JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTO-
TIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Stokastiset pelit, optimaalinen kontrolli ja osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Jenni Köykkä

28. kesäkuuta 2024

Tekijä
Jenni Köykkä

Otsikko
Stokastiset pelit, optimaalinen kontrolli ja osittaisdifferentiaaliyhtälöt (engl. Stochastic games, optimal control and partial differential equations)

Tutkinto-ohjelma
Matematiikan yleisen linjan maisteriohjelma

Päivämäärä	**Sivumäärä**
28. kesäkuuta 2024	74

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tutustutaan optimaalisen kontrollin ongelmiin sekä satunnaispeleihin osittaisdifferentiaaliyhtälöiden (ODY:jen) avulla. Tutkielma jakautuu kolmeen osaan, joista ensimmäisessä käsitellään kontrolliteoriaa, sekä etenkin Bellmanin dynaamisen ohjelmoinnin periaatetta (DOP). DOP:n avulla usein monimutkaiset optimointiongelmat voidaan jakaa pienempiin osaongelmiin. Lisäksi DOP:n avulla saadaan näytettyä arvofunktion olevan yksikäsitteinen viskositeettiratkaisu ODY:lle nimeltä Hamilton-Jacobi-Bellman-yhtälö, joten ODY-teoriaa voidaan soveltaa tietynlaisten kontrolliongelmien ratkaisemiseksi.

Toisessa osassa tutustutaan stokastiikan ja ODY:jen yhteyteen satunnaiskävelyn ja Laplacen yhtälön kautta. Ensin todistetaan, että funktio on harmoninen, eli ratkaisu Laplacen yhtälölle, jos ja vain jos se toteuttaa keskiarvoperiaatteen. Tämän jälkeen näytetään, että satunnaiskävelyn arvo tietyssä pisteessä toteuttaa keskiarvoperiaatteen, jolloin saadaan luotua yhteys ODY:jen ja satunnaiskävelyn välille. Tässä tilanteessa keskiarvoperiaate voidaan tulkita ehdollisen odotusarvon kautta.

Kolmannessa osassa tarkastellaan satunnaiskohinallista köydenvetopeliä ja p-Laplacen yhtälöä. Köydenvetopelille saadaan rakennettua (p, ε)-harmoninen arvofunktiokandidaatti dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen avulla. Kappaleessa saadaan todistettua (p, ε)-harmonisten funktioiden tasaisesti suppenevan jonon rajafunktion olevan yksikäsitteinen viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle. Lisäksi Arzelá-Ascolin muunnelmalla päästään todistamaan pelin arvofunktioiden muodostaman jonon suppenevan tasaisesti, kun otetaan raja-arvo $\varepsilon \to 0$.

Sisällys

Johdanto **3**

1 Merkintöjä **5**

2 Taustaa **6**
2.1 Stokastiikka 7
2.2 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt 17

3 Optimaalinen kontrolli ja ensimmäisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälöt **21**
3.1 Hamilton-Jacobi-yhtälö ja viskositeettiratkaisut 21
3.2 Dynaaminen ohjelmointi 25

4 Satunnaiskävely ja toisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälöt **35**
4.1 Harmoniset funktiot ja keskiarvoperiaate 37
4.2 Harmoniset funktiot ja satunnaiskävely 40

5 Satunnaiskohinalliset köydenvetopelit ja p-Laplacen yhtälö **44**
5.1 Peliteoreettinen p-Laplace 49
5.2 Arvofunktioiden olemassaolo, yksikäsitteisyys ja suppeneminen 60

A Liite **71**

Johdanto

Tässä tutkielmassa tutkitaan optimaalisen kontrollin ongelmia, satunnaispelejä ja osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Tarkoituksena on näyttää, kuinka näiden kolmen käsitteen, eli kontrolliteorian, stokastiikan ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden (ODY:jen), välille löydetään yhteys.

Tutkielma on jaettu kolmeen kokonaisuuteen sekä taustatietoihin. Ensimmäisenä kappaleessa 2 käydään läpi perustietoja stokastiikan ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden puolelta. Tässä seurataan pääasiassa Evansin julkaisua [9] sekä Williamsin kirjaa [29] stokastiikkaan liittyen ja Evansin kirjaa [10] ODY:ihin liittyen.

Kun tarvittavat taustatiedot on käyty läpi, siirrytään kappaleessa 3 ensimmäiseen kokonaisuuteen eli kontrolliteoriaan ja ensimmäisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälöihin. Tavoitteena on todistaa Bellmanin dynaamisen ohjelmoinnin periaate, jonka avulla rakennetaan optimaalinen palautekontrolli. Richard Bellman kehitti 1950-luvulla matemaattisen optimointimetodin, joka tunnetaan dynaamisen ohjelmoinnin periaatteena (DOP) [4]. Sen idea on monimutkaisen ongelman pilkkominen pienempiin, helpommin ratkaistavissa oleviin osaongelmiin. Tätä ideaa käytetään myös tässä tutkielmassa: aikavälillä $[t, T]$ määritelty optimointiongelma jaetaan osaväleillä $[t, \tau]$ ja $[\tau, T]$ määriteltyihin ongelmiin, jotka ovat helpommin ratkaistavissa. DOP:tä hyödyntämällä saadaan näytettyä arvofunktion u olevan yksikäsitteinen *viskositeettiratkaisu* niin kutsutulle Hamilton-Jacobi-Bellman osittaisdifferentiaaliyhtälölle. Tämän avulla saadaan lopulta rakennettua palautekontrolli, jonka todistetaan olevan optimaalinen. Luvun päälähteinä ovat toimineet Bardin ja Capuzzo-Dolcettan kirja [2] sekä Todorovin julkaisu [28].

Kontrolliteorian jälkeen kappaleessa 4 siirrytään satunnaiskävelyn puoleen. Satunnaiskävelyssä rajataan pelialue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, josta valitaan pelinappulalle aloituspiste. Kun kiinnitettynä on $\varepsilon > 0$, valikoituu seuraava piste tasajakauman mukaan ε-säteisestä pallosta nykyisen pelipisteen ympäriltä. Tällä tavalla saadaan muodostettua satunnaiskävely, joka päätyy pelialueen reunalle melkein varmasti. Lisäksi pelialueen reunalle määritellään *maksufunktio*. Tarkoitus on tutkia tällä tavalla toteutetun satunnaiskävelyn yhteyttä Laplacen yhtälöksi kutsuttuun toisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälöön

$$\Delta u = 0,$$

jonka ratkaisuja u kutsutaan harmonisiksi funktioiksi. Ideana on näyttää

$$u \text{ on harmoninen } \sim u(x) = \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy \sim \text{ satunnaiskävely.}$$

Tässä $\sim$ voidaan tulkita "on yhteydessä" ja merkinnällä $\fint_{B_\varepsilon(x)}$ tarkoitetaan *keskiarvointegraalia* pallon yli. Tämä todistetaan samassa järjestyksessä vasemmalta oikealle: ensin syvennytään harmonisiin funktioihin ja *keskiarvoperiaatteeseen* keskiarvointegraalin avulla ja saadaan todistettua eräänlainen jos ja vain jos -tilanne harmonisten ja keskiarvoperiaatteen toteuttavien funktioiden välille. Tämän jälkeen näytetään, että pallossa tapahtuvan sopivaan maksufunktioon sidotun satunnaiskävelyn arvo on yksikäsitteinen harmoninen funktio. Keskiarvoperiaate voidaan tulkita satunnaiskävelyssä ehdollisen odotusarvon kautta, sillä odotusarvo tietyssä pisteessä voidaan laskea katsomalla yhtä askelta ja summaamalla viereiset ehdolliset odotusarvot yhteen ottaen huomioon yhden askeleen todennäköisyysmitta. Pääasiallisia lähteitä ovat olleet Parviaisen artikkeli [21], Evansin kirja [10] sekä Lewickan kirja [16].

Viimeisessä kokonaisuudessa, kappaleessa 5, tarkastellaan satunnaiskohinallista köydenvetopeliä ja p-Laplacen yhtälöä, joka on epälineaarinen yleistys Laplacen yhtälölle. Satunnaiskohinallisessa köydenvetopelissä satunnaiskävelyyn otetaan mukaan kaksi pelaajaa. Kierroksen alussa heitetään painotettua kolikkoa, joka määrittää kierroksen etenemisen. Kolikon antaessa kruunan, pelinappula siirretään satunnaiseen pisteeseen aivan kuten satunnaiskävelyssä. Jos taas heitosta saadaan klaava, pelataan köydenvetoa: toinen, tällä kertaa painottamaton, kolikko määrittää, kumpi pelaajista saa siirtää pelinappulan mieleiseensä pisteeseen ε-säteisen pallon sisällä senhetkisestä pelipisteestä. Köydenvedon pelistä tekee maksufunktio, sillä kun päädytään pelialueen ulkopuolelle, pelaaja II maksaa pelaajalle I maksufunktion määräämän summan. Näin ollen pelaaja II pyrkii minimoimaan maksun, kun taas pelaaja I pyrkii maksimoimaan sen, ja aikaan saadaan köydenveto. Satunnaiskohinallisen köydenvedon ja p-Laplacen välinen yhteys on huomattu jo noin 15 vuotta sitten Peresin ja Sheffieldin [26] sekä Peresin, Schrammin, Sheffieldin ja Wilsonin [25] toimesta.

Ideana on näyttää, että lyhenevällä askelpituudella pelin arvofunktioiden muodostama jono suppenee tasaisesti yksikäsitteiseen p-Laplacen yhtälön viskositeettiratkaisuun. Todistaminen aloitetaan tuloksella, joka kertoo (p, ε)-harmonisten (engl. *p-harmonious*) funktioiden tasaisesti suppenevan jonon rajafunktion olevan viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle. Tämän jälkeen todistetaan, että pelillä on olemassa yksikäsitteinen (p, ε)-harmoninen arvo. Lopuksi Arzelá-Ascolin muunnelmalla todistetaan arvofunktioiden jonon tasainen suppeneminen, kun otetaan raja-arvo $\varepsilon \to 0$, jolloin todistus on valmis. Pääasiallisina lähteinä ovat olleet Parviaisen artikkeli [21], Manfredin, Parviaisen ja Rossin artikkeli [18] sekä Lewickan kirja [16].

1 Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{R}^n$	n-ulotteinen euklidinen avaruus
$\lvert\alpha\rvert$	$\alpha_1 + \dots \alpha_n$, kun $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
$D^\alpha u$	$\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, kun $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
$C(\Omega)$	Ω:n jatkuvien funktioiden avaruus
$C^k(\Omega)$	Ω:n k-kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruus
$B_\varepsilon(x)$	Avoin pallo $\{y \in \mathbb{R}^n : \lvert x - y\rvert < \varepsilon\}$
$\overline{B}_\varepsilon(x)$	Suljettu pallo $\{y \in \mathbb{R}^n : \lvert x - y\rvert \leq \varepsilon\}$
$\partial\Omega$	Joukon Ω reuna
$\overline{\Omega}$	Joukon Ω sulkeuma $\Omega \cup \partial\Omega$

2 Taustaa

Tässä luvussa käydään läpi joitain taustatietoja, jotta lukijan on helpompi seurata tulevia kappaleita. Ensimmäisessä alaluvussa 2.1 tutustutaan stokastiikkaan eli todennäköisyysteoriaan pintapuolisesti käymällä läpi perussanastoa ja määritelmiä. Lopulta päädytään satunnaismuuttujien kautta martingaaleihin ja pysäytysaikaan, joiden avulla todistetaan Doobin vaihtoehtoisen pysäyttämisen lause. Stokastiikkaa tullaan tarvitsemaan satunnaiskävelyn yhteydessä kappaleessa 4 sekä köydenvetopelien yhteydessä kappaleessa 5. Stokastiikasta voi lukea lisää esimerkiksi Evansin julkaisusta [9], Hannah ja Stefan Geissin monisteesta [11] tai Williamsin kirjasta [29].

Seuraavassa alaluvussa 2.2 syvennytään hieman osittaisdifferentiaaliyhtälöiden maailmaan. Kyseessä on lyhyt johdattelu aiheeseen, jossa pääpaino kulkee myöhemmissä kappaleissa tarvittavissa määritelmissä ja selkeyttävissä esimerkeissä. ODY:ihin liittyviä tuloksia tullaan todistamaan myöhemmissä kappaleissa tarpeen mukaan. Aiheesta voi lukea lisää esimerkiksi Evansin kirjasta [10] sekä Parviaisen luentomonisteista [22] ja [23].

Luvuissa 4 ja 5 lasketaan katoavia pallointegraaleja, joten seuraavan aputuloksen todistaminen on hyödyksi:

Lemma 2.1. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin*

$$\int_{B_\varepsilon(0)} (ax_i + bx_ix_j)dx = 0, \ \ \textit{kun } i \neq j.$$

Todistus. Pallo $B_\varepsilon(0)$ voidaan ajatella koordinaattien tulojoukkona, jolloin voidaan hyödyntää Fubinin lausetta. Merkitään

$$S_i := \sum_{k=1, k\neq i}^{n} x_k^2,$$

jolloin tulojoukko on järjestetty niin, että seuraavan koordinaatin rajat riippuvat edellisistä. Lisäksi viimeinen koordinaatti vastaa integroitavaa koordinaattia x_i. Nyt Fubinin lauseen nojalla integraali saadaan laskettavaan muotoon:

$$\int_{B_\varepsilon(0)} (ax_i + bx_ix_j)dx = \int \cdots \int_{-\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}}^{\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}} (ax_i + bx_ix_j)dx_i \dots dx_1.$$

Symmetrian nojalla ylläoleva lauseke yksinkertaistuu ja saadaan

$$\int_{-\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}}^{\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}} (ax_i + bx_ix_j)dx_i = (a + bx_j) \int_{-\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}}^{\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}} x_i dx_i = 0,$$

joten

$$\int_{B_\varepsilon(0)} (ax_i + bx_ix_j)dx = 0$$

kaikilla $i, j \in \{1, \dots, n\}$, kun $i \neq j$. $\square$

2.1 Stokastiikka

Seuraavaksi käydään läpi joitain stokastiikkaan eli todennäköisyysteoriaan liittyviä tuloksia ja määritelmiä. Tarkoituksena on tehdä pikakertaus mittateorian puolelle ja siirtää tuttuja tuloksia todennäköisyysavaruuksiin. Tämä osio seuraa pääasiassa Evansin julkaisua [9] ottaen vaikutteita Hannah ja Stefan Geissin luentomonisteesta [11].

Kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, missä Ω on epätyhjä joukko, $\mathcal{F}$ on Ω:n σ-algebra, ja $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ on todennäköisyysmitta, kutsutaan todennäköisyysavaruudeksi. Tämän luvun tulokset pätevät todennäköisyysavaruuksissa, joten on luonnollista lähteä liikenteeseen σ-algebroista ja todennäköisyysmitoista. Mittateorian pääpaino on suurimmalta osin mitallisissa funktioissa, ja samoin on myös stokastiikassa: todennäköisyysavaruuksissa mitallisia funktioita kutsutaan *satunnaismuuttujiksi*. Satunnaismuuttujien avulla pystytään todistamaan keskeisiä tuloksia, joiden avulla päästään määrittelemään muun muassa *odotusarvo* ja *martingaalit*. Näistä päästään lopulta luvun päätuloksen eli Doobin vaihtoehtoisen pysäyttämisen lauseen todistamiseen.

Määritelmä 2.2. Epätyhjän joukon Ω osajoukkojen kokoelmaa $\mathcal{F}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

(ii) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) Jos $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, niin

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$$

kutsutaan *σ-algebraksi*. Paria $(\Omega, \mathcal{F})$ kutsutaan *mitalliseksi avaruudeksi*, jos $\mathcal{F}$ on epätyhjän joukon Ω σ-algebra.

Määritelmä 2.3. Borelin σ-algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ on pienin σ-algebra, joka sisältää kaikki joukon Ω avoimet joukot.

Määritelmä 2.4. Olkoon $\mathcal{F}$ epätyhjän joukon Ω σ-algebra. Funktiota $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ kutsutaan *mitaksi*, jos:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ ja

(ii) Joukkojen $A_1, A_2, \dots \subset \mathcal{F}$ *erillisyydestä* seuraa

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ kutsutaan *mitta-avaruudeksi.*

Esimerkki 2.5. (i) Diracin mitta (engl. *Dirac measure*): kiinnitetään $\omega_0 \in \Omega$ ja määritellään *Diracin δ-mitta*

$$\delta_{\omega_0}(A) := \begin{cases} 1\ , & \omega_0 \in A, \\ 0\ , & \omega_0 \notin A. \end{cases}$$

(ii) Laskentamitta (engl. *counting measure*): Määritellään

$$\mu(A) := \#A,$$

eli joukon A kardinaalisuus eli alkioiden lukumäärä.

Määritelmä 2.6. Mitta-avaruutta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ tai mittaa μ kutsutaan äärelliseksi, jos $\mu(\Omega) < \infty$. Mitallisen avaruuden $(\Omega, \mathcal{F})$ äärellistä mittaa μ kutsutaan *todennäköisyysmitaksi*, jos $\mu(\Omega) = 1$. Kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ kutsutaan tässä tapauksessa *todennäköisyysavaruudeksi.*

Huomautus 2.7. Jatkossa todennäköisyysmitasta käytetään merkintää $\mathbb{P}$. Kolmikolla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ viitataan todennäköisyysavaruuteen ellei toisin mainita. Tällöin Ω on epätyhjä joukko, $\mathcal{F}$ on Ω:n σ-algebra ja $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ on mitallisen avaruuden $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysmitta.

Todennäköisyysmitan lisäksi stokastiikka eroaa yleisemmästä mittateoriasta suurelti sanastonsa puolesta. Stokastiikassa joukkoa Ω kutsutaan yleisesti *otanta-avaruudeksi* tai *tapahtuma-avaruudeksi.* Tällä viitataan ajatukseen siitä, että tarkastelun alaisena oleva tapahtuma-avaruus Ω sisältää kaikki mahdolliset lopputulokset. Näin ollen alkiota $\omega \in \Omega$ kutsutaan *perustapahtumaksi* tai *tilaksi* (myös otantapisteeksi, engl. *sample point*), ja joukkoja $A \in \mathcal{F}$ *tapahtumiksi.* Sanotaan, että tapahtuma tapahtuu, jos $\omega \in A$, ja ei tapahdu, jos $\omega \notin A$. Näin ollen todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ σ-algebra $\mathcal{F}$ voidaan tulkita tarkasteltavana olevien tapahtumien joukkona: siis mitattavana olevien tapahtumien kokoelmana. Tapahtuman $A \in \mathcal{F}$ *todennäköisyydellä* taas viitataan todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ antamaan arvoon $\mathbb{P}(A)$.

Määritelmä 2.2 antaa luonnollisen tulkinnan todennäköisyyksille σ-algebrojen avulla: puhuttaessa tapahtuman A todennäköisyydestä, voidaan yhtä hyvin puhua myös todennäköisyydestä, että tapahtuma A *ei tapahdu*, sillä määritelmän nojalla myös komplementti kuuluu σ-algebraan. Lisäksi todennäköisyysmitan ominaisuus $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ kertoo, että *jokin lopputulos tulee varmasti tapahtumaan*. Tästä päästään stokastiikan käsitteeseen *melkein varmasti*, joka on vastaava, kuin mittateoriasta tuttu käsite *melkein kaikilla*. Sanotaan, että ominaisuus $\mathcal{P}(\omega)$, joka riippuu pisteestä $\omega \in \Omega$, pätee melkein varmasti (voidaan lyhentää jatkossa m.v.), jos $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega) \text{ pätee}\} \in \mathcal{F}$ ja

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega) \text{ ei päde}\}) = 0.$$

Määritelmä 2.8. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Kuvausta

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

kutsutaan n-ulotteiseksi *satunnaismuuttujaksi*, jos jokaiselle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pätee

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Ylläoleva määritelmä on yhtäpitävä yleisen mitta-avaruuden mitallisten funktioiden määritelmän kanssa. Näin ollen satunnaismuuttujat ovat vain mitallisten funktioiden osajoukko. Toisinaan satunnaismuuttujat määritellään ekvivalentisti yksinkertaisten funktioiden rajafunktioina ([11], Def 4.1.2 ja Prop. 4.1.3).

Määritelmä 2.9. Integraalia

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

kutsutaan X:n *odotusarvoksi*.

Satunnaismuuttujiin törmätään satunnaispelien puolella, jossa tyypillisiä satunnaismuuttujia ovat köydenvetopelin sijainti k:nnella kierroksella. Tällaista merkitään x_k, jolloin odotusarvo pelille on $\mathbb{E}[F(x_k)]$, missä F on myöhemmin määriteltävä maksufunktio.

Määritelmä 2.10. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra. Integroituvalle satunnaismuuttujalle $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ määritellään *ehdollinen odotusarvo*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{V}]$$

olemaan mikä tahansa Ω:n satunnaismuuttuja, jolle

(i) $\mathbb{E}[X|\mathcal{V}]$ on $\mathcal{V}$-mitallinen ja

(ii) $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{V}] d\mathbb{P}$ kaikille $A \in \mathcal{V}$.

Huomautus 2.11. Ehdollisen odotusarvon määritelmä yhdessä odotusarvon määritelmän kanssa implikoi, että

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{V}]] = \mathbb{E}[X],$$

jos satunnaismuuttujan X odotusarvo on olemassa ja $\mathbb{E}[X|\mathcal{V}]$ on satunnaismuuttuja samassa todennäköisyysavaruudessa kuin X.

Tässä tutkielmassa merkitään tyypillisesti $\mathbb{E}[F(x_k)|\mathcal{F}_{k-1}]$ tai $\mathbb{E}[F(x_k)|(x_0, \ldots, x_{k-1})]$, jolloin voidaan heuristisesti ajatella tämän olevan odotusarvo, kun satunnaismuuttujien $(x_0, \ldots, x_{k-1})$ sisältämä informaatio on tiedossa. Ehdollisella odotusarvolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia. Näistä yhtä, seuraavassa lemmassa 2.13 todistettavaa, tullaan tarvitsemaan martingaalien ominaisuuksien todistamisessa. Muut ominaisuudet sivuutetaan, mutta niistä voi lukea esimerkiksi Williamsin kirjasta [29] kappaleesta 9. Esimerkiksi s. 84 löytyy ehdollisen odotusarvon olemassaolo.

Merkintä 2.12. Merkinnällä

$$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

viitataan *integroituvien funktioiden avaruuteen.* Tässä tapauksessa, jos $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, niin

$$\int_\Omega |f| d\mathbb{P} < \infty,$$

missä $|\cdot|$ viittaa Euklidiseen normiin.

Lemma 2.13. *Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satunnaismuuttuja ja $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-algebroja. Jos $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, niin*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]\mathcal{F}_1] \text{ melkein varmasti.}$$

Todistus. Olkoon $A \in \mathcal{F}_1$. Ehdollisen odotusarvon määritelmän 2.10 nojalla

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},$$

jolloin satunnaismuuttujan X integroituvuudesta seuraa, että myös satunnaismuuttuja $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$ on integroituva. Lisäksi inkluusiosta $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ saadaan saman määritelmän nojalla

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},$$

joten yhdistämällä nämä kaksi yhtäsuuruutta saadaan

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]d\mathbb{P}.$$

Lisäksi odotusarvon $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$ integroituvuudesta seuraa, että saatu yhtäsuuruus toteuttaa ehdollisen odotusarvon määritelmän 2.10, joten

$$\int_A \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1]d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]d\mathbb{P}.$$

Nyt ehdollisen odotusarvon yksikäsitteisyys yhdessä odotusarvon määritelmän 2.9 kanssa kertoo, että

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] \text{ melkein varmasti.} \qquad \square$$

Määritelmä 2.14. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Kokoelmaa σ-algebroja $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, joille pätee

$$\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1} \subset \mathcal{F} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N},$$

kutsutaan *filtraatioksi.*

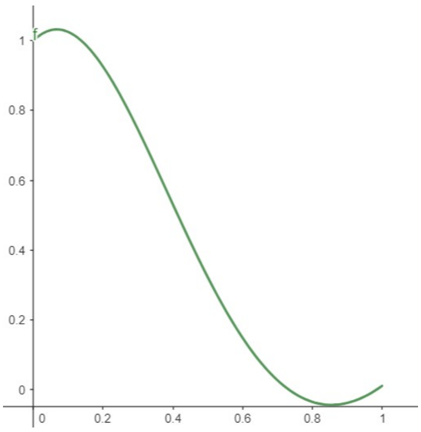
Intuitiivinen idea filtraatiossa on, että informaatio alkiosta $\omega \in \Omega$, joka on saatavilla ajanhetkellä n, koostuu arvoista $X(\omega)$, missä X on $\mathcal{F}_n$-mitallinen funktio. Tämä yhdessä ehdollisen odotusarvon kanssa antaa tavan approksimoida arvoja, kuten seuraava esimerkki näyttää:

Esimerkki 2.15. Otetaan todennäköisyysavaruudeksi $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$, missä λ viittaa Lebesguen mittaan, ja tarkastellaan välillä $[0,1[$ määriteltyä funktiota

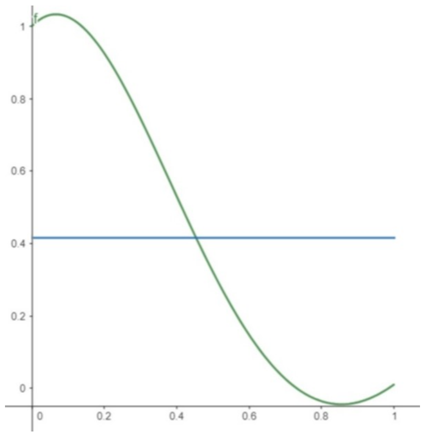
$$f(x) := \cos(x^2 - 4x) + x$$

sekä sen ehdollisia odotusarvoja. Tehdään funktion kuvaajalle filtraation avulla puolitushaku heittämällä kolikkoa. Kolikonheitto tulkitaan tässä tapauksessa satunnaismuuttujana, joka kertoo mennäänkö oikean- vai vasemmanpuoleiseen osaväliin. Kolikonheitto voidaan kuvata binäärisesti merkitsemällä kruunaa 1 ja klaavaa 0, jolloin peräkkäiset kolikonheitot muodostavat binääriluvun. Näin ollen voidaan merkitä esimerkiksi $x_1 = 1$, jos ensimmäisestä heitosta saadaan kruuna. Tällöin saadaan jono satunnaismuuttujia $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Jokaisen heiton jälkeen hakuvälin pituus puolitetaan ja funktion arvoa estimoidaan ehdollisen odotusarvon avulla jokaisella osavälillä. Tätä jatkettaessa filtraatio tihenee, jolloin ehdollinen odotusarvo approksimoi yhä paremmin funktion arvoja.

Ennen ensimmäistä jakoa σ-algebrana toimii triviaali σ-algebra $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, [0,1]\}$, jolloin ehdolliseksi odotusarvoksi saadaan vakiofunktio.

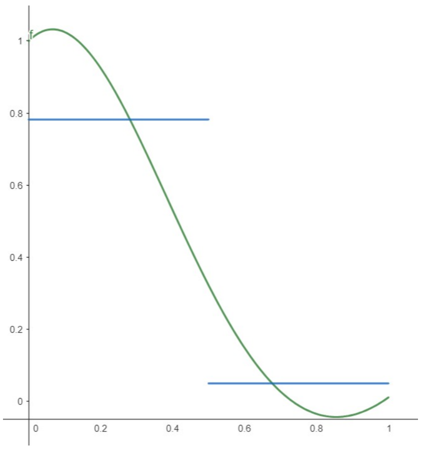


Kuva 2.1: Funktion $f(x) := \cos(x^2 - 4x) + x$ kuvaaja.

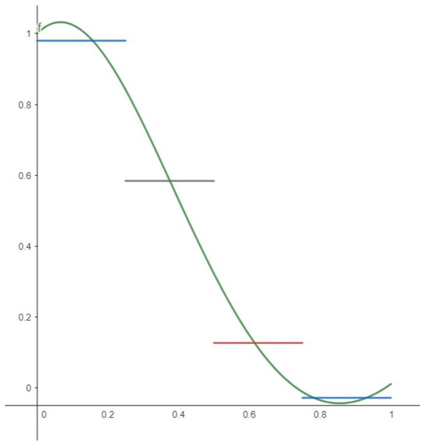


Kuva 2.2: Odotusarvo σ-algebran $\mathcal{F}_0$ suhteen.

Ensimmäisen jaon jälkeen ehdollinen odotusarvo jakautuu kahdeksi palaseksi. Tilannetta vastaa σ-algebra $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset; [0,1[; [0, \frac{1}{2}[; [\frac{1}{2}, 1[\}$, jolloin ehdollista odotusarvoa voidaan merkitä $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_1]$ tai vastaavasti $\mathbb{E}[f|x_1]$. Toisen jaon tapauksessa σ-algebra on jo huomattavasti suurempi ja kuvasta näkee, että ehdollinen odotusarvo alkaa approksimoida yhä paremmin funktion kuvaajaa. Tässä tilanteessa ehdollinen odotusarvo voidaan merkitä $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_2]$ tai yhtäpitävästi $\mathbb{E}[f|(x_1, x_2)]$.



Kuva 2.3: Odotusarvo σ-algebran $\mathcal{F}_1$ suhteen.



Kuva 2.4: Odotusarvo σ-algebran $\mathcal{F}_2$ suhteen.

Määritelmä 2.16. Olkoon $X = \{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ satunnaismuuttujien jono siten, että $\mathbb{E}[|X_j|] < \infty$ kaikille j, ja $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$ filtraatio, jolle X_j on $\mathcal{F}_j$-mitallinen.

(i) Jos
$$X_j = \mathbb{E}[X_{j+1}|\ \mathcal{F}_j] \quad \text{m.v kaikille } j,$$
niin X on *martingaali* suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$.

(ii) Jos
$$X_j \leq \mathbb{E}[X_{j+1}|\ \mathcal{F}_j] \quad \text{m.v kaikille } j,$$
niin X on *alimartingaali* suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$.

(iii) Jos
$$X_j \geq \mathbb{E}[X_{j+1}|\ \mathcal{F}_j] \quad \text{m.v kaikille } j,$$
niin X on *ylimartingaali* suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Martingaali on siis satunnaismuuttujien jono, jossa jokaisen alkion ehdollinen odotusarvo tuleville alkioille on sama kuin kyseisen hetken alkio, riippumatta aikaisemmista arvoista. Ylimartingaalin voidaan ajatella vähenevän keskimääräisesti, ja alimartingaalin taas kasvavan.

Seuraavaksi todistetaan kaksi martingaalin ominaisuutta, joita tullaan tarvitsemaan myöhemmin Doobin vaihtoehtoisen pysäyttämisen lauseen 2.22 todistamisessa. Martingaalin määritelmässä ideana on tarkastella kahta peräkkäistä satunnaismuuttujaa, kun taas seuraava lause näyttää, että satunnaismuuttujien ei tarvitse olla peräkkäisiä. Tämän jälkeen tarkastellaan pysäytysaikoja sekä niiden ominaisuuksia yhdessä martingaalien kanssa.

Lause 2.17. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *todennäköisyysavaruus ja* $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ *martingaali suhteessa filtraatioon* $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$*. Tällöin*

(i) $X_j = \mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j]$ *melkein varmasti kaikilla* $0 \leq j \leq k$.

(ii) $\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}[X_0]$ *kaikille* $j \geq 0$.

Vastaavasti, jos $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ *on alimartingaali, niin yhtäsuuruden tilalla on* $\leq$*. Jos* $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ *on ylimartingaali, on yhtäsuuruuden tilalla* $\geq$*.*

Todistus. (i) Epäyhtälöstä $0 \leq j < k$ seuraa, että $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{k-1}$, jolloin lemmasta 2.13 yhdessä määritelmän 2.16 kanssa seuraa, että

$$\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]|\mathcal{F}_j] = \mathbb{E}[X_{k-1}|\mathcal{F}_j]$$

melkein varmasti. Toistamalla samaa päättelyä niin kauan, kuin $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{k-n}$, missä $n \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{k-1}|\mathcal{F}_j] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-2}]|\mathcal{F}_j] \\
&= \mathbb{E}[X_{k-2}|\mathcal{F}_j] \\
&\vdots \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{j+2}|\mathcal{F}_{j+1}]|\mathcal{F}_j] \\
&= \mathbb{E}[X_{j+1}|\mathcal{F}_j] \\
&= X_j
\end{aligned}$$

melkein varmasti kaikilla $0 \leq j < k$.

(ii) Edellisen kohdan nojalla $X_0 = \mathbb{E}[X_j|\mathcal{F}_0]$ melkein varmasti kaikilla $j \geq 0$. Lisäksi σ-algebran määritelmän nojalla $\Omega \subset \mathcal{F}_0$, joten määritelmästä 2.9 seuraa, että

$$\mathbb{E}[X_j] = \int_\Omega X_j d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{E}[X_j|\mathcal{F}_0] d\mathbb{P} = \int_\Omega X_0 d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X_0].$$

Samat päättelyt voidaan tehdä myös ali- ja ylimartingaalien kohdalla päivittämällä yhtäsuuruuksien kohdalle tarpeen mukaan epäyhtälömerkit. □

Määritelmä 2.18. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^\infty$ σ-algebrojen filtraatio. Satunnaismuuttujaa $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ kutsutaan *pysäytysajaksi* suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^\infty$, jos

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{N}.$$

Pysäytysaika kertoo joukon $\{\tau \leq n\}$ olevan $\mathcal{F}_n$-mitallinen. Tämän avulla päästään tarkastelemaan mitä tapahtuu, jos martingaalin pysäyttää satunnaisesti. Vaihtoehtoisen pysäyttämisen lauseesta 2.22 käy ilmi, että martingaalin odotusarvo pysäytyshetkellä on yhtä suuri kuin sen aloitushetkellä. Näin ollen, jos tulevaisuutta ei voi ennustaa, mahdollisuus pysäyttää sopivaan aikaan ei hyödytä. Ennen tämän todistamista täytyy kuitenkin todistaa vielä joitain aputuloksia.

Lemma 2.19. *Olkoon τ_1, τ_2 pysäytysaikoja. Tällöin myös*

$$\tau_1 \wedge \tau_2 := \min\{\tau_1, \tau_2\}$$

on pysäytysaika.

Todistus. Kaikille $t \geq 0$ pätee $\{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ ja $\{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, joten

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} = \{\min\{\tau_1, \tau_2\} \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cup \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

joten $\tau_1 \wedge \tau_2$ on pysäytysaika. □

Lause 2.20. *Olkoon $X = \{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ martingaali ja τ pysäytysaika suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. Tällöin $\{X_{\tau \wedge j}\}_{j=0}^{\infty}$ on martingaali suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. Vastaava tulos pätee myös ali- ja ylimartingaaleille.*

Todistus. Todistetaan lemma alimartingaaleille. Tiedetään, että jokainen satunnaismuuttuja $X_{\tau \wedge j}$ on $\mathcal{F}_{\tau \wedge j}$-mitallinen ja siten myös $\mathcal{F}_j$-mitallinen. Tämän lisäksi $X_{\tau \wedge j}$ on $\mathbb{P}$-integroituva melkein varmasti. Olkoon $A \in \mathcal{F}_j$. Tällöin määritelmän 2.10 nojalla

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{E}[X_{\tau \wedge (j+1)} | \mathcal{F}_j] d\mathbb{P} &= \int_A X_{\tau \wedge (j+1)} d\mathbb{P} \\
&= \int_{A \cap \{\tau \leq j\}} X_{\tau \wedge (j+1)} d\mathbb{P} + \int_{A \cap \{\tau > j\}} X_{\tau \wedge (j+1)} d\mathbb{P} \\
&= \int_{A \cap \{\tau \leq j\}} X_{\tau \wedge j} d\mathbb{P} + \int_{A \cap \{\tau > j\}} X_{j+1} d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Ylläoleva päättely pitää, sillä jos $\tau \leq j$, niin $\min\{\tau, j+1\} = \min\{\tau, j\}$ ja jos $\tau > 1$, niin $\min\{\tau, j+1\} = j+1$. Lisäksi oletuksesta $A \in \mathcal{F}_j$ seuraa, että $A \cap \{\tau > j\} \in \mathcal{F}_j$. Nyt oikeanpuoleinen integraali on alhaalta rajoitettu, joten voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
&\int_{A \cap \{\tau \leq j\}} X_{\tau \wedge j} d\mathbb{P} + \int_{A \cap \{\tau > j\}} \mathbb{E}[X_{k+1} \mathcal{F}_j] d\mathbb{P} \\
&\geq \int_{A \cap \{\tau \leq j\}} X_{\tau \wedge j} d\mathbb{P} + \int_{A \cap \{\tau > j\}} X_j d\mathbb{P} \\
&= \int_{A \cap \{\tau \leq j\}} X_{\tau \wedge j} d\mathbb{P} + \int_{A \cap \{\tau > j\}} X_{\tau \wedge j} d\mathbb{P} \\
&= \int_A X_{\tau \wedge j} d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Nyt määritelmän 2.16 nojalla $\{X_{\tau \wedge j}\}_{j=0}^{\infty}$ on alimartingaali suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. □

Seuraavaksi siirrytään luvun päätulokseen eli vaihtoehtoisen pysäyttämisen lauseeseen. Todistuksessa tarvitaan myös dominoitua konvergenssia, joka on tuttu mittateorian puolelta (kts. esimerkiksi Lehrbäckin moniste [15]). Siirretään tämä tulos kuitenkin martingaalien tapaukseen. Lauseen pääsisältö pysyy oleellisesti samana eikä sitä todisteta.

Lause 2.21 (Dominoitu konvergenssi)**.** *Olkoon* $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ *jono satunnaismuuttujia todennäköisyysavaruudessa* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Oletetaan, että jono suppenee pisteittäin melkein varmasti satunnaismuuttujaan* X. *Oletetaan lisäksi, että on olemassa satunnaismuuttuja* $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *siten, että* $|X_j| \leq Z$ *melkein varmasti kaikilla* $j \in \mathbb{N}$. *Tällöin* $X, X_j \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ja*

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\Omega} X_j d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

Lause 2.22 (Vaihtoehtoisen pysäyttämisen lause)**.** *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *todennäköisyysavaruus. Olkoon* $X = \{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ *martingaali ja* τ *pysäytysaika suhteessa filtraatioon* $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. *Oletetaan, että joko*

(1) pysäytysaika τ *on rajoitettu, tai*

(2) on olemassa integroituva satunnaismuuttuja $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *siten, että* $|X_j| \leq Z$ *melkein varmasti kaikille* $j \geq 0$.

Tällöin $X_\tau \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ja*

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0].$$

Jos X *on alimartingaali, niin*

$$\mathbb{E}[X_\tau] \geq \mathbb{E}[X_0]$$

ja jos X *on ylimartingaali, niin*

$$\mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_0].$$

Todistus. Todistuksessa käytetään Williamsin kirjan [29] todistuksen ideaa (s. 100 Theorem 10.10). Todistetaan tapaus, jossa $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ on martingaali. Ali- ja ylimartingaali seuraavat samankaltaisilla argumenteilla ottaen tarvittavat epäyhtälöt määritelmistä huomioon. Ensimmäisenä todistetaan $\mathbb{E}[X_{\tau \wedge j}] = \mathbb{E}[X_0]$ käyttämällä lemmaa 2.13 ja lausetta 2.17. Tämän jälkeen oletuksesta (1) voidaan j valita olemaan kyseinen rajoitus pysäytysajalle τ, jonka avulla saadaan näytettyä yhtäsuuruus. Oletuksen (2) ollessa voimassa käytetään dominoidun konvergenssin lausetta 2.21.

Oletetaan, että τ on pysäytysaika suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. Tällöin lauseen 2.20 nojalla $\{X_{\tau \wedge j}\}_{j=0}^{\infty}$ on martingaali filtraation $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$ suhteen. Näin ollen lauseen 2.17 kohdan (ii) nojalla

$$\mathbb{E}[X_{\tau \wedge j}] = \mathbb{E}[X_0].$$

Pysäytysajan määritelmästä seuraa, että τ on äärellinen melkein varmasti, joten satunnaismuuttuja X_τ on hyvin määritelty melkein varmasti. Näin ollen $\lim_{j\to\infty}(\tau \wedge j) = \tau$ melkein varmasti, joten

$$\lim_{j\to\infty} X_{\tau\wedge j} = X_\tau \text{ melkein varmasti.}$$

Oletuksen (1) ollessa voimassa, on pysäytysaika τ rajoitettu. Tästä seuraa, että on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\tau \wedge n = \tau$ kaikilla $n \geq n_0$, jolloin $X_{\tau\wedge n} = X_\tau$. Koska $\{X_{\tau\wedge j}\}_{j=0}^\infty$ on martingaali suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^\infty$, niin määritelmän nojalla $X_{\tau\wedge j}$ on integroituva. Näin ollen, kun $n \geq n_0$, on myös X_τ integroituva, joten

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0].$$

Oletuksen (2) ollessa voimassa tiedetään, että on olemassa integroituva satunnaismuuttuja $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siten, että $|X_j| \leq Z$ melkein varmasti kaikilla $j \geq 0$. Koska määritelmän mukaan pysäytysaika τ on äärellinen melkein varmasti, niin kaikilla $j \geq 0$ melkein varmasti

$$|X_{\tau\wedge j}| \leq Z.$$

Tällöin dominoidun konvergenssin lause 2.21 kertoo, että X_τ on integroituva ja

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[X_{\tau\wedge j}] = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega X_{\tau\wedge j} d\mathbb{P} = \int_\Omega X_\tau d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X_\tau],$$

joten

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[X_{\tau\wedge j}] = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_0]. \qquad \square$$

2.2 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Seuraavaksi siirrytään käsittelemään osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Tässä tutkielmassa tullaan tarkastelemaan sekä ensimmäisen että toisen asteen ODY:jä. Tämän luvun tarkoitus on käydä läpi perusteoriaa, jota tullaan hyödyntämään muissa kappaleissa.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt (ODY:t, engl. *partial differential equations* tai PDEs) ovat yhtälöitä, jotka koostuvat tuntemattoman funktion osittaisderivaatoista useiden riippumattomien muuttujien suhteen. Nämä eroavat tavallisista differentiaaliyhtälöistä (engl. *ordinary differential equations*) siinä, että ODY:t sisältävät derivaattoja kahden tai useamman muuttujan suhteen, kun taas tavalliset differentiaaliyhtälöt vain yhden. ODY:illä pystytään mallintamaan esimerkiksi monia fysikaalisia ilmiöitä, kuten lämmön johtumista tai sähköpotentiaalia. Muita sovelluskohteita löytyy niin mekaniikasta, kvanttifysiikasta kuin monista muistakin fysiikan haaroista.

Tästä eteenpäin merkinnällä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ viitataan avoimeen, rajoitettuun ja yhtenäiseen joukkoon. Jatkossa todennäköisyyden perusjoukkoa, jota edellisessä luvussa merkittiin myös Ω, ei merkitä näkyviin, joten epäselvyyttä tässä tapauksessa ei ole. Tämän osion pääasiallisena lähteenä on toiminut Evansin kirja [10]. Vaikutteita on otettu myös Parviaisen luentomonisteista [22] ja [23].

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tutkittaessa täytyy ottaa huomioon funktioiden sileys. Tämän vuoksi usein rajoitutaan k-kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruuteen, missä $k = 1, 2, \ldots$.

Merkintä 2.23. Olkoon $u : \Omega \to \mathbb{R}$ funktio. Jos u on jatkuva määrittelyjoukossaan, niin merkitään

$$u \in C(\Omega).$$

Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Jos u on k-kertaa jatkuvasti derivoituva, niin merkitään

$$u \in C^k(\Omega).$$

Huomautus 2.24. On syytä muistaa, että

$$u \in C^k(\Omega) \iff D^\alpha u \in C(\Omega)$$

kaikille multi-indekseille $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}$, joille $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq k$, missä

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} + \cdots + \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Ylläoleva huomautus viittaa vektorianalyysin kurssilla läpikäytyyn k-kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden ominaisuuteen (kts. esimerkiksi Kilpeläisen luentomoniste [14] luku 3.4). Funktio u on siis k-kertaa jatkuvasti derivoituva jos ja vain jos jokaiselle multi-indeksille $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}$, jolle $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq k$ pätee, että

$$D^\alpha u \in C(\Omega).$$

Toisin sanoen jokainen osittaisderivaatta k:hon asti on jatkuva.

Merkintä 2.25 (Gradientti)**.** Olkoon $u : \Omega \to \mathbb{R}$ funktio, jonka kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa. Tällöin u:n *gradientti* on vektori

$$Du = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big),$$

missä $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ on u:n i:s osittaisderivaatta.

Gradientti antaa tietoa siitä, miten funktio u muuttuu eri muuttujien suhteen. Se osoittaa funktion maksimaalisen kasvun nopeuden ja on kohtisuorassa funktion tasa-arvojoukkoja kohtaan. Tässä tutkielmassa osittaisderivaatasta voidaan käyttää myös merkintää u_{x_i}, jolloin gradienttia voidaan merkitä $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$.

Esimerkki 2.26. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ja $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että $u \in C^2(\Omega)$ ja $(x_1, x_2) \in \Omega$. Tällöin yhtälö

$$u_{x_1x_1}(x_1, x_2) + u_{x_2x_2}(x_1, x_2) = 0,$$

missä $u_{x_ix_i}$ viittaa toiseen derivaattaan muuttujan x_i suhteen, on osittaisdifferentiaaliyhtälö. Usein tarkastellaan niin kutsuttuja reuna-arvo-ongelmia, joissa etsitään ratkaisua osittaisdifferentiaaliyhtälölle, kun annettuna ovat jotkin reunaehdot, jotka ratkaisun tulee toteuttaa:

$$(x_1, x_2) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{cases} u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0 & \text{joukossa } \Omega \\ u = g & \text{joukossa } \partial\Omega. \end{cases}$$

Esimerkki 2.27. Olkoon $u : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1-funktio. Kuljetusyhtälö (engl. *transport equation*)

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = 0 & \text{joukossa } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{joukossa } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

missä

$$u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ (tuntematon, joka täytyy löytää)},$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ (annettu)},$$
$$b = (b_1, ..., b_n) \text{ (annettu)},$$
$$Du = (u_{x_1}, ..., u_{x_n}) \text{ gradientti},$$

kuvaa jonkin aineen, energian tai muun ominaisuuden kulkeutumista avaruudessa ja ajassa. Merkinnällä u_t viitataan derivaattaan ajan suhteen.

Määritelmä 2.28. Lauseke, joka on muotoa

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), ..., u(x), x) = 0, \quad (x \in U) \tag{2.1}$$

on k:nnen asteen *osittaisdifferentiaaliyhtälö* eli ODY, missä

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \Omega \times U \to \mathbb{R}$$

on annettu ja

$$u : \Omega \to \mathbb{R}.$$

on tuntematon funktio.

Gradientin lisäksi toinen derivaattojen avulla määritelty operaattori, jota hyödynnetään tässä tutkielmassa, on *divergenssi*. Divergenssi määritellään pisteittäin summana osittaisderivaatoista:

Määritelmä 2.29. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : A \to \mathbb{R}^n$, ja $x_0 \in A$ piste, jossa f on derivoituva. Tällöin funktion f *divergenssi pisteessä* x_0 on

$$\operatorname{div} f(x_0) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_0).$$

ODY:jä voidaan luokitella useiden eri ominaisuuksien perusteella. Esimerkissä 2.27 esitelty kuljetusyhtälö on *lineaarinen*. ODY:jen tapauksessa lineaarisuudella tarkoitetaan sitä, että ODY:ssä esiintyvät funktio u sekä sen osittaisderivaatat esiintyvät lineaarisesti eli niitä ei ole kerrottu keskenään. Tämän tutkielman kannalta yksi olennaisimmista osittaisdifferentiaaliyhtälöistä on epälineaarinen yhtälö nimeltään *p-Laplacen yhtälö*:

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = 0, \text{ kun } p > 1.$$

Tähän tutustutaan tarkemmin satunnaiskohinallisten köydenvetopelien yhteydessä kappaleessa 5, jossa keskitytään tilanteeseen $2 < p < \infty$. Jos $p = 2$ tästä saadaan lineaarinen versio nimeltään *Laplacen yhtälö*:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0.$$

Tähän taas tutustutaan satunnaiskävelyn yhteydessä kappaleessa 4. Optimaalisen kontrollin puolella kappaleessa 3 tullaan hyödyntämään epälineaarista *Hamilton-Jacobi* yhtälöä:

$$u_t + H(Du, x) = 0.$$

Huomautus 2.30.

- Funktiota u kutsutaan k:nnen asteen ODY:n klassiseksi ratkaisuksi, jos se toteuttaa ODY:n pisteittäin ja on k-kertaa jatkuvasti derivoituva eli $u \in C^k(\Omega)$. Esimerkiksi $u \in C^2(\Omega)$, jolle $Du = 0$, on klassinen ratkaisu Laplacen yhtälölle.
- Joskus, etenkin epälineaaristen ODY:jen kanssa, voi käydä niin, että klassisia ratkaisuja ei ole olemassa. Tällöin, jotta ratkaisuja ja niiden ominaisuuksia olisi mielekästä tutkia, voidaan siirtyä heikkojen ratkaisujen sekä erityisesti viskositeettiratkaisujen puolelle. Viskositeettiratkaisuja tullaan käyttämään seuraavassa kappaleessa 3 sekä viimeisessä kappaleessa 5.

3 Optimaalinen kontrolli ja ensimmäisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Optimaalinen kontrolliteoria on matematiikan haara, jolla on paljon sovelluskohteita niin eri tieteen- kuin tekniikan aloilla. Nimensä mukaisesti kontrolliteoriassa pyritään löytämään paras mahdollinen eli optimaalinen kontrollistrategia annetulle dynaamiselle systeemille halutun lopputuloksen saavuttamiseksi. Kappaleessa tullaan todistamaan Bellmanin dynaamisen ohjelmoinnin periaate sekä rakentamaan optimaalinen palautekontrolli sen avulla. Pääasiallisina lähteinä ovat toimineet Evansin moniste [8] sekä Bardin ja Capuzzo-Dolcettan kirja [2], ottaen lisäksi vaikutteita Todorovin julkaisusta [28]. Useat todistukset seuraavat myös Evansin kirjaa [10].

Kontrolliteoria käsittelee systeemejä, joita voidaan *kontrolloida* eli joiden kehitykseen voi vaikuttaa jokin ulkoinen tekijä. Tavoitteena on löytää kontrolli, joka minimoi tai maksimoi määritellyn maksufunktionaalin, kun annettuna on aloituspiste $x \in \mathbb{R}^n$ sekä aikaväli $0 \leq t \leq T$. Tällaisista optimaalisen kontrollin ongelmista nousee esimerkiksi seuraavanlaisia matemaattisia kysymyksiä:

(i) Onko optimaalinen kontrolli olemassa?

(ii) Kuinka optimaalinen kontrolli voidaan karakterisoida matemaattisesti?

(iii) Kuinka optimaalinen kontrolli voidaan muodostaa?

Ensimmäisenä tutustutaan Hamilton-Jacobi-yhtälöön yhdessä viskositeettiratkaisujen kanssa. Tämän jälkeen tarkastellaan näiden yhteyttä kontrolliteoriaan dynaamisen ohjelmoinnin kautta ja löydetään yhteys arvofunktion sekä Hamilton-Jacobi-Bellman-yhtälön välille.

3.1 Hamilton-Jacobi-yhtälö ja viskositeettiratkaisut

Tavoitteena on tutkia sopivalla tavalla määriteltyjen heikkojen ratkaisujen, *viskositeettiratkaisujen*, olemassaoloa, yksikäsitteisyyttä sekä muita ominaisuuksia *Hamilton-Jacobi-yhtälöksi* kutsutulle ajasta riippuvalle alkuarvo-ongelmalle

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 & \text{joukossa } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{joukossa } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

missä annettuina ovat *Hamiltonin funktio* (engl. *Hamiltonian*) $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sekä reunafunktio $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Muuttujalla t viitataan aikaan: Hamilton-Jacobi-yhtälön tapauksessa lähdetään liikkeelle ajanhetkestä $t = 0$ ja seurataan differentiaaliyhtälön kehitystä ajan edetessä. Ajan muutosta kuvastaa tuntemattoman funktion $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R},\ u = u(x,t)$, osittaisderivaatta ajan t suhteen, jota merkitään yhtälössä u_t. Lisäksi tuntemattomana on u:n gradientti $Du = D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$. Monesti kirjoitetaan $H = H(p,x)$, missä p on sen muuttujan nimi, jolla gradientti Du korvataan ODY:ssä.

Tästä eteenpäin oletetaan, että yhtälössä (3.1) esiintyvät funktiot H ja g ovat jatkuvia. Tämän tutkielman kannalta oleellisessa tilanteessa H riippuu sekä pisteestä x, että muuttujasta p, eikä välttämättä ole konveksi p:n suhteen. Tällaisessa tilanteessa klassisia ratkaisuja ei välttämättä ole. Tämän vuoksi määritellään heikompi ratkaisujen käsite, jotta on mielekästä puhua Hamilton-Jacobi-yhtälön ratkaisemisesta. Tässä tutkielmassa käsitellään *viskositeettiratkaisuja*.

Määritelmä 3.1. Sanotaan, että rajoitettu ja tasaisesti jatkuva funktio $u : \mathbb{R}^n \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ on viskositeettiratkaisu Hamilton-Jacobi-yhtälölle (3.1), jos

1. $u = g$ joukossa $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$
2. jokaiselle testifunktiolle $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, jolle funktiolla $u - \phi$ on pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

   (a) *lokaali maksimi* pätee

   $$\phi_t + H(D\phi(x_0), x_0) \leq 0$$

   (b) *lokaali minimi* pätee

   $$\phi_t + H(D\phi(x_0), x_0) \geq 0.$$

On syytä huomioida, että määritelmän toisen kohdan molempien alakohtien (a) ja (b) tulee päteä *kaikille* testifunktioille, joiden kanssa $u - \phi$ saavuttaa lokaalin ääriarvonsa. Jos u toteuttaa määritelmän kohdan (a), sitä kutsutaan viskositeetti*ali*ratkaisuksi. Jos u toteuttaa määritelmän kohdan (b) sitä kutsutaan viskositeetti*yli*ratkaisuksi. Näin ollen ratkaisu, joka on sekä viskositeettiali- että -yliratkaisu, on ratkaisu viskositeettimielessä. Seuraavaksi on syytä tarkistaa, että tämä määritelmä ei ole ristiriidassa klassisten ratkaisujen kanssa.

Lemma 3.2. *Hamilton-Jacobi-yhtälön (3.1) klassiset ratkaisut ovat viskositeettiratkaisuja. Lisäksi jatkuvasti derivoituvat viskositeettiratkaisut ovat klassisia ratkaisuja.*

Todistus. Oletetaan, että u on klassinen ratkaisu Hamilton-Jacobi-yhtälölle. Tällöin jokaiselle testifunktiolle ϕ, jolle $u-\phi$ saavuttaa lokaalin maksimin (tai minimin) pisteessä $x_0 \in \Omega$, pätee $Du(x_0) = D\phi(x_0)$. Tästä seuraa, että myös aikaderivaatat ovat samat. Näin ollen u:n viskositeettius seuraa triviaalisti. Jos taas u on jatkuvasti derivoituva viskositeettiratkaisu, niin valitsemalla testifunktioksi $\phi = u$ saadaan u klassiseksi ratkaisuksi. □

On syytä huomauttaa, että tämä tulos pätee ensimmäisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälöille, mikäli viskositeettiratkaisujen määritelmässä 3.1 puhutaan yleisestä ODY:stä Hamilton-Jacobin sijaan. Sopiville toisen asteen ODY:ille tulos pätee myös, mutta triviaalius ei ole selvää ja todistus on hieman monimutkaisempi.

Todistetaan vielä testifunktion olemassaolo tilanteessa, jossa u on derivoituva yhdessä pisteessä. Lauseen todistus seuraa Evansin kirjan [10] todistusta s.544-545.

Lemma 3.3. *Oletetaan, että $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja lisäksi derivoituva jossain pisteessä x_0. Tällöin on olemassa funktio $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ siten, että*

$$u(x_0) = v(x_0)$$

ja

$$u - v \text{ saavuttaa aidon lokaalin miniminsä pisteessä } x_0.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että

$$x_0 = 0, \quad u(0) = Du(0) = 0,$$

sillä muutoin voidaan käsitellä funktiota $\tilde{u}(x) := u(x+x_0)-u(x_0)-Du(x_0)\cdot x$ funktion u sijaan. Tämä yhdessä jatkuvuuden ja derivoituvuuden kanssa kertoo, että

$$u(x) = |x|\rho_1(x),$$

missä $\rho_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $\rho_1(0) = 0$. Määritellään funktio $\rho_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ asettamalla

$$\rho_2(r) := \max_{x \in B(r)} \{|\rho_1(x)|\} \quad (r \geq 0).$$

Tällöin ρ_2 on jatkuva ja kasvava funktio, jolle $\rho_2(0) = 0$. Nyt kirjoittamalla

$$v(x) := \int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r)dr + |x|^2 \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

ja huomaamalla, että $|v(x)| \leq |x|\rho_2(2|x|) + |x|^2$, saadaan

$$v(0) = Dv(0) = 0.$$

Lisäksi, jos $x \neq 0$, saadaan yhdistetyn kuvauksen derivointisääntöjä käyttämällä

$$Dv(x) = \frac{2x}{|x|}\rho_2(2|x|) - \frac{x}{|x|}\rho_2(|x|) + 2x,$$

joten $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Lopuksi, jos $x \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} u(x_0) - v(x_0) &= |x|\rho_1(x) - \int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r)dr - |x|^2 \\ &\leq |x|\rho_2(|x|) - \int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r)dr - |x|^2 \\ &\leq -|x|^2 \quad (\rho_2 \text{ kasvava}) \\ &< 0 = u(0) - v(0). \end{aligned}$$

Näin ollen $u - v$ saavuttaa aidon lokaalin miniminsä nollassa. □

Viimeisenä viskositeettiratkaisuihin liittyen täytyy varmistaa niiden yksikäsitteisyys. Tarkemmin sanottuna kiinnitetään lopetusaika $T > 0$ ja tarkastellaan alkuarvo-ongelmaa

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 & \textit{joukossa } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \textit{joukossa } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Sanotaan, että rajoitettu ja tasaisesti jatkuva funktio u on ylläolevan ongelman viskositeettiratkaisu, jos sekä alkuarvo, että epäyhtälö (a) (myös (b)) pätevät paikallisen minimin (maksimin) kohdalla pisteessä $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$. Jatkossa oletetaan, että Hamiltonin funktio H täyttää Lipschitz-jatkuvuuden oletukset, siis

$$\begin{cases} |H(p, x) - H(q, x)| \leq C|p - q| \\ |H(p, x) - H(p, y)| \leq C|x - y|(1 + |p|), \end{cases} \tag{3.3}$$

missä $x, y, p, q \in \mathbb{R}^n$, jollekin vakiolle $C \geq 0$.

Seuraava lause varmistaa viskositeettiratkaisujen yksikäsitteisyyden. Lauseen todistus löytyy Evansin kirjasta [10] s. 548-550.

Lause 3.4. *Oletuksien (3.3) ollessa voimassa ongelmalla (3.2) on korkeintaan yksi viskositeettiratkaisu.*

3.2 Dynaaminen ohjelmointi

Dynaamisen ohjelmoinnin tavoitteena on tutkia optimointiongelmia arvofunktion kautta. Tarkoituksena on tarkastella arvofunktiota u, joka kuvaa paikan x ja ajan t tilaa. Aloittaen aloituspisteestä x_0 ja -ajasta t_0, kontrolliongelma upotetaan laajempaan luokkaan samankaltaisia ongelmia, joissa paikan kehitys ajan suhteen muuntelee.

Optimaalisen kontrollin formulointi dynaamisessa optimointiongelmassa keskittyy yhteen tai useampaan *kontrollimuuttujaan*, jotka toimivat optimoinnin välineinä. Toisin kuin tavallisessa variaatiolaskennassa (engl. *calculus of variations*), jossa pyritään löytämään optimaalinen aikapolku tilamuuttujalle x, optimaalisen kontrollin tavoitteena on löytää optimaalinen aikapolku *kontrollimuuttujalle* α. Kun tämä polku $\alpha^*(t)$ on määritetty, voidaan määrittää optimaalinen tilapolku $\mathbf{x}^*(t)$ vastaamaan sitä.

Huomautus 3.5. On syytä huomauttaa, että kontrollipolun ei tarvitse olla jatkuva ollakseen hyväksyttävä: paloittainen jatkuvuus riittää. Näin ollen kontrollipolulla voi olla hyppäysepäjatkuvuutta, mutta ei sellaisia pisteitä, missä $\alpha(t) = \infty$ jollain $0 \leq t \leq T$. Lisäksi tilapolun $x(t)$ tulee olla jatkuva koko aikavälillä $[0, T]$, mutta siinä voi olla äärellinen määrä epäderivoituvia pisteitä.

Esimerkki 3.6. Merkitään $x(t) \in \mathbb{R}^2$ veneen paikkaa joella ja $\mathbf{v}(x)$ veden nopeutta paikassa x. Jos vene ajautuu pelkästään virran mukana, voidaan sen paikkaa kuvata differentiaaliyhtälöllä

$$\dot{x} = \mathbf{v}(x).$$

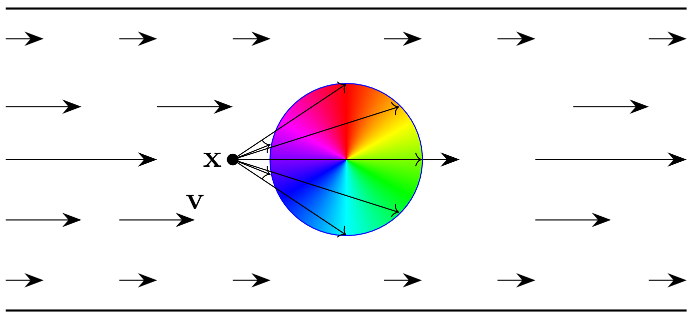
Jos taas oletetaan, että veneessä on moottori, joka mahdollistaa liikkumisen mihin tahansa suuntaan nopeudella $\leq \rho$ suhteessa veden virtaukseen, voidaan kehitystä kuvata kontrollisysteemillä

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = \mathbf{v}(x) + \rho\alpha \qquad |\alpha| \leq 1.$$

Tämä vastaa differentiaali-inkluusiota, jossa nopeuksien joukko on ρ-säteisten pallojen joukko (kts. kuva 3.1):

$$\dot{x} \in B_\rho(\mathbf{v}(x)).$$

Määritelmä 3.7. *Kontrollifunktio* tai *kontrolli* on ajan funktio $\alpha(t)$, joka kuvaa ajan $t \in [0, +\infty)$ joukkoon A.



Kuva 3.1: Nopeuksien joukko ρ-säteisen pallon muodossa.

Vastaisuudessa oletetaan, että joukko A on kompakti, ja käytetään merkintää

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0, \infty) \to A \mid \alpha(\cdot) \ \textit{mitallinen}\}$$

kaikkien *hyväksyttävien* kontrollien kokoelmasta. Lisäksi tilapolkua eli dynaamisen systeemin *vastetta* ajan funktiona merkitään $\mathbf{x}(\cdot)$.

Määritelmä 3.8. Kontrolloitu dynaaminen systeemi voidaan karakterisoida dynamiikkojen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \alpha(t)) \tag{3.4}$$

avulla yhdessä systeemin alkuarvojen

$$\mathbf{x}(0) = x_0, \tag{3.5}$$

missä $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, kanssa. Tässä $t \in [0, +\infty)$ ja $f : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$.

Jatkossa oletetaan funktion f olevan rajoitettu ja Lipschitz-jatkuva:

$$|f(x, a)| \leq C, \quad |f(x, a) - f(y, a)| \leq C|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n, a \in \mathcal{A}), \tag{3.6}$$

jollain vakiolla C. Tästä seuraa, että jokaiselle kontrollille $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$ differentiaaliyhtälöllä (3.4)-(3.5) on Picard-Lindelöfin teorian nojalla olemassa yksikäsitteinen, Lipschitz jatkuva ratkaisu $\mathbf{x}(\cdot)$ (kts. [20] kappale 13). Tämä ratkaisu on olemassa välillä $[t, T]$ ja se ratkaisee annetun differentiaaliyhtälön melkein kaikilla ajoilla $t < s < T$.

On syytä huomata, että vaste $\mathbf{x}(\cdot)$ riippuu sekä kontrollista $\alpha(\cdot)$, että aloituspisteestä (x_0, t_0). Näin ollen merkinnällä $\mathbf{x}(t)$ tarkoitetaan $\mathbf{x}(t; x_0, t_0, \alpha)$. Tällä tavalla merkittynä vaste tulkitaan muuttujan t funktiona, joka riippuu myös aloituspisteestä x_0, -ajasta t_0 ja kontrollista α. Jatkossa voidaan käyttää kumpaa vain merkintätapaa: jos tilanteesta on selvää, mistä kontrollista (ja aloituspisteestä) on kyse, käytetään lyhyempää merkintää $\mathbf{x}(t)$. Jos jokin muuttujista on epäselvä, merkitään se myös näkyviin.

Määritelmä 3.9. Dynaamisen systeemin *maksufunktionaali* on muotoa

$$P_{x,t}[\alpha(\cdot)] = \int_t^T r(\mathbf{x}(s), \alpha(s))ds + g(\mathbf{x}(T)),$$

missä $\mathbf{x}(\cdot) = \mathbf{x}^{\alpha(\cdot)}(\cdot)$ ratkaisee differentiaaliyhtälön (3.4)-(3.5) ja $r : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovat annettuja funktioita.

Funktiota r kutsutaan *juoksevaksi maksuksi* (engl. *running payoff*) ja funktiota g *päätemaksuksi* (engl. *terminal payoff*). Tästä eteenpäin oletetaan, että

$$\begin{cases} |r(x,a)|, \quad |g(x)| \leq C \\ |r(x,a) - r(y,a)|, \quad |g(x) - g(y)| \leq C|x-y| \end{cases} \tag{3.7}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n, a \in A$, jollekin vakiolle C. Toisin sanoen oletetaan, että maksufunktio P on jatkuva ja tasaisesti rajoitettu.

Määritelmä 3.10. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 \leq t \leq T$. Funktiota $u : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$,

$$u(x,t) := \inf_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} P_{x,t}[\alpha(\cdot)],$$

kutsutaan *arvofunktioksi*.

Ylläoleva määritelmä yhdessä maksufunktionaalin määritelmän kanssa antaa

$$u(x,T) = g(x(T)).$$

Tämä toimii rajaehtona tästä eteenpäin.

Lemma 3.11. *Arvofunktiolle u on olemassa vakio C siten, että*

$$|u(x,t)| \leq C,$$
$$|u(x,t) - u(\hat{x},\hat{t})| \leq C(|x-\hat{x}| + |t-\hat{t}|)$$

kaikille $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $0 \leq t, \hat{t} \leq T$.

Todistus seuraa Evansin kirjaa [10] s. 555-556.

Todistus. Ensimmäisenä huomataan, että funktioiden r ja g epäyhtälöistä (3.7) seuraa arvofunktion u rajoittuneisuus joukossa $\mathbb{R}^n \times [0,T]$. Kiinnitetään nyt pisteet $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ja aika $0 \leq t \leq T$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan kontrolli $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ siten, että

$$u(\hat{x},t) + \varepsilon \geq \int_t^T r(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s))ds + g(\hat{\mathbf{x}}(T)),$$

missä $\hat{\mathbf{x}}(\cdot)$ ratkaisee differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(s) = f(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s)) \quad (t < s < T) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{x}. \end{cases}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(\hat{x},t) \leq \int_t^T r(\mathbf{x}(s), \hat{\alpha}(s))ds + g(\mathbf{x}(T)) \\ - \int_t^T r(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s))ds - g(\hat{\mathbf{x}}(T)) + \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.8}$$

missä $\mathbf{x}(\cdot)$ ratkaisee yhtälön

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = f(\mathbf{x}(s), \hat{\alpha}(s)) \quad (t < s < T) \\ \mathbf{x}(t) = x. \end{cases}$$

Funktion f Lipschitz-jatkuvuus yhdessä epäyhtälön (3.8) sekä Gronwallin epäyhtälön (kts. [10] Appendix B s.624-635) kanssa implikoi, että $|\mathbf{x}(s) - \hat{\mathbf{x}}(s)| \leq C|x - \hat{x}|$ $(t \leq s \leq T)$. Tämä yhdessä funktioiden r ja g epäyhtälöiden (3.7) kanssa implikoi, että $u(x,t) - u(\hat{x},t) \leq C|x - \hat{x}| + \varepsilon$. Kääntämällä x ja $\hat{x}$ roolit ja argumentoimalla samalla tavalla saadaan

$$|u(x,t) - u(\hat{x},t)| \leq C|x - \hat{x}| \quad (x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T).$$

Kiinnitetään vielä $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 \leq t < \hat{t} \leq T$. Oletetaan, että $\varepsilon > 0$, ja valitaan $\alpha \in \mathcal{A}$ siten, että

$$u(x,t) + \varepsilon \geq \int_t^T r(\mathbf{x}(s), \alpha(s))ds + g(\mathbf{x}(T),$$

missä $\mathbf{x}(\cdot)$ ratkaisee kontrolloidun dynaamisen systeemin (3.4)-(3.5) eli

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = f(\mathbf{x}(s), \alpha(s)) \quad (t < s < T) \\ \mathbf{x}(t) = x. \end{cases}$$

Määritellään

$$\hat{\alpha}(s) := \alpha(s + t - \hat{t}), \quad \text{kun } \hat{t} \leq s \leq T,$$

ja annetaan $\hat{\mathbf{x}}(\cdot)$ ratkaista

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(s) = f(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s)) \quad (\hat{t} < s < T) \\ \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}) = x. \end{cases}$$

Tällöin $\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(s + t - \hat{t})$, joten

$$\begin{aligned}
u(x,\hat{t}) - u(x,t) &\leq \int_{\hat{t}}^{T} r(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s))ds + g(\hat{\mathbf{x}}(T)) \\
&\quad - \int_{t}^{T} r(\mathbf{x}(s), \alpha(s))ds - g(\mathbf{x}(T)) + \varepsilon \\
&= - \int_{T+t-\hat{t}}^{T} r(\mathbf{x}(s), \alpha(s))ds + g(\mathbf{x}(T + t - \hat{t})) - g(\mathbf{x}(T)) + \varepsilon \\
&\leq C|t - \hat{t}| + \varepsilon. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Valitaan seuraavaksi $\hat{\alpha}(\cdot)$ siten, että

$$u(x,\hat{t}) + \varepsilon \geq \int_{\hat{t}}^{T} r(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s))ds + g(\hat{\mathbf{x}}(T)),$$

missä

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(s) = f(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s)) \quad (\hat{t} < s < T) \\ \hat{\mathbf{x}}(s) = x, \end{cases}$$

ja määritellään

$$\alpha(s) := \begin{cases} \hat{\alpha}(s + \hat{t} - t), & \text{jos } t \leq s \leq T + t - \hat{t} \\ \hat{\alpha}(T), & \text{jos } T + t - \hat{t} \leq s \leq T, \end{cases}$$

ja annetaan $\mathbf{x}(\cdot)$ ratkaista (3.4)-(3.5). Tällöin $\alpha(s) = \hat{\alpha}(s + \hat{t} - t)$ ja $\mathbf{x}(s) = \hat{\mathbf{x}}(s + \hat{t} - t)$, kun $t \leq s \leq T + t - \hat{t}$, joten

$$\begin{aligned}
u(x,t) - u(x,\hat{t}) &\leq \int_{t}^{T} r(\mathbf{x}(s), \alpha(s))ds + g(\mathbf{x}(T)) \\
&\quad - \int_{\hat{t}}^{T} r(\hat{\mathbf{x}}(s), \alpha(s))ds - g(\hat{\mathbf{x}}(T)) + \varepsilon \\
&= \int_{T+t-\hat{t}}^{T} r(\mathbf{x}(s), \alpha(s))ds + g(\mathbf{x}(T)) - g(\mathbf{x}(T + t - \hat{t}) + \varepsilon \\
&\leq C|t - \hat{t}| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tämä epäyhtälö yhdessä (3.9) kanssa todistavat, että

$$|u(x,t) - u(x,\hat{t})| \leq C|t - \hat{t}| \quad (0 \leq t \leq \hat{t} \leq T, x \in \mathbb{R}^n). \qquad \square$$

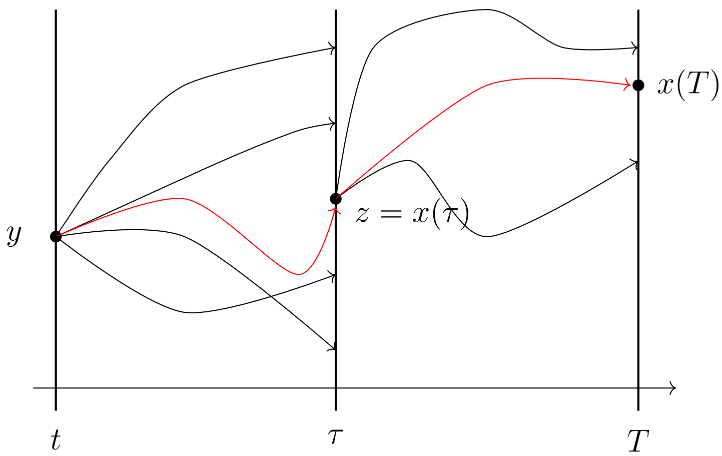
Tavoitteena on näyttää, että arvofunktio u on yksikäsitteinen viskositeettiratkaisu Hamilton-Jacobi-yhtälölle (3.1). Tätä varten tarvitaan Bellmanin dynaamisen ohjelmoinnin periaatetta.

Lause 3.12 (Dynaamisen ohjelmoinnin periaate). *Jokaiselle* $\tau \in [t, T]$ *ja* $x \in \mathbb{R}^n$ *pätee*

$$u(x,t) = \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}} \left\{ \int_t^\tau r(\boldsymbol{x}(s), \alpha(s))ds + u(\boldsymbol{x}(\tau), \tau) \right\}. \tag{3.10}$$

Dynaamisen ohjelmoinnin periaate kertoo, että optimointiongelma aikavälillä $[t, T]$ voidaan jakaa kahteen erilliseen ongelmaan:

- Ensimmäisenä ratkaistaan optimointiongelma osavälillä $[\tau, T]$ yhdessä juoksevan maksun r ja päätemaksun g kanssa. Tällä tavoin pystytään määrittämään arvofunktio $u(\tau, \cdot)$ ajanhetkellä τ.
- Seuraavaksi ratkaistaan optimointiongelma jäljelle jääneellä osavälillä $[t, \tau]$ juoksevalla maksulla r ja päätemaksulla $u(\tau, \cdot)$, joka määritettiin edellisessä kohdassa.



Kuva 3.2: Optimointiongelma välillä $[t, T]$ voidaan jakaa kahteen osaongelmaan osaväleille $[t, \tau]$ ja $[\tau, T]$.

Todistus seuraa Bressanin monistetta [5] s. 51-52. Todistuksessa oleellisessa osassa on arvofunktion sekä yhtälön oikean puolen arvioiminen *pääte*maksun avulla. Edellä on paljon puhuttu *lähtö*ajasta, mutta nyt katse siirtyy *pääte*aikaan ja sen avulla päätemaksuun. Näin ollen ajan suunta muuttuu: sen sijaan, että aika kuluisi eteenpäin, sitä kuljetaankin takaperin, joten edellisellä askeleella aikaa on kulunut tämänhetkisestä ajasta vähemmän. Näin ollen alkuehto muuttuu lopetusehdoksi, jolloin epäyhtälöt käyttäytyvät eri tavalla.

Todistus lauseelle 3.12. Olkoon P^τ yhtälön (3.10) oikea puoli. Todistus jaetaan kahteen osaan molempien epäyhtälöiden, $\geq$ ja $\leq$, todistamiseksi.

(1) Näytetään, että $P^\tau \leq u(x,t)$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja valitaan kontrolli $\alpha : [t,T] \to A$, $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$, siten, että $P_{x,t}[\alpha(\cdot)] \leq u(x,t) + \varepsilon$. Tällöin

$$u(\mathbf{x}(\tau),\tau) \leq \int_\tau^T r(\mathbf{x}(s),\alpha(s))ds + g(\mathbf{x}(T)),$$

joten

$$\begin{aligned} P^\tau &\leq \int_t^\tau r(\mathbf{x}(s),\alpha(s))ds + u(\mathbf{x}(\tau),\tau) \\ &\leq P_{x,t}[\alpha(\cdot)] \leq u(x,t) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, on ensimmäinen epäyhtälö todistettu.

(2) Toista epäyhtälöä varten kiinnitetään jälleen $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa kontrolli $\alpha_1 : [t,\tau] \to A$, $\alpha_1 \in \mathcal{A}$, siten, että

$$\int_t^\tau r(\mathbf{x}(s),\alpha_1(s))ds + u(\mathbf{x}(\tau),\tau) \leq P^\tau + \varepsilon. \tag{3.11}$$

Lisäksi on olemassa kontrolli $\alpha_2 : [\tau,T] \to A$, $\alpha_2 \in \mathcal{A}$, jolle

$$P_{x,\tau}[\alpha_2(\cdot)] \leq u(\mathbf{x}(\tau),\tau) + \varepsilon. \tag{3.12}$$

Nyt voidaan määritellä kontrolli $\alpha \in \mathcal{A}$ liittämällä yhteen kontrollit α_1 ja α_2:

$$\alpha(s) = \begin{cases} \alpha_1(s), & \text{jos } s \in [t,\tau[\\ \alpha_2(s), & \text{jos } s \in]\tau,T]. \end{cases}$$

Ottamalla huomioon ajan kulkusuunnan ($t \leq \tau$), on epäyhtälöiden (3.11) ja (3.12) avulla helppo tarkistaa, että

$$u(x,t) \leq P_{x,t}[\alpha(\cdot)] \leq P^\tau + 2\varepsilon. \qquad \square$$

Lause 3.13 (Hamilton-Jacobi-Bellman)**.** *Oletetaan, että arvofunktio u on muuttujien (x,t) C^1-funktio. Tällöin u on yksikäsitteinen viskositeettiratkaisu osittaisdifferentiaaliyhtälölle*

$$u_t(x,t) + \min_{a\in\mathcal{A}}\{f(x,a)\cdot D_x u(x,t) + r(x,a)\} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t \leq T), \tag{3.13}$$

lopetusehdolla

$$u(x,T) = g(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Ylläoleva yhtälö tunnetaan Hamilton-Jacobi-Bellman-yhtälönä (lyhennetty jatkossa HJB). Yhteys edellisessä kappaleessa käsiteltyyn Hamilton-Jacobi-yhtälöön (3.1) saadaan, kun Hamiltonin funktio kirjoitetaan muodossa

$$\min_{a\in\mathcal{A}}\{f(x,a)\cdot D_x u(x,t)+r(x,a)\}=H(x,Du),$$

jolloin HJB saadaan tutumpaan muotoon

$$u_t+H(x,Du)=0 \qquad ((x,t)\in\mathbb{R}^n\times]0,T[).$$

Lauseen todistuksessa seurataan Evansin monistetta [8] s.74-75.

Todistus lauseelle 3.13. 1. Olkoon $x\in\mathbb{R}^n$, $0\le t\le T$ ja $\tau>0$ annettu. Valitaan mikä tahansa parametri $a\in A$ ja käytetään vakiokontrollia

$$\alpha(\cdot)\equiv a$$

ajoille $t\le s\le t+\tau$. Tämän jälkeen dynamiikat saapuvat pisteeseen $x(t+\tau)$, missä $t+\tau<T$. Oletetaan, että ajanhetkellä $t+\tau$ vaihdetaan optimaaliseen kontrolliin ja käytetään sitä loppuaika $t+\tau\le s\le T$.

Konstruoidaan tälle menetelmälle arvo. Ajoille $t\le s\le t+\tau$ pätee

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(s)=f(\mathbf{x}(s),a)\\ \mathbf{x}(t)=x.\end{cases}$$

Arvo tälle ajalle on $\int_t^{t+\tau} r(\mathbf{x}(s),a)ds$. Lisäksi aikaväliltä $t+\tau$:sta T:hen arvo on $u(x(t+\tau),t+\tau)$ arvofunktion u määritelmän nojalla. Näin ollen kokonaisarvoksi muodostuu

$$\int_t^{t+\tau} r(\mathbf{x}(s),a)ds+u(\mathbf{x}(t+\tau),t+\tau).$$

Toisaalta pienin mahdollinen arvo aloitettaessa pisteestä (x,t) on määritelmän nojalla $u(x,t)$. Näin ollen

$$u(x,t)\le\int_t^{t+\tau} r(\mathbf{x}(s),a)ds+u(\mathbf{x}(t+\tau),t+\tau). \tag{3.14}$$

2. Seuraavaksi halutaan muuttaa tämä epäyhtälö differentiaalimuotoon. Näin ollen uudelleenjärjestelemällä ja jakamalla kiinnitetyllä $\tau>0$ saadaan

$$\frac{u(\mathbf{x}(t+\tau),t+\tau)-u(x,t)}{\tau}+\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} r(\mathbf{x}(s),a)ds\ge 0.$$

Ottamalla raja-arvo $\tau\to 0$ saadaan

$$u_t(x,t)+D_x u(\mathbf{x}(t),t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)+r(\mathbf{x}(t),a)\ge 0.$$

Toisaalta tiedetään, että $\mathbf{x}(\cdot)$ ratkaisee differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = f(\mathbf{x}(s), a) & (t \leq s \leq T) \\ \mathbf{x}(t) = x, \end{cases}$$

joten lisäämällä tämän ylläolevaan huomataan, että:

$$u_t(x,t) + f(x,a) \cdot D_x u(\mathbf{x}(t), t) + r(x,a) \geq 0.$$

Tämä epäyhtälö pätee kaikille kontrolliparametreille $a \in A$, joten

$$\min_{a \in A} \{u_t(x,t) + f(\mathbf{x}, a) \cdot D_x u(x,t) + r(\mathbf{x}, a)\} \geq 0. \tag{3.15}$$

3. Viimeisenä näytetään, että ylläoleva minimi on itseasiassa 0. Tätä varten oletetaan, että $\alpha^*(\cdot), \mathbf{x}^*(\cdot)$ ovat optimaalisia ylläolevalle ongelmalle. Otetaan käyttöön optimaalinen kontrolli $\alpha^*(\cdot)$ ajoille $t \leq s \leq t + \tau$. Arvo tälle on

$$\int_t^{t+\tau} r(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)) ds$$

ja loppuarvo on $u(\mathbf{x}^*(t+\tau), t+\tau)$. Näin ollen kokonaisarvoksi muodostuu

$$\int_t^{t+\tau} r(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)) ds + u(\mathbf{x}^*(t+\tau), t+\tau) = u(x,t).$$

Jälleen järjestelemällä uudelleen ja jakamalla τ:lla saadaan

$$\frac{u(\mathbf{x}^*(t+\tau), t+\tau) - u(x,t)}{\tau} + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} r(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)) ds = 0.$$

Päästämällä $\tau \to 0$ ja olettamalla, että $\alpha^*(t) = a \in A$, saadaan

$$u_t(x,t) + D_x u(x,t) \cdot \underbrace{\dot{\mathbf{x}}^*(t)}_{f(\mathbf{x}, a^*)} + r(\mathbf{x}, a^*) = 0;$$

joten

$$u_t(x,t) + f(x, a^*) \cdot D_x u(x,t) + r(\mathbf{x}, a^*) = 0$$

jollekin parametrin arvolle $a^* \in A$. $\square$

Lause 3.13 kertoo HJB:n viskositeettiratkaisun olevan optimaalisen kontrollin ongelman arvofunktio, jota voidaan määrittämisen jälkeen käyttää optimaalisen kontrollin löytämiseen ottamalla minimi (tai maksimi) siihen liittyvästä Hamiltonin funktiosta. Optimaalisen kontrollin rakentaminen dynaamisen ohjelmoinnin avulla sisältää kaksi askelta. Ensimmäisenä täytyy ratkaista HJB eli laskea arvofunktio u. Tämän jälkeen voidaan rakentaa optimaalinen palautekontrolli $\alpha^*(\cdot)$ HJB:n osittaisdifferentiaaliyhtälön ja u:n avulla.

Huomautus 3.14. On syytä huomauttaa, että tällä tavalla rakennettu optimaalinen kontrolli sisältää huomattavia ongelmia. Esimerkiksi kontrollille α voi olla useita ratkaisuja. Lisäksi allaolevan yhtälön (3.16) ratkaiseminen vaatii kontrollin α säännöllisyyttä eikä aina toimi. Esityksen yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan kontrollilta riittävä säännöllisyys. Säännöllisyyden puutteesta löytyy esimerkki Parviaisen luentomonisteesta [24] s. 13 esimerkki 2.9.

Toinen askel voidaan toteuttaa seuraavalla tavalla: määritellään jokaiselle pisteelle $x \in \mathbb{R}^n$ ja jokaiselle ajalle $0 \leq t \leq T$ kontrolli

$$\alpha(x,t) = a \in A$$

olemaan se parametrin arvo, jolla HJB:hen liitoksissa oleva minimi saavutetaan. Toisin sanoen valitaan $\alpha(x,t)$ siten, että

$$u_t(x,t) + f(x, \alpha(x,t)) \cdot D_x u(x,t) + r(\mathbf{x}, \alpha(x,t)) = 0. \tag{3.16}$$

Tämän jälkeen ratkaistaan differentiaaliyhtälö olettaen, että $\alpha(\cdot, t)$ on tarpeeksi säännöllinen sen tekemiseen:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(s) = f(\mathbf{x}^*(s), \alpha(\mathbf{x}^*(s), s)) \quad (t \leq s) \leq T \\ \mathbf{x}(t) = x. \end{cases}$$

Viimeisenä määritellään *palautekontrolli*

$$\alpha^*(s) := \alpha(\mathbf{x}^*(s), s). \tag{3.17}$$

Esimerkki 3.15. Oletetaan, että määritelmän (3.17) mukainen kontrolli $\alpha^*(\cdot)$ on olemassa. Koska

$$P_{x,t}[\alpha^*(\cdot)] = \int_t^T r(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s))ds + g(\mathbf{x}^*(T)),$$

saadaan yhdessä $\alpha^*(\cdot)$:n määritelmän (3.17) nojalla:

$$\begin{aligned} P_{x,t}[\alpha^*(\cdot)] &= \int_t^T (-u_t(\mathbf{x}^*(s), s) - f(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)) \cdot D_x u(\mathbf{x}^*(s), s))ds + g(\mathbf{x}^*(T)) \\ &= -\int_t^T u_t(\mathbf{x}^*(s), s) + D_x u(\mathbf{x}^*(s), s) \cdot \dot{\mathbf{x}}^*(s)ds + g(\mathbf{x}^*(T)) \\ &= -\int_t^T \frac{d}{ds} u(\mathbf{x}^*(s), s)ds + g(\mathbf{x}^*(T)) \\ &= -u(\mathbf{x}^*(T), T) + u(\mathbf{x}^*(t), t) + g(\mathbf{x}^*(T)) \\ &= -g(\mathbf{x}^*(T)) + u(\mathbf{x}^*(t), t) + g(\mathbf{x}^*(T)) \\ &= u(x,t) = \inf_{\alpha(\cdot)} P_{x,t}[\alpha(\cdot)]. \end{aligned}$$

Näin ollen $\alpha^*(\cdot)$ on optimaalinen.

4 Satunnaiskävely ja toisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Edellisessä kappaleessa käsiteltiin *determinististä* optimaalista kontrollia. Kyseessä on loppujen lopuksi yksinkertainen tilanne, jossa ilmenee monenlaisia ongelmia ja puutteita jo käsiteltyjen asioiden lisäksi. Esimerkiksi dynamiikkojen oletukset deterministisestä kehityksestä sekä ennustettavuudesta sulkevat ulkopuolelleen monia sovelluskohteita: monesti halutaan ottaa huomioon mahdollisuus *satunnaistekijöistä*. Lisäksi edellisessä kappaleessa käsitellyssä tapauksessa kyseessä oli yhden kontrollimuuttujan systeemi, mutta usein prosesseja voi ohjata useaan eri suuntaan eri muuttujien toimesta. Tällöin edellä käsitellyt tekniikat eivät ole riittäviä. Näin ollen luonnollisena jatkona aiheelle on siirtyminen satunnaispelien maailmaan, jossa ensimmäisenä lisätään satunnaisuustekijä tarkastelemalla satunnaiskävelyä pallossa. Tämän jälkeen kappaleessa 5 satunnaiskävelyyn otetaan mukaan kaksi pelaajaa, jotka yrittävät kontrolloida systeemiä kohti itselleen suotuisaa tilaa.

Keskitytään seuraavaksi toisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälöön nimeltä *Laplacen yhtälö* ja sen yhteyteen *satunnaiskävelyksi* kutsuttuun stokastiseen prosessiin. Laplacen yhtälöön tutustuttiin hyvin nopeasti osittaisdifferentiaaliyhtälöiden yhteydessä kappaleessa 2.2. Kyseessä on lineaarinen toisen asteen ODY, jonka ratkaisuja kutsutaan harmonisiksi funktioiksi.

Satunnaispelit yhdistävät stokastiikan osittaisdifferentiaaliyhtälöihin ja, jos kyseessä on pelaajallinen versio, myös optimoinnin periaatteeseen. Tämän kappaleen tavoitteena on rakentaa teoriaa, joka yhdistää Laplacen yhtälön satunnaiskävelyyn *arvofunktion* ja dynaamisen ohjelmoinnin kautta. Pääasiallisena lähteenä tälle kappaleelle on toiminut Parviaisen artikkeli [21]. Lisäksi on hyödynnetty Evansin kirjaa [10], Lewickan kirjaa [16] ja Parviaisen luentomonistetta [22].

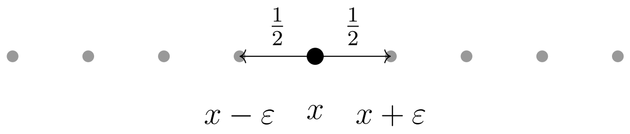
Esimerkki 4.1. Olkoon $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja asetetaan pelinappula aloituspisteeseen $x_0 \in \Omega$. Pelinappulaa siirretään ε verran oikealle tai vasemmalle kolikonheiton perusteella. Toisin sanoen pelinappula siirtyy ε-ruudukossa

$$\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, 1\} \setminus \{0, 1\}$$

- vasemmalle todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ tai
- oikealle todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.

Oletetaan, että askeleen pituus on muotoa

$$\varepsilon = 2^{-k} \text{ jollekin } k \in \mathbb{N}.$$



Kuva 4.1: Satunnaiskävely 1-ulottuvuudessa.

Kun saavutaan pelialueen reunalle pisteeseen 0 tai 1, kolikonheitto lopetetaan. Reunamaksun suuruuden määrittää $F(1)$ tai $F(0)$ riippuen päädyttiinkö reunalla pisteeseen 0 vai 1, missä F on annettu reaaliarvoinen funktio.

Kysymykseksi tässä tilanteessa nousee, mikä on odotetun maksun suuruus, kun liikkeelle lähdetään jostain pisteestä $x_0 \in \Omega$? Merkitään

$$u(x_0) := \mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)],$$

missä odotusarvo otetaan kaikkien mahdollisten polkujen (vierailtujen pisteiden muodostamien jonojen) yli, τ merkitsee lopetuskierroksen numeroa ja x_τ kertoo kumpaanko pisteistä 0 tai 1 on lopulta päädytty. Tällöin yhtä askelta katsottaessa *dynaamisen ohjelmoinnin periaate* (lyhennetty jatkossa DOP) pätee kaikilla $x \in \{\varepsilon, \dots, 1-\varepsilon\}$:

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}(u(x-\varepsilon) + u(x+\varepsilon)) \\ u(0) = 0, u(1) = 1. \end{cases}$$

Ratkaisu tälle on

$$u(i\varepsilon) = i\varepsilon, \qquad i = 0, 1, \dots, \varepsilon^{-1}.$$

Ylläolevan esimerkin tilannetta kutsutaan *1-ulotteiseksi satunnaiskävelyksi.* Kyseisessä tilanteessa *arvo* $u(x_0)$ kuvastaa todennäköisyyttä, että pisteeseen 1 saavutaan ensin. Tällainen prosessi päätyy pisteeseen 0 tai 1 melkein varmasti, joten pätee

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)] = \mathbb{P}^{x_0}(x_\tau = 1) \cdot 1 + \mathbb{P}^{x_0}(x_\tau = 0) \cdot 0 \\ &= \mathbb{P}^{x_0}(x_\tau = 1). \end{aligned}$$

Uudelleenjärjestelemällä esimerkissä saatu DOP saadaan muotoon

$$\frac{1}{2\varepsilon^2}(u(x-\varepsilon) - 2u(x) + u(x+\varepsilon)) = 0.$$

Yhtälön vasen puoli on tunnettu diskretisaatio toisesta derivaatasta $\frac{1}{2}u_{xx}$, joten kyseinen satunnaiskävely vaikuttaa olevan yhteydessä ongelmaan

$$\begin{cases} u_{xx} = 0 & \text{joukossa } (0,1) \\ u(0) = 0, u(1) = 1. \end{cases}$$

Satunnaiskävely on yksinkertaistettu tilanne satunnaispeleiksi kutsutuista stokastisista prosesseista, jossa pelaajia ei ole. Kun kiinnitettynä on avoin ja rajoitettu pelialue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sekä aloituspiste $x_0 \in \Omega$, satunnaiskävelyn seuraava piste määräytyy $\varepsilon > 0$ säteisestä ja x_0-keskisestä pallosta tasajakauman mukaisesti. Ylläolevassa 1-ulotteisessa tapauksessa tasajakauman virkaa toimitti kolikonheitto. Satunnaiskävelyä jatketaan uudesta pisteestä, kunnes saavutaan pisteeseen x_τ, joka on alle ε päässä alueen ulkopuolella. Tämän jälkeen annettu reaaliarvoinen maksufunktio F kertoo maksun suuruudeen. Maksufunktio on määritelty alueen ε-laajennuksessa, joka määritellään alla.

Tällaisella asetelmalla *dynaamisen ohjelmoinnin periaate* voidaan kirjoittaa muodossa

$$u_\varepsilon(x) = \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon(y)dy, \tag{4.1}$$

missä merkinnällä $\fint_{B_\varepsilon(x)}$ tarkoitetaan *keskiarvointegraalia pallon yli*, joka määritellään tarkemmin seuraavassa alaluvussa. Seuraavassa alaluvussa tutkitaan lisäksi DOP:n yhteyttä satunnaiskävelyyn ja lopulta todistetaan, että satunnaiskävelyn tapauksessa DOP:n toteuttava funktio, joka noudattaa annettua reunafunktiota, on satunnaiskävelyn odotusarvo. Tällä tavalla saadaan luotua yhteys Laplacen yhtälön ja satunnaiskävelyn välille.

Dynaamisen ohjelmoinnin periaate käsittelee ε-säteisiä palloja, joten on otettava käyttöön joukon Ω ε-laajennus:

Määritelmä 4.2. Joukon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ε-laajennus on

$$\Gamma_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega) \leq \varepsilon\}.$$

Jatkossa käytetään lisäksi merkintää

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \cup \Gamma_\varepsilon.$$

Tästä eteenpäin oletetaan, että $u : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ ja $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ ellei toisin mainita.

4.1 Harmoniset funktiot ja keskiarvoperiaate

Tässä luvussa on hyödynnetty pääasiassa Evansin kirjaa [10]. Vaikutteita on otettu myös Parviaisen luentomonisteesta [22].

Oletetaan edelleen, että joukko $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, rajoitettu ja yhtenäinen. Muistutetaan mieleen kappaleessa 2.2 mainittu Laplacen yhtälö

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_i)^2} = 0. \tag{4.2}$$

Tämän ODY:n ratkaisevia funktioita $u \in C^2(\Omega)$ kutsutaan *harmonisiksi funktioiksi.*

Huomautus 4.3. Jos u on harmoninen joukossa Ω, niin $u \in C^\infty(\Omega)$ eli u on sileä. Tämä seuraa tässä kappaleessa todistettavasta keskiarvoperiaatteesta. Näin ollen Laplacen yhtälön yhteydessä voidaan puhua klassisista ratkaisuista eikä esimerkiksi viskositeettiratkaisuille ole tarvetta. Tämä ominaisuus löytyy muotoiltuna lauseena Evansin kirjasta [10] s. 28 Theorem 6.

Esimerkki 4.4. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Tällöin funktio

$$u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad u(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2,$$

on harmoninen:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2 u}{(\partial x_2)^2} = 2 - 2 = 0.$$

Seuraavaksi näytetään, että jos u on harmoninen funktio, niin se toteuttaa *keskiarvoperiaatteen* (engl. *mean value theorem*). Keskiarvoperiaate kertoo, että harmonisen funktion u arvo $u(x)$ pallon keskipisteessä on sama kuin pallon pinnalla olevien arvojen keskiarvo ja pallon sisällä olevien arvojen keskiarvo. Tämän jälkeen näytetään, että keskiarvoperiaatteen toteuttava funktio u on harmoninen.

Merkintä 4.5. *Keskiarvointegraalille* käytetään jatkossa merkintää

$$⨍_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy = \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy. \tag{4.3}$$

Pallopinnan tapauksessa keskiarvointegraali saa muodon

$$⨍_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)dS(y) = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)dS(y). \tag{4.4}$$

Tässä merkinnällä $|\cdot|$ viitataan Lebesguen mittaan.

Lause 4.6 (Keskiarvoperiaate harmoniselle funktiolle)**.** *Olkoon $u \in C^2(\Omega)$ harmoninen funktio. Tällöin jokaiselle pallolle $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ pätee*

$$u(x) = ⨍_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)dS(y) = ⨍_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy. \tag{4.5}$$

Tätä ominaisuutta kutsutaan keskiarvoperiaatteeksi.

Todistus. Määritellään

$$\phi(\varepsilon) := \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)dS(y) = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)dS(y).$$

Olkoon $z \in B_1(0)$ ja tehdään muuttujanvaihto $y = \varepsilon z + x$, jolloin $dS(y) = \varepsilon^{n-1}dS(z)$. Tällöin merkinnän 4.4 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\phi(\varepsilon) &= \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)dS(y) \\
&= \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\frac{|\partial B_1(0)|}{|\partial B_1(0)|}\int_{\partial B_1(0)} u(\varepsilon z + x)\varepsilon^{n-1}dS(z) \\
&= \frac{|\partial B_1(0)|}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\varepsilon^{n-1}\fint_{\partial B_1(0)} u(\varepsilon z + x)dS(z) \\
&= \fint_{\partial B_1(0)} u(\varepsilon z + x)dS(z).
\end{aligned}$$

Oletuksen nojalla $u \in C^2(\Omega)$, joten se on jatkuvasti derivoituva. Tällöin funktion ϕ derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(\varepsilon) &= \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} D_y u(\varepsilon z + 1)dS(z) \\
&= \frac{1}{|\partial B_0(1)|}|\partial B_\varepsilon(x)|\fint_{\partial B_\varepsilon(x)} D_y u(y) \cdot \frac{y-x}{\varepsilon}\varepsilon^{1-n}dS(y) \\
&= \frac{|\partial B_\varepsilon(x)|}{|\partial B_0(1)|}\varepsilon^{1-n}\fint_{\partial B_\varepsilon(x)} D_y u(y) \cdot \frac{y-x}{\varepsilon}dS(y) \\
&= \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} D_y u(y) \cdot \frac{y-x}{\varepsilon}dS(y).
\end{aligned}$$

Merkitsemällä yllä esiintyvää yksikkönormaalivektoria $\nu = \frac{y-x}{\varepsilon}$, voidaan hyödyntää divergenssilausetta (kts. Liite A.1). Tämä yhdessä harmonisen funktion määritelmän kanssa antaa

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(\varepsilon) &= \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} D_y u(y) \cdot \nu dS(y) \\
&= \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} \operatorname{div}(D_y u(y))dy \\
&= \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} \underbrace{\Delta u(y)}_{=0}dy = 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen funktio ϕ on vakiofunktio, joka voidaan ratkaista raja-arvona

$$\phi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\phi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\fint_{\partial B(_\varepsilon(x)} u(y)dS(y) = u(x),$$

joten ensimmäinen yhtäsuuruus on näytetty.

Toinen yhtäsuuruus saadaan ylläolevan sekä napakoordinaattien avulla:

$$
\begin{aligned}
\fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy &= \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_s(x)} u(y)dSds \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_0^\varepsilon |\partial B_s(x)| \frac{1}{|\partial B_s(x)|} \int_{\partial B_s(x)} u(y)dSds \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_0^\varepsilon |\partial B_s(x)| \fint_{\partial B_s(x)} u(y)dSds \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_0^\varepsilon |\partial B_s(x)| u(x)ds \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} u(x) \int_0^\varepsilon |\partial B_s(x)|ds \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} u(x)|B_\varepsilon(x)| = u(x). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Lause 4.7. *Jos $u \in C^2(\Omega)$ toteuttaa keskiarvoperiaatteen (4.5) jokaiselle pallolle $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, niin u on harmoninen.*

Todistus. Todistetaan antiteesin avulla: oletetaan, että u ei ole harmoninen. Tällöin on olemassa $x_0 \in \Omega$ siten, että $\Delta u(x_0) > 0$ tai $\Delta u(x_0) < 0$. Oletuksen $u \in C^2(\Omega)$ nojalla Δu on jatkuva, joten on olemassa avoin pallo $B_\varepsilon(x_0)$ siten, että $\Delta u(x) > 0$ tai vastaavasti $\Delta u(x) < 0$ kaikilla $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Näin ollen hyödyntämällä lauseen 4.6 todistuksen derivaattafunktiota $\phi_x(\varepsilon)$ saadaan

$$\phi_x(\varepsilon) = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} \Delta u(y)dy > 0$$

tai

$$\phi_x(\varepsilon) = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} \Delta u(y)dy < 0.$$

Näin ollen funktio ϕ ei voi olla vakio, mikä on ristiriidassa keskiarvoperiaatteen (4.5) kanssa. Näin ollen antiteesi on epätosi, joten u on harmoninen. $\square$

4.2 Harmoniset funktiot ja satunnaiskävely

Seuraavaksi lähdetään tutustumaan tarkemmin satunnaiskävelyn ominaisuuksiin. Kuten aikaisemmin keskusteltiin, tavoitteena on näyttää, että pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn odotusarvo toteuttaa keskiarvoperiaatteen, joka voidaan tulkita yksinkertaistettuna dynaamisen ohjelmoinnin periaatteena. Tällöin voidaan edellisen alaluvun perusteella todeta, että odotusarvo on harmoninen funktio eli ratkaisu Laplacen yhtälölle. Koska käsittelyssä on odotusarvo, täytyy lähtökohtana olla todennäköisyysavaruus. Tämän rakentaminen jätetään kuitenkin seuraavaan kappaleeseen, jossa tilanne viedään vielä askeleen pidemmälle ottamalla satunnaiskävelyyn mukaan pelaajia. Todennäköisyysavaruuden konstruktion voi lukea seuraavasta kappaleesta 5. Lisäksi reunafunktion ja pelialueen säännöllisyydestä tehdään huomioita myöhemmin.

Määritelmä 4.8. Olkoon $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitettu funktio ja $\mathcal{F}_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ joukko epänegatiivisia, jatkuvia ja rajoitettuja funktioita. Määritellään operaattori $T : \mathcal{F}_\varepsilon \to \mathcal{F}_\varepsilon$,

$$Tv(x) := \begin{cases} \fint_{B_\varepsilon(x)} v(y)dy, & \text{kun } x \in \Omega, \\ F(x), & \text{kun } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Lause 4.9. *Olkoon $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ annettu jatkuva ja rajoitettu funktio. Tällöin on olemassa jatkuva ja rajoitettu funktio u, joka toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen (4.1) reuna-arvoilla F.*

Todistus. Ensimmäisenä todistetaan u:n pisteittäisen raja-arvon olemassaolo induktiotodistuksella. Olkoon $u_{j+1} = Tu_j$, missä $j = 0, 1, \dots$ ja

$$u_0(x) = \begin{cases} \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F, & \text{kun } x \in \Omega, \\ F(x), & \text{kun } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Osoitetaan, että jono u_j on kasvava.

Perusaskel: Kun $x \in \Gamma_\varepsilon$, niin operaattorin T määritelmästä seuraa, että

$$u_1(x) = Tu_0(x) = F(x) = u_0(x).$$

Jos $x \in \Omega$, saadaan

$$u_1(x) = Tu_0(x) = \fint_{B_\varepsilon(x)} u_0(y)dy \geq \fint_{B_\varepsilon(x)} \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F(y)dy = \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F(y) = u_0(x).$$

Näin ollen $u_1(x) \geq u_0(x)$ kaikilla $x \in \Omega_\varepsilon$.

Induktioaskel: Oletetaan, että $u_j \geq u_{j-1}$ jollain $j = 2, 3, \dots$ ja todistetaan väite indeksille $j+1$: Kun $x \in \Omega$, niin

$$u_{j+1}(x) = Tu_j(x) = \fint_{B_\varepsilon(x)} u_j dy \geq \fint_{B_\varepsilon(x)} u_{j-1}(y)dy = Tu_{j-1}(x) = u_j(x).$$

Näin ollen $u_{j+1} \geq u_j$ kaikilla $j = 0, 1, \dots$, joten jono u_j on kasvava. Jos $x \in \Gamma_\varepsilon$, niin väite seuraa triviaalisti.

Reunafunktion F rajoittuneisuudesta seuraa, että $\sup_{y\in\Gamma_\varepsilon} F(y) < \infty$, joten jono u_j on ylhäältä rajoitettu. Määritellään jatkuva ja rajoitettu funktio u olemaan monotoninen pisteittäinen raja-arvo

$$u(x) := \lim_{j\to\infty} u_j(x) \quad \text{kaikilla } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Tällöin dominoidun konvergenssin nojalla, kun $x \in \Omega$, pätee

$$u(x) = \lim_{j\to\infty} u_j(x) = \lim_{j\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x)} u_{j-1}(y)dy = \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy,$$

joten u toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen (4.1) ja konstruktion nojalla sillä on oikeat reuna-arvot. □

Lause 4.10. *Olkoon $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitettu, ja u harmoninen funktio joukossa Ω_ε, jonka reuna-arvot määrää funktio F. Oletetaan, että funktio u_ε toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen (4.1) reunafunktiolla $F = u$. Tällöin mille tahansa $x_0 \in \Omega$ pätee*

$$u(x_0) = u_\varepsilon(x_0) = \mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)],$$

missä x_τ on ensimmäinen piste joukon Ω ulkopuolella ja τ on pysäytysaika.

Todistus. Tutkitaan satunnaiskävelyä pallossa: seuraava piste valitaan satunnaisesti joukosta $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ tasajakauman perusteella. Kun edelliset pisteet ovat tiedossa, seuraava piste x_k valitaan pallosta $B_\varepsilon(x_{k-1})$. Oletuksen nojalla funktio u_ε toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen (4.1), joten pisteessä x_k saatavan arvon ehdollinen odotusarvo on

$$\mathbb{E}^{x_0}[u_\varepsilon(x_k)|x_0, \dots, x_{k-1}] = \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u_\varepsilon(y)dy = u_\varepsilon(x_{k-1}), \tag{4.6}$$

joka vastaa martingaalin määritelmää 2.16 kaavan (4.1) merkinnöillä. Näin ollen voidaan merkitä $M_j := u_\varepsilon(x_j)$ martingaalia satunnaiskävelyssä. Nyt, koska vakion odotusarvo on vakio itse ja pysäytysajan piste $x_\tau \in \Gamma_\varepsilon$ on alueen Ω ulkopuolella, vaihtoehtoisen pysäyttämisen lauseen 2.22 nojalla saadaan

$$u_\varepsilon(x_0) = \mathbb{E}^{x_0}[u_\varepsilon(x_0)] = \mathbb{E}^{x_0}[M_0] = \mathbb{E}^{x_0}[M_\tau] = \mathbb{E}^{x_0}[u_\varepsilon(x_\tau)] = \mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)].$$

Sama todistus pätee, kun kaavassa (4.6) käytetään funktiolle u harmonisen funktion keskiarvoperiaatetta (4.5). Näin ollen funktiot u ja u_ε ovat samat. Tämä tarkoittaa sitä, että dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen ratkaisufunktio vastaa satunnaiskävelyn odotusarvoa pallossa. □

Jos u on viskositeettialiratkaisu Laplacen yhtälölle eli se toteuttaa epäyhtälön

$$\Delta u \leq 0,$$

niin $M_j := u(x_j)$ on alimartingaali satunnaiskävelyssä, sillä

$$\mathbb{E}^{x_0}[u(x_k)|x_0, \ldots, x_{k-1}] = \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u(y)dy \geq u(x_{k-1}).$$

Tällöin lauseen 2.22 nojalla vastaavilla perusteluilla kuin lauseen 4.10 todistuksessa saadaan

$$u(x_0) = \mathbb{E}^{x_0}[M_0] \leq \mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)].$$

Sama päättely toimii myös viskositeettiyliratkaisujen tapauksessa, jolloin saadaan ylimartingaali.

Seuraavassa kappaleessa satunnaiskävelyyn otetaan mukaan kaksi pelaajaa, jotka yrittävät kontrolloida pelin kulkua itselleen suotuisaan suuntaan tiettyjen sääntöjen vallitessa. Tässä tilanteessa tullaan huomaamaan yhteys satunnaiskohinallisen köydenvetopelin ja p-Laplacen yhtälön välillä. Satunnaiskävelyn ja harmonisten funktioiden käsittely on yksinkertaisempaa muun muassa sen takia, että harmoniset funktiot ovat sileitä, kuten aikaisemmin huomautettiin. Tällöin tilannetta on helppo käsitellä, sillä voidaan puhua klassisista ratkaisuista. Epälineaarisen p-Laplacen kohdalla tilanne on toinen ja joudutaan jälleen palaamaan viskositeettiratkaisujen puoleen.

5 Satunnaiskohinalliset köydenvetopelit ja p-Laplacen yhtälö

Tässä luvussa lähdetään tarkastelemaan stokastisiin peleihin kuuluvia köydenvetopelejä satunnaiskohinalla lisäämällä edellisessä kappaleessa käsiteltyyn satunnaiskävelyyn mukaan kaksi pelaajaa, jotka yrittävät kontrolloida satunnaiskävelyä itselleen suotuisaan suuntaan. Ensimmäisenä käydään läpi pelin yleiset säännöt ja määritelmät ja rakennetaan pelialue sekä muun muassa pelaajien strategiat. Tämän jälkeen lähdetään tarkastelemaan pelin arvofunktioiden odotusarvoja ja lopulta löydetään yhteys p-harmonisiin funktioihin. Tarkastelussa keskitytään ajasta riippumattomaan tilanteeseen. Pääasiallisena lähteenä tässä kappaleessa on toiminut Parviaisen artikkeli [21].

Yksinkertaisuudessaan stokastiset köydenvetopelit satunnaiskohinalla toimivat seuraavalla tavalla:

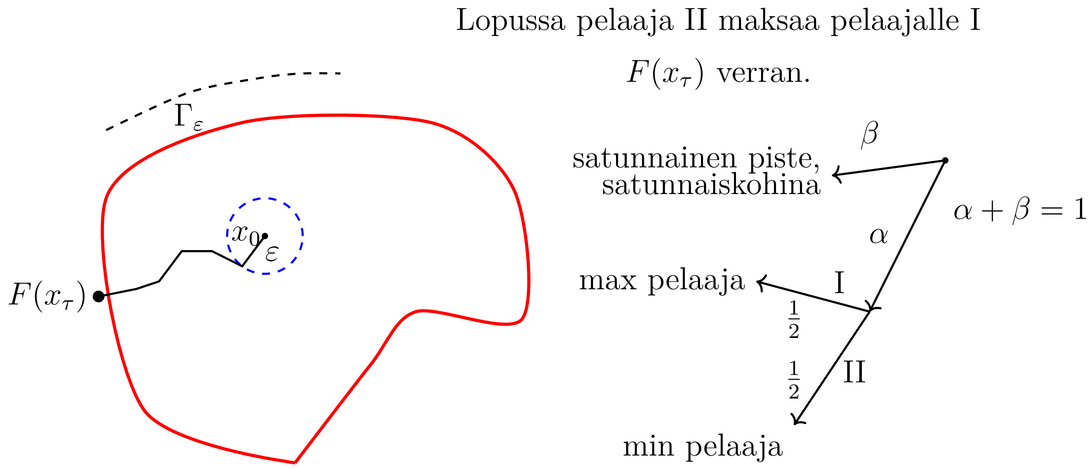
(1) Rajataan avoin pelialue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja määritellään jatkuva ja rajoitettu maksufunktio $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ pelialueen ε-laajennukseen. Valitaan aloituspisteeksi $x_0 \in \Omega$.

(2) Heitetään painotettua kolikkoa, joka antaa kruunan todennäköisyydellä β ja klaavan vastaavasti todennäköisyydellä α ($\alpha + \beta = 1, \beta > 0, \alpha \geq 0$). Jos heitosta saadaan kruuna, seuraava pelipiste x_1 määräytyy satunnaisesti pallosta $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ tasajakauman mukaan, siis samoin kuin satunnaiskävelyssä.

    Jos heitosta saadaan klaava, heitetään tavallista (painottamatonta) kolikkoa, joka määrittää kumpiko pelaaja saa valita mielivaltaisesti seuraavan pelipisteen x_1 x_0-keskisestä ε-säteisestä pallosta.

(3) Tällaista peliä jatketaan uudesta pelipisteestä, kunnes saavutaan johonkin pisteeseen $x_\tau \in \Gamma_\varepsilon$ pelialueen ε-laajennuksessa. Tämän jälkeen pelaaja II maksaa pelaajalle I maksufunktion $F(x_\tau)$ määräämän maksun verran.

Pelin ideana on, että pelaaja II haluaa minimoida maksufunktion arvon, kun taas pelaaja I haluaa maksimoida sen. Näin ollen pelistä tulee "köydenveto", missä pelaajat yrittävät kontrolloida pelin ajautumista kullekin suotuisampaan suuntaan, kts. kuva 5.1 alta. Lisäksi, koska pelissä toinen pelaaja voittaa sen määrän, mitä toinen häviää, kutsutaan peliä yleisesti myös *kahden pelaajan nollasummapeliksi*. Tämä kategoria kuitenkin sisältää monia muitakin pelejä, kuin vain yllä kuvaillun köydenvedon.



Kuva 5.1: Esimerkki satunnaiskohinallisen köydenvetopelin kulusta.

Intuitiivisesti ajateltuna odotettu maksu tietyssä pisteessä voidaan laskea summaamalla yhteen kolme eri tapausta: pelaaja I valitsee pisteen, pelaaja II valitsee pisteen, tai piste valitaan satunnaisesti, ottaen huomioon vastaavat todennäköisyydet. Pelaaja I valitsee pisteen, joka maksimoi odotetun maksun, kun taas pelaaja II valitsee pisteen, joka minimoi sen. Satunnaiskohinan peleihin aiheuttaa painotettu kolikko. Tarkoituksena on näyttää, että tällaisessa tilanteessa pelin arvot toteuttavat *dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen*

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon\right) + \beta ⨍_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon,$$

missä

$$\alpha = \frac{p-2}{p+n} \quad \text{ja} \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2+n}{p+n},$$

kun $p \in [2, \infty)$. Jos $p < \infty$, niin $\beta > 0$.

Tämän jälkeen todistetaan, että kun otetaan raja-arvo $\varepsilon \to 0$, niin arvofunktioiden muodostama jono suppenee yksikäsitteiseen p-harmoniseen funktioon. Tapauksessa $p = 2$ nähdään, että $\alpha = 0$ ja $\beta = 1$, jolloin tilanne supistuu satunnaiskävelyksi, jota käsiteltiin edellisessä kappaleessa 4. Tässä tilanteessa näytettiin, että arvofunktio on harmoninen. Tämän vuoksi oletetaan jatkossa, että $p > 2$, jolloin $\alpha > 0$ ja $\beta < 1$. Alla olevalla merkinnällä $u_\varepsilon = F$ tarkoitetaan, että funktio u_ε saavuttaa funktion F arvot jatkuvasti määrittelyalueensa osassa Γ_ε.

Määritelmä 5.1. Funktiota $u_\varepsilon : \Omega \cup \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa DOP:n ylläolevilla valinnoilla yhdessä reunaehdon $u_\varepsilon = F$ kanssa kutsutaan (p, ε)-*harmonisiksi* funktioksi (engl. *p-harmonious*).

Jotta voidaan puhua odotusarvosta, täytyy pelin asetelma siirtää todennäköisyysavaruuteen, sillä odotusarvo (määritelmä 2.9) on määritelty todennäköisyysavaruudessa. Tarvitaan siis hyvin määritelty joukko, kyseisen joukon σ-algebra, sekä todennäköisyysmitta. Lähdetään liikkeelle maksufunktiosta, jonka avulla saadaan perusteltua joukon määrittely. Määritelmät seuraavat pääasiassa artikkelia [19].

Kuten edellisessä kappaleessa satunnaiskävelyn kohdalla, peli ei välttämättä lopu alueen reunaan $\partial\Omega$. Tämän vuoksi pelialueen Ω sijaan myös tässä luvussa käsitellään pitkälti Ω:n ε-laajennusta Γ_ε sekä aluetta yhdessä sen kanssa, siis $\Omega_\varepsilon := \Omega \cup \Gamma_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ varustettuna euklidisella topologialla. Nämä määriteltiin edellisessä luvussa (määritelmä 4.2). Siirrytään seuraavaksi maksufunktioon:

Määritelmä 5.2. Maksufunktio $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu funktio.

Suurimmassa osassa lähteistä maksufunktiosta oletetaan jatkuvuuden sijaan Borel-mitallisuus. Esityksen yksinkertaistamiseksi tässä tutkielmassa rajoitutaan tilanteeseen, jossa maksufunktio on jatkuva ja rajoitettu.

Köydenvetopelissä pelaajat ovat tietoisia siitä, mitä aikaisemmilla kierroksilla on tapahtunut aina nykyhetkeen asti. Näin ollen heillä on käytössään pelin *historia*. Tarkemmin sanottuna pelin historia askeleeseen $k \in \mathbb{N}$ asti on vektori

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_k) \in \Omega_\varepsilon^{k+1}.$$

Kyseinen vektori muodostuu pisteistä, joissa pelin aikana on vierailtu.

Merkitään pelin kaikkien mahdollisten k:n askeleen historioiden joukkoa $H_k := \prod_{j=0}^{k} \Omega_\varepsilon^j$ ja kaikkien äärellisten historioiden kokoelmaa merkinnällä

$$H := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k.$$

Tietäessään pelin historian pelaajat pystyvät tekemään päätöksiä sen suhteen, mitä kannattaa tehdä seuraavaksi. Tällaista päätöstä kutsutaan *strategiaksi*. Pelaajan voittaessa kolikonheiton, hänen käyttämänsä strategia S määrittää mikä piste valikoituu seuraavaksi pelipisteeksi.

Määritelmä 5.3. Pelaajan X strategia on funktio $S_X : H \to \mathbb{R}^n$,

$$S_X(x_0, \dots, x_k) = x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k),$$

kun on päädytty pelaamaan köydenvetoa, jonka pelaaja X on voittanut, ja tiedossa on pelin historia $H_k \in H$.

Strategioissa on mahdollista ottaa huomioon pelin aikaisemmat tilat sekä pelin aikana tapahtuneet kolikonheitot. Artikkelissa [17] on kuitenkin osoitettu, että riippumatta otetaanko strategioissa huomioon vain tämän hetkinen sijainti, kaikki pelin sijainnit nykyiseen asti, vai sekä kaikki sijainnit, että myös jokainen tapahtunut kolikonheitto, pelin arvo on olemassa ja toteuttaa DOP:n ([17] Corollary 3.3). Näin ollen esityksen yksinkertaistamiseksi voidaan käyttää lyhyempää merkintää

$$S_X(x_k) = x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k),$$

jolloin pelin seuraava siirto riippuu vain tämän hetkisestä sijainnista.

Avaruuteen H saadaan rakennettua todennäköisyysmitta $\mathbb{P}^{x_0}_{S_I,S_{II}} : H \to [0,1]$ karteesisena tulona *Kolmogorovin laajennuslausetta* käyttäen. Hahmotelman tälle löytää esimerkiksi artikkelin [19] sivuilta 6-7. Kolmogorovin laajennuslause löytyy muun muassa Bassin kirjasta [3] (Appendix D). Huomion arvoista on, että tällä tavalla määriteltynä todennäköisyysmitta riippuu vain aloituspisteestä sekä pelaajien strategioista.

Siirrytään seuraavaksi filtraation määrittelyyn. Merkitään $\mathcal{F} = \bigotimes_{j=0}^{\infty} \mathcal{B}(\Omega_\varepsilon)$. Olkoon $B_k \in \mathcal{B}(\Omega_\varepsilon)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Määritellään todennäköisyysavaruuteen $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}^{x_0}_{S_I,S_{II}})$ filtraatio $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$ asettamalla

$$\mathcal{F}_j = B_0 \times B_1 \times \cdots \times B_j \times \Omega_\varepsilon \times \ldots$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Selvästi kyseessä on filtraatio, sillä $\mathcal{F}_j$ on σ-algebra jokaisella j, minkä lisäksi pätee $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{j+1}$. Tämän filtraation avulla saadaan määriteltyä kuvaus

$$x_k : H \to \Omega_\varepsilon, \quad x_k(\omega_1, \ldots) = \omega_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$\mathcal{F}_k$-mitalliseksi satunnaismuuttujaksi, jota taas voidaan käyttää pysäytysajan määrittelyssä: Olkoon $\tau : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{N}_\infty$,

$$\tau(\omega) := \inf\{k : x_k(\omega) \in \Gamma_\varepsilon, k \in \mathbb{N}\}.$$

Tällä tavalla määriteltynä pysäytysaika voidaan tulkita ensimmäisenä askeleena, joka on päätynyt pelialueen ulkopuolelle.

Määritelmä 5.4. Olkoon S_I ja S_{II} pelaajien I ja II strategiat ja F pelin maksufunktio. Kiinnitetään pelin aloituspiste $x_0 \in \Omega$ ja merkitään $x_\tau \in \Gamma_\varepsilon$ pelin päättymispistettä. Tällöin pelin odotettu maksu on

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}[F(x_\tau)] = \int_H F(x_\tau(\omega))\, d\mathbb{P}^{x_0}_{S_I,S_{II}}(\omega).$$

Määritelmässä τ viittaa pysäytysaikaan filtraation $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ suhteen eli askeleeseen, jolloin pelialueelta poistutaan. Tämä määritelmä yhdessä maksufunktion määritelmän kanssa on mielekäs: Pelialue Ω on rajoitettu ja satunnaisen siirron todennäköisyys on $\beta > 0$, riippumatta edellisistä askeleista. Näin ollen todennäköisyys θ, että astutaan lähemmäs pelialueen reunaa peräkkäisillä askeleilla kunnes alueelta poistutaan, on positiivinen. Tällöin toistojen perusteella on olemassa yläraja muodossa $(1-\theta)^k \to 0$, kun $k \to \infty$, tapahtumalle, että tällaista peräkkäisten askeleiden sarjaa ei koskaan tapahtuisi. Näin ollen peli päättyy Ω:n ulkopuolelle melkein varmasti.

Viimeisenä satunnaiskohinallisiin köydenvetopeleihin liittyen tarvitaan vielä käsitys pelin arvosta. Koska pelin päätyttyä pelaaja II maksaa pelaajalle I maksufunktion F määräämän maksun verran, on selvää, että pelaaja I haluaa ohjata peliä kohti pistettä, jossa maksufunktion arvo on mahdollisimman suuri. Toisaalta pelaaja II haluaa ohjata peliä kohti pistettä, jossa maksufunktion arvo on mahdollisimman pieni. Näin ollen määritellään arvofunktio siten, että se kertoo maksimoivalle pelaajalle (siis pelaajalle I) mikä on pienin voitto, jonka hän voi itselleen taata. Vastaavasti määritellään minimoivalle pelaajalle (pelaaja II) arvofunktio siten, että se kertoo pienimmän häviön, jonka hän voi itselleen taata.

Tällainen määrittely on mahdollista pelin odotetun maksun avulla: molemmat pelaajista olettavat vastapelaajansa toimivan täydellisesti. Tällöin pelaajalle I pelin arvo määritellään ottamalla ensin infimum pelaajan II strategioiden yli odotetusta maksusta, jonka jälkeen saadusta arvosta otetaan vielä supremum pelaajan I omien strategioiden yli. Tällä tavalla saadaan kuvattua tilanne, jossa oletetaan pelaajan II yrittävän minimoida arvoa (infimum) ja tämän jälkeen pelaajan I yrittävän maksimoida arvoa jäljelle jääneistä mahdollisuuksista (supremum). Pelaajalla II inf ja sup ovat luonnollisesti päinvastoin.

Määritelmä 5.5. Arvofunktio pelaajalle I on

$$u_\varepsilon^I(x_0) := \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}_{S_i,S_{II}}^{x_0} F(x_\tau)$$

ja pelaajalle II

$$u_\varepsilon^{II}(x_0) := \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}_{S_i,S_{II}}^{x_0} F(x_\tau).$$

Tästä nähdään, että aina pätee $u_\varepsilon^I \leq u_\varepsilon^{II}$, sillä molemmissa funktioissa minimoidaan ja maksimoidaan odotettua maksua: Tiedetään, että

$$\inf_{S_{II}} \mathbb{E}_{S_I,S_{II}}^{x_0}[F(x_\tau)] \leq \mathbb{E}_{S_I,S_{II}}^{x_0}[F(x_\tau)] \leq \sup_{S_I} \mathbb{E}_{S_I,S_{II}}^{x_0}[F(x_\tau)],$$

joten

$$\sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}[F(x_\tau)] \leq \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}[F(x_\tau)].$$

Vastaavasti pätee

$$\sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}[F(x_\tau)] \leq \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}[F(x_\tau)],$$

joten

$$u_\varepsilon^I \leq u_\varepsilon^{II}.$$

Määritelmästä myös nähdään, että yleisesti ottaen ensimmäisenä vuoronsa tekevä joutuu epäedulliseen tilanteeseen: jos esimerkiksi pelaaja II tekee minimoivan valinnan pelaajan I maksimoivan valinnan jälkeen, jättää tämä pelaajan I huonompaan tilanteeseen. Myöhemmin tuloksista käy ilmi, että $u_\varepsilon^I \equiv u_\varepsilon^{II}$, jolloin sanotaan, että pelillä on *arvo*.

5.1 Peliteoreettinen p-Laplace

Seuraavaksi tarkastellaan epälineaarista yleistystä Laplacen yhtälöstä nimeltä *p-Laplacen yhtälö*, joka mainittiin nopeasti kappaleessa 2.2. Jatkossa oletetaan, että $2 < p < \infty$, sillä tapauksessa $p = 2$ päädytään kappaleessa 4.1 käsiteltyyn Laplacen yhtälöön. Tässä kappaleessa tarkastellaan sekä p-Laplacea, että normalisoitua eli peliteoreettista p-Laplacea. Lopulta saadaan näytettyä, että p-harmoniset funktiot toteuttavat dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen, eli ovat (p,ε)-harmonisia funktioita. Lisäksi saadaan näytettyä, että tasaisesti suppenevan (p,ε) -harmonisten funktioiden muodostaman jonon rajafunktio on viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle. Tämä kappale seuraa pääasiassa artikkeleita [19] ja [18].

Epälineaarista osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} \Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0 & \text{joukossa } \Omega \\ u = F & \text{joukossa } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

missä F on jatkuva ja rajoitettu reaaliarvoinen funktio, kutsutaan *p-Laplacen yhtälöksi* ja sen ratkaisuja p-harmonisiksi funktioiksi. Kuten kappaleessa 2.2 huomautettiin, epälineaarisilla ODY:illä ei välttämättä ole klassisia ratkaisuja. Tämän vuoksi, jotta ratkaisujen tarkastelu olisi mielekästä, siirretään viskositeettiratkaisujen käsite optimaalisen kontrollin Hamilton-Jacobi-yhtälöstä p-Laplacen yhtälöön. Luontevampaa olisi käyttää heikkoja ratkaisuja distributiivisessa mielessä. Myöhemmin kuitenkin tarkastellaan peliteoreettista p-Laplacea, joka ei ole divergenssimuodossa, minkä vuoksi otetaan viskositeettiratkaisut käyttöön jo tässä vaiheessa. On todistettu (kts. artikkeli [13]), että p-Laplacen tapauksessa heikot, distributiiviset ratkaisut ovat ekvivalentteja viskositeettiratkaisujen kanssa.

Määritelmä 5.6 (Viskositeettiratkaisu p-Laplacelle)**.** Olkoon $u \in C(\Omega)$. Sanotaan, että u on viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle (5.1), jos

1. $u = F$ joukossa $\partial\Omega$
2. jokaiselle testifunktiolle $\phi \in C^2(\Omega)$, jolle funktiolla $u - \phi$ on pisteessä $x_0 \in \Omega$
   (a) *lokaali maksimi* pätee
   $$\Delta_p \phi(x_0) \geq 0$$
   (b) *lokaali minimi* pätee
   $$\Delta_p \phi(x_0) \leq 0$$

Samoin kuin Hamilton-Jacobi-yhtälön tapauksessa, ylläolevan määritelmän kohdan (a) toteuttavaa funktiota u kutsutaan viskositeettialiratkaisuksi, ja kohdan (b) toteuttavaa viskositeettiyliratkaisuksi. Seuraava lause, joka löytyy artikkelista [13], kertoo viskositeettiratkaisujen yksikäsitteisyyden:

Lause 5.7. *Olkoon $g \in C(\partial\Omega)$ ja $u \in C(\overline{\Omega})$ p-Laplacen yhtälön viskositeettiratkaisu siten, että $u \equiv g$ joukossa $\partial\Omega$. Tällöin funktio u on yksikäsitteinen.*

Tarkoituksena on tarkastella p-Laplacen yhteyttä edellä käsiteltyihin stokastisiin köydenvetopeleihin. Tätä varten tarvitaan peliteoreettisen eli normalisoidun ∞-Laplacen käsite, jonka määrittely voidaan tehdä seuraavalla tavalla: Oletetaan, että u on sileä ja $|Du| \neq 0$. Tällöin p-Laplacen operaattori voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = |Du|^{p-2} \operatorname{div}(Du) + \langle D|Du|^{p-2}, Du \rangle.$$

Divergenssin määritelmän 2.29 mukaan

$$\operatorname{div}(Du) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (Du)_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u,$$

joten

$$\begin{aligned}
D|Du|^{p-2} &= D\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2\Big)^{\frac{p-2}{2}} \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2\Big)^{\frac{p-2}{2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2\Big)^{\frac{p-2}{2}}\Big) \\
&= \Big(\frac{p-2}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2\Big)^{\frac{p-4}{2}}\Big(2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i}\Big), \dots\Big) \\
&= (p-2)|Du|^{p-4}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i}, \dots\Big) \\
&= (p-2)|Du|^{p-4}(D^2 u Du)).
\end{aligned}$$

Näin ollen p-Laplacen operaattori saadaan muotoon

$$\Delta_p u = |Du|^{p-2}\Delta u + (p-2)|Du|^{p-4}\langle D^2 u Du, Du\rangle,$$

jolloin p-Laplacen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$|Du|^{p-2}\Delta u + (p-2)|Du|^{p-4}\langle D^2 u Du, Du\rangle = 0.$$

Jakamalla tämä puolittain termillä $(p-2)|Du|^{p-4}$ saadaan

$$\frac{|Du|^2}{p-2}\Delta u + \langle D^2 u Du, Du\rangle = 0,$$

ja ottamalla raja-arvo $p \to \infty$ saadaan

$$\langle D^2 u Du, Du\rangle = 0.$$

Tämä motivoi määrittelemään ∞-Laplacen operaattorin olemaan

$$\Delta_\infty u := \langle D^2 u Du, Du\rangle.$$

Määritellään tämän avulla peliteoreettinen eli normalisoitu ∞-Laplacen operaattori Δ_∞^N lausekkeella

$$\Delta_\infty^N u := |Du|^{-2}\langle D^2 u Du, Du\rangle = \Big\langle D^2 u \frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|}\Big\rangle,$$

josta päästään peliteoreettisen p-Laplacen operaattorin määritelmään:

Määritelmä 5.8. Olkoon $p \in (2, \infty)$ ja $u \in \{v \in C^2(\Omega) : Dv \neq 0\}$. Operaattoria

$$\Delta_p^N u := \Delta u + (p-2)\Delta_\infty^N u$$

kutsutaan peliteoreettiseksi (normalisoiduksi) p-Laplacen operaattoriksi.

Huomautus 5.9. On syytä huomata, että

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = |Du|^{p-2}(\Delta u + (p-2)\Delta_\infty^N u) = |Du|^{p-2}\Delta_p^N u,$$

joten p-Laplacen yhtälöllä on useita ekvivalentteja merkintätapoja. Voidaan myös määritellä peliteoreettinen p-Laplacen yhtälö:

$$\begin{cases} \Delta_p^N u = 0 & \text{joukossa } \Omega \\ u = F & \text{joukossa } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2}$$

Määritelmä 5.10. Olkoon $u \in C(\Omega)$. Funktio u on viskositeettiratkaisu peliteoreettiselle p-Laplacen yhtälölle, jos

1. $u = F$ joukossa $\partial\Omega$
2. jokaiselle testifunktiolle $\phi \in \{\psi \in C^2(\Omega) : D\psi(x) \neq 0\}$, jolle funktiolla $u - \phi$ on pisteessä $x_0 \in \Omega$
   (a) *lokaali maksimi* pätee
   $$\Delta_p^N \phi(x_0) \geq 0$$
   (b) *lokaali minimi* pätee
   $$\Delta_p^N \phi(x_0) \leq 0.$$

On syytä huomauttaa, että ei ole selvää, miten peliteoreettinen p-Laplacen operaattori $\Delta_p^N u$ tulisi tulkita, jos $Du = 0$. Viskositeettiteoriassa (kts. esimerkiksi [12]) viskositeettiratkaisut määritellään konveksina verhona, mutta on myös todistettu (kts. artikkeli [13]), että testifunktiot, joiden gradientti häviää, voidaan jättää huomiotta. Tämän vuoksi ylläolevassa määritelmässä testifunktioiden joukko on rajoitettu sopivaan tilanteeseen jo valmiiksi.

Itseasiassa määritelmät 5.6 ja 5.10 viskositeettiratkaisuille ovat ekvivalentit eli u on viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle jos ja vain jos se on ratkaisu peliteoreettiselle p-Laplacen yhtälölle. Näin ollen yksikäsitteisyystulos (lause 5.7) pätee myös normalisoidulle p-Laplacelle ja tilanteesta riippuen voidaan valita kumpaako lähestymistapaa käytetään. Tämä löytyy lähteen [19] sivulta 3:

Lause 5.11. *Olkoon $u \in C(\Omega)$. Tällöin*

$$\Delta_p u = 0 \text{ viskositeettimielessä}$$

jos ja vain jos

$$\Delta_p^N u = 0 \text{ viskositeettimielessä.}$$

Seuraavaksi näytetään, että p-Laplacen reuna-arvo-ongelman ratkaisut toimivat raja-arvona (p, ε)-harmonisille funktioille

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon, \tag{5.3}$$

kun näistä muodostetaan tasaisesti suppeneva jono. Tätä tulosta tullaan käyttämään seuraavassa kappaleessa, jossa näytetään satunnaiskohinallisen köydenvetopelin arvofunktioiden muodostavan tasaisesti suppenevan jonon, kun otetaan raja-arvo $\varepsilon \to 0$ tiettyjen lisäoletusten vallitessa. Tällöin tiedetään, että kyseessä on yksikäsitteinen ratkaisu. Muistetaan, että

$$\alpha = \frac{p-2}{p+n} \quad \text{ja} \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2+n}{p+n},$$

missä $p \in (2, \infty)$.

Todistetaan ensin kaksi tulosta, joita tarvitaan havainnollistamaan p-harmonisten ja (p, ε)-harmonisten funktioiden yhteyttä. Todistuksessa tarvitaan n-ulotteisen pallon tilavuutta ω_n ja pinta-alaa σ_{n-1}, kuten kappaleessa 4. On syytä muistaa näiden välinen yhteys: $\sigma_{n-1} = n\omega_n$, jolloin yleisen ε-säteisen pallon tilavuutta ja pinta-alaa voidaan merkitä

$$\omega_n(\varepsilon) := \varepsilon^n \omega_n \quad \text{ja} \quad \sigma_{n-1}(\varepsilon) := \varepsilon^{n-1}\sigma_{n-1}.$$

Lemma 5.12. *Olkoon u C^2-funktio. Tällöin*

$$u(x) - \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy = -\frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta u(x) + O(\varepsilon^2),$$

missä O-notaatio kuvastaa funktion asymptoottista käyttäytymistä.

Todistus. Otetaan keskiarvointegraali u:n Taylorin sarjasta pallon $B_\varepsilon(x)$ yli, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy =& \fint_{B_\varepsilon(x)} u(x)dy + \fint_{B_\varepsilon(x)} Du(x) \cdot (y-x)dy \\ &+ \fint_{B_\varepsilon(x)} \frac{1}{2}\langle D^2u(x)(y-x), (y-x)\rangle dy + \fint_{B_\varepsilon(x)} O(|y-x|^3)dy.\end{aligned}$$

Lähdetään käsittelemään yhtälön oikeaa puolta pala kerrallaan. Ensimmäinen osa voidaan laskea auki seuraavalla tavalla:

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} u(x)dy = \frac{u(x)}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon(x)} 1dy = u(x). \tag{5.4}$$

Seuraavaksi muuttujanvaihdolla $z := y - x$ saadaan

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} Du(x) \cdot (y-x)dy = \frac{1}{|B_\varepsilon|} \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} \int_{B_\varepsilon(0)} z_i dz \Big).$$

Nyt lemman 2.1 nojalla $\int_{B_\varepsilon(x)} z_i dz = 0$ kaikilla i, joten

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} Du(x) \cdot (y-x)dy = 0. \tag{5.5}$$

Samalla muuttujanvaihdolla saadaan lisäksi

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_\varepsilon(x)} \langle D^2u(x)(y-x), (y-x)\rangle dy \\
&= \fint_{B_\varepsilon(x)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}u(x)(y-x)_i(y-x)_j dy \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon|} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}u(x) \int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_i(y-x)_j dy \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon|} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}u(x) \int_{B_\varepsilon(0)} z_i z_j dz.
\end{aligned}$$

Saman lemman 2.1 nojalla

$$\int_{B_\varepsilon(0)} z_i z_j dz = 0,$$

kaikilla $i \neq j$, joten

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} \langle D^2u(x)(y-x), (y-x)\rangle dy = \frac{1}{|B_\varepsilon|} \sum_{i=1}^{n} D_{ii}u(x) \int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_i^2 dy.$$

Lisäksi

$$\int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_i^2 dy = \int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_j^2 dy, \qquad \text{kaikilla } i, j,$$

koska vektorin komponentit käyttäytyvät samalla tavalla kun integroidaan pallon yli. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_i^2 dy &= \frac{\sum_{j=1}^{n} \int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_j^2 dy}{n} \\
&= \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{\sum_{j=1}^{n} (y-x)_j^2 dy}{n} \\
&= \int_{B_\varepsilon} \frac{|y-x|^2}{n} dy,
\end{aligned}$$

joten

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} \langle D^2u(x)(y-x),(y-x)\rangle dy = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}u(x) \fint_{B_\varepsilon(0)} \frac{|z|^2}{n} dz.$$

Nyt Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\fint_{B_\varepsilon(0)} \frac{|z|^2}{n} dz &= \frac{1}{\varepsilon^n \omega_n n} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r(0)} r^2 dS dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n \omega_n n} \int_0^\varepsilon r^2 r^{n-1} \sigma_{n-1} dr \\
&= \frac{\sigma_{n-1}}{\varepsilon^n \omega_n n} \int_0^\varepsilon r^{n+1} dr \\
&= \frac{n}{\varepsilon^n n} \frac{\varepsilon^{n+2}}{n+2} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{n+2}.
\end{aligned}$$

Määritelmän nojalla $\sum_{i=1}^n D_{ii}u(x) = \Delta u(x)$, joten

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} \langle D^2u(x)(y-x),(y-x)\rangle dy = \frac{\varepsilon^2}{n+2} \Delta u(x). \tag{5.6}$$

Lopulta yhdistämällä yhtälöt (5.4)-(5.6) saadaan

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy = u(x) + \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)} \Delta u(x) + O(\varepsilon^3),$$

joten

$$u(x) - \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy = -\frac{\varepsilon^2}{2(n+2)} \Delta u(x) + O(\varepsilon^3). \qquad \square$$

Seuraavaksi tarkastellaan dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen (5.3) jäljelle jäänyttä osaa, siis supremumia ja infimumia. Kuten kappaleessa 2.2 mainittiin, gradientti antaa tiedon suurimman kasvunopeuden suunnasta, joten

$$\sup_{B_\varepsilon(x)} u \approx u\Big(x + \varepsilon \frac{Du(x)}{|Du(x)|}\Big) \quad \text{ja} \quad \inf_{B_\varepsilon(x)} u \approx \Big(x - \varepsilon \frac{Du(x)}{|Du(x)|}\Big). \tag{5.7}$$

Yksinkertaistetaan merkintöjä ja merkitään

$$h := \varepsilon \frac{Du(x)}{|Du(x)|}.$$

Heuristisesti voidaan olettaa supremumin löytyvän pallon reunalta, sillä tarkasteltavana on tilanne, jossa $\varepsilon \to 0$. Koska gradientti ei ole nolla, suurin arvo löytyy joko pallon sisältä (pois lukien sen keskipiste) tai sen reunalta. Tämän perusteella voidaan päätellä, että jossain vaiheessa ε:n arvoa eteenpäin siirrettäessä suurin arvo osoittaa aina pallon reunaan. Vastaava päättely pätee myös infimumin tapauksessa.

Käytetään seuraavaksi Taylorin sarjakehitelmää funktioon u, jolloin yhdessä arvion (5.7) kanssa saadaan

$$
\begin{aligned}
\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u &\approx u(x+h) + u(x-h) \\
&= 2u(x) + Du(x)\cdot h + \frac{1}{2}\langle D^2u(x)(h),(h)\rangle + O(|h|^3) \\
&+ Du(x)\cdot(-h) + \frac{1}{2}\langle D^2u(x)(-h),(-h)\rangle + O(|-h|^3) \\
&= 2u(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}u(x)h_ih_j + O(|h|^3) \\
&= 2u(x) + \frac{\varepsilon^2}{|Du(x)|^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}u(x)(Du(x))_i(Du(x))_j + O(\varepsilon^2) \\
&= 2u(x) + \frac{\varepsilon^2}{|Du(x)|^2}\langle D^2u(x)Du(x), Du(x)\rangle + O(\varepsilon^3) \\
&= 2u(x) + \varepsilon^2\Delta_\infty^N u(x) + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}
$$

joten

$$
\begin{aligned}
&u(x) - \frac{1}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u\Big) \\
&\approx u(x) - \frac{1}{2}(2u(x) + \varepsilon^2\Delta_\infty^N u(x) + O(\varepsilon^3)) \\
&= -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta_\infty^N u(x) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Lisäämällä nyt lemmaan 5.12 ja yhtälöön (5.8) kertoimet α ja β ja laskemalla näiden tulokset yhteen saadaan

$$
\begin{aligned}
&\beta\Big(u(x) - \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy\Big) + \alpha\Big(u(x) - \frac{1}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u\Big)\Big) \\
&\approx -\frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta u(x) - \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta_\infty^N u(x) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
$$

Uudelleenjärjestelemällä ja käyttämällä α:n ja β:n määritelmiä saadaan lopulta seuraavanlainen arvio:

$$\begin{aligned}
&u(x) - \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy - \frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u\Big) + O(\varepsilon^3) \\
&\approx -\frac{\varepsilon^2}{2}\Big(\alpha \Delta_\infty^N u(x) + \frac{\beta}{n+2}\Delta u(x)\Big) \\
&= -\frac{\varepsilon^2}{2}\Big(\frac{p-2}{n+p}\Delta_\infty^N u(x) + \frac{1}{n+p}\Delta u(x)\Big) \\
&= -\frac{\varepsilon^2(n+p)}{2}((p-2)\Delta_\infty^N u(x) + \Delta u(x)).
\end{aligned}$$

Jos nyt ajatellaan p-Laplacen reuna-arvo-ongelmaa

$$\begin{cases} \Delta_p u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = F(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.9}$$

niin heuristisesti ratkaisut ovat muotoa

$$u(x) = \frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u\Big) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy + O(\varepsilon^3),$$

kun $\varepsilon \to 0$.

Näin ollen on saatu heuristinen perustelu p-harmonisten funktioiden yhteydestä (p, ε)-harmonisiin funktioihin. Ylläoleva päättely ei kuitenkaan ole täsmällinen ja yhtäsuuruuksien saaminen vaatii vahvempaa argumentointia. Tarkka perustelu löytyy esimerkiksi Lewickan kirjasta [16] sekä Peresin ja Sheffieldin julkaisusta [26].

Siirrytään nyt tarkastelemaan tilannetta, jossa jono (p, ε)-harmonisia funktioita maksufunktion F määräämillä reuna-arvoilla suppenee tasaisesti johonkin funktioon u. Käy ilmi, että tässä tapauksessa funktio u on viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle (5.1). Tätä tulosta käytetään seuraavassa kappaleessa, kun tutkitaan mitä käy pelin arvofunktioille, kun askelpituudesta otetaan raja-arvo $\varepsilon \to 0$. Tässä tilanteessa saadaan aikaiseksi (p, ε)-harmonisten funktioiden jono, joka suppenee tasaisesti. Näin ollen seuraavan tuloksen nojalla rajafunktioksi saadaan yksikäsitteinen p-Laplacen yhtälön viskositeettiratkaisu.

Lause 5.13. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu, ja F maksufunktio. Olkoon lisäksi $\{u_m\}$ jono (p, ε)-harmonisia funktioita, jotka suppenevat tasaisesti funktioon u. Tällöin u on viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle*

$$\begin{cases} \Delta_p u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = F(x) & x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Todistus. Tehdään ensin huomio reunafunktiosta F: huomataan, että koska $u_m(x) = F(x)$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$ ja $x \in \Gamma_\varepsilon$ ja $u_m \to u$ tasaisesti, niin $u(x) = F(x)$ kaikilla $x \in \Gamma_\varepsilon$.

Olkoon nyt $\phi \in C^3$ viskositeettiyliratkaisun määritelmän mukainen testifunktio. Päättely voidaan tehdä myös C^2-funktiolle eri virhetermillä Taylorin sarjassa, mutta C^3-funktio yksinkertaistaa tilannetta. Valitaan seuraavaksi piste $x \in \Omega$ ja määritellään x_1^ε olemaan se piste, jossa ϕ saavuttaa suljetussa pallossa $\overline{B}_\varepsilon(x)$ miniminsä. Toisin sanoen

$$\phi(x_1^\varepsilon) = \min_{y \in \overline{B}_\varepsilon(x)} \phi(y).$$

Laskemalla φ:n Taylorin sarjat sekä pisteessä x_1^ε että minimipisteen peilauspisteessä x:n suhteen $2x - x_1^\varepsilon$, saadaan

$$\phi(x_1^\varepsilon) = \phi(x) + D\phi(x) \cdot (x_1^\varepsilon - x) + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3)$$

sekä

$$\begin{aligned}
\phi(2x - x_1^\varepsilon) &= \phi(x) + D\phi(x) \cdot (2x - x_1^\varepsilon - x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(2x - x_1^\varepsilon - x), (2x - x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|2x - x_1^\varepsilon - x|^3) \\
&= \phi(x) - D\phi(x) \cdot (x_1^\varepsilon - x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3),
\end{aligned}$$

kun $\varepsilon \to 0$. Lasketaan nämä yhteen, jolloin

$$\phi(2x - x_1^\varepsilon) + \phi(x_1^\varepsilon) = 2\phi(x) + \langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3),$$

joten

$$\phi(2x - x_1^\varepsilon) + \phi(x_1^\varepsilon) - 2\phi(x) = \langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3).$$

Nyt ϕ on määritelmänsä mukaan jatkuva, ja lisäksi piste x_1^ε on sen minimipiste, joten pätee

$$\phi(2x - x_1^\varepsilon) + \phi(x_1^\varepsilon) - 2\phi(x) \leq \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} \phi(y) + \inf_{y \in B_\varepsilon(x)} \phi(y) - 2\phi(x).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x)} \phi(y) - \inf_{B_\varepsilon(x)} \phi(y)\Big) - \phi(x) \\
&\geq \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3).
\end{aligned}$$

Nyt lemman 5.12 sekä α:n ja β:n määritelmien avulla saadaan arvio

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x)}\phi+\inf_{B_\varepsilon(x)}\phi\Big)+\beta\fint_{B_\varepsilon(x)}\phi(y)dy-\phi(x)\\
&\geq\frac{\alpha}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon-x),(x_1^\varepsilon-x)\rangle+\frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta\phi(x)-O(\varepsilon^3) \qquad (5.10)\\
&=\frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\Big((p-2)\Big\langle D^2\phi(x)\Big(\frac{x_1^\varepsilon-x}{\varepsilon}\Big),\Big(\frac{x_1^\varepsilon-x}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle+\Delta\phi(x)\Big)+O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Jos kyseessä olisi jatkuvat funktiot, niin löytyisi suppeneva jono pisteeseen x siten, että funktiolla $u_m-\phi$ olisi minimi pisteessä x_m (kts. [10] s. 541). Funktiot u_m eivät kuitenkaan välttämättä ole jatkuvia, joten otetaan avuksi $\eta_m>0$, jolloin

$$u_m(y)-\phi(y)\geq u_m(x_m)-\phi(x_m)-\eta_m.$$

Mikäli tarve vaatii, on funktiota ϕ mahdollista siirtää pystysuunnassa: $\tilde{\phi}:=\phi-u_m(x_m)-\phi(x_m)$. Näin ollen voidaan olettaa, että $\phi(x_m)=u_m(x_m)$, joten

$$\phi(y)\leq u_m(y)+\eta_m.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x_m)}\phi+\inf_{B_\varepsilon(x_m)}\phi\Big)+\beta\fint_{B_\varepsilon(x_m)}\phi(y)dy-\phi(x_m)\\
&\leq\frac{\alpha}{2}\Big(2\eta_m+\sup_{B_\varepsilon(x_m)}u_m+\inf_{B_\varepsilon(x_m)}u_m\Big)+\beta\Big(\eta_m+\fint_{B_\varepsilon(x_m)}u_m(y)dy\Big)-\phi(x_m)\\
&=\eta_m+\frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x_m)}u_m+\inf_{B_\varepsilon(x_m)}u_m\Big)+\beta\fint_{B_\varepsilon(x_m)}u_m(y)dy-\phi(x_m)\\
&=\eta_m+u_m(x_m)-\phi(x_m)\\
&=\eta_m.
\end{aligned}$$

Yhtälön (5.10) kanssa saadaan

$$\eta_m\geq\frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\Big((p-2)\Big\langle D^2\phi(x_m)\Big(\frac{x_1^\varepsilon-x_m}{\varepsilon}\Big),\Big(\frac{x_1^\varepsilon-x_m}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle+\Delta\phi(x_m)\Big)+O(\varepsilon^3).$$

Valinnalla $\eta_m=O(\varepsilon^3)$ ja jakamalla epäyhtälö puolittain ε^2 saadaan

$$0\geq\frac{\beta}{2(n+2)}\Big((p-2)\Big\langle D^2\phi(x_m)\Big(\frac{x_1^\varepsilon-x_m}{\varepsilon}\Big),\Big(\frac{x_1^\varepsilon-x_m}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle+\Delta\phi(x_m)\Big),$$

jolloin raja-arvosta $\varepsilon\to 0$ seuraa

$$0\geq\frac{\beta}{2(n+2)}((p-2)\Delta_\infty^N\phi(x)+\Delta\phi(x)), \qquad (5.11)$$

joten määritelmän nojalla u on yliratkaisu p-Laplacen yhtälölle (5.1).

Vastaavalla päättelyllä saadaan u myös aliratkaisuksi käyttämällä määritelmän mukaista testifunktiota $\phi \in C^3$ ja tarkastelemalla sen maksimia

$$\phi(x_2^\varepsilon) = \max_{y \in \overline{B}_\varepsilon(x)} \phi(y).$$

Tällöin epäyhtälö (5.11) kääntyy ympäri ja saadaan

$$0 \leq \frac{\beta}{2(n+2)}((p-2)\Delta_\infty^N \phi(x) + \Delta\phi(x)),$$

joten u on sekä yli- että aliratkaisu viskositeettimielessä ja näin ollen viskositeettiratkaisu yhtälölle (5.1). □

5.2 Arvofunktioiden olemassaolo, yksikäsitteisyys ja suppeneminen

Palataan takaisin satunnaiskohinalla varustetun köydenvetopelin pariin. Köydenvedon sekä α:n ja β:n määritelmät voi kerrata luvun 5 alusta. Tarkoituksena on osoittaa, että satunnaiskohinalliselle köydenvetopelille on olemassa yksikäsitteinen arvo. Aloitetaan näyttämällä (p, ε)-harmonisen funktion olemassaolo ja yksikäsitteisyys mille tahansa rajoitetun alueen Ω_ε Borel-mitalliselle reunafunktiolle. Borel-mitallisuudesta voi lukea esimerkiksi Mitta- ja Integraaliteorian luentomonisteesta [15]. Olemassaolo ja yksikäsitteisyys todistetaan samankaltaisen operaattorin T avulla, kuin mitä käytettiin kappaleessa 4, kun todistettiin harmonisten funktioiden yhteyttä satunnaiskävelyyn. Kyseisellä operaattorilla operoitaessa Borel-mitallisia funktioita saadaan uusi Borel-mitallinen funktio Tu_ε.

Merkintä 5.14. Olkoon $M > 0$. Merkitään Borel-mitallisten ja M-rajoitettujen funktioiden joukkoa merkinnällä

$$\mathcal{V}_\varepsilon := \{u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R} : u_\varepsilon \text{ Borel-mitallinen ja } u_\varepsilon < M \text{ joukossa } \Omega_\varepsilon\}.$$

Lemma 5.15. *Kaikille $u_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon$ pätee $Tu_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon$, kun*

$$Tu_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon\Big) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon dy, & \text{kun } x \in \Omega, \\ u_\varepsilon(x), & \text{kun } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Todistus. Koska u_ε on rajoitettu, niin joukossa Γ_ε pätee

$$|Tu_\varepsilon| = |u_\varepsilon| \leq M < \infty.$$

Vastaavasti joukossa Ω pätee

$$
\begin{aligned}
|Tu_\varepsilon| &= \Big|\frac{\alpha}{2}\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \beta\fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon dy\Big| \\
&\le \Big|\frac{\alpha}{2}\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon\Big| + \Big|\frac{\alpha}{2}\inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon\Big| + \Big|\beta\fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon dy\Big| \\
&\le \frac{\alpha}{2}\sup_{B_\varepsilon(x)} M + \frac{\alpha}{2}\inf_{B_\varepsilon(x)} M + \beta\fint_{B_\varepsilon(x)} M dy \\
&= \alpha M + \beta M = M < \infty,
\end{aligned}
$$

missä ensimmäinen epäyhtälö seuraa normin kolmioepäyhtälöstä. Näin ollen funktio Tu_ε on rajoitettu ja jäljelle jää Borel-mitallisuuden todistaminen, joka voidaan tehdä osissa. Lebesgue-integraalin jatkuvuuden nojalla kuvaus

$$
x \mapsto \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon(y)dy
$$

on jatkuva ja näin ollen Borel-mitallinen. Infimumin ja supremumin Borel-mitallisuutta varten kiinnitetään $\lambda \in \mathbb{R}$ ja osoitetaan, että pätee

$$
A := \{x \in \Omega : \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon > \lambda\} = \Omega \cap \Bigg(\bigcup_{\substack{y\in\Omega_\varepsilon,\\ u_\varepsilon(y)>\lambda}} B_\varepsilon(y)\Bigg) =: B.
$$

Olkoon $x \in A$. Tällöin on olemassa $y \in B_\varepsilon(x) \subset \Omega_\varepsilon$, jolle $\lambda < u_\varepsilon(y) \le \sup_{B_\varepsilon(x)} u$, joten

$$
x \in \Omega \cap B_\varepsilon(y) \subset B.
$$

Jos olisi olemassa $z \in B$, jolle $z \notin A$, niin $\sup_{B_\varepsilon(y)} \le \lambda$, jolloin z ei kuulu mihinkään palloon yhdisteessä

$$
\bigcup_{\substack{y\in\Omega_\varepsilon,\\ u_\varepsilon(y)>\lambda}} B_\varepsilon(y),
$$

mistä seuraisi ristiriita. Näin ollen yhtäsuuruus pitää. Lisäksi nähdään, että A on avoimena joukkona Borel-joukko, jolloin $\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon$ on Borel-mitallinen.

Tiedetään, että $-u_\varepsilon$ on Borel. Lisäksi pätee

$$
\sup_{B_\varepsilon(x)} (-u_\varepsilon) = -\inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon,
$$

joten ylläolevan perusteella myös $\inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon$ on Borel. □

Seuraavaksi todistetaan, että jokaiselle maksufunktiolle F on olemassa (p,ε)-harmoninen funktio. Koska maksufunktio määriteltiin rajoitettuna ja jatkuvana funktiona, on se näin ollen myös Borel-funktio, joten ylläolevaa lemmaa voidaan soveltaa. Todistuksessa käytetään samanlaista induktiota kuin harmonisen funktion tapauksessa lauseen 4.9 todistuksessa.

Lause 5.16. *Olkoon $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ maksufunktio, $j \in \mathbb{N}$ ja T edellä määritelty operaattori. Olkoon lisäksi $u_\varepsilon^j : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ siten, että*

$$u_\varepsilon^0(x) = \begin{cases} \inf_{\Gamma_\varepsilon} F, & x \in \Omega \\ F(x), & x \in \Gamma_\varepsilon \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad u_\varepsilon^{j+1} = Tu_\varepsilon^j.$$

Tällöin on olemassa rajoitettu Borel-funktio $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ siten, että

$$u_\varepsilon^j \overset{tasaisesti}{\longrightarrow} u_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = Tu_\varepsilon \quad \text{ja} \quad u_\varepsilon = F \text{ joukossa } \Gamma_\varepsilon.$$

Todistus. Huomataan ensin, että mikäli funktiojono toteuttaa tasaisen suppenemisen, niin konstruktion nojalla $u_\varepsilon = F$ joukossa Γ_ε. Nyt halutaan todistaa induktiolla, että $u_\varepsilon^{j+1} \geq u_\varepsilon^j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Operaattorin T määritelmästä on selvää, että tämä pätee triviaalisti joukossa Γ_ε, joten voidaan keskittyä joukkoon Ω.

Perusaskel:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^1(x) &= \frac{\alpha}{2}\big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon^0 + \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon^0\big) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon^0 \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\big(\inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F + \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F\big) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F \\ &= \alpha \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F + \beta \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F \\ &= \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F = u_\varepsilon^0(x), \end{aligned}$$

joten $u_\varepsilon^1(x) \geq u_\varepsilon^0(x)$ kaikilla $x \in \Omega$.

Induktioaskel: Oletetaan, että $u_\varepsilon^{j+1} \geq u_\varepsilon^j$ jollain j. Tällöin

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^{j+2} = Tu_\varepsilon^{j+1} &= \frac{\alpha}{2}\big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon^{j+1} + \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon^{j+1}\big) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon^{j+1} \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon^{j} + \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon^{j}\big) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon^{j} \\ &= u_\varepsilon^{j+1}, \end{aligned}$$

joten $u_\varepsilon^{j+1} \geq u_\varepsilon^j$ kaikilla $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Iteroimalla operaattorilla T saadaan siis kasvava funktiojono, jota rajoittaa ylhäältäpäin $\sup_{y\in\Gamma_\varepsilon} F < \infty$. Määritellään nyt funktio u_ε pisteittäisenä raja-arvona

$$u_\varepsilon(x) := \lim_{j\to\infty} u_\varepsilon^j(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Tehdään seuraavaksi antiteesi ja oletetaan, että suppeneminen ei ole tasaista. Tällöin

$$M := \limsup_{j\to\infty} \sup_{x\in\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon - u_\varepsilon^j)(x) > 0. \tag{5.12}$$

Kiinnitetään $\delta \in \left(0, \frac{M(1-\alpha)}{3+\alpha}\right)$ ja valitaan $k \geq 1$ siten, että

$$u_\varepsilon - u_\varepsilon^k \leq M + \delta \text{ joukossa } \Omega_\varepsilon. \tag{5.13}$$

Dominoidun konvergenssin nojalla pätee, että

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - u_\varepsilon^k) \to 0 \text{ kaikilla } x \in \Omega,$$

joten k voidaan valita siten, että lisäksi pätee

$$\sup_{x\in\Omega} \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - u_\varepsilon^k)(y)dy \leq \delta. \tag{5.14}$$

Nyt epäyhtälön (5.12) nojalla voidaan valita $x_0 \in \Omega$ siten, että $u_\varepsilon(x_0) - u_\varepsilon^{k+1}(x_0) \geq M - \delta$. Valitaan vielä $l > k$ tarpeeksi suuri, että $u_\varepsilon(x_0) - u_\varepsilon^{l+1}(x_0) < \delta$. Näillä valinnoilla pätee

$$u_\varepsilon^{l+1}(x_0) - u_\varepsilon^{k+1}(x_0) \geq M - 2\delta. \tag{5.15}$$

Lisäksi mielivaltaiselle joukolle A pätee

$$\sup_A u_\varepsilon^l - \sup_A u_\varepsilon^k \leq \sup_A (u_\varepsilon^l - u_\varepsilon^k). \tag{5.16}$$

Nyt funktiojonon u_ε^j määritelmän sekä monotonisuuden nojalla yhdessä epäyhtälöiden (5.12)-(5.16) kanssa saadaan

$$\begin{aligned}
M - 2\delta &\leq u_\varepsilon^{l+1}(x_0) - u_\varepsilon^{k+1}(x_0) \\
&= \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x_0)} u_\varepsilon^l + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x_0)} u_\varepsilon^l + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} u_\varepsilon^l \\
&\quad - \left(\frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x_0)} u_\varepsilon^k + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x_0)} u_\varepsilon^k + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} u_\varepsilon^k \right) \\
&\leq \alpha \sup_{B_\varepsilon(x_0)} (u_\varepsilon^l - u_\varepsilon^k) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} (u_\varepsilon^l - u_\varepsilon^k) \\
&\leq \alpha \sup_{B_\varepsilon(x_0)} (u_\varepsilon - u_\varepsilon^k) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} (u_\varepsilon - u_\varepsilon^k) \\
&\leq \alpha(M + \delta) + \delta.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\frac{M(1-\alpha)}{3+\alpha} \leq \delta,$$

mikä on ristiriita valinnan $\delta \in \left(0, \frac{M(1-\alpha)}{3+\alpha}\right)$ kanssa. Näin ollen antiteesi on väärä, joten suppeneminen on tasaista ja väite on todistettu. □

Seuraus 5.17. *Mille tahansa maksufunktiolle F on olemassa rajoitettu Borel-funktio $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa DOP:n funktion F määräämillä reuna-arvoilla.*

Näin ollen (p, ε)-harmoninen funktio on todella olemassa. Todistetaan seuraavaksi, että kun annettuna on reuna-arvot, niin kyseinen funktio on yksikäsitteinen.

Lause 5.18. *Olkoon $u_\varepsilon, v_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ (p, ε)-harmonisia funktioita, joiden reuna-arvot määräävät maksufunktiot F_u ja F_v. Tällöin*

$$\sup_{\Omega} |u_\varepsilon - v_\varepsilon| \leq \sup_{\Gamma_\varepsilon} |F_u - F_v|.$$

Todistus. Symmetrian nojalla riittää todistaa

$$m := \sup_{\Omega} (u_\varepsilon - v_\varepsilon) \leq \sup_{\Gamma_\varepsilon} (F_u - F_v) =: M.$$

Todistetaan tämä antiteesin avulla: Oletetaan, että $m > M$. Nyt, koska u_ε ja v_ε ovat (p, ε)-harmonisia funktioita, ne totetuttavat DOP:n kaikilla $x \in \Omega$, joten pätee

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x) &= \frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon - \sup_{B_\varepsilon(x)} v_\varepsilon\Big) + \frac{\alpha}{2}\Big(\inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon - \inf_{B_\varepsilon(x)} v_\varepsilon\Big) \\ &\quad + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy \\ &\leq \alpha \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)dy \\ &\leq \alpha m + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Merkitään

$$C := \{x \in \Omega_\varepsilon : u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x) = m\},$$

jolloin antiteesin nojalla $C \subset \Omega$. Näytetään, että $C \neq \emptyset$. Joukon Ω rajoittuneisuudesta seuraa, että on olemassa jono $(x_k)_k \subset \Omega$ ja rajapiste $x_r \in \overline{\Omega}$ siten, että

$$(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x_k) \to m \text{ ja } x_k \to x_r \text{ kun } k \to \infty. \tag{5.18}$$

Lebesguen integraali on absoluuttisesti jatkuva, joten

$$\fint_{B_\varepsilon(x_r)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy = \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy.$$

Nyt epäyhtälöstä (5.17) saadaan, että

$$\lim_{k\to\infty} (u_\varepsilon(x_k) - v_\varepsilon(x_k)) \leq \lim_{k\to\infty} \Big(\alpha m + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy\Big),$$

joka yhdessä (5.18) kanssa implikoi, että

$$m \leq \alpha m + \beta \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy.$$

Vähentämällä vakion αm ja jakamalla vakiolla β puolittain päädytään lopulta

$$m \underbrace{(1-\alpha)}_{=\beta} \frac{1}{\beta} \leq \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy,$$

joka saadaan sievennettyä epäyhtälöksi

$$m \leq \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy.$$

Lisäksi $u_\varepsilon - v_\varepsilon \leq m$ joukossa Ω_ε, joten

$$\lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy \leq \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} m dy = m,$$

eli

$$\fint_{B_\varepsilon(x_r)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)dy = m.$$

Näin ollen se, että $u_\varepsilon - v_\varepsilon \leq m$ pätee pallossa $B_\varepsilon(x_r) \subset \Omega_\varepsilon$, implikoi, että $u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x) = m$ melkein kaikilla $x \in B_\varepsilon(x_r)$. Tästä saadaan, että $|B_\varepsilon(x_r) \setminus C| = 0$, joten $C \neq \emptyset$. Lisäksi, jos $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x) = m$, niin $x \in \Omega$, jolloin yhtälöstä (5.17) yhdessä ylläolevan päättelyn kanssa seuraa, että $u_\varepsilon - v_\varepsilon = m$ melkein kaikkialla pallossa $B_\varepsilon(x)$. Täten pätee

$$x \in C \implies |B_\varepsilon(x) \setminus C| = 0. \tag{5.19}$$

Olkoon nyt $e_1 \in \mathbb{R}^n$ ensimmäinen standardikantavektori. Ylläolevan (5.19) nojalla

$$C \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}\Big(x + \frac{\varepsilon}{2}e_1\Big) \neq \emptyset.$$

Jos nyt tarkastellaan konstruktiota

$$\begin{aligned} x_0 &\in C \\ x_1 &\in C \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}\Big(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}e_1\Big) \\ &\vdots \\ x_{k+1} &\in C \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}\Big(x_k + \frac{\varepsilon}{2}e_1\Big), \end{aligned}$$

niin huomataan, että raja-arvoksi saadaan $\lim_{k\to\infty} e_1 \cdot x_k = \infty$. Tämä on ristiriita, sillä Ω on rajoitettu ja $x_k \in C \subset \Omega$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Näin ollen antiteesi on väärä eli alkuperäinen väite pätee. □

Seuraavaksi todistetaan, että pelattavalla pelillä on olemassa arvo. Kyseinen arvo on itseasiassa yksikäsitteinen (p, ε)-harmoninen funktio, jonka reuna-arvot määrää pelin maksufunktio.

Lause 5.19. *Olkoon u_ε^I ja u_ε^{II} määritelmien mukaiset pelaajien I ja II arvofunktiot, ja u_ε (p, ε)-harmoninen funktio siten, että sen reuna-arvot määrää pelin maksufunktio F. Tällöin*

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^I = u_\varepsilon^{II}.$$

Erityisesti pelin arvo on Borel-funktio ja se on määritelty joukossa Ω.

Todistus. Riittää osoittaa epäyhtälö

$$u_\varepsilon^{II} \leq u_\varepsilon, \tag{5.20}$$

koska tällöin symmetrian nojalla $u_\varepsilon^I \geq u_\varepsilon$. Lisäksi arvofunktioiden määritelmien yhteydessä todettiin, että aina pätee $u_\varepsilon^I \leq u_\varepsilon^{II}$.

Oletetaan, että pelaaja II käyttää strategiaa S_{II}^0, jossa *melkein minimoidaan* funktio u_ε. Tämä tarkoittaa sitä, että pelipisteessä $x_k \in \Omega$ pelaaja II liikkuu pisteeseen $x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k)$, jossa

$$u_\varepsilon(x_{k+1}) \leq \inf_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon + \eta 2^{-(k+1)}$$

jollain kiinnitetyllä $\eta > 0$. Lisäksi kyseinen strategia saadaan lemman A.2 nojalla Borel-mitalliseksi.

Nyt mille tahansa pelaajan I strategialle S_I voidaan pelin määritelmän, strategian S_{II}^0 määritelmän sekä funktion u_ε oletuksen nojalla arvioida

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{S_I, S_{II}^0}^{x_0}[u_\varepsilon(x_k) + \eta 2^{-k} | (x_0, \ldots, x_{k-1})] \\
&\qquad = \frac{\alpha}{2}\Big(u_\varepsilon\Big(S_{II}^0(x_{k-1})\Big) + u_\varepsilon\Big(S_I(x_{k-1})\Big)\Big) \\
&\qquad + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u_\varepsilon dy + \eta 2^{-k} \\
&\qquad \leq \frac{\alpha}{2}\Big(\inf_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u_\varepsilon + \eta 2^{-k} + \sup_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u_\varepsilon\Big) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u_\varepsilon dy + \eta 2^{-k} \\
&\qquad = u_\varepsilon(x_{k-1}) + \eta 2^{-k}(1 + \frac{\alpha}{2}) \\
&\qquad \leq u_\varepsilon(x_{k-1}) + \eta 2^{-(k-1)}.
\end{aligned}$$

Ylläolevassa arvioitiin pelaajan I toimea supremumilla.

Näin ollen riippumatta strategiasta S_I, prosessi $u_\varepsilon(x_k) + \eta 2^{-k}$ on martingaalin määritelmän 2.16 nojalla ylimartingaali suhteessa pelin historiaan.

Lisäksi huomiosta $F(x_\tau) = u_\varepsilon(x_\tau)$ seuraa, että kyseinen ylimartingaali on rajoitettu. Näin ollen vaihtoehtoisen pysäyttämisen lauseen 2.22 nojalla voidaan päätellä, että

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^{II} &= \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}}[F(x_\tau)] \leq \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S^0_{II}}[F(x_\tau) + \eta 2^{-\tau}] \\ &\leq \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S^0_{II}}[u_\varepsilon(x_0) + \eta] = u_\varepsilon(x_0) + \eta. \end{aligned}$$

Koska η oli mielivaltainen, väite on todistettu. □

Ylläolevan tuloksen nojalla voidaan todeta, että arvofunktiot johtavat samaan, kuin dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen ratkaiseminen: voidaan siis tarkastella joko arvofunktioita tai (p, ε)-harmonisia funktioita. Halutaan vielä todistaa, että kun otetaan raja-arvo $\varepsilon \to 0$, niin arvofunktioiden muodostama jono suppenee tasaisesti johonkin funktioon u joukossa $\overline{\Omega}$. Tämän jälkeen voidaan käyttää lausetta 5.13 ja todeta, että kyseinen rajafunktio u on itseasiassa viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälöön maksufunktion F antamilla reuna-arvoilla. Tämän todistamista varten käydään ensimmäisenä läpi muunnelma Arzelá-Ascolin kompaktisuuslauseesta, jonka todistamisessa seurataan artikkelia [19]:

Lause 5.20 (Arzelá-Ascoli)**.** *Olkoon $\{v_\varepsilon : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \varepsilon > 0\}$ joukko funktioita, joille*

(i) on olemassa $C > 0$ siten, että $|v_\varepsilon| < C$ kaikilla $\varepsilon > 0$ ja $x \in \overline{\Omega}$,

(ii) mille tahansa $\eta > 0$ löytyy vakiot δ ja ε_0 siten, että jokaiselle $\varepsilon < \varepsilon_0$ ja mille tahansa $x, y \in \overline{\Omega}$ pätee

$$|v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)| < \eta, \ \ kun \ |x - y| < \delta.$$

Tällöin on olemassa tasaisesti jatkuva funktio $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ja osajono $\{v_\varepsilon\}$ siten, että

$$v_\varepsilon \to v \ \ tasaisesti\ joukossa\ \overline{\Omega}, \ \ kun\ \varepsilon \to 0.$$

Todistus. Etsitään ensimmäisenä raja-arvoehdokas v ja todistetaan sitten, että jono $\{v_\varepsilon\}$ suppenee tasaisesti. Olkoon $D \subset \overline{\Omega}$ numeroituva ja tiheä. Funktioiden tasaisesta rajoittuneisuudesta saadaan diagonalisaation avulla osajono $\{v_\varepsilon\}$, joka suppenee kaikilla $x \in D$. Merkitään osajonon indeksejä edelleen epsilonilla ja määritellään v olemaan kyseisen osajonon pisteittäinen raja-arvo. On syytä huomata, että tällä hetkellä v on määritelty vain pisteissä $x \in D$.

Toisen oletuksen nojalla funktio v voidaan laajentaa jatkuvasti joukkoon $\overline{\Omega}$ asettamalla

$$v(z) := \lim_{D \ni x \to z} v(x).$$

Seuraavaksi osoitetaan $\{v_\varepsilon\}$ tasainen suppeneminen saatuun funktioon v. Valitaan äärellinen peite

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_r(x_i)$$

ja $\varepsilon_0 > 0$ siten, että

$$|v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x_i)|, |v(x) - v(x_i)| < \frac{\eta}{3}$$

jokaiselle kiinnitetylle x_i ja $\varepsilon < \varepsilon_0$, ja

$$|v_\varepsilon(x_i) - v(x_i)| < \frac{\eta}{3}$$

kaikilla x_i ja $\varepsilon < \varepsilon_0$. Näin ollen jokaiselle $x \in \overline{\Omega}$ voidaan löytää piste x_i siten, että $x \in B_r(x_i)$ ja

$$|v_\varepsilon(x) - v(x)| \leq |v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x_i)| + |v_\varepsilon(x_i) - v(x_i)| + |v(x_i) - v(x)| < \eta$$

kaikilla $\varepsilon < \varepsilon_0$, missä ε_0 ei riipu tarkastelupisteestä x. □

Seuraavaksi johdetaan estimaatti (p, ε)-harmonisten funktioiden perheen asymptoottiselle jatkuvuudelle. Tätä tarvitaan todistamaan kyseisen perheen toteuttavan ylläolevan Arzelá-Ascolin, joka puolestaan antaa riittävät ehdot (p, ε)-harmonisten funktioiden tasaiselle suppenemiselle. Jos otetaan raja-arvo $\varepsilon \to 0$, niin muodostuva (p, ε)-harmonisten funktioiden perhe $\{u_\varepsilon\}$ on ylinumeroituva. Tästä voidaan kuitenkin valita tarkasteltavaksi osajono $\{u_{\varepsilon_m}\}$ siten, että $\varepsilon_m \to 0$. Merkitään osajonoa yksinkertaisuuden vuoksi myös $\{u_\varepsilon\}$. Jos saadaan näytettyä tasainen suppeneminen osajonolle, niin yksikäsitteisyyden nojalla koko perhe suppenee samaan funktioon.

Tässä vaiheessa tehdään kuitenkin vielä kaksi huomiota ja niihin liittyvää oletusta pelialueesta Ω sekä maksufunktiosta F. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että Ω toteuttaa ulkoisen palloehdon. Toisin sanoen oletetaan, että jokaiselle $y \in \partial\Omega$ löytyy $B_\delta(z) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ siten, että $y \in \partial B_\delta(z)$. Lisäksi oletetaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi ja eksplisiittisen estimaatin saamiseksi, että maksufunktio F on Lipschitz-jatkuva määrittelyjoukossaan Γ_ε.

Lemma 5.21. *Olkoon Ω ja F kuten yllä. Tällöin maksufunktioon liittyvälle (p, ε)-harmoniselle funktiolle u_ε pätee*

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq 2\,\mathrm{Lip}(F)\delta + C(R/\delta)(|x - y| + O(1))$$

jokaiselle tarpeeksi pienelle $\delta > 0$ ja jokaiselle pisteparille $x, y \in \Omega_\varepsilon$.

Käydään läpi todistuksen idea. Tarkan todistuksen voi lukea artikkelista [19] Lemma 4.6. Lemman todistamisessa käytetään eräänlaista strategiapeliä (p, ε)-harmonisen funktion analysointiin. Lisäksi sovelletaan ulkoista palloehtoa yhdessä martingaaliteorian kanssa odotettujen arvojen arvioimiseen pelistrategioiden avulla. Ensimmäisenä käydään läpi reunapisteet: jos $x, y \in \Gamma_\varepsilon$, niin väite seuraa suoraan funktion F Lipschitz-jatkuvuudesta, koska tällöin $u_\varepsilon = F$. Näin ollen jäljelle jää kaksi tapausta, (1) $x \in \Omega, y \in \Gamma_\varepsilon$ ja (2) $x, y \in \Omega$.

Ensimmäisessä tilanteessa apuna käytetään ulkoista palloehtoa: on olemassa pallo $B_\delta(z)$ alueen Ω ulkopuolella siten, että $y \in \partial B_\delta(z)$. Pelaajalle I määritellään strategia S_I^z, joka pyrkii pallon keskipistettä z kohti. Tämän avulla saadaan odotusarvolle yläraja $\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^z, S_{II}}[|x_k - z| \; |x_0, \ldots, x_{k-1}] \leq |x_{k-1} - z| + C\varepsilon^2$, kun arvioidaan lisäksi

$$\fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} |x - z| dx \leq |x_{k-1} - z| + \varepsilon^2.$$

Nyt $|x_{k-1} - z| + C\varepsilon^2$ on ylimartingaali tarpeeksi suurella vakiolla C, joka ei riipu ε:sta. Käyttämällä sopivan ODY:n ratkaisua tähän, päästään tilanteeseen, jossa vaihtoehtoisen pysäyttämisen lauseen 2.22 oletukset täyttyvät. Tämän avulla puolestaan saadaan arvio odotetusta ajasta, jonka pelaaja I tarvitsee saavuttaakseen reunan.

Toisessa tapauksessa pisteestä x alkavalle pelille kiinnitetään strategiat S_I ja S_{II}. Näiden avulla määritellään pisteestä y alkava peli, jossa käytetään samoja kolikonheittoja ja satunnaisaskeleita kuin pisteestä x alkavassa pelissä. Näiden avulla näytetään, että $|x_k - y_k|$ pysyy rajoitettuna: kun saavutaan ensimmäiseen pisteeseen $x_k \in \Gamma_\varepsilon$ tai $y_k \in \Gamma_\varepsilon$, niin pätee $|x_k - y_k| = |x - y|$.

Lopullinen asymptoottisen Lipschitz-jatkuvuuden takaava epäyhtälö saadaan, kun arvioidaan $|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|$ käyttämällä yllämainittujen strategisten pelien sekä martingaalien avulla saatuja odotusarvoja sekä niiden rajoituksia.

Lemma 5.22. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja sileä, ja $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ maksufunktio. Olkoon lisäksi u_ε satunnaiskohinallisen köydenvetopelin arvofunktio maksufunktiolla F. Tällöin joukolle $\{u_\varepsilon\}$ on olemassa $C > 0$ siten, että $|u_\varepsilon| < C$ kaikilla $\varepsilon > 0$ ja $x \in \overline{\Omega}$.*

Todistus. Koska F on rajoitettu, niin on olemassa $C > 0$ siten, että

$$|F| < C.$$

Lisäksi u_ε on tasaisesti rajoitettu. Näin ollen integraalin monotonisuudesta seuraa, että

$$u_\varepsilon(x) = \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^x_{S_I, S_{II}}[F(x_\tau)] \leq \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^x_{S_I, S_{II}}[C] = C$$

kaikilla $x \in \Omega$ ja $\varepsilon > 0$. $\square$

Seuraus 5.23. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja sileä joukko, joka toteuttaa ulkoisen palloehdon, ja $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ Lipschitz-jatkuva maksufunktio. Olkoon lisäksi u_ε satunnaiskohinallisen köydenvetopelin arvofunktio maksufunktiolla F. Tällöin*

$$u_\varepsilon \to u \text{ tasaisesti joukossa } \overline{\Omega}, \text{ kun } \varepsilon \to 0,$$

missä u on viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle

$$\begin{cases} \Delta_p u = 0 & \text{kun } x \in \Omega \\ u = F & \text{kun } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Todistus. Lemmojen 5.21 ja 5.22 nojalla arvofunktiot u_ε toteuttavat Arzelá-Ascolin lauseen 5.20 ehdot, kun $\varepsilon \to 0$. Näin ollen on olemassa funktio u, johon u_ε suppenee tasaisesti, kun $\varepsilon \to 0$. Lisäksi lauseen 5.13 nojalla kyseinen funktio on viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle maksufunktion F määräämillä reuna-arvoilla. $\square$

A Liite

Lause A.1 (Divergenssilause)**.** *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $\partial\Omega \in C^1$. Oletetaan, että $u \in C^1$ avoimessa joukon $\overline{\Omega}$ ympäristössä. Tällöin jokaiselle $i = 1, \ldots, n$*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx_i = \int_{\partial\Omega} u\nu_i dS,$$

missä $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ on ulkopuolelle suunnattu yksikkönormaalivektori. Valitsemalla $u = F_i$ ja summaamalla indeksi yli saadaan

$$\int_\Omega \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F\nu dS.$$

Divergenssilauseen todistus sivuutetaan. Se löytyy esimerkiksi Altin kirjasta [1] s. 270-272.

Lemma A.2. *Olkoon $u : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borel-funktio ja $\delta > 0$. Tällöin on olemassa rajoitetut Borel-funktiot $S_{\inf}, S_{\sup} : \Omega \to \Omega_\varepsilon$ siten, että $S_{\inf}(x) \in B_\varepsilon(x), S_{\sup} \in B_\varepsilon(x)$ ja*

$$u(S_{\inf}(x)) \leq \inf_{B_\varepsilon(x)} u + \delta, \quad u(S_{\sup}(x)) \geq \inf_{B_\varepsilon(x)} u + \delta$$

Todistus. Osoitetaan väite funktiolle $S_{\inf}$. Olkoon $\mathbf{B}$ numeroituva pallojen $B \subset \Omega$ kokoelma, jossa säde ja keskipiste ovat rationaalisia. Nyt jokaiselle $B \in \mathbf{B}$ valitaan piste $x_B \in B$ siten, että

$$u(x_B) \leq \inf_B u + \frac{\delta}{2}.$$

Tällöin kokoelman $\mathbf{B}$ numeroituvuudesta seuraa, että myös kokoelma $M := \{x_b : B \in \mathbf{B}\}$ on numeroituva.

Nyt mielivaltainen avoin pallo $B_r(x) \subset \Omega$ voidaan kirjoittaa yhdisteenä kokoelman $\mathbf{B}$ palloja, joten jokaiselle $x \in \Omega$ pätee

$$\inf_{B_\varepsilon(x)} u \geq \inf_{S \cap B_\varepsilon(x)} u - \frac{\delta}{2}.$$

Soveltamalla Lusinin lausetta (kts. esimerkiksi [27] Theorem 5.8.11) Borel-joukkoon

$$\{(x, y) \in \Omega \times \Omega_\varepsilon : |x - y| < \varepsilon \text{ ja } \inf_{B_\varepsilon(x)} u > u(y) + \delta\} \cap \mathbb{R}^n \times S),$$

saadaan funktio $S_{\inf}$. Vastaavalla argumentilla saadaan myös funktio $S_{\sup}$. $\square$

Viitteet

[1] H. W. Alt: *Linear functional analysis*, An Application-oriented Introduction, 2016.

[2] M. Bardi ja I. Capuzzo-Dolcetta: *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhauser, 1997.

[3] R. F. Bass: *Stochastic processes*, Volume 33 of Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2011.

[4] R. Bellman: *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957. Sixth printing, 1972.

[5] A. Bressan: *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations and optimal control problems (an illustrated tutorial)*, Bayesian Brain, Doya, K. (ed), MIT Press, 2006.

[6] M. G. Crandall ja P.-L. Lions: *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Transactions of the American Mathematical Society, 277(1):1-42, 1983.

[7] E. Di Benedetto: *$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlineal Anal. 7 8, 827-850, 1983.

[8] L. C. Evans: *An introduction to mathematical optimal control theory*, https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf, 2024. Haettu: 15.1.2024.

[9] L. C. Evans: *An introduction to stochastic differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[10] L. C. Evans: *Partial differential equations*, Volume 19 of *Graduate studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2nd edition, 2010.

[11] H. Geiss ja S. Geiss: *Probability theory*, https://koppa.jyu.fi/en/courses/jy-CUR-27333/course-literature/probability.pdf, 2024. Haettu 15.3.2024.

[12] M. G. Grandal, H. Ishii ja P-L. Lions: *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Journal of Differential Equations, 83(1):26-78, 1990.

[13] P. Juutinen, P. Lindqvist ja J. J. Manfredi: *On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for quasi-linear equation.* SIAM Journal on Mathematical Analysis, 33(3):699-717, 2001.

[14] T. Kilpeläinen: *Vektorianalyysi*, https://tim.jyu.fi/files/544718/Vektorianalyysi_Kilpelainen.pdf, haettu 9.6.2024.

[15] J. Lehrbäck: *Mitta- ja integraaliteoria (osat 1 ja 2)*, http://users.jyu.fi/~juhaleh/mitta_moniste_2019.pdf, 2018. Haettu 9.5.2024.

[16] M. Lewicka: *A course on Tug-Of-War games with random noise*, Springer Cham, 2020.

[17] H. Luiro, M. Parviainen ja J. Rossi: *On the existence and uniqueness of p-harmonious functions*, Differential and Integral Equations, 27(3/4):201-216, 2014.

[18] J.J. Manfredi, M. Parviainen ja J. Rossi: *An asymptotic mean value characterization for p-harmonic functions*, Proceedings of the American Mathematical Society 138(3):881-889, 2010.

[19] J.J. Manfredi, M. Parviainen ja J.D. Rossi: *On the definition and properties of p-harmonious functions*, Annali della Scuola Normale Suoperiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V, 11(2):215-241, 2012.

[20] R. K. Nagle ja A. B. Saff: *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*, Addison-Wesley Publishing Company

[21] M. Parviainen: *Notes on tug-of-war games and the p-Laplace equation.* SpringerBriefs on PDEs and Data Science, 2023.

[22] M. Parviainen: *Partial Differential Equations*, https://koppa.jyu.fi/kurssit/jy-CUR-7555/materiaalikansio/lecturenote/view. Haettu 6.4.2024.

[23] M. Parviainen: *Partial Differential Equations 2*, https://koppa.jyu.fi/en/courses/231683/lecture-note. Haettu 6.4.2024.

[24] M. Parviainen: *Selected topics in control theory*, http://users.jyu.fi/~miparvia/Opetus/ControlTheory/lecturenoteContr2016.pdf, 2016. Haettu: 10.4.2024.

[25] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield ja D. B. Wilson: *Tug-Of-War and the infinity Laplacian*, J. Amer. Math. Soc., 22(1):167-210, 2009.

[26] Y. Peres ja S. Sheffield: *Tug-of-war with noise: A game theoretic view of the p-Laplacian*, Duke Mathematical Journal, 145(1):91-120, 2008.

[27] S.M. Srivastava: *A course on Borel sets*, Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1st edition, 1998.

[28] E. Todorov: *Optimal control theory*, Bayesian Brain, Doya, K. (ed), MIT press, 2006.

[29] D. Williams: *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1st edition, 1991.