JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTO-
TIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Tilavuuksien ja pinta-alojen historiallisia määritystapoja

Juho Korpinen

24. kesäkuuta 2024

Tekijä Juho Korpinen	
Otsikko Tilavuuksien ja pinta-alojen historiallisia määritystapoja, (engl. Historical Methods of Determining Volumes and Areas)	
Tutkinto-ohjelma Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma	
Päivämäärä 24. kesäkuuta 2024	**Sivumäärä** 48

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa selvitetään eräiden geometristen kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien laskemista samaan tapaan kuin antiikin kreikkalaiset tekivät yli 2000 vuotta sitten. Kyseisen aikakauden yksi tunnetuimmista matemaatikoista oli Arkhimedes, joka määritti useita geometrisia ominaisuuksia, kuten piin likiarvon ja kappaleisiin liittyviä kaavoja, joista tutustumme ympyrän, ellipsin ja pallon pinta-alan sekä pallon tilavuuden kaavoihin.

Aluksi tutustumme egyptiläiseen ja babylonialaiseen matematiikkaan, jotka olivat määrittäneet omat arvonsa piille, minkä jälkeen kerromme kreikkalaisen matematiikan syntymästä ja kehityksestä aikavälillä 600–300 eaa. Tuolloin Pythagoraan koulukunta tutki geometriaa ja Eudoksus kehitti kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuden määrittämisen kannalta hyödyllisen suhteiden teorian ja ekshaustiomenetelmän.

Tämän jälkeen tutustumme paremmin Arkhimedeeseen ja tämän töihin sekä tutkimme, miten hän oli määrittänyt ympyrän ja ellipsin pinta-alan kaavat sekä määritämme piin likiarvon. Lopuksi todistamme pallon tilavuuden ja pinta-alan kaavat kahdella eri tavalla sekä esitämme Arkhimedeen tavan piin määrittämiseen.

Sisällys

Johdanto

Antiikin Kreikan filosofin Aristoteleen mukaan kaikki ihmiset haluavat luonnostaan tietää. Vanhojen historiallisten tekstien mukaan filosofit ja hallitsijat matkustivat kerätäkseen vuosisatojen ajalta tietoa ja saadakseen viisautta muista maista [4, s. 4]. Aristoteles huomasi, että tiedettä edelsivät taiteet, jotka keksittiin kokemuksista kerätyistä mielikuvista. Ensin tulivat ne taiteet, jotka oli suunnattu tarjoamaan elämän välttämättömyyksiä ja sitten ne, jotka toivat mukavuuksia [4, s. 8]. Tämä tieteen kehitys tapahtui sellaisissa paikoissa, joissa ihmisillä oli mahdollisuus vapaa-aikaan, kuten Egyptissä, jossa "matemaattiset taiteet" perustettiin, kun papeilla oli vapaa-aikaa. Myös Babyloniassa tiedettä olivat pystyneet harjoittamaan vain papit, tosin pappien tieteelliset tutkimukset eivät edenneet pitkälle, sillä tieteelliset tekstit samaistuivat helposti uskonnollisiin kirjoituksiin [4, s. 8–9].

Kreikkalaisten keskuudessa ei ollut tällaisia rajoittavia tekijöitä, vaan he pystyivät vapaasti tutkimaan monia tieteenaloja [4, s. 9]. Kreikkalaiset olivat "ajattelijoiden kansaa": Heille ei riittänyt tietää jokin tosiasia vaan he halusivat samalla myös vastauksen kysymyksiin miten ja miksi asiat ovat siten kuin ne ovat. He olivat myös erittäin kyvykkäitä tekemään tarkkoja havaintoja, esimerkiksi tähtitieteessä tutkiessaan kuun eri vaiheita [4, s. 5–6].

Tämän tutkielman tavoitteena on selvittää eräiden peruskoulussa opetettujen kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien kaavat samaan tapaan kuin Arkhimedes teki 200-luvulla eaa. Aluksi käymme läpi matematiikan syntyä ja kehitystä Egyptissä ja Babyloniassa sekä Kreikassa Arkhimedesta edeltäneenä aikana. Sekä egyptiläiset että babylonialaiset osasivat esimerkiksi selvittää pinta-aloja kolmioilla, joiden avulla molemmat kansat määrittivät ympyrän pinta-alalle ja piille omat kaavat ja likiarvot noin 2000 vuotta eaa. Kreikkalaiset alkoivat kehittämään matematiikkaa noin 500-luvulla eaa., Pythagoraan koulukunnan tutkiessa geometriaa, jota Eudoksus kehitti edelleen laatiessaan 300-luvulla eaa. suhteiden teorian ja ekshaustiomenetelmän. Näiden kahden keksinnön avulla Arkhimedes pystyi jo 200-luvulla eaa. määrittämään monien geometristen kappaleiden pinta-aloja ja tilavuuksia samankaltaisella tavalla kuin nykypäivän integraalilaskennassa.

Kolmannessa luvussa tutustumme Arkhimedeen elämään ja keksintöihin ja kerromme hänen matemaattisten töidensä leviämisestä muualle Eurooppaan sekä niiden erilaisista käännöksistä. Tämän jälkeen käsittelemme ympyrää ja ellipsiä, joille perustelemme pinta-alan kaavat samaan tapaan kuin Arkhimedes sekä piin likiarvon.

Kuudennessa luvussa tutkimme Arkhimedeen lempitulosta, jonka mukaan pallon B ja sen ympäripiirretyn sylinterin Z tilavuudella ja pinta-alalla on tismalleen sama suhde, joka on $2 : 3$, eli

$$V(B) : V(Z) = 2 : 3 \quad \text{ja} \quad A(B) : A(Z) = 2 : 3.$$

Todistamme pallon tilavuuden kaavan $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Arkhimedeen käyttämällä vipulain yhtälöllä ja pallon pinta-alan kaavan $A = 4\pi r^2$ pyörähdyskappaleiden avulla. Lopuksi esittelemme Arkhimedeen käyttämää alkuperäistä laskutapaa pallon tilavuuden ja pinta-alan kaavan sekä piin määrittämiseen.

Arkhimedes kirjoitti kyseisten kaavojen todistukset, niissä olevat välivaiheet ja lukuarvot kokonaisin sanoin ja lausein, mutta tässä tutkielmassa ne kirjoitetaan ja esitetään käyttämällä nykyajan merkintöjä ja numeroita selkeyden vuoksi. Tämän tutkielman tarkoituksena on vakuuttaa lukija siitä, että Arkhimedes oli määrittänyt edellä mainittujen kappaleiden kaavat järkevästi ja että ne voidaan perustella loogisesti hänen elinaikanaan saatavilla olleilla ja käyttämillään esitiedoilla.

Tutkielman päälähteinä ovat olleet E. J. Dijksterhuis'n teos *Archimedes* [2], C. H. Edwardsin teos *The Historical Development of the Calculus* [3] ja J. Stillwellin teos *Mathematics and Its History* [6].

1 Matematiikan kehitys ennen kreikkalaisia

1.1 Egyptiläinen matematiikka

Matematiikan käsitteet ja konseptit saivat alkunsa maaperältään rikkaiden jokilaaksojen sivilisaatioista, kuten Egyptin Niilin sekä Kaksoisvirranmaan Tigris- ja Eufrat-jokien lähialueilta noin 4000 vuotta sitten. Niilin jokavuotiset tulvat veivät osan tonttien maa-alueista mukaansa, minkä seurauksena silloisten maanomistajien täytyi hakea veronalennuksia. Tämä johti geometrian (kreikaksi "maanmittaus") syntyyn. Merkittävin nykypäivään säilynyt egyptiläisen matematiikan tuotos on noin 3900 vuotta vanha *Rhindin papyrus*, jossa on yhteensä 84 tehtävää, joista noin 20 liittyy erilaisiin pinta-aloja ja tilavuuksia käsitteleviin tehtäviin ratkaisuineen. Egyptiläiset olettivat (oikein) suorakulmion ja kolmion pinta-alan, ja heidän tapansa laskea pinta-alaa saattoikin olla alueen "paloittelu" erilaisiksi kolmioiksi, joita siirtelemällä saadaan muodostettua suorakulmio. [3, s. 1–2]

Yhdessä *Rhindin papyruksen* tehtävässä lasketaan myös ympyrän pinta-ala tavalla, josta saadaan piin likiarvoksi $\pi \approx 3{,}16$:

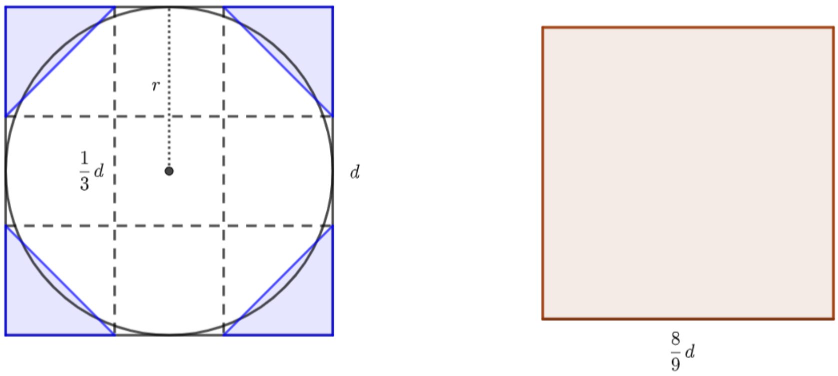
Piirretään ympyrän ympäripiirretty neliö, jonka sivun pituus on ympyrän halkaisija d. Muodostetaan neliön sisälle yhdeksän pienempää, yhtäsuurta neliötä ja leikataan alkuperäisen neliön kulmapalat pois kuvan 1.1 mukaisesti [3, s. 2]. Tällöin muodostuu kahdeksankulmio, jonka pinta-ala A on sama kuin seitsemän pienemmän neliön pinta-ala, mikä on hyvin lähellä egyptiläisten käyttämää approksimaatiota ympyrän pinta-alalle $C = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ eli

$$A = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \approx \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = C.$$

Käyttämällä ympyrän pinta-alan todellista kaavaa $Y = \pi r^2 = \pi(\frac{1}{2}d)^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$ approksimaatiolle C saadaan yhtälö

$$\frac{64}{81}d^2 = \frac{\pi}{4}d^2,$$

mistä voidaan ratkaista piin silloiseksi arvoksi $\pi = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81} \approx 3{,}16$ [4, s. 124]. Jos yhtälön ratkaisussa käytettäisiin approksimaatiota A, niin piin arvo olisi $\pi = \frac{252}{81} = 3\frac{9}{81} = 3\frac{1}{9} \approx 3{,}11$.



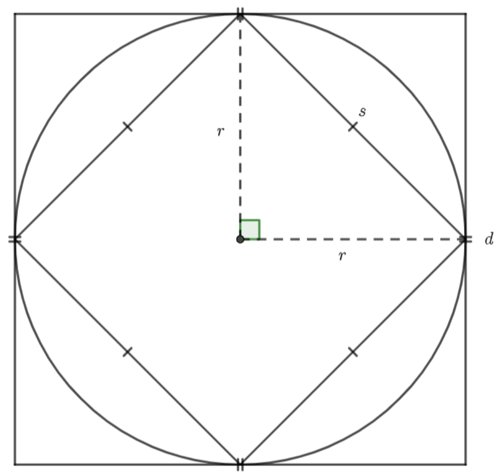
Kuva 1.1: Egyptiläiset approksimoivat ympyrän pinta-alan olevan sama kuin neliöllä, jonka sivun pituus on $\frac{8}{9}d$.

1.2 Babylonialainen matematiikka

Egyptiläisten kanssa samaan aikaan matematiikka kehittyi myös Kaksoisvirranmaassa eli Babyloniassa (nykypäivän Irak ja Syyria), josta on löydetty ja tulkittu Hammurabin valtakauden noin 3600–3800 vuotta vanhoja nuolenpääkirjoituslautoja. Näiden perusteella babylonialaiset olivat matemaattisesti edistyneempiä kuin egyptiläiset. Babylonialaiset osasivat muun muassa laskea yhtälöpareja ja ratkaista toisen asteen yhtälöjä, he tunsivat Pythagoraan lauseen sisällön jo 1000 vuotta ennen Pythagorasta ja määrittivät luvun $\sqrt{2}$ likiarvon miljoonasosan tarkkuudella. Babylonialaiset laskivat oikein kolmioiden ja puolisuunnikkaiden pinta-aloja sekä sylinterien ja särmiöiden tilavuuksia. [3, s. 3]

Tähän päivään asti selvinneiden egyptiläisten ja babylonialaisten tuotosten perusteella kummatkaan kansakunnat eivät erotelleet tarkkoja ja likimääräisiä tuloksia toisistaan eivätkä selviä väittämiä ”laskusäännöistä”. Joskus ne sisälsivät myös virheellistä tietoa, esimerkiksi babylonialaiset esittivät katkaistun kartion tilavuudelle kaavan $V = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)h$, missä A_1 ja A_2 ovat pohjan ja huipun pinta-alat ja h on katkaistun kartion korkeus. [3, s. 4–5]

Babylonialaiset käyttivät ympyrän pinta-alalle kaavaa $C = 3r^2$ eli piin likiarvoa $\pi \approx 3$ [1, s. 35]. Tämä voidaan saada laskemalla ympyrän sisään- ja ympäripiirretyn neliön pinta-alan keskiarvo: ympäripiirretyn neliön pinta-ala on $A_y = d^2 = (2r)^2 = 4r^2$ ja sisäänpiirretyn neliön pinta-ala on Pythagoraan lauseen nojalla $A_s = s^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ [3, s. 4].



Kuva 1.2: Babylonialaisten käyttämät approksimaatiot ympyrän pinta-alalle sen sisään- ja ympäripiirretyn neliön avulla.

Huomataan, että babylonialaiset saivat piille varsin epätarkan arvion välille $2 < \pi < 4$, kun taas egyptiläiset saivat tarkemman approksimaation välille

$$\frac{252}{81} = 3\frac{9}{81} = 3\frac{1}{9} \approx 3{,}11 < \pi < \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81} \approx 3{,}16$$

mikä eroaa todellisesta piin arvosta noin kaksi sadasosaa. Tässä on hyvä huomioida, että egyptiläisten tarkemmat approksimaatiot piille ja niiden tarkkuus johtuvat heidän käyttämästä kahdeksankulmiosta kuvassa 1.1, mikä mukailee paremmin ympyrää kuin babylonialaisten käyttämät neliöt kuvassa 1.2.

Tällainen ala- ja ylärajan selvittäminen muistuttaa paljon kreikkalaisten käyttämää *ekshaustiomenetelmää*, jolla Arkhimedes selvitti monien geometristen kappaleiden pinta-aloja ja tilavuuksia sekä vielä tarkemman approksimaation piin likiarvolle yli 1000 vuotta myöhemmin. Tästä kerrotaan enemmän seuraavissa luvuissa, joissa päästään käsiksi kreikkalaiseen matematiikkaan ja puhutaan Arkhimedeesta ja hänen töistään.

2 Kreikkalainen matematiikka ennen Arkhimedesta

Kreikkalainen matematiikka sai alkunsa noin vuonna 600 eaa., kun historian ensimmäisten matemaatikkojen Thaleen (n. 626–548 eaa.) ja Pythagoraan (n. 582–500 eaa.) väitettiin matkustaneen sekä Egyptissä että Babyloniassa hankkiakseen tietoja luvuista ja geometriasta [4, s. 128, 141] [3, s. 5]. Kreikkalaiset edistivät matematiikkaa tuomalla siihen loogisen ja täsmällisen, deduktiivisen lähestymistavan, toisin kuin egyptiläiset ja babylonialaiset aikanaan. Thales eli 500-luvun ensimmäisellä puolikkaalla ennen ajanlaskun alkua ja hän oli historian ensimmäinen ihminen, jolle oli osoitettu kunniaa matemaattisten lauseiden todistuksista [1, s. 44].

300-luvun filosofin Prokluksen mukaan Thales ”meni ensin Egyptiin ja sitten esitteli tämän (geometrian) opin Kreikalle. Hän teki monet löytönsä itsekseen, ja opasti seuraajiaan perustana olevissa periaatteissa. Joskus hän kävi ongelmiin käsiksi yleisemmin (teoreettisemmin tai tieteellisemmin), joskus kokemusperäisemmin (tarkkailemalla tai havainnoimalla) [4, s. 128]... hänen jälkeensä tullut Pythagoras muutti geometrian vapaaksi opetuksen muodoksi: hän harjoitti tätä kuria ensimmäisistä periaatteista ja hän yritti tutkia propositioita ilman konkreettista esitysmuotoa, puhtaasti loogisella ajattelulla [3, s. 5].”

2.1 Pythagoraan koulukunta

Pythagoras perusti oman koulukuntansa, jonka jäsenet harjoittivat ja osallistuivat aktiivisesti erilaisten asioiden opetukseen ja oppimiseen myös sen jälkeen, kun Pythagoras kuoli noin vuonna 500 eaa. Pythagoralaisten myötä kreikkalaisesta matematiikasta alkoi tulla abstraktimpaa kuin egyptiläisten ja babylonialaisten matematiikasta, ja vuoteen 400 eaa. mennessä pythagoralaiset muodostivat ja todistivat esimerkiksi yleisiä suhteita kolmioiden ja nelikulmioiden pinta-aloista. [3, s. 6]

Kreikkalaisille ”luku” tarkoitti alunperin positiivista kokonaislukua ja he tulkitsivat nykyajan rationaaliluvun $\frac{a}{b}$ (kokonais)lukujen suhteena $a : b$, jota antiikin kreikkalaiset eivät pitäneet ”yhtenä oliona”, jolla oli lukuarvo [1, s. 49]. Tämä diskreetti näkemys lukuihin ja suuruuksiin sovellettiin myös geometrisiin ominaisuuksiin, kuten pituuteen, pinta-alaan ja tilavuuteen. Pythagoralaiset olettivat alun perin minkä tahansa kahden janan olevan *yhteismitalliset* eli että on olemassa yhteinen (lyhyempi) jana, jonka kokonaisia monikertoja ne molemmat ovat. Tällä oletuksella pythagoralaiset laativat *verrannollisuuksien teorian*, joka voitiin laajentaa myös geometrisiin ominaisuuksiin. [3, s. 6–7]

Pythagoraan koulukunnan harjoittama geometria 400-luvulla eaa. perustui lukuihin ja edellä mainittuun *verrannollisuuksien teoriaan*. Koulukunnan väitetty tunnuslause "kaikki on lukua" koki kolauksen tämän vuosisadan aikana, kun löydettiin mittoja, jotka eivät olleet keskenään yhteismitallisia, kuten neliön lävistäjä ja sivu. Tämä yhteismitattomuuden löytyminen johti matematiikan perusteiden perusteelliseen läpikäymiseen ja korjauksiin koko 300-luvun eaa. ajan, jolloin kreikkalainen matematiikka omaksui erittäin tarkan ja täsmällisen muotonsa ja Eukleides julkaisi työnsä *Alkeet*. Eukleideen työ on varhaisin merkittävä kreikkalainen matemaattinen teos, joka sisältää kreikkalaisten vuodesta 600 eaa. lähtien kehittämää matematiikan teoriaa. Luvut olivat kreikkalaisille diskreettejä, toisin kuin geometriset suureet, jotka osoittautuivat olevan luonteeltaan jatkuvia. Tämän seurauksena geometrisia suureita ja kappaleita ei voitu käsitellä samalla tavalla kuin lukuja. *Alkeissa* esitetään kreikkalaisten laskutapa geometriselle algebralle suorakulmioiden avulla sekä erilaisia nykyajan irrationaalilukujen (silloiset yhteismitattomat pituudet) muotoja, jotka ovat nykymerkinnöin $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ ja $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, missä a ja b ovat yhteismitallisia. [3, s. 10–12]

2.2 Äärettömyys antiikin Kreikassa

Irrationaalisten lukujen hylkääminen selittyi osin kreikkalaisten keskuudessa antiikin ajalla vallinneesta "äärettömyyden pelosta" ja halusta välttää äärettömiä prosesseja, joita varten kehitettiin *suhteiden teoria* ja *ekshaustiomenetelmä*. Prosessin, kokoelman tai suuruuden äärettömyys ymmärrettiin mahdollisuutena sen loputtomaan jatkumiseen, mutta ei hyväksytty sen saattamista loppuun. Esimerkiksi luonnolliset luvut saatiin aloittamalla luvusta 1 ja lisäämällä sitä seuraavaan aina luku 1. Tuolloin ei hyväksytty "täydellistä listaa" kaikista sen alkioista. [6, s. 54]

Tilanteesta tulee erilainen, jos jono $x_1, x_2, x_3, \ldots$ lähestyy termiä α. Jos tämä termin α arvo on jotain yleisesti hyväksyttyä, kuten kappaleen pinta-ala tai tilavuus, nykypäivänä voitaisiin kirjoittaa $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$. Silloiset kreikkalaiset pyrkivät kuitenkin välttämään tällaista raja-arvon ottamista osoittamalla, että vastaus ei voi olla mikään muu kuin α kaksinkertaisella *reductio ad absurdum* -päättelyllä eli nykyajan epäsuoralla todistuksella. He siis osoittivat, että jos vastaus olisikin $\gamma \neq \alpha$, niin tapaukset $\gamma < \alpha$ ja $\gamma > \alpha$ johtavat ristiriitaan. [6, s. 54–55]

Suhteiden teoriassa luvun λ suuruus voidaan määrittää löytämällä rationaaliluvut a ja b, joille pätee $a < \lambda < b$, kun taas *ekshaustiomenetelmässä* yleistetään suhteiden teorian tilanne kappaleille (ja sen pinta-aloille ja tilavuuksille). Nämä molemmat keksi Eudoksus (n. 400–350 eaa.) ja ne selitetään *Alkeissa* [6, s. 56, 58].

2.3 Suhteiden teoria

Suhteiden teorian avulla geometrisia suureita (pituutta, pinta-alaa ja tilavuutta) voidaan käyttää ja kohdella samalla tavalla ja tarkkuudella kuin lukuja. Vaikka kreikkalaiset hylkäsivät irrationaaliluvut ja niiden olemassaolon, he hyväksyivät irrationaaliset suureet, kuten yksikköneliön lävistäjän. Teorian esityksen yksinkertaistamiseksi kutsutaan pituuksia *rationaalisiksi*, jos ne muodostavat ennalta annetun pituuden rationaalisen monikerran. Eudoksuksen mukaan pituus määräytyy sitä pidemmistä ja lyhyemmistä *rationaalipituuksista*. [6, s. 56]

Hänen mukaansa kahdelle pituudelle pätee $\lambda_1 = \lambda_2$, jos rationaalipituudelle λ, jolle pätee $\lambda < \lambda_1$, pätee myös $\lambda < \lambda_2$ ja kääntäen. Lisäksi pätee $\lambda_1 < \lambda_2$, jos on olemassa rationaalinen λ siten, että $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Tällä määrittelytavalla voidaan välttää äärettömyyksien käyttö, vaikka pituutta λ lyhyempien pituuksien β joukko on äärettömän suuri, koska otetaan eräs β. Teoria oli niin toimiva, että se viivästytti reaalilukujen teorian kehitystä noin 2000 vuotta, vaikka samalla periaatteella voitiin määritellä myös irrationaaliluvut ja -pituudet. [6, s. 56–57]

2.4 Ekshaustiomenetelmä

Hippokrates Khioslainen (n. 470–410 eaa.) todisti noin vuonna 430 eaa. ympyröiden pinta-alojen A_1 ja A_2 suhteen olevan sama kuin kyseisten ympyröiden säteiden r_1 ja r_2 neliöiden välinen suhde eli $A_1 : A_2 = r_1^2 : r_2^2$. Hänen on oletettu päässeen tähän tulokseen asettamalla molempiin ympyröihin *yhdenmuotoiset, säännölliset monikulmiot*, jotka olivat ympyröiden *sisäänpiirret-*

tyjä, ja lisäämällä näiden molempien monikulmioiden sivujanojen lukumäärää [3, s. 7]. Kreikkalaiset pyrkivät määrittämään käyräviivaisen kuvion S pinta-alan $a(S)$ ottamalla jonon monikulmioita $P_1, P_2, P_3, \ldots,$ jotka täyttävät kuvion S vastaavalla tavalla kuin Hippokrates teki tuloksensa määrittämisessä eli käyttämällä Eudoksuksen laatimaa *ekshaustiomenetelmää* [3, s. 16].

Ekshaustiomenetelmä on *suhteiden teorian* yleistys, jossa suureet selvitetään tunnettujen geometristen kuvioiden avulla, esimerkiksi ympyrän pinta-ala sisään- ja ympäripiirretyillä monikulmioilla ja pyramidin tilavuus päällekkäisillä särmiöillä. Molemmissa sovelletaan suhteiden teoriaa ja esimerkiksi kolmion pinta-alan kaavaa [6, s. 59]. Ympyröiden ja niiden säteiden välisen suhteen pystyy määrittämään seuraavasti:

Olkoot $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ympyrän C sisäänpiirretyt, säännölliset monikulmiot ja $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ ympyrän vastaavat, yhdenmuotoiset ympäripiirretyt, säännölliset monikulmiot. Tällöin voidaan osoittaa, että ympäri- ja sisäänpiirrettyjen monikulmioiden rajaaman alueen pinta-ala saadaan mielivaltaista $\epsilon > 0$ pienemmäksi eli $a(Q_k) - a(P_k) < \epsilon$, kun k on riittävän suuri. Tällöin voidaan päätellä, että sisäänpiirretyllä monikulmiolla P_k voidaan vastaavasti approksimoida myös ympyrän pinta-alaa eli $a(P_k) \approx a(C)$.

Valitsemalla ympyrät, joiden säteet ovat R ja R', merkitsemällä niiden vastaavat pinta-alat $C(R)$ ja $C(R')$ ja niiden sisäänpiirrettyjen monikulmioiden pinta-alat $P(R)$ ja $P(R')$, voidaan käyttää epäsuoraa todistusta osoittamaan, että tällöin

$$P(R) : P(R') = R^2 : (R')^2 \quad \text{ja} \quad C(R) : C(R') = R^2 : (R')^2.$$

Edellisen tapauksen ekshaustiossa ei ole äärettömän montaa vaihetta vaan näytetään epäsuorasti, että ympyröiden pinta-alojen ja niiden säteiden neliöiden suhteiden erisuuruisuus johtaa ristiriitaan [6, s. 58–60].

3 Arkhimedes

Arkhimedes (287–212 eaa.) oli antiikin ajan (Kreikan) merkittävin matematiikko ja yksi harvoista muinaisista matemaatikoista, jonka elämästä tiedetään paljon, sillä hän sai huomiota monilta klassisilta kirjailijoilta, kuten Plutarkhokselta, Liviukselta ja Cicerolta. Hän oli myös osallisena historiallisesti merkittävässä Syrakusan kaupungin piirityksessä, jonka seurauksena kaupunki päätyi Rooman valtakunnalle [6, s. 66]. Hän oli oman aikansa julkisuuden henkilö erilaisten keksintöjensä myötä, jotka olivat hänelle itselleen vain "geometrian leikkejä" [3, s. 29].

Arkhimedes tuotti elämänsä aikana monia erilaisia matemaattisia teoksia, joissa hän laajensi aikansa matemaattista tietämystä ratkaistakseen erilaisia matemaattisia ongelmia, jotka muistuttavat nykyajan integraalilaskentaa ja toimi sen ensiaskeleina [3, s. 30]. Hän todisti monien erilaisten geometristen kappaleiden pinta-aloja ja tilavuuksia, joista tässä tutkielmassa keskitytään ympyrän, ellipsin ja pallon pinta-alojen sekä pallon tilavuuden määrittämiseen. Arkhimedeen elämänvaiheista on erilaisia käsityksiä, ja hänen henkilökuvansa on rakentunut useiden kirjoitusten varaan.

3.1 Elämä

Arkhimedes syntyi vuonna 287 eaa. Syrakusan kaupungissa Sisiliassa, missä hän vietti ison osan elämästään ja tuotti useimmat tärkeimmät työnsä [6, s. 66]. Arkhimedes saattoi saada kiinnostuksensa matematiikkaan ja tieteeseen isältään Feidiakselta, joka oli tähtitieteilijä. Arkhimedeella oli läheiset välit Syrakusan silloisen hallitsijan, kuningas Hieron II, kanssa ja Plutarkhos uskoi hänen olleen sukua hallitsijalle [2, s. 10]. Arkhimedes sai aikanaan kunniaa monista keksinnöistään, kuten *Arkhimedeen ruuvista*, jonka hänen väitetään keksineen Egyptin matkallaan [2, s. 11], ja erilaisista sotakoneistaan, joita syrakusalaiset käyttivät roomalaisia vastaan ja jotka herättivät kauhua roomalaisten keskuudessa [3, s. 29].

Arkhimedeen kuolemasta on erilaisia käsityksiä, mutta hän kuoli, kun roomalaiset onnistuivat valloittamaan Syrakusan ja tappoivat hänet vuonna 212 eaa. vastoin roomalaisten silloisen sotapäällikön kenraali Marcelluksen vaatimusta. Arkhimedeen oli väitetty olleen niin kiintynyt työhönsä, ettei huomannut roomalaisten hyökkäystä kaupunkiin. Kun sotilas määräsi hänet tulemaan mukaansa, Arkhimedes kieltäytyi ja sotilas tappoi hänet suutuspäissään. Toisen tarinan mukaan Arkhimedes oli ratkaisemassa tehtävää ja pyysi sotilasta odottamaan, kunnes saisi ongelman ratkaistua. Kolmannessa versiossa hän oli menossa roomalaissotilaiden saattamana Marcelluksen luokse, mutta sotilaat tappoivat hänet, kun he luulivat Arkhimedeen kantamien matemaattisten välineiden olevan kultaa. [2, s. 30]

3.2 Keksintöjä

3.2.1 Hydrostatiikka

Arkhimedeen teoksessa *Kelluvista kappaleista* hän selittää hydrostatiikan perusteet propositioissaan: Kappale, jolla on sama massa kuin upotettavalla nesteellä, uppoaa juuri pinnan alapuolelle; kappale, joka on kevyempi kuin upotettava neste, uppoaa osittain eli kelluu ja jos se työnnetään pinnan alapuolelle, se ponnahtaa takaisin pinnalle, ja kappale, joka on raskaampi kuin upotettava neste, uppoaa pohjalle. [5, s. 91–92]

Arkhimedeen väitetään ratkaisseen *kruunuongelman*: Kuningas Hieron II halusi tietää, oliko hänen kruununsa aitoa kultaa vai oliko siinä käytetty myös hopeaa. Kuningas oli pyytänyt Arkhimedesta selvittämään asian ja hänellä oli vaikeuksia ratkaista ongelmaa. Kun Arkhimedes oli eräänä päivänä mennyt kylpyyn, hän ymmärsi että hänen kehonsa syrjäyttämä veden määrä riippuu siitä, kuinka suuri osa tämän vartalosta on vedessä. Arkhimedeen väitetään innostuneen oivalluksestaan niin paljon, että hän oli mennyt Syrakusan kaduille huutamaan alastomana *Heureka!* [2, s. 18–19]

Vitruvius väittää Arkhimedeen ratkaisseen ongelman tutkimalla kolmea eri esinettä, joilla on sama massa M: tutkittava kruunu, kultakimpale ja hopeakimpale. Olkoon kruunun massa $K = m_k + m_h$, missä m_k on kruunussa olevan kullan massa ja m_h kruunussa olevan hopean massa. Tällöin

1. kruunu syrjäyttää tietyn tilavuuden vettä, olkoon tämä V;
2. kultakimpale, jonka massa on M, syrjäyttää vettä tilavuuden V_1 verran. Tällöin kruunussa oleva kulta, jonka massa on m_k, syrjäyttää vettä tilavuuden $\frac{m_k}{K} \cdot V_1$ verran;
3. hopeakimpale, jonka massa on M, syrjäyttää vettä tilavuuden V_2 verran. Tällöin kruunussa oleva hopea, jonka massa on m_h, syrjäyttää vettä tilavuuden $\frac{m_h}{K} \cdot V_2$ verran.

Tällöin $V = \frac{m_k}{K} \cdot V_1 + \frac{m_h}{K} \cdot V_2$, jolloin $\frac{m_k}{m_h} = \frac{V_2 - V}{V - V_1}$ [5, s. 94].

Lopulta Arkhimedes sai selville, että kruunu ei ollutkaan täyttä kultaa vaan siihen oli sekoitettu myös hopeaa [2, s. 19].

3.2.2 Vetolaitteet

Arkhimedes oli rakentanut vetolaitteen, jolla hänen on väitetty saaneen sotalaiva *Syracusian* siirrettyä veteen. Tämä vetolaite oli talja, joka koostui kahdesta vetokappaleesta, joihin molempiin on kiinnitetty hihnapyöriä. Arkhimedeen väitetään lausuneen kuninkaalle, että annetun massan voi siirtää sopivalla voimalla. Tähän lausahdukseen on ehdotettu *barulkusta*; laitetta, jossa kela pyörii hammasrataksilla. Toiseen Arkhimedeen väitettyyn lausahdukseen ”Antakaa minulle paikka seistä ja siirrän Maan paikaltaan” on liitetty punnitsemiskone *charistion*, joka muodostuu ”ruuvillisista varsista”. [2, s. 14–16]

3.2.3 Arkhimedeen ruuvi

Arkhimedeen ruuvi on vesimassan nostamiseen tarkoitettu kone, jota on raporttien perusteella käytetty ainakin Egyptissä peltojen kasteluun ja Espanjassa poistamaan vettä kaivoksista. Myös Arkhimedeen on itse väitetty käyttäneen keksintöään pitääkseen sotalaiva *Syracusian* kuivana. Arkhimedeen ruuvi oli kiertävä puusylinteri, jonka korkeus oli yhtä monta jalkaa kuin montako sormea se on leveä, ja johon oli kiinnitetty kahdeksan potkuria. Näihin potkureihin oli laitettu joustavia, haarautuvia kierrekorkkeja, jotka muodostavat etanankuoren kaltaisen rakenteen, josta myös sen toinen nimi on peräisin. [2, s. 21–22]

3.2.4 Planetaario

Arkhimedes oli rakentanut systeemin, joka mukailee kuun eri vaiheita, tähtikuvioita ja eri taivaankappaleiden liikkeitä. Hän oli tehnyt varsinkin planetaarion rakentamisessa valtavan vaikutuksen ja se osoitti hänen poikkeuksellisen älykkyytensä, sillä kaikki systeemissä olleet taivaankappaleet liikkuivat toisistaan riippumattomasti ja mukaillen tähtitaivaan tilannetta. Arkhimedes itse näyttää kiinnittäneen enemmän huomiota planetaarionsa rakentamiseen kuin mihinkään muuhun keksintöönsä. Tämän vuoksi hän ilmeisesti teki poikkeuksen tavassaan olla jättämättä kirjallista todistusta keksinnöistään. Arkhimedeen kadonneista teoksista mainitaan *Pallon rakentamisesta*, joka ilmeisesti sisälsi ohjeet hänen keksintöjensä, kuten planetaarion, rakentamiseen. [2, s. 24–25]

3.3 Teokset ja niiden historiaa

Arkhimedeen tiedetään lähettäneen matemaattisia kirjoituksiaan virkatovereilleen Kononille, Dositheukselle ja Eratostheneelle Aleksandrian kaupunkiin Egyptiin. Kirjoituksissa oli esittelyteksti, joka sisälsi koosteen todistettavista propositioista ja joissa viitattiin aiemmin esitettyihin väittämiin, jolloin pystyttiin selvittämään Arkhimedeen teosten julkaisujärjestys. Yhdessä Arkhimedeen teoksen esittelytekstissä hän ehdotti Dositheusta Arkhimedeen ja Aleksandrian matemaatikkojen väliseksi viestittelijäksi. Dositheus myös kehotti Arkhimedesta lähettämään propositioihinsa täydet todistukset. [2, s. 33]

Aleksandriassa Arkhimedeen töitä olivat tutkineet hänen kolme kollegansa, jotka saattoivat edelleen levittää kirjoituksia muualle. Arkhimedeen kirjoituksia on kuitenkin kadonnut eikä kaikkia hänen väitettyjä töitään ole vielä tähänkään päivään mennessä löydetty. Yksi mahdollinen syy Arkhimedeen töiden katoamiseen saattoi johtua siitä, että hänen töitään ei oltu koottu yhteen ”kokoelmaan” vaan hän julkaisi niitä pienissä erissä. Pappuksen, Heronin ja Theonin kirjoitusten perusteella on varmaa, että 200- ja 300-luvuilla oli enemmän Arkhimedeen töitä tallella kuin tänä päivänä. Töitä saatettiin muuten vain tuhota tai niihin suhtauduttiin välinpitämättömästi, esimerkiksi eräs todistus teoksesta *Palloista ja sylintereistä* oli kadonnut jo 100-luvulla eaa. ja osa töistä saattoi tuhoutua Aleksandriassa olevan Serapeionin palossa vuonna 391. [2, s. 33–34]

Myöhemmin Arkhimedeen töistä alettiin tutustua enemmän hänen yksinkertaisempiin tuotoksiin, kuten *Palloista ja sylintereistä* ja *Ympyrän mittaamisesta*, joka saattaa olla kooste isommasta teoksesta nimeltään *Ympyrän kehästä* [2, s. 35, 222]. Eutokioksen kommentaarit Arkhimedeen teoksista osoittavat, että töihin haluttiin tutustua perinpohjaisesti: tästä saatiin merkkejä vuonna 532 Bysantissa (Itä-Rooma), kun paikalliset matemaatikot Anthemios ja Isidoros saivat keisari Justinianukselta tehtävän rakentaa Hagia Sofian kirkko Konstantinopoliin (nyk. Istanbul). [2, s. 35]

Kyseinen kaksikko oli kiinnostunut Arkhimedeen töistä ja varsinkin Isidoros ja tämän oppilaat jäivät historiaan, kun he käänsivät Arkhimedeen alkuperäisen ”Siculo-Dorian”-murteella kirjoitetut tekstit Attikan murteelle. He myös tutkivat sekä säilyttivät vanhoja merkittäviä matemaattisia teoksia aikana, jolloin matemaattiset lähteet olivat vähäisiä [2, s. 35–36]. Konstantinopolin tutkijat jatkoivat tätä säilyttämisen perinnettä ja he ottivat tavoitteekseen kerätä yhteen Arkhimedeen työt, mihin nähty vaiva johti tärkeiden koodeksien luontiin. Näistä länsimaiset matemaatikot saivat aikanaan tietonsa Arkhimedeen töistä. [2, s. 36]

800-luvulla Leon Thessalonikalainen antoi bysanttiinilaiselle tieteelle uuden vaihteen tekemällä kokoelman käsikirjoituksia (Codex A), joista tuli malliesimerkki kaikille niille käsikirjoituksille, joista voitiin päätellä Arkhimedeen kreikkalainen teksti ennen vuotta 1906. Konstantinopolista saattaa olla peräisin myös mekaniikan ja optiikan töiden kokoelma (Codex B), jota käytettiin 1200-luvulla valmistelemaan ensimmäistä Arkhimedeen työn käännöstä latinan kielelle. Sama pätee myös kuuluisalle käsikirjoitukselle (Codex C), jonka löytö 1800-luvun lopulla osoittautui auttavan hänen töidensä tuntemusta, mikä oli tuohon aikaan sekä tärkeää että yllättävää. Seuraavaksi annamme tarinan näille käsikirjoituksille ja niiden kohtaloille, jotka perustuvat Heibergin tutkimuksille. [2, s. 36]

Tekstit A ja B tulivat Länsi-Eurooppaan normanneilta ja saksalaisen hallitsijasuvun Hohenstaufenin perillisiltä, jotka hallitsivat aikanaan Sisilian saarta, jonne kehittyi uusi kulttuurillinen keskus ja jossa herätettiin älyllinen elämä kreikkalaisella tieteellä. Kun viimeinen saksalainen hallitsija Sisiliassa kuoli Beneventon taistelun jälkeen vuonna 1266, kaksi Arkhimedeen käsikirjoitusta siirtyi paavin haltuun ja vuonna 1491 tekstin A omistus siirtyi yksityishenkilölle. Teksti A sisälsi seitsemän eri Arkhimedeen teosta Eutokioksen kommentaareilla ja siitä onnistuttiin tekemään monia eri versioita ja käännöksiä yli 200 vuoden ajan. Näiden pohjilta saatiin luotettavimmat perusteet moderneille käännöksille. [2, s. 37]

Iso osa tekstistä A onnistuttiin kääntämään latinaksi vuonna 1269 flaamilaisen Vilhelm Moerbekelaisen toimesta. Alkuperäinen tekstin B latinalainen käännös löydettiin Roomasta vuonna 1884 ja siinä oli kirjaimellinen käännös seitsemästä Arkhimedeen työstä kommentaareineen. Moerbekelaisen käännöksessä käytettiin myös muita lähteitä ja se päätyi Länsi-Eurooppaan samalla tavalla kuin teksti A. Teksti B oli Roomassa vuonna 1508 ja siirtyi Vatikaaniin vuonna 1740. [2, s. 38]

Jacobus Cremonensis teki tärkeän tekstin A latinankielisen käännöksen vuonna 1450, ja Joannes Regiomontanus toi sen Saksaan noin vuonna 1468 ensimmäiseltä Italian-matkaltaan. Tätä ei kuitenkaan julkaistu, mutta se säilytettiin Nürnbergissä. [2, s. 39]

1500-luvulla alettiin ensimmäistä kertaa julkaista Arkhimedeen töitä kirjallisessa muodossa, joista vanhin on nykyään erittäin harvinainen napolilaisen matemaatikon Luca Gauricon kirja, joka julkaistiin Venetsiassa vuonna 1503. Tämän laajemman version julkaisi Nicolo Tartaglia vuonna 1543. Sekä Gauricon että Tartaglian painokset oli julkaistu latinaksi. Thomas Gechauff Venatorius julkaisi kaikki siihen mennessä tunnetut Arkhimedeen teokset sisältäneen "editio princeps" -kirjan sekä kreikaksi että latinaksi Eutokioksen kommentaareilla Baselissa vuonna 1544. Vuonna 1558 Venetsiassa Federigo Commandino julkaisi viisi tekstistä B otettua Arkhimedeen työn käännöstä. Myöhemmin vuonna 1565 Commandino sai myös teoksen *Kelluvista kappaleista* käännettyä, kuten myös Curtius Troianus, joka julkaisi oman versionsa samasta teoksesta. [2, s. 40-41]

Painettuja käännöksiä tehtiin myös 1500-luvun jälkeen. Vuonna 1615 Pariisissa David Rivault julkaisi oman käännöksensä, joka oli myös vanhin käännös, johon perustui vuonna 1670 valmistunut saksankielinen käännös. 1800-luvulla tehtiin lisää käännöksiä, kun kaikki siihen mennessä tunnetut Arkhimedeen työt saatiin käännettyä ranskaksi vuonna 1807 ja saksaksi 1824. Aiemmin 1600-luvulla Englannissa ja Italiassa käännettiin arabialaisen matemaatikon Thabit ibn Qurranin (826–901) arabiankielisiä versioita kreikkalaisten töistä, jotka saatiin käännettyä latinaksi. [2, s. 42–43]

Vuonna 1899 Heiberg löysi sensaatiomaisesti uuden Arkhimedeen käsikirjoituksen (Codex C), koska hän kiinnitti huomionsa raporttiin, jossa mainittiin Pyhän haudan kirkon luostarin kirjastossa Jerusalemissa ollut matemaattisia tekstejä sisältänyt palimpsesti. Heiberg tutki palimpsestia vuosina 1906–1908 ja se osoittautui sisältävän 900-luvulta peräisin olevan Arkhimedeen tekstin, joka oli yritetty pyyhkiä pois joskus 1100–1300-luvulla. Hän onnistui päättelemään palimpsestin sisällön, jossa oli varsinkin iso osa teoksen *Kelluvista kappaleista* tekstiä kreikaksi ja lähes täydellinen teksti aiemmin täysin tuntemattomasta Arkhimedeen työstä, jolle annettiin nimi *Metodi.* [2, s. 44]

Teksti C on tarjonnut uuden käsityksen Arkhimedeen ajattelutavasta ja sisältää osia muista teoksista, jotka eivät luonnollisesti sisältyneet vuonna 1897 julkaistuun englanninkieliseen Arkhimedeen töiden kokoelmaan. Ensimmäinen versio, joka sisältää kaikki nykyään tunnetut teokset, on Heibergin 2.

painos kreikkalaisesta tekstistä, johon kaikki nykyiset käännökset perustuvat. [2, s. 45]

Arkhimedeelta on historian saatossa kadonnut paljon kirjoituksia, joihin hän viittaa omissa töissään, mutta hänen tiedetään tehneen ainakin kymmenen teosta ja näiden tunnettujen töiden julkaisujärjestys oli

1. Tasojen tasapaino Kirja I
2. Paraabelin neliöimisestä
3. Tasojen tasapaino Kirja II
4. Metodi
5. Palloista ja sylintereistä
6. Spiraaleista
7. Konoideista ja sferoideista
8. Kelluvista kappaleista
9. Ympyrän mittaamisesta
10. Hiekanlaskija

Lisäksi Arkhimedes julkaisi muun muassa teokset *Stomachion*, *Lemmat* ja *Karjaongelma* [2, s. 45–46]. Vaikka Arkhimedeen töitä on historian saatossa kadonnut, niistä tiedetään vanhojen kirjoitusten ja raporttien perusteella [2, s. 47–48], että

1. Arkhimedes oli tutkinut puolisäännöllisiä monitahokkaita;
2. *Hiekanlaskijassa* Arkhimedes lainaa vanhempaa teostansa, jolle on annettu nimeksi *Periaatteet* tai *Lukujen nimeäminen*;
3. *Tasojen tasapainosta* ei sisällä kaikkia Arkhimedeen tekstejä, ja tämän teoksen ensimmäinen kirja saattaa olla ote suuremmasta teoksesta, jonka nimi on *Mekaniikan elementit*;
4. Arkhimedes oli tutkinut valon taittumista ja tehnyt teoksen optiikasta;
5. Arkhimedeen on väitetty tehneen teoksen vesikelloista ja
6. hänelle on nimetty monia planimetrisia töitä.

4 Ympyrä

4.1 Ympyrän pinta-ala

Joskus muinoin huomattiin, että r-säteisen ympyrän pinta-ala A on verrannollinen neliön pinta-alaan, jonka sivun pituus on sama r eli $A = \pi_1 r^2$. Myös Hippokrates oli tutkinut tätä, kuten luvussa 2.4 mainittiin. Vastaavasti myös ympyrän kehän c ja halkaisijan d pituudet ovat verrannolliset eli $c = \pi_2 d$. Ei ole täyttä varmuutta siitä, milloin huomattiin että näissä molemmissa tapauksissa pätee $\pi_1 = \pi_2 = \pi$, mutta tämän hetkisen tiedon mukaan Arkhimedes antoi teoksessaan *Ympyrän mittaamisesta* ensimmäisen todistuksen tälle selvittäessään ympyrän pinta-alaa [3, s. 31]. Hän todisti ympyrän pinta-alan A olevan sama kuin sellaisen kolmion, jonka kannan pituus on ympyrän kehä c ja korkeus on säde r eli

$$A = \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r \cdot \pi d = \frac{1}{2}r \cdot 2r\pi = \pi r^2. \tag{4.1}$$

Tämä yhtälö tunnettiin jo ennen Arkhimedesta ja se voitiin johtaa viipaloimalla ympyrä yhteneviin tasakylkisiin kolmioihin, joilla kaikilla on yhteinen kärkipiste ympyrän keskipisteessä ja joiden korkeus "lähestyy" ympyrän sädettä r. Tällöin viipaleet voidaan järjestellä "suunnikkaaksi", jonka korkeus on r ja kannan pituus puolet kehän pituudesta $\frac{1}{2}c$.

Todistukseen tarvitaan kahta seuraavaa tulosta [3, s. 31]:

Lause 1. *Olkoon ympyrä, jonka kehän pituus on c, P ympyrän sisäänpiirretty monikulmio ja Q vastaava ympäripiirretty monikulmio. Tällöin monikulmion P kehälle p ja monikulmion Q kehälle q pätee*

$$p < c < q.$$

Lause 2. *Olkoon ympyrän pinta-ala A ja $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa sisäänpiirretty monikulmio P, jonka pinta-alalle pätee $a(P) > A - \epsilon$ sekä ympäripiirretty monikulmio Q, jonka pinta-alalle pätee $a(Q) < A + \epsilon$.*

Nyt voidaan laskea ympyrän pinta-ala:

Lause 3. *Olkoon ympyrä, jonka säde on $r > 0$ ja kehä $c > 0$. Tällöin ympyrän pinta-ala on $A = \frac{1}{2}rc$.*

Todistus. Käytetään *reductio ad absurdum* -menetelmää eli epäsuoraa todistusta. Oletetaan siis, että $A \neq \frac{1}{2}rc$ eli $A > \frac{1}{2}rc$ tai $A < \frac{1}{2}rc$.

Olkoon $A > \frac{1}{2}rc$. Olkoon $\epsilon = A - \frac{1}{2}rc > 0$ ja ympyrän sisäänpiirretty säännöllinen monikulmio P, jossa on n kulmaa, ja jonka pinta-alalle pätee lauseen 2 nojalla

$$a(P) > A - \epsilon = \frac{1}{2}rc.$$

Tällöin monikulmio P voidaan paloitella n tasakylkiseksi kolmioksi, jonka kannan sivun pituus on p_n ja korkeus r_n, jolloin lauseen 1 nojalla

$$r_n < r \quad \text{ja} \quad np_n < c.$$

Tällöin

$$a(P) = n \cdot \frac{1}{2}p_n r_n = \frac{1}{2}r_n \cdot (np_n) < \frac{1}{2}rc,$$

mutta tämä on ristiriita, koska piti olla $a(P) > \frac{1}{2}rc$.

Olkoon seuraavaksi $A < \frac{1}{2}rc$. Olkoon $\epsilon = \frac{1}{2}rc - A > 0$ ja ympyrän ympäripiirretty säännöllinen monikulmio Q, jossa on n kulmaa, ja jonka pinta-alalle pätee lauseen 2 mukaan

$$a(Q) < A + \epsilon = \frac{1}{2}rc.$$

Tällöin monikulmio Q voidaan paloitella n tasakylkiseksi kolmioksi, jonka kannan sivun pituus on q_n ja korkeus R_n, jolloin lauseen 1 nojalla

$$R_n > r \quad \text{ja} \quad nq_n > c.$$

Tällöin

$$a(Q) = n \cdot \frac{1}{2}q_n R_n = \frac{1}{2}R_n \cdot (nq_n) > \frac{1}{2}rc,$$

mikä on myös ristiriita eli tällöin täytyy olla $A = \frac{1}{2}rc$. □

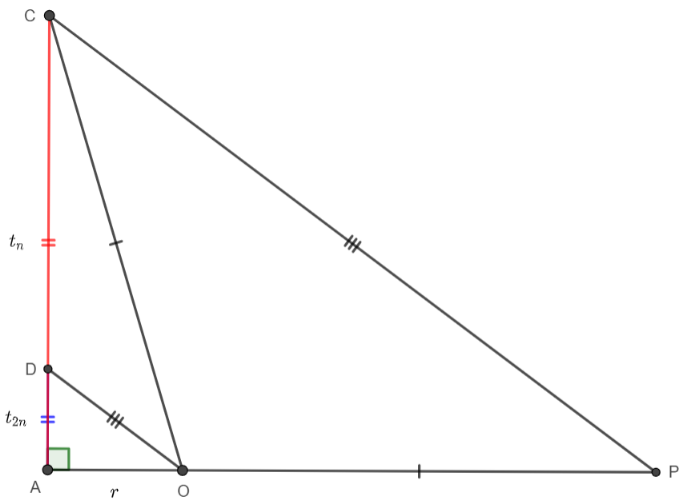
4.2 Piin likiarvo

Muistutetaan vielä, että egyptiläiset olivat määrittäneet ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen eli piin likiarvon $\pi \approx 3{,}16$ ja babylonialaiset saivat arvon $\pi \approx 3$. Arkhimedes määritti vielä tarkemman piin arvon

$$3\frac{10}{71} \approx 3{,}1408 < \pi < 3\frac{10}{70} = 3\frac{1}{7} \approx 3{,}1429 \tag{4.2}$$

mikä eroaa tarkasta piin arvosta noin tuhannesosan. Arkhimedes käytti ekshaustiomenetelmää ympyrälle aloittaen säännöllisistä kuusikulmioista ja kaksinkertaistamalla monikulmion sivujanojen lukumäärää 96-kulmioon asti [3, s. 31–33]. Huomautetaan, että Arkhimedes eivätkä muutkaan kreikkalaiset käyttäneet merkintää π kuvaamaan ympyrän kehän ja halkaisijan välistä suhdetta [1, s. 113]. Määritetään seuraavaksi yhtälössä (4.2) olevat piin ala- ja ylärajat, aloittaen säännöllisistä, ympäripiirretyistä monikulmioista.

Tutkitaan ympyrää, jonka säde on $AO = r > 0$ ja keskipiste O, ja olkoon n positiivinen kokonaisluku. Olkoon säännöllinen, ympäripiirretty monikulmio, jossa kärkiä on $6 \cdot 2^{n-1}$ ja jonka sivun pituuden puolikas on $AC = t_n$. Puolitetaan kulma $\angle COA$, jolloin muodostuu kulma $\angle DOA = \frac{1}{2} \cdot \angle COA$ ja sivulle AC muodostuu piste D. Olkoon säännöllisen, ympäripiirretyn $6 \cdot 2^n$-kulmion sivun pituuden puolikas $AD = t_{2n}$.



Kuva 4.1: Piin approksimointi ympäripiirretyn, säännöllisen monikulmion tapauksessa.

Olkoon suoralla AO piste P siten, että jana CP on yhdensuuntainen janan OD kanssa. Tällöin kolmio $\triangle ADO$ on suorakulmainen ja sen kärjessä O olevan kulman suuruus on sama kuin kolmion $\triangle ACP$ kärkeen P muodostuva kulma vuorokulmalauseen nojalla. Täten $\triangle ADO \sim \triangle ACP$. Koska janat CP ja OD ovat yhdensuuntaiset, niin myös kolmion $\triangle CDO$ kärkeen O ja kolmion $\triangle COP$ kärkeen C muodostuvat kulmat ovat yhtä suuret vuorokulmalauseen nojalla. Lisäksi kulmat $\angle AOD$ ja $\angle DOC$ ovat yhtenevät, joten kolmiossa $\triangle COP$ on yhtenevät kantakulmat kärjissä C ja P, jolloin $OC = OP$.

Nyt Pythagoraan lauseen mukaan kolmiolle $\triangle ACO$ pätee

$$(AC)^2 + (OA)^2 = (OC)^2 \iff t_n^2 + r^2 = (OC)^2 \iff OC = \sqrt{r^2 + t_n^2}.$$

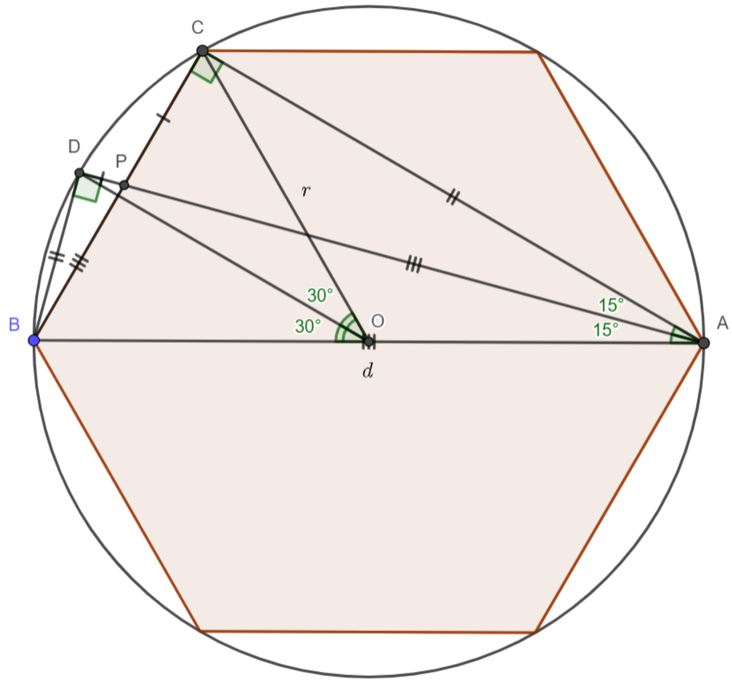
Tällöin kolmioiden vastinsivuille pätee

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AC}{AP} \iff \frac{AD}{AO} = \frac{AC}{AO + OP} = \frac{AC}{AO + OC},$$

missä

$$t_{2n} = AD = \frac{rAC}{AO + OC} = \frac{rt_n}{r + \sqrt{r^2 + t_n^2}}. \tag{4.3}$$

Tutkitaan seuraavaksi sisäänpiirrettyjä, säännöllisiä monikulmioita.



Kuva 4.2: Piin approksimointi sisäänpiirretyllä, säännöllisellä monikulmiolla, jossa on $6 \cdot 2^{n-1}$ kärkeä, ja yhdenmuotoisilla kolmioilla. Kuvan tilanteessa $n = 1$ eli monikulmiolla on 6 kärkeä.

Olkoot monikulmion, jossa on $6 \cdot 2^{n-1}$ kärkeä, sivun pituus $s_n = BC$, ympyrän keskipiste O ja halkaisija $AB = d = 2r$. Tällöin muodostuu keskuskulma $\angle COB$. Puolitetaan tämä kulma, jolloin kaarelle BC saadaan piste D ja kulma $\angle DOB = \frac{1}{2} \cdot \angle COB$. Nyt Thaleen lauseen nojalla kolmio $\triangle ABC$ on suorakulmainen, kehäkulmalauseen nojalla $\angle CAB = \frac{1}{2} \cdot \angle COB$ ja $\angle DAB = \frac{1}{2} \cdot \angle DOB$. Täten AD puolittaa kulman $\angle CAB$. Olkoon $6 \cdot 2^n$-kulmion sivun pituus $s_{2n} = BD$.

Olkoon P janan AD ja sivun BC leikkauspiste. Tällöin muodostuu kolmiot $\triangle ABD$, $\triangle BPD$ ja $\triangle APC$, jotka ovat keskenään yhdenmuotoiset; tämä voidaan osoittaa käyttämällä kehäkulmalausetta.

Tällöin kolmen edellämainitun kolmion vastinsivuille pätee

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{BD} \quad \text{ja} \quad \frac{AC}{AD} = \frac{PC}{BD}.$$

Pythagoraan lauseen mukaan kolmiolle $\triangle ABD$ pätee

$$AD^2 + BD^2 = AB^2 \iff AD^2 + s_{2n}^2 = d^2 \iff AD = \sqrt{d^2 - s_{2n}^2}.$$

Pythagoraan lauseen mukaan kolmiolle $\triangle ABC$ pätee

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \iff AC^2 + s_n^2 = d^2 \iff AC = \sqrt{d^2 - s_n^2}.$$

Nyt

$$\frac{AB + AC}{AD} = \frac{BP + PC}{BD} = \frac{BC}{BD},$$

eli

$$\frac{d + \sqrt{d^2 - s_n^2}}{\sqrt{d^2 - s_{2n}^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}}.$$

Ristiinkertomalla ja neliöimällä edellinen yhtälö saadaan

$$s_{2n}^2(2d^2 + 2d\sqrt{d^2 - s_n^2} - s_n^2) = d^2 s_n^2 - s_n^2 s_{2n}^2,$$

mikä voidaan kirjoittaa muodossa

$$2ds_{2n}^2(d + \sqrt{d^2 - s_n^2}) - s_n^2 s_{2n}^2 = d^2 s_n^2 - s_n^2 s_{2n}^2.$$

Lisäämällä ensin yhtälön molemmin puolin termi $s_n^2 s_{2n}^2$ ja sitten jakamalla termillä $2d$, saadaan

$$s_{2n}^2 = \frac{ds_n^2}{2(d + \sqrt{d^2 - s_n^2})}. \tag{4.4}$$

Olettamalla tutkittavan ympyrän säteeksi $r = 1$ ja sijoittamalla $s_6 = 1$ ja $t_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ yhtälöihin (4.3) ja (4.4), saadaan rekursiivisesti määritettyä

$$s_{96} = 0{,}065438 \quad \text{ja} \quad t_{96} = 0{,}032737.$$

Nyt monikulmion piirin ja halkaisijan suhteeksi saadaan

$$\frac{96s_{96}}{2} = 48s_{96} = 3{,}141024 < \pi < 3{,}142752 = \frac{96 \cdot 2t_{96}}{2} = 96t_{96}.$$

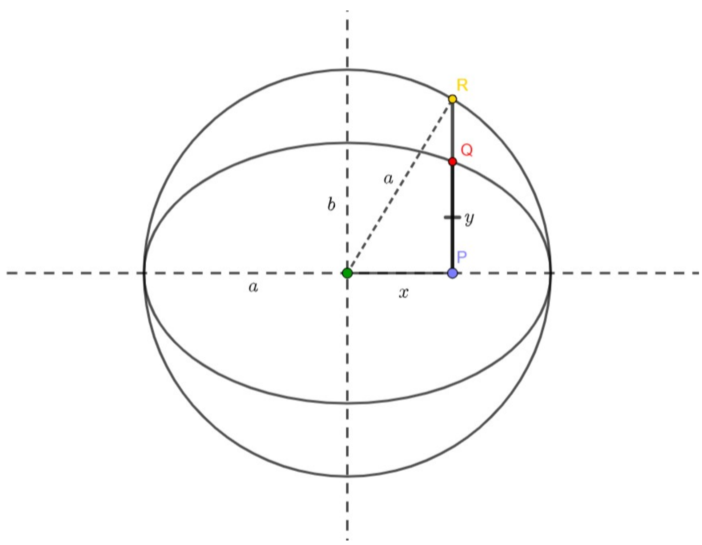
Arkhimedes ei kuitenkaan laskenut piin likiarvoa rekursiivisesti tällä tavalla vaan hän sai yhtälön (4.2) tilanteen pyöristämällä s_n ja t_n arvoja ja käyttämällä luvun $\sqrt{3}$ approksimaatioita. Arkhimedeen omasta tavasta määrittää piin likiarvo puhutaan tarkemmin luvussa 7.

5 Ellipsin pinta-ala Arkhimedeen tapaan

Arkhimedes onnistui teoksessaan *Konoideista ja sferoideista* todistamaan ellipsin pinta-alaksi $A = \pi ab$, missä a ja b ovat ellipsin puoliakselit. Arkhimedes aloitti ellipsin pinta-alan määrittämisen ellipsin karakteristisella ominaisuudella

$$PQ = \frac{b}{a} PR \quad \text{eli} \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{b}{a}, \tag{5.1}$$

missä hän soveltaa ellipsin isoakselilla olevan pisteen P etäisyyttä sen yläpuolella oleviin ellipsin ja ympäripiirretyn a-säteisen ympyrän C' vastaaviin pisteisiin Q ja R.



Kuva 5.1: Ellipsin karakteristinen ominaisuus

Ominaisuus 5.1 voidaan perustella nykymerkinnöin seuraavalla tavalla: Olkoon origokeskinen ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tällöin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2} = 1 \iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \iff y = \pm\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Merkitsemällä $PQ = y$ ja $PR = \sqrt{a^2 - x^2}$ saadaan yhtälön (5.1) tilanne.

Ympäripiirretyn ympyrän C' lisäksi Arkhimedes laati toisen ympyrän C'', jonka säde on $r = \sqrt{ab}$, ja pyrki todistamaan, että ellipsin pinta-ala on

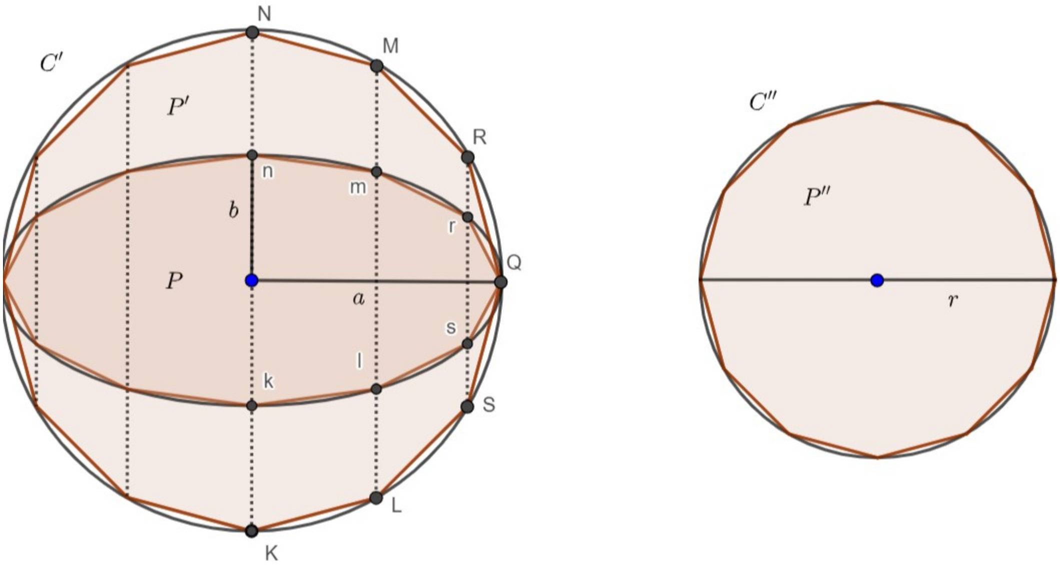
$$a(E) = a(C'') = \pi r^2 = \pi ab. \tag{5.2}$$

Tämän todistus perustuu Edwardsin kirjaan [3, s. 40–42]:

Lause 4. *Olkoon ellipsin E puoliakselit $a > 0$ ja $b > 0$. Olkoon ympyrä C'', jonka säde on $r = \sqrt{ab}$. Tällöin ellipsin E pinta-ala on*

$$a(E) = a(C'') = \pi r^2 = \pi ab.$$

Todistus. Käytetään *reductio ad absurdum* -menetelmää eli epäsuoraa todistusta ja oletetaan, että $a(E) \neq a(C'')$. Tällöin pätee $a(E) < a(C'')$ tai $a(E) > a(C'')$.



Kuva 5.2: Ellipsi E ja sen ympäripiirretty ympyrä C', ympyrä C'' ja niiden sisäänpiirretyt $4n$-kulmiot. Kuvan tilanteessa $n = 3$.

Olkoon $a(E) < a(C'')$ ja $\epsilon = a(C'') - a(E) > 0$. Olkoon P'' ympyrän C'' sisäänpiirretty, säännöllinen monikulmio, jossa on $4n$ kulmaa, ja jonka pinta-alalle pätee lauseen 1 nojalla

$$a(P'') > a(C'') - \epsilon = a(C'') - \big(a(C'') - a(E)\big) = a(E). \tag{5.3}$$

Olkoon P' yhdenmuotoinen säännöllinen monikulmio kuin P'', mutta ympyrän C' sisäänpiirretty, jolloin vastinosien suhteiden nojalla

$$\frac{a(P'')}{a(P')} = \frac{r^2}{a^2} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}. \tag{5.4}$$

Olkoon seuraavaksi P ellipsin E sisäänpiirretty $4n$-kulmio, jonka kärjet sijaitsevat ellipsin vaaka-akselin suhteen kohtisuoraan monikulmion P' kärjistä piirrettyjen jänteiden leikkauspisteissä.

Nyt monikulmiot P ja P' voidaan paloitella vastaaviksi kolmiopareiksi, kuten $\triangle Qrs$ ja $\triangle QRS$, sekä puolisuunnikaspareiksi, kuten $\square klmn$ ja $\square KLMN$. Huomataan, että puolisuunnikkaiden yhdensuuntaisille kannoille pätee

$$\frac{lm}{LM} = \frac{kn}{KN} = \frac{b}{a}.$$

Koska kyseisillä puolisuunnikkailla on sama korkeus h, niin myös niiden pinta-aloille pätee

$$\frac{a(\square klmn)}{a(\square KLMN)} = \frac{\frac{h(kn+lm)}{2}}{\frac{h(KN+LM)}{2}} = \frac{kn+lm}{KN+LM} = \frac{\frac{b}{a}(KN+LM)}{KN+LM} = \frac{b}{a}.$$

Vastaavasti myös kolmioilla $\triangle Qrs$ ja $\triangle QRS$ on sama korkeus h ja niille pätee

$$\frac{rs}{RS} = \frac{b}{a} \quad \text{ja} \quad \frac{a(\triangle Qrs)}{a(\triangle QRS)} = \frac{b}{a}.$$

Täten myös säännöllisten monikulmioiden P ja P' pinta-aloille pätee

$$\frac{a(P)}{a(P')} = \frac{b}{a}. \tag{5.5}$$

Nyt yhtälöistä (5.4) ja (5.5) saadaan $a(P) = a(P'') > a(E)$ eli ellipsin sisäänpiirretyn monikulmion pinta-ala on suurempi kuin itse ellipsin pinta-ala. Tämä on ristiriita.

Todistetaan seuraavaksi tapaus $a(E) > a(C'')$. Olkoon ellipsin E sisäänpiirretty monikulmio P, jossa on $4n$ kulmaa ja jonka pinta-alalle pätee

$$a(P) > a(C'').$$

Olkoon ympyrän C' sisäänpiirretty säännöllinen monikulmio P', jonka kärjet sijaitsevat ellipsin vaaka-akselin suhteen kohtisuoraan monikulmion P kärjistä piirrettyjen jänteiden jatkeiden leikkauspisteissä. Olkoon myös vastaava ympyrän C'' sisäänpiirretty säännöllinen monikulmio P''. Tällöin laskemalla samalla tavalla kuin aikaisemmin saadaan

$$\frac{a(P)}{a(P')} = \frac{b}{a} = \frac{a(P'')}{a(P')},$$

jolloin $a(P) = a(P'') > a(C'')$, mikä on myös ristiriita. Täten koska molemmat tapaukset johtivat ristiriitaan, täytyy päteä yhtälön (5.2) tilanne. $\square$

6 Pallo Arkhimedeen tapaan

Ennen Arkhimedeen kuolemaa hän oli pyytänyt läheisiään kaivertamaan hautaansa sylinterin Z, joka oli ympäripiirretty pallon B suhteen. Tämä tilanne kuvaa hänen lempitulostaan, jonka mukaan näiden kahden kappaleen tilavuuksilla V ja pinta-aloilla A on täsmälleen sama suhde, joka on $2 : 3$, eli

$$V(B) : V(Z) = 2 : 3 \quad \text{ja} \quad A(B) : A(Z) = 2 : 3.$$

Kun Marcellus kuuli Arkhimedeen kuolemasta, hän toteutti tämän toiveen ja kaiversi kyseisen kuvan hautaan [6, s. 67]. Tämän sylinterin tilavuus ja pinta-ala ovat

$$V(Z) = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \quad \text{ja} \quad A(Z) = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2,$$

jolloin pallon tilavuus ja pinta-ala ovat

$$V(B) = \frac{2}{3}V(Z) = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{6.1}$$

ja

$$A(B) = \frac{2}{3}A(Z) = \frac{2}{3} \cdot 6\pi r^2 = 4\pi r^2. \tag{6.2}$$

Arkhimedes todisti pallon tilavuuden (6.1) ja pinta-alan (6.2) kaavat teoksessaan *Palloista ja sylintereistä*, ja ne molemmat on saatettu johtaa samankaltaisella päättelyllä kuin ympyrän pinta-alassa eli paloittelemalla pallo pyramideiksi, joiden huiput ovat pallon keskipisteessä. Tällöin pyramidien pohjien pinta-alat ”lähestyvät” pallon pinta-alaa ja korkeus sädettä, jolloin

$$V(B) = \frac{1}{3}rA(B). \tag{6.3}$$

Arkhimedes johti pallon pinta-alan kaavan (6.2) tilavuuden kaavasta (6.1), sillä teoksessaan *Metodi* hän kertoo: ”Lauseesta, jonka mukaan pallo on neljä kertaa niin suuri kuin kartio, jonka pohja on pallon suurin ympyrä ja jonka korkeus on sama kuin pallon säde, ymmärsin, että minkä tahansa pallon pinta-ala on neljä kertaa niin suuri kuin sen suurin ympyrä; sillä päättelemällä että ympyrä on yhtä suuri kuin kolmio, jonka kanta on sama kuin ympyrän kehä ja korkeus ympyrän säde, tajusin että, vastaavalla tavalla, mikä tahansa pallo on yhtä suuri kuin kartio, jonka pohja vastaa pallon pinta-alaa ja korkeus sen sädettä (eli nykymerkinnöin yhtälöä (6.3)).” [3, s. 43–44]

6.1 Pallon tilavuus

Arkhimedes saattoi todistaa pallon tilavuuden *vipulain* avulla teoksessaan *Metodi* [3, s. 69]. Teoksen esipuheessa Arkhimedes mainitsee ”tietyn erityisen menetelmän, joka mahdollistaa tunnistamaan matemaattisia ongelmia mekaniikan avulla. Olen vakuuttunut, että tämä [vipulaki] ei ole vähemmän hyödyllinen samojen lauseiden todistamisiin.” Lisäksi Arkhimedes kirjoittaa, kuinka jotkin asiat tulivat hänelle selviksi ensin vipulailla ja että ”on helpompaa antaa todistus, kun olemme aiemmin hankkineet [uudella] menetelmällä jotain tietoa kuin löytää se ilman aiempaa tietoa.” [2, s. 314]

Metodissa Arkhimedes todistaa muun muassa propositionsa, jonka mukaan paraabelisegmentin APB pinta-ala on $a(APB) = \frac{4}{3}\triangle APB$, missä jana AB on kolmion kanta ja piste P on kauimmaisin piste janasta AB [3, s. 36]. Arkhimedes oli kuitenkin jossain määrin epäilevänen tämän käyttämistä varsinaisena todistuksena, sillä hän kertoo kyseisen proposition todistuksen jälkeen, ettei kuitenkaan varsinaisesti todistanut väittämää vaan loi vaikutelman, jonka mukaan väite on totta [2, s. 316, 318]. Arkhimedes ajatteli paraabelisegmentin koostuvan kaikista sen leikkauspinnoista, sillä hän käyttää kuvissa ilmaisuja ”kaikki sen suorat” tai ”kaikki sen ympyrät”, mikä tarkoittaa samankaltaista infinitesimaalien käyttöä, kuten nykypäivän integraaleissa [2, s. 321].

Arkhimedeen käyttämä ”menetelmä” eli vipulaki on:

Määritelmä 5. Olkoon vipu, jonka tukipiste on P. Vipulain yhtälö on

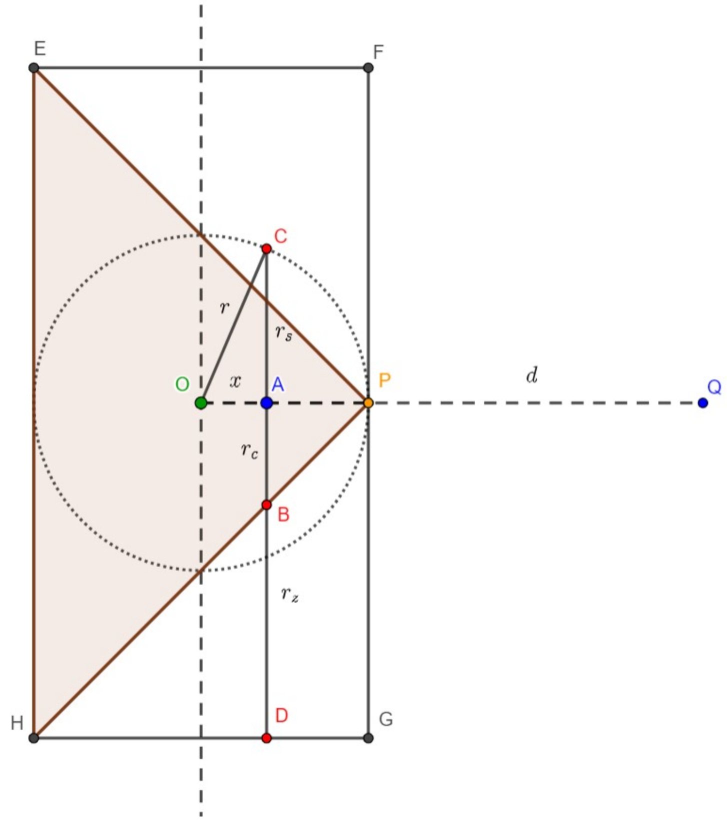
$$\sum_{i=1}^{p} m_i d_i = \sum_{j=1}^{q} m'_j d'_j, \tag{6.4}$$

missä $m_1, m_2, \ldots, m_p$ ovat massapisteitä ja $d_1, d_2, \ldots, d_p$ ovat edellä mainittujen massapisteiden etäisyydet vivun tukipisteeseen P yhdellä puolella, ja $m'_1, m'_2, \ldots, m'_q$ ja $d'_1, d'_2, \ldots, d'_q$ ovat vastaavat massapisteet ja niiden etäisyydet tukipisteeseen P vivun toisella puolella.

Seuraavaksi esitetään lause ja todistus, jossa määritetään pallon tilavuuden kaava samalla tavalla kuin Arkhimedes teoksessaan *Metodi*. Todistuksessaan Arkhimedes muodosti konstruktion, joka esitetään kuvassa 6.1 [3, s. 71–72]. Todistuksessa käytetään hyödyksi koordinaatistoa.

Lause 6. *Olkoon pallo, jonka säde on $r > 0$. Tällöin pallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.*

Todistus. Olkoon O origo, Y origokeskinen ympyrä $x^2+y^2=r^2$, ja x-akselin piste $P=(r,0)$. Olkoon suorakulmio $\square EFGH$, jonka keskipiste on O, kanta $d=2r$ ja korkeus $2d$, ja kolmio $\triangle EPH$, kuten kuvassa 6.1.



Kuva 6.1: Arkhimedeen konstruktio, jossa on ympyrä Y katkoviivalla, suorakulmio $\square EFGH$ ja kolmio $\triangle EPH$ ruskealla.

Kierretään kaikki kolme kappaletta x-akselin ympäri yksi kierros, jolloin muodostuu pyörähdyskappaleet pallo S, sylinteri Z ja kartio C. Näiden kolmiulotteisten pyörähdyskappaleiden voidaan ajatella koostuvan x-akselia vastaan kohtisuorista leikkauspinnoista, jotka ovat kaikki ympyröitä.

Valitaan leikkauskohdaksi janan OP piste $A=(x,0)$. Tällöin muodostuu pallon leikkauspinta S_x, kartion leikkauspinta C_x ja sylinterin leikkauspinta Z_x, joiden säteet ovat vastaavasti $r_s=AC$, $r_c=AB$ ja $r_z=AD=d$. Tällöin merkitsemällä $OA=x$ ja $OC=r$, kolmiolle $\triangle OAC$ pätee Pythagoraan lauseen nojalla

$$(OA)^2+(AC)^2=(OC)^2 \iff x^2+r_s^2=r^2 \iff r_s=\sqrt{r^2-x^2}.$$

Toisaalta huomataan, että kolmio $\triangle ABP$ on tasakylkinen ja sivulle AB pätee

$$r_c = AB = AP = OP - OA = r - x.$$

Nyt leikkauspintojen pinta-aloille pätee

$$\begin{aligned}
d\Big(a(S_x) + a(C_x)\Big) &= \pi d(r_s^2 + r_c^2) \\
&= \pi d\Big((\sqrt{r^2 - x^2})^2 + (r-x)^2\Big) \\
&= \pi d\Big((r^2 - x^2) + r^2 - 2rx + x^2\Big) \\
&= \pi d(2r^2 - 2rx) \\
&= 2\pi r d(r - x) \\
&= \pi d^2(r - x) = (r - x)a(Z_x).
\end{aligned}$$

Toisin sanoen jos on olemassa vipu, jonka tukipiste on P, niin tämä systeemi on tasapainossa, kun pisteessä A on ympyrä Z_x ja pisteessä $Q = (3r, 0)$ ympyrät S_x ja C_x. Täten jos pallon S ja kartion C massakeskipisteet ovat pisteessä Q ja sylinterin Z pisteessä O, niin vipulain mukaan

$$2r\Big(V(S) + V(C)\Big) = rV(Z). \tag{6.5}$$

Nyt sijoittamalla kartion tilavuuden $V(C) = \frac{1}{3}\pi d^2 \cdot d$ ja sylinterin tilavuuden $V(Z) = \pi d^2 \cdot d$ saadaan selvitettyä yhtälön (6.5) molemmat puolet

$$2r\Big(V(S) + V(C)\Big) = d\Big(V(S) + \frac{\pi d^3}{3}\Big) = d \cdot V(S) + \frac{\pi d^4}{3} \quad \text{ja}$$

$$rV(Z) = \frac{1}{2}d \cdot \pi d^2 \cdot d = \frac{\pi d^4}{2}.$$

Tällöin yhtälöstä (6.5) voidaan ratkaista pallon tilavuudeksi

$$d \cdot V(S) + \frac{\pi d^4}{3} = \frac{\pi d^4}{2} \iff 6d \cdot V(S) + 2\pi d^4 = 3\pi d^4 \iff V(S) = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

joka voidaan kirjoittaa säteen suhteen muodossa

$$V(S) = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi(2r)^3 = \frac{8}{6}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$\square$

6.2 Pallon pinta-ala

Arkhimedes todisti pallon pinnan S pinta-alan kaavan $S = 4\pi r^2$ ympyrän ja sen sisään- ja ympäripiirrettyjen, säännöllisten monikulmioiden P ja Q avulla tutkimalla näiden kahden monikulmion muodostamaa pyörähdyskappaletta. Laskemalla monikulmioiden P ja Q pyörähdyskappaleiden pinta-alat saadaan pallon pinta-alalle ala- ja yläraja. Aloitetaan laskemalla näiden kahden monikulmion pyörähdyskappaleen pinta-alat [3, s. 50–53]:

Olkoon säännöllinen monikulmio P, jossa kärkien lukumäärä on $2n$ ja joka on sisäänpiirretty ympyrään Y, jonka säde on $r > 0$. Kierretään molempia kappaleita ympyrän Y halkaisijan AC suhteen yksi kierros. Tällöin muodostuu ympyrän pyörähdyskappale V' ja monikulmion pyörähdyskappale Σ', jossa on kaksi kartiota ja $n-2$ katkaistua kartiota, ja kaikkien näiden sivujanojen s' pituus on sama kuin alkuperäisen monikulmion P sivun pituus AB eli $s' = AB$.

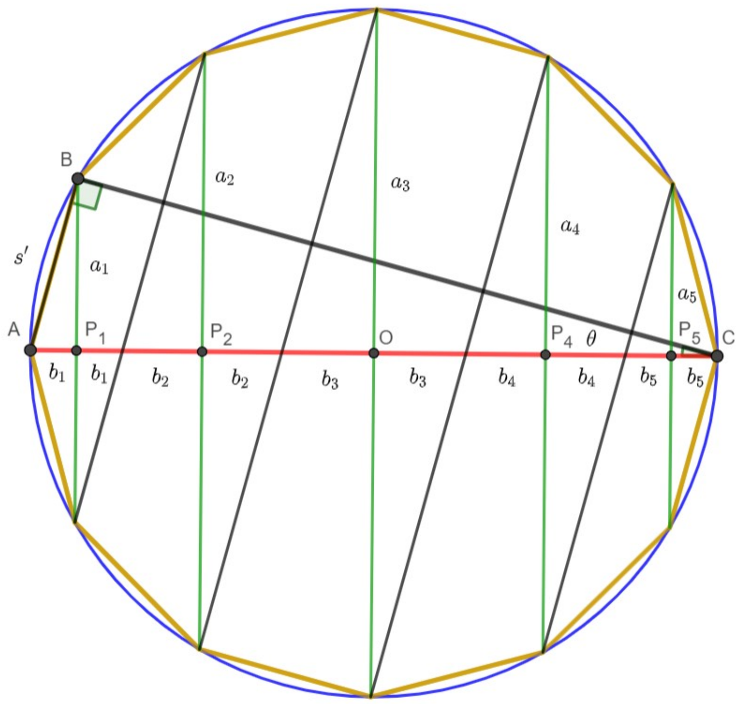
Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ näiden kartioiden ja katkaistujen kartioiden pohjiin muodostuvien leikkauspintojen eli ympyröiden säteet, jotka saadaan piirtämällä monikulmion P kärjistä jänteet, jotka ovat kohtisuorassa ympyrän kiertoakselin AC suhteen.

Käyttämällä ympyräkartion vaipan pinta-alan kaavaa $A = \pi rs$ ja leikatun kartion vaipan pinta-alan kaavaa $A = \pi(r_1 + r_2)s$, missä r, r_1, r_2 ovat pohjaympyröiden säteet ja s sivujanan pituus, saadaan monikulmion P pyörähdyskappaleen Σ' pinta-alaksi

$$\begin{aligned} a(\Sigma') &= \pi a_1 s' + \pi(a_1 + a_2)s' + \cdots + \pi(a_{n-2} + a_{n-1})s' + \pi a_{n-1}s' \\ &= 2\pi s' \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \end{aligned}$$

Jaetaan halkaisija janoiksi, joiden pituudet ovat $b_1, b_1, b_2, b_2, \dots, b_{n-1}, b_{n-1}$, kuten kuvassa 6.2. Olkoon janojen a_k ja b_k leikkauspiste P_k, missä $1 \leq k \leq n-1$. Tällöin muodostuu suorakulmaisia kolmioita, joiden kanta on b_k ja korkeus a_k.

Thaleen lauseen nojalla kolmio $\triangle ABC$ on suorakulmainen. Vertaamalla tätä kolmiota suorakulmaiseen kolmioon $\triangle AP_1B$ huomataan, että niillä on yhteinen kulma kärjessä A. Täten KK-säännön nojalla $\triangle ABC \sim \triangle AP_1B$. Merkitään $A = B_0$, $C = B_n$, $AB = s_1$ ja $a_1, a_2, \dots, a_k$ suuntaiset jänteet $B_1B_1', \dots B_kB_k'$. Piirretään säännölliseen monikulmioon P jänteet $s_2, s_3, \dots, s_n$,



Kuva 6.2: Ympyrän Y (sinisellä) ja sen sisäänpiirretyn, säännöllisen monikulmion P (ruskealla) pyöräyttäminen halkaisijan AC suhteen. Kuvan tilanteessa $n = 6$, jolloin P on 12-kulmio, ja $O = P_3$.

jotka leikkaavat halkaisijan AC ja jotka muodostavat suorakulmaisia kolmioita, kuten kuvassa 6.2.

Koska P on säännöllinen monikulmio, niin jänteet $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ovat keskenään yhdensuuntaiset. Tällöin vuorokulmalauseen nojalla ne suorakulmaiset kolmiot, joilla on yhtä pitkä kanta ja korkeus, ovat keskenään yhdenmuotoiset, kun taas ne kolmiot, joiden kannat ovat b_i ja b_{i+1} ja korkeudet a_i ja a_{i+1}, missä $1 \leq i \leq n-2$, ovat keskenään yhdenmuotoiset ristikulmalauseen mukaan.

Täten kaikki nämä kolmiot, joiden kannat ovat b_k ja korkeudet a_k ovat yhdenmuotoisia kolmion $\triangle ABC$ kanssa. Nyt

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_k}{b_k} = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{s'} = D,$$

joten $a_k = D \cdot b_k$ kaikilla $1 \leq k \leq n-1$.

Toisaalta, koska $2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = d = 2r$, niin saadaan

$$\frac{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}{2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})} = \frac{2D(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})}{2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})} = D = \frac{BC}{s'},$$

jolloin ristiinkertomalla saadaan

$$\frac{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}{d} = \frac{BC}{s'} \iff 2s' \sum_{k=1}^{n-1} a_k = d \cdot BC. \tag{6.6}$$

Käyttämällä trigonometriaa suorakulmaiselle kolmiolle $\triangle ABC$ saadaan selvitettyä sivun BC pituus

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}, \quad \text{missä} \quad BC = AC \cdot \cos\theta.$$

Koska $AC = d = 2r$, saadaan yhtälöstä (6.6)

$$2s' \sum_{k=1}^{n-1} a_k = d \cdot BC = (AC)^2 \cos\theta = (2r)^2 \cdot \cos\theta = 4r^2 \cos\theta.$$

Nyt siis pyörähdyskappaleen Σ' pinta-ala on

$$a(\Sigma') = 2\pi s' \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 4\pi r^2 \cos\theta. \tag{6.7}$$

Pallon pinta-alalle $a(V')$ pätee siis $a(\Sigma') = 4\pi r^2 \cos\theta < a(V')$. Selvitetään seuraavaksi pallon pinta-alan yläraja:

Ottamalla ympyrän Y ympäripiirretyn, vastaavanlaisen säännöllisen monikulmion Q ja toimimalla samalla tavalla kuin edellä, saadaan monikulmion Q sivun pituudeksi $s'' = A'B'$ ja pyörähdyskappale Σ'', joka koostuu samankaltaisista, mutta isommista kartioista ja katkaistuista kartioista kuin kappaleessa Σ'.

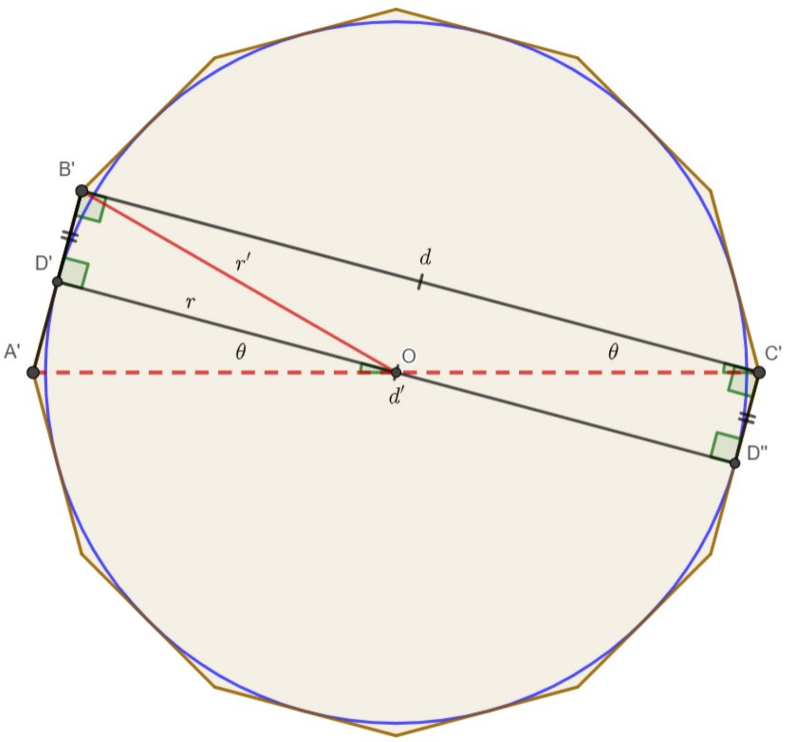
Olkoot $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1}$ näiden isompien kartioiden ja katkaistujen kartioiden pohjiin muodostuvien leikkauspintojen eli ympyröiden säteet, jotka saadaan piirtämällä monikulmion Q kärjistä jänteet, jotka ovat kohtisuorassa ympyrän kiertoakselin suhteen.

Nyt pyörähdyskappaleen Σ'' pinta-ala on

$$\begin{aligned} a(\Sigma'') &= \pi a'_1 s'' + \pi(a'_1 + a'_2)s'' + \cdots + \pi(a'_{n-2} + a'_{n-1})s'' + \pi a'_{n-1} s'' \\ &= 2\pi s'' \sum_{k=1}^{n-1} a'_k. \end{aligned}$$

Olkoon ympyrän Y keskipiste O. Koska monikulmio Q on ympyrän Y suhteen ympäripiirretty, niin sen pyörähdyskappale Σ'' muodostuu suurempaan ympyrään Y'. Ratkaistaan tämän ympyrän halkaisija $d' = A'C'$:

Tutkitaan ympyrään Y' muodostuvia kolmioita $\triangle A'OB'$ ja $\triangle A'C'B'$. Puolittamalla kolmion $\triangle A'OB'$ kärkeen O muodostuvan kulman voidaan muodostaa yhtenevät kolmiot $\triangle A'OD'$ ja $\triangle D'OB'$, joissa $OD' = r$ kuten kuvassa 6.3. Muodostamalla suora OD' saadaan toinen ympyrän Y halkaisija $D'D''$. Tällöin saadaan suorakulmio $\square B'D'D''C'$ ja huomataan, että $B'C' = D'D'' = 2r = d$.



Kuva 6.3: Ympyrä Y (sinisellä) ja sen ympäripiirretty, säännöllinen monikulmio Q (ruskealla). Monikulmion Q (ja ympyrän Y') halkaisija d' katkoviivalla ja säde r'. Kuvan tilanteessa $n = 6$, jolloin Q on 12-kulmio.

Nyt käyttämällä trigonometriaa kolmiolle $\triangle A'C'B'$ ja määrittelemällä kulman θ *sekantti* $\sec\theta = \cos^{-1}\theta$ saadaan rarkaistua d'

$$\cos\theta = \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{2r}{d'} \iff d' = 2r\sec\theta.$$

Nyt vastaavilla välivaiheilla ja ristiinkertomalla saadaan

$$\frac{2(a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{n-1})}{d'} = \frac{B'C'}{s''} \iff 2s'' \sum_{k=1}^{n-1} a'_k = d' \cdot B'C' = 4r^2 \sec\theta,$$

joten pyörähdyskappaleen Σ'' pinta-alaksi saadaan

$$a(\Sigma'') = 2\pi s'' \sum_{k=1}^{n-1} a'_k = 4\pi r^2 \sec\theta. \tag{6.8}$$

Nyt pallon pinta-alalle $a(V')$ pätee siis yhtälöiden (6.7) ja (6.8) nojalla

$$a(\Sigma') = 4\pi r^2 \cos\theta < a(V') < a(\Sigma'') = 4\pi r^2 \sec\theta,$$

missä $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Kolmioista $\triangle A'B'C'$ ja $\triangle ADO$, missä D on janan AB keskipiste, voidaan ratkaista kulma θ

$$\tan\theta = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{s''}{d} \quad \text{ja} \quad \sin\theta = \frac{AD}{OA} = \frac{\frac{s'}{2}}{r} = \frac{s'}{d},$$

jolloin toisaalta kulman sekantille pätee

$$\sec\theta = \frac{\tan\theta}{\sin\theta} = \frac{s''}{s'}.$$

Nyt yhtälöistä (6.8) ja (6.7) saadaan pyörähdyskappaleiden pinta-alojen suhteeksi

$$\frac{a(\Sigma'')}{a(\Sigma')} = \frac{4\pi r^2 \sec\theta}{4\pi r^2 \cos\theta} = \sec^2\theta = \left(\frac{s''}{s'}\right)^2. \tag{6.9}$$

Nyt kun olemme selvittäneet monikulmioiden Q ja P pyörähdyskappaleiden pinta-alat ja selvittäneet niiden suhteen, voimme todistaa r-säteisen pallon (eli r-säteisen ympyrän Y pyörähdyskappaleen) pinta-alan kaavan:

Lause 7. *Olkoon pallon säde $r > 0$. Tällöin pallon pinnan pinta-ala on $A = 4\pi r^2$.*

Todistus. Käytetään *reductio ad absurdum* -menetelmää eli epäsuoraa todistusta. Oletetaan siis, että $A \neq 4\pi r^2$, jolloin pätee $A > 4\pi r^2$ tai $A < 4\pi r^2$.

Olkoon $A > 4\pi r^2$. Olkoon sisäänpiirretty, säännöllinen monikulmio P ja vastaavanlainen ympäripiirretty, säännöllinen monikulmio Q siten, että

$$1 < \frac{s''}{s'} < \sqrt{\frac{A}{4\pi r^2}}.$$

Tällöin yhtälöllä (6.9) saadaan

$$\frac{a(\Sigma'')}{a(\Sigma')} = \left(\frac{s''}{s'}\right)^2 < \frac{A}{4\pi r^2}.$$

Nyt kuitenkin $a(\Sigma'') > A$ ja $a(\Sigma') < 4\pi r^2$, mikä on ristiriita, koska silloin olisi

$$\frac{a(\Sigma'')}{a(\Sigma')} > \frac{A}{4\pi r^2}.$$

Tutkitaan seuraavaksi tapaus $A < 4\pi r^2$. Valitaan sellaiset säännölliset, sisään- ja ympäripiirretyt monikulmiot P ja Q, joille pätee

$$1 < \frac{s''}{s'} < \sqrt{\frac{4\pi r^2}{A}}.$$

Tällöin yhtälöllä (6.9) saadaan

$$\frac{a(\Sigma'')}{a(\Sigma')} = \left(\frac{s''}{s'}\right)^2 < \frac{4\pi r^2}{A}.$$

Nyt kuitenkin $a(\Sigma'') > 4\pi r^2$ ja $a(\Sigma') < A$, mikä on ristiriita, koska silloin olisi

$$\frac{a(\Sigma'')}{a(\Sigma')} > \frac{4\pi r^2}{A}.$$

Täten molemmat tapaukset johtavat ristiriitaan, jolloin pallon pinta-alan täytyy olla $A = 4\pi r^2$. $\square$

7 Arkhimedeen laskutavat ja esimerkkejä

7.1 Pallon tilavuus ja pinta-ala

Olemme käyneet läpi nykypäivän merkintöjen avulla, miten Arkhimedes selvitti ympyrän, ellipsin ja pallon pinta-alat sekä pallon tilavuuden. Olemme lisäksi määrittäneet piin likiarvon. Seuraavaksi tutkimme ja esittelemme Arkhimedeen käyttämää laskutekniikkaa.

Teoksessaan *Palloista ja sylintereistä* Arkhimedes käytti propositioissa 33 ja 34 olleisiin pallon pinta-alan ja tilavuuden todistuksiin aiempia propositioitaan 2–3, 23, 25, 27–28 ja 30–32 [2, s. 150–151, 174–175, 177–179]:

Lause 8 (Propositio 2)**.** *Kun on kaksi erisuuruista suuretta* ($A > B$)*, on mahdollista löytää kaksi erisuuruista janaa* ($a > b$) *siten, että* $a : b < A : B$.

Lause 9 (Propositio 3)**.** *Kun on kaksi erisuuruista suuretta* ($A > B$) *ja ympyrä, on mahdollista muodostaa ympyrän sisään- ja ympäripiirretyt monikulmiot siten, että ympäripiirretyn monikulmion sivulle* S_n *ja sisäänpiirretyn monikulmion sivulle* s_n *pätee* $S_n : s_n < A : B$.

Lause 10 (Propositio 23)**.** *Ympyrän sisäänpiirretyn säännöllisen monikulmion pyörähdyskappaleen pinta-ala* A *on pienempi kuin ympyrän pyörähdyskappaleen pinta-ala (eli* $A < 4\pi r^2$*).*

Seuraavissa propositioissa ”kappale” tarkoittaa säännöllisten monikulmioiden pyörähdyskappaleita:

Lause 11 (Propositio 25)**.** *Kappaleen, joka on sisäänpiirretty pallon suhteen ja joka on kartiomaisten pintojen sisällyttämä, pinta-ala* A *on pienempi kuin pallon neljä suurinta ympyrää (eli* $A < 4\pi r^2$*).*

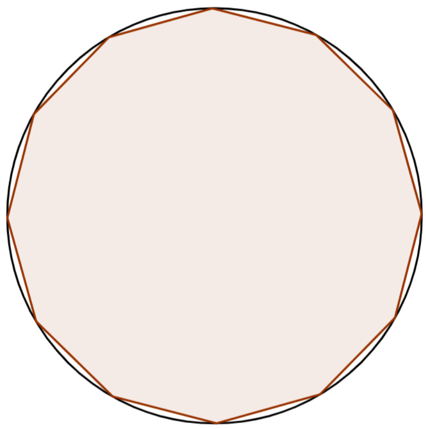
Lause 12 (Propositio 27)**.** *Kappaleen, joka on sisäänpiirretty pallon suhteen ja joka on kartiomaisten pintojen sisällyttämä, tilavuus* V *on pienempi kuin neljä sellaista kartiota, joiden pohjat vastaavat pallon suurimpia ympyröitä ja korkeudet pallon sädettä (eli* $V < \frac{4}{3}\pi r^3$*).*

Lause 13 (Propositio 28)**.** *Ympyrän ympäripiirretyn monikulmion pyörähdyskappaleen pinta-ala* A *on suurempi kuin ympyrän pyörähdyskappaleen (eli pallon) pinta-ala (eli* $A > 4\pi r^2$*).*

Lause 14 (Propositio 30)**.** *Pallon ympäripiirretyn kappaleen pinta-ala* A *on suurempi kuin pallon neljä suurinta ympyrää (eli* $A > 4\pi r^2$*).*

Lause 15 (Propositio 31)**.** *Kappaleen, joka on ympäripiirretty pallon suhteen, tilavuus on sama kuin sellaisen kartion, jonka pohjaympyrä vastaa kappaleen pinta-alaa ja korkeus pallon sädettä.*

Lause 16 (Propositio 32)**.** *Jos palloon muodostetaan yhdenmuotoiset sisään- ja ympäripiirretyt kappaleet, jotka on muodostettu samankaltaisista monikulmioista kuin edellämainituissa propositioissa, niin näiden kappaleiden pinta-alojen suhde on sama kuin sivujen neliöiden suhde, ja tilavuuksien suhde sama kuin sivujen kuutioiden suhde.*



Kuva 7.1: Ympyrän sisäänpiirretty kappale, joka on säännöllinen 12-kulmio.

Teoksessaan *Palloista ja sylintereistä* Arkhimedes määritti pallon pinta-alan ja tilavuuden, joille hän antoi omat propositiot 33 ja 34 sekä todistukset [2, s. 180–182]:

Lause 17 (Propositio 33)**.** *Pallon pinta-ala A on sama kuin sen neljä suurinta ympyrää (eli $A = 4\pi r^2$).*

Lause 18 (Propositio 34)**.** *Pallon tilavuus on sama kuin neljä sellaista kartiota (jonka tilavuus $V = \frac{1}{3}Ah$), joiden pohjat vastaavat pallon suurimpia ympyröitä (eli pohjan pinta-ala $A = \pi r^2$) ja korkeudet pallon sädettä r.*

Arkhimedes todisti pallon pinta-alan propositiossa 33 epäsuorasti eli väittämällä, että $A \neq E$, missä A on pallon neljä suurinta ympyrää ja E on pallon pinta. Jos $A > E$, niin hän aloitti todistuksen etsimällä proposition 2 mukaiset janat a ja b, joille pätee $a > b$, siten, että $a : b < A : E$. Lisäksi hän valitsi janan c, jolle pätee $a : c = c : b$.

Tämän jälkeen hän valitsi propositiossa 3 ympyrän ympäripiirretyn monikulmion C_n sivun pituudeksi S_n ja sisäänpiirretyn monikulmion I_n sivun pituudeksi s_n siten, että $S_n : s_n < a : c$, jolloin proposition 32 mukaan ympäri- ja sisäänpiirretyn monikulmion pyörähdyskappaleen pinta-aloille pätee $E(C_n) : E(I_n) = S_n^2 : s_n^2 < a^2 : c^2 = a : b < A : E$. Tällöin proposition 23 mukaan $E(I_n) < E$ ja proposition 30 nojalla $E(C_n) > A$, jotka johtavat ristiriitaan, koska silloin olisi $E(C_n) : E(I_n) > A : E$.

Tapauksessa $A < E$ toimitaan samalla tavalla, mutta lopussa saadaan yhtälö $E(C_n) : E(I_n) < E : A$. Tällöin proposition 25 mukaan $E(I_n) < A$ ja proposition 28 mukaan $E(C_n) > E$, jolloin olisi $E(C_n) : E(I_n) > E : A$. Tämä on ristiriita.

Arkhimedes todisti myös pallon tilavuuden propositiossa 34 epäsuorasti eli väittämällä, että $X \neq S$, missä X on kartio, jonka pohja on E ja korkeus pallon säde, ja S on pallo. Tapauksessa $X < S$ hän aloitti todistuksen etsimällä proposition 2 mukaiset janat a ja b, joille pätee $a > b$, joille pätee $a : b < S : X$. Tämän jälkeen hän valitsi janan c siten, että propositiossa 3 ympyrän ympäripiirretyn monikulmion C_n sivun pituudelle S_n ja sisäänpiirretyn monikulmion I_n sivun pituudelle s_n pätee $S_n : s_n < a : c$, jolloin proposition 32 mukaan ympäri- ja sisäänpiirretyn monikulmion pyörähdyskappaleen tilavuuksille pätee $S(C_n) : S(I_n) = S_n^3 : s_n^3 < a^3 : c^3 < a : b < S : X$.

Lopussa Arkhimedes käytti postulaattia 4, jonka mukaan samalla tasolla olevat kaksi pintaa ovat erisuuruisia kun molemmat ovat samaan suuntaan konkaaveja ja toinen pinta on kokonaan toisen sisällä. Proposition 27 mukaan $S(I_n) < X$ ja postulaatin 4 mukaan $S(C_n) > S$, jotka ovat ristiriidassa proposition 32 kanssa. Tapauksessa $X > S$ toimitaan samalla tavalla, mutta saadaan yhtälö $S(C_n) : S(I_n) < X : S$. Tällöin proposition 31 mukaan $S(C_n) > X$ ja postulaatin 4 mukaan $S(I_n) < S$, jotka ovat ristiriidassa.

7.2 Neliöjuurten approksimointi murtoluvuilla

Arkhimedeen selvittäessä piin likiarvon $\pi \approx 3{,}14$ hän käytti nykymerkinnöin apunaan suorakulmaista kolmiota, jonka yksi kulma on 30°, jolloin kolmion sivujen pituudet ovat 1, $\sqrt{3}$ ja 2 [2, s. 224]. Muistutetaan vielä, että kreikkalaiset eivät kohdelleet irrationaalilukuja, kuten $\sqrt{3}$, samalla tavalla kuin lukuja tai niiden suhteita. Arkhimedes tarvitsi tilanteessa luvun 3 neliöjuuren likiarvoja $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, joita hän käytti ilman perusteluja [2, s. 225, 228].

Ei ole varmaa, miten ja miksi Arkhimedes päätyi luvun 3 neliöjuuren approksimaatioihin $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}$ ja $\sqrt{3} \approx \frac{1351}{780}$, sillä nämä molemmat arviot voidaan saada monella eri tavalla. Heronin teoksessa *Metrica* luvun 720 neliöjuurelle saadaan arvio $\sqrt{720} \approx 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ seuraavalla tavalla [2, s. 230]:

Huomataan, että $26^2 = 676 < 720 < 729 = 27^2$ eli $26 < \sqrt{720} < 27$. Luvun 27 neliö on lähempänä lukua 720 kuin luvun 26 neliö eli se on parempi approksimaatio. Jaetaan 720 luvulla 27, jolloin osamääräksi saadaan $\frac{720}{27} = 26\frac{2}{3}$. Nyt näiden edellämainittujen lukujen keskiarvoksi saadaan

$$\frac{1}{2}\left(27 + 26\frac{2}{3}\right) = 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Yleisessä tapauksessa lukua $\sqrt{d}$ voidaan approksimoida seuraavasti: Jos α_1 on luvun $\sqrt{d}$ approksimaatio, niin toinen (yleensä parempi) arvio on $\beta_1 = \frac{d}{\alpha_1}$. Tällöin seuraavat approksimaatiot saadaan rekursiivisesti kaavalla

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2} \quad \text{ja} \quad \beta_n = \frac{d}{\alpha_n}, \quad \text{missä} \quad n \geq 2. \tag{7.1}$$

Monet Arkhimedeen ja Heronin käyttämistä neliöjuurten murtolukuarvioista saattavat olla peräisin Babyloniasta ajalta yli 2000 vuotta eaa. ja siellä käytetystä ”babylonialaisten säännöstä”, jota myös kreikkalaiset olivat aikanaan käyttäneet [2, s. 231]. Tässä ”säännössä” käytetään samoja kaavoja kuin edellisessä rekursioyhtälössä (7.1), mutta siitä saatavat approksimaatiot riippuvat siitä, päteekö alkuperäiselle approksimaatiolle p tilanne $p < \sqrt{d}$ vai $p > \sqrt{d}$ [2, s. 232]:

Olkoon $\alpha_1 = p$ luvun $\sqrt{d}$ approksimaatio ja r approksimaation p virhe. Tällöin

$$\beta_1 = \frac{d}{\alpha_1} = p + \frac{r}{p} \quad \text{ja} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = p + \frac{r}{2p}, \quad \text{kun} \quad p < \sqrt{d}. \tag{7.2}$$

ja

$$\beta_1 = \frac{d}{\alpha_1} = p - \frac{r}{p} \quad \text{ja} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = p - \frac{r}{2p}, \quad \text{kun} \quad p > \sqrt{d}. \tag{7.3}$$

Yhtälöiden (7.2) ja (7.3) kuvaamaa ”babylonialaisten sääntöä” Arkhimedes ei kuitenkaan käyttänyt sellaisenaan, koska sillä saadaan varsin monimutkaisia murtolukuja. Hän vältti näitä käyttämällä luvun β_n pyöristyksiä ja hänelle oli riittävää käyttää sekalukuja [2, s. 232]. Nyt voimme tutkia, miten Arkhimedes mahdollisesti selvitti luvun $\sqrt{3}$ likiarvot murtolukuina [2, s. 234–235]:

Approksimaatio $\sqrt{3} \approx \frac{1351}{780}$ voidaan saada, kun käytetään luvulle $\sqrt{d} = \sqrt{3}$ approksimaatiota $\alpha_1 = \frac{5}{3}$, jolloin $\beta_1 = \frac{d}{\alpha_1} = \frac{3}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{5}$. Nyt käyttämällä yhtälöä (7.1) saadaan

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{25}{15} + \frac{27}{15}\Big) = \frac{26}{15},$$

jolloin

$$\beta_2 = \frac{d}{\alpha_2} = \frac{3}{\frac{26}{15}} = \frac{45}{26}.$$

Tällöin saadaan

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{676 + 675}{390}\Big) = \frac{1351}{780}.$$

Mutta mistä tulee luvun $\sqrt{3}$ alkuperäinen approksimaatio $\alpha_1 = \frac{5}{3}$? Tästäkään ei ole varmaa tietoa: On mahdollista, että se saatiin, kun huomattiin, että

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \approx 5 = \sqrt{25},$$

jolloin saadaan $\sqrt{3} \approx \frac{5}{3}$. Toinen mahdollinen tapa saattoi olla soveltaa ”babylonialaista sääntöä” ja käyttää yhtälössä (7.3) esiintyvän approksimaation $\alpha_2 = p - \frac{r}{2p}$ sijaan $\alpha_2' = p - \frac{r}{2p-1}$: tällöin

$$\sqrt{d} = \sqrt{p^2 - r} \approx \alpha_2' = p - \frac{r}{2p - 1}, \tag{7.4}$$

jolloin $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \approx 2 - \frac{1}{2 \cdot 2 - 1} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

Approksimaatio $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}$ voitiin saada, kun Arkhimedes tai joku hänen edeltäjistään huomasi, että

$$26^2 = 676 = 675 + 1 = (15\sqrt{3})^2 + 1.$$

Nyt

$$(15\sqrt{3})^2 = 26^2 - 1 \iff 15\sqrt{3} = \sqrt{26^2 - 1} \iff \sqrt{3} = \frac{1}{15}\sqrt{26^2 - 1},$$

jolloin ”babylonialaisen säännön” sovelluksen yhtälöllä (7.4) saadaan

$$\sqrt{3} \approx \frac{1}{15}\Big(26 - \frac{1}{2\cdot 26 - 1}\Big) = \frac{1}{15}\Big(26 - \frac{1}{51}\Big) = \frac{1}{15}\Big(25 + \frac{50}{51}\Big) = \frac{255+10}{153} = \frac{265}{153}.$$

On huomioitavaa, että teoksen *Ympyrän mittaamisesta* kommentaarissaan Eutokios ei selvennä niitä kohtia, joissa $\sqrt{3}$ likiarvot mainitaan, millään muulla tavalla kuin todentavilla laskelmilla, joissa näytetään, että 1351^2 eroaa hieman luvusta $780^2\sqrt{3}$, kuten myös 265^2 ja $153^2\sqrt{3}$. Sekin on huomioitavaa, että ala- ja ylärajan selvityksissä ei ilmeisesti käytetty samoja menetelmiä; siitä, oliko kreikkalaisilla jokin yhdenmukainen toimintatapa nykypäivän neliöjuurien approksimaatioihin, ei kuitenkaan ole historiallista varmuutta. [2, s. 236]

7.3 Piin määrittäminen Arkhimedeen tapaan

Aiemmin luvussa 4 määritimme piin likiarvon rekursiivisesti ympyrän sisään- ja ympäripiirrettyjen säännöllisten monikulmioiden sivujen pituuksien sekä ympyrän säteen ja halkaisijan avulla. Arkhimedes määritti piin likiarvon teoksen *Ympyrän mittaamisesta* propositiossa 3, jonka mukaan ympyrälle, jonka halkaisija on d ja kehä c, pätee

$$\Big(3 + \frac{10}{71}\Big)d < c < \Big(3 + \frac{1}{7}\Big)d.$$

Hän käytti hyödyksi ympyrän sisään- sekä ympäripiirrettyjä säännöllisiä kuusikulmioita, joiden sivujanoja hän oli kaksinkertaistanut 96-kulmioihin asti [5, s. 50–51]. Molemmissa tapauksissa hän sovelsi suorakulmaisia kolmioita, joiden yksi kulma on 30°, jolloin kolmion sivuille voidaan muodostaa erilaisia suhteita, joiden avulla hän pystyi approksimoimaan piitä seuraavalla tavalla [2, s. 224–229]:

Ympäripiirrettyjen monikulmioiden tapauksessa Arkhimedes aloitti ympyrästä, jonka keskipiste on O ja halkaisija $AX = d = 2r$, ja pisteen A kautta kulkevasta tangenttisuorasta AB. Hän muodosti suorakulmaisen kolmion $\triangle ABO$, jonka kärkeen O muodostuu kulma $\angle BOA = 30°$. Nyt $\frac{OB}{AB} = \frac{2}{1} = \frac{306}{153}$ ja

$$\frac{OA}{AB} = \frac{r}{\frac{1}{2}S_6} = \frac{\sqrt{3}}{1} > \frac{265}{153},$$

missä S_6 on ympäripiirretyn, säännöllisen kuusikulmion sivun pituus. Seuraavaksi puolitetaan kulma $\angle BOA$ janalla OD siten, että $D \in AB$. Kulmanpuolittajalauseen nojalla pätee

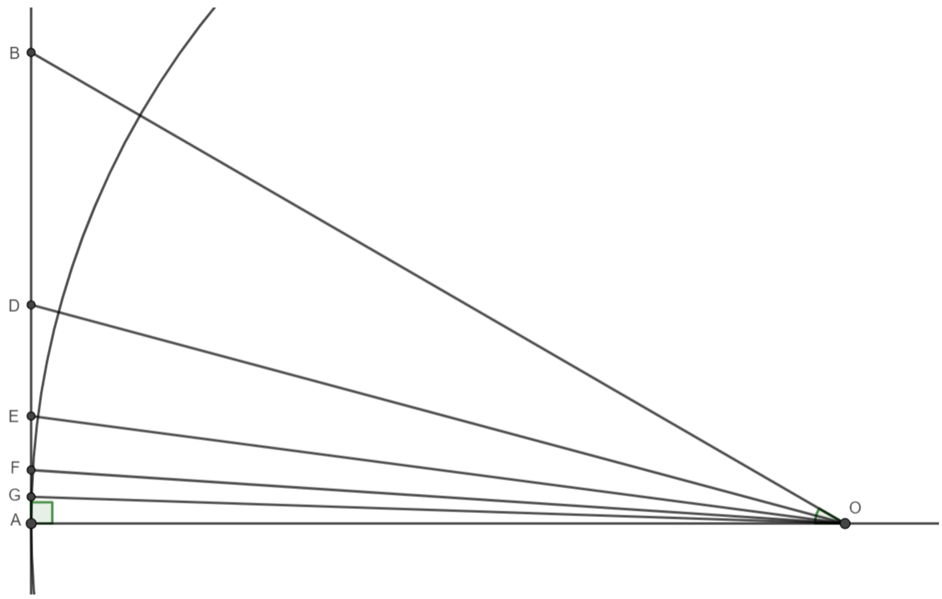
$$\frac{OB}{OA} = \frac{BD}{AD},$$

jolloin verrannollisuuksien teorian nojalla edellinen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{OB + OA}{OA} = \frac{BD + AD}{AD} = \frac{AB}{AD} \iff \frac{OB + OA}{OA} = \frac{AB}{AD},$$

ja edelleen

$$\frac{OA}{AD} = \frac{r}{\frac{1}{2}S_{12}} = \frac{OB + OA}{AB} > \frac{306 + 265}{153} = \frac{571}{153}.$$



Kuva 7.2: Arkhimedeen käyttämä suorakulmainen kolmio $\triangle ABO$, jossa $\angle BOA = 30°$, ja kulmanpuolittajat OD, OE, OF ja OG. Janat AE ja AF ovat säännöllisten ympäripiirrettyjen 24- ja 48-kulmioiden sivujen puolikkaat.

Nyt verrannollisuuksien teorian nojalla saadaan

$$\frac{(OD)^2}{(AD)^2} = \frac{(OA)^2 + (AD)^2}{(AD)^2} > \frac{571^2 + 153^2}{153^2} = \frac{349450}{23409}.$$

Tälle Arkhimedes esitti approksimaation

$$\frac{OD}{AD} > \frac{591\frac{1}{8}}{153},$$

joka voidaan saada ”babylonialaisten säännöllä” [2, s. 233]. Jatkamalla vastaavanlaisten kulmanpuolittajien konstruointia kulmasta $\angle DOA$ alkaen, Arkhimedes sai muodostettua ympyrän ympäripiirretyn säännöllisen 96-kulmion sivun puolikkaalle AG approksimaation

$$\frac{OA}{AG} = \frac{r}{\frac{1}{2}S_{96}} = \frac{d}{S_{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Tällöin saadaan

$$96S_{96} < \frac{96 \cdot 153}{4673\frac{1}{2}}d < \frac{22}{7}d = \Big(3 + \frac{1}{7}\Big)d.$$

Sisäänpiirrettyjen monikulmioiden tapauksessa Arkhimedes aloitti ympyrästä, jonka keskipiste on O ja halkaisija $AB = d = 2r$, ja sisäänpiirretyn, säännöllisen kuusikulmion sivusta $s_6 = BC$. Hän muodosti suorakulmaisen kolmion $\triangle CAB$, jonka kärkeen A muodostuu kulma $\angle CAB = 30°$. Nyt $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{1} = \frac{1560}{780}$ ja

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} < \frac{1351}{780}.$$

Toimimalla vastaavasti kuin aiemmin kuvan 4.2 tilanteessa, saadaan

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP} = \frac{AB + AC}{BC} < \frac{1560 + 1351}{780} = \frac{2911}{780},$$

ja

$$\frac{(AB)^2}{(BD)^2} = \frac{(BD)^2 + (AD)^2}{(BD)^2} < \frac{1560^2 + 1351^2}{780^2} = \frac{9082321}{608400},$$

jolle Arkhimedes esitti arvion

$$\frac{AB}{BD} = \frac{d}{s_{12}} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Arkhimedes sai myös tämän ”babylonialaisten säännöllä” [2, s. 233]. Jatkamalla vastaavanlaisten kulmanpuolittajien konstruointia kulmasta $\angle DAB$ alkaen, Arkhimedes sai muodostettua ympyrän sisäänpiirretyn säännöllisen 96-kulmion sivulle BG approksimaation

$$\frac{AB}{BG} = \frac{d}{s_{96}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

Tällöin saadaan

$$96s_{96} > \frac{96 \cdot 66}{2017\frac{1}{4}}d = \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}d > \Big(3 + \frac{10}{71}\Big)d.$$

Viitteet

[1] CARL B. BOYER ja UTA C. MERZBACH: *A History of Mathematics.* 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011.

[2] E. J. DIJKSTERHUIS: *Archimedes.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1987.

[3] C. H. EDWARDS, JR.: *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag New York Inc., 1979.

[4] SIR THOMAS HEATH: *A History of Greek Mathematics Volume I.* Dover Publications, Inc. New York, 1981.

[5] SIR THOMAS HEATH: *A History of Greek Mathematics Volume II.* Dover Publications, Inc. New York, 1981.

[6] JOHN STILLWELL: *Mathematics and Its History.* 3rd Edition, Springer New York, 2010.