



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTO-
TIETEEN LAITOS

PRO GRADU-TUTKIELMA

Kolmiulotteiset isometriat

Erika Kannisto

26. kesäkuuta 2024



TekijäErika Kannisto

OtsikkoKolmiulotteiset isometriat (engl. Three-dimensional isometries)

Tutkinto-ohjelmaMatematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä

26. kesäkuuta 2024

Sivumäärä38

Tiivistelmä

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella kolmiulotteisen avaruuden isometrioita eli kuvauksia, jotka säilyttävät pisteparien etäisyydet, sekä tetraedrin symmetriaryhmää. Symmetriaryhmä tarkoittaa kuvauksia, jotka kuvaavat tetraedrin takaisin itsekseen.

Kolmiulotteisen avaruuden isometriat ovat samat kuin tason isometriat: siirto, kierto, peilaus ja siirtopeilaus. Nämä isometriat muodostavat sekä tason että kolmiulotteisessa avaruudessa ryhmän. Koska tavoitteena on tarkastella tetraedrin symmetriaryhmää, halutaan valita ne isometriat, jotka kuvaavat tetraedrin itsekseen. Tätä varten ainakin origon pitää pysyä paikoillaan, joten siirrot ja siirtopeilaukset ovat poissa laskuista. Kuitenkaan kaikki peilaukset tai kierrotkaan eivät pidä origoa paikoillaan; vain ne joiden akselit kulkevat origon läpi. Kutsutaan näitä isometrioita pallogeometrian isometrioiksi.

Pallogeometriassa liikutaan yksikköpallon eli pallon, jonka säde on yksi pinnalla. Peilaukset pallogeometriassa voidaan ajatella siten, että peilausakselina on isoympyrä. Isoympyrä on tason, jonka kulkee origon läpi sekä pallokuoren leikkaus. Peilauksiin liittyy kiinteästi myös kolmen peilauksen lause, jonka mukaan jokainen pallogeometrian isometria voidaan esittää yhden, kahden tai kolmen peilauksen yhdisteenä. Kierrot ovat kahden peilauksen yhdisteitä. Yleisimpien kiertojen lausekkeet voidaan päätellä tason kiertojen esitysten avulla, mutta se ei ole tehokas tai tarkka tapa.

Tällöin otetaan käyttöön kvaterniot eli kompleksikertoimiset kaksi kertaa kaksi -matriisit, joiden avulla kierrot saadaan esitettyä. Kvaternioiden myötä päästään tutustumaan kompleksilaskentaan, kun kvaterniot määritellään sekä neliulotteiseen että kolmiulotteiseen avaruuteen ja osoitetaan, että kvaterniot muodostavat jakorenkaan. Nämä tiedot yhdistämällä löydetään kuvaus, joka kuvaa pallogeometrian ja yleisemmin kolmiulotteisen avaruuden

kierrat.

Tutkielman loppuksi tarkastellaan tetraedrin symmetriaryhmän kiertoja ja miten ne esitetään kvaternioiden avulla. Kiertoja on kolmenlaisia ja yhteensä 12. Ensimmäkin on niin sanottu nollakierto eli tetraedri, jota ei ole kierretty. Tätä kutsutaan neutraalialkioksi. Toinen kiertotyyppi on niin sanotut puolikierrat, joissa kierretään 180 asteen verran ja näitä kiertoja on kolme. Viimeinen kiertotyyppi on niin sanotut kolmasosakierrat, joissa kierretään 120 asteen verran ja näitä on yhteensä kahdeksan.

Sisällys

Johdanto	4
1 Esitietoja	6
1.1 Tason isometriat	6
1.2 Kompleksiluvuista	7
2 Avaruuden \mathbb{R}^3 isometriat	9
2.1 Isometrioiden ryhmä	9
3 Pallogeometrian isometriat	12
3.1 Pallogeometrian peilaukset	13
3.2 Pallogeometrian kiertoryhmä	15
4 Kvaterniot	17
4.1 Kvaternioiden rengas	17
4.2 Kvaternioiden ominaisuuksia	20
5 Avaruuden kierrot kvaternioiden avulla	23
5.1 Avaruuden \mathbb{R}^3 kvaternioiden ominaisuuksia	23
5.2 Kiertokvaternio avaruudessa \mathbb{R}^3	27
6 Tetraedrin kierrot	30
6.1 Tetraedrin 1/2-kierto	31
6.2 Tetraedrin 1/3-kierto	33
6.3 Kierrot kvaternioiden avulla	35

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on kertoa avaruuden \mathbb{R}^3 isometrioista ja niiden muodostamista ryhmistä. Isometriat avaruudessa määritellään samoin kuin tasossa; isometria on kuvaus, joka säilyttää pisteparien etäisyydet [3, s.144]. Isometriat itsessään ovat mielenkiintoisia, mutta ryhmien ottaminen mukaan saa aikaan sen, että voidaan tarkastella isometrioiden aliryhmiä ja näistä yksi on tetraedrin symmetriaryhmä, johon kuuluvat kaikki tetraedrin kierrot. Avaruuden isometriat siis yhdistävät sekä geometriaa, ryhmäteoriaa että kompleksilukujen teoriaa.

Tasossa isometriat ovat siirto, kierto, peilaus ja siirtopeilaus. Näistä viimeisin eli siirtopeilaus on peilauksen ja siirron yhdiste. Lisäksi tiedetään, että ei ole muunlaisia isometrioita kuin edellä mainitut neljä. Tämä johtuu kolmen peilauksen lauseesta, jonka mukaan jokainen tason isometria on yhden, kahden tai kolmen peilauksen yhdiste [3, s.57].

Avaruudessa \mathbb{R}^3 on täsmälleen samat isometriat kuin tasossa ja sama kolmen peilauksen lause. Isometriat niin tasossa kuin avaruudessa muodostavat ryhmän, ja ryhmän ominaisuuksien nojalla voidaan valita osa isometrioista, jolloin saadaan aliryhmä. Tetraedriin liittyvä symmetriaryhmä koostuu kierroista, jonka vuoksi tässä työssä keskitytään kiertojen tarkasteluun.

Siirrot voidaan esittää samaan tapaan kuin tasossa, mutta kiertojen mallintaminen on paikoin haasteellista. Siksi kiertoja tutkitaan pallogeometrian avulla. Pallogeometriassa liikutaan yksikköpallon pinnalla ja siihen liittyvät ne isometriat, jotka pitävät origon paikoillaan eli toisin sanoen peilaukset ja kierrot, joiden akselit kulkevat origon läpi. Peilauksissa peilaustasoina toimivat isoympyrät. Isoympyrät ovat tasojen, jotka kulkevat origon läpi ja pallokuoren leikkauksia.

Peilauksiin liittyy kolmen peilauksen lause, jonka mukaan kaikki pallogeometrian isometriat voidaan esittää yhden, kahden tai kolmen peilauksen avulla [3, s.156]. Kahden peilauksen yhdisteet ovat kiertoja. Yksinkertaisimpien kiertojen lausekkeet voidaan päätellä tason kiertojen avulla, mutta tämä ei ole tarkka tapa, niinpä avuksi saadaan vielä kvaterniot.

Kvaterniot on löytänyt Sir William Rowan Hamilton vuonna 1843. Hänen mukaansa kvaternioiden joukkoa merkitään symbolilla \mathbb{H} . Alun perin Hamilton merkitsi kvaternioita identiteettien $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$ avulla, kunnes Arthur Cayley osoitti, että kvaternioita voidaan merkitä (2×2) -kompleksikertoimisten matriisien avulla. [3, s.137]. Kvaternioiden avulla saadaan esitys kierroille ja lopuksi voidaan laskea tetraedrin symmetriaryhmän kierrot.

Tässä työssä päälähteenäni olen käyttänyt John Stillwellin kirjaa Four Pillars of Geometry [3]. Kvaternioita käsittelevässä luvussa olen hyödyntä-

nyt lisäksi Stillwellin kirjaa Number theory [4]. Esitiedoissa olen hyödyntänyt sekä Four Pillars of geometry kirjaa että Zillin ja Shanahanin kirjaa A first course in Complex analysis with Applications [5]. Algebran perusominaisuuksien määritelmiin olen käyttänyt sekä Libinin ja Kaiming'n kirjaa Introduction to Abstract Algebra [1] että Jouni Parkkosen Algebra 1-luentomonistetta [2].

Tutkielman ensimmäisessä luvussa kerrotaan tarkemmin tason isometrioista, kompleksiluvuista ja niiden laskusäännöistä. Lukiessa voit aloittaa näistä tai palata näihin lukiessasi työtä eteenpäin. Toisessa luvussa määritellään avaruuden \mathbb{R}^3 isometriat ja niiden muodostama ryhmä. Kolmannessa luvussa tarkastellaan avaruuden \mathbb{R}^3 yksikköpallon kuorta ja siihen liittyviä isometrioita. Neljännessä luvussa esitellään kvaterniot, jotka helpottavat avaruuden \mathbb{R}^3 kiertojen esittämistä. Viidennessä luvussa kvaterniot määritellään avaruuteen \mathbb{R}^3 ja määritellään kiertokvaternio. Tutkielman viimeisessä luvussa kuusi tarkastellaan tetraedrin kiertoryhmää eli isometrioita, jotka kuvaavat tetraedrin itsekseen.

1 Esitietoja

Tämän työn esitiedoiksi oletetaan kurssit: Algebra 1: Ryhmät sekä Algebra 1: Renkaat ja kunnat. Lisäksi tarvitaan tietoa isometrioista tasossa sekä kompleksilukujen laskennasta. Näistä olen kirjoittanut esitietoja, joten niihin voi tarvittaessa tutustua etukäteen tai palata tarvittaessa.

1.1 Tason isometriat

Tason isometriat ovat kuvauksia, jotka säilyttävät pisteparien etäisyydet. Tasossa on neljänlaisia isometrioita: siirto, kierto, peilaus ja siirtopeilaus. Tason isometrioista voi lukea lisää Stillwellin kirjasta Four Pillars of geometry [3] luvusta 3.6.

Määritelmä 1.1. Olkoon piste $P \in \mathbb{R}^2$ siten että $P = (x, y)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Nyt tason isometriset kuvaukset kuvaavat pisteen P seuraavasti:

i) Siirto $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on muotoa

$$s(P) = (x + a, y + b).$$

ii) Kierto $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kulman θ verran on muotoa

$$k(P) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)y + \cos(\theta)x).$$

iii) Peilaus $p_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ x -akselin suhteen on muotoa

$$p_x(P) = (x, -y).$$

iv) Siirtopeilaus on siirron ja kierron yhdiste.

Kaikki peilaukset voidaan samaistaa peilaukseen x -akselin suhteen ensin tarvittaessa siirtämällä peilausakseli leikkaamaan origoa ja tämän jälkeen kiertämällä siten, että peilausakseli on x -akseli. Tämän jälkeen peilataan. Sitten kierretään takaisin alkuperäiseen ja tehdään tarvittaessa siirto.

Tasossa on lisäksi kolmen peilauksen lause, joka määrittelee, että tasossa ei ole muunlaisia isometrioita kuin edellä mainitut neljä.

Lause 1.2. *Jokainen tason \mathbb{R}^2 isometria on yhden, kahden tai kolmen peilauksen yhdiste.*

Tämä lause on todistettu Stillwellin kirjassa Four pillars of geometry [3, s. 64] ja siihen voi tutustua lisää kirjan avulla. Kuvaukset menevät seuraavasti: peilaus on itsestään selvästi yksi peilaus, siirrot ja kierrot ovat kahden peilauksen yhdisteitä ja siirtopeilaus on kolmen peilauksen yhdiste.

1.2 Kompleksiluvuista

Kompleksiluvut on kehitetty kiinnostuksesta ratkaista polynomiyhtälöitä kuten $x^2 = -1$. Yhtälön ratkaisut $\pm\sqrt{-1}$ eivät ole reaalilukuja vaan kompleksilukuja ja yhtälö $x^2 = -1$ määrittää kompleksilukujen imaginaariyksikön i , jolle $i^2 = -1$. Kompleksilukuja merkitään usein kirjaimella z [5, s.2].

Määritelmä 1.3. Avaruuden \mathbb{R}^2 alkio $z = (a, b) = a + ib$ määritelmän 1.5 laskutoimituksilla varustettuna muodostavat kompleksilukujen kunnan \mathbb{C} .

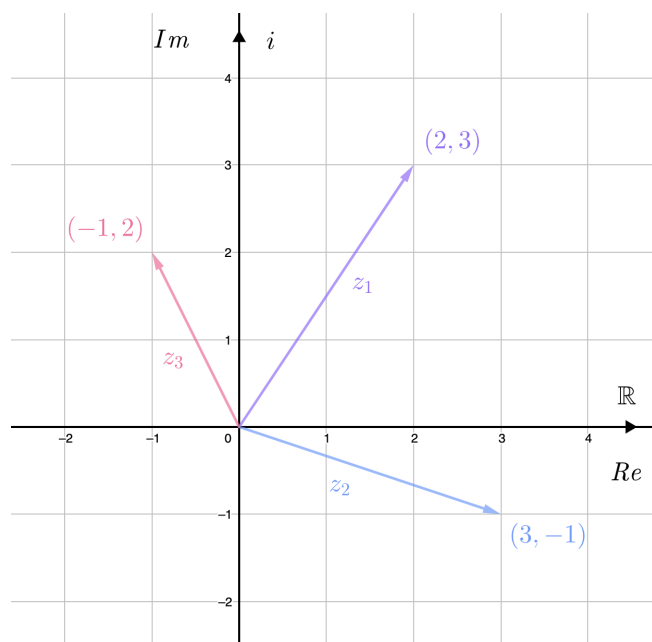
Määritelmässä lukua a kutsutaan reaaliosaksi ja sitä merkitään

$$\operatorname{Re}(z) = a,$$

lukua b kutsutaan puolestaan imaginaariosaksi ja sitä merkitään

$$\operatorname{Im}(z) = b.$$

Kompleksiluvut muodostavat kompleksitason, joka muistuttaa reaalitasoa. Verrattuna reaalilukujen tasoon x -akselia vastaa reaaliakseli eli Re ja y -akselia vastaa imaginaariakseli Im [5, s.10]. Tällöin esimerkiksi kompleksiluvun $z = 2 + 3i$ koordinaatit voidaan kirjoittaa $(2, 3)$ ja tämä vastaa reaalilukujen tason koordinaatteja.



Kuva 1.1: Kompleksiluvut ovat $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - i$ ja $z_3 = -1 + 2i$.

Määritellään seuraavaksi kompleksilukujen laskutoimitukset [5, s.3] sekä kompleksilukujen konjugaatti [5, s. 4].

Määritelmä 1.4. Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Kompleksiluvun $z = a + ib$ konjugaatti on

$$\bar{z} = a - ib \quad (1.1)$$

Esimerkiksi kompleksiluvun $z = 2 + 3i$ konjugaatti on kompleksiluku $\bar{z} = 2 - 3i$. Konjugaattia hyödynnetään kompleksilukujen jakolaskussa sekä käänteisalkion laskemisessa.

Määritelmä 1.5. Olkoon $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, jossa $z_1 = a_1 + ib_1$ ja $z_2 = a_2 + ib_2$.

Yhteenlasku:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Vähennyslasku:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Kertolasku:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2)$$

Jakolasku:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad z_2 \neq 0 \text{ ja } \bar{z}_2 \text{ on muotoa (1.1)}$$

Nyt voidaan määritellä kompleksiluvuille z käänteisluku z^{-1} .

Määritelmä 1.6. Kompleksiluvun $z \neq 0$ käänteisluku on

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (1.2)$$

Kompleksilukuja sovelletaan luvussa 4 Kvaterniot ja siitä eteenpäin.

2 Avaruuden \mathbb{R}^3 isometriat

Tässä luvussa esitellään avaruuden \mathbb{R}^3 isometriat sekä niiden ominaisuuksia. Lisäksi todistetaan, että isometriat muodostavat ryhmän. Isometriat avaruudessa \mathbb{R}^3 määritellään samoin kuin tasossa; isometria on kuvaus, joka säilyttää pisteparien etäisyydet [3, s.58].

Määritelmä 2.1. Kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on isometria, jos

$$\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|$$

kaikilla $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Tasossa isometrioita ovat siirto, kierto, peilaus ja siirtopeilaus. Nämä kuvaukset siirtyvät myös avaruuteen \mathbb{R}^3 . Lisäksi tasossa on käytössä kolmen peilauksen lause 1.2, joka pätee myös avaruudessa \mathbb{R}^3 , mutta tässä työssä sitä tarkastellaan avaruuden erikoistapaukselle, joka on pallopinta \mathbb{S}^2 . Tätä käsitellään tarkemmin seuraavassa luvussa. Kolmen peilauksen lauseesta seuraa, että jokainen avaruuden isometria koostuu parillisesta tai parittomasta määrästä peilauksia eli isometriat voidaan jakaa parillisiin ja parittomiin.

Määritelmä 2.2. Parilliset isometriat ovat kuvauksia jotka koostuvat kahden peilauksen yhdisteestä tai peilauksien yhdisteestä joita on parillinen määrä.

Huomautus 2.3. Jokainen avaruuden \mathbb{R}^3 isometria on joko parillinen tai pariton.

2.1 Isometrioiden ryhmä

Muodostetaan seuraavaksi avaruuden \mathbb{R}^3 isometrioiden joukko ja lisätään siihen yhdistetyn kuvauksen operaatio. Tämä joukko muodostaa ryhmän $Isom(\mathbb{R}^3)$ [3, s.146]. Muotoillaan siitä ensin lause ja osoitetaan se ryhmän määritelmää käyttäen [1, s.9].

Lause 2.4. Avaruuden \mathbb{R}^3 isometrioiden joukko

$$Isom(\mathbb{R}^3) = \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : f \text{ on isometria avaruudessa } \mathbb{R}^3\}$$

varustettuna yhdistetyllä kuvauksella on ryhmä.

Todistus. Olkoon $f, g \in Isom(\mathbb{R}^3)$ ja olkoot pisteet $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$. Osoitetaan ensin, että isometrioiden yhdiste on edelleen isometria eli kuvaus joka säilyttää pisteparin etäisyyden. Olkoon isometrioiden f ja g yhdistetty kuvaus h muotoa

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, h(P) = (f \circ g)(P) = f(g(P)).$$

Osoitetaan nyt, että pisteparin etäisyys säilyy

$$\begin{aligned}\|h(p_1) - h(p_2)\| &= \|f(g(p_1)) - f(g(p_2))\| \\ &= \|g(p_1) - g(p_2)\| \quad \|f \text{ on isometria}\| \\ &= \|p_1 - p_2\| \quad \|g \text{ on isometria}\|.\end{aligned}$$

Täten $\circ : Isom(\mathbb{R}^3) \times Isom(\mathbb{R}^3) \rightarrow Isom(\mathbb{R}^3)$ eli kahden isometrian yhdistetty kuvaus kuvautuu edelleen isometriaksi. Osoitetaan vielä, että yhdistetylle kuvaukselle pätee liitännäisyys eli

$$((s \circ f) \circ g)(P) = (s \circ (f \circ g))(P),$$

sillä yhdistetyn kuvauksen määritelmän nojalla $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ voidaan laskea molemmat kuvaukset

$$\begin{aligned}((s \circ f) \circ g)(P) &= (s \circ f)(g(P)) = s(f(g(P))) \\ (s \circ (f \circ g))(P) &= s((f \circ g)(P)) = s(f(g(P)))\end{aligned}$$

ja päästään samaan lopputulokseen. Tähän voidaan soveltaa vielä etäisyyden kaavaa ja saadaan, että isometrioiden yhdiste on aina isometria ja lisäksi liitännäinen eli asosiatiivinen, jolloin isometriat toteuttavat ensimmäisen ryhmäominaisuuden.

Osoitetaan sitten, että jokaisella isometrialla on käänteiskuvaus f^{-1} , joka on myös isometria. Jokainen avaruuden \mathbb{R}^3 isometria koostuu yhdestä kahdesta tai kolmesta peilauksesta kolmen peilauksen lauseen nojalla. Peilauksen käänteiskuvaus on peilaus itsessään. Eli yhdistämällä kaksi samaa peilausta päästään alkupisteeseen. Tämä sama päättely voidaan toistaa kahden peilauksen yhdisteelle ja kolmelle peilaukselle. Ryhmän neutraalialkio on identiteettikuvaus I_d .

Nyt on osoitettu, että isometrioiden yhdiste on edelleen isometria ja jokaiselle isometrialle f on olemassa käänteiskuvaus. Nämä todistavat, että avaruuden \mathbb{R}^3 isometriat muodostavat todella ryhmän. \square

Huomautus 2.5. Isometrioiden ryhmä $Isom(\mathbb{R}^3)$ ei ole Abelin ryhmä eli vaihdannainen ryhmä: olkoon piste $D = (1, 1, 1)$ ja kuvataan se seuraavien isometrioiden yhdisteellä. Olkoon kahden peilauksen yhdiste

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (-x, y, -z)$$

ja olkoon kierto z -akselin suhteen kulman $\frac{\pi}{2}$ verran muotoa

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (\cos(\frac{\pi}{2})x - \sin(\frac{\pi}{2})y, \sin(\frac{\pi}{2})x + \cos(\frac{\pi}{2})y, z) = (-y, x, z)$$

Lasketaan nyt yhdistetyt kuvaukset pisteessä D

$$(f \circ g)(D) = f(-1, 1, 1) = (-(-1), 1, -1) = (1, 1, -1)$$

$$g \circ f(D) = g(-1, 1 - 1) = (-1, -1, -1)$$

Koska $(1, 1, -1) \neq (-1, -1, -1)$, niin ryhmä ei ole vaihdannainen.

Avaruuden \mathbb{R}^3 isometrioiden ryhmästä voidaan ottaa tarkasteluun aliryhmä, jossa on ne kuvaukset, jotka koostuvat peilauksista, joita on parillinen määrä. Kutsutaan tätä ryhmää nimellä $Isom^+(\mathbb{R}^3)$. Siirrot ja kierrot kuuluvat ryhmään $Isom^+(\mathbb{R}^3)$, sillä ne koostuvat parillisista määristä peilauksia.

3 Pallogeometrian isometriat

Pallogeometria on geometria avaruudessa \mathbb{R}^3 , jossa liikutaan yksikköpallossa. Määritellään seuraavaksi yksikköpallo [3, s.154] ja keskeisimpiä pallogeometrian ominaisuuksia. Alaluvuissa määritellään pallogeometrian isometriat ja niille keskeisimpiä lauseita. Aloitetaan määrittelemällä pallokuori sekä pallokuoren isomypyrät.

Määritelmä 3.1. Avaruuden \mathbb{R}^3 yksikköpallo

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

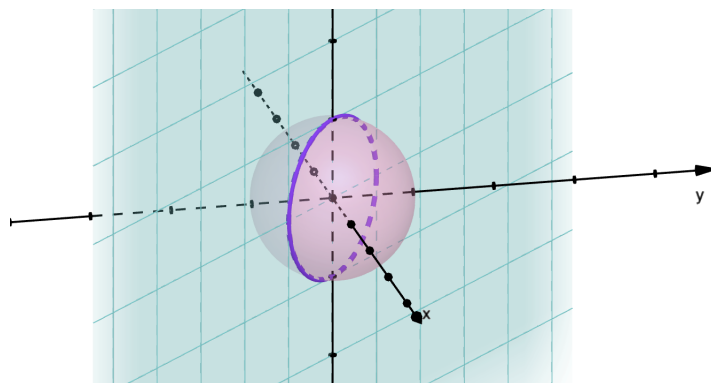
varustetaan euklidisella etäisyydellä. Yksikköpalloa kutsutaan tästä eteenpäin pallokuoreksi.

Määritelmä 3.2. Osajoukko $A \subset \mathbb{S}^2$ on pallokuoren \mathbb{S}^2 isoympyrä, jos

$$A = \mathbb{S}^2 \cap T$$

jollekin $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Jonkin luvuista a, b tai c tulee olla erisuuri kuin nolla.

Tässä taso T on origon kautta kulkeva taso. Täten isoympyrä koostuu origon kautta kulkevan tason ja pallokuoren leikkauspisteistä, jotka muodostavat suurimman mahdollisen ympyrän pallokuorelle. Tästä esimerkki seuraavassa kuvassa.



Kuva 3.1: Pallokuoren ja tason $x + y = 0$ leikkaus eli isoympyrä on merkitty kuvaan violetilla.

Pallogeometrian isometriat pitävät yksikköpallon paikallaan, joten siirrot ja siirtopeilaukset ovat poissa laskuista. Kuitenkaan kaikki kierrot tai peilauksetkaan eivät pidä origoa paikallaan – ainoastaan ne kuvaukset, joiden

peilaus- tai kiertoakselit kulkevat origon läpi. Avaruudessa \mathbb{R}^3 ja joukossa \mathbb{S}^2 puhuttaessa kuvausten akseleista voidaan tarkoittaa suoria tai tasoja ja pallogeometrian tapauksessa erityisesti tasoja ja suoria, jotka kulkevat origon läpi. Nämä pallogeometrian isometriat muodostavat ryhmän.

Lause 3.3. *Pallokuoren \mathbb{S}^2 isometrioiden joukko*

$$\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = \{f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 : f \text{ on isometria, joka kuvaa origon itsekseen}\}$$

yhdistetyllä kuvauksella varustettuna on ryhmä.

Ryhmään $\text{Isom}(\mathbb{S}^2)$ kuuluvat sekä kierrot, joiden peilausakseli kulkee origon läpi että peilaukset, joiden peilausakseli tai -taso kulkee origon läpi. Näiden osoittaminen ryhmäksi todistetaan samaan tapaan kuin lause 2.4, jossa avaruuden \mathbb{R}^3 isometrioiden joukko osoitettiin ryhmäksi. Tarkastellaan seuraavaksi kiertoja ja peilauksia omissa alaluvuissaan.

3.1 Pallogeometrian peilaukset

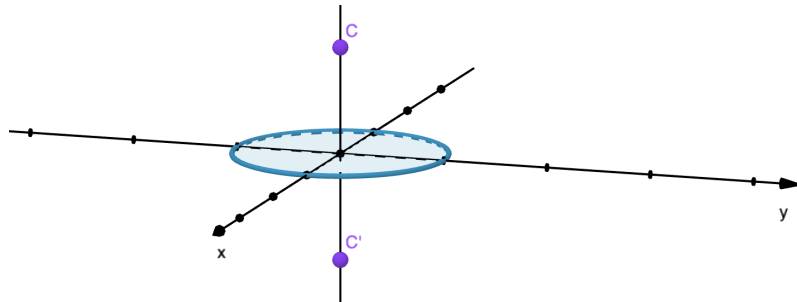
Tarkastellaan peilauksia esimerkkien avulla.

Yhden tason peilaus, jossa taso kulkee origon läpi on yksinkertaisin esimerkki avaruuden \mathbb{R}^3 peilauksesta ja pallogeometriassa sitä vastaavat peilaukset isoympyröiden kautta.

Esimerkki 3.4. Olkoon piste $C = (0, 0, 1)$ ja peilaustaso isoympyrä A_z , jolle pätee $A_z = \mathbb{S}^2 \cap T_z$, ja $T_z = \{x, y, z \in \mathbb{R} : z = 0\}$. Nyt peilaus isoympyrän A_z kautta on kuvaus

$$p_z : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, p_z(x, y, z) = (x, y, -z).$$

Peilaus vastaa avaruuden \mathbb{R}^3 peilausta, jossa peilataan (x, y) -tason suhteen.



Kuva 3.2: Isoympyrä A_z on sininen ja pisteet C ja $p_z(C) = C'$ ovat violetilla.

Kahden peilauksen yhdiste on kierto suoran suhteen, joka kulkee kahden peilaustason leikkauspisteen ja origon halki. Kierron kulma on kaksinkertainen tasojen kulmaan verrattuna.

Esimerkki 3.5. Olkoon piste $F = (0, 1, 0)$ ja peilaustasot isoympyrät A_{-x} ja A_x , joille pätee

$$A_{-x} = \mathbb{S}^2 \cap T_{-x}, \text{ jossa } T_{-x} = \{x, y, z \in \mathbb{R} : y + x = 0\}$$

ja

$$A_x = \mathbb{S}^2 \cap T_x, \text{ jossa } T_x = \{x, y, z \in \mathbb{R} : y - x = 0\}.$$

Nyt peilaus isoympyrän A_{-x} kautta on

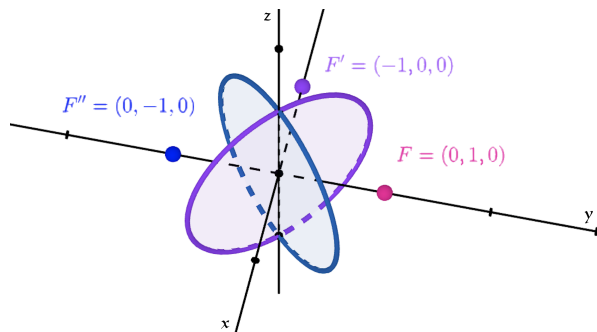
$$p_{-x} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad p_{-x}(x, y, z) = (-y, -x, z)$$

ja peilaus isoympyrän A_x kautta on kuvaus

$$p_x : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad p_x(x, y, z) = (y, x, z).$$

Yhdistetty kuvaus $h = p_x \circ p_{-x}$ saadaan, kun peilataan ensin tason $x + y = 0$ suhteen ja sitten tason $-x + y = 0$ suhteen. Nyt

$$p_x(p_{-x}(F)) = p_x(-1, 0, 0) = (0, -1, 0).$$



Kuva 3.3: Kuvassa on esitetty peilaukset vaiheittain. Violetilla ovat isoympyrä A_{-x} ja peilattu piste $F'(-1, 0, 0)$. Sinisellä ovat isoympyrä A_x ja peilattu piste $F'' = (0, -1, 0)$.

Peilaustasojen välinen kulma on 90° ja tasojen leikkaussuora on z -akseli. Täten kuvaus h on kierto, jossa kulma on 180° ja kiertoakseli on z -akseli. Siis:

$$h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad h(x, y, z) = (x \cos(\pi) - y \sin(\pi), y \cos(\pi) + x \sin(\pi), z) = (-x, -y, z).$$

Nyt kiertämällä pistettä F saadaan $h(F) = (0, -1, 0)$, joka on sama tulos kuin edellä kahden peilauksen yhdisteenä.

Esimerkki kolmen peilauksen yhdisteestä on niin sanottu antipodaalinen kuvaus, jossa pisteet kuvautuvat seuraavasti: $p(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Tässä peilaukset tehdään isoympyröiden A_z, A_y ja A_x suhteen. Peilaus A_z on sama kuin esimerkissä 3.4 eli peilaus tason (x, y) suhteen ja A_x sama kuin esimerkissä 3.5 eli peilaus tason (y, z) suhteen. Peilaus A_y on samaan tapaan peilaus (x, z) -tason suhteen ja muotoa

$$A_y = \mathbb{S}^2 \cap T_y, \quad \text{jossa } T_y = \{x, y, z \in \mathbb{R} : y = 0\}.$$

Peilausten jälkeen päästään tämän alaluvun päätulokseen eli kolmen peilauksen lauseeseen. Todistus menee Stillwellin kirjan harjoitusta mukaillen [3, s.156].

Lause 3.6. *Jokainen avaruuden \mathbb{S}^3 isometria on yhden, kahden tai kolmen peilauksen yhdiste.*

Todistuksen loppupuoli voidaan mukailla Stillwellin kirjan luvusta 3.7 [3, s.61].

3.2 Pallogeometrian kiertoryhmä

Määritellään seuraavaksi pallogeometrian kiertoryhmä. Siihen kuuluvat kierrot, joiden kiertoakseli kulkee origon läpi.

Lause 3.7. *Pallokuoren isometrioiden joukko*

$$Isom^+(\mathbb{S}^2) = \{f \in Isom(\mathbb{S}^2) : f \text{ on parillinen}\}$$

varustettuna yhdistetyllä kuvauksella on ryhmä.

Todistus menee samaan tapaan kuin lauseen 2.4 todistus. Lisäksi pitää osoittaa, että parillisten isometrioiden yhdiste on edelleen parillinen, jotta yhdistetty kuvaus kuuluu edelleen ryhmään määritelmän mukaisesti. Kierrot ovat parillisia, sillä kolmen peilauksen lauseen nojalla tiedämme, että kahden peilauksen yhdiste on kierto. Pitäisi siis osoittaa, että yhdistelemällä mikä tahansa parillinen määrä peilauksia saadaan aina kierto. Tämän osoittamiseksi riittää näyttää, että kahden kierron yhdiste on aina kierto [3, s.157].

Lause 3.8. *Yhdistämällä kaksi kiertoa saadaan aina kierto.*

Todistus. Olkoon kierrot $k_P, k_Q \in Isom^+(\mathbb{S}^2)$. Olkoon k_P kierto kulman θ verran pisteestä P . Olkoon k_Q kierto kulman φ verran pisteestä Q .

Aiemmin on mainittu, että kierto k_P voidaan esittää myös kahden peilauksen avulla. Nämä peilausten akselit ovat ne isoympyrät L ja M , jotka

leikkaavat pisteessä P ja joiden kulma on $\frac{\theta}{2}$. Voimme valita sellaisen isoym-
pyrän, joka kulkee sekä pisteen P että Q kautta.

Vastaavalla tavalla kierto k_P voidaan esittää kahden peilauksen avulla.
Valitaan ensimmäiseksi peilauksen isoympyräksi M ja toiseksi isoympyrä N ,
jonka kulma isoonympyrään on $\frac{\varphi}{2}$. Merkitään nyt kierrot k_P ja k_Q peilausten
avulla.

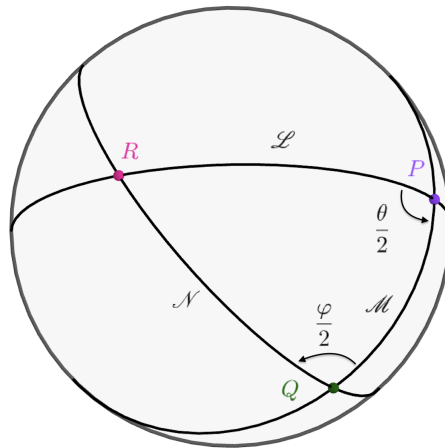
$$k_P = p_{LPM}$$

$$k_Q = p_{MPN}$$

Nyt yhdistämällä kuvaukset saadaan

$$k_P \circ k_Q = p_{LPM} p_{MPN} = p_{LPN},$$

sillä kuvaus $p_{MPM} = I_d$. Nyt on osoitettu, että mitkä tahansa kaksi kiertoa
koostuvat kahdesta peilauksesta, joka on kierto. Täten voidaan yhdistää mikä
tahansa parillinen määrä kiertoja ja saadaan aina kierto. \square



Kuva 3.4: Lauseen 3.8 todistuksessa kahden kierron yhdiste $k_P \circ k_Q$ on nyt
selvästi $k_R = p_{LPN}$.

Yksinkertaisimpien kiertojen kuvaukset voidaan päätellä tai arvata, mut-
ta tämä ei ole tarkka tapa. Tämän vuoksi seuraavissa luvuissa esitellään
kvaterniot, joiden avulla kiertojen kuvausten laskemiseen saadaan työkalu.

4 Kvaterniot

Tässä luvussa tutustutaan kvaternioihin, jotka voidaan esittää kompleksikertoimisten matriisien avulla. Kvaternioiden avulla on hyödyllistä esittää avaruuden \mathbb{R}^3 tai \mathbb{S}^2 kiertoja [3, s.159]. Aloitetaan määrittelemällä kvaterniot ja osoitetaan, että kvaterniot muodostavat renkaan. Toisessa alaluvussa käsitellään keskeisimpiä kvaternioihin liittyviä ominaisuuksia kuten determinanttia ja normia. Näiden lukujen tiedot yhdistelemällä saadaan, että kvaternioiden muodostama joukko on vielä tarkemmin jakorengas [1, s. 98].

Määritellään kvaterniot sekä kompleksikertoimisten (2x2)-matriisien että identiteettien avulla.

Määritelmä 4.1. Merkitään kvaternioiden joukkoa avaruudessa \mathbb{R}^4 symbolilla \mathbb{H}^4 . Kvaterniot, jotka kuuluvat tähän joukkoon ovat kompleksikertoimia (2x2)-matriiseja ja muotoa:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a + \mathbf{i}b & c + \mathbf{i}d \\ -c + \mathbf{i}d & a - \mathbf{i}b \end{pmatrix},$$

jossa $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{i}^2 = -1$. Varustetaan \mathbb{H}^4 kompleksikertoimisten (2x2)-matriisien yhteen- ja kertolaskulla.

Kvaterniot voidaan kirjoittaa myös identiteettien avulla [3, s.159].

Huomautus 4.2. Kvaternion identiteettimuoto on

$$\mathbf{q} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

missä

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1 Kvaternioiden rengas

Tässä alaluvussa on tarkoitus tarkastella kvaternioiden laskutoimituksia ja päätellä niiden avulla kvaternioiden joukon muodostavan renkaan. Lasketaan ensin kvaternioiden summa sekä tulo ja osoitetaan, että molemmat kuuluvat edelleen kvaternioiden joukkoon. Tämän jälkeen esitellään neutraalialkio. Luvun lopuksi osoitetaan vielä, että renkaan kertolasku ei ole kommutatiivinen.

Yhteenlaskulle pätee

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 &= \begin{pmatrix} a_1 + \mathbf{i}b_1 & c_1 + \mathbf{i}d_1 \\ -c_1 + \mathbf{i}d_1 & a_1 - \mathbf{i}b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + \mathbf{i}b_2 & c_2 + \mathbf{i}d_2 \\ -c_2 + \mathbf{i}d_2 & a_2 - \mathbf{i}b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + \mathbf{i}b_1 + \mathbf{i}b_2 & c_1 + c_2 + \mathbf{i}d_1 + \mathbf{i}d_2 \\ -c_1 - c_2 + \mathbf{i}d_1 + \mathbf{i}d_2 & a_1 + a_2 - \mathbf{i}b_1 - \mathbf{i}b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + \mathbf{i}(b_1 + b_2) & c_1 + c_2 + \mathbf{i}(d_1 + d_2) \\ -(c_1 + c_2) + \mathbf{i}(d_1 + d_2) & a_1 + a_2 - \mathbf{i}(b_1 + b_2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nyt voidaan merkitä $A = a_1 + a_2$, $B = b_1 + b_2$, $C = c_1 + c_2$ ja $D = d_1 + d_2$, jolloin saadaan

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} A + \mathbf{i}B & C + \mathbf{i}D \\ -C + \mathbf{i}D & A - \mathbf{i}D \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^4.$$

Täten kahden kvaternion on summa on kvaternio.

Tulolle pätee

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 &= \begin{pmatrix} a_1 + \mathbf{i}b_1 & c_1 + \mathbf{i}d_1 \\ -c_1 + \mathbf{i}d_1 & a_1 - \mathbf{i}b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 + \mathbf{i}b_2 & c_2 + \mathbf{i}d_2 \\ -c_2 + \mathbf{i}d_2 & a_2 - \mathbf{i}b_2 \end{pmatrix} \\ &= \dots = \\ &= \begin{pmatrix} A + \mathbf{i}B & C + \mathbf{i}D \\ -C + \mathbf{i}D & A - \mathbf{i}B \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Lasketaan esimerkin vuoksi tulo kvaternion \mathbf{q}_1 ensimmäisen rivin ja kvaternion \mathbf{q}_2 ensimmäisen sarakkeen välillä. Samoin kvaternion \mathbf{q}_1 toisen rivin ja kvaternion \mathbf{q}_2 toisen sarakkeen välillä.

Näistä ensimmäiselle saadaan

$$\begin{aligned}(a_1 + \mathbf{i}b_1)(a_2 + \mathbf{i}b_2) + (c_1 + \mathbf{i}d_1)(-c_2 + \mathbf{i}d_2) \\ = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + \mathbf{i}(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - c_2b_1)\end{aligned}$$

ja jälkimmäiselle

$$\begin{aligned}(-c_1 + \mathbf{i}d_1)(c_2 + \mathbf{i}d_2) + (a_1 - \mathbf{i}b_1)(a_2 - \mathbf{i}b_2) \\ = -c_1c_2 - c_1\mathbf{i}d_2 + d_2\mathbf{i}c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - a_1\mathbf{i}b_2 - b_1\mathbf{i}a_2 - b_1b_2 \\ = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + \mathbf{i}(-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2) \\ = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + \mathbf{i}(-a_1b_2 - b_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2) \\ = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + \mathbf{i}(-a_1b_2 - b_1a_2 - c_1d_2 + c_2d_1) \\ = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 - \mathbf{i}(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - c_2d_1).\end{aligned}$$

Merkitään nyt

$$A = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 \text{ ja } B = a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - c_2b_1,$$

joten saadaan

$$(a_1 + \mathbf{i}b_1)(a_2 + \mathbf{i}b) + (c_1 + \mathbf{i}d_1)(-c_2 + \mathbf{i}d_2) = A + \mathbf{i}B$$

ja

$$(-c_1 + \mathbf{i}d_1)(c_2 + \mathbf{i}d_2) + (a_1 - \mathbf{i}b_1)(a_2 - \mathbf{i}b_2) = A - \mathbf{i}B.$$

Nämä alkiot vastaavat kvaternion ensimmäisen sarakkeen ensimmäistä alkioita ja toisen sarakkeen toista alkioita. Muut alkiot saadaan vastaavasti, jolloin kvaternioiden tulo on edelleen kvaternio ja voidaan kirjoittaa $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \in \mathbb{H}^4$.

Nyt on osoitettu, että kvaternioiden summa ja tulo kuuluvat kvaternioiden joukkoon. Laskusäännöt kuten liitännäisyys ja yhteenlaskun vaihdannaisuus seuraavat suoraan matriisien laskusäännöistä. Kvaternioihin kuuluu lisäksi neutraalialkiot. Yhteenlaskun neutraalialkio on nollamatriisi ja kertolaskun neutraalialkio on identiteettimatriisi. Merkitään

$$I_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osoitetaan vielä, että kvaternioiden tulo ei ole vaihdannainen. Tämän osoittamiseksi riittää löytää yksi esimerkki, jossa vaihdannaisuus ei toteudu. Valitaan

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 + 2\mathbf{i} & 3 + 4\mathbf{i} \\ -3 + 4\mathbf{i} & 1 - 2\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

ja

$$\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 + 4\mathbf{i} & 5 + 6\mathbf{i} \\ -5 + 6\mathbf{i} & 2 - 4\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Lasketaan nyt tulot $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2$ ja $\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 &= \begin{pmatrix} 1 + 2\mathbf{i} & 3 + 4\mathbf{i} \\ -3 + 4\mathbf{i} & 1 - 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + 4\mathbf{i} & 5 + 6\mathbf{i} \\ -5 + 6\mathbf{i} & 2 - 4\mathbf{i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -45 + 6\mathbf{i} & 15 + 12\mathbf{i} \\ -15 + 12\mathbf{i} & -45 - 6\mathbf{i} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 &= \begin{pmatrix} 2 + 4\mathbf{i} & 5 + 6\mathbf{i} \\ -5 + 6\mathbf{i} & 2 - 4\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2\mathbf{i} & 3 + 4\mathbf{i} \\ -3 + 4\mathbf{i} & 1 - 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -45 + 10\mathbf{i} & 7 + 16\mathbf{i} \\ -7 + 16\mathbf{i} & -45 - 10\mathbf{i} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nyt huomataan, että $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1$, joten kvaternioiden tulo ei ole vaihdannainen. Kun näihin laskuihin lisätään vielä kvaternion käänteisalkio, joka esitellään seuraavan luvun lopussa saadaan, että kvaterniot muodostavat renkaan, joka ei ole kommutatiivinen kertolaskun suhteen.

4.2 Kvaternioiden ominaisuuksia

Tässä luvussa esitellään kvaternioiden keskeisimpiä ominaisuuksia. Kvaternion matriisimuodon ansiosta voidaan laskea determinantti ja kompleksilukujen laskutoimituksia hyödyntämällä voidaan määritellä kvaternioille käänteisluku. Yhdistämällä nämä tiedot saadaan, että kvaterniot muodostavat jakorenkaan. Lisäksi erittäin hyödylliseksi käsitteeksi osoittautuu normi eli euklidinen etäisyys.

Aloitetaan määrittelemällä kvaternion determinantti matriisilaskennasta tutulla kaavalla, alkioiden paikalla vain on kompleksilukuja [4, s.142]

$$\det \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = eh - gf, \quad \text{jossa } e, f, g, h \in \mathbb{C}.$$

Täten kvaternion determinantti on

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} a + \mathbf{i}b & c + \mathbf{i}d \\ -c + \mathbf{i}d & a - \mathbf{i}b \end{pmatrix} \\ &= (a + \mathbf{i}b)(a - \mathbf{i}b) - (-c + \mathbf{i}d)(c + \mathbf{i}d) \\ &= a^2 - a\mathbf{i}b + a\mathbf{i}b + b^2 - (-c^2 + c\mathbf{i}d - c\mathbf{i}d - d^2) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2.\end{aligned}$$

Määritellään seuraavaksi kvaternion käänteisluku, sillä sitä tarvitaan sekä seuraavan luvun laskuissa että osoittamaan kvaternioiden olevan jakorengas. Kvaternion käänteisluku merkitään kompleksilukujen käänteisluvun 4.1 ja konjugaatin (1.1) avulla.

Määritelmä 4.3. Olkoon kvaternio $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^4$. Kvaternion käänteisluku \mathbf{q}^{-1} on

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{q}} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} = \frac{a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{1}{\det(\mathbf{q})}(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}). \quad (4.1)$$

Kaava (4.1) pätee, sillä

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} &= (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) \\
&= a^2 - abi - acj - adk + abi + b^2 - bck \cdots + c^2 + dak - dbj + cdi + d^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\
&= \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Huomautus 4.4. Kvaternion ja sen käänteisluvun tulo

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} &= (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})\left(\frac{1}{\det(\mathbf{q})}(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k})\right) \\
&= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} \\
&= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \mathbf{1} \quad \parallel \quad (4.2) \\
&= \mathbf{1} \quad \parallel \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_k \\
&= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} \\
&= \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Huomautuksen mukaan kvaternioiden kaikki nolasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä eli jokaisella nolasta poikkeavalla renkaan alkiolla on käänteisluku [2, s.37]. Jakorengas on rengas jonka kaikki nolasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä [2, s.38]. Täten kvaterniot muodostavat jakorengaan ja koska kvaternioiden kertolasku ei ole kommutatiivinen ne muodostavat vinokunnan.

Määritetään seuraavaksi kvaternioille normi.

Määritelmä 4.5 (Normi). Olkoon kvaternio $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_4$. Kvaternion normi eli euklidinen etäisyys origosta saadaan kaavalla

$$\|\mathbf{q}\| = \|\mathbf{q} - 0\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{\det(\mathbf{q})}.$$

Huomautus 4.6. Toisin sanoen $\det(\mathbf{q}) = \|\mathbf{q}\|^2$.

Nyt yhdistämällä determinantti ja kertolasku voidaan kahden kvaternion normien tulo lopulta kirjoittaa erikseen [3, s.160].

Lause 4.7. *Olkoon $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{H}^4$ kvaternioita. Kvaternioiden normeille pätee*

$$\|\mathbf{p}\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2.$$

Todistus. Osoitetaan, että lause pätee kvaternioiden normeille determinantin laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned}\|\mathbf{pq}\|^2 &= \det(\mathbf{pq}) \quad \text{Huomautus 4.6} \\ &= \det(\mathbf{p}) \det(\mathbf{q}) \quad \text{Determinantin laskusäännöt} \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 \quad \text{Huomautus 4.6.}\end{aligned}$$

□

Lauseen 4.7 myötä erityisesti $\|\mathbf{qp}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|$ eli kahden kvaternion tulon normi voidaan kirjoittaa normien tulona. Osoitetaan sitten, että kvaterniolla kerrottaessa kahden pisteen etäisyyttä voidaan samalla tavalla laskea normit erikseen kvaterniosta ja pisteiden välisestä etäisyydestä.

Lause 4.8. *Olkoon pisteet $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^4$ ja kvaternio $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^4$. Tällöin*

$$\|p_1\mathbf{q} - p_2\mathbf{q}\| = \|p_1 - p_2\| \|\mathbf{q}\|.$$

Todistus. Matriisien laskusääntöjen nojalla $p_1\mathbf{q} - p_2\mathbf{q} = (p_1 - p_2)\mathbf{q}$. Näin ollen väite seuraa Lauseesta 4.7.

□

Täten etäisyys kahden pisteen välillä kerrotaan kvaternion \mathbf{q} normilla. Jos $\|\mathbf{q}\| = 1$, ja kuvaus $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{qp}$ on isometria [3, s.160].

Näin on tutustuttu kvaternioihin avaruudessa \mathbb{R}^4 ja niiden ominaisuuksiin. Seuraavassa luvussa päästään itse asiaan eli kiertokvaternioihin ja niiden muodostamiseen.

5 Avaruuden kierrot kvaternioiden avulla

Tässä luvussa esitellään miten avaruuden \mathbb{R}^3 ja erityisesti pallopinnan kieroja voidaan esittää kvaternioiden avulla. Aluksi määritellään avaruuden \mathbb{R}^3 kvaterniot. Tämän jälkeen muodostetaan kiertokvaternio ja osoitetaan, että se on avaruuden \mathbb{R}^3 kierto.

Määritellään ensin avaruudelle \mathbb{R}^3 kvaternio [3, s.160] ja käytetään tässä edellisen luvun huomautusta kvaternioiden toisesta kirjoitusmuodosta.

Huomautus 5.1. Kvaternio voidaan kirjoittaa myös muodossa [3, s.159]

$$\mathbf{q} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

missä

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Määritelmä 5.2. Avaruuden \mathbb{R}^3 kvaternioiden joukko on

$$\mathbb{H}^3 = \{\mathbf{p} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}^4 : a = 0\}.$$

5.1 Avaruuden \mathbb{R}^3 kvaternioiden ominaisuuksia

Tässä luvussa etsitään kuvaus isometrialle avaruudessa \mathbb{R}^3 ja esitetään se kvaternioiden avulla. Aloitetaan etsimällä kuvaus avaruuden \mathbb{H}^4 ja \mathbb{H}^3 kvaternioiden avulla, joka kuvautuu takaisin avaruuteen \mathbb{R}^3 . Tästä saadaan seuraus, että kyseinen kuvaus on avaruuden \mathbb{R}^3 isometria valitsemalla sopivat kvaterniot. Tämän jälkeen kirjoitetaan kuvaus uudessa muodossa, joka johdattelee avaruuden \mathbb{R}^3 kiertoihin [3, s.160].

Luvun neljän lopussa kerrottiin, että isometria avaruudessa \mathbb{R}^4 saadaan kuvauksella $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{qp}$, kun $\|\mathbf{q}\| = 1$. Käy ilmi, että kertomalla kuvausta puolittain kvaternion käänteisluvulla saadaan kuvaus $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{qpq}^{-1}$, joka kuvaa avaruuden \mathbb{R}^3 kvaternion takaisin avaruuteen \mathbb{R}^3 tai $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ -avaruuteen. Avaruus $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ koostuu reaalilukujen kolmikoista (x, y, z) , joten samaistusta voidaan käyttää [3, s.160]. Aloitetaan osoittamalla, että esitelty kuvaus $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{qpq}^{-1}$ kuvautuu avaruuteen \mathbb{R}^3 .

Lause 5.3. *Olkoon $\mathbf{p} \in \mathbb{H}^3$ ja $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^4, \mathbf{q} \neq 0$. Tällöin $\mathbf{qpq}^{-1} \in \mathbb{H}^3$.*

Todistus on suoraviivainen, mutta se vaatii hieman laskutyötä, joten kirjoitan auki vain tärkeimmät välivaiheet.

Todistus. Olkoon $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja $\mathbf{q} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Kuvauksessa $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{qpq}^{-1}$ kerrotaan kvaterniota \mathbf{p} vasemmalta puolelta kvaterniolla \mathbf{q} ja oikealta puolelta kvaternion \mathbf{q} käänteisalkiolla. Muodostetaan ensin kvaternion \mathbf{q} käänteisalkio kaavalla (4.1).

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2}(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}).$$

Lasketaan sitten \mathbf{qp} :

$$\begin{aligned} \mathbf{qp} &= (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= a\mathbf{1}x\mathbf{i} + a\mathbf{1}y\mathbf{j} + a\mathbf{1}z\mathbf{k} + bx(-1) + by\mathbf{k} + \dots + cz\mathbf{i} + dx\mathbf{j} - dy\mathbf{i} + dz(-1) \\ &= \mathbf{1}(-bx - cy - dz) + \mathbf{i}(ax + cz - dy) + \mathbf{j}(ay - bz + dx) + \mathbf{k}(az + by - cx). \end{aligned}$$

Kirjoitetaan nyt laskemisen helpottamiseksi

$$\begin{aligned} \alpha &= -bx - cy - dz \\ \beta &= ax + cz - dy \\ \gamma &= ay - bz + dx \\ \delta &= az + by - cx. \end{aligned}$$

Nyt tulo voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{qp} = \alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k}.$$

Lasketaan sitten \mathbf{qpq}^{-1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{qpq}^{-1} &= (\alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k})\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2}(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2}(\alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k})(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) \\ &= \dots = \\ &= \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2}\right)(\mathbf{1}(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) + \mathbf{i}(-\alpha b \dots) + \mathbf{j}(-\alpha c \dots) + \mathbf{k}(-\alpha d \dots)). \end{aligned}$$

Lasketaan nyt termin $\mathbf{1}$ kertolaskut $\alpha \cdot a$, $\beta \cdot b$, $\gamma \cdot c$ ja $\delta \cdot d$ auki ja saadaan tulokseksi $\mathbf{1} \cdot 0$ eli kuvaus on muotoa

$$\mathbf{qpq}^{-1} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2}\right)(\mathbf{i}(-\alpha b \dots) + \mathbf{j}(-\alpha c \dots) + \mathbf{k}(-\alpha d \dots)) \in \mathbb{H}^3.$$

□

Nyt on osoitettu, että haluttu kuvaus kuvautuu takaisin avaruuteen \mathbb{R}^3 . Käyttämällä kvaternioiden laskusääntöjä huomataan, että valitsemalla avaruuden \mathbb{H}^4 kvaternio jonka normi on 1, on löydetty avaruuden \mathbb{R}^3 isometria [3, s.160], koska tulos on tärkeä muotoillaan siitä lause.

Lause 5.4. *Olkoot $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^4$, $\|\mathbf{q}\| = 1$. Tällöin kuvaus $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{qpq}^{-1}$ on avaruuden \mathbb{R}^3 isometria.*

Todistus. Osoitetaan, että kuvaus $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{qpq}^{-1}$ säilyttää kahden pisteen etäisyyden. Olkoot \mathbf{p}_1 ja \mathbf{p}_2 kvaternioita \mathbb{R}^3 :ssa. Kuvataan nämä molemmat kuvauksen $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{qpq}^{-1}$ avulla ja osoitetaan, että niiden etäisyys on täsmälleen sama kuin ennen kuvausta.

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{qp}_1\mathbf{q}^{-1}) - (\mathbf{qp}_2\mathbf{q}^{-1})\| &= \|\mathbf{q}(\mathbf{p}_1\mathbf{q}^{-1} - \mathbf{p}_2\mathbf{q}^{-1})\| \\ &= \|\mathbf{q}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\mathbf{q}^{-1}\| \\ &= \|\mathbf{q}\|\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|\|\mathbf{q}^{-1}\| \quad \text{Lause (4.8)} \\ &= 1\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|\frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \\ &= \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|. \end{aligned}$$

Täten on osoitettu, että kuvaus $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{qpq}^{-1}$ on isometria, sillä etäisyys säilyy samana. \square

Kirjoitetaan nyt kvaternio eri muodossa, sillä haluamme löytää avaruuden \mathbb{R}^3 kierron. Havaitaan ensin, että mikä tahansa kvaternio, jonka pituus on 1 voidaan kirjoittaa muodossa $\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ [3, s.161].

Lause 5.5. *Jokainen kvaternio $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_4$, $\|\mathbf{q}\| = 1$ voidaan esittää muodossa*

$$\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (5.2)$$

jossa $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Huomautus 5.6. Jokaiselle muotoa (5.2) olevalle kvaterniolle \mathbf{q} pätee $\|\mathbf{q}\| = 1$.

Osoitetaan ensin, että mikä tahansa kvaternio $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^4$ voidaan esittää halutussa muodossa ja osoitetaan sitten, että halutun kvaternion pituus todellakin on 1.

Todistus. Olkoon $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^4$, $\mathbf{q} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Kirjoitetaan tämä nyt uudella tavalla

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{i} + m \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{j} + n \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{k} \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

Merkitsemällä $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $b = l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ja niin edelleen päästään haluttuun lopputulokseen. Osoitetaan vielä, että $\|\mathbf{q}\| = 1$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{q}\| &= \sqrt{\det(\mathbf{q})} \\ &= \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right))^2 + (m \sin\left(\frac{\theta}{2}\right))^2 + (n \sin\left(\frac{\theta}{2}\right))^2} \\ &= \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(l^2 + m^2 + n^2)} \\ &= \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Nyt on osoitettu, että jokainen kvaternio $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^4$, jonka pituus on 1 voidaan kirjoittaa edellä määritellyssä muodossa. Tätä muotoa kutsutaan kiertokvaternioksi, sillä se määrittää kierron avaruudessa \mathbb{R}^3 .

5.2 Kiertokvaternio avaruudessa \mathbb{R}^3

Edellisessä luvussa esitetty Lause 5.5 antaa uuden muodon kvaterniolle. Tämä muoto on hyödyllinen, sillä kun se esitetään kuvauksena $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$ huomataan, että se edustaa avaruuden \mathbb{R}^3 kiertoa.

Lause 5.7. *Olkoon $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^4$,*

$$\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Tällöin kuvaus $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$ on avaruuden \mathbb{R}^3 kierto vektorin $v = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ määrittämän kiertoakselin suhteen vektorin v kärjestä katsottuna kulman θ verran vastapäivään.

Jos $\mathbf{q} = n\mathbf{k}$, jossa $n > 0$, niin vastapäivään tarkoittaa suuntaa, jossa valitaan positiivinen k -akseli ja sitä vastassa oleva kohtisuora taso (\mathbf{i}, \mathbf{j}) , jota kierretään vastapäivään eli \mathbf{i} -akselilta pisteestä $(1, 0)$ \mathbf{j} -akselin suuntaan pisteeseen $(0, 1)$ ja niin edespäin. Vastapäivään kierroissa kulma θ on positiivinen ja kuuluu välille $[0, 2\pi]$. Osoitetaan seuraavaksi, että tämä pätee (\mathbf{i}, \mathbf{k}) -tasolle sekä kiertoakseleille \mathbf{j} .

Todistus. Osoitetaan Lause 5.5 kiertoakseleille \mathbf{j} ja (\mathbf{i}, \mathbf{k}) -tasolle. Nyt kiertokvaternioksi saadaan $\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ja kiertokvaternion käänteisluku on $\mathbf{q}^{-1} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{j} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Osoitetaan ensin laskemalla, että näin määriteltä kiertokvaternio kuvaa akselin $y\mathbf{j}$ pisteet itsekseen.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}y\mathbf{j}\mathbf{q}^{-1} &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)y\mathbf{j}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{j} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)(y\mathbf{j} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)) \\ &= y\mathbf{j} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - y \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + y\mathbf{j} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= y\mathbf{j} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + y\mathbf{j} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= y\mathbf{j}(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)) \\ &= y\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi pisteet \mathbf{i} ja \mathbf{k} akseleilta.

$$\begin{aligned}
\mathbf{qi}q^{-1} &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{j}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\mathbf{i}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{j}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{j}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left(\mathbf{i}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{ij}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \|\mathbf{ij} = \mathbf{k} \\
&= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{j}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left(\mathbf{i}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{k}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \|\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i} \\
&= \mathbf{i}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{k}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{k}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{i}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \mathbf{i}\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \mathbf{k}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= \mathbf{i}\cos(\theta) - \mathbf{k}\sin(\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}q^{-1} &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{j}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\mathbf{k}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{j}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= \dots = \\
&= \mathbf{k}\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta).
\end{aligned}$$

Nyt on osoitettu kierrot kvaternioille \mathbf{i} ja \mathbf{k} , ja lisäksi tiedetään, että jos origoa kierretään se säilyy samana, kun kiertoakseli kulkee sen läpi, näin ollen kierto määrittää nyt (\mathbf{i}, \mathbf{k}) -tason, sillä se kuvaa kolme eri pistettä kierron avulla. Edellä esitetty $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ -avaruuden isometria kuvaa $y\mathbf{j}$ -akselin itselleen ja kiertää (\mathbf{i}, \mathbf{k}) -tason kulman θ verran vastapäivään, joten kyseessä on kierto $y\mathbf{j}$ akselin suhteen [3, s.162]. \square

Sama päättely voidaan toistaa myös muille avaruuden akselleille \mathbf{i} ja \mathbf{j} samaan tapaan. Toisaalta voidaan valita mikä tahansa suora, joka kulkee origon halki kiertoakseliksi. Seuraavaksi huomautus kierroista myötapäivään.

Huomautus 5.8. Jos \mathbf{q}_v on kiertokuvauksen kvaternio kulman θ verran vastapäivään kierrettäessä, niin käänteisalkio \mathbf{q}_v^{-1} on vastaavan kiertokuvauksen kvaternio kulman θ verran myötapäivään kierrettäessä eli $\mathbf{q}_v^{-1} = \mathbf{q}_m$.

Huomautus kierrosta myötapäivään perustuu siihen, että valitsemalla negatiivinen kulma ja hyödyntämällä trigonometrisia laskusääntöjä saadaan

$$\mathbf{q}_m = \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \mathbf{q}_v^{-1},$$

ja vastaavasti

$$\mathbf{q}_m^{-1} = \mathbf{q}_v.$$

Lasketaan seuraavaksi esimerkki sekä vasta- että myötapäivään kierrosta.

Esimerkki 5.9. Kierretään kvaterniota $\mathbf{p} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ kulman $\theta = \frac{\pi}{2}$ verran vastapäivään ja myötäpäivään, jolloin kiertokulmana on $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ja valitaan kiertoakseliksi \mathbf{k} . Muodostetaan ensin kiertokvaternio ja sen käänteisalkio vastapäivään kierrolle

$$\mathbf{q}_v = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{k} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{k} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{q}_v^{-1} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathbf{k} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lasketaan nyt kuvaus $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{q}_v \mathbf{p} \mathbf{q}_v^{-1}$

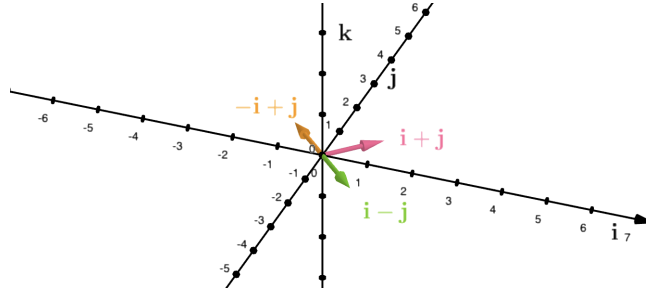
$$\begin{aligned} \mathbf{q}_v \mathbf{p} \mathbf{q}_v^{-1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j})\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{j} \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{j} \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\mathbf{j} \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \mathbf{j} \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} - \mathbf{i} \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= -\mathbf{i} + \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Kierretään nyt myötäpäivään, joten kiertokvaternio ja sen käänteisalkio ovat

$$\mathbf{q}_m = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{k} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{q}_m^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ja kuvaus $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{q}_m \mathbf{p} \mathbf{q}_m^{-1}$

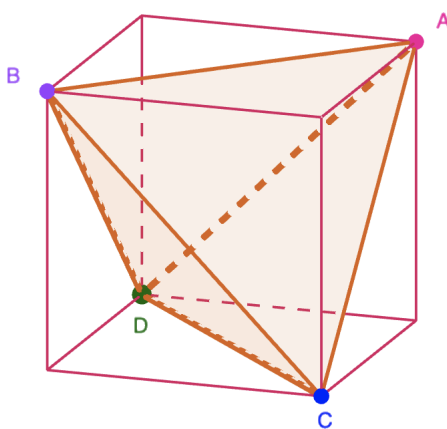
$$\mathbf{q}_m \mathbf{p} \mathbf{q}_m^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j})\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dots = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$



Kuva 5.1: Kierto vastapäivään on oranssilla ja kierto myötäpäivään vihreällä.

6 Tetraedrin kierrot

Tässä luvussa tarkastellaan tetraedrin kiertoryhmää eli kiertoja, jotka säilyttävät tetraedrin olemuksen. Toisin sanoen, jos valitaan tetraedristä tietty kulma huipuksi ja tietty tahko pohjaksi, niin kierroilla saadaan tetraedri kuvattua siten, että aina jokin kulma on huippu ja jokin sivu on pohja. Tetraedri on yksi Platonin kappaleista. Platonin kappaleet ovat kaikki säännöllisiä. Muita esimerkkejä ovat hieman tutumpi kuutio sekä oktaedri.



Kuva 6.1: Tetraedri yksikkökuution sisällä.

Tetraedrissä on neljä tahkoa ja jokaisella tahkolla on kolme kulmaa, siis kiertoja on yhteensä 12 [3, s. 164]. Kiertoryhmä muodostuu 12 alkiosta, joista ensimmäinen on neutraalialkio, jossa ei kierretä minkään suhteen. Tämän jälkeen loput kierrot voidaan jakaa $1/2$ -kiertoihin eli puolikiertoihin, joita on 3 ja $1/3$ -kiertoihin eli kolmasosakiertoihin, joita on 8. Näistä muodostuu tetraedrin kiertoryhmä, jota voidaan kutsua myös tetraedrin symmetriaryhmäksi.

Määritelmä 6.1. Tetraedrin kiertoryhmä on

$$S_T = \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \text{kierrot, jotka kuvaavat tetraedrin itsekseen}\}$$

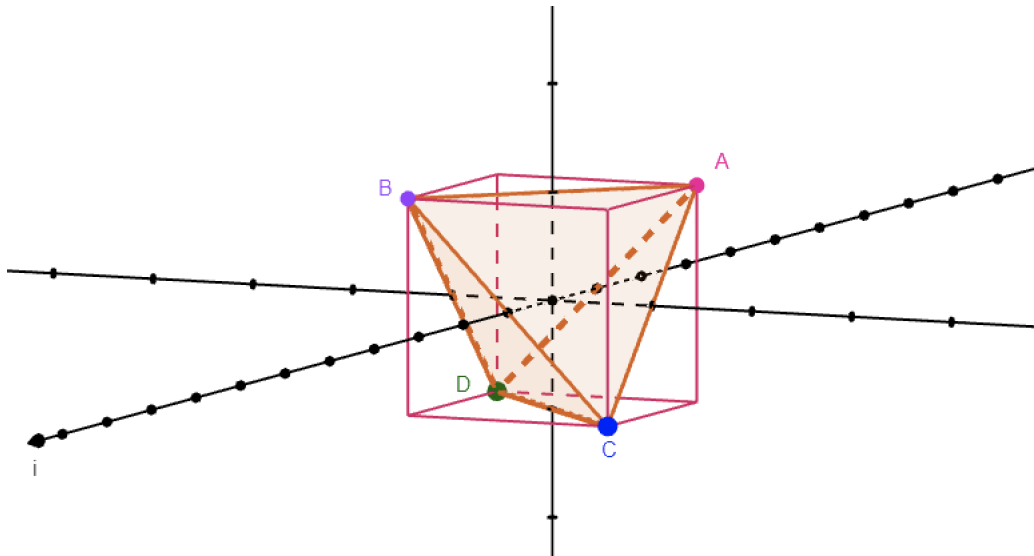
Tarkastellaan seuraavaksi puoli- ja kolmasosakiertoja sekä niiden kvaternioesityksiä.

6.1 Tetraedrin 1/2-kierto

Tetraedrin 1/2-kierrossa kiertoakselit ovat vastakkaisten sivujen keskinormaalit eli kulkevat kohtisuorasti vastakkaisten sivujen keskipisteen läpi ja kiertokulma $\theta = \pi = 180^\circ$. Mahdollisia sivupareja on kolme, joten tästä saadaan kolme eri kiertoa. Kiertosuunnalla ei ole väliä, sillä kierrettäessä 180 asteen verran päädytään samaan lopputulokseen kierrettiin sitten myötä- tai vastapäivään.

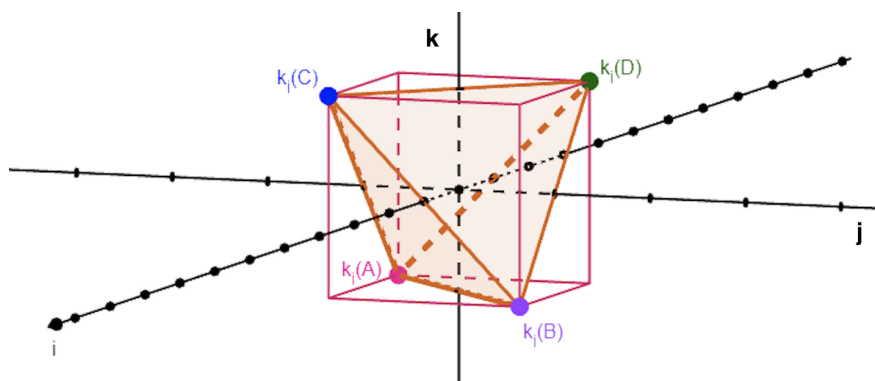
Tetraedrin sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa kohtisuorassa, joten valitaan kiertoakseleiksi $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ -avaruuden akselit ja esitetään kierrot seuraavien kuvien avulla. Kuviin on merkitty eri kärjet eri väreillä, jotta kiertojen erottaminen on helpompaa. Koordinaattiakselit leikkaavat myös aina kaksi tetraedrin sivua, jolloin puolikierrossa on tietyt pisteparit, jotka ”vaihtavat” paikkaa.

Määritellään ensin neutraaliolkio eli tetraedri, jota ei kierretty. Olkoon tämä kuvassa 6.2. Valitaan tästä tetraedristä huipuksi piste A ja pohjaksi kolmio BCD . Tähän kuvaan verrataan muiden tetraedrien kierrot.

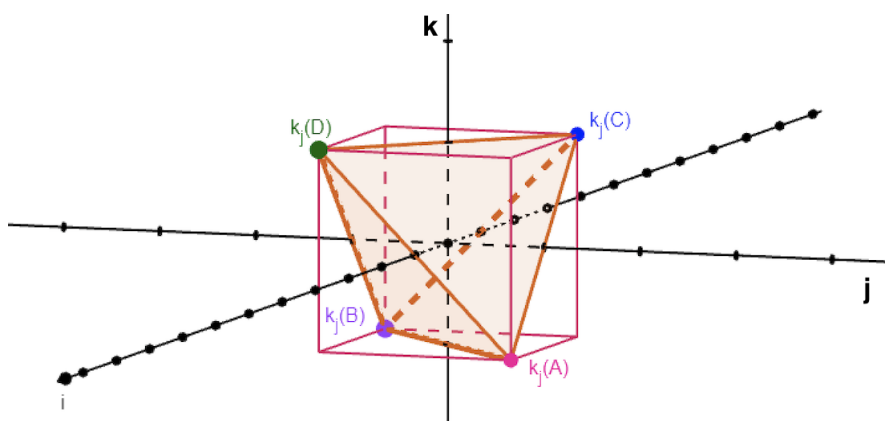


Kuva 6.2: Kuvassa on tetraedrin yksikkökuution sisällä. Pisteiden koordinaatit ovat $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (1, 1, -1)$ ja $D = (-1, -1, -1)$.

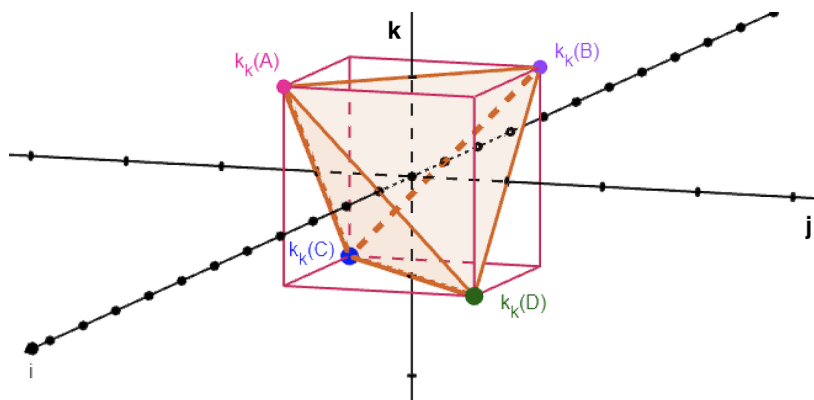
Kuvataan nyt loput puolikierrat.



Kuva 6.3: Kierro kulman π verran i -akselin suhteen myötäpäivään.



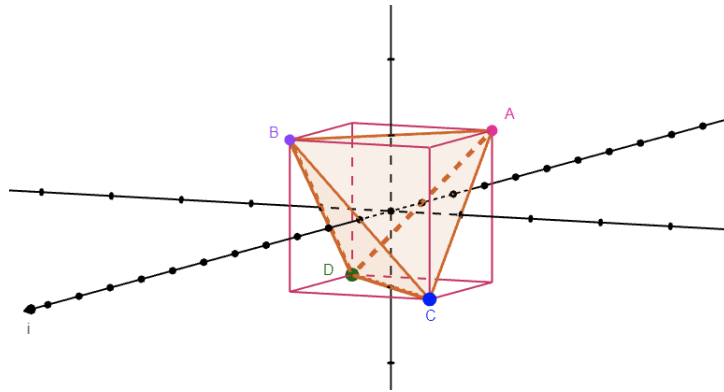
Kuva 6.4: Kierro kulman π verran j -akselin suhteen myötäpäivään.



Kuva 6.5: Kierro kulman π verran k -akselin suhteen myötäpäivään.

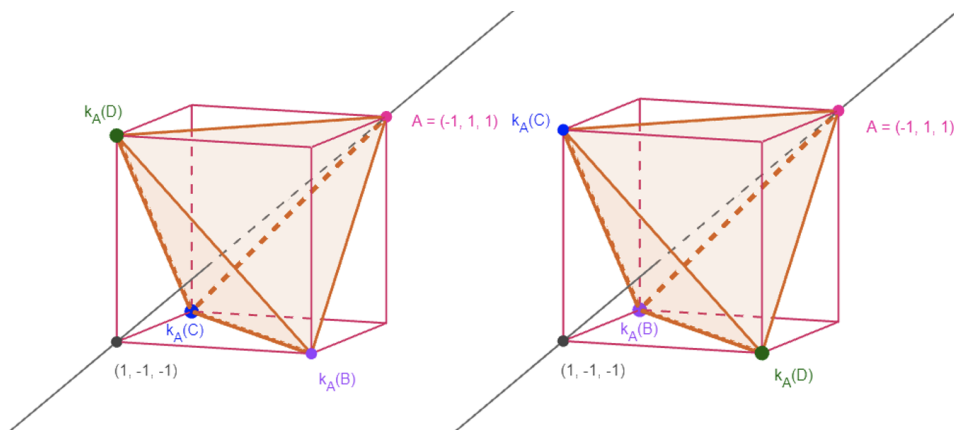
6.2 Tetraedrin 1/3-kierto

Tetraedrin 1/3-kierrössä kiertoakselit kulkevat kärjen ja sitä vastaavan tahkon läpi. Eli myös tässä tapauksessa puhutaan suorasta, joka on tahkon keskinormaali ja kulkee tahkon keskipisteen kautta. Kun hyödynnetään kuutiota, niin voidaan kiertoakselin ajatella kulkevan kuution vastakkaisten kärkien läpi. Kiertokulma on 1/3 täydestä ympyrästä eli $\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$. Kiertoakseleita on neljä. Kolmasosakerroissa kiertosuunnalla on väliä ja kierrot myötäpäivään antavat eri tulokset kuin kierrot vastapäivään. Kiertosuunta katsotaan aina huipun mukaan. Täten saadaan yhteensä kahdeksan eri kiertoa. Otetaan taas sama nollakierto vertailuksi ja kuvataan kierrot pareittain.

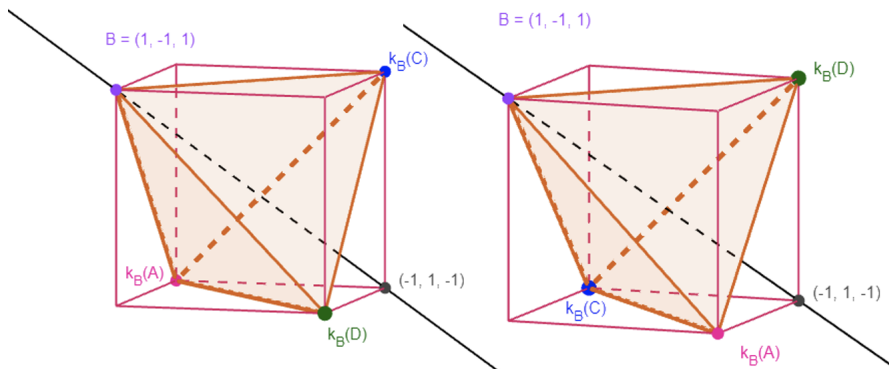


Kuva 6.6: Verrataan taas tähän neutraalialkioon.

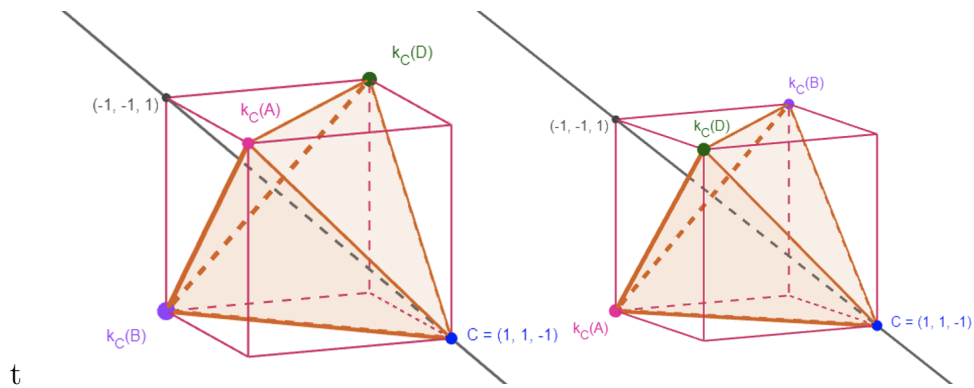
Valitaan ensimmäiseksi kiertoakseliksi vektori, joka kulkee origosta huipun A toisin sanoen $v = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.



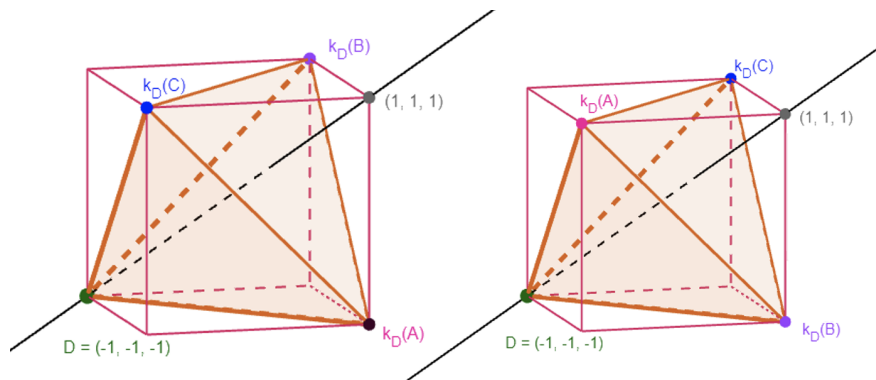
Kuva 6.7: Vasemmalla on kolmasosakierto vastapäivään ja oikealla myötäpäivään.



Kuva 6.8: Vasemmalla on kolmasosakierto vastapäivään ja oikealla myötäpäivään.



Kuva 6.9: Vasemmalla on kolmasosakierto vastapäivään ja oikealla myötäpäivään.



Kuva 6.10: Vasemmalla on kuva kolmasosakierrosta vastapäivään ja oikealla myötäpäivään.

6.3 Kierrot kvaternioiden avulla

Yhdistetään nyt tetraedrin kiertoihin kvaterniot. Lasketaan kiertokvaterniot sekä puolikierrolle että kolmasosakierrolle ja tehdään muutama esimerkki miten niitä käytetään.

Puolikiertojen kiertokvaterniot ovat muotoa $\pm \mathbf{i}$, $\pm \mathbf{j}$ ja $\pm \mathbf{k}$ [3, s.165]. Lasketaan esimerkin vuoksi kierto \mathbf{i} -akselin suhteen. Muut akselit saadaan laskettua vastaavasti.

Esimerkki 6.2. Puolikierron kiertokvaternio \mathbf{q} kiertoakselin \mathbf{i} suhteen on lauseen 5.7 nojalla

$$\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \mathbf{i} = \mathbf{i},$$

ja kiertokvaternion käänteisluku

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{q})}(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 1 \cdot (0 - \mathbf{i}) = -\mathbf{i}.$$

Määritellään seuraavaksi kolmasosakierron kiertokvaternio [3, s.165]. Kiertoakselit kulkevat yksikkökuution kulmien läpi, joten kertoimet ovat 1. Kiertoakselille saadaan seuraava esitys $\pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$. Kiertoakseleiden pituus ei kuitenkaan ole 1, joka on ehtona kiertokvaternion kaavan käyttämiselle, joten normitetaan akseli

$$\frac{\pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}).$$

Nyt kiertokvaterniot saadaan sijoittamalla kiertoakseli ja kulmat kiertokvaternion kaavaan. Lasketaan esimerkki kiertoakselin $\frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ suhteen myötäpäivään, jolloin kulma on positiivinen.

Esimerkki 6.3. Kolmasosakierron kiertokvaternio \mathbf{p} , kun kiertoakselina on $\frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ muotoa:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}, \end{aligned}$$

ja kiertokvaternion käänteisluku

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathbf{q})} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Tästä voidaan yleistää, että kaikki kolmasosakiertokvaterniot ovat muotoa

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\mathbf{i} \pm \frac{1}{2}\mathbf{j} \pm \frac{1}{2}\mathbf{k},$$

jossa plus ja miinusmerkit voivat olla missä kohtaa tahansa. Kvaterniot tulevat pareittain ja $\mathbf{p}\mathbf{k}\mathbf{p}^{-1} = (-\mathbf{p})\mathbf{k}(-\mathbf{p})^{-1}$. Näin ollen \mathbf{p} ja $-\mathbf{p}$ ovat saman kierron kiertokvaternioita. Täten kvaterniot voidaan kirjoittaa muodossa

$$\pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\mathbf{i} \pm \frac{1}{2}\mathbf{j} \pm \frac{1}{2}\mathbf{k}.$$

Neutraalialkio voidaan myös esittää kvaternion avulla olkoon se $\mathbf{1}$ ja koska kvaterniot tulevat pareittain neutraalialkion kvaternio on muotoa $\pm\mathbf{1}$.

Lasketaan nyt yksi puoli- ja yksi kolmasosakierto esimerkin vuoksi, muut kierrot voidaan laskea vastaavasti. Otetaan käyttöön kuvan 6.2 tetraedri, siinä tetraedrin huippujen koordinaatit ovat $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (1, 1, -1)$ ja $D = (-1, -1, -1)$. Muutetaan nämä kvaternioiksi, jolloin saadaan $A = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $B = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $C = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $D = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Kvaternioiden matriisimuodoista voidaan muodostaa laskutaulukko, joka helpottaa kiertojen laskemista

\cdot	$\mathbf{1}$	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	\mathbf{i}	$-\mathbf{1}$	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$
\mathbf{j}	\mathbf{j}	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	\mathbf{i}
\mathbf{k}	\mathbf{k}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$

Esimerkki 6.4. Lasketaan puolikierto akselin \mathbf{i} suhteen:

$$k_{\mathbf{i}}(A) = \mathbf{i}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})(-\mathbf{i}) = (\mathbf{1} + \mathbf{k} - \mathbf{j})(-\mathbf{i}) = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} = D,$$

$$k_{\mathbf{i}}(B) = \mathbf{i}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})(-\mathbf{i}) = (-\mathbf{1} - \mathbf{k} - \mathbf{j})(-\mathbf{i}) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} = C,$$

$$k_{\mathbf{i}}(C) = \mathbf{i}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})(-\mathbf{i}) = (-\mathbf{1} + \mathbf{k} + \mathbf{j})(-\mathbf{i}) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} = B,$$

$$k_{\mathbf{i}}(D) = \mathbf{i}(-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})(-\mathbf{i}) = (\mathbf{1} - \mathbf{k} + \mathbf{j})(-\mathbf{i}) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = A.$$

Saadaan siis, että pisteparit ovat vaihtaneet paikkaa, kuten puolikiertossa pitääkin. Tämä kierto on esitetty kuvassa 6.3.

Esimerkki 6.5. Lasketaan kolmasosakierto akselin $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ suhteen vastapäivään, jolloin kiertoakseli kulkee kärjen A halki. Kiertokvaterniot ovat esimerkin 6.3

$$\mathbf{p}_v = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

ja

$$\mathbf{p}_v^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

Kierrot ovat:

$$\begin{aligned} k_{A,v}(A) &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = A, \\ k_{A,v}(B) &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} = C, \\ k_{A,v}(C) &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} = D, \\ k_{A,v}(D) &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})(-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = B. \end{aligned}$$

Tämä on täsmälleen samoin kuin kuvassa 6.7 nähdään. Piste A kuvautuu itselleen ja loput pisteet kuvautuvat seuraavasti $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$ ja $D \rightarrow B$.

Vastaavasti myötapäivään kierrot saadaan, kun kiertoakseli kulkee kärjen A kautta kulman -120 verran, joten kiertokvaterniot ovat

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

ja

$$\mathbf{p}_m^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Lasketaan kierrot:

$$\begin{aligned} k_{A,m}(A) &= A, \\ k_{A,m}(B) &= D, \\ k_{A,m}(C) &= B, \\ k_{A,m}(D) &= C. \end{aligned}$$

Eli myötapäivään kierrossa pisteet menevät: $B \rightarrow D$, $D \rightarrow C$ ja $C \rightarrow B$.

Muut kolmasosakierrot voidaan laskea vastaavasti.

Viitteet

- [1] LIBIN LI AND KAIMING ZHAO: *Introduction to Abstract Algebra*. EDP Sciences, 2022.
- [2] JOUNI PARKKONEN: *Algebra 1 -luentomoniste*. Jyväskylän yliopisto, 2021.
- [3] JOHN STILLWELL: *The Four Pillars of Geometry*. Springer, 2005.
- [4] JOHN STILLWELL: *Elements of number theory*. Springer, 2003.
- [5] DENNIS G. ZILL, PATRIC D. SHANAHAN: *A first course in Complex analysis with Applications*. Jones and Bartellett publishers, 2003.