

Hadronien irtikytkeytymisen mallintaminen Cooper-Frye integraalilla ultrarelativistisissa raskasionitörmäyksissä

Pro gradu -tutkielma, 18.6.2024

Tekijä:

TERO LAPPETELÄINEN

Ohjaaja:

HARRI NIEMI



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIKAN LAITOS

© 2024 Tero Lappeteläinen

Julkaisu on tekijänoikeussäännösten alainen. Teosta voi lukea ja tulostaa henkilökohtaista käyttöä varten. Käyttö kaupallisiin tarkoituksiin on kielletty. This publication is copyrighted. You may download, display and print it for Your own personal use. Commercial use is prohibited.

Tiivistelmä

Lappeteläinen, Tero

Hadronien irtikytkeytymisen mallintaminen Cooper-Frye integraalilla ultrarelativistisissä raskasionitörmäyksissä

Pro gradu -tutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2024, 56 sivua

Tässä tutkielmassa on esitetty, miten hadronien irtikytkeytyminen ultrarelativististen raskasionitörmäysten hydrodynaamisessa mallissa voidaan toteuttaa hyödyntäen Cooper-Frye integraalia. Työn toinen motiivi on laatia algoritmi, jonka avulla muodostetaan yksittäisiä hiukkasia irtikytkeytymispinnalle ja sämplätään näille jokaiselle liikemäärät. Suureen kuten liikemäärän sämpläminen tarokoittaa, että sille tuotetaan arvo sen noudattaman todennäköisyystiheysjakauman avulla.

Raskasionitörmäyksille löytyy pääasiassa kaksi tapaa muodostaa virtausmekaanisia malleja. Yksi on olettaa puskuinvariantti virtaus, jolloin laskenta prosessi nopeutuu huomattavasti ja toinen on täysin kolmiulotteinen virtaus, joka antaa realistisemmän kuvan virtauksesta.

Kun oletetaan puskuinvariantti virtaus, Cooper-Frye integraali redusoituu kaksiulotteiseksi integraaliksi, mikä nopeuttaa laskentaa huomattavasti. Puskuinvariantti malli ei kuitenkaan mahdollista rapiditeetista riippuvien suureiden laskemista. Kolmiulotteisen Cooper-Frye integraalin ratkaiseminen numeerisesti on hidasta, mutta tämä ongelma voidaan välttää hyödyntämällä Monte Carlo -simulaatiota.

Cooper-Frye integraalia ei tarvitse ratkaista integroiden, kun irtikytkeytyminen toteutetaan sämpläten. Sen sijaan yksittäisessä törmäyksessä irtikytkeytymispinnalla muodostuvat hadronit ja niiden liikemäärät muodostetaan Monte Carlo metodilla. Tämän metodin tuloksia on verrattu integroiden ratkaistuihin hiukkasjakaumiin. Testissä menetelmät antoivat samat tulokset hiukkaslukumäärille ja poikittaisliikemäärän sekä rapiditeetin jakaumille kaikilla pioneja raskaammilla hadroneilla. Pioneilla havaittiin pieni ero poikittaisliikemäärän jakaumissa.

Avainsanat: Opinnäyte, Cooper-Frye integraali, Hydrodynamiikka, Irtikytkeytyminen, Hybridimalli, Hiukkasalgoritmi

Abstract

Lappeteläinen, Tero

Modeling hadron decoupling with Cooper-Frye integral in ultrarelativistic heavy-ion collisions

Master's thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2024, 56 pages.

In this thesis it is shown how the decoupling of hadrons in the hydrodynamical model of ultrarelativistic heavy-ion collisions can be implemented utilizing the Cooper-Frye integral. The second part of the work is to develop an algorithm, which is used to generate individual particles from the decoupling surface and sample momenta for each of them.

There are mainly two ways to construct fluid mechanical models for heavy-ion collisions. One is to assume boost invariant flow, which speeds up the calculation process, and the other is a full three-dimensional flow, giving a more realistic description of the collision.

When boost invariant flow is assumed, the Cooper-Frye integral reduces to a two-dimensional integral, which speeds up the calculations considerably. However, the boost invariant flow model does not enable the calculation of rapidity dependent quantities. Solving the three-dimensional Cooper-Frye integral numerically is slow but this problem can be avoided by using a Monte Carlo algorithm.

It is not necessary to solve Cooper-Frye integral by direct integration, when decoupling is realized by sampling. Instead, for a single collision the hadrons formed on the decoupling surface and their momenta are formed using a Monte Carlo method. The results of this method has been compared to particle distributions obtained by direct integration. In the test, the methods gave the same results for the particle number and transverse momentum as well as rapidity distributions for all hadrons that were heavier than pions. A slight difference in transverse momentum distributions was observed for pions.

Keywords: Thesis, Cooper-Frye integral, Hydrodynamics, Decoupling, Hybrid Model, Particle Algorithm

Sisällys

Tiivistelmä	3
Abstract	5
1 Johdanto	9
2 Teoreettiset Lähtökohdat	13
2.1 Suhteellisuusteoria	13
2.2 Relativistinen hydrodynamiikka	16
2.3 Kineettinen kaasuteoria	18
2.4 Hydrodynaamiset säilymislait	21
2.5 Hadronikaasu ja kemiallinen irtikytkeytyminen	24
3 Kineettinen irtikytkeytyminen Cooper-Frye integraalin avulla	27
3.1 Puskuinvariantti ratkaisu termisessä tasapainossa	28
3.2 Puskuinvariantin ratkaisun korjaustermi	32
3.3 Liikemäärien sämpläysmenetelmä	36
4 Tulokset	45
5 Päätäntö	51
Lähteet	52

1 Johdanto

On tunnettua, että vahvasti vuorovaikuttavan aineen täytyy koostua hadroneista matalilla lämpötiloilla, ja sen odotetaan käyttäytyvän kuten heikosti kytketty kaasu kvarkkeja sekä gluoneja suurilla lämpötiloilla. Näiden kahden konfiguraation välissä täytyy tapahtua muunnos, missä hadroniset vapausasteet katoavat ja materia nimeltä kvarkkigluoniplasma muodostuu. Tämä idea perustuu hila QCD:n antamiin ennusteisiin kvarkkigluoniplasman esiintymiselle noin 158 MeV:n lämpötiloissa [1]. Erittäin aikaisen universumin uskotaan koostuneen kvarkkigluoniplasmasta ja mahdollisesti myös jonkin tyyppin kvarkkigluoniplasmaa esiintyy yhä neutronitähtien sisimmässä ytimessä. Lisäksi teoreettisesti on ennustettu, että vastaavat äärimmäiset olosuhteet voidaan saavuttaa kontrolloidussa laboratorioympäristössä, kun kaksi raskasta ydintä törmäytetään toisiinsa ultrarelativistisilla energioilla. Vaikka törmäyksissä muodostuukin pisara kvarkkigluoniplasmaa, sitä ei voi tutkia suoraan, minkä takia sen tarkasteleminen ja kuljetusominaisuuksien mittaaminen ei ole helppoa. Tarkastelua varten koko törmäysprosessi täytyy mallintaa kaikkine eri vaiheineen. [2]

Raskasionitörmäysten mallintamisessa yksi käytetyimmistä metodeista on hybridimalli [3]. Hybridimallin avulla pyritään yhdistämään parhaat ominaisuudet hydrodynamikasta ja mikroskooppisesta kuljetusteoriasta. Relativistinen hydrodynamikka mahdollistaa materian kehityksen kuvaamisen makroskooppisten säilymislakien avulla ja on erittäin hyödyllinen monissa eri tilanteissa. Hydrodynamikkaa voidaan käyttää, kun on mahdollista määrittää systeemin kokoon nähden pieni fluidi -elementti lokaalina kokonaisuutena hiukkasia, joita on niin paljon, että yksittäistä hiukkasta ei voi seurata, mutta riittävän suuri varmistaakseen elementin homogeenisuuden [4]. Raskasionitörmäysten alkuvaiheessa hydrodynamikka on hyvin sovellettavissa. Lopulta hiukkaset esiintyvät niin harvassa, että täytyy siirtyä mikroskooppiseen kaasuteoriaan, missä hiukkasten esiintymistodennäköisyyksiä kuvataan todennäköisyystiheysfunktioilla ja hiukkasten välisiä vuorovaikutuksia kuvataan relativistisen Boltzmann yhtälön [5] avulla. Koska kaikkien törmäyksissä esiintyvien hiukkasten vaikutusaloja ei tiedetä, täytyy yhtälö ratkaista approksimaatiolla, kuten UrQMD malli [6] tai SMASH malli [7].

Käytännössä hybridimalli sisältää seuraavat vaiheet. Ensimmäinen vaihe on itse ytimien törmääminen toisiinsa. Lähes valonnopeutta etenevät ytimet iskeytyvät vastakkain, jolloin osa niiden sisältämistä protoneista ja neutroneista törmää toisiinsa massiivisilla energioilla. Tästä seurauksena nukleonien rakenneosat vapautuvat muodostaen kvarkkigluoniplasmaa. Alkuehdot makroskooppisille suureille, jotka vaaditaan kvarkkigluoniplasmaa kuvaavan hydrodynaamiseen malliin, saadaan parametrisoimalla [8, 9] tai hyödyntäen kvanttikromodynamiikkaa [10, 11]. Seuraava vaihe on ratkaista systeemin hydrodynaaminen laajeneminen, missä reunaehtona on tyhjiö äärettömyydessä. Hydrodynamiikka kuvaa materiaa kvarkkigluoniplasmasta läpi QCD faasitransition aina hadronikaasuksi asti. [12]

Hadronit esiintyvät hadronikaasussa lopulta niin harvassa, että hydrodynaamisesta mallista täytyy siirtyä mikroskooppiseen teoriaan. Siirtyminen ei kuitenkaan ole helppoa, sillä mallit toimivat täysin eri vapausasteilla. Siirtymää kutsutaan irtikytkeytymiseksi ja se jakautuu kahteen osaan: ensin täytyy muodostaa irtikytkeytymispinta, missä siirrytään mallista toiseen; tämän jälkeen irtikytkeytymispinnalla muodostetaan hiukkasia käyttäen hiukkasjakaumia, jotka muodostamme Cooper-Frye integraalin [13] avulla. Tässä työssä keskitytään irtikytkeytymisen toteutukseen. Viimeinen vaihe on kuvata irtikytkeytyneiden hadronien liikettä mikroskooppisen kuljetusteorian avulla, kunnes hadronit voidaan nähdä vapaina hiukkasina. [12]

Hiukkasalgoritmin tarkoituksena on tuottaa hiukkasia irtikytkeytymispinnalla σ_μ annettujen hydrodynaamisten suureiden avulla [14]. Näitä hydrodynaamisia suureita ovat energiatiheys e , paine P , lämpötila T , leikkausjännitystensori $\pi^{\mu\nu}$, kemialliset potentiaalit μ ja kollektiiviset nelinopeudet u^μ [14]. Kappaleissa 2.2-2.4 on esitelty, miten hydrodynamiikan avulla ratkaistaan fluidin energiatiheden, nelinopeuden sekä leikkausjännitystensorin aikakehitys. Lämpötilan ja paineen saa ratkaistua hadronikaasun tilanyhtälön avulla, kun tiedossa on energiatiheden arvo [15]. Kappaleessa 2.5 on esitelty, miten eri hadronien hiukkastiheydet sekä kemialliset potentiaalit ratkaistaan lämpötilan funktiona fluidin ollessa hadronikaasua. Työn päämääränä on käsitellä hiukkasalgoritmin muodostamiseen vaadittava teoria, muodostaa hiukkasalgoritmi ja käyttää algoritmia konkreettisten tulosten muodostamiseen. Hiukkasalgoritmin toteutuksessa Cooper-Frye integraali kertoo, millä liikemäärän arvoilla hiukkaset todennäköisimmin esiintyvät. Integraalin numeerinen ratkaiseminen on hidasta, sillä integraali täytyy ratkaista jokaiselle hadronilajille kaikilla liikemäärän arvoilla. Työssä käydään läpi numeerisen laskennan kannalta nopeammat ratkaisut

kahdelle yleisimmälle virtausta kuvaavalle tapaukselle, jotka ovat puskuinvarianttisekä kolmiulotteinen virtaus.

Puskuinvariantti virtaus on hyviä tuloksia tuottava ja yleisesti käytetty approksimaatio, joka nopeuttaa relativistisen hydrodynamiikan liikeyhtälöiden ratkaisua huomattavasti [16–18]. Vastaavalla tavalla puskuinvariantti oletus mahdollistaa Cooper-Frye integraalin esittämisen numeerisesti tehokkaammin integroitavassa muodossa. Integraalia muokataan siten, että aika-avaruus rapiditeetti voidaan integroida analyttisesti ja numeerisesti integroitavana on enää irtikytkeytymispinnan poikittaissuuntaiset komponentit. Näin tulokseksi saadut hiukkasjakaumat riippuvat enää poikittaisliikemäärästä ja hiukkasluku on vakio liikemäärän rapiditeetin suhteen. Lasku, miten tämä toteutetaan, käydään läpi kappaleissa 3.1 ja 3.2.

Kolmiulotteista Cooper-Frye integraalia ei voi redusoida laskennallisesti parempaan muotoon. Irtikytkeytymistä voidaan kuitenkin lähestyä toisella tavalla, missä liikemäärät muodostetaan hadroneille käyttäen Cooper-Frye jakaumaa todennäköisyysjakaumana. Itse integraalia ei tarvitse ratkaista tässä metodissa, vaan sen sijaan jokaiselle infinitesimaalisen pienelle pintaelementille σ_μ arvotaan niissä muodostuvat hiukkaset ja liikemäärät. Kappaleessa 3.3 käydään läpi tämä sämpläys prosessi yksityiskohtaisesti. Työn yhteydessä on tehty koodi, joka toteuttaa hadronien irtikytkeytymisen sämpläten. Koodin toteutus on esitelty kappaleessa 4, jonka jälkeen tarkastellaan, miten hyvin koodin tulokset noudattavat numeerisesti integroitua Cooper-Frye jakaumaa. Testeissä alkutila määritellään EKRT-mallin avulla [11]. Hydrodynamiikka, irtikytkeytyminen ja vertailussa käytetyt integroidut hiukkasjakaumat muodostetaan lähteen [19] koodin avulla.

Sämpläysmenetelmässä hiukkasten irtikytkeytyminen yksittäisessä raskasionitörmäyksessä siis simuloidaan käyttäen teoreettisia jakaumia todennäköisyystiheysjakaumina ja näistä arvotaan hadronien tyypit, sijainnit sekä liikemäärät. Kokeellisissa raskasionitörmäyksissä havaitaan vastaavalla tavalla yksittäisiä hadroneja, joten tämä ratkaisu sopii paremmin kuvaamaan irtikytkeytymisiä, kuin jatkuvat Cooper-Frye jakaumat.

2 Teoreettiset Lähtökohdat

2.1 Suhteellisuusteoria

Tässä osiossa käyn läpi työn kannalta tärkeimpiä suhteellisuusteorian tuloksia. Työssä käytetään luonnollista yksikköjärjestelmää, $\hbar = c = k_B = 1$, missä \hbar on redusoitu Planckin vakio, c on valonnopeus ja k_B on Boltzmann vakio. Esitettäessä vektoreita kreikkalaiset indeksit saavat arvoja nolasta kolmeen ja latinalaiset indeksit yhdestä kolmeen. Hiukkasfysiikalle tyypilliseen tapaan tasaisen aika-avaruuden metrinen tensori on $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Työssä tensoreilla tarkoitetaan toisen kertaluvun tensoreita. Kun tensoreita esitetään matriiseina, niin ensimmäinen indeksi kertoo rivin ja toinen sarakkeen.

Kun toinen koordinaatisto etenee nopeudella $\mathbf{v} = dx^i/dt$ tarkastelijan koordinaatiston suhteen, vektori tarkastelijan koordinaatistosta x^μ voidaan muuntaa liikkuvan koordinaatiston vektoriksi x'^μ Lorentz muunnoksella

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (1)$$

Lorentz muunnokselle löytyy neljä ratkaisua, joista käytetään varsinaista Lorentz muunnosta

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \mathbf{v}^\dagger \\ -\gamma \mathbf{v} & I_3 + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^\dagger}{v^2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

missä $v = |\mathbf{v}|$ ja $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ [20, Kappale 1.7]. Viivaelementin $dx^\mu = (dt, dx^i)$ itseisaika τ toteuttaa yhtälön [20, Kappale 4.5]

$$\frac{dx_\mu dx^\mu}{d\tau^2} = 1.$$

Tämän yhtälön avulla saadaan itseisajalle yhtälö

$$\tau = \frac{t}{\gamma}.$$

Itseisaika on erittäin hyödyllinen työkalu raskasionitörmäyksiä mallintaessa, sillä sen

avulla saadaan aika fluidin mukana kulkevassa koordinaatistossa. Määritellään seuraavaksi itseisajan avulla nelinopeus hiukkaselle tai fluidielementille, jonka paikkavektori on x^μ [20, Kappale 6.2]

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(1, \mathbf{v}). \quad (3)$$

Lorentz muunnos (2) voidaan esittää nelinopeuden avulla muodossa

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} u^0 & -u^i \\ -u^j & \delta_{ij} + \frac{u^i u^j}{1+u^0} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Muunnos liikkuvasta koordinaatistosta takaisin tarkastelijan koordinaatistoon saadaan käänteisen Lorentz muunnoksen avulla

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} u^0 & u^i \\ u^j & \delta_{ij} + \frac{u^i u^j}{1+u^0} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Projektio-operaattori $\Delta^{\mu\nu}$ on tensori, joka vektoriin operoidessa projisoi sen nelinopeuden normaalin suuntaisen komponentin [20, Kappale 12.2]

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu. \quad (6)$$

Tensorin symmetrisen, jäljettömän ja nopeudelle kohtisuoran projektion antaa operaattori

$$\Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Delta^\mu{}_\alpha \Delta^\nu{}_\beta + \Delta^\nu{}_\alpha \Delta^\mu{}_\beta - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}).$$

Jos hiukkaset muodostuvat, kun $t = z = 0$, niin pisteessä $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ sijaitsevan vapaan hiukkasen z-akselin suuntainen nopeus on $v_z = z/t$ ja $\gamma = (1 - v_z^2)^{-1/2}$. Koordinaatistossa, joka kulkee alkuperäiseen nähden nopeudella $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$, itseisaika τ on

$$\tau = \gamma^{-1} t = \sqrt{t^2 - z^2}.$$

Määritellään aika-avaruuden pisteelle x^μ aika-avaruus rapiditeetti

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right). \quad (7)$$

Bjorken virtaus [21], joka etenee z-koordinaatin suuntaan nopeudella z/t , on kuvattavissa kätevästi edellä annetun itseisajan sekä aika-avaruus rapiditeetin avulla

[21]. Raskasionitörmäyksiä mallintaessa karteesisen koordinaatiston sijaan käytetään usein näin muodostettua (τ, x, y, η) -koordinaatistoa. Karteesisen koordinaatiston ja (τ, η) -koordinaatiston välinen koordinaatisto muunnos $x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu}$ on

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\gamma v_z}{\tau} & 0 & 0 & \frac{\gamma}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Esitetään muunnos τ ja η muuttujien avulla

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & 0 & 0 & -\sinh(\eta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sinh(\eta)}{\tau} & 0 & 0 & \frac{\cosh(\eta)}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Koordinaatisto muunnos ei enää ole Lorentz muunnos, koska metrinen tensori muuttuu. Koordinaatisto muunnos takaisin saadaan käänteismatriisin avulla

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & 0 & 0 & \tau \sinh(\eta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\eta) & 0 & 0 & \tau \cosh(\eta) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Karteesisessa koordinaatistossa metrinen tensori on $g'^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, joten (τ, η) -koordinaatiston metrinen tensori $g^{\mu\nu}$ on tällöin

$$g^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\delta} g'^{\rho\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau^2} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Koska $g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$, metrinen tensori lasketuilla indekseillä on muotoa $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -\tau^2)$. Kun aika-avaruuden metrinen tensori riippuu koordinaateista, derivaattana on käytettävä kovarianttia derivaattaa. Kontravariantille vektorikentälle N^{μ} kovariantti

derivaatta on [22]

$$N^\mu{}_{;\alpha} = \partial_\alpha N^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} N^\beta \quad (12)$$

ja kontravariantille tensorikentälle $T^{\mu\nu}$ kovariantti derivaatta on [22]

$$T^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = \partial_\alpha T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} T^{\beta\nu} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} T^{\mu\beta}. \quad (13)$$

Toisen tyyppin Christoffel symboli riippuu metrisestä tensorista seuraavan yhtälön mukaisesti $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 1/2g^{\mu\nu}(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta})$ [22]. Ainoa nollasta poikkeava derivaatta on $\partial_\tau g_{\eta\eta}$, joten nollasta poikkeavat Christoffel symbolit ovat $\Gamma^\eta{}_{\tau\eta} = \Gamma^\eta{}_{\eta\tau} = 1/\tau$ ja $\Gamma^\tau{}_{\eta\eta} = \tau$.

2.2 Relativistinen hydrodynamiikka

Relativistisen hydrodynamiikan lähtökohtana ovat energia-liikemäärä tensori $T^{\mu\nu}$, joka koostuu komponenteista

$$\begin{aligned} T^{00} &= \text{energiatiheys,} \\ T^{0i} &= \text{liikemäärätiheys suuntaan } i, \\ T^{i0} &= \text{energiavuo suuntaan } i, \\ T^{ij} &= i\text{-liikemäärävirtaus suuntaan } j, \end{aligned}$$

sekä hiukkasten nelivirta N^μ , joka koostuu komponenteista

$$\begin{aligned} N^0 &= \text{hiukkasten lukumäärätiheys,} \\ N^i &= \text{hiukkasten virtausvuo suuntaan } i. \end{aligned}$$

Energian, liikemäärän ja hiukkasvirran säilyminen voidaan esittää seuraavien yhtälöiden avulla

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad N^\mu{}_{;\mu} = 0. \quad (14)$$

Nämä relativistisen hydrodynamiikan perusyhtälöt voidaan esittää (τ, η) -koordinaatistossa kovariantin derivoinnin (12, 13) jälkeen muodossa

$$\frac{1}{\tau} \partial_\mu (\tau N^\mu) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{\tau} \partial_\mu (\tau T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} T^{\mu\alpha} = 0. \quad (16)$$

Tässä vaiheessa ratkaistavana on viisi yhtälöä, jotka sisältävät 14 tuntematonta muuttujaa.

Seuraavaksi on tarkoitus kirjoittaa yhtälöt eri komponenttien avulla, joiden fysiikkaa on helpompi ymmärtää. Jako tehdään konvektioon ja diffuusioon. Konvektio tarkoittaa fluidin virtauksen suuntaista komponenttia. Diffuusio tarkoittaa fluidin virtaukselle kohtisuoraa komponenttia tai komponenttia ilman virtausta. Energia-liikemäärä tensorin voi kirjoittaa seuraavassa muodossa

$$T^{\mu\nu} = e u^\mu u^\nu - P \Delta^{\mu\nu} + W^\mu u^\nu + W^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu},$$

missä $e = T^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$ on energiatiheys, $P = -(1/3) T^{\alpha\beta} \Delta_{\alpha\beta}$ on isotrooppinen paine, $W^\mu = T^{\alpha\beta} \Delta^\mu_{\alpha\beta} u_\beta$ on energiadiffuusiovirta ja $\pi^{\mu\nu} = T^{\alpha\beta} \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ on liikemäärädifffuusiovirta eli leikkausjännitystensori. Vastaava jako hiukkasten nelivirrälle antaa

$$N^\mu = n u^\mu + v^\mu$$

missä $n = N^\mu u_\mu$ on hiukkastiheys fluidin lepokoordinaatistossa ja $v^\mu = \Delta^\mu_{\nu} N^\nu$ on hiukkasdiffuusiovirta. Termodynaamisessa tasapainossa materia on lokaalisti isotrooppista, jolloin yhtälöt redusoituvat muotoon

$$T^{\mu\nu} = e_{eq} u^\mu u^\nu - p_{eq} \Delta^{\mu\nu}, \quad N^\mu = n_{eq} u^\mu. \quad (17)$$

Tässä tapauksessa ratkaistavana on enää neljä tuntematonta muuttujaa. Yleiselle tilalle $T^{\mu\nu}$ terminen tasapainotila ei ole yksikäsitteinen. Kiinnitetään terminen tasapainotila valinnalla, missä $e_{eq}(T, \mu) = e$ ja $n_{eq}(T, \mu) = n$. Kääntämällä nämä yhtälöt saadaan lämpötila T ja kemiallinen potentiaali μ . Tätä valintaa kutsutaan Landaun yhteensopivuusehdoksi ja sen avulla energia-liikemäärä tensori saa muodon

$$T^{\mu\nu} = e_{eq} u^\mu u^\nu - (p_{eq} + \Pi) \Delta^{\mu\nu} + 2W^{(\mu} u^{\nu)} + \pi^{\mu\nu},$$

missä Π on tilavuus viskoottinen paine ja käytössä on merkintä $2W^{(\mu}u^{\nu)} = W^\mu u^\nu + W^\nu u^\mu$. Fluidin nopeuden määrittelemme Landaun kuvan mukaan

$$T^{\mu\nu}u_\nu = e_{eq}u^\mu.$$

Koska yleisesti $T^{\mu\nu}u_\nu = e_{eq}u^\mu + W^\mu$, energiadiffuusiovirran täytyy olla nolla Landaun kuvassa. Tilavuus viskositeetin vaikutus jätetään huomioimatta tässä työssä, jolloin $T^{\mu\nu}$ ja N^μ voidaan kirjoittaa muotoon

$$T^{\mu\nu} = e_{eq}u^\mu u^\nu - p_{eq}\Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} \text{ ja} \quad (18)$$

$$N^\mu = n_{eq}u^\mu + v^\mu. \quad (19)$$

2.3 Kineettinen kaasuteoria

Irtikytkeytymistä varten relativistisen hydrodynamiikan suuret N^μ ja $T^{\mu\nu}$ täytyy esittää fluidia kuvaavan mikroskooppisen teorian avulla. Tämä mahdollistaa siirtymisen jatkuvan fluidin mallista vapaasti liikkuviin hiukkasiin. Rajoitutaan kuvaamaan fluidia kineettisen kaasuteorian avulla, jolloin hiukkasten liikettä kuvaa ainoastaan yksihiukkastiheysfunktio $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, joka antaa todennäköisyyden sille, että hiukkanen on paikassa \mathbf{x} ja sillä on liikemäärä \mathbf{p} . Kun hiukkasen massa on m , liikemäärä on $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ ja energia $E = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$, niin sen neliliikemäärä on $p^\mu = (E, \mathbf{p})$. Hiukkasten nelivirran voi tulkita verrannolliseksi yksihiukkastiheyden liikemääräintegraaliin [23]

$$N^\mu = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 p_0} p^\mu f(\mathbf{x}, \mathbf{p}). \quad (20)$$

Vastaavasti energia-liikemäärä tensorin voi verrannollistaa neliliikemäärällä painotettuun yksihiukkastiheyden liikemääräintegraaliin [23]

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 p_0} p^\mu p^\nu f(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Kirjoitetaan energia-liikemäärä tensorin komponentit (18) ja nelilikemäärän komponentit (19) näiden yksihiukkastiheyden liikemääräintegraalien avulla

$$e = T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 p_0} E_{\mathbf{p}}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (21)$$

$$P = -\frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\frac{1}{3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 p_0} \Delta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu f(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (22)$$

$$\pi^{\mu\nu} = \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} T^{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 p_0} p^\alpha p^\beta f(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (23)$$

$$n = N^\mu u_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 p_0} E_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \text{ ja} \quad (24)$$

$$v^\mu = \Delta^\mu{}_\nu n^\nu = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 p_0} \Delta^\mu{}_\nu p^\nu f(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (25)$$

missä $E_{\mathbf{p}} = u_\mu p^\mu$ on hiukkasen energia lepokoordinaatistossa. Termisessä tasapainossa yksihiukkastiheysfunktio on [23]

$$f_{eq}(T, \mu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{p^\mu u_\mu - \mu}{T}\right) + a}, \quad (26)$$

missä a on $+1$ Fermi-Dirac statistiikassa, -1 Bose-Einstein statistiikassa ja 0 Boltzmann statistiikassa. Termisessä tasapainossa energia-liikemäärä tensorin integrandi riippuu vain tensoreista $u^\mu u^\nu$ ja $g^{\mu\nu}$, joten saadaan jo aiemmin mainittu tulos

$$T^{\mu\nu} = A u^\mu u^\nu + B g^{\mu\nu} = e_{eq} u^\mu u^\nu - p_{eq} \Delta^{\mu\nu}.$$

Pyritään kuvaamaan yksihiukkastiheyttä hyödyntäen sen ratkaisua termisessä tasapainossa (26). Lähellä termistä tasapainotilaa

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = f = f_{eq} + \delta f,$$

missä δf on poikkeama tasapainotilasta. Esitetään tämä seuraavassa muodossa

$$f = f_{eq}(1 + \tilde{f}_{eq}\phi),$$

missä $\tilde{f}_{eq} = 1 - a f_{eq}$ ja vakio a on sama kuin yhtälössä (26). Laajennetaan yksihiukkastiheysfunktio termisen tasapainon ympärille liikemääräkannassa, jolloin

$$\phi = \varepsilon + \varepsilon^\mu p_\mu + \varepsilon^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + \varepsilon^{\mu\nu\gamma} p_\mu p_\nu p_\gamma \dots$$

Kun sarja leikataan poikki kolmannen termin kohdalta, saadaan Israelin ja Stewartin 14-momentin approksimaatio yksihiukkastiheydelle [24]

$$f \approx f_{eq}[1 + \tilde{f}_{eq}(\varepsilon + \varepsilon^\mu p_\mu + \varepsilon^{\mu\nu} p_\mu p_\nu)].$$

Tässä approksimaatiossa hiukkasten nelivirta ja energia-liikemäärä tensori ovat

$$N^\mu = \int \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3 p_0} p^\mu f_{eq}[1 + \tilde{f}_{eq}(\varepsilon + p^\gamma \varepsilon_\gamma + p^\gamma p^\delta \varepsilon_{\gamma\delta})] \text{ ja}$$

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3 p_0} p^\mu p^\nu f_{eq}[1 + \tilde{f}_{eq}(\varepsilon + p^\gamma \varepsilon_\gamma + p^\gamma p^\delta \varepsilon_{\gamma\delta})].$$

Leikkausjännitystensori voidaan ratkaista näiden approksimaatioiden jälkeen. Liikemäärä integrointi antaa tensoreita, jotka on mahdollista esittää nelinopeuden u^μ , projektio-operaattorin $\Delta^{\mu\nu}$ tai näiden yhdistelmien avulla. Koska leikkausviskositeetti on nopeutta vastaan kohtisuorassa ja jäljetön, sen voi esittää helppojen manipulaatioiden jälkeen muodossa

$$\pi^{\mu\nu} = \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} C_3 \frac{1}{3} (\Delta^{\alpha\gamma} \Delta^{\beta\delta} + \Delta^{\alpha\delta} \Delta^{\beta\gamma}) \varepsilon_{\gamma\delta} = \frac{2}{3} C_3 \Delta^{\mu\nu\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad (27)$$

missä termi C_3 on

$$C_3 = \frac{1}{5} \int \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3 p_0} (\Delta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta)^2 f_{eq} \tilde{f}_{eq} = 3J_{42}. \quad (28)$$

Nimetään laskuissa esiintyvät termodynaamiset integraalit lyhennemerkinöillä [25]

$$I_{nq} = \frac{(-1)^q}{(2q+1)!!} \int \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3 p_0} E_{\mathbf{P}}^{n-2q} (\Delta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta)^q f_{eq} \text{ ja} \quad (29)$$

$$J_{nq} = \frac{(-1)^q}{(2q+1)!!} \int \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3 p_0} E_{\mathbf{P}}^{n-2q} (\Delta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta)^q f_{eq} \tilde{f}_{eq}. \quad (30)$$

Osittaisintegroimalla yhtälöä (29) saadaan seuraava tulos [25]

$$J_{nq} = T[I_{n-1,q-1} + (n-2q)I_{n-1,q}]. \quad (31)$$

Tämän yhtälön avulla termi J_{42} saa muodon

$$J_{42} = TI_{31}.$$

Tehdään oletus, että termodynaamisen integraalin J_{42} ratkaisemiseen voidaan käyttää Boltzmann statistiikkaa. Tämä on kelpo oletus, sillä numeerisen laskun perusteella tulokset poikkeavat vain muutaman prosentin [26]. Nyt voidaan olettaa, että $f_{eq}\tilde{f}_{eq} = f_{eq}$ ja termodynaamisille integraaleille pätee etenkin $I_{31} \approx J_{31}$. Käyttämällä yhtälöä (31) uudestaan päädytään tulokseen

$$J_{42} \approx T^2(I_{20} + I_{21}).$$

Yhtälöiden (21), (22) ja (29) avulla saadaan seuraavat tulokset

$$I_{20} = \int \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3 p_0} E_{\mathbf{P}}^2 f_{eq} = e_{eq} \text{ ja}$$

$$I_{21} = \int \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3 p_0} (\Delta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta) f_{eq} = P_{eq},$$

joten termodynaaminen integraali J_{42} on arviolta

$$J_{42} \approx T^2(e_{eq} + P_{eq}). \quad (32)$$

Yhdistämällä yhtälöiden (27), (28) ja (32) tulokset saadaan leikkausjännitystensorille yhtälö

$$\pi^{\mu\nu} = 2T^2(e_{eq} + P_{eq})\Delta^{\mu\nu\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}. \quad (33)$$

Jos tilavuusviskositeetti ja diffuusio voidaan jättää huomioimatta, saadaan yksihiukkastiheysfunktioon korjaustermiksi

$$\delta f = f_{eq}\tilde{f}_{eq}\Delta^{\mu\nu\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}p_\mu p_\nu = f_{eq}\tilde{f}_{eq}\frac{\pi^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}{2T^2(e_{eq} + P_{eq})}. \quad (34)$$

2.4 Hydrodynaamiset säilymlait

Puskuinvariantti virtaus on oletus, missä fluidin z -suuntainen nopeus on Bjorken virtauksen tavoin z/t , minkä seurauksena hydrodynaamiset suureet ovat riippumattomia aika-avaruus rapiditeetin η arvosta. On riittävää ratkaista hydrodynaamiset liikeyhtälöt pisteessä $\eta = 0$, sillä sama tulos pätee myös muilla rapiditeetin arvoilla. Pisteessä $\eta = 0$ nelinopeus on $u^\mu = \gamma_T(1, v_x, v_y, 0)$, missä $\gamma_T = (1 - v_x^2 - v_y^2)^{-1/2}$. Koska energia-liikemäärä tensori ja hiukkasten nelivirta ovat riippumattomia η -koordinaatista, niiden osittaisderivointi aika-avaruus rapiditeetin suuntaan ∂_η antaa

nollan. Energia-liikemäärä tensorin komponentit saadaan yhtälön (18) avulla. Koska $u^\eta = 0$ ja $T^{\mu\nu}$ ei riipu aika-avaruus rapiditeetista, $T^{\eta i} = \pi^{\eta i} = 0$, kun $i = \tau, x, y$. Komponentit voidaan esittää seuraavien yhtälöiden avulla

$$T^{\tau\tau} = (e + P)\gamma_T^2 - P + \pi^{\tau\tau}, \quad (35)$$

$$T^{\tau x} = (e + P)\gamma_T^2 v_x + \pi^{\tau x} = T^{\tau\tau} v_x + (P - \pi^{\tau\tau})v_x + \pi^{\tau x}, \quad (36)$$

$$T^{\tau y} = T^{\tau\tau} v_y + (P - \pi^{\tau\tau})v_x + \pi^{\tau y}, \quad (37)$$

$$T^{xx} = (e + P)\gamma_T^2 v_x^2 + P + \pi^{xx} = T^{\tau x} v_x - \pi^{\tau x} v_x + P + \pi^{xx}, \quad (38)$$

$$T^{xy} = T^{\tau x} v_y - \pi^{\tau x} v_y + \pi^{xy} = T^{\tau y} v_x - \pi^{\tau y} v_x + \pi^{xy}, \quad (39)$$

$$T^{yy} = T^{\tau y} v_y - \pi^{\tau y} v_y + P + \pi^{yy}, \quad (40)$$

$$T^{\eta\eta} = \frac{1}{\tau^2} P + \pi^{\eta\eta}. \quad (41)$$

Kun energia-liikemäärä tensorin säilymlakiin (15) sijoitetaan $\nu = \tau$, saadaan

$$\frac{1}{\tau} [\partial_\tau(\tau T^{\tau\tau}) + \partial_x(\tau T^{x\tau}) + \partial_y(\tau T^{y\tau})] + \Gamma^\tau_{\eta\eta} T^{\eta\eta} = 0.$$

Sijoitetaan yhtälöt (35)-(37) ja (41)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} T^{\tau\tau} + \partial_\tau(T^{\tau\tau}) + \partial_x(T^{\tau\tau} v_x + P v_x - \pi^{\tau\tau} v_x + \pi^{\tau x}) \\ + \partial_y(T^{\tau\tau} v_y + P v_y - \pi^{\tau\tau} v_y + \pi^{\tau y}) + \frac{1}{\tau^2} P + \pi^{\eta\eta} = 0. \end{aligned}$$

Järjestellään termejä ja sievennetään, jolloin saadaan energian säilymisyyhtälö

$$\begin{aligned} \partial_\tau(T^{\tau\tau}) + \partial_x(T^{\tau\tau} v_x) + \partial_y(T^{\tau\tau} v_y) = -\frac{1}{\tau} (T^{\tau\tau} + P + \tau^2 \pi^{\eta\eta}) \\ - \partial_x(P v_x - \pi^{\tau\tau} v_x + \pi^{\tau x}) - \partial_y(P v_y - \pi^{\tau\tau} v_y + \pi^{\tau y}). \end{aligned} \quad (42)$$

Liikemäärän säilymisyyhtälöt saadaan sijoittamalla ensin $\nu = x$ ja $\nu = y$ yhtälöön (15), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} [\partial_\tau(\tau T^{\tau x}) + \partial_x(\tau T^{xx}) + \partial_y(\tau T^{yx})] = 0, \\ \frac{1}{\tau} [\partial_\tau(\tau T^{\tau y}) + \partial_x(\tau T^{xy}) + \partial_y(\tau T^{yy})] = 0. \end{aligned}$$

Seuraavaksi sijoitetaan yhtälöt (36)-(40), sievennetään ja saadaan tulokseksi liikemäärien säilymisyyhtälöt

$$\partial_\tau(T^{\tau x}) + \partial_x(T^{\tau x}v_x) + \partial_y(T^{\tau x}v_y) = -\frac{1}{\tau}T^{\tau x} \quad (43)$$

$$-\partial_x(P - \pi^{\tau x}v_x + \pi^{xx}) - \partial_y(-\pi^{\tau x}v_y + \pi^{xy}),$$

$$\partial_\tau(T^{\tau y}) + \partial_x(T^{\tau y}v_x) + \partial_y(T^{\tau y}v_y) = -\frac{1}{\tau}T^{\tau y} \quad (44)$$

$$-\partial_x(-\pi^{\tau x}v_x + \pi^{xy}) - \partial_y(P - \pi^{\tau y}v_y + \pi^{yy}).$$

Kun vastaavat laskut tehdään hiukkasten nelivirran säilymisyyhtälöön (16), saadaan tulos

$$\partial_\tau N^\tau + \partial_x(N^xv_x) + \partial_y(N^yv_y) = -\frac{1}{\tau}N^\tau. \quad (45)$$

Kolmiulotteisen virtauksen ratkaisu saadaan vastaavalla tavalla, mutta virtaus ei enää ole aika-avaruus rapiditeetista riippumaton, jolloin säilymisyyhtälöt saavat lisää termejä. Energian säilymisyyhtälö on tässä tapauksessa [22]

$$\partial_\tau(T^{\tau\tau}) + \partial_x(T^{\tau\tau}v_x) + \partial_y(T^{\tau\tau}v_y) + \partial_\eta(T^{\tau\tau}v_\eta) = -\frac{1}{\tau}(T^{\tau\tau} + \tau^2T^{\eta\eta}) \quad (46)$$

$$-\partial_x(Pv_x - \pi^{\tau\tau}v_x + \pi^{\tau x}) - \partial_y(Pv_y - \pi^{\tau\tau}v_y + \pi^{\tau y}) - \partial_\eta(Pv_\eta - \pi^{\tau\tau}v_\eta + \pi^{\tau\eta})$$

ja liikemäärien säilymisyyhtälöt ovat [22]

$$\partial_\tau(T^{\tau x}) + \partial_x(T^{\tau x}v_x) + \partial_y(T^{\tau x}v_y) + \partial_\eta(T^{\tau x}v_\eta) = -\frac{1}{\tau}T^{\tau x} \quad (47)$$

$$-\partial_x(P - \pi^{\tau x}v_x + \pi^{xx}) - \partial_y(-\pi^{\tau x}v_y + \pi^{xy}) - \partial_\eta(-\pi^{\tau x}v_\eta + \pi^{x\eta}),$$

$$\partial_\tau(T^{\tau y}) + \partial_x(T^{\tau y}v_x) + \partial_y(T^{\tau y}v_y) + \partial_\eta(T^{\tau y}v_\eta) = -\frac{1}{\tau}T^{\tau y} \quad (48)$$

$$-\partial_x(-\pi^{\tau x}v_x + \pi^{xy}) - \partial_y(P - \pi^{\tau y}v_y + \pi^{yy}) - \partial_\eta(-\pi^{\tau x}v_\eta + \pi^{x\eta}),$$

$$\partial_\tau(T^{\tau\eta}) + \partial_x(T^{\tau\eta}v_x) + \partial_y(T^{\tau\eta}v_y) + \partial_\eta(T^{\tau\eta}v_\eta) = -\frac{3}{\tau}T^{\tau x} \quad (49)$$

$$-\partial_x(-\pi^{\tau x}v_x + \pi^{xy}) - \partial_y(-\pi^{\tau x}v_y + \pi^{xy}) - \partial_\eta\left(\frac{P}{\tau^2} - \pi^{\tau\eta}v_\eta + \pi^{\eta\eta}\right).$$

Nelivirran säilymisyyhtälö saa vielä lisätermin [22]

$$\partial_\tau N^\tau + \partial_x(N^xv_x) + \partial_y(N^yv_y) + \partial_\eta(N^yv_\eta) = -\frac{1}{\tau}N^\tau. \quad (50)$$

Kummassakin virtaustilanteessa säilymislakien ratkaisu vaatii yhtälön leikkaus-

jännitystensorille, joka ratkaistaan Israelin ja Stewartin teorian [24] avulla. Tulos on

$$u^\alpha \pi^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = \frac{1}{\tau_\pi} \left(2\eta_s \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} u_{\alpha;\beta} - \pi^{\mu\nu} \right) - u^\alpha u_{\beta;\alpha} \left(u^\mu \pi^{\beta\nu} + u^\nu \pi^{\beta\mu} \right) \quad (51)$$

$$- \frac{1}{2} \pi^{\mu\nu} \left(\Delta^{\alpha\beta} u_{\beta;\alpha} + u^\alpha \ln \frac{\beta_2}{T}{}_{;\alpha} \right) - 2\Delta^{\mu\nu\alpha\beta} \pi^{\alpha\lambda} \Delta^{\beta\rho} \Delta^\delta{}_\beta (u_{\rho;\delta} + u_{\delta;\rho}),$$

missä $\tau_\pi = 2\eta_s\beta_2$ on leikkausjännitystensorin relaksaatioaika, η_s on leikkausviskositeetti ja β_2 on termodynaamisista integraaleista ratkaistavissa oleva arvo, joka on esimerkiksi massattomalle Boltzmann kaasulle $\beta_2 = 3/(4P)$ [22].

2.5 Hadronikaasu ja kemiallinen irtikytkeytyminen

Materia saavuttaa laajetessaan kriittisen lämpötilan T_c , missä se päätyy kvarkkigluoniplasman faasista hadronikaasun faasiin. Yleinen malli olettaa, että hadronit sekä niiden viritystilat eivät vuoro vaikuta ja ne ovat pistemäisiä. Tällöin hadronikaasun suurkanonisen partitiofunktion logaritmi voidaan esittää muodossa

$$\ln(Z) = \sum_i \ln(Z_i),$$

missä summa on yli kaikkien hadronien ja niiden viritystilojen [27]. Työssä tehdyissä simulaatioissa huomioidaan maksimissaan kahden GeV:n massaiset hadronit. Summan termit voidaan esittää muodossa

$$\ln(Z_i) = \pm \frac{V g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp \ln \left(1 \pm \exp \left(-\frac{E_i - \mu_i}{T} \right) \right),$$

missä V on systeemin tilavuus, g_i on degeneraatio, $E_i = (p^2 + m_i^2)^{1/2}$ on hiukkasen energia, m_i on hiukkasen massa ja μ_i on kemiallinen potentiaali [27]. Kemiallisen potentiaalin voi esittää muodossa $\mu_i = B_i\mu_B + S_i\mu_S + Q_i\mu_Q$, missä B_i on baryoniluku, S_i on outous, Q_i on hiukkasten varaus ja μ :t ovat vastaavat kemialliset potentiaalit [27]. Hadronikaasun paineen saa ratkaistua paineen perusmääritelmän [27] avulla

$$P(T, \mu) = \frac{T}{V} \ln(Z) = \sum_i \pm \frac{T g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp \ln \left(1 \pm \exp \left(-\frac{E_i - \mu_i}{T} \right) \right).$$

Lopullinen tulos hadronikaasun paineelle on

$$P(T, \mu) = \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n+1} \frac{T^2 m_i^2 g_i}{2\pi^2 n^2} e^{n\mu_i/T} K_2 \left(n \frac{m_i}{T} \right). \quad (52)$$

Hiukkasten lukumäärätiheys saadaan myös kanonisen partitiofunktion avulla

$$n_{eq}(T, \mu) = \frac{T}{V} \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{T}{V} \ln(Z) \right) = \frac{\partial}{\partial \mu} P(T, \mu).$$

Derivoimalla paineen yhtälöä (52) kemiallisen potentiaalin suhteen, saadaan

$$n_{eq}(T, \mu) = \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n+1} \frac{T m_i^2 g_i}{2\pi^2 n} e^{n\mu_i/T} K_2 \left(n \frac{m_i}{T} \right). \quad (53)$$

Yksittäisen hadronin hiukkastiheys hadronikaasussa on siis

$$n_{eq}^i(T, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n+1} \frac{T m_i^2 g_i}{2\pi^2 n} e^{n\mu_i/T} K_2 \left(n \frac{m_i}{T} \right) \quad (54)$$

ja kokonaishiukkastiheys n_{eq} on näiden summa.

Seuraava vaihe on hadronien kemiallinen irtikytkeytyminen, jossa hadronien lukumäärää muuttavat prosessit lakkaavat. Tässä työssä käytetty kemiallinen irtikytkeytyminen perustuu lähteeseen [28]. Kemiallinen irtikytkeytyminen tapahtuu materian jäähtyessä kemialliseen lämpötilaan $T^{ch} \leq T_c$ ja voidaan efektiivisesti ottaa huomioon kemiallisten potentiaalien avulla. Kemiallisten potentiaalien laskua varten oletetaan, että kaikissa kemiallista lämpötilaa pienemmissä lämpötiloissa dissipatiiviset termit voidaan hylätä, jolloin voidaan hyödyntää ideaali fluidin yhtälöitä (17). Ideaalifluidin hiukkasten nelivirta n^μ ja entropian nelivirta s^μ molemmat säilyvät, jolloin suure n/s on vakio. Fluidielementit kehittyvät siis adiabaattista polkua pitkin. Tehdään vielä oletus, että baryoni kemiallinen potentiaali μ_B on nolla, jolloin hadronien kemialliset potentiaalit riippuvat vain lämpötilasta. Näillä oletuksilla lämpötiloissa $T < T^{ch}$ pätee

$$\frac{n_i(T, \mu_i(T))}{s(T, \mu_i(T))} = \frac{n_i(T^{ch}, 0)}{s(T^{ch}, 0)}. \quad (55)$$

Työssä hadronit, joiden elinikä on suurempi kuin 10 fm, ovat fluidin elinikään nähden stabiileja ja pienemmällä eliniällä epästabiileja. [29]

Osittainen kemiallinen irtikytkeytyminen perustuu siihen, että yhtälössä (55) hiukkastiheyden n_i sijaan säilyvä suure on efektiivinen hiukkastiheys \bar{n}_i . Efektiivinen hiukkaslukumäärä ($\bar{N}_i = \bar{n}_i V$) on

$$\bar{N}_i = N_i + \sum_j d_j^{(i)} N_j, \quad (56)$$

missä N_i on hiukkasten i oikea lukumäärä, $d_j^{(i)}$ on hiukkasten i lukumäärä epästabiilien hiukkasten j hajoamisissa kerrottuna hajoamistajuudella ja N_j on epästabiilien hiukkasten j oikea lukumäärä. Käyttämällä efektiivistä hiukkastiheyttä yhtälön (55) avulla voidaan ratkaista stabiilien hiukkasten kemialliset potentiaalit. Epästabiilien hiukkasten kemialliset potentiaalit saadaan hajoamistuotteiden avulla

$$\mu_j = \sum_i d_j^{(i)} \mu_i, \quad (57)$$

missä $d_j^{(i)}$ on sama kuin aiemmin ja μ_i on hajoamistuotteen i kemiallinen potentiaali. [28]

Kaikkien hadronien kemialliset potentiaalit ratkaistaan lämpötilan funktiona osittaisen kemiallisen irtikytkeytymisen avulla. Työssä tehtyä koodia varten kemiallisten potentiaalien laskenta on toteutettu stabiileille hadroneille jo valmiiksi lähteen [19] koodissa, mutta koodi sisälsi epästabiilien hadronien kemiallisten potentiaalien laskennan yhtälön (57) avulla. Kun kemialliset potentiaalit ovat tiedossa, yhtälön (53) hiukkastiheys riippuu enää vain lämpötilasta.

3 Kineettinen irtikytkeytyminen Cooper-Frye integraalin avulla

Kun hadronikaasu on jäähtynyt niin paljon, että hiukkaset eivät enää juurikaan siirry toisistaan, tehdään kineettinen irtikytkeytyminen, jossa hydrodynaamisesta simulaatiosta siirrytään erillisiin hiukkasiin. Kineettinen irtikytkeytyminen toteutetaan kemiallisen irtikytkeytymisen jälkeen infinitesimaalisen ohuella irtikytkeytymispinnalla σ . Irtikytkeytymispinnan määrittämiseen on useita tapoja. Hiukkasten siroamistajuus riippuu vahvasti lämpötilasta, jolloin vakio lämpötila tai vakio energiatiheys on hyvä valinta. Toinen mahdollinen tapa on niin sanottu dynaaminen irtikytkeytyminen, missä keskimääräinen sirontataajuus on suunnilleen yhtä suuri kuin fluidin laajenemisnopeus. [19]

Teoreettisten lähtökohtien kappaleissa 2.2-2.5 käytiin läpi, miten hydrodynaamisten suureiden kehitys saadaan laskettua. Hydrodynaamisten suureiden avulla voidaan määrittää irtikytkeytyvien hadronien lukumäärätiheydet ja liikemääräriippuvuudet, kun käytetään Cooper-Frye integraalia [13]. Irtikytkeytymispinnan σ läpi kulkevien hiukkasten lukumäärä on

$$N = \int_{\sigma} N^{\mu} d\sigma_{\mu},$$

missä $d\sigma_{\mu}$ on pinnan σ pintaelementti. Hiukkasten nelivirta yksihiukkastiheyden avulla on (20)

$$N^{\mu} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} p^{\mu} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Jokaiselle hadronille on oma yksihiukkastiheys, joten yhtälö kertoo aina vain yhden hadronityypin hiukkaselivirran. Sijoitetaan tämä pintaintegraaliin ja kerrotaan lauseketta energialla sekä derivoidaan puolittain liikemäärällä, jolloin saadaan

$$E \frac{dN}{d^3\mathbf{p}} = \frac{d}{d^3\mathbf{p}} \int_{\sigma} \int d^3\mathbf{p} p^{\mu} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\sigma_{\mu}.$$

Leibniz integroimissäännön nojalla pintaintegraalin ja derivoinnin järjestys voidaan

vaihtaa, mikä mahdollistaa Cooper-Frye integraalin esittämisen seuraavassa muodossa

$$E \frac{dN}{d^3\mathbf{p}} = \int_{\sigma} p^{\mu} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\sigma_{\mu}. \quad (58)$$

Yhtälö antaa tiedon siitä, miten hiukkaslukumäärä riippuu jostain liikemäärän komponentista, kun muut komponentit integroidaan pois. Integroimalla yli koko liikemääräavaruuden saadaan hiukkaslukumäärälle odotusarvo. Seuraavissa osioissa keskitytään tämän integraalin ratkaisuun.

3.1 Puskuinvariantti ratkaisu termisessä tasapainossa

Ratkaistaan seuraavaksi Cooper-Frye integraalille yksinkertaisempi muoto puskuinvariantissa tapauksessa. Aloitetaan muodostamalla yhtälössä (58) esiintyville neli-vektoreille rapiditeettien avulla muodot, mitkä puskuinvariantin oletuksen avulla yksinkertaistuvat. Fluidin irtikytkeytymispinta σ^{μ} on kolmiulotteinen pinta neliulotteisessa aika-avaruudessa ja puskuinvariantti oletus tarkoittaa, että pinta on riippumaton z suunnan nopeudesta. Tällöin koordinaatistossa, joka laajenee fluidin mukana z suunnassa ja kulkee nopeudella $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$ laboriokoordinaatistoon nähden, irtikytkeytymispinta voidaan esittää kahden muuttujan avulla

$$\sigma^{\mu} = (\tau(x, y), x, y, 0),$$

missä $\tau(x, y)$ on irtikytkeytymispinnan τ -komponentin parametrisaatio. Tästä käänteisellä Lorentz muunnoksella (5) saadaan irtikytkeytymispinta laboriokoordinaatistossa

$$\sigma^{\mu} = (\gamma\tau(x, y), x, y, \gamma\tau(x, y)v_z),$$

missä $\gamma = (1 - v_z^2)^{-1/2}$. Kun η on taas aika-avaruus rapiditeetti, niin yhtälö saadaan muotoon

$$\sigma^{\mu} = (\tau(x, y)\cosh(\eta), x, y, \tau(x, y)\sinh(\eta)). \quad (59)$$

Yleinen muoto differentiaaliselle pinta-alkiolla on [12]

$$d\sigma_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{\partial\sigma^{\nu}}{\partial\eta} \frac{\partial\sigma^{\lambda}}{\partial x} \frac{\partial\sigma^{\rho}}{\partial y} d\eta dx dy, \quad (60)$$

missä $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ on antisymmetrinen neliulotteinen Levi-Civita-symboli ja $\epsilon_{0123} = -1$. Differentiaalisen pinta-alkion ensimmäisessä komponentissa on vain yksi nollasta

poikkeava termi irtikytketympinnan (59) sijoittamisen jälkeen

$$d\sigma_0 = \epsilon_{0312} \frac{\partial \tau \sinh(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} d\eta dx dy = -\tau \cosh(\eta) d\eta dx dy.$$

Toisessa komponentissa on kaksi termiä

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= (\epsilon_{1032} \frac{\partial \tau \cosh(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \tau \sinh(\eta)}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} + \epsilon_{1302} \frac{\partial \tau \sinh(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \tau \cosh(\eta)}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y}) d\eta dx dy \\ &= \tau \frac{\partial \tau}{\partial x} (-\sinh^2(\eta) + \cosh^2(\eta)) d\eta dx dy = \tau \frac{\partial \tau}{\partial x} d\eta dx dy. \end{aligned}$$

Kolmas sekä neljäs komponentti lasketaan täysin vastaavalla tavalla ja pinta-alkio saa muodon

$$d\sigma_\mu = -[\pm](\cosh(\eta), -\frac{\partial \tau}{\partial x}, -\frac{\partial \tau}{\partial y}, -\sinh(\eta)) \tau d\eta dx dy, \quad (61)$$

missä merkki valinnan $[\pm] = \text{Sign}(\partial T / \partial \tau)$ avulla pinnan normaali osoittaa matalampaa lämpötilaa kohti.

Termisessä tasapainossa yksihiukkastiheysfunktio saadaan yhtälön (26) avulla

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\exp(\frac{p^\mu u_\mu - \mu}{T}) \pm 1}, \quad (62)$$

merkkivalintana plus fermioneille ja miinus bosoneille. Laajennetaan yksihiukkastiheysfunktio sarjakehitelmänä seuraavalla tavalla

$$\frac{1}{e^x \pm 1} = e^{-x} \frac{1}{1 - (\mp e^{-x})} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (\mp e^{-x})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} e^{-xn},$$

missä $x = (p^\mu u_\mu - \mu)/T$. Sarja suppenee tasaisesti, kun $|e^{-x}| < 1$. Tämä on yhtäpitävä ehdon $p^\mu u_\mu = E_{\mathbf{p}} > \mu$ kanssa. Tämä tarkoittaa sitä, että hiukkasen energian lepokoordinaatistossa on oltava suurempi kuin sen kemiallinen potentiaali. Tämä on totta raskasioneitörmäyksissä, joten yksihiukkastiheydelle voidaan käyttää sarjakehitelmää. Cooper-Frye integraalin muokkaaminen aloitetaan sijoittamalla yhtälöön (58) yksihiukkastiheysfunktion sarjakehitelmä. Koska integroitava sarjafunktio suppenee tasaisesti, integrointi ja summaus järjestys voidaan vaihtaa, minkä jälkeen yhtälö

voidaan esittää muodossa

$$E \frac{dN}{d^3\mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} \int_{\sigma} \exp\left(\frac{n\mu}{T}\right) \exp\left(\frac{-np^{\mu}u_{\mu}}{T}\right) p^{\mu} d\sigma_{\mu}. \quad (63)$$

Seuraava vaihe on kirjoittaa pistetulo $p^{\mu}u_{\mu}$ ja $p^{\mu}d\sigma_{\mu}$ auki ja sieventää.

Muokataan ensin integrointia varten liikemäärän ja nopeuden lausekkeiden muotoja. Hiukkasen liikemäärän rapiditeetti on

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right). \quad (64)$$

Poikittaismassan m_T ja poikittaisliikemäärän \mathbf{p}_T määritelmät ovat:

$$m_T = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_T^2} \quad \text{ja} \quad \mathbf{p}_T = (p_x, p_y).$$

Hiukkasen energia ja liikemäärän z-komponentti voidaan esittää rapiditeetin ja poikittaismassan avulla, jolloin neliliikemäärä on

$$p^{\mu} = (m_T \cosh(y), \mathbf{p}_T, m_T \sinh(y)). \quad (65)$$

Muunnetaan hiukkasen nopeus (τ, η) -koordinaatistoon. Koordinaatistossa, joka kulkee hiukkasen mukana z-akselin suunnassa, hiukkasen sijainti on $x'^{\mu} = (t, x, y, 0)$ ja nopeus on

$$u'^{\mu} = \frac{dx'^{\mu}}{d\tau_T} = \frac{dx'^{\mu}}{d\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} = \gamma_T \frac{dx'^{\mu}}{dt} = \gamma_T(1, v_x, v_y, 0),$$

missä $\gamma_T = (1 - v_x^2 - v_y^2)^{-1/2}$. Muunnos laboratoriokoordinaatistoon onnistuu käänteisen Lorentz muunnoksen (5) avulla, jolloin nelinopeudeksi saadaan

$$u^{\mu} = \gamma_T(\cosh(\eta), v_x, v_y, \sinh(\eta)). \quad (66)$$

Lasketaan pistetulo neliliikemäärän (65) ja nelinopeuden (66) välillä ja sievennetään tulos hyperbolisten funktioiden erotuskaavan avulla, mikä johtaa tulokseen

$$p^{\mu}u_{\mu} = \gamma_T[m_T \cosh(y - \eta) - \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{v}_T]. \quad (67)$$

Vastaavalla laskulla neliliikemäärän (65) ja pinta-alkion (61) pistetulo antaa

$$p^\mu d\sigma_\mu = [\pm](-m_T \cosh(y - \eta) + p^x \frac{\partial \tau}{\partial x} + p^y \frac{\partial \tau}{\partial y}) \tau d\eta dx dy. \quad (68)$$

Kun edellä lasketut nelivektorien pistetulot sijoitetaan integroitavaan lausekkeeseen (63) ja jaetaan pinnan σ integrointi yli aika-avaruus rapiditeetin sekä pinnan xy -tason parametrisoinnin $S(x, y)$, saadaan integraalille seuraava esitys

$$E \frac{dN}{d^3 \mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} \int_{S(x,y)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{n\mu}{T}\right) \exp\left(\frac{-n\gamma_T [m_T \cosh(y - \eta) - \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{v}_T]}{T}\right) \\ \times [\pm](-m_T \cosh(y - \eta) + p^x \frac{\partial \tau}{\partial x} + p^y \frac{\partial \tau}{\partial y}) \tau d\eta dx dy.$$

Siirretään termit, jotka eivät riipu aika-avaruus rapiditeetista ulos sen integraalista ja lisäksi, koska hyperbolinen kosini on parillinen funktio, muuttujan vaihdon $y - \eta \rightarrow \eta$ jälkeen yhtälö sievenee muotoon

$$E \frac{dN}{d^3 \mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} \int_{S(x,y)} [\pm] \tau dx dy \exp\left(\frac{n\mu + n\gamma_T \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{v}_T}{T}\right) \\ \times [-m_T 2 \int_0^{\infty} d\eta \cosh(\eta) \exp\left(\frac{-n\gamma_T m_T \cosh(\eta)}{T}\right) \\ + (p^x \frac{\partial \tau}{\partial x} + p^y \frac{\partial \tau}{\partial y}) 2 \int_0^{\infty} d\eta \exp\left(\frac{-n\gamma_T m_T \cosh(\eta)}{T}\right)].$$

Toisen tyyppin modifioitu Besselin funktio voidaan esittää integraalimuodossa

$$K_\alpha(x) = \int_0^{\infty} d\eta \cosh(\alpha\eta) e^{-x \cosh(\eta)}, \quad (69)$$

missä $x > 0$. Käyttäen hyväksi tätä esitystä, voidaan aika-avaruus rapiditeetin integraalit esittää Besselin funktioiden avulla

$$E \frac{dN}{d^3 \mathbf{p}} = \frac{-2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} \int_{S(x,y)} [\pm] \tau dx dy \exp\left(\frac{n\mu + n\gamma_T \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{v}_T}{T}\right) \\ \times [m_T K_1\left(\frac{n\gamma_T m_T}{T}\right) - (p^x \frac{\partial \tau}{\partial x} + p^y \frac{\partial \tau}{\partial y}) K_0\left(\frac{n\gamma_T m_T}{T}\right)]. \quad (70)$$

Tämä on puskuinvariantti ratkaisu Cooper-Frye integraalille termisessä tasapainossa.

Yleensä hiukkasten liikemääräriippuvuutta tarkasteltaessa käytetään liikemäärän rapiditeettia sekä poikittaisliikemäärää, mitä varten yhtälön vasen puoli muokataan

seuraavalla tavalla

$$E \frac{dN}{d^3\mathbf{p}} = E \frac{dN}{dp_z d^2\mathbf{p}_T} = E \left(\frac{dp_z}{dy} \right)^{-1} \frac{dN}{dy d^2\mathbf{p}_T} = \frac{dN}{dy d^2\mathbf{p}_T}.$$

Esitetään vielä poikittaisliikemäärävektori napakoordinaatistossa, missä säde on p_T ja kiertokulma on ϕ . Tällöin hiukkasjakauma saa muodon

$$\frac{dN}{dy d^2\mathbf{p}_T} = \frac{dN}{dy p_T dp_T d\phi}.$$

Integroimalla yli kulman ja rapiditeetin saadaan funktio dN/dp_T , joka kuvaa hiukkas-
ten p_T riippuvuutta ja integroimalla rapiditeetin sijaan säteen p_T yli saadaan funktio
 dN/dy , joka kuvaa rapiditeetti riippuvuutta. Integroimalla molempien yli saadaan
odotusarvo hiukkaslukumäärälle. Huomattavaa on myös se, että puskuinvariantti
Cooper-Frye integraali (70) ei enää riipu rapiditeetista y , joten jakauma dN/dy on
vakio. Puskuinvariantissa ratkaisussa hiukkastiheydet eivät siis riipu liikemäärän
rapiditeetista ollenkaan. Seuraavassa kappaleessa lisätään ratkaisuun leikkausviskosi-
teetin korjaustermi ja edelleen tulos on liikemäärän rapiditeetista riippumaton.

3.2 Puskuinvariantin ratkaisun korjaustermi

Tässä osiossa yksihiukkasstiheysfunktioon lisätään leikkausjännitystensorista $\pi^{\mu\nu}$
aiheutuva korjaustermi (34), jolloin funktio saa muodon

$$f = f_{eq} + f_{eq} \tilde{f}_{eq} \frac{p^\mu p^\nu \pi_{\mu\nu}}{2T^2 (e_{eq} + P_{eq})}$$

missä f_{eq} on yksihiukkasstiheysfunktio termisessä tasapainossa (26). Cooper-Frye
integraali on tällöin

$$E \frac{dN}{d^3\mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_\sigma p^\alpha f_{eq} + p^\alpha f_{eq} \tilde{f}_{eq} \frac{p^\mu p^\nu \pi_{\mu\nu}}{2T^2 (e_{eq} + P_{eq})} d\sigma_\alpha.$$

Integraalin voi jakaa kahteen osaan integraalin additiivisuuden nojalla. Ensimmäinen
termi on sama kuin ideaalin Cooper-Frye integraalin ratkaisu (70) ja toinen on
seuraava korjaustermi

$$E \frac{d(\delta N)}{d^3\mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_\sigma p^\alpha f_{eq} \tilde{f}_{eq} \frac{p^\mu p^\nu \pi_{\mu\nu}}{2T^2 (e_{eq} + P_{eq})} d\sigma_\alpha$$

Korjaustermin laskun välivaiheet ovat vastaavanlaiset kuin edellisen kappaleen ideaalifluidin ratkaisun. Ensin muodostetaan funktion $f_{eq}\tilde{f}_{eq}$ sarjakehitelmä, kun $x = (p^\mu u_\mu - \mu)/T$

$$f_{eq}\tilde{f}_{eq} = \frac{1}{e^x \pm 1} \mp \frac{1}{(e^x \pm 1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} [(\mp 1)^{n-1} (e^{-nx} \mp n e^{-(n+1)x})], \quad (71)$$

missä taas vaaditaan, että ehto $E_{\mathbf{p}} > \mu$ toteutuu. Integrointi- ja summausjärjestys voidaan taas vaihtaa, jolloin korjaustermi voidaan jakaa kahteen osaan

$$E \frac{d(\delta N)}{d^3 \mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} \left[\int_{\sigma} p^\alpha e^{-nx} \frac{p^\mu p^\nu \pi_{\mu\nu}}{2T^2(e_{eq} + P_{eq})} d\sigma_\alpha \mp n \int_{\sigma} p^\alpha e^{-(n+1)x} \frac{p^\mu p^\nu \pi_{\mu\nu}}{2T^2(e_{eq} + P_{eq})} d\sigma_\alpha \right].$$

Tehtäväksi jää etsiä yleinen ratkaisu seuraavalle funktiolle

$$\mathcal{F}(n) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\sigma} p^\alpha e^{-nx} \frac{p^\mu p^\nu \pi_{\mu\nu}}{2T^2(e_{eq} + P_{eq})} d\sigma_\alpha, \quad (72)$$

minkä avulla esitettynä korjaustermi saa muodon

$$E \frac{d(\delta N)}{d^3 \mathbf{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} [\mathcal{F}(n) \mp n \mathcal{F}(n+1)] = \mathcal{F}(1) + \sum_{n=2}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} n \mathcal{F}(n). \quad (73)$$

Edellisessä osiossa on muodostettu pistetulot $p^\mu u_\mu$ (67) ja $p^\mu d\sigma_\mu$ (68). Termi $p^\mu p^\nu \pi_{\mu\nu}$ täytyy vielä esittää muodossa, missä η integrointi onnistuu analyttisesti. Liikemäärä (t, z) koordinaatistossa on

$$p^\mu = (m_T \cosh(y), \mathbf{p}_T, m_T \sinh(y)).$$

Leikkausjännitystensori on muodostettu (τ, η) -koordinaatistossa, joten muunnetaan liikemäärä myös tähän koordinaatistoon muunnosmatriisin (9) avulla. Kun tulosta vielä sievennetään hyperbolisten funktioiden erotuskaavan avulla, saadaan liikemääräksi (τ, η) -koordinaatistossa

$$p'^\mu = (m_T \cosh(\eta - y), \mathbf{p}_T, \frac{m_T}{\tau} \sinh(\eta - y)).$$

leikkausjännitystensori $\pi_{\mu\nu}$ on symmetrinen, joten pistetulon jälkeen

$$\begin{aligned}
p'^{\mu}p'^{\nu}\pi_{\mu\nu} = & m_T^2[\cosh^2(\eta - y)\pi_{\tau\tau} + \sinh^2(\eta - y)\frac{\pi_{\eta\eta}}{\tau^2}] \\
& + [(p^x)^2\pi_{xx} + 2p^xp^y\pi_{xy} + (p^y)^2\pi_{yy}] + 2m_T\cosh(\eta - y)[p^x\pi_{\tau x} + p^y\pi_{\tau y}] \\
& + 2m_T\sinh(\eta - y)[p^x\frac{\pi_{x\eta}}{\tau} + p^y\frac{\pi_{y\eta}}{\tau} + m_T\cosh(\eta - y)\frac{\pi_{\tau\eta}}{\tau}].
\end{aligned} \tag{74}$$

Fluidin laajenemisnopeus on määritelty samalla tavalla kuin aiemmin, joten $u^\eta = 0$ ja leikkausjännitystensori ei riipu aika-avaruus rapiditeetista. Tällöin yhtälössä (74) $\pi_{\tau\eta} = \pi_{x\eta} = \pi_{y\eta} = 0$. Sijoitetaan funktioon \mathcal{F} yhtälön (74) tulos, jaetaan integrointi osiin ja tehdään muuttujan vaihto $\eta - y \rightarrow \eta$ kuten aiemmassa osiossa, jolloin \mathcal{F} voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(n) = & \frac{-2}{(2\pi)^3} \int_{S(x,y)} [\pm]\tau dx dy \exp\left(\frac{n\mu + n\gamma_T \mathbf{P}_T \cdot \mathbf{v}_T}{T}\right) \frac{1}{2T^2(e_{eq} + P_{eq})} \\
& \times [m_T \int_0^\infty d\eta \cosh(\eta) \exp\left(\frac{-n\gamma_T m_T \cosh(\eta)}{T}\right) \\
& - (p^x \frac{\partial \tau}{\partial x} + p^y \frac{\partial \tau}{\partial y}) \int_0^\infty d\eta \exp\left(\frac{-n\gamma_T m_T \cosh(\eta)}{T}\right)] \\
& \times m_T^2 [\cosh^2(\eta)\pi_{\tau\tau} + \sinh^2(\eta)\frac{\pi_{\eta\eta}}{\tau^2}] + [(p^x)^2\pi_{xx} + 2p^xp^y\pi_{xy} + (p^y)^2\pi_{yy}] \\
& + 2m_T\cosh(\eta)[p^x\pi_{\tau x} + p^y\pi_{\tau y}].
\end{aligned}$$

Muokataan seuraavaksi aika-avaruus rapiditeetin integraalit toisen tyyppin modifioitujen Besselin funktioiden integraaliesityksen (69) muotoon. Avataan ensin sulkeet ja

merkitään $\beta = \gamma_T m_T / T$, jolloin funktio saa melko monimutkaisen näköisen muodon

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(n) = & \frac{-2}{(2\pi)^3} \int_{S(x,y)} [\pm] \tau dx dy \exp\left(\frac{n\mu + n\gamma_T \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{v}_T}{T}\right) \frac{1}{2T^2(e_{eq} + P_{eq})} \\
& \times \left\{ m_T \left[m_T^2 \int_0^\infty d\eta \cosh^3(\eta) \exp(-n\beta \cosh(\eta)) \pi_{\tau\tau} \right. \right. \\
& + m_T^2 \int_0^\infty d\eta \cosh(\eta) \sinh^2(\eta) \exp(-n\beta \cosh(\eta)) \frac{\pi_{\eta\eta}}{\tau^2} \\
& + 2m_T \int_0^\infty d\eta \cosh^2(\eta) \exp(-n\beta \cosh(\eta)) (p^x \pi_{\tau x} + p^y \pi_{\tau y}) \\
& + K_1(n\beta) [(p^x)^2 \pi_{xx} + 2p^x p^y \pi_{xy} + (p^y)^2 \pi_{yy}] \left. \right] \\
& - \left(p^x \frac{\partial \tau}{\partial x} + p^y \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \left[m_T^2 \int_0^\infty d\eta \cosh^2(\eta) \exp(-n\beta \cosh(\eta)) \pi_{\tau\tau} \right. \\
& + m_T^2 \int_0^\infty d\eta \sinh^2(\eta) \exp(-n\beta \cosh(\eta)) \frac{\pi_{\eta\eta}}{\tau^2} + 2m_T K_1(n\beta) (p^x \pi_{\tau x} + p^y \pi_{\tau y}) \\
& \left. \left. + K_0(n\beta) [(p^x)^2 \pi_{xx} + 2p^x p^y \pi_{xy} + (p^y)^2 \pi_{yy}] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Edellisessä lausekkeessa esiintyvät hyperboliset funktiot voidaan esittää seuraavalla tavalla

$$\begin{aligned}
\cosh^2(\eta) &= \frac{e^{2\eta} + 2 + e^{-2\eta}}{4} = \frac{1}{2}(\cosh(2\eta) + 1), \\
\sinh^2(\eta) &= \frac{e^{2\eta} - 2 + e^{-2\eta}}{4} = \frac{1}{2}(\cosh(2\eta) - 1), \\
\cosh^3(\eta) &= \frac{1}{2}(\cosh(\eta)\cosh(2\eta) + \cosh(\eta)) \\
&= \frac{1}{4}(\cosh(3\eta) + 3\cosh(\eta)) \text{ ja} \\
\cosh(\eta)\sinh^2(\eta) &= \frac{1}{4}(\cosh(3\eta) - \cosh(\eta)),
\end{aligned}$$

jolloin toisen tyyppin modifioitujen Besselin funktioiden integraalimuodot (69) on tunnistettavissa ja funktio \mathcal{F} voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(n) = & \frac{-2}{(2\pi)^3} \int_S [\pm] \tau dx dy \exp\left(\frac{n\mu + n\gamma_T \mathbf{P}_T \cdot \mathbf{v}_T}{T}\right) \frac{1}{2T^2(e_{eq} + P_{eq})} \\
& \times \left\{ \frac{m_T^3}{4} [K_3(n\beta) + 3K_1(n\beta)] \pi_{\tau\tau} + \frac{m_T^3}{4} [K_3(n\beta) - K_1(n\beta)] \frac{\pi_{\eta\eta}}{\tau^2} \right. \\
& + m_T^2 [K_2(n\beta) + K_0(n\beta)] (p^x \pi_{\tau x} + p^y \pi_{\tau y}) \\
& + m_T K_1(n\beta) [(p^x)^2 \pi_{xx} + 2p^x p^y \pi_{xy} + (p^y)^2 \pi_{yy}] \\
& - \left(p^x \frac{\partial \tau}{\partial x} + p^y \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \left[\frac{m_T^2}{2} [K_2(n\beta) + K_0(n\beta)] \pi_{\tau\tau} + \frac{m_T^2}{2} [K_2(n\beta) - K_0(n\beta)] \frac{\pi_{\eta\eta}}{\tau^2} \right. \\
& \left. \left. + 2m_T K_1(n\beta) (p^x \pi_{\tau x} + p^y \pi_{\tau y}) + K_0(n\beta) [(p^x)^2 \pi_{xx} + 2p^x p^y \pi_{xy} + (p^y)^2 \pi_{yy}] \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{75}$$

Yhtälön (75) avulla voidaan ratkaista termit $\mathcal{F}(n)$ ja sijoittaa yhtälöön (73), jolloin saadaan leikkausviskositeetista aiheutuva korjaus.

3.3 Liikemäärien sämpläysmenetelmä

Kolmiulotteista Cooper-Frye integraalia ei voi sieventää ja sen ratkaiseminen on numeerisesti työlästä. Käsitellään tässä osiossa Conventional sampling [14] sämpläysmenetelmää. Menetelmässä ensin arvotaan irtikytkeytymispinnalle hadronit ja tämän jälkeen yksittäisille hadroneille luodaan liikemäärät Cooper-Frye integraalin avulla. Ratkaisutapa on vastaava kuin lähteen [26] kappaleessa 3. Lähteessä [30] on käytetty sämpläysmenetelmää muodostamaan konkreettisia tuloksia hyödyntäen IP-Glasma mallia [10] alkutilalle. Tämän työn yhteydessä muodostetaan Python-koodi, joka toteuttaa saman sämpläysmetodin ja sitä on tarkoitus käyttää EKRT-alkutilamallin [11] kanssa.

Koska sämpläysprosessi ei ole yksikäsitteisesti määritelty, sen toteutukselle löytyy useita eri tapoja Conventional sampling metodin lisäksi. Suoraviivainen ratkaisu, joka tässä työssä tehdään, on olettaa suurkanoninen statistiikka, jolloin säilymlait pätevät keskimääräisesti, mutta suureiden todelliset arvot fluktuoivat ja eivät säily [31]. Kokonaiskuvana hybridimallin on kuitenkin tarkoitus muodostaa realistisia yksittäisten ydinten törmäyksiä, jotka noudattavat säilymlakeja, jolloin irtikytkeytyminen luontevasti noudattaisi niitä myös. Tässä työssä ei tähän ongelmaan syvennytä tarkemmin, mutta sämpläys voidaan toteuttaa myös siten, että säilymlait toteutuvat koko irtikytkeytymispinnalla, mutta tällöin ne eivät toteudu jokaisessa

elementissä [31].

Jokaisen irtikytkeytymispinnan elementin $d\sigma_\mu$ keskimääräisen hiukkaslukumäärän antaa yhtälö [12]

$$\langle N \rangle = \begin{cases} n_{eq} u^\mu d\sigma_\mu & \text{jos } u^\mu d\sigma_\mu > 0 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases} \quad (76)$$

missä n_{eq} on keskimääräinen hiukkastiheys termisessä tasapainossa ja se saadaan yhtälön (53) avulla. Jos irtikytkeytymispinnan elementissä fluidi virtaa takaisin pinnan sisään, termi $u^\mu d\sigma_\mu$ on negatiivinen ja keskimääräinen hiukkasten lukumäärä asetetaan nolaksi. Oletetaan tässä suurkanoninen statistiikka, jolloin todennäköisyys hiukkaslukumäärälle N keskiarvolla $\langle N \rangle$ on [14]

$$P(N) = \begin{cases} \frac{1}{N!} \langle N \rangle^N e^{-\langle N \rangle}, & \text{Boltzmann stat.} \\ \langle N \rangle^N (1 + \langle N \rangle)^{-1-N}, & \text{Bose stat.} \\ \langle N \rangle^N (1 - \langle N \rangle)^{1-N}, & \text{Fermi stat.} \end{cases} \quad (77)$$

Vaikka käytössä onkin Bose tai Fermi statistiikka, käytetään todennäköisyytenä $P(N)$ Boltzmann statistiikan tulosta. Tämä helpottaa hiukkasten muodostamisprosessia huomattavasti, koska Poisson jakauma on additiivinen. Poisson jakauma on hyvä approksimaatio, sillä poikkeama Bose-Einstein ja Fermi-Dirac jakaumista lämpötilavälillä 135 – 165 MeV on alle 10% [26].

Jokaiselle irtikytkeytymispinnan elementille siis arvotaan hiukkasten lukumäärä Poisson jakaumasta keskiarvolla, joka saadaan yhtälöstä (76). Pintaelementtiin muodostuneella hiukkasella on todennäköisyys n_{eq}^i/n_{eq} , missä n_{eq}^i on hadronin i hiukkastiheys (54), että hiukkanen on kaikista tarkasteltavista hadroneista juuri tyyppin i hadroni. Näiden todennäköisyyksien avulla muodostetaan kumulatiivinen tiheysfunktio, minkä avulla arvotaan hiukkasille hadronityypit. Tässä vaiheessa on muodostettu lista hiukkasista, joista jokaiselle on tiedossa, missä pintaelementissä hiukkanen sijaitsee ja mikä hadroni hiukkanen on. Seuraavassa osiossa käsitellään, miten hiukkasille muodostetaan liikemäärät.

Cooper-Frye integraali (58) antaa hiukkasten lukumäärätiheyden integroitaessa yli liikemääräavaruuden, jota voidaan ajatella todennäköisyytenä. Tällöin itse Cooper-Frye integrandi on tiheysfunktio. Jokaiselle irtikytkeytymispinnalle muodostuneelle hiukkaselle on sen paikasta ja hadronityypistä riippuva oma Cooper-Frye integrandin

antama tiheysfunktio

$$\frac{dN}{d^3\mathbf{p}} = \begin{cases} (2\pi)^{-3}[f_{eq} + \delta f]p^\mu d\sigma_\mu/p^0 & \text{jos } p^\mu d\sigma_\mu > 0 \text{ ja } f_{eq} + \delta f > 0 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases} \quad (78)$$

Tiheysfunktio täytyy asettaa nolaksi tapauksissa, joissa funktio saa negatiivisia arvoja. Näitä ovat tapaus, missä $p^\mu d\sigma_\mu$ on negatiivinen, jolloin hiukkanen etenee takaisin fluidiin sekä tapaus, missä approksimaatio $f_{eq} + \delta f$ antaa negatiivisen arvon todennäköisyydelle. Liikemäärien arpominen yhtälön (78) avulla on helpoin tehdä fluidin lepokoordinaatistossa, koska silloin yksihiukkastiheysfunktiossa esiintyvä termi $p^\mu u_\mu$ riippuu vain liikemäärän itseisarvosta. Hydrodynaamiset suureet ja irtikykeytymispinta määriteltiin (τ, η) koordinaatistossa, mutta yksinkertaisuuden vuoksi siirrytään ensin tutumpaan karteesisen koordinaatistoon muunnosmatriisilla (10). Merkitään jatkossa hiukkasen liikemäärää fluidin lepokoordinaatistossa q^μ :lla. Kun liikemäärä on sämplätty se muunnetaan liikemääräksi laboratoriokoordinaatistoon p^μ käänteisen Lorentz muunnoksen (5) avulla.

Liikemäärien arvonta vaatii paljon laskutehoa tapauksessa, jossa liikemäärien komponentit arvotaan täysin satunnaisesti, mutta funktio (78) painottuu tietyille liikemäärän arvoille. Tällöin suurin osa arvauksista joudutaan hylkäämään. Parempi ratkaisutapa on muodostaa yksinkertaisempi funktio, joka peittää kyseisen tiheysfunktion (78) ja sen muoto mukailee tiheysfunktion muotoa. Arpominen tehdään siis Acceptance-rejection sampling metodin avulla [30]. Käytännössä täytyy etsiä todennäköisyystiheysfunktio g , jonka avulla osataan muodostaa liikemääriä ja se toteuttaa epäyhtälön

$$\frac{dN}{d^3\mathbf{q}} \leq Mg(\mathbf{q}), \quad (79)$$

jollain vakiolla M ja kaikilla liikemäärän \mathbf{q} arvoilla. Arvotaan liikemäärä \mathbf{q} ja luku $\chi_{rej} \in [0, 1]$. Arvottu liikemäärä hyväksytään, jos seuraava epäyhtälö toteutuu

$$\chi_{rej} < \frac{1}{Mg(\mathbf{q})} \frac{dN}{d^3\mathbf{q}}. \quad (80)$$

Seuraavaksi käydään yksityiskohtaisesti läpi, miten todennäköisyystiheysfunktio g muodostetaan.

Hiukkasten suurin liikemäärän itseisarvo $q = |\mathbf{q}|$ lepokoordinaatistossa on jokin Q_{max} . Jaetaan liikemääräväli $[0, Q_{max}]$ tasaisiin osaväleihin $0 = q_0 < q_1 < \dots < q_m =$

Q_{max} , missä $m \in \mathbb{N}$. Tarkoituksena on etsiä jokaiselle osavälille vakiot P_i siten, että mille tahansa osavälille $[q_i, q_{i+1}]$ rajoitettuna funktiolle (78) pätee

$$\left. \frac{dN}{d^3\mathbf{q}} \right|_{[q_i, q_{i+1}]} \leq P_i, \quad (81)$$

riippumatta siitä, mikä liikemäärä vektorin \mathbf{q} suunta on. Määritellään vakioiden P_i avulla funktio $P : \{\mathbf{q} : q \leq Q_{max}\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$P(\mathbf{q}) = \begin{cases} P_i, & \text{kun } q \in [q_i, q_{i+1}[\\ P_{m-1}, & \text{kun } q = q_m \end{cases} \quad (82)$$

Funktiolle $P(\mathbf{q})$ pätee

$$\frac{dN}{d^3\mathbf{q}} \leq P(\mathbf{q}), \quad (83)$$

joten se vastaa yhtälön (79) funktiota $Mg(\mathbf{q})$. Tällaisen funktion avulla arvotut liikemäärät seuraavat sämplättävän funktion muutoksia radiaalisessa suunnassa, mutta orientaatio muodostetaan täysin satunnaisesti. Seuraaksi katsotaan, miten funktiota P hyödynnetään liikemäärien muodostamiseen.

Integroidaan ensin funktiota $P(\mathbf{q})$ yli koko määrittelyjoukon

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{q} P(\mathbf{q}) &= \int d\Omega \int_0^{q_m} q^2 dq P(\mathbf{q}) = 4\pi \sum_{i=0}^{m-1} \int_{q_i}^{q_{i+1}} q^2 dq P_i \\ &= 4\pi \sum_{i=0}^{m-1} P_i \int_{q_i}^{q_{i+1}} q^2 dq = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=0}^{m-1} P_i (q_{i+1}^3 - q_i^3) = \frac{4\pi}{3} \mathcal{N}_m, \end{aligned}$$

missä on käytössä lyhennys merkintä $\mathcal{N}_k = \sum_{i=0}^{k-1} P_i (q_{i+1}^3 - q_i^3)$, kun $k \leq m$. Normitetaan $P(\mathbf{q})$ jakamalla termillä $\frac{4\pi}{3} \mathcal{N}_m$, jolloin etsitty todennäköisyystiheys funktio $g(\mathbf{q}) = (\frac{4\pi}{3} \mathcal{N}_m)^{-1} P(\mathbf{q})$ ja vakio $M = \frac{4\pi}{3} \mathcal{N}_m$. Muodostetaan funktion $g(\mathbf{q})$ integraalifunktio, joka riippuu vain liikemäärän itseisarvosta. Kun $q \in [q_k, q_{k+1}]$, saadaan

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{q} g(\mathbf{q}) &= (\frac{4\pi}{3} \mathcal{N}_m)^{-1} 4\pi \sum_{i=0}^{k-1} \int_{q_i}^{q_{i+1}} q^2 dq P_i \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}_m} \left[\sum_{i=0}^{k-1} P_i (q_{i+1}^3 - q_i^3) + P_k (q^3 - q_k^3) \right] = \frac{1}{\mathcal{N}_m} \left[\mathcal{N}_k + P_k (q^3 - q_k^3) \right]. \end{aligned}$$

Yllä oleva integraali määrittää seuraavan kumulatiivisen tiheysfunktion $\mathcal{P} : [0, Q_{max}] \mapsto$

$[0, 1]$,

$$\mathcal{P}(q) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{N}_m} [\mathcal{N}_k + P_k(q^3 - q_k^3)], & \text{kun } q \in [q_k, q_{k+1}[\\ 1, & \text{kun } q = q_m \end{cases} \quad (84)$$

Muutamia tärkeitä huomioita funktiosta \mathcal{P} . Lähtöjoukkona on liikemäärän itseisarvo eikä kolmiulotteinen liikemääräavaruus, kuten funktiolla $g(\mathbf{q})$. Kuitenkin liikemäärän itseisarvon voi muodostaa yhtäpitävästi kumman tahansa funktion avulla. Koska tiheysfunktion \mathcal{P} muoto riippuu siitä, millä liikemäärävälillä ollaan, käänteisfunktio ei voi muodostaa suoraan. Funktio täytyy ensin rajoittaa jollekin liikemäärä välille, minkä jälkeen sen voi kääntää. Arvotaan luku χ välin $[0, 1]$ tasajakaumalta ja etsitään pienin $k < m$, jolle

$$\chi \leq \mathcal{P}(q_{k+1}) = \frac{\mathcal{N}_{k+1}}{\mathcal{N}_m}.$$

Kääntäen yhtälö antaa liikemäärän $\mathcal{P}^{-1}(\chi)$, joka on välillä $[q_k, q_{k+1}]$. Voimme rajoittaa funktion kyseiselle välille, jolloin käänteisfunktio voidaan muodostaa. Liikemäärän itseisarvo q saadaan käänteisfunktion avulla

$$q = \mathcal{P}^{-1}(\chi) = \left(\frac{\chi \mathcal{N}_m - \mathcal{N}_k}{P_k} + q_k^3 \right)^{1/3}.$$

Arvotaan seuraavaksi liikemäärälle orientaatio muodostamalla satunnaiset kulmat

$$\theta = \arccos(1 - 2\chi_\theta),$$

$$\phi = 2\pi\chi_\phi,$$

missä χ_θ ja χ_ϕ arvotaan nollan ja yhden väliltä. Arvottu liikemäärä on

$$\mathbf{q} = q(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (85)$$

Yhtälön (83) nojalla liikemäärä välin arvontaan pätee

$$\frac{dN}{d^3\mathbf{q}} \leq P(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{3} \mathcal{N}_m g(\mathbf{q}),$$

joten acceptance-rejection sampling metodin nojalla liikemäärä hyväksytään, jos epäyhtälö (80) toteutuu eli

$$\chi_{rej} < \frac{1}{P(\mathbf{q})} \frac{dN}{d^3\mathbf{q}}, \quad (86)$$

missä χ_{rej} on arvottu nollan ja yhden väliltä.

Hiukkasten liikemäärien sähpläysmetodi on esitelty ja tehtävänä on enää muodostaa vakiot P_i , joiden avulla voidaan muodostaa funktio P (82). Arvioidaan yhtälöä (78) fluidin lepokoordinaatistossa ylöspäin ottamalla itseisarvot ja käyttämällä kolmioepäyhtälöä, jolloin

$$\frac{dN}{d^3\mathbf{q}} \leq \frac{1}{(2\pi)^3} f_{eq}(q) \left[1 + \tilde{f}_{eq}(q) \frac{|q^\mu q^\nu \bar{\pi}_{\mu\nu}|}{2T^2(e_{eq} + P_{eq})} \right] |q^\mu d\bar{\sigma}_\mu / q^0|,$$

kaikilla liikemäärillä \mathbf{q} , joilla $|\mathbf{q}| = q$. Yläviivalla merkitty tensori on tensori fluidin lepokoordinaatistossa. Leikkausviskositeetti on kohtisuoraan fluidin laajenemisnopeutta vastaan, jolloin fluidin lepokoordinaatistossa $\bar{\pi}_{\mu\nu} \bar{u}^\nu = \bar{\pi}_{\mu 0} = 0$. Liikemäärille pätee $q^i \leq q \leq q_0$, joten saadaan arvio

$$\left| \sum_{\mu\nu} q^\mu q^\nu \bar{\pi}_{\mu\nu} \right| = \left| \sum_{ij} q^i q^j \bar{\pi}_{ij} \right| \leq \sum_{ij} |q^i| |q^j| |\bar{\pi}_{ij}| \leq q^2 \sum_{ij} |\bar{\pi}_{ij}|.$$

Liikemäärien arvion avulla saadaan myös

$$\left| \sum_\mu \frac{q^\mu}{q^0} d\bar{\sigma}_\mu \right| \leq \sum_\mu \left| \frac{q^\mu}{q^0} \right| |d\bar{\sigma}_\mu| = |d\bar{\sigma}_0| + \sum_i \left| \frac{q^i}{q^0} \right| |d\bar{\sigma}_i| \leq |d\bar{\sigma}_0| + \sum_i |d\bar{\sigma}_i|.$$

Käyttämällä vielä seuraavaa tulosta skalaarille $u^\mu d\sigma_\mu = \bar{u}^\mu d\bar{\sigma}_\mu = d\bar{\sigma}_0$ saadaan peitefunktio $F(q)$ [26]

$$\frac{dN}{d^3\mathbf{q}} \leq \frac{1}{(2\pi)^3} f_{eq}(q) \left[1 + \tilde{f}_{eq}(q) \frac{q^2 \sum_{ij} |\bar{\pi}_{ij}|}{2T^2(e_{eq} + P_{eq})} \right] (|u^\mu d\sigma_\mu| + \sum_i |d\bar{\sigma}_i|) = F(q). \quad (87)$$

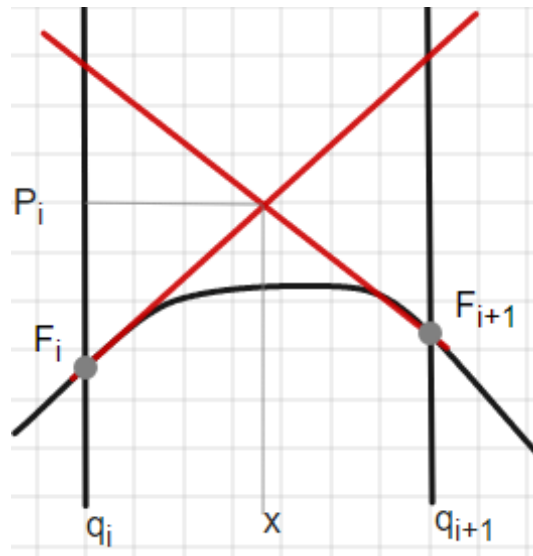
Peitefunktioita F voidaan käyttää vakioiden P_i muodostamiseen, sillä se peittää funktion (78) kaikilla liikemäärän arvoilla ja riippuu vain liikemäärän itseisarvosta. Liikemäärävälillä $[q_i, q_{i+1}]$ lukumäärän m täytyy olla niin suuri, että peitefunktion F toinen derivaatta ei muuta merkkiään välillä. Tällöin funktion käyttäytyminen on arvioitavissa päätepisteiden derivaatan avulla. Jos molemmat derivaatat ovat negatiivisia, funktio on laskeva välillä $[q_i, q_{i+1}]$ ja maksimi on $F(q_i) = F_i$. Vastaavasti positiivisilla derivaatoilla välin maksimi on $F(q_{i+1}) = F_{i+1}$. Jos ensimmäinen derivaatta on negatiivinen ja toinen positiivinen, funktiolla on välillä lokaali minimi ja tällöin maksimiarvo on $\max\{F_i, F_{i+1}\}$. Vaikein tapaus on ensimmäisen derivaatan ollessa positiivinen ja toisen negatiivinen, jolloin funktiolla on lokaali maksimi välillä

$[q_i, q_{i+1}]$. Ratkaisumetodi tälle tapaukselle esitellään kuviossa 1. Pisteiden F_i ja F_{i+1} kautta kulkevien tangenttisuorien leikkauspisteen x saa ratkaistua asettamalla niiden yhtälöt yhtä suuriksi

$$\begin{aligned} d_q F_i x + F_i &= d_q F_{i+1} x + [F_{i+1} - d_q F_{i+1}(q_{i+1} - q_i)] \\ \Rightarrow x &= [F_{i+1} - F_i - d_q F_{i+1}(q_{i+1} - q_i)] \frac{1}{d_q F_i - d_q F_{i+1}}, \end{aligned}$$

missä merkintä d_q tarkoittaa liikemäärä derivaattaa. Funktion maksimiarvoksi arvioidaan tangenttisuoran arvo pisteessä x

$$\max_{q \in [q_i, q_{i+1}]} F(q) \approx F_i + d_q F_i x = F_i + [F_{i+1} - F_i - d_q F_{i+1}(q_{i+1} - q_i)] \frac{d_q F_i}{d_q F_i - d_q F_{i+1}}.$$



Kuvio 1. Kuvassa on esimerkkitapaus, miten välillä $[q_i, q_{i+1}]$ ratkaistaan vakio P_i , kun funktion liikemäärä derivaatoille pätee $d_q F_i > 0$ ja $d_q F_{i+1} < 0$. Pisteille F_i ja F_{i+1} muodostetaan tangenttisuorat ja näiden leikkauspisteessä x saadaan vakion P_i arvo.

Määritellään vakiot P_i edellä mainittujen funktion F maksimiarvojen avulla

$$P_i = \max_{q \in [q_i, q_{i+1}]} F(q) \quad (88)$$

$$= \begin{cases} F_i & \text{jos } d_q F_i < 0 \text{ ja } d_q F_{i+1} < 0 \\ F_{i+1} & \text{jos } d_q F_i > 0 \text{ ja } d_q F_{i+1} > 0 \\ \max\{F_i, F_{i+1}\} & \text{jos } d_q F_i < 0 \text{ ja } d_q F_{i+1} > 0 \\ F_i + [F_{i+1} - F_i - d_q F_{i+1} \\ \times (q_{i+1} - q_i)] \frac{d_q F_i}{d_q F_i - d_q F_{i+1}} & \text{jos } d_q F_i > 0 \text{ ja } d_q F_{i+1} < 0 \end{cases}$$

Tehdään lopuksi lyhyt koonti liikemäärien sämpläysmenetelmän toiminnasta. Aluksi jokaiselle irtikytkeytymispinnan elementille arvotaan hiukkasten lukumäärä. Jos hiukkasten lukumäärä on nolasta poikkeava, kaikille hiukkasille arvotaan, mitä hadroneja ne ovat. Jokaiselle hadronille muodostetaan oma kumulatiivinen tiheysfunktio (84), minkä avulla liikemäärät arvotaan. Jos arvottu liikemäärä toteuttaa ehdon (86), se hyväksytään.

4 Tulokset

Tässä osiossa tarkastetaan, kuinka hyvin kappaleen 3.3 hiukkasalgoritmillä muodostetut hiukkasten liikemäärät noudattavat Cooper-Frye integraalia. Seuraavaksi käydään läpi, miten hiukkasalgoritmi muodostettiin, miten sen testaus toteutettiin ja mitä tuloksia testit antoivat.

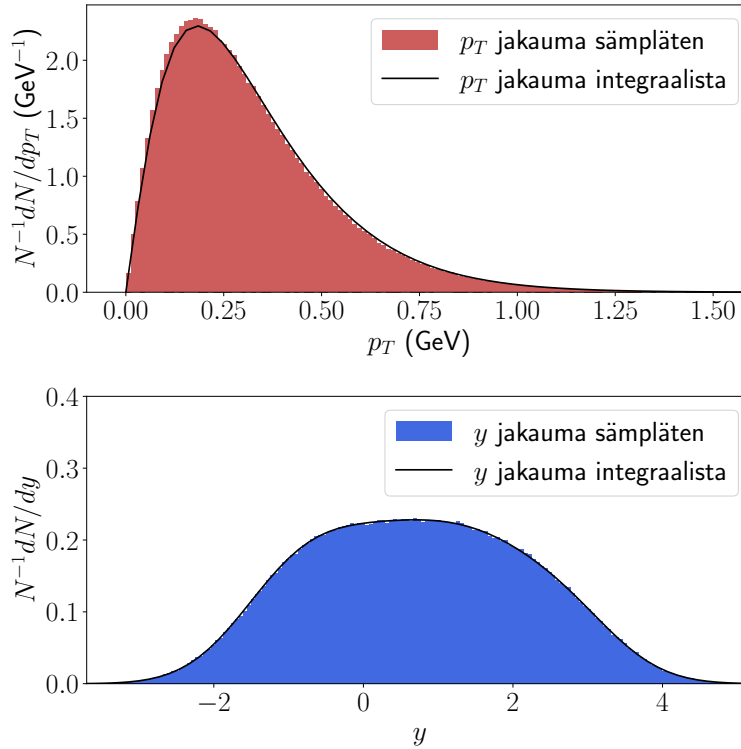
Työn yhteydessä kirjoitettiin kappaleen 3.3 metodia käyttäen Python-koodi, joka lukee hydrodynaamisesta simulaatiosta [19] saatuja irtikytkeytymispintoja, tuottaa niissä muodostuvat hiukkaset ja sähplää hiukkasille liikemäärät. Kappaleen 3.3 metodia ja sen pohjalta kirjoitettua koodia testattiin vertaamalla tuloksia samasta irtikytkeytymispinnasta suoralla integroinnilla ratkaistuihin hiukkasjakaumiin.¹

Sähpläysmenetelmän toteuttavan Python-koodin rakenne on seuraava. Ensin muodostetaan kaksi taulukkoa, joista ensimmäiseen puretaan pintaelementtien data, joka sisältää pintaelementin paikan, fluidin nopeuden, energiatiheyden, leikkausjännitystensorin ja irtikytkeytymispinnan normaalivektorin ja toiseen data alle 2 GeV massaisista hadroneista. Vektorit sekä tensorit muunnetaan karteesisen koordinaatistoon ja tämän jälkeen sähpläystä varten leikkausjännitystensori sekä irtikytkeytymispinnan normaalivektori muunnetaan fluidin lepokoordinaatistoon. Puuttuvia suureita ovat lämpötila ja paine, jotka saadaan hadronikaasun tilanyhtälöstä [15] energiatiheyden avulla, sekä kemialliset potentiaalit, mitkä ratkaistaan Kappaleessa 2.4 esitellyn metodin avulla.

Tässä vaiheessa kaikki vaadittava pohjatieto sähpläyksen toteuttamiseen löytyy. Seuraavaksi ratkaistaan hadronien hiukkastiheydet kaikissa pintaelementeissä, ja arvotaan niiden avulla mihin elementteihin muodostuu hiukkasia ja mitä hadroneja ne ovat. Lopputuloksena muodostetaan taas uusi taulukko, joka antaa jokaiselle generoidulle hiukkaselle pintaelementin, hadronityypin ja kemiallisen potentiaalın. Taulukon hiukkasille muodostetaan omat peitefunktiot, joiden avulla toteutetaan liikemäärien sähpläys. Liikemäärävälın jakaminen sataan osaväliin toimi hyvin peitefunktioita tehdessä, koska silloin funktion muodostaminen onnistui nopeasti ja se tekee sähpläyksestä tehokkaamman.

¹Kiitos Jussi Auvıelle, joka laski käytetyt hiukkasjakaumat ja tarjosi irtikytkeytymispinnat.

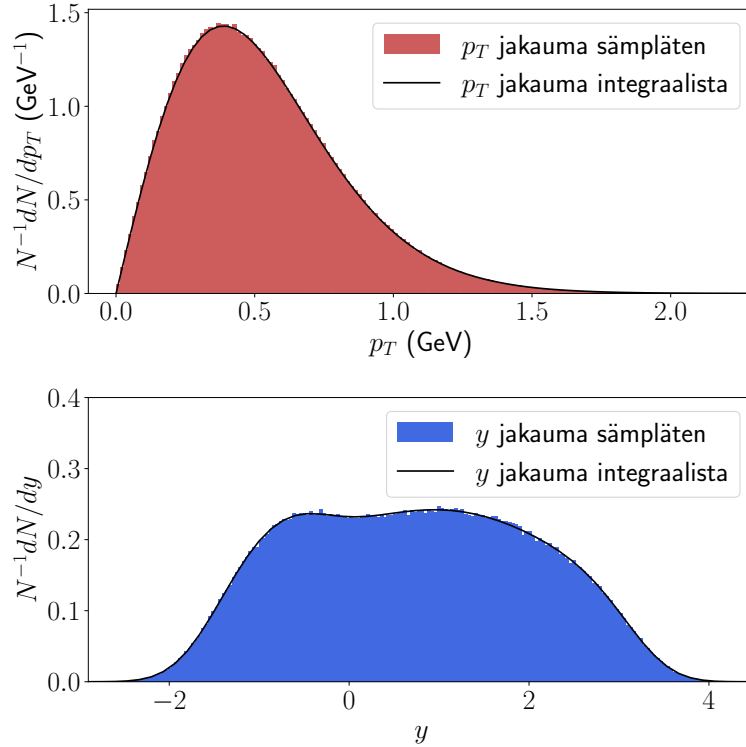
Python-koodin optimointi vaatii kaikkien laskutoimitusten vektorisointia, mikä on erityisen haastavaa liikemääriä sämplätessä. Toteutuksessa kaikille hiukkasille ensin arvotaan kaksi liikemäärää ja ensimmäinen hyväksytty liikemäärä tallennetaan. Hiukkaset, joille ei muodostunut ollenkaan hyväksyttyjä liikemääriä siirtyvät seuraavalle kierrokselle, missä arvotaan neljä liikemäärää ja ensimmäinen hyväksytty liikemäärä tallennetaan. Sama prosessi toistetaan aina kaksinkertaisella määrällä liikemäärien arvauksia, kunnes kaikille hiukkasille löytyy liikemäärät. Lopuksi nämä liikemäärät muunnetaan takaisin laboratorikoordinaatistoon ja muodostetaan viimeinen taulukko, missä on irtikykyneiden hiukkasten hadronilajit, paikat ja liikemäärät.



Kuvio 2. π^+ hadronille on muodostettu normitetut Cooper-Frye jakaumat suoralla integroinnilla sekä sämpläämällä miljoonan hadronin liikemäärät histogrammeihin.

Jokaiselle hadronille on ratkaistu oma poikittaisliikemääräjakauma dN/dp_T sekä rapiditeettijakauma dN/dy numeerisella integroinnilla [19]. Liikemäärien muodostamista kappaleen 3.3 metodilla ei voi suoraan verrata jatkuvaan jakaumaan. Metodin testaamista varten täytyy tehdä versio, joka muodostaa vain tiettyä hadronia. Tätä hadronia sämplätään miljoonia kertoja ja näistä muodostetaan normitetut p_T sekä y

histogrammit, joita verrataan normitettuihin jatkuviin jakaumiin kuvioissa 2-5. Jos histogrammien muoto on sama kuin hiukkasjakaumien, liikemäärien arvonta toimii oikein. Keskimääräisen hiukkaslukumäärän (76) ja Cooper-Frye integraalin (78) negatiiviset kontribuutiot täytyy hylätä sämpläys prosessia varten. Jos näitä negatiivisia kontribuutioita löytyy, kuvaajat ja histogrammit eivät välttämättä täsmää.

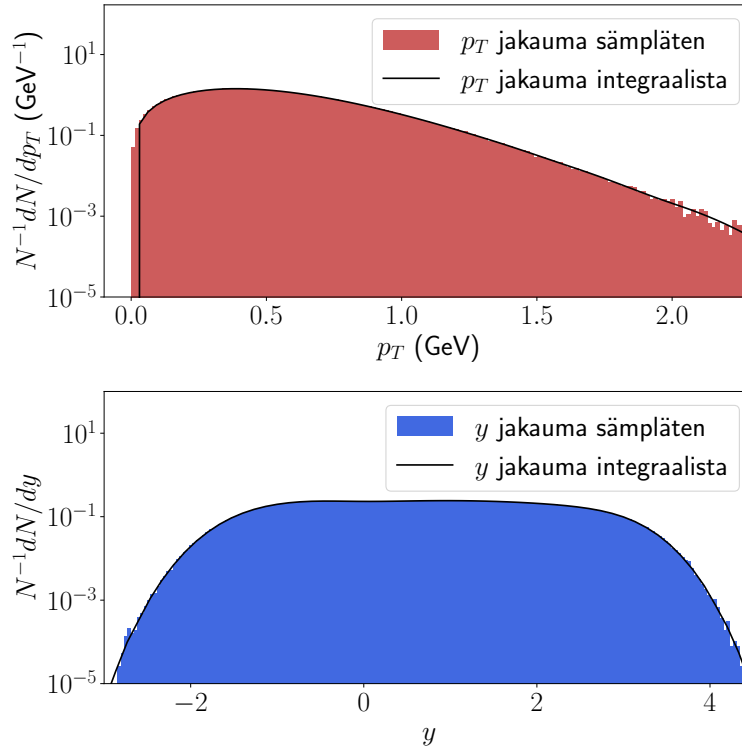


Kuvio 3. Protonille on muodostettu normitettut Cooper-Frye jakaumat suoralla integroinnilla sekä sämpläämällä miljoonan hadronin liikemäärät histogrammeihin.

Normitettujen histogrammien ja kuvaajien vertaaminen kertoo vain arvannon liikemääräriippuvuudesta, mutta ei sisällä tietoa hiukkastiheyksistä. Yhtälön (76) arvoa voidaan verrata jatkuvasta jakaumasta integroimalla saatuun hiukkasluvun odotusarvoon, kun hiukkastiheys (53) lasketaan vain yhdelle hadronille ja summataan yli kaikkien irtikytkeytymispinnan elementtien.

Testatessa irtikytkeytymispinnasta tarkasteltiin vain pientä osaa, sillä tällöin laskenta aika pysyy lyhyenä ja metodeja voidaan silti verrata toisiinsa aivan samalla tavalla. Testissä muodostettiin tarkasteltavaa hiukkasta noin miljoona kappaletta ja jokaiselle sämplättiin liikemäärät. Liikemääriä sämplätessä negatiivisia kontribuutioita tapahtui vain noin yksi tuhatta muodostettua liikemäärä kohden, joten ne eivät

vaikuta histogrammeihin. Myös jokaisessa testipinnan alkiossa fluidin nelinopeuden ja pinnan normaalin välinen pistetulo oli positiivinen eli hiukkasvirta oli jokaisessa pintaelementissä ulospäin. Eri metodien antamat keskimääräiset hiukkaslukumäärät (76) poikkesivat toisistaan vain muutaman prosentin verran, mikä todennäköisimmin johtui integroimalla muodostetun ratkaisun integrointi tarkkuudesta.

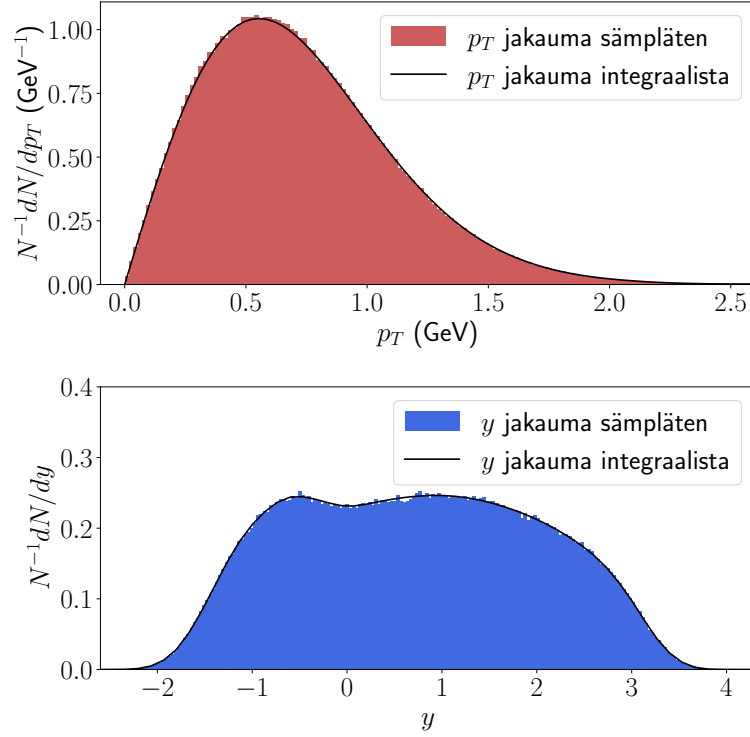


Kuvio 4. Protonille on muodostettu normitetut Cooper-Frye jakaumat suoralla integroinnilla sekä sämplämällä miljoonan hadronin liikemäärät histogrammeihin. Kuvaajissa pysty akseli on logaritmisella asteikolla.

Kuviossa 2 on hadronin π^+ jakaumat molemmilla toteutuksilla. Näitä verratessa huomataan, että rapiditeetti käytös on vastaava molemmilla metodeilla, mutta p_T käytös poikkeaa hieman. Tätä eroa ei kuitenkaan ole havaittavissa, kun siirrytään pioneja raskaampiin hadroneihin. Kuviossa 3 on vertailu protonille, jonka rapiditeetti sekä p_T käytökset vastaavat toisiaan. Kuviossa 4 on sama protonin vertailu, mutta logaritmisella asteikolla, joka antaa paremman kuvan suurilla p_T ja rapiditeetti arvoilla. Jakaumat vastaavat myös toisiaan kuvion 5 hadronille anti Σ^0 (1940), joka on hadronin sigma antihiukkasen vitystila.

Syy sille, miksi pionien p_T riippuvuus poikkeaa hieman, on epäselvä etenkin, kun kaikki muut jakaumat vastaavat toisiaan. sämpläysmenetelmässä pioneja muodostui enemmän pienemmillä p_T arvoilla, kuin mitä hiukkasjakauman mukaan pitäisi muo-

dostua. Ero on kuitenkin hyvin pieni ja johtuu todennäköisimmin hiukkasjakaumien integrointitarkkuudesta.



Kuvio 5. Anti Σ^0 (1940) hadronille on muodostettu normitetut Cooper-Frye jakaumat suoralla integroinnilla sekä sämpläämällä miljoonan hadronin liikemäärät histogrammeihin.

5 Päätäntö

Kappaleissa 3.1-3.2 on esitetty Cooper-Frye integraalin puskuinvariantti ratkaisu toisen tyyppin modifioitujen Besselin funktioiden avulla sekä integraalilla yli irtikytkeytymispinnan xy -tason parametrisaation $S(x, y)$. Toisin sanoen kolmiulotteinen integraali on redusoitu kaksiulotteiseksi. Cooper-Frye integraali termisessä tasapainossa saadaan yhtälön (70) avulla ja leikkasviskositeetin korjaustermit saadaan yhtälöiden (73) ja (75) avulla. Puskuinvariantti approksimaatio tekee integraalin ratkaisemisesta huomattavasti nopeamman verrattuna kolmiulotteiseen integraaliin. Puskuinvariantti ratkaisu on myös hyödyksi, vaikka ratkaistavana onkin kolmiulotteinen tapaus, koska sen avulla voidaan arvioida integraalia, kun aika-avaruus rapiditeetti on lähellä nollaa. Puskuinvariantti malli ei kuitenkaan anna tietoa hiukkasten rapiditeetti käytöksestä, koska rapiditeettijakauma dN/dy on mallissa vakio.

Kappaleessa 3.3 hadronien irtikytkeytyminen on toteutettu sämpläysmenetelmällä. Erona tämä menetelmä tuottaa jatkuvien hiukkasjakaumien sijaan satunnaisessa törmäyksessä muodostuneet hiukkaset liikemäärineen. Hyötyjä tässä toteutuksessa on sen nopeus muodostaa yksittäisiä törmäyksiä ja mahdollisuus yhdistää muodostetut hadronit kätevästi mikroskooppiseen teoriaan irtikytkeytymisen jälkeistä vaihetta varten. Realistisissa raskasioneitörmäysten malleissa alkutilan geometria vaihtelee, mikä vaatii useiden eri törmäysten mallintamisen alusta loppuun ja näiden tulosten keskiarvoistamisen. Tätä varten irtikytkeytymisen nopea muodostaminen on erityisen tärkeää.

Tässä työssä muodostettiin kappaleen 3.3 sämpläysmenetelmän toteuttava Python-koodi ja sen toteutus esiteltiin kappaleen 4 alussa. Koodin antamia tuloksia verrattiin Cooper-Frye integraalin kolmiulotteiseen toteutukseen [19]. Vertailun perusteella kappaleen 3.3 liikemäärien sämpläysmenetelmän antamat tulokset noudattavat numeerisesti integroitua Cooper-Frye jakaumaa. Eri metodeilla määritetyt hiukkaslukumäärien odotusarvot poikkesivat toisistaan vain muutaman prosentin kaikilla hadronityypeillä. p_T ja y jakaumat olivat samat lähestulkoon kaikilla eri hadroneilla, ainoana poikkeuksena kevyimmän hadronin eli pionin p_T jakaumat poikkesivat hieman. Testeissä liikemäärien sämpläymiseen käytetty Cooper-Frye integrandi (78)

ei saanut negatiivisia kontribuutioita. Saman testauksen voisi tehdä erilaisille irtikytketymispinnoille, joissa tilanne voisi olla toinen ja tulokset eroaisivat hieman negatiivisten kontribuutioiden takia.

Seuraava vaihe olisi soveltaa menetelmää realistisiin raskasioneitörmäysten malleihin, ja muodostaa koko irtikytketymispinnalla muodostuvat hiukkaset sämpläyksen avulla kaikille eri törmäyksille. Lisäksi koodiin täytyy lisätä epästabiilien hiukkasten hajoamiset ja hiukkasten kehityksen mallintaminen havaitsemille asti. Koska sämpläysmenetelmä generoi yksittäisiä hiukkasia, niiden kehitystä irtikytketymisen jälkeen voitaisiin helposti mallintaa kineettisen teorian mallien avulla, kuten UrQMD [6] tai SMASH [7].

Lähteet

- [1] S. Borsanyi ym. "QCD Crossover at Finite Chemical Potential from Lattice Simulations". *Physical Review Letters* 125.5 (heinäkuu 2020). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.125.052001. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.052001>.
- [2] A. Jaiswal ja V. Roy. "Relativistic Hydrodynamics in Heavy-Ion Collisions: General Aspects and Recent Developments". English. *Advances in High Energy Physics* 2016 (2016). Copyright - Copyright © 2016 Amaresh Jaiswal and Victor Roy. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. The publication of this article was funded by SCOAP³ ; Last updated - 2023-11-18. URL: <https://www.proquest.com/scholarly-journals/relativistic-hydrodynamics-heavy-ion-collisions/docview/1836555186/se-2>.
- [3] S. Bass ja A. Dumitru. "Dynamics of hot bulk QCD matter: From the quark-gluon plasma to hadronic freeze-out". *Physical Review C* 61.6 (2000), s. 064909.
- [4] L. Rezzolla ja O. Zanotti. *Relativistic hydrodynamics*. Oxford University Press, USA, 2013.
- [5] G. M. Kremer. *Theory and applications of the relativistic Boltzmann equation*. 2014. arXiv: 1404.7083 [cond-mat.stat-mech]. URL: <https://arxiv.org/abs/1404.7083>.
- [6] M. Bleicher ym. "Relativistic hadron-hadron collisions in the ultra-relativistic quantum molecular dynamics model". *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 25.9 (1999), s. 1859.
- [7] J. Weil ym. "Particle production and equilibrium properties within a new hadron transport approach for heavy-ion collisions". *Physical Review C* 94.5 (marraskuu 2016). ISSN: 2469-9993. DOI: 10.1103/physrevc.94.054905. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.94.054905>.

- [8] J. S. Moreland, J. E. Bernhard ja S. A. Bass. "Alternative ansatz to wounded nucleon and binary collision scaling in high-energy nuclear collisions". *Physical Review C* 92.1 (heinäkuu 2015). ISSN: 1089-490X. DOI: 10.1103/physrevc.92.011901. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.92.011901>.
- [9] J. E. Bernhard ym. "Applying Bayesian parameter estimation to relativistic heavy-ion collisions: Simultaneous characterization of the initial state and quark-gluon plasma medium". *Physical Review C* 94.2 (elokuu 2016). ISSN: 2469-9993. DOI: 10.1103/physrevc.94.024907. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.94.024907>.
- [10] B. Schenke, P. Tribedy ja R. Venugopalan. "Fluctuating Glasma Initial Conditions and Flow in Heavy Ion Collisions". *Physical Review Letters* 108.25 (kesäkuu 2012). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.108.252301. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.252301>.
- [11] K. Eskola ym. "Scaling of transverse energies and multiplicities with atomic number and energy in ultrarelativistic nuclear collisions". *Nuclear Physics B* 570.1–2 (maaliskuu 2000), s. 379–389. ISSN: 0550-3213. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00720-8. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(99\)00720-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00720-8).
- [12] P. Huovinen ja H. Petersen. "Particization in hybrid models". *The European Physical Journal A* 48.11 (marraskuu 2012). DOI: 10.1140/epja/i2012-12171-9. URL: <https://doi.org/10.1140%2Fepja%2Fi2012-12171-9>.
- [13] F. Cooper ja G. Frye. "Single-particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production". *Phys. Rev. D* 10 (1 heinäkuu 1974), s. 186–189. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.186. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.186>.
- [14] C. Schwarz ym. "Different realizations of Cooper–Frye sampling with conservation laws". *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 45.1 (marraskuu 2017), s. 015001. DOI: 10.1088/1361-6471/aa90eb. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6471/aa90eb>.
- [15] P. Huovinen ja P. Petreczky. "QCD equation of state and hadron resonance gas". *Nuclear Physics A* 837.1 (2010), s. 26–53. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2010.02.015>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947410003696>.

- [16] H. Niemi ym. "Influence of Shear Viscosity of Quark-Gluon Plasma on Elliptic Flow in Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions". *Physical Review Letters* 106.21 (toukokuu 2011). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.106.212302. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.212302>.
- [17] H. Niemi ym. *Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement* 5.2 (2012), s. 305. ISSN: 2082-7865. DOI: 10.5506/aphyspolbsupp.5.305. URL: <http://dx.doi.org/10.5506/APhysPolBSupp.5.305>.
- [18] H. Niemi ym. "Influence of a temperature-dependent shear viscosity on the azimuthal asymmetries of transverse momentum spectra in ultrarelativistic heavy-ion collisions". *Physical Review C* 86.1 (heinäkuu 2012). ISSN: 1089-490X. DOI: 10.1103/physrevc.86.014909. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.86.014909>.
- [19] E. Molnár ym. "Influence of temperature-dependent shear viscosity on elliptic flow at backward and forward rapidities in ultrarelativistic heavy-ion collisions". *Physical Review C* 90.4 (lokakuu 2014). ISSN: 1089-490X. DOI: 10.1103/physrevc.90.044904. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.90.044904>.
- [20] M. Tsampanlis. *Special relativity*. Springer, 2010.
- [21] J. D. Bjorken. "Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region". *Phys. Rev. D* 27 (1 tammikuu 1983), s. 140–151. DOI: 10.1103/PhysRevD.27.140. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.27.140>.
- [22] E. Molnar, H. Niemi ja D. H. Rischke. "Numerical tests of causal relativistic dissipative fluid dynamics". *Eur. Phys. J. C* 65 (2010), s. 615–635. DOI: 10.1140/epjc/s10052-009-1194-9. arXiv: 0907.2583 [nucl-th].
- [23] H. Remi Joel. *Introduction To Relativistic Statistical Mechanics: Classical And Quantum*. World Scientific, 2011. ISBN: 9789814322430. URL: <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=e000xww&AN=389651&site=ehost-live>.
- [24] W. Israel ja J. Stewart. "Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory". *Annals of Physics* 118.2 (1979), s. 341–372. ISSN: 0003-4916. DOI:

- [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(79\)90130-1](https://doi.org/10.1016/0003-4916(79)90130-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491679901301>.
- [25] E. Molnár ym. "Relative importance of second-order terms in relativistic dissipative fluid dynamics". *Phys. Rev. D* 89.7 (2014), s. 074010. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.074010. arXiv: 1308.0785 [nucl-th].
- [26] R. Sangwook. "Integrated description of heavy ion collisions at RHIC and the LHC". Väitöskirja. McGill University, 2016. URL: <https://escholarship.mcgill.ca/concern/theses/fj236489f>.
- [27] S. Samanta, S. Chatterjee ja B. Mohanty. "Exploring the hadron resonance gas phase on the QCD phase diagram". *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 46.6 (toukokuu 2019), s. 065106. DOI: 10.1088/1361-6471/ab1a6b. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6471/ab1a6b>.
- [28] P. Huovinen. "Chemical freeze-out temperature in hydrodynamical description of Au+Au collisions at $s(\text{NN})^{1/2} = 200\text{-GeV}$ ". *Eur. Phys. J. A* 37 (2008), s. 121–128. DOI: 10.1140/epja/i2007-10611-3. arXiv: 0710.4379 [nucl-th].
- [29] T. Hirano ja K. Tsuda. "Collective flow and two-pion correlations from a relativistic hydrodynamic model with early chemical freeze-out". *Physical Review C* 66.5 (marraskuu 2002). ISSN: 1089-490X. DOI: 10.1103/physrevc.66.054905. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.66.054905>.
- [30] S. Ryu ym. "Effects of bulk viscosity and hadronic rescattering in heavy ion collisions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider and at the CERN Large Hadron Collider". *Physical Review C* 97.3 (maaliskuu 2018). ISSN: 2469-9993. DOI: 10.1103/physrevc.97.034910. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.97.034910>.
- [31] D. Oliinychenko ja H. Petersen. "Forced canonical thermalization in a hadronic transport approach at high density". *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 44.3 (tammikuu 2017), s. 034001. ISSN: 1361-6471. DOI: 10.1088/1361-6471/aa528c. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6471/aa528c>.