, \\ N, & p = q = N/2, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tulokset 2.4 ja 2.5 saadaan johdettua samaan tapaan:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sin\left(\frac{2\pi(p-q)n}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi(p+q)n}{N}\right) \right]. \\ &= 0, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \sin\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos\left(\frac{2\pi(p-q)n}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(p+q)n}{N}\right) \right]. \\ &= \begin{cases} N/2, & p = q \neq N/2, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

2.2 Diskreetti Fourier-muunnos DFT

Fourier-sarjaa käytettäessä haetaan signaalin esitystä $y(t)$, missä $t \in [0, T]$, siten, että

$$y(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t],$$

missä kulmataajuus $\omega_n = 2\pi f_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Huomautus 2.3. Signaaleista puhuttaessa käytetään $f(t)$:n sijasta usein merkintää $y(t)$, jotta vältytään sekaannuksilta taajuuden symbolin f kanssa.

Fourier-sarjan analyysissä aikajakso on rajoitettu välille $[0, T]$ ja funktio on jaksollinen ajan suhteen. Todellisuudessa dataa voidaan mitata vain tietyillä taajuuksilla, sillä datan ottaminen ei onnistu korkeilla taajuuksilla. Koska pystytään poimimaan vain tiettyjä taajuuksia, johtaa se myös datan diskretoitumiseen ajan suhteen.

Datasta otetaan N kappaletta näytteitä tasaisin välein

$$t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

missä Δt on mittauksen aikaväli.

Mittausten väliseksi ajaksi saadaan $\Delta t = \frac{T}{N}$. DFT, jota tässä johdetaan, saa muodon

$$y_n = y(t_n) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^M [a_p \cos \omega_p t_n + b_p \sin \omega_p t_n], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.8)$$

Listataan seuraavaksi muutamia aputuloksia, jotka auttavat johtamaan trigonometristen argumenttien sisältöä tarkemmin.

Aputuloksia Olkoot $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ja $p = 1, \dots, M$. Määritellään $\Delta t = \frac{T}{N}$, $\omega = 2\pi f$ ja $\Delta f = \frac{1}{T}$, jolloin

$$\begin{aligned} t_n &= n\Delta t = \frac{nT}{N}, \\ \omega_p &= p\Delta\omega = \frac{2\pi p}{T}, \\ \omega_p t_n &= \frac{2\pi pn}{N}. \end{aligned}$$

Koska $y_n = y(t_n)$ sisältää näytteitä N kappaletta ja tuntemattomia kertoimia on $2M$ kappaletta, tulee M valita siten, että näytteitä ja tuntemattomia

kertoimia on yhtä paljon. Valitaan siis uudeksi arvoksi $M = \frac{N}{2}$. Jotta M säilyy edelleen kokonaislukuna, oletetaan näytteiden määrän N olevan parillinen kokonaisluku. Näin ollen DFT saadaan muotoon

$$y_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} [a_p \cos \omega_p t_n + b_p \sin \omega_p t_n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

josta saadaan aputuloksia hyödyntämällä laajennettu muoto

$$y_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} \left[a_p \cos \left(\frac{2\pi pn}{N} \right) + b_p \sin \left(\frac{2\pi pn}{N} \right) \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.9)$$

Johdetaan ensin kerroin a_0 laskemalla kaavan 2.9 mukaiset yhtälöt eri n :n arvoille yhteen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} y_n &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} \left[a_p \cos \left(\frac{2\pi pn}{N} \right) + b_p \sin \left(\frac{2\pi pn}{N} \right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 \sum_{n=0}^{N-1} 1 + \sum_{p=1}^{N/2} \left[a_p \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left(\frac{2\pi pn}{N} \right) + b_p \sum_{n=0}^{N-1} \sin \left(\frac{2\pi pn}{N} \right) \right], \end{aligned}$$

josta lauseen 2.1 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}a_0 N + \sum_{p=1}^{N/2} [a_p \cdot 0 + b_p \cdot 0] \\ &= \frac{1}{2}a_0 N. \end{aligned}$$

Tästä saadaan helposti laskettua, että

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n.$$

Kertoimien a_q ja $a_{N/2}$ johtamista varten kerrotaan yhtälö 2.9 termillä $\cos \left(\frac{2\pi qn}{N} \right)$

ja lasketaan jälleen summat eri n :n arvoille yhteen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} \left[a_p \cos\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) + b_p \sin\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \right] \right) \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{N/2} a_p \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{N/2} b_p \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right), \end{aligned}$$

mistä lauseiden 2.1 ja 2.2 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \sum_{p=1}^{N/2} [a_p \frac{N}{2} \delta_{p,q} + b_p \cdot 0], & q \neq N/2 \\ \sum_{p=1}^{N/2} [a_p N \delta_{p,N/2} + b_p \cdot 0], & q = N/2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}a_q N, & q \neq N/2 \\ a_{N/2} N, & q = N/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Edellä oleva merkintä δ_{ij} on *Kroneckerin delta*, jota käytetään tyypillisesti matemaattisena lyhennysmerkintänä. Sen mukaan

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases}$$

Edelleen saadaan

$$\begin{aligned} a_q &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right), \quad q \neq \frac{N}{2}, \\ a_{N/2} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos\left(\frac{2\pi n(N/2)}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos \pi n. \end{aligned}$$

Kerroin b_q saadaan johdettua lähes samaan tapaan kuin kerroin a_q . Ai-

noastaan kertoimena olevan termin kosini vaihdetaan siniksi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \left(\sin \left(\frac{2\pi qn}{N} \right) \right) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} \left[a_p \cos \left(\frac{2\pi pn}{N} \right) + b_p \sin \left(\frac{2\pi pn}{N} \right) \right] \right) \left(\sin \left(\frac{2\pi qn}{N} \right) \right) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2} b_q N. \end{aligned}$$

Näin ollen kertoimeksi b_q saadaan

$$b_q = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \sin \left(\frac{2\pi qn}{N} \right), \quad q = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Tästä on myös helppo laskea, että

$$b_0 = b_{N/2} = 0.$$

Näin on saatu johdettua kaikki trigonometrisen Fourier-muunnoksen kertoimet.

Määritelmä 2.4. Diskreetti trigonometrinen Fourier-muunnos on muotoa

$$y_n = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} [a_p \cos \omega_p t_n + b_p \sin \omega_p t_n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

missä Fourier-kertoimet ovat

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos \left(\frac{2\pi pn}{N} \right), \quad p = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ b_p &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \sin \left(\frac{2\pi pn}{N} \right), \quad p = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n, \\ a_{N/2} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos n\pi, \\ b_0 &= b_{N/2} = 0. \end{aligned}$$

2.3 Diskreetti eksponentiaalinen Fourier-muunnos

Luvussa 1 käsiteltiin Fourier-sarjan trigonometrisen muodon lisäksi sen eksponentiaalinen muoto. Määritellään nyt diskreetin Fourier-muunnoksen eksponentiaalinen muoto.

Määritelmä 2.5. Diskreetti eksponentiaalinen Fourier-muunnos on muotoa

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} W^{jk} f_j,$$

missä $W = \omega_N = e^{-2\pi i/N}$ ja $k = 0, \dots, N-1$.

Osoitetaan, että määritelmä 2.5 on ekvivalentti trigonometrisen DFT:n kanssa. Aloitetaan DFT:n laajennetusta muodosta yhtälön 2.9 mukaisesti:

$$y_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} \left[a_p \cos\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) + b_p \sin\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \right], \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (2.10)$$

Muunnetaan DFT Eulerin kaavan avulla eksponentiaaliseen muotoon:

$$y_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} \left[a_p \frac{e^{2\pi ipn/N} + e^{-2\pi ipn/N}}{2} + b_p \frac{e^{2\pi ipn/N} - e^{-2\pi ipn/N}}{2i} \right] \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{N/2} \left[\frac{1}{2}(a_p - ib_p)e^{2\pi ipn/N} + \frac{1}{2}(a_p + ib_p)e^{-2\pi ipn/N} \right]. \quad (2.12)$$

Määritellään $C_p = \frac{1}{2}(a_p - ib_p)$, jolloin $C_0 = \frac{1}{2}(a_0 - ib_0) = \frac{1}{2}a_0$ ja yhtälö 2.12 voidaan kirjoittaa muodossa

$$y_n = C_0 + \sum_{p=1}^{N/2} \left[C_p e^{2\pi ipn/N} + \bar{C}_p e^{-2\pi ipn/N} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.13)$$

Yhtälön 2.13 summan sisällä olevat termit voidaan yhdistää käyttämällä tietoa, että $e^{2\pi in} = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1$, kun n on kokonaisluku.

Jälkimmäisen summan eksponentiaalinen osuus voidaan kirjoittaa muodossa

$$e^{-2\pi ipn/N} = e^{-2\pi ipn/N} e^{2\pi in} = e^{2\pi i(N-p)n/N}.$$

Koska $p = 1, \dots, N/2$, voidaan määrittää uusi indeksi

$$q = N - p = N - 1, N - 2, \dots, N/2.$$

Näin ollen yhtälön 2.13 jälkimmäinen summa voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{p=1}^{N/2} \bar{C}_p e^{-2\pi ipn/N} = \sum_{p=1}^{N/2} \bar{C}_p e^{2\pi i(N-p)n/N} = \sum_{q=N/2}^{N-1} \bar{C}_{N-q} e^{2\pi iqn/N}.$$

Näin ollaan saatu yhtälön 2.13 summan molemmat termit samanmuotoisiksi, joten ne voidaan yhdistää. Korjataan vielä uudeksi indeksiksi $p = 0, \dots, N-1$, jolloin saadaan

$$y_n = \sum_{p=0}^{N-1} \gamma_p e^{2\pi ipn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.14)$$

missä

$$\gamma_p = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & p = 0, \\ \frac{1}{2}(a_p - ib_p), & 0 < p < N/2, \\ a_{N/2}, & p = N/2, \\ \frac{1}{2}(a_{N-p} + ib_{N-p}), & N/2 < p < N. \end{cases} \quad (2.15)$$

Seuraavaksi kirjoitamme kertoimet oikeaan muotoon:

$$C_p = \frac{1}{2}(a_p - ib_p) \quad (2.16)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \left[\cos\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \right] \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2\pi ipn/N}. \quad (2.18)$$

Siispä

$$\gamma_p = C_p = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2\pi ipn/N}, \quad 0 < p < \frac{N}{2} \quad (2.19)$$

ja välien $p \in (0, N/2)$ ja $p \in (N/2, N)$ symmetrian nojalla myös

$$\gamma_p = \bar{C}_{N-p} \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{2\pi i(N-p)n/N} \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2\pi ipn/N}, \quad \frac{N}{2} < p < N. \quad (2.22)$$

Myös jäljellä oleville tapauksille $p = 0$ ja $p = \frac{N}{2}$ pystytään helposti näyttämään, että ne pätevät samassa muodossa:

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2\pi i n(0)/N}. \quad (2.25)$$

$$\gamma_{N/2} = a_{N/2} \quad (2.26)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos n\pi \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n [\cos n\pi - i \sin n\pi] \quad (2.28)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2\pi i n(N/2)/N}. \quad (2.29)$$

Näin saimme määritellyä diskreetin eksponentiaalisen Fourier-muunnoksen γ_p sekä lisäksi sen käänteismuunnoksen (IDFT), jonka avulla voidaan laskea y_n :t, kun γ_p :t tiedetään:

$$\gamma_p = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2\pi i p n/N}, \quad p = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.30)$$

$$y_n = \sum_{p=0}^{N-1} \gamma_p e^{2\pi i p n/N}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (2.31)$$

Huomautus 2.6. Suuressa osassa kirjallisuutta edellä määritetty muunnospari esitetään muodossa, jossa kerroin $\frac{1}{N}$ on DFT:n (yhtälö 2.30) sijaan käänteismuunnoksen (yhtälö 2.31) edessä.

2.4 Esimerkkejä

Esimerkki 2.7. Lasketaan DFT diskreettiä eksponentiaalista Fourier-muunnosta käyttäen. Tuloksista käy ilmi sekä amplitudi että vaihekulma.

Tässä esimerkissä kompleksiluvut esitetään myös kulmam muodossa. Kulmam muodon kerroin tarkoittaa vektorin pituutta ja vaihekulma vektorin ja positiivisen reaaliakselin välistä kulmaa, missä positiivinen suunta kulkee vastapäivään.

Olkoon $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ ja $f(3) = 3$. Nyt näytteitä on 4 kappaletta eli $N = 4$.

Määritelmän mukaisesti

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{j=0}^{N-1} W^{jk} f_j = \sum_{j=0}^3 e^{\frac{-\pi ijk}{2}} f_j \\ &= f(0) + f(1)e^{\frac{-i\pi k}{2}} + f(2)e^{-i\pi k} + f(3)e^{\frac{-i\pi 3k}{2}} \\ &= e^{\frac{-i\pi k}{2}} + 2e^{-i\pi k} + 3e^{\frac{-i3\pi k}{2}} \end{aligned}$$

Näin saadaan

$$F_0 = 1 + 2 + 3 = 6 = 6\angle 0^\circ.$$

$$\begin{aligned} F_1 &= e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2e^{-i\pi} + 3e^{-i\frac{3\pi}{2}} \\ &= -i - 2 + 3i \\ &= -2 + 2i \\ &\approx 2.8\angle 135^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= e^{-i\pi} + 2e^{-i2\pi} + 3e^{-i3\pi} \\ &= -2 \\ &= 2\angle 180^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3 &= e^{-i\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-i3\pi} + 3e^{-i\frac{9\pi}{2}} \\ &= -2 - 2i \\ &\approx 2.8\angle -135^\circ. \end{aligned}$$

Fourier-muunnokseksi saadaan siis

$$F_k = \{6, -2 + 2i, -2, -2 - 2i\} \quad (2.32)$$

$$\approx \{6\angle 0^\circ, 2.8\angle 135^\circ, 2\angle 180^\circ, 2.8\angle -135^\circ\}. \quad (2.33)$$

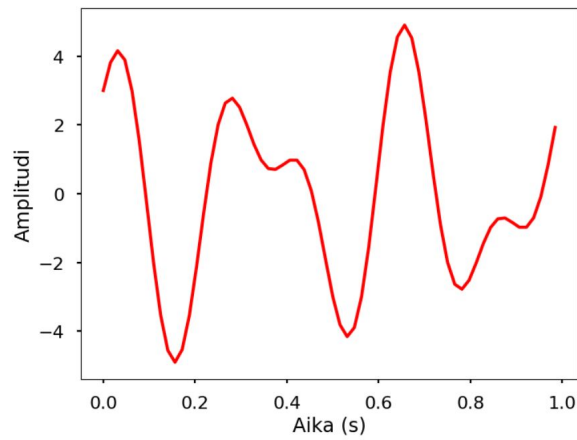
Esimerkki 2.8. Käsin laskemalla DFT on usein todella paljon työtä vaativa prosessi, sillä DFT:n tuottaminen vaatii laskennallisesti $(N - 1)^2$ kertolaskua sekä $N(N - 1)$ yhteenlaskua. Tämän vuoksi käytännössä aina Fourier-muunnokset suoritetaan tietokoneen avustuksella.

Tutkitaan nyt funktiota

$$y(t) = 2 \sin(10\pi t) + 3 \cos(6\pi t),$$

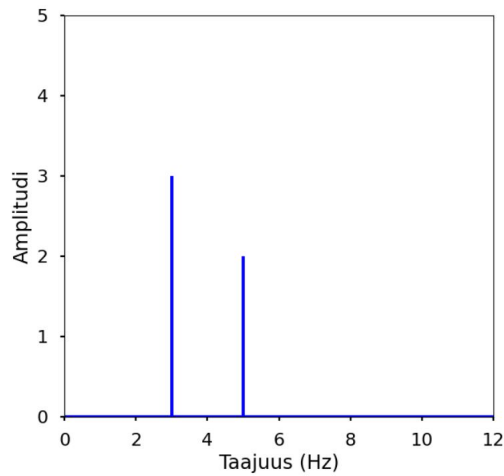
missä $t \in [0, 1]$ ja näytteiden määrä $N = 128$.

Funktiosta $y(t)$ nähdään, että sinimuotoisen termin taajuus on 5Hz ja kosinimuotoisen termin 3Hz.



Kuva 2.1: Funktion $y(t)$ kuvaaja.

Kuvassa 2.2 on tehty nopea Fourier-muunnos eli FFT käyttämällä Python-ohjelmointia. Käytetty Python-koodi löytyy liitteestä A. FFT:n antama informaatio on sama kuin DFT:n, mutta se käyttää hyväkseen huomattavasti tehokkaampia algoritmeja. FFT:n toimintaperiaatteen tutustutaan enemmän seuraavassa luvussa.



Kuva 2.2: Funktion $y(t)$ taajuusspektri, kun $N = 128$.

Kuvasta 2.2 havaitaan piikkeinä juurikin edellä mainitut taajuudet 5Hz ja 3Hz oikean suuruisilla amplitudeilla.

3 Nopea Fourier-muunnos FFT

3.1 Radix-2 FFT

Nopea Fourier-muunnos eli FFT (Fast Fourier Transform) tarkoittaa tehokasta algoritmia, jolla pystytään laskemaan diskreettejä Fourier-muunnoksia sekä niiden käänteismuunnoksia. Olemassa on monia menetelmiä, mutta tässä kappaleessa esitellään yksi käytetyimmistä menetelmistä eli Radix-2 FFT.

Aloitetaan määritelmän 2.5 mukaisesta muodosta

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} W^{jk} f_j,$$

missä $W = \omega_N = e^{-2\pi i/N}$ ja $k = 0, \dots, N-1$.

Huomioidaan, että $W^{N/2} = -1$ ja $W^N = 1$.

FFT:n kannalta olennainen asia on, että tämä summa voidaan kirjoittaa kahtena samankaltaisena summana:

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} W^{jk} f_j \quad (3.1)$$

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} W^{jk} f_j + \sum_{j=N/2}^{N-1} W^{jk} f_j \quad (3.2)$$

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} W^{jk} f_j + \sum_{m=0}^{N/2-1} W^{k(m+N/2)} f_{m+N/2}, \quad m = j - \frac{N}{2} \quad (3.3)$$

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} [W^{jk} f_j + W^{k(j+N/2)} f_{j+N/2}] \quad (3.4)$$

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} W^{jk} [f_j + (-1)^k f_{j+N/2}]. \quad (3.5)$$

Näin termin W^{jk} kerroin on muuttunut, mutta summa on edelleen pysynyt samanmuotoisena ja summattavien termien määrä on puolittunut verrattuna alkuperäiseen. Summan 3.5 + ja - merkkiset termit voidaan erotella sen perusteella, onko muuttuja k parillinen vai pariton.

Jos k on parillinen eli $k = 2m$, saadaan

$$F_{2m} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (W^{2m})^j [f_j + f_{j+N/2}], \quad m = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (3.6)$$

Jos k on pariton eli $k = 2m + 1$, saadaan

$$F_{2m+1} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (W^{2m})^j W^j [f_j - f_{j+N/2}], \quad m = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (3.7)$$

Radix-2 FFT:n ideana ja nopeuden perustana on muuttaa Fourier-muunnos pienemmiksi Fourier-muunnoksiksi, joita käytetään jälleen uudestaan saaden vielä pienempiä muunnoksia. [7]

Havainnollistetaan tätä esimerkin avulla tapauksella $N = 8$:

$$\begin{aligned} F_0 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7. \\ F_1 &= f_0 + Wf_1 + W^2f_2 + W^3f_3 + W^4f_4 + W^5f_5 + W^6f_6 + W^7f_7. \\ F_2 &= f_0 + W^2f_1 + W^4f_2 + W^6f_3 + f_4 + W^2f_5 + W^4f_6 + W^6f_7. \\ F_3 &= f_0 + W^3f_1 + W^6f_2 + Wf_3 + W^4f_4 + W^7f_5 + W^2f_6 + W^5f_7. \\ F_4 &= f_0 + W^4f_1 + f_2 + W^4f_3 + f_4 + W^4f_5 + f_6 + W^4f_7. \\ F_5 &= f_0 + W^5f_1 + W^2f_2 + W^7f_3 + W^4f_4 + Wf_5 + W^6f_6 + W^3f_7. \\ F_6 &= f_0 + W^6f_1 + W^4f_2 + W^2f_3 + f_4 + W^6f_5 + W^4f_6 + W^2f_7. \\ F_7 &= f_0 + W^7f_1 + W^6f_2 + W^5f_3 + W^4f_4 + W^3f_5 + W^2f_6 + f_7. \end{aligned}$$

Nämä lausekkeet voidaan ryhmitellä uudelleen kertoimen $W = e^{-\pi i/8}$ suhteen. Huomioidaan myös, että $W^4 = -1$.

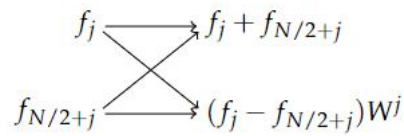
$$\begin{aligned} F_0 &= (f_0 + f_4) + (f_1 + f_5) + (f_2 + f_6) + (f_3 + f_7) \\ &\equiv g_0 + g_1 + g_2 + g_3. \\ F_1 &= (f_0 - f_4) + (f_1 - f_5)W + (f_2 - f_6)W^2 + (f_3 - f_7)W^3 \\ &\equiv g_4 + g_6 + g_5 + g_7. \\ F_2 &= (f_0 + f_4) + (f_1 + f_5)W^2 - (f_2 + f_6) - (f_3 + f_7)W^2 \\ &= g_0 - g_2 + (g_1 - g_3)W^2. \\ F_3 &= (f_0 - f_4) - (f_2 - f_6)W + (f_1 - f_5)WW^2 + (f_3 - f_7)WW^6 \\ &= g_4 - g_6 + g_5W^2 + g_7W^6. \\ F_4 &= (f_0 + f_4) + (f_1 + f_5) - (f_2 + f_6) - (f_3 + f_7) \\ &= g_0 + g_2 - g_1 - g_3. \\ F_5 &= (f_0 - f_4) + (f_2 - f_6)W + (f_1 - f_5)WW^4 + (f_3 - f_7)WW^4 \\ &= g_4 + g_6 + g_5W^4 + g_7W^4. \\ F_6 &= (f_0 + f_4) + (f_1 + f_5)W^6 - (f_2 + f_6) - (f_3 + f_7)W^6 \\ &= g_0 - g_2 + (g_1 - g_3)W^6. \\ F_7 &= (f_0 - f_4) - (f_2 - f_6)W + (f_1 - f_5)WW^6 + (f_3 - f_7)WW^2 \\ &= g_4 - g_6 + g_5W^6 + g_7W^2. \end{aligned}$$

Jatketaan samaan tapaan ja muutetaan saadut g -sarjat vielä pienemmäksi:

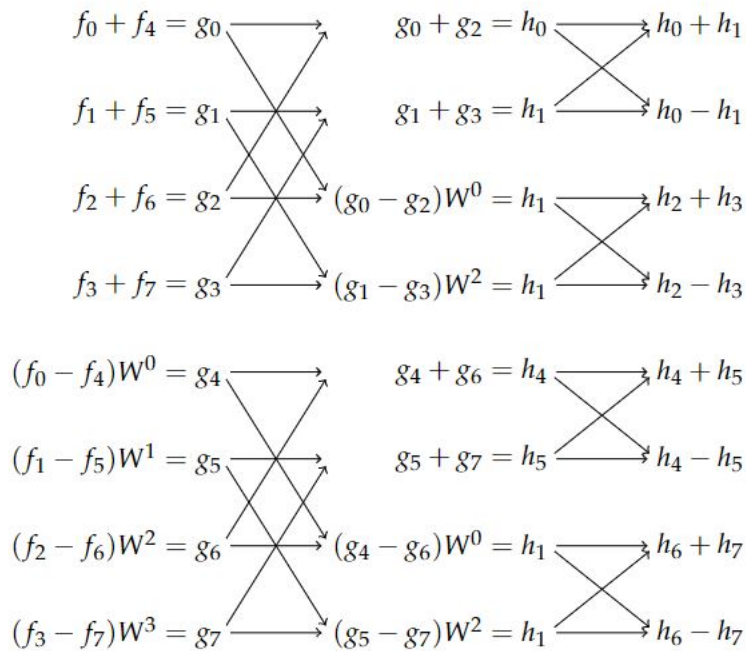
$$\begin{aligned}
 F_0 &= (g_0 + g_2) + (g_1 + g_3) \equiv h_0 + h_1. \\
 F_1 &= (g_4 + g_6) + (g_5 + g_7) \equiv h_4 + h_5. \\
 F_2 &= (g_0 - g_2) + (g_1 - g_3)W^2 \equiv h_2 + h_3. \\
 F_3 &= (g_4 - g_6) + (g_5 - g_7)W^2 \equiv h_6 + h_7. \\
 F_4 &= (g_0 + g_2) - (g_1 + g_3) = h_0 - h_1. \\
 F_5 &= (g_4 + g_6) - (g_5 + g_7) = h_4 - h_5. \\
 F_6 &= (g_0 - g_2) - (g_1 - g_3)W^2 = h_2 - h_3. \\
 F_7 &= (g_4 + g_6) - (g_5 - g_7)W^2 = h_6 - h_7.
 \end{aligned}$$

FFT:ssä laskutoimitusten määrä on $\frac{N}{2}$ kertolaskua ja N yhteenlaskua askelta kohti, missä askelten määrä on $\log_2 N$. Esimerkiksi tässä tapauksessa kun $N = 8$, askelia on $\log_2 8 = 3$, joista jokaista kohti on $\frac{8}{2} = 4$ kertolaskua ja 8 yhteenlaskua. Yhteensä on siis 12 kertolaskua ja 24 yhteenlaskua. Jos olisi käytetty DFT:tä, kertolaskuja olisi $(8 - 1)^2 = 49$ kappaletta ja yhteenlaskuja $8(8 - 1) = 56$ kappaletta. Näin pienellä näytemäärällä laskutoimitusten määrän ero ei vielä ole valtava, mutta käytännön sovelluksissa näytteiden määrä on yleensä hyvin suuri, jolloin ero korostuu merkittävästi. Jos näytteiden määrä on esimerkiksi 1024, DFT:n laskutoimitusten määrät nousevat yli miljoonaan samalla kun FFT:tä käytettäessä riittää noin 3000 laskutoimitusta.

Edellä olevaa prosessia voidaan havainnollistaa ns. perhosdiagrammilla. Alla olevista diagrammeista nähdään, mikä on perhosdiagrammin idea ja miten tapauksen $N = 8$ FFT muodostuu.



Kuva 3.1: FFT:n perhosdiagrammin idea.



Kuva 3.2: FFT:n perhosdiagrammi, kun $N = 8$.

3.2 Sovelluksia

FFT:tä hyödynnetään useissa reaaliaikailman sovelluksissa perustuen sen tehokkuuteen ja monipuolisuuteen signaalinkäsittelyssä.

FFT:tä käytetään laajasti äänenkäsittelytehtävissä, kuten taajuuskorjauksessa, kohinan poistamisessa, äänen pakkaamisessa ja äänianalyysissä. Algoritmien avulla pystytään tunnistamaan haluttuja taajuuksia sekä muita ääniominaisuuksia, joiden avulla pystytään parantamaan äänen laadukkuutta huomattavasti.

Digitaalisessa signaalinkäsittelyssä FFT on välttämätön työkalu spektrianalyysissä, signaalin suodattamisessa sekä datan pakkaamisessa. Se mahdollistaa signaalien reaaliaikaisen käsittelyn, mikä tekee siitä arvokkaan esimerkiksi tutkajärjestelmissä, lääketieteellisessä kuvantamisessa sekä televisioinnissa.

FFT:tä käytetään laajasti kuvankäsittelyssä kuvien analysoimiseen ja käsittelemiseen niiden taajuussisällön perusteella. Se on olennainen työkalu muun muassa kuvan pakkaamisessa, kohinan vähentämisessä sekä kuvan yksityiskohtaistenkin reunaviivojen havaitsemisessa. Kun kuvat muutetaan taajuusalueeksi, FFT mahdollistaa edistyneet käsittelytekniikat.

FFT on myös tärkeä osa langattomissa viestintäjärjestelmissä, kuten Wi-Fi, 4G ja 5G. Se mahdollistaa signaalien tehokkaan moduloinnin ja demoduloinnin, mikä mahdollistaa suuremmat tiedonsiirtonopeudet ja parempilaa-tuisen signaalin langattomissa verkoissa.

Lisäksi FFT:llä on keskeinen tehtävä datan pakkaustekniikoissa, kuten JPEG ja MP3. Muuntamalla tiedot taajuusalueeksi FFT mahdollistaa ylimääräisten tai vähemmän tärkeiden taajuuskomponenttien tunnistamisen ja eliminoimisen. Tämän avulla tietojen tallentaminen ja siirtäminen on tehokkaampaa. [1]

3.3 FFT:n esimerkkisovellus

3.3.1 Signaalin kohinan poistaminen

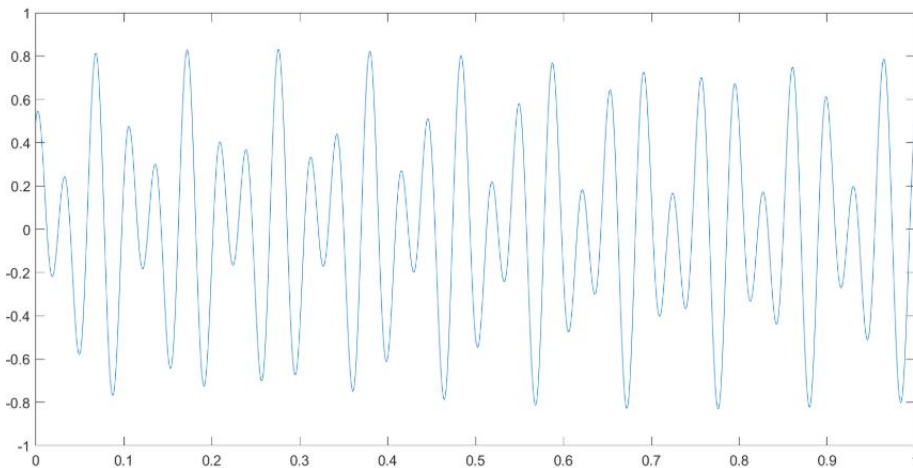
Kohinalla tarkoitetaan hyötysignaaliin kuulumatonta satunnaissignaalia, joka heikentää signaalin laatua. Havainnollistetaan seuraavan keinotekoisen signaalin avulla, miten signaalin kohinan poistaminen tapahtuu FFT:n avulla. Esimerkki perustuu lähteen [2] materiaaliin.

Olkoon alkuperäinen signaali

$$y(t) = \frac{1}{3} \sin 38\pi t + \frac{1}{2} \cos 58\pi t,$$

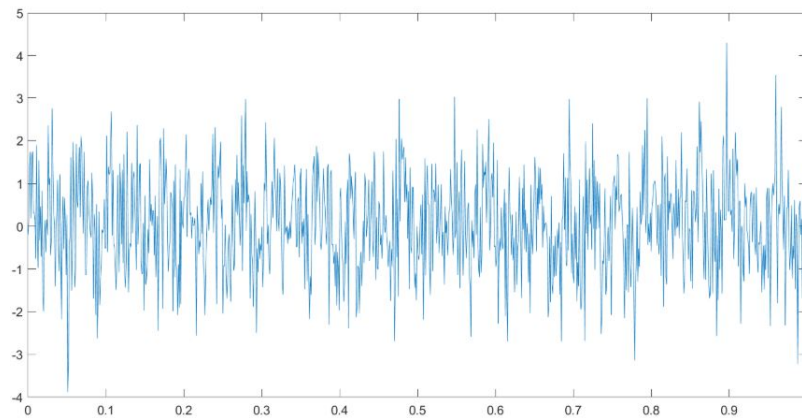
missä aika $t \in [0, 1]$.

Signaalista $y(t)$ nähdään kaavan $\omega = 2\pi f$ mukaisesti, että sini-termin taajuus on 19Hz ja kosini-termin taajuus on 29Hz.



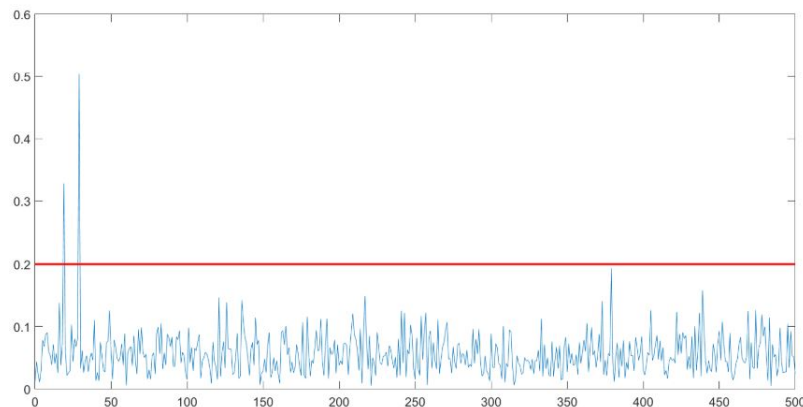
Kuva 3.3: Funktion $y(t)$ amplitudin kuvaaja ajan suhteen.

Häiritään alkuperäistä signaalia $y(t)$ lisäämällä siihen keinotekoisesti valkoista kohinaa (white noise). Valkoisella kohinalla tarkoitetaan kaikkia äänen taajuuksia sisältävää satunnaista signaalia, jossa arvot eivät ole riippuvaisia toisistaan. Kohinan lisäyksen jälkeen signaali näyttää kuvan 3.4 mukaiselta.



Kuva 3.4: Häirityn signaalin $y(t)$ amplitudin kuvaaja ajan suhteen.

Tehdään seuraavaksi häiritylle signaalille FFT, jolloin saadaan signaalin amplitudin kuvaaja taajuuden suhteen.

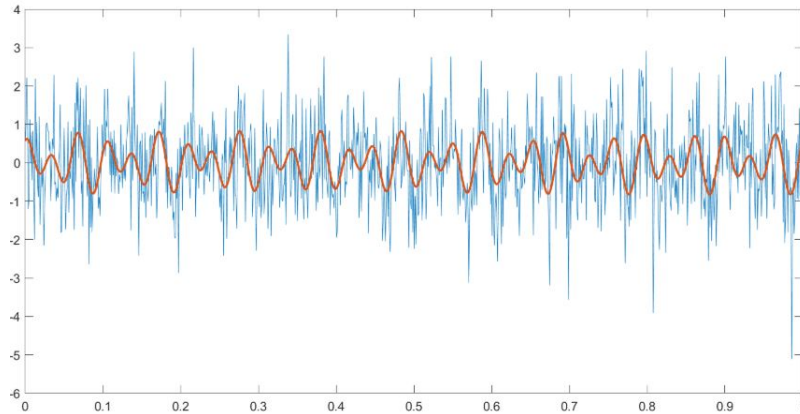


Kuva 3.5: Häirityn signaalin kuvaaja FFT:n jälkeen (sininen) ja amplitudikynnys (punainen).

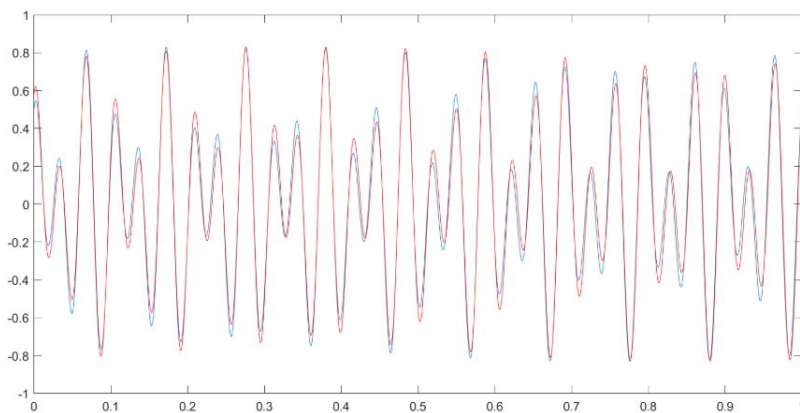
Kuvassa 3.5 näkyvästä sinisestä FFT-signaalista erottuu selkeinä piikkeinä taajuus $f_1 = 19\text{Hz}$ amplitudilla $A_1 = \frac{1}{3}$ ja taajuus $f_2 = 29\text{Hz}$ amplitudilla $A_2 = \frac{1}{2}$, jotka vastaavat alkuperäisen signaalin $y(t)$ arvoja. Kuvassa näkyvä punainen viiva tarkoittaa amplitudikynnystä, joka on asetettu arvoon $A = 0.2$. Tämän avulla signaalista säilytetään vain sellaiset taajuudet, jossa amplitudi ylittää kyseisen kynnyksen. Toisin sanoen kaikki kynnyksen alla oleva kohinasignaali eliminoidaan.

Kun amplitudikynnyksen alittava kohina on suodatettu pois, tehdään käänteinen FFT, jolloin saadaan takaisin signaali, josta kohina on poistettu.

Verrataan suodatettua signaalia häirittyyn signaaliin (kuva 3.6) ja alkuperäiseen signaaliin $y(t)$ (kuva 3.7). Huomataan, että suodatettu signaali vastaa melko tarkasti alkuperäistä signaalia.



Kuva 3.6: Signaali kohinan poistamisen jälkeen (punainen) verrattuna kohinaa sisältävään signaaliin (sininen).



Kuva 3.7: Signaali kohinan poistamisen jälkeen (punainen) verrattuna alkuperäiseen signaaliin (sininen).

Viitteet

- [1] ALOOBA, *Applications of FFT*.
<https://www.alooba.com/skills/concepts/mathematics/fft/>,
viitattu 3.6.2024.
- [2] ANTONEN, PAULI, *Fourier transform techniques for noise reduction*.
Bachelor's thesis, Lappeenranta-Lahti University of Technology LUT,
2022.
- [3] BHATIA, RAJENDRA, *Fourier series*. The Mathematical Association of
America, 2005.
- [4] GOURDON, XAVIER, *Les maths en tête*. Ellipses, 2009.
- [5] HERMAN, RUSSELL L., *An introduction to Fourier analysis*. Taylor &
Francis, 2017.
- [6] JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO, *Matikkapakki, Kompleksinen Fourier'n sarja*.
[https://tim.jyu.fi/view/kurssit/matematiikka/matikkapakki/sarjat/
fourierinsarja](https://tim.jyu.fi/view/kurssit/matematiikka/matikkapakki/sarjat/fourierinsarja), viitattu 18.6.2024.
- [7] LEPPÄNEN, PETRI, *RNS-aritmetiikka DSP-järjestelmissä*. Diplomityö,
2011.
- [8] PINSKY, MARK, *An introduction to Fourier Analysis and Wavelets*.
Brooks/Cole, 2002.

A Python-koodi

Esimerkissä 2.8 käytetty Python-koodi.

```
•[69]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
plt.style.use('seaborn-poster')
%matplotlib inline
def FFT(x):
    N = len(x)
    if N == 1:
        return x
    else:
        X_even = FFT(x[::2])
        X_odd = FFT(x[1::2])
        factor = \
            np.exp(-2j*np.pi*np.arange(N)/ N)
        X = np.concatenate(\
            [X_even+factor[:int(N/2)]*X_odd,
            X_even+factor[int(N/2):]*X_odd])
        return X
sr = 64
ts = 1.0/sr
t = np.arange(0,1,ts)
freq = 5.
x = 2*np.sin(2*np.pi*freq*t)
freq = 3
x += 3*np.cos(2*np.pi*freq*t)
plt.figure(figsize = (8, 6))
plt.plot(t, x, 'r')
plt.ylabel('Amplitudi')
plt.xlabel('Aika (s)')
plt.show()
```

Kuva A.1: Koodi, jolla saatiin luotun funktion kuvaaja.

```
•[71]: X=FFT(x)
N = len(X)
n = np.arange(N)
T = N/sr
freq = n/T
plt.figure(figsize = (12, 6))
n_oneside = N/2
f_oneside = freq[:n_oneside]
X_oneside = X[:n_oneside]/n_oneside
plt.subplot(122)
plt.stem(f_oneside, abs(X_oneside), 'b', \
        markerfmt=" ", basefmt="-b")
plt.xlabel('Taajuus (Hz)')
plt.ylabel('Amplitudi')
plt.tight_layout()
ax = plt.gca()
ax.set_xlim([0, 12])
ax.set_ylim([0, 5])
plt.show()
```

Kuva A.2: Koodi, jolla suoritettiin FFT ja saatiin luotua taajuusspektri.