7.–8.-luokkalaisten virheet geometriassa ja virheiden vaikutukset ryhmän väliseen dialogiin

Hanna Jokiaho
Emma Maaranen

Matematiikan pro gradu -tutkielma
Kevätlukukausi 2024
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Jokiaho Hanna, Maaranen Emma. 2024. 7.–8.-luokkalaisten virheet geometriassa ja virheiden vaikutukset ryhmän väliseen dialogiin. Matematiikan pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta. 94 sivua.

Tämän tutkielman tarkoituksena on antaa informaatiota siitä, millaisia ovat 7.–8.-luokkalaisten yleisimmät virheet geometriassa, ja miten muut oppilaat reagoivat vertaistensa tekemiin virheisiin. Tutkimustulosten on tarkoitus hyödyttää erityisesti opettajia tarjoamalla tietoa oppilaiden geometrian taitotasosta sekä argumentaatiotaidoista.

Tässä tutkimuksessa hyödynnetään Jyväskylän opettajankoulutuslaitoksen valmiiksi keräämää DARLING-aineistoa. Aineistossa on videoitu 7.–8.-luokkalaisten yläkoululaisten matematiikan ryhmätyötilanteita. Tähän tutkimukseen valikoitui viisi eri oppitunnin aihetta, joista pienryhmävideoita tuli yhteensä 69 kappaletta. Aineistoa analysoidaan laadullisin tutkimusmenetelmin, ja dialogisuutta tarkastellessa hyödynnetään sovellettua dialogin ulottuvuuksien mallia.

Tämän aineiston tutkimustulokset osoittavat, että yli puolet oppilaiden tekemistä virheistä liittyvät termien nimiin ja määritelmiin. Yleisin tapa reagoida virheeseen oli kommentointi, eli tilanteessa ei oteta kantaa virheeseen, vaan se ainoastaan kuitataan joko sanallisesti tai sanattomasti, esimerkiksi nyökkäämällä. Toiseksi yleisin tapa oli kuitenkin haastaminen, eli oppilaat melko rohkeasti uskaltavat osoittaa epäkohtia toisten virheissä.

Näyttäisi siltä, että oppilaiden matemaattiseen puheeseen tulisi kiinnittää huomiota. Virheet termeissä liittyi suurelta osin väärän termin käyttämiseen, esimerkiksi pallon sijasta käytetään termiä ympyrä. Myös määritelmien osaamiseen tulee kiinnittää huomiota. Oppilaiden rohkeus ja taidot virheisiin reagoimiseen ja sen haastamiseen ovat jo suhteellisen hyvällä tasolla haastamisen ollessa toiseksi yleisin reagointitapa, mutta siinä on vielä kehitettävää.

Asiasanat: virhe, virhekäsitys, geometria, dialogisuus, argumentaatio

SISÄLTÖ

1 JOHDANTO

Matematiikassa virheiden tekeminen ja virheiden kautta oppiminen on arkipäivää. Vaikka virheet mielletään usein negatiivisena asiana, niin parhaimmassa tapauksessa virhe voi kuitenkin tarjota merkittäviä oivalluksia ja oppimistilanteita myös muille, kuin virheen tekijälle itselleen. Esimerkiksi koulussa ryhmätyötilanteessa jonkun tehdessä virheen, myös ryhmän muut jäsenet sen jälkeen liittyvät tilanteen etenemiseen. Korjaako joku ryhmän jäsenistä virheen? Puuttuuko rohkeus huomauttaa virheestä, jolloin virhe kuitataan hyväksytyksi? Huomattiinko virhettä edes?

Näkemykset virheistä jakaantuvat yhä negatiivisiin ja positiivisiin. Negatiivinen käsitys on kuitenkin jo jokseenkin vanhentunut ajattelutapa. Bandura (1986), Barnes ja Underwood (1959) ja Skinner (1953) ovat aikanaan ajatuksillaan vahvistaneet negatiivista näkemystä, ja heidän mukaansa virheitä tulisi välttää kaikin keinoin. Myös Ausubel (1968) pitää virheitä vaarallisena, sillä hänen mielestään virheiden salliminen kannustaa ihmisiä harjoittelemaan vääriä ja tehottomia tapoja, joita on hankala jälkeenpäin korjata kohti oikeita tapoja. Virheitä tutkitaan paljon nykypäivänä voidakseen vaikuttaa niihin ennaltaehkäisevästi, mutta näkemykset virheiden tekemisestä ovat nykyisin positiivisemmat. Metcalfe (2017) kuvailee virheitä tienviittoina ratkaisua rakentaessa. Virheiden tekeminen auttaa oppijaa kohdentamaan huomionsa paremmin sekä pääsemään oikeaan vastaukseen. Myös Palkki (2022) korostaa virheiden sekavuuden ja häiriön sijaan niiden mahdollisuutta toimia oivallisena pohjana opetukselle.

Oppilaiden tekemien virheiden kautta myös opetusalan ammattilaiset voivat kehittää työtänsä. Yleisimmin ilmenneiden virheiden kautta opettajat voivat saada arvokasta tietoa opetuksen kehittämistä varten, ja oppikirjojen laatijat oppikirjojen täsmentämisen tueksi. Esimerkiksi opettajilla on kädet täynnä opetuksen ja muiden työtehtävien parissa, joten tutkimukset tarjoavat heille merkityksellistä tietoa.

Tässä tutkimuksessa haluamme tuottaa tietoa 7.–8.-luokkalaisilla yleisimmin ilmenevistä virheistä geometriassa. Yleisimmin esiintyvät virheet ilmaisevat kehityskohtia niin opetukseen, kuin oppimateriaalien laatimiseen. Aiemmin vastaavaa virhetutkimusta on tehnyt muun muassa Kivi (2020) algebrallisiin virhekäsityksiin liittyen ja Kärki (2015) opettajaopiskelijoiden geometristen määritelmien osaamisesta. Geometrisia virhekäsityksiä on tutkinut esimerkiksi Özerem (2012). Hänen tutkimuksensa kuitenkin keskittyy ainoastaan 7.-luokkalaisiin ja otos on varsin pieni, ainoastaan 28 oppilasta. Meidän tutkimuksemme laajentaa otosta sisältäen viisi luokkaa, joissa on yhteensä 106 oppilasta.

Özeremin (2012) aineisto koostuu koetuloksista ja haastatteluista, joissa oppilailta kysytään kysymyksiä liittyen kiinnostukseen ja ajatuksiin geometrian oppitunneista. Vastaavasti myös Kivi (2020) ja Kärki (2015) ovat keränneet aineistonsa kokeiden tuloksista. Tässä tutkimuksessa aineistona olemme käyttäneet videomateriaalia oppitunneilta. Tällä tavoin saamme autenttisempaa tietoa virhetilanteesta, sillä tilanne nähdään kokonaisuudessaan. Testituloksista nähdään ainoastaan virheelliset ratkaisut, mutta videoaineiston ansiosta näemme koko tilanteen, miten ja miksi oppilaat virheellisiin ratkaisuihin päätyvät.

Tilanteet virheen ilmenemisen jälkeen jatkuvat aina jotenkin, joko virheelliseen ratkaisutapaan puuttuen tai sen huomiotta jättäen. Ryhmätyötilanteessa ratkaisutapaansa, oli se virheellinen tai ei, voi joutua puolustamaan ja perustelemaan. Matematiikka pohjautuukin pitkälti argumentaatiotaidoille ja johdonmukaiselle perustelulle. Jo varhaisessa vaiheessa oppilaille opetetaan taitoja esittää matemaattinen ratkaisu välivaiheita, eli perusteluja, käyttäen. Argumentaatiotaitoja ja dialogisuutta yleisesti on tutkittu paljon, ja esimerkiksi Hähkiöniemi ym. (2019) ovat tutkineet nimenomaan argumentaatiotaitojen kehittymistä matematiikassa. Webb ym. (2009) tutkimus keskittyy oppilaiden toimimiseen toistensa ideoiden parissa sekä Wood ja Kalinec (2012) ovat tutkineet dialogisuuden vaikutusta oppimismahdollisuuksiin. Tutkimukset keskittyen virhetilanteiden jälkeiseen keskusteluun ovat kuitenkin vähäisiä. Tutkimuksia löytyy paljon siitä, miten opettaja reagoi oppilaiden virheisiin, mutta ei juurikaan siitä, miten oppilaat reagoivat toistensa tekemiin virheisiin. Tässä tutkimuksessa haluamme tarjota tietoa, mitkä ovat oppilaiden yleisimmät reagointitavat toistensa tekemiin virheisiin, ja miten dialogi siitä jatkuu. Tämä tarjoaa mielenkiintoista informaatiota oppilaiden kyvyistä ja rohkeudesta puuttua virheisiin.

Tutkimusta lähestytään laadullisin tutkimusmenetelmin. Jo alkuun oletuksena on, että virheitä tulee olemaan useita. Tavoitteena olisi löytää sekä yleisimmistä virheistä geometriassa että yleisimmistä tavoista reagoida virheeseen selkeästi eniten ilmenevät tapaukset, jolloin tehty tutkimus tarjoaa uutta tietoa eikä jää vain yleiselle tasolle. Luvussa 2 ja 3 esitellään tarvittavia taustatietoja tutkimusta varten. Luvussa 4 on esitelty tarkemmat tutkimuskysymykset ja tutkimustehtävä, ja luvussa 5 kuvaillaan tutkimuksen toteuttamista. Luvussa 6 esitellään saadut tutkimustulokset. Lopuksi luvussa 7 tarkastellaan ilmenneitä tuloksia, arvioidaan tutkimuksen toteutusta sekä esitellään mahdollisia jatkotutkimusideoita.

2 TEOREETTINEN TAUSTA

2.1 Argumentaatio

Perinteisesti argumentaatiossa pyritään vakuuttamaan vastapuoli uskomaan esitettyä väitettä. Usein argumentaation tutkimus keskittyy keskusteluihin, joissa oppilaat tekevät väitteitä, puolustavat niitä sekä kritisoivat toisten argumentteja. (Hiltunen ym., 2016). Argumentoinniksi voidaan käsittää kaikki ne tilanteet, joissa oppilaat tai opettajat tekevät matemaattisen väitteen ja esittävät todisteita sen tueksi. (Conner ym., 2014). Stylianideksen ym. (2016) mukaan matemaattinen argumentaatio ja todistaminen muistuttavan läheisesti tosiaan. Harel ja Sowder (2007) mainitsevat todistamisen tarkoittavan usein matemaatikoiden tarkkaa argumentointia. Heidän mukaansa todistaminen voidaan jakaa kahteen prosessiin: varmistamiseen sekä taivutteluun. Varmistamisessa yksilö tai ryhmä pyrkivät poistamaan omat epäilyksensä, kun taas taivuttelussa pyritään vakuuttamaan ulkopuoliset. Argumentaatio matematiikassa muistuttaakin todistamista, mutta voi olla kieleltään vapaampaa.

Argumentoinnin sekä dialogin analysointiin Hiltunen ym. (2016) ovat kehittäneet mallin Toulminin argumentaatiomallin pohjalta. Toisin kuin Toulminin argumentaatiomallissa, Hiltusen ym. mallissa ei tarvitse tunnistaa takeita eli lausuntoja, jotka yhdistävät väitteisiin tietoa. Sen sijaan tutkitaan, sisältääkö argumentti päättelyä, eli esitetäänkö tiettyjä perusteluja johtopäätöksen tekemiseksi. He ovat tutkineet matematiikan oppitunneilta löytyvää argumentoivaa keskustelua.

Hiltusen ym. (2016) mukaan olennaisimpia argumentaation elementtejä ovat väite, kuvaileva tuki ja artikuloitu päättely. Väite on lausunto, joka on tuettu esimerkiksi faktalla, havainnolla, laskennalla tai selityksellä, miksi väite voidaan päätellä. Väitteen validiteetti voidaan kyseenalaistaa tai haastaa. Kuvailevalla tuella tarkoitetaan tosiasioita, lausuntoja, laskelmia tai lukuja, joita väitteen tueksi esitetään. Muodostaakseen argumentin tulee vähintään osoittaa väite sekä perustella sitä kuvailevan tuen tai artikuloivan päättelyn avulla. Artikuloitua päättelyä voi olla deduktiivista ja ei-deduktiivista. Deduktiivista perustelua on perustelu vastaesimerkin avulla, todiste väitteen olemassaolosta esimerkillä, nojautuminen tunnettuun faktaan tai teoriaan, eteneminen loogisten askelten ketjuna, kaikkien tilanteiden listaaminen sekä epäsuora perustelu vastaväitteen avulla. Ei-deduktiivista perustelua on esimerkiksi induktiivinen perustelu.

Tarkastellaan seuraavaksi edellä mainittuja käsitteitä esimerkin avulla:

Oppilas 1: Pitää piirtää nelikulmio, jonka sivut ovat yhtä pitkät. Eli neliö

Oppilas 2: Voihan se olla myös suunnikas

Oppilas 3: Koska jos me kaadetaan noi sivut nii ne on edelleen yhtä pitkät

Yllä olevassa tilanteessa oppilas 1 väittää nelikulmion, jonka sivut ovat yhtä pitkät, olevan neliö. Oppilas 2 esittää uuden väitteen nelikulmion voivan olla myös suunnikas. Oppilas 3 perustelee oppilaan 2 väitettä kuvailevan tuen avulla.

Artikuloidussa päättelyssä tilanne voisi mennä seuraavalla tavalla:

Oppilas 1: Pitää piirtää nelikulmio, jonka sivut ovat yhtä pitkät. Eli neliö

Oppilas 2: Voihan se olla myös suunnikas.

Oppilas 3: Niin koska me voidaan piirtää neljä yhtä pitkää janaa, joista vastakkaiset ovat yhdensuuntaiset.

Oppilas 2: Joo, me voidaan kaataa samaan suuntaa nää janat (osoittaa vastakkaisia janoja)

Oppilas 3: Silloin myös toi yläoleva siirtyy

Oppilas 1: Eli voidaan tehdä neliö tai suunnikas.

Nyt oppilas 2 sekä oppilas 3 selostavat tarkemmin ajatteluaan loogisen ajattelun ketjuna toisiaan tukien. Artikuloidussa päättelyssä perustellaan, miksi väite voidaan päätellä siitä, mitä jo tiedetään. Oppilaat kuvailevat ajatteluaan ja toimiaan edeten kohti ratkaisua. Hähkiöniemen ym. (2019) mukaan oppilaiden välinen argumentointi on mahdollista, jos heille annetaan tarpeeksi tilaa keskustella, mutta ohjataan samalla pysymään aiheessa.

2.2 Dialogi ja dialogisuus

Hähkiöniemi ym. (2019) ovat tutkineet dialogisuutta ja dialogia. Dialogi nähdään usein vuoropuheluna ihmisten välillä. Asterhan ja Schwarz (2009) ovat jakaneet dialogiset liikkeet argumentatiiviseen ja ei-argumentatiiviseen kategoriaan. Argumentatiivinen dialogi keskittyy väitteiden esittämiseen, pyytämiseen, tukemiseen tai haastamiseen. Sen sijaan ei-argumentatiivinen dialogi keskittyy tarkennusten tai informaation pyytämiseen tai tarjoamiseen.

Hähkiöniemi ym. (2019) mukaan dialogisuus tarkoittaa toimimista toisen ideoiden parissa, ja se ilmenee kysymyksen esittämisenä, haastamisena, tarkentamisena, kommentoimisena sekä vastaamisena. Esittäessään kysymyksen oppilas pyytää tarkennusta tai lisätietoa toisen ideaan liittyen. Haastaessaan oppilas osoittaa epäkohdan toisen oppilaan ideassa. Syventäessään oppilas analysoi, kehittää tai vahvistaa toisen oppilaan ideaa. Kommentoidessaan oppilas kommentoi toisen oppilaan väitettä ilman haastamista, kysymyksen esittämistä tai syventämistä. Vastatessa oppilas vastaa toisen oppilaan ideaan kysymystä esittämättä, syventämättä tai kommentoimatta sitä. Luokkahuoneessa dialogisuus voidaan jakaa kolmeen ulottuvuuteen: opettajan dialogisuuteen, oppilaiden keskinäiseen dialogisuuteen sekä dialogisen opetuksen järjestämiseen. (Hähkiöniemi ym., 2019). Keskitymme tutkielmassamme oppilaiden väliseen dialogisuuteen.

Webb ym. (2014) ovat tutkineet opiskelijoiden suhdetta heidän ideoidensa selittämisen, toimimisen muiden ideoiden parissa ja opiskelijoiden oppimistulosten välillä. Tutkimuksen mukaan opiskelijoiden sitoutuminen toisten opiskelijoiden ideoihin voidaan jakaa kolmeen tasoon. Matalalla tasolla opiskelijat haastoivat toistensa ideoita ilman perusteluja. Keskitasolla opiskelijat sanoivat yksiselitteisesti olevansa eri mieltä muiden ideasta. Korkealla tasolla opiskelijat ehdottivat muiden ideaan parannusta, lisäsivät yksityiskohtia tai saattoivat käsitellä erimielisyyksiään. Tutkimus osoitti, että opiskelijoiden omien ideoidensa selittäminen oli yhteydessä korkeisiin oppimistuloksiin. Opiskelijoiden sitoutuessa korkealla tasolla toisen ideoihin oli heidän suhteensa korkeaan oppimistulokseen suurempi kuin omia ideoita selittäessä. Webbin ym. (2014) tulokset kertovat, kuinka oppilaiden ilmaistaessa omia ideoitaan ja sitoutuessaan toistensa ideoihin luokkahuone dialogisuudesta voi tulla hedelmällisempää. Jos oppilaiden sitoutumisen toistensa ideoihin oli korkealla tasolla virheiden tapahtuessa, saattoi se johtaa keskusteluihin, idean kyseenalaistamiseen ja virheellisen ratkaisun korjaantumiseen.

2.3 Virhe ja virhekäsitys

Palkki (2022) on tutkinut väitöskirjassaan matemaattista joustavuutta sekä vertailutehtävien ja virheiden roolia matematiikan oppimisessa. Hänen mukaansa virheitä voidaan kutsua yläkäsitteellä spontaanivirhe, joka sisältää virheet ja virhekäsitykset. Virheet voidaan jakaa virheellisiin vastauksiin ja virheellisiin ratkaisuihin sekä lipsahduksiin. Tällaiset virheet voivat käsittää esimerkiksi käsitteellisiä virheitä sekä huolimattomuusvirheitä. Palkin mukaan huolimattomuusvirheistä on muita virhetyyppejä helpompi päästä eroon. Koska virhekäsityksistä on vaikeampi päästä eroon kuin virheistä, tutkielmassamme ei esiinny yläkäsitettä spontaanivirhe vaan käytössä on Palkin määritelmät virheille ja virhekäsityksille. Virheellä tarkoitetaan virheellisiä vastauksia ja ratkaisuja sekä lipsahduksia. Virhekäsitykset ovat syvään juurtuneimpia ja laajempia kuin virheet.

Palkin (2022) mukaan virheet voivat myös olla matematiikan opetuksen kannalta hyödyllisiä, koska niiden avulla voidaan saavuttaa jotain merkityksellistä. Virheitä kohti pitäisi rohkeasti mennä ja hyväksyä ne osana oppimista. Metcalfe (2017) on tutkimuksessaan huomannut virheiden parantavan mieleen palauttamista, helpottavan aktiivista oppimista sekä tukevan oppijaa kohdistamaan huomionsa tarkoituksenmukaisemmin. Opiskelijoiden tulisikin olla avoimempia virheille.

Aiempi tutkimus on osoittanut, että useita eri virhekäsityksiä esiintyy läpi kaikkien yläkoulun luokka-asteiden. Vaikka Kiven (2020) tutkimustuloksissa havaittiin toistojen määrän vähentävän virheitä, algebraan keskittyvät virheet ja virhekäsitykset seurasivat oppilasta läpi yläkoulun. Hänen mukaansa yläkoulun matematiikka keskittyy paljolti mekaanisen laskutaidon kehittymiseen, eikä aikaa ole tarpeeksi sanallisten tehtävien pohdinnalle. Samankaltaisiin tuloksiin on päässyt Silfverberg (1999) väitöskirjassaan. Hänen mukaansa geometrinen ajattelu ei pääse kehittymään tehtävien keskittyessä geometrian laskuihin. Virheet eivät ole sidoksissa vain yhteen matematiikan osa-alueeseen, vaan niitä esiintyy aiheesta riippumatta. Vaikka virheet ovat luonnollinen osa matematiikkaa, niistä voi olla vaikeaa päästä eroon ja ne voivat muuttua virhekäsityksiksi.

Kärki (2015) havaitsi opettajaopiskelijoita tutkiessaan virheitä esiintyvän geometrian käsitteiden määrittelyssä esimerkiksi terminologiassa, puutteellisina tietoina tai virheellisenä tulkinnassa käsitteitä määritellessä. Hänen mukaansa virheelliset vastaukset johtuivat esimerkiksi vähäisestä osaamisesta määritelmiä kirjoittaessa tai termien sekoittuessa keskenään. Myös virheellisissä vastauksissa havaitut puutteelliset tiedot saattoivat johtua ulkoa opetellun asian väärin muistamisesta tai vastaesimerkin keksimisen puutteesta.

Tuohilammen (2017) mukaan matemaattisten taitojen kehittymistä hidastavat myös vaatimukset siistin ja virheettömän vastauksen kirjoittamisesta alusta alkaen. Hänen mukaansa oppilaat eivät lähde kokoamaan tietoja, hahmottelemaan kuvia tai prosessoimaan ajattelua, mikäli he epäilevät ratkaisun olevan virheellinen. Matematiikassa on vahvasti läsnä pyrkimys oikeaan ratkaisuun ja virheelliset ratkaisut tai välivaiheet saatetaan pyyhkiä pois tai jättää kokonaan sanomatta.

3 MATEMAATTINEN TAUSTA

Tässä osiossa tarkastellaan tähän tutkimukseen hyödyllistä matemaattista taustaa. Esitellään seuraavaksi työssä käytettävät merkinnät ja tarvittavat esitiedot. Tutkielma keskittyy taso- ja avaruusgeometriaan, ja tason $\mathbb{R}^2$ sekä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteitä merkitään isoilla kirjaimilla A, B, C, … Tästä poiketen luvussa 3.4 isoilla kirjaimilla A, B ja C merkitään väitelauseita. Pienillä kirjaimilla a, b, c, … merkitään asiayhteyden mukaan kappaleiden sivujen pituuksia tai tuntemattomia lukuja. Merkintätapa $A*B*C$ kuvaa pisteiden järjestystä, missä piste B on pisteiden A ja C välissä sekä piste B ei ole piste A eikä piste C. Pisteiden A ja B kautta kulkevaa suoraa merkitään kirjainyhdistelmällä AB.

Seuraavat esitietoina vaadittavat määritelmät ovat Kurittu ym. (2006) *Geometria*-luentomonisteesta.

Määritelmä (jana ja puolisuora): Olkoot A ja B eri pisteitä.

1) Jana $\overline{AB}$ on pisteiden A ja B välinen joukko

$$AB := \{C \text{ on piste} \mid A * C * B \text{ tai } C = A \text{ tai } C = B\}.$$

2) Puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on pisteestä A pisteen B suuntaan oleva joukko

$$\overrightarrow{AB} = AB \ \cup \{C \text{ on piste} \mid A * B * C\}.$$

Määritelmä (kulma): Kulma $\measuredangle ABC$ muodostuu puolisuorista $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$.

Määritelmä (yhdensuuntaisuus): Olkoot k ja l suoria. Suorat ovat yhdensuuntaiset, jollei niillä ole pistettä, jonka kautta molemmat kulkevat. Merkintätapa $k \parallel l$ tarkoittaa yhdensuuntaisia suoria, muulloin merkitään $k \nparallel l$.

Muut mahdollisesti tarvittavat esitiedot ja merkintätavat on mainittu alaluvuittain.

3.1 Geometrian historiaa

Tässä alaluvussa perehdytään lyhyesti geometrian historiaan käyttäen päälähteinä Matti Lehtisen (2014) luentomonistetta *Matematiikan historia* sekä Carl Boyerin (1994) *Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia osat I ja II*.

Geometrian historia voidaan jäljittää muinaiskulttuureihin kuten Egyptin ja Mesopotamian matematiikkaan ja se onkin yksi varhaisimmista tutkimuksen aloista, joita ihmisyhteiskunnat ovat harjoittaneet. Tätä ennen geometrisia muotoja ja kuvioita on havaittu jo kivikautisessa keramiikassa ja tekstiileissä koristekuvioiden merkeissä. Näitä kuvioita on hyödynnetty esteettisissä tarpeissa sekä rituaalisessa merkityksellisyydessä. Geometrian kauneus perustuukin erilaisten muotojen välisiin suhteisiin, joita voidaan pitää visuaalisen taiteen perustana. Sanan geometria historia juontaa juurensa maan mittaamiseen, ja sen tiedetäänkin vastanneen ihmisten tarpeisiin maanomistuksessa ja viljelyksessä. Geometria onkin matematiikan osa-alueista käytännöllisin ja sen ymmärtäminen antaa tarvittavia tietoja ja taitoja, joista on hyötyä monilla muilla aloilla.

Egyptiläisten tietämys geometriasta on ollut varsin heikkoa, mutta *Rhindin papyruksesta* on löydetty erilaisia geometrian likiarvomenetelmiä esimerkiksi piin arvolle ja nelikulmion pinta-alalle. *Moskovan papyruksesta*, joka on peräisin samalta ajalta kuin Rhindin papyrus, löytyy ratkaisutapa katkaistun neliöpohjaisen pyramidin tilavuudelle kaavalla $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, joka on tänäkin päivänä käytössä.

Toisin kuin egyptiläiset, babylonialaiset tunsivat Pythagoraan lauseen sisällön ja he ovat osanneet laskea kateetin pituuden. Babylonialaisten laskutoimitukset Pythagoraan lauseelle ovat aritmeettisia, ja he ovatkin kehitelleet seksagesimaalilukuja sisältävän savitaulun *Plimton 322*. Taulussa jäljellä olevat luvut liittyvät lukuteoriaan ja todennäköisesti trigonometrian alkeisiin.

Noin puoli vuosituhatta ennen ajanlaskumme alkua matematiikka oli kehittynyt omaksi tieteenalakseen osana kreikkalaista kulttuuria. Eukleideen alkeet, jotka on kirjoitettu noin 300 vuotta ennen ajanlaskun alkua, ovat geometrian osalta tärkeimpiä teoksia. Tämän jälkeen geometriaa ovat kehittäneet esimerkiksi keskiajalla vaikuttaneet Al-Khwarizmi ja Omar, joiden työt keskittyivät täydentämään antiikin Kreikan matematiikkaa.

Galileo Galilei kehitti 1600-luvun vaihteessa geometrisen harpin, joka on osoittautunut historiassa erityisen käyttökelpoiseksi. Galileon harppi eroaa nykypäivänä käytettävästä harpista tankoihin kaiverretuilla asteikoilla, joiden avulla voidaan esimerkiksi jakaa annettu jana viiteen osaan. François Viète todisti Apolloniuksen ongelman, missä kolmea ympyrää sivuaa yksi ympyrä, mahdolliseksi toteuttaa harppi-viivain-konstruktiolla. Tämä konstruktio oli yksi Vièten hienoimmista saavutuksista, ja myöhemmin konstruktiot kiinnostivat esimerkiksi René Descartesia, jota pidetään analyyttisen geometrian perustajana. Toisena tärkeänä analyyttisen geometrian kehittäjänä pidetään Pierre de Fermatia, joka työskenteli Descartesista tietämättä, muttei julkaissut teoksiaan elinaikanaan.

Nykypäivän geometriaan on suuresti vaikuttanut 1800-luvun loppupuolella elänyt David Hilbert. Aksiomaattisen geometrian pohjana toimivat hänen 22 aksioomansa, jotka pyrkivät vastaamaan Eukleideen piilossa oleviin oletuksiin. Lisäksi hän esitti 23 avointa ongelmaa, jotka sisälsivät pohdintoja myös geometriasta. Nämä ongelmat työllistävät matematiikoita vielä tänäkin päivänä.

3.2 Kuvioiden määritelmiä

Tässä tutkimuksessa on olennaista tuntea tiettyjä matemaattisia termejä. Esitellään tässä alaluvussa tutkimuksen ja analyysin ymmärtämisen kannalta tärkeimmät termit ja niiden määritelmät. Termien määritelmät ovat Kalle Väisälän (1959) *Geometria*-teoksesta, Kurittu ym. (2006) *Geometria*-luentomonisteesta ja John M. Leen (2010) *Axiomatic Geometry* -teoksesta.

Vaikka erilaiset kuviot ja kappaleet ovat universaalisti tunnettuja, niin niiden määritelmissä on joskus hieman poikkeavuuksia. Tässä alaluvussa esitellään yllä mainittujen teosten käyttämiä määritelmiä.

3.2.1 Tasokuviot

Tasokuviot ovat kaksiulotteisessa xy-koordinaatistossa sijaitsevia kuvioita.

Monikulmio: Monikulmio on yhdistelmä n kappaletta erillisiä janoja jollekin $n \geq 3$, ja sen tulee täyttää seuraavat ehdot.

i) On olemassa n kappaletta erillisiä pisteitä $A_{1,} \ldots, A_n$ siten, että annetut janat ovat $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, …, $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

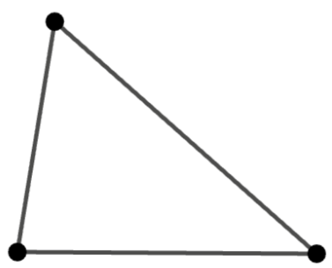
ii) Kaksi janoista leikkaavat vain, jos ne jakavat saman päätepisteen. Lisäksi leikkaavat janat eivät ole yhdensuuntaisia.

Nyt ehdosta i) seuraa, että monikulmion tulee olla suljettu, kuten esimerkiksi kuviossa 1. Suljettu tarkoittaa sitä, että kuvion murtoviiva loppuu samaan pisteeseen, mistä se alkoi. Kuvio 6 on esimerkki ei-suljetusta kuviosta, joka ei tällöin ole monikulmio.

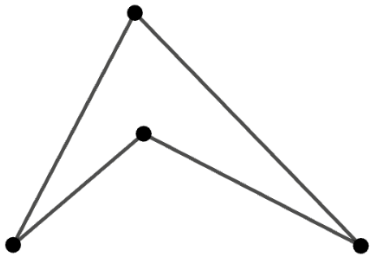
Ehto ii) rajaa pois tilanteet, joissa jotkin janat leikkaisivat siten, että monikulmiosta tulisi kaksiosainen, kuten Kuviossa 4. Tämän ehdon nojalla ei myöskään ole mahdollista, että monikulmiossa useampi kuin kaksi pistettä olisi samalla suoralla.

Esimerkiksi seuraavat ovat monikulmioita:

Kuvio 1

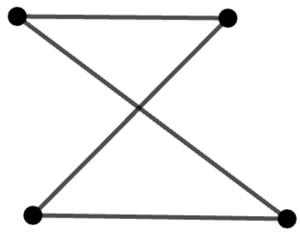


Kuvio 2

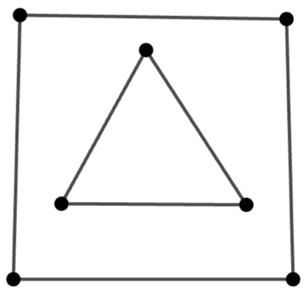


Kun taas seuraavat eivät ole monikulmioita:

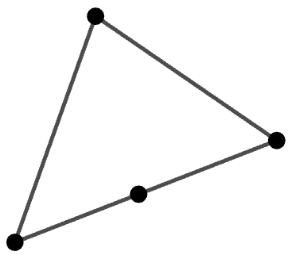
Kuvio 3



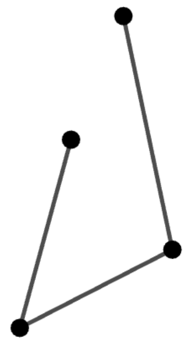
Kuvio 4



Kuvio 5



Kuvio 6



Kuvio 3 ei ole monikulmio ehdon ii) nojalla, sillä nyt kaksi janaa, jotka eivät ole yhdensuuntaisia, leikkaavat muualla kuin janojen päätepisteessä.

Kuvio 4 ei ole monikulmio ehdon i) nojalla, sillä nyt erillisistä pisteistä ei muodostu murtoviivaa, joka muodostaisi suljetun kuvion.

Kuvio 5 ei ole monikulmio ehdon ii) nojalla, sillä ehto ii) sulkee pois tapaukset, joissa useampi kuin kaksi pistettä ovat samalla suoralla.

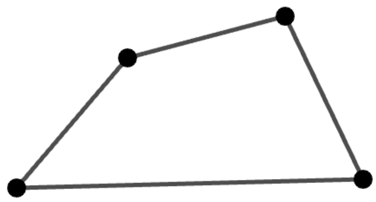
Kuvio 6 ei ole monikulmio ehdon i) nojalla, sillä kuvio ei ole suljettu, eli sen alku- ja päätepiste eivät sijaitse samassa pisteessä.

Monikulmiossa on aina yhtä monta kärkeä kuin sivua, joiden mukaan monikulmioiden nimeäminen tapahtuu. Monikulmion kulmien yhteenlaskettu summa voidaan laskea kaavalla $(n\text{-}2) \cdot 180°$, missä n on kulmien määrä.

Määritelmät esitellään usein hieman eri tavoin. Esimerkiksi yläkoulun matematiikan oppikirjassa Ääreton 7 monikulmiota kuvaillaan seuraavasti: ”Monikulmio on suljettu itseään leikkaamaton murtoviiva.” Tämä sisältää kattavasti monikulmion ehdot, mutta jos oppilaalle ei ole selvää, mitä tarkoittaa suljettu tai itseään leikkaamaton murtoviiva, voi syntyä helposti virhekäsityksiä. Virhekäsitysten pohjalta voi syntyä mielikuvia, että Kuvion 3 ja Kuvion 4 kaltaiset kuviot olisivat myös monikulmioita.

Nelikulmio: Monikulmio, jolla on neljä kärkeä.

Kuvio 7

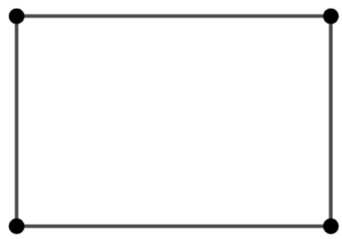


Nyt monikulmion määrittämien ehtojen nojalla nelikulmion mitkään kolme pistettä eivät voi sijaita samalla suoralla, eikä nelikulmion janat leikkaa toisiaan kuin toistensa päätepisteissä. Nelikulmion kulmien summa, kun $n = 4$, on

$$(n\text{-}2) \cdot 180° = (4\text{-}2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°.$$

Suorakulmio: Nelikulmio, jonka molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhdensuuntaisia ja sen kaikki kulmat ovat suoria, eli 90 astetta.

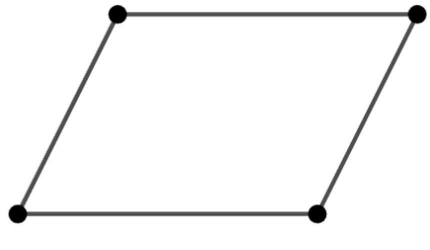
Kuvio 8



Nyt ehdosta, että suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia seuraa, että vastakkaiset sivut ovat silloin myös yhtä pitkiä.

Suunnikas: Nelikulmio, jonka molemmat vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia.

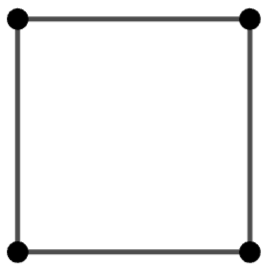
Kuvio 9



Koska suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia, niin siitä seuraa, että niiden tulee olla myös yhtä pitkiä.

Neliö: Suunnikas, jonka vierekkäiset sivut ovat yhtä pitkiä, ja jossa on ainakin yksi suora kulma.

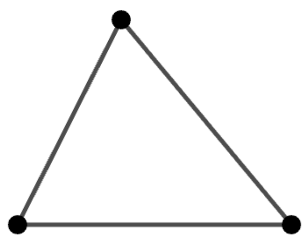
Kuvio 10



Suunnikkaan ominaisuuksien nojalla vierekkäisten sivujen ollessa yhtä pitkiä seuraa, että kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Lisäksi kun neliöllä on ainakin yksi suora kulma, ja sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia, niin jokaisen kulman täytyy olla suora kulma.

Kolmio: Monikulmio, jolla on kolme kärkeä.

Kuvio 11

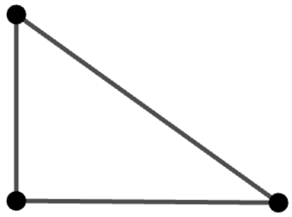


Kolmion kulmien summa, kun $n = 3$ on

$$(n\text{-}2) \cdot 180° = (3\text{-}2) \cdot 180° = 1 \cdot 180° = 180°.$$

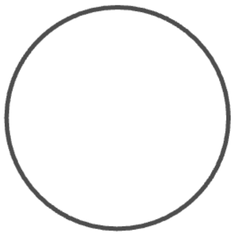
Suorakulmainen kolmio: Kolmio, jonka yksi kulma on suora eli 90 astetta.

Kuvio 12



Ympyrä: Ympyräviivan, eli kehän, rajoittama tason osa. Ympyräviivan muodostaa piste, kun sitä kierretään keskipisteen ympäri pysyen koko ajan samalla etäisyydellä keskipisteestä.

Kuvio 13



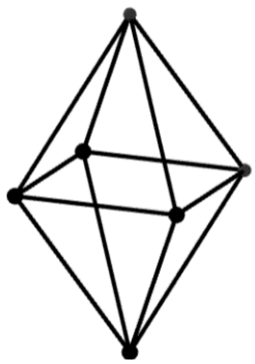
3.2.2 Avaruuskappaleet

Avaruuskappaleet ovat kolmiulotteisessa *xyz*-koordinaatistossa olevia kappaleita.

Monitahokas: Kappale, jonka pinta koostuu monikulmioista.

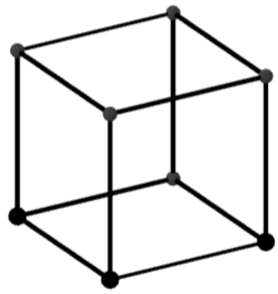
Monikulmiot ovat monitahokkaan tahkoja, monikulmioiden sivut ovat sen särmiä ja kärjet sen kärkiä. Monitahokkaan lävistäjäksi kutsutaan kahden sellaisen kärjen yhdysjanaa, jotka eivät ole samalla tahkolla.

Kuvio 13



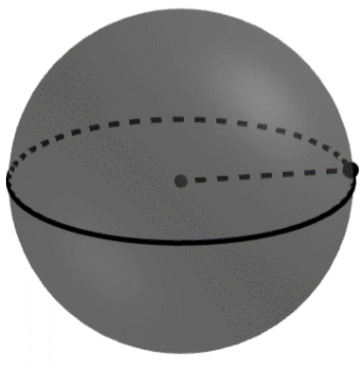
Kuutio: Monitahokas, jolla on kuusi tahkoa, jotka ovat neliöitä.

Kuvio 14



Pallo: Puoliympyrän kaari pyörähtäessään halkaisijansa ympäri muodostaa pallopinnan. Puoliympyrän keskipiste on pallopinnan keskipiste, ja keskipisteen ja pallopinnan yhdistysjana on säde.

Kuvio 15



3.3 Pinta-ala

Tämän alaluvun tiedot ovat John M. Leen (2010) *Axiomatic Geometry* -teoksesta. Alaluvussa 3.3.4 on hyödynnetty myös Jasmin Valkosen (2021) pro-gradu tutkielmaa aiheesta *Pinta-ala euklidisessa tasogeometriassa*.

Pinta-ala tarkoittaa jonkin alueen tai pinnan kokoa. Yksinkertaisimmillaan se on hyvinkin helppoa laskea, mutta käsite on monimutkainen määritellä. Yksinkertaisimpia laskettavia pinta-aloja ovat suorien rajaamien alueiden pinta-alat, mutta esimerkiksi käyrien väliseen pinta-alaan vaaditaan jo integrointitaitoja.

Tässä tutkimuksessa esiintyvät pinta-alalaskut pitäytyvät yksinkertaisissa tasokuvioissa. Tällaisia ovat neliöt, suorakulmiot, suunnikkaat ja kolmiot.

Ennen pinta-alojen määritelmien esittelyä esitellään niiden pohjana toimiva euklidinen postulaatti, sekä määritelmissä käytettävät merkinnät pinta-alafunktiosta.

Merkintätavat: Kuvion $\mathcal{R}$ pinta-alafunktio: $\alpha(\mathcal{R})$

Neliön pinta-alafunktio sivun pituudella x: $s(x)$

Euklidinen pinta-alan postulaatti. On olemassa ainutlaatuinen pinta-alafunktio α, jolle pätee: $\alpha(\mathcal{R}) = 1$ aina kun $\mathcal{R}$ on neliö sivun pituudella 1.

Euklidinen pinta-alan postulaatti on sovittu pinta-alafunktio, johon kaikki pinta-alalaskut pohjautuvat. Yksinkertaistettuna pinta-alaa voi postulaatin nojalla selittää siten, että miten monta neliötä kuvioon mahtuu.

Pinta-alalle pätee seuraavat postulaatit:

i) Jos R_1 ja R_2 ovat yhteneviä monikulmioita, niiden pinta-aloille pätee
$$\alpha(\mathcal{R}_1) = \alpha(\mathcal{R}_2).$$

ii) Jos $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ ovat erillisiä monikulmioita, niiden pinta-aloille pätee
$$\alpha(\mathcal{R}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{R}_n) = \alpha(\mathcal{R}_1) + \cdots + \alpha(\mathcal{R}_n).$$

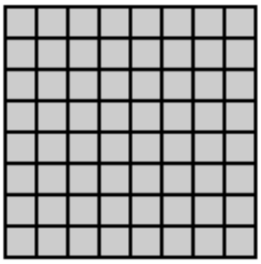
Neliön pinta-ala riippuu sen sivun pituudesta. Nyt Euklidisen pinta-alan postulaatin nojalla pätee seuraava lemma.

Lemma 3.3 Jos $x < y$, niin $s(x) < s(y)$.

Todistus. Aloitetaan neliöllä, jonka sivun pituus on y. Valitaan jokaiselta neljältä sivulta piste x. Nyt voidaan muodostaa pienempi neliö, jonka sivun pituus on x. Täten neliön $y \times y$ pinta-ala yhtä suuri kuin $x \times x$ neliön, lisättynä kolme aidosti positiivista nelikulmiota.

Neliön pinta-alan laskemista varten määritellään myös seuraava lemma.

Lemma 3.33 Olkoon x mikä tahansa positiivinen reaaliluku. Jos n on positiivinen kokonaisluku, niin $s(nx) = n^2 s(x)$.

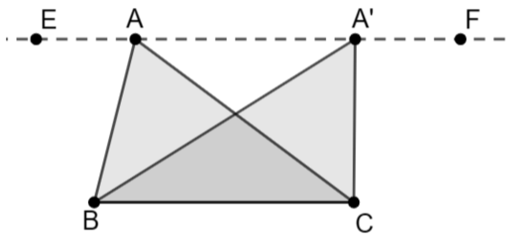


Kuvassa $nx \times nx$ -neliö. Kuva John M. Leen (2010) teoksesta.

Todistus. Löytyy John M. Leen (2010) teoksesta.

Tulevia todistuksia varten määritellään seuraus kolmion liu'uttamisesta.

Lemma 3.34 (Kolmion liu'utus) Olkoon kolmio ΔABC ja kolmio $\Delta A'BC$ kolmioita, joilla on yhteinen sivu $\overline{BC}$ siten, että sekä A että A' ovat samalla suoralla, joka on yhdensuuntainen suoran BC kanssa.



Tällöin α(ΔABC) = α(ΔA′BC).

Todistus perustuu Eukleideen postulaattin ja sen todistukseen.

Todistus. Olkoot ΔABC ja $\Delta A'BC$ kolmioita, joille pätee $AA' \parallel BC$. Olkoon piste E pisteen B kautta piirretyn suoran ja suoran AA' leikkauspiste sekä piste F pisteen C kautta piirrettyyn suoran ja suoran AA' leikkauspiste. Suunnikkaat $EBCA$ ja $A'BCF$ ovat yhtä suuret, koska suunnikkailla on yhteinen sivu $\overline{BC}$ sekä vastakkaiset sivut ovat samalla suoralla. Suunnikkaan lävistäjä jakaa suunnikkaan kahteen yhtenevään osaan, jolloin ΔABC on puolet suunnikkaasta $EBCA$ ja $\Delta A'BC$ on puolet suunnikkaasta $A'BCF$. Täten kolmiot ovat yhtenet. Jolloin pinta-alan postulaatin ominaisuuksien i) nojalla kolmioiden pinta-alat ovat yhtä suuret.

3.3.1 Neliö

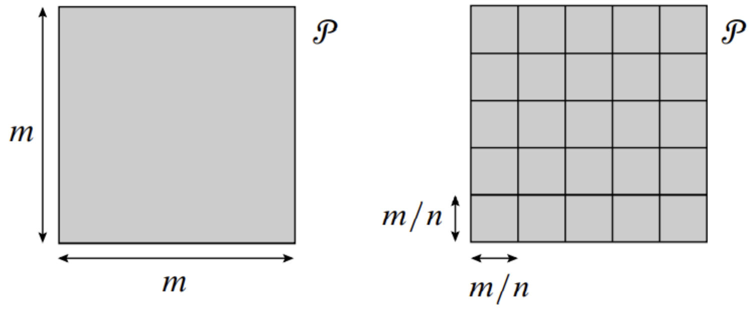
Neliön pinta-alalle pätee seuraava lause:

Lause 3.3.1 (Neliön pinta-ala) Neliön pinta-ala sivun pituudella x on x^2.

Todistus. Väite on, että $s(x) = x^2$ kaikille positiivisille reaaliluvuille x. Tehdään todistus kolmelle eri tapaukselle.

1. x on positiivinen kokonaisluku.
   Tässä tapauksessa $x = n$. Nyt Lemman 3.33 ja euklidisen postulaatin nojalla pätee
   $$s(n) = s(n \cdot 1) = n^2 s(1) = n^2.$$
2. x on positiivinen rationaaliluku.

Olkoon $x = \frac{m}{n}$, missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Olkoon P mikä tahansa neliö sivun pituudella m, ja osoitetaan, että $s\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ osittamalla neliö kahdella eri tavalla.



Kuvassa vasemmalla $m \times m$ -neliö ja oikealla n-kokoisiin osiin jaettu $\frac{m}{n}$ -neliö. Kuvat ovat John M. Leen (2010) teoksesta.

Ensimmäisen tapauksen nojalla $\alpha(P) = s(m) = m^2$. Toisaalta voidaan ajatella P ositettuna pienempiin n^2 neliöihin sivun pituudella $\frac{m}{n}$. Tällöin neliön sivun pituudeksi voidaan merkitä $m = n\left(\frac{m}{n}\right)$ ja Lemman 3.33 nojalla

$$\alpha(P) = s\left(n\left(\frac{m}{n}\right)\right) = n^2 s\left(\frac{m}{n}\right).$$

Ratkaistaan $s\left(\frac{m}{n}\right)$ yhtälöstä $s(m) = n^2 s\left(\frac{m}{n}\right)$, kun $m = n\left(\frac{m}{n}\right)$.

$$s(m) = n^2 s\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$s\left(n\left(\frac{m}{n}\right)\right) = n^2 s\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$n^2\left(\frac{m}{n}\right)^2 = n^2 s\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$s\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Siispä neliön pinta-alan laskukaava pätee.

3. x on mikä tahansa positiivinen reaaliluku.

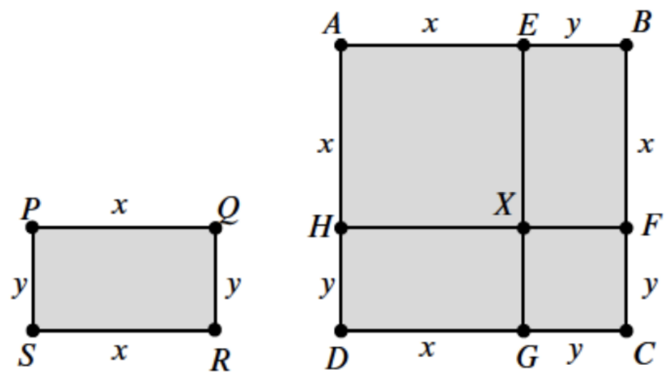
Nyt on kolme vaihtoehtoa: $s(x) < x^2$, $s(x) > x^2$ tai $s(x) = x^2$. Oletetaan ensin, että $s(x) < x^2$. Koska $s(x)$ ja x ovat positiivisia, pätee $\sqrt{s(x)} < x$. Täten voidaan valita jokin rationaaliluku r siten, että $\sqrt{s(x)} < r < x$ ja siten $s(x) < r^2 < x^2$. Tapauksen 2 nojalla $s(r) = r^2$, joten tästä seuraa, että $s(x) < s(r)$. Toisaalta, kun $r < x$ pätee $s(r) < s(x)$ Lemman 3.3 nojalla. Tämä on ristiriita, joten $s(x) < x^2$ ei voi päteä. Todistus menee vastaavasti toiseen suuntaan $s(x) > x^2$. Siispä ainut vaihtoehto on $s(x) = x^2$.

3.3.2 Suorakulmio

Suorakulmion pinta-alalle pätee seuraava lause:

Lause 3.3.2 (Suorakulmion pinta-ala) Suorakulmion pinta-ala on minkä tahansa vierekkäisten sivujen tulo.

Todistus. Olkoon $PQRS$ suorakulmio sivujen pituuksilla x ja y. Täytyy osoittaa, että $\alpha(PQRS) = xy$. Kaikki suorakulmiot, joilla on samat sivujen pituudet, ovat yhteneviä. Siispä riittää laskea pinta-ala jollekin suorakulmiolle samoilla sivujen pituuksilla.



Kuvassa vasemmalla suorakulmio $PQRS$, ja oikealla se kasvatettuna sivujen pituuksien avulla neliöksi. Kuva John M. Leen (2010) teoksesta.

Olkoon $ABCD$ neliö sivun pituudella $x + y$. Valitaan pisteet E, F, G, H siten, että $\overline{AE} = \overline{DG} = \overline{AH} = \overline{BF} =$ x, ja olkoon X piste, jossa $\overline{EG}$ ja $\overline{HF}$ leikkaavat.

Tämä jakaa neliön $ABCD$ neliöön $AEXH$ sivun pituudella x, neliöön $XFCG$ sivun pituudella y, ja kahteen suorakulmioon $EBFX$ ja $HXGD$, joiden sivujen pituudet ovat x ja y. Nyt $\alpha(ABCD)$ on sama kuin $(x+y)^2$ Lauseen 3.3.1 nojalla. Toisaalta pätee myös seuraava summa:

$$\alpha(ABCD) = x^2 + y^2 + \alpha(EBFX) + \alpha(HXGD) = x^2 + y^2 + 2\alpha(HXGD).$$

Nyt kun ratkaistaan yhtälö $\alpha(HXGD)$ suhteen, saadaan:

$$\alpha(HXGD) = \frac{1}{2}(x+y)^2 - x^2 - y^2 = xy.$$

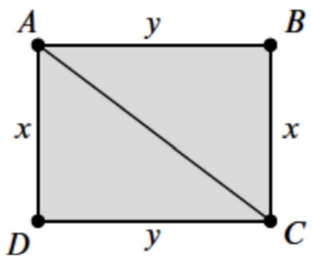
Siispä väite pätee.

3.3.3 Kolmio

Esitellään ensin suorakulmaisen kolmion pinta-alan kaava ja todistus.

Lause 3.3.4 (Suorakulmaisen kolmion pinta-ala) Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on puolet sen kateettien tulosta.

Todistus. Olkoon $ABCD$ suorakulmio sivujen pituuksilla x ja y.



Kuva John M. Leen (2010) teoksesta.

Lävistäjä $\overline{AC}$ jakaa suorakulmion $ABCD$ kahteen yhtenevään kolmioon, joiden kateettien pituudet ovat x ja y. Siten $\alpha(ABCD)$ on yhtä suuri kuin kumpi tahansa kolmioista kaksinkertaisena. Koska $\alpha(ABCD) = xy$, niin kummankin kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}xy$, kuten väitettiin.

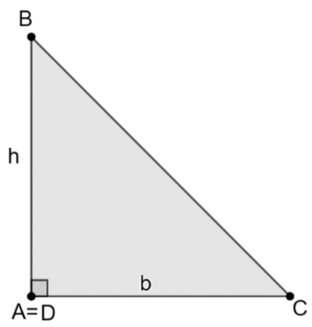
Minkä tahansa kolmion pinta-ala lasketaan samalla tavalla kuin suorakulmaisen kolmion pinta-ala. Sen todistus on kuitenkin hieman erilainen.

Lause 3.3.41. (Kolmion pinta-ala) Kolmion pinta-ala on puolet mikä tahansa kanta kerrottuna vastaavalla korkeudella.

Todistus. Kannan ja korkeuden valinnalla ei ole merkitystä, sillä pinta-ala pysyy aina samana.

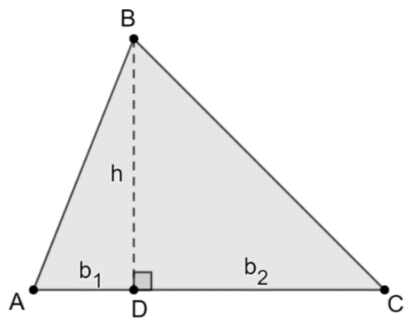
Olkoon kolmio ΔABC. Olkoon piste D samalla suoralla pisteiden A ja C kanssa siten, että kulma $\measuredangle CDB$ muodostaa suoran kulman. Nyt pisteen D sijainnille on kolme vaihtoehtoa:

1. Jos $A = D$.



   Tällöin kolmio ΔABC on suorakulmainen kolmio, ja Lauseen 3.3.4 nojalla pinta-ala on $\frac{1}{2}bh$.

2. Jos pätee $A*D*C$.

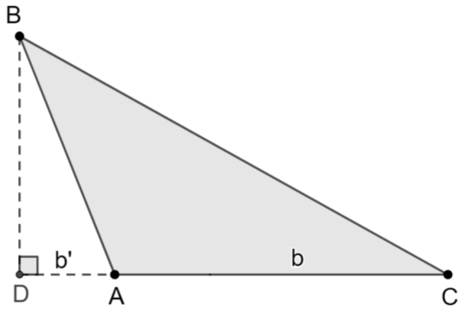


   Olkoon $\overline{AD} = b_1$ ja $\overline{DC} = b_2$. Tiedetään, että $\alpha(ABC) = \alpha(BDA) + \alpha(BDC)$. Nyt suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat ovat $\alpha(BDA) = \frac{1}{2}b_1h$ ja $\alpha(BDC) = \frac{1}{2}b_2h$. Siispä nyt saadaan

   $\alpha(ABC) = \alpha(BDA) + \alpha(BDC) = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h.$

   Otetaan $\frac{1}{2}h$ yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$. Nyt $\overline{AC}$=$b_1 + b_2$=b, joten siispä $\alpha(ABC)$= $\frac{1}{2}bh$ 1.

3. Jos pätee $D*A*C$.



Olkoon sivu $\overline{AD} =$ b’ Lauseen 3.3.4 nojalla tiedetään, että suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat $\alpha(BDC)= \frac{1}{2}(b' + b)h$ ja $\alpha(BDA)= \frac{1}{2}b'h$. Nyt ison kolmion pinta-ala on pienempien kolmioiden summa, eli $\alpha(BDA) + \alpha(ABC) = \alpha(BDC)$. Sijoitetaan tiedetyt pinta-alat ja ratkaistaan $\alpha(ABC)$, jolloin saadaan $\alpha(ABC)= \frac{1}{2}(b' + b)h - \frac{1}{2}b'h= \frac{1}{2}bh$. Siispä $\alpha(ABC)= \frac{1}{2}bh$.

Siispä on todistettu, että minkä tahansa kolmion pinta-ala on puolet kannan ja korkeuden tulosta. Tästä tuloksesta seuraa myös Lemma 3.34.

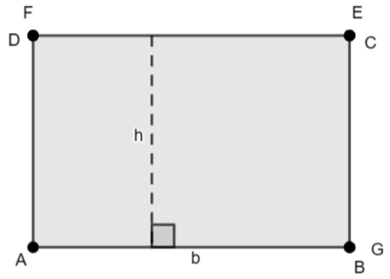
3.3.4 Suunnikas

Suunnikkaan pinta-alalle pätee seuraava lause:

Lause 3.3.3. (Suunnikkaan pinta-ala) Suunnikkaan pinta-ala on minkä tahansa sivun pituus kerrottuna vastaavalla korkeudella.

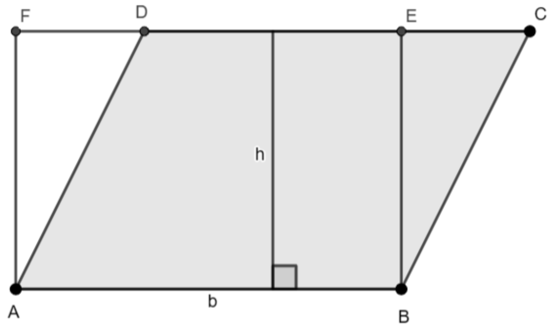
Todistus. Olkoon suunnikas $ABCD$. Nyt piste F ja E sijaitsevat samalla suoralla, kuin pisteet D ja C. Pisteen F ja E sijainnille on kolme eri vaihtoehtoa.

1. Piste $F = D$ ja $E = C$.



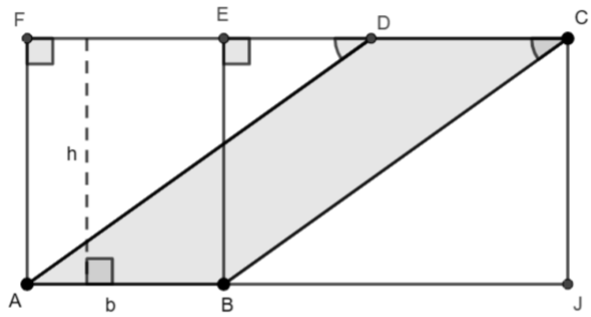
Tilanteessa missä piste $F = D$ ja $E = C$, havaitaan suunnikkaan $ABCD$ olevan yhtenevä suorakulmion $AGEF$ kanssa.

2. Pistejärjestys $F*D*E*C$.



Kuviossa esiintyy suunnikas $ABCD$, puolisuunnikas $ABCF$, suorakulmio $ABEF$ sekä kolmiot ΔADF ja ΔBCE. Suorat AB ja FC ovat yhdensuuntaiset, ja suoralle FC pätee pisteiden järjestys $F*D*E*C$. Myös suorat AD ja BC ovat yhdensuuntaiset. Jana $\overline{FA}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan. Myös jana $\overline{BE}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan. Ilmaistaan suunnikas puolisuunnikkaan ja kolmioiden avulla seuraavasti: $ABCD = \Delta ABCF - \Delta ADF$. Samalla tavalla voidaan ilmaista suorakulmio $ABEF = ABCF - \Delta BEC$. Nyt kolmiot ΔADF ja ΔBCE ovat yhtenevät KKS-säännön nojalla, joten suunnikas ja suorakulmio ovat yhtä suuret.

3. Pistejärjestys $F{*}E{*}D{*}C$.



Kuviossa esiintyy suorakulmio $AJCF$, suorakulmio $ABEF$, suunnikas $ABCD$ sekä kolmiot ΔBJC, ΔEBC ja ΔADF. Suorille pätee $AJ \parallel FC$ sekä $AF \parallel CJ$. Kolmiot ΔBJC sekä ΔBCE ovat yhtenevät SSK-säännön nojalla. Samoin kolmiot ΔADF sekä ΔBCE ovat yhtenevät SKK-säännön nojalla. Suorakulmio $ABEF$ saadaan kuviosta seuraavasti:

$ABEF = AJCF - \Delta BJC - \Delta BCE$

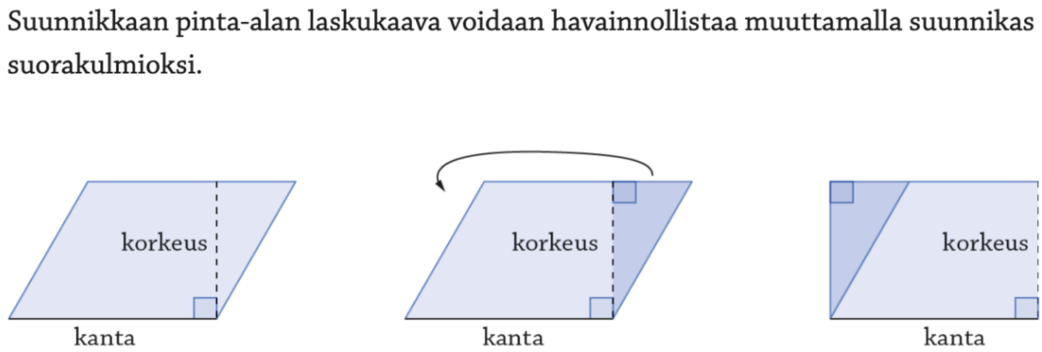
Samoin suunnikas voidaan ilmaista seuraavasti:

$ABCD = AJCF - \Delta BJC - \Delta ADF.$

Nyt huomataan, että suunnikas $ABCD$ sekä suorakulmio $ABEF$ ovat yhtä suuret.

Nyt on todistettu, että minkä tahansa suunnikkaan pinta-ala voidaan laskea samalla tavalla kuin suorakulmion pinta-ala Lauseessa 3.3.2.

Tapaus 3 on tilanne, joka usein jää huomiotta. Sitä ei voi todistaa tapauksen 2 kaltaisesti, joka kuitenkin on yleinen tapa, jolla suunnikkaan pinta-alan laskukaavaa havainnollistetaan. Seuraavan kuvan havainnollistus on yläkoulun matematiikan oppikirjasta Ääretön 7:



Tässäkin suunnikkaan pinta-alan laskukaavaa havainnollistetaan ainoastaan tapauksen 2 kaltaisesti. Tämä tapa ei kuitenkaan toimi tapaukselle 3.

3.4 Pythagoraan lause

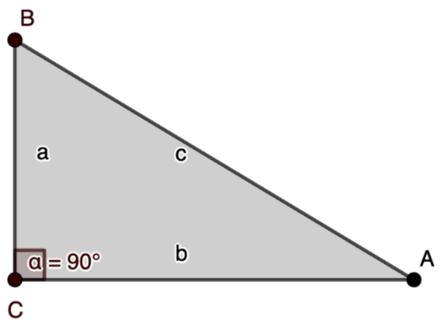
Tässä alaluvussa on hyödynnetty John M. Leen (2010) teosta *Axiomatic Geometry.*

Pythagoras (570–490 eKr.) oli kreikkalainen filosofi ja matemaatikko, joka vaikutti merkittävästi matematiikassa, astronomiassa ja musiikin teoriassa. Hänen opettajakseen on sanottu Pherekydestä. Lisäksi kaksi filosofia, jotka eivät suoranaisesti opettaneet Pythagorasta, mutta heillä oli suuri vaikutus häneen ja hänen työhönsä, olivat Thales ja Anaximander. Pythagoraan töistä ei voida varmaksi sanoa, mitkä ovat hänen tekemiään ja mitkä hänen koulukuntansa tekemiä. Hänen koulukuntansa harjoittivat kommunalismia ja he työskentelivät salassa, mikä teki haastavaksi tunnistaa, kenen kädenjälkeä mikäkin työ oli.

Yksi Pythagoraan merkittävimmistä löydöksistä on Pythagoraan lause. Se ei tosin välttämättä ole Pythagoraan keksimä, sillä kyseinen lause oli tunnettu jo tuhat vuotta aiemmin Babyloniassa. On kuitenkin uskottu, että Pythagoras oli ensimmäinen, joka todisti kyseisen lauseen olemassaolon. Vaikka Pythagoraan uskotaan olevan ensimmäinen lauseen todistuksen tehnyt henkilö, niin aikaisin täysin säilynyt Pythagoraan lauseen todistus on kuitenkin Eukleideen todistus hänen teoksessaan Elements.

Pythagoraan lause koskee suorakulmaisia kolmioita. Se antaa kaavan hypotenuusan ja kateettien suhteelle.

Lause 3.4 (Pythagoras) Olkoon ΔABC kolmio, missä kulma $\measuredangle ACB$ on suora kulma ja $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ ja $c = \overline{AB}$.



Tällöin $a^2 + b^2 = c^2$.

Esimerkki 1. Olkoot suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet $a = 2$ ja $b = 3$. Mikä on hypotenuusan pituus?

Ratkaisu: Ratkaistaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$2^2 + 3^2 = c^2$$

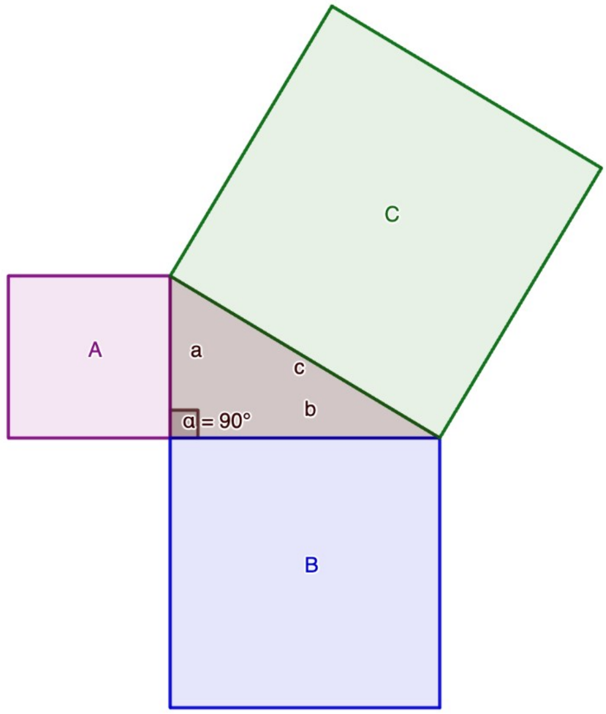
$$4 + 9 = c^2$$

$$c^2 = 13$$

$$c^2 = \sqrt{13}$$

Siispä hypotenuusan pituus on $\sqrt{13}$.

Pythagoraan lauseessa siis kateettien neliöiden summa on sama, kuin hypotenuusan neliö. Kateettien ja hypotenuusan neliöt voidaan esittää pinta-aloina, mikä havainnollistaa lausetta. Pinta-aloina tilanne näyttäisi seuraavalta:



Nyt jos kateettien neliöitä A ja B leikattaisiin ja muotoiltaisiin uudelleen, niiden pinta-aloista saataisiin koottua neliö, joka on hypotenuusan neliön C kokoinen.

Yllä esitelty tapa on Eukleideen tapa todistaa lause. Ensimmäisessä kirjassaan hän esitti lauseen seuraavasti:

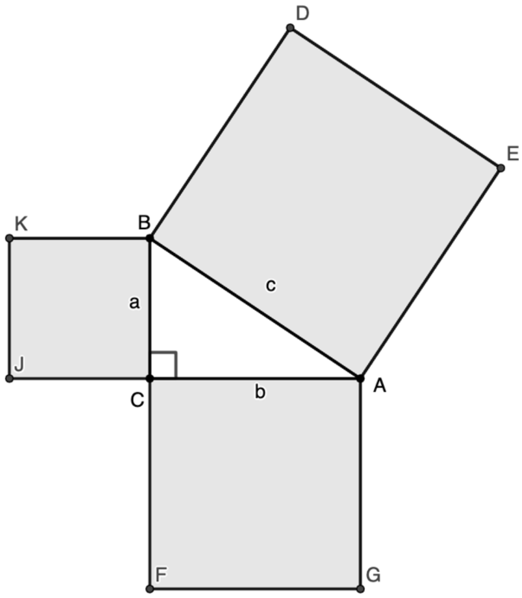
Lause 3.41 Suorakulmaisissa kolmioissa hypotenuusan neliö on yhtä suuri kuin kateettien neliöiden summa.

Pythagoraan lauseelle on olemassa lukemattomia määriä todistuksia. Eukleideen tekemien kahden todistuksen jälkeen uusia todistuksia on luotu satoja. Esimerkiksi matemaatikko Elisha Loomis on kirjassaan löytänyt jopa 370 erilaista todistusta. Esitellään seuraavaksi eräs todistus. Esiteltävä todistus läheisesti muistuttaa Eukleideen tekemää todistusta. Ero alkuperäiseen on siinä, että Eukleideella ei ollut käytössään numeroita, vaan hän on käyttänyt pinta-alojen yhtäsuuruutta. Tässä todistuksessa käytetään modernimpaa terminologiaa, mutta kuitenkin Eukleideen ajatusta säilyttäen.

Todistus. (Pythagoras) Todistuksessa käytettäviä merkintöjä:

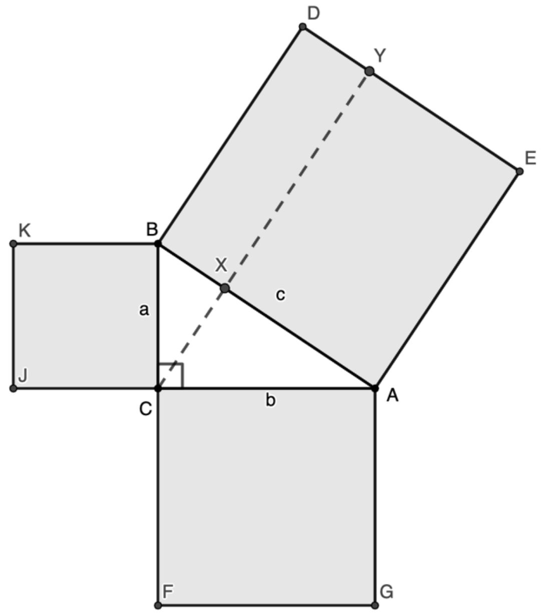
Pinta-ala: etuliitteenä kreikkalainen kirjain α ja perässä suluissa kappale, jonka pinta-alaa tarkoitetaan
Kulman suuruus: etuliitteenä m ja perässä suluissa kulma, jonka suuruutta tarkoitetaan

Olkoon ΔABC suorakulmainen kolmio, jolla on suora kulma pisteessä C. Olkoot lisäksi $ABDE$, $ACFG$ JA $BCJK$ neliöitä, joiden sivut ovat $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ja $\overline{BC}$.



Nyt halutaan osoittaa, että $\alpha(ACFG) + \alpha(BCJK) = \alpha(ABDE)$.

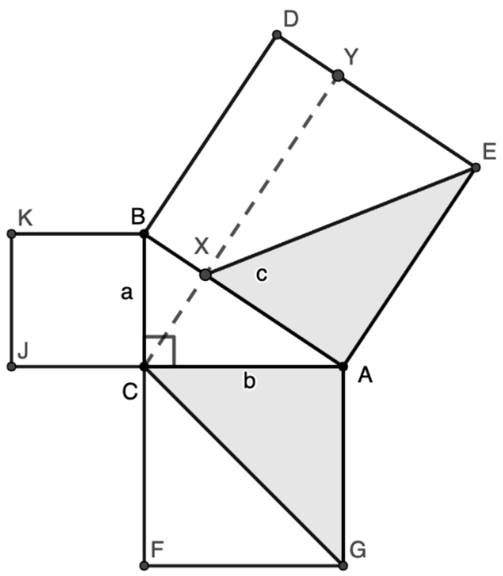
Piirretään pisteestä C normaali sivua $\overline{AB}$ vasten, ja olkoon X sen leikkauspiste sivulla $\overline{AB}$. Koska $ABDE$ on neliö, niin piirretty normaali on kohtisuorassa myös sivua $\overline{ED}$ vasten. Merkitään normaalin ja sivun $\overline{ED}$ leikkauspistettä pisteellä Y.



Koska janoilla $\overline{CX}$ ja $\overline{AE}$ on yhteinen kohtisuora jana $\overline{AB}$, niin voidaan todeta, että $\overline{CX}$ ja $\overline{AE}$ ovat yhdensuuntaiset. Janan $\overline{AB}$ ja $\overline{AE}$ kohtisuoruus voidaan todeta neliön ominaisuuksien nojalla, sillä neliön kulmat ovat aina 90 astetta, eli sen sivut ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

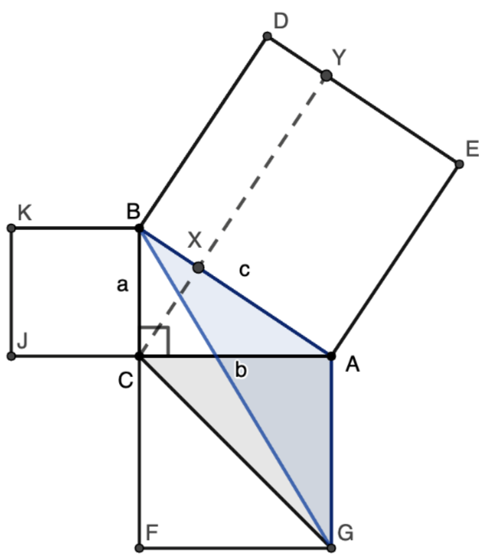
Huomataan, että nyt pätee $\alpha(ABDE) + \alpha(AXYE) = \alpha(BXYD)$. Jos voidaan osoittaa, että $\alpha(ACFG) = \alpha(AXYE)$ ja $\alpha(BCJK) = \alpha(BXYD)$, niin lause on todistettu. Molempien todistus menee vastaavasti, joten osoitetaan vain $\alpha(ACFG) = \alpha(AXYE)$.

Nelikulmion lävistäjä jakaa nelikulmion pinta-alan kahteen yhtä suureen osaan. Todistaaksemme, että $\alpha(ACFG) = \alpha(AXYE)$ hyödynnetään kolmioita, jolloin voidaan osoittaa, että kolmioille pätee $\alpha(ACG) = \alpha(AEX)$. Käytetään kuvia todistuksen havainnollistamisen tukena.



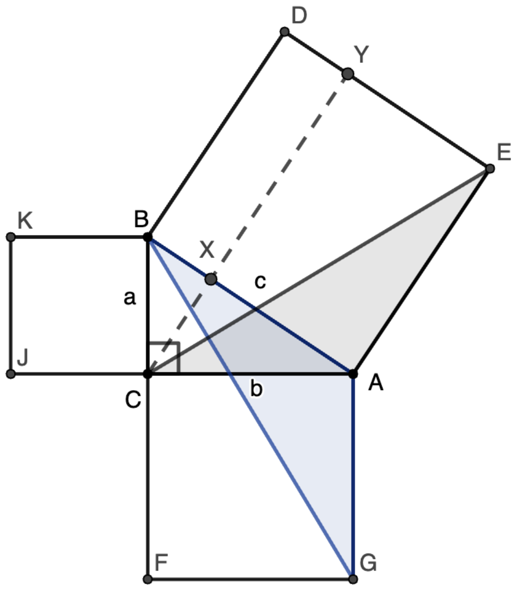
Nyt kuvassa näkyvien väritettyjen osien tulisi olla pinta-aloiltaan yhtä suuret. Tehdään todistus osissa.

1. Osoitetaan, että pätee $\alpha(ACG) = \alpha(ABG)$.



Sivu $\overline{CF}$ on yhdensuuntainen sivun $\overline{AG}$ kanssa ja pisteet F, C ja B ovat samalla suoralla. Nyt kolmioilla ΔACG ja ΔABG on yksi yhteinen sivu, ja sitä vastaavat kärkipisteet sijaitsevat yhteisen sivun kanssa olevalla yhdensuuntaisella suoralla. Siispä Lemman 3.34 nojalla voidaan todeta, että kolmioiden pinta-ala ovat samat.

2. Osoitetaan sitten, että pätee $\alpha(ABG) = \alpha(AEC)$.



Tämän todistus toteutetaan osoittamalla, että kolmiot ΔABG ja ΔAEC ovat yhtenevät. Koska $ABDE$ ja $ACFG$ ovat neliöitä, ja neliön jokainen sivu on yhtä pitkä, niin siitä seuraa, että sivu $\overline{AB}$ on yhtä suuri kuin sivu $\overline{AE}$ ja sivu $\overline{AG}$ on yhtä suuri kuin sivu $\overline{AC}$. Nyt pätee

$$m(EAC) = m(BAC) + m(EAB) = m(BAC) + 90°$$

ja

$$m(BAG) = m(BAC) + m(CAG) = m(BAC) + 90°.$$

Täten kolmioilla ΔABG ja ΔAEC on yhtä suuret kulmat $\measuredangle BAG$ ja $\measuredangle EAC$. Lisäksi niillä on yhtä pitkät sivut $\overline{AE}$ ja $\overline{AB}$ sekä $\overline{AG}$ ja $\overline{AC}$, joten kolmiot ovat yhtenevät sivu-kulma-sivu-säännön nojalla.

3. Osoitetaan, että $\alpha(AEC) = \alpha(AEX)$.
   Todistus menee vastaavasti kuin kohdassa 1.

Nyt on osoitettu, että $\alpha(ACG) = \alpha(ABG) = \alpha(AEC) = \alpha(AEX)$, joten $\alpha(ACG) = \alpha(AEX)$. Siispä voidaan todeta, että tällöin pätee myös $\alpha(ACFG) = \alpha(AXYE)$, ja todistus menee vastaavasti tilanteessa $\alpha(BCJK) = \alpha(BXYD)$. Siispä saatiin haluttu lopputulos, eli Pythagoraan lause pätee.

3.5 Geometrinen piirtäminen

Perehdytään seuraavaksi geometriseen piirtämiseen. Päälähteinä Carl Boyerin (1994) *Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia osat I* ja *II*, Robin Hartshornen (2000) Geometry: *Euclid and beyond* sekä Benjamin Boldin (1982) *Famous problems of geometry and how to solve them*. Mahdolliset muut lähteet on mainittu erikseen.

Geometrinen piirtäminen tarkoittaa matematiikassa harppi-viivain-konstruktiota. Näissä konstruktioissa käytössä olevalla viivaimella saa tehdä vain suoria viivoja, mutta sillä ei saa mitata sekä kulmaviivaimen käyttö on kielletty. Harppi-viivain-konstruktioilla on madollista konstruoida esimerkiksi Eukleideen geometrisia ongelmia. Myöhemmin näiden on osoitettu onnistuvan pelkän harpin tai viivaimen avulla, mutta viivaimen avulla konstruoidessa harppia tarvitaan yhden ympyrän piirtämiseen.

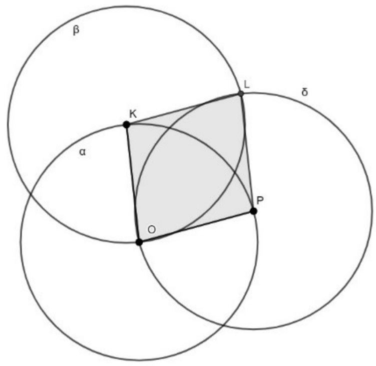
Harppi-viivain-konstruktioissa viivaimen ja harpin käyttöön liittyy sääntöjä, joiden mukaan konstruktiot tulee toteuttaa. Näissä säännöissä pisteet ovat sekä viivaimen että harpin käytön perustana. Pisteet voidaan valita satunnaisesti tai ne voivat olla konstruoitu aikaisemmin esimerkiksi suorien leikkauskohtina. Pisteillä voi myös olla ehtoja, esimerkiksi pisteen tulisi sijaita suoran vasemmalla puolella tai ympyrän kehällä.

Viivaimen avulla voidaan piirtää suora tai jana käyttäen kahta eri pistettä apuna, mittaamatta sillä etäisyyksiä tai kulmien suuruuksia. Nämä pisteet voivat olla valittu satunnaisesti tai ne ovat konstruoitu aiemmin. Harpin avulla voidaan piirtää ympyrä käyttäen keskipisteenä jo konstruoitua tai satunnaisesti valittua pistettä. Säde mitataan kahden eri pisteen väliltä, ja nämäkin pisteet ovat joko aiemmin konstruoitu tai tilanteessa annettuja.

Konstruktioiden alussa on usein oletuksena annettu pisteitä, suoria tai ympyröitä. Näiden jälkeen uutena askeleena pidetään suoran konstruoimista ja harpin käyttöä ympyrän konstruoimiseen. Erillisiksi askeleiksi ei lasketa aiemmin konstruoitujen suorien jatkamista, pisteiden valitsemista satunnaisesti tai leikkauspisteistä saatuja pisteitä. Askelten määrällä ei ole konstruoinneissa väliä, mutta ne auttavat hahmottamaan prosessia.

Eräs tutkimukseen valikoitunut tehtävä käsitteli geometrista piirtämistä, ja siinä pyydettiin piirtämään geometrisesti nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Tämä voidaan konstruoida viidellä askeleella seuraavasti:

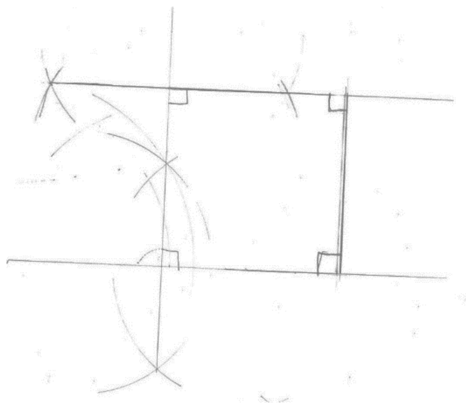
Valitaan satunnaisesti pisteet O ja P ja aloitetaan konstruointi.



1. Piirretään ympyrä α, jonka keskipiste on O ja säde $\overline{OP}$.
2. Piirretään jana $\overline{OP}$.
3. Piirretään jana $\overline{OK}$, missä piste K on ympyrän kehällä.
   (Piste K ei saa olla suoralla OP.)
4. Piirretään ympyrä β, jonka keskipiste on K ja säde $\overline{OP}$.
5. Piirretään ympyrä δ, jonka keskipiste on P ja säde $\overline{OP}$.

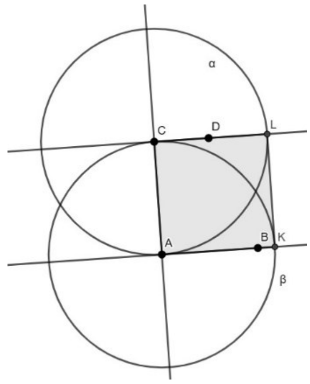
Nyt ympyröiden β ja δ leikkauspiste muodostaa neljännen pisteen ja näin on saatu konstruoitua nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.

Esimerkkiratkaisu oppilaiden vastauksista:



1. Piirretään suora.
2. Piirretään suoralle normaali.
3. Piirretään normaalille normaali.
4. Mitataan harpilla normaalien välinen etäisyys ja katsotaan pisteestä (normaalien leikkauspiste) yhtä kaukana oleva piste.
5. Etsitään myös ensimmäiseltä suoralta yhtä kaukana oleva piste
6. Piirretään viimeiselle normaalille normaali.

Näin on saatu nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Matemaattisesti tämä olisi pätevä seuraavien konstruktioiden mukaan:



1. Piirretään suora AB.
2. Piirretään suoralle AB normaali AC.
3. Piirretään suoralle AC. normaali CD.
4. Piirretään ympyrä α, jonka keskipiste on C ja säde $\overline{AC}$.
5. Piirretään ympyrä β, jonka keskipiste on A ja säde $\overline{AC}$.

Siten konstruoitiin ympyrän α ja suoran CD leikkauspiste L sekä ympyrän β ja suoran AB leikkauspiste K. Nämä pisteet L ja K sekä pisteet C ja A muodostavat nelikulmion, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Oppilaiden ratkaisu on geometrisesti piirrettävissä harppi-viivain-konstruktiolla, mutta ratkaisu ottaa huomioon vain nelikulmiot, jotka ovat neliöitä.

Kaikkia geometrisia ongelmia ei pystytä konstruoimaan harpin ja viivaimen avulla. Antiikin kreikasta peräisin olevat kolme kuuluisaa ongelmaa, ympyrän neliöiminen, kulman kolmijako ja neliön kahdentaminen, kiinnostivat matemaatikkoja pitkään. Edellä mainitut ongelmat on osoitettu mahdottomiksi todistaa vasta 1800-luvulla, jolloin Pierre Wantzel todisti kulman kolmijaon sekä neliön kahdentamisen mahdottomaksi. Ympyrän neliöiminen todistettiin mahdottomaksi 1800-luvun lopulla Ferdinand Lindemannin todistaessa piin olevan transsendenttiluku.

Ympyrän neliöimisessä konstruoidaan neliö, jonka pinta-ala on sama kuin annetun ympyrän pinta-ala. Harpin ja viivaimen avulla on mahdollista tuottaa vain algebrallisia lukuja, jolloin lukua π on mahdotonta konstruoida. Kulman kolmijaon konstruointi onnistuu esimerkiksi 90 ja 30 asteen kulmille, kuitenkaan 60 asteen kulmaa ei ole mahdollista jakaa harpin ja viivaimen avulla kolmeen osaan. Kolmijaon ongelma perustuu kolmannen asteen yhtälön ratkaisun puuttumiseen. Neliön kahdentamisessa, eli Deloksen ongelmassa harpilla ja viivaimella pyritään piirtämään kuution särmä, joka on kaksi kertaa kuution tilavuus. Myös Deloksen ongelman ratkaisun mahdottomuus perustuu kolmannen asteen yhtälöön.

Harpilla ja viivaimella tehtävät konstruktiot ovat rajoitettu algebrallisten ehtojen vuoksi, minkä takia kaikkia geometrisia ongelmia ei ole mahdollista konstruoida. Yllä esitellyt kolme klassista ongelmaa eivät ole ainoita mahdottomia konstruktioita. Kaikilla matematiikan osa-alueilla voi olla olemassa väittämiä, joita ei voida ratkaista. Näiden tutkiminen ja todistusten etsiminen ovat edistäneet matematiikkaa jo vuosisatojen ajan.

3.6 Logiikka ja todistaminen

Seuraavissa alaluvuissa syvennytään propositio- ja predikaattilogiikkaan sekä todistamiseen. Päälähteinä on käytetty Salmisen ja Väänäsen (1992) teosta *Johdatus Logiikkaan*, Miettisen (2002) *Logiikka -perusteet* kirjaa, Gary Chartrandin (2008) *Mathematical Proofs: A Transition to Advanced Mathematics* sekä Keefin ja Guichardin (2010) teosta *An Introduction to Higher Mathematics*. Mahdolliset muut lähteet on mainittu erikseen.

Boyerin mukaan (1994) logiikka voidaan historian aikana jakaa kolmeen osaan. Ensimmäisessä osassa, Kreikan logiikassa, päättelyn kaavat rakennettiin arkisen kielen sanoista syntaktisten sääntöjen vaikutteisena. Seuraavassa vaiheessa, skolastisessa logiikassa, logiikka kehittyi abstraktimmaksi kieleksi, jossa huomioitiin poikkeamat. Kolmannessa, eli matemaattisessa vaiheessa logiikka kehittyi keinotekoiseksi kieleksi, jossa semanttiset funktiot määrittelevät sanoja ja merkkejä. Näistä kaksi ensimmäistä vaihetta johdattelee loogisen teorian arkikielestä, mutta kolmas vaihe muodostaa ensin formaalisen kielen ja pyrkii tämän jälkeen tulkitsemaan sitä arkikielelle. Matemaattisen logiikan vaiheen yhtenä vaikuttajana pidetään George Boolea. Teoksessaan *Mathematical Analysis of Logic* (1847) Boole pyrki haastamaan matematiikan ajatusta vain suureiden ja lukujen tieteenä sekä kannatti laajempaa näkemystä matematiikasta.

Todistaminen on tärkeä osa matematiikkaa ja sen historia ulottuu Antiikin Kreikasta nykypäivään asti. Antiikin Kreikassa todistamista tiedetään harjoittaneen ainakin Thales, Pythagoras ja Eukleides. Todistaminen alkoi 1800-luvulla lähestyä kohti täsmällisempää ja formaalimpaa muotoaan. Induktiotodistus on saanut alkunsa Pascalin todistuksesta 1650-luvulla. Matematiikassa aksioomia sekä määritelmiä pidetään totena ilman erillistä todistamista. Sen sijaan väitelauseet, lemmat sekä seuraukset vaativat todistamista, joita varten on olemassa erilaisia todistamisen strategioita. Tutustutaan ensin väitelauseisiin ja niiden merkintätapoihin.

Logiikassa arkista kieltä pyritään muuttamaan matemaattisiksi kaavoiksi ja lauseiksi. Esimerkiksi

A = ″Matematiikassa käytetään numeroita″

B = ″Viisikulmio ei ole monikulmio″

C = ″Matematiikka on paras tieteenala″

Nyt väitelauseille A ja B voidaan asettaa totuusarvot tosi (1) tai epätosi (0). Väitelauseille on pystyttävä asettamaan totuusarvot, joten lause C ei ole väitelause. Uusia väitelauseita voidaan muodostaa jo olemassa olevista väitelauseista loogisia konnektiiveja käyttäen. Perehdytään seuraavaksi totuustauluihin ja konnektiiveihin.

1. Negaatio eli vastakohta. Väitelauseen A negaatio ¬A, tarkoittaa että ″A on epätosi″. Väitelauseella A ja sen negaatiolla ¬A on aina eri totuusarvot. Nämä voidaan ilmaista totuustaululla seuraavasti:

A	¬A
1	0
0	1

2. Konjunktio eli ja. Kun väitelauseet A ja B ovat tosia, niin myös väitelause (A ∧ B) on tosi. Esimerkiksi A = ″Kulma on kupera″ ja B = ″Kulma on yli 90 astetta″. Konjunktio (A ∧ B) = ″Kulma on kupera ja on yli 90 astetta″ siis vain, jos molemmat väitelauseista A ja B ovat tosia. Nämä voidaan ilmaista totuustaululla seuraavasti:

A	B	(A ∧ B)	
1	1	1	″Kulma on kupera ja on yli 90 astetta″
1	0	0	″Kulma on kupera ja ei ole yli 90 astetta″
0	1	0	″Kulma ei ole kupera ja on yli 90 astetta″
0	0	0	″Kulma ei ole kupera eikä ole 90 astetta″

3. Disjunktio eli tai. Jos toinen väitelauseista A tai B on tosi, niin myös väitelause (A ∨ B) on tosi. Esimerkiksi A = ″ Nelikulmio on neliö″ ja B = ″Nelikulmio on suorakulmio″. Disjunktio (A ∨ B) = ″Nelikulmio on neliö tai suorakulmio″, pätee toisen väitelauseista A tai B ollessa totta. Tämä matemaattisesti yksiselitteinen konnektiivi voi aiheuttaa ongelmia arkikielen päättelyketjuissa. Nämä voidaan ilmaista totuustaululla seuraavasti:

A	B	(A ∨ B)	
1	1	1	″Monikulmio on neliö tai suorakulmio ″
1	0	1	″Monikulmio on neliö tai ei ole suorakulmio ″
0	1	1	″Monikulmio on neliö tai suorakulmio ″
0	0	0	″Monikulmio ei ole neliö eikä suorakulmio ″

4. Implikaatio eli jos …, niin. Jos väitelause A on totta, niin myös väitelause B on totta. Esimerkiksi A = "Monikulmio on neliö" ja B = "Monikulmion kulmien summa on 360 astetta" Implikaatio (A ⇒ B) = ″Jos monikulmio on neliö, sen kulmien summa on 360 astetta″, on epätotta vain, jos väitelause B on epätosi. Nämä voidaan ilmaista totuustaululla seuraavasti:

A	B	(A ⇒ B)	
1	1	1	”Jos monikulmio on neliö, sen kulmien summa ei ole 360 astetta”
1	0	0	”Jos monikulmio on neliö, sen kulmien summa ei ole 360 astetta”
0	1	1	”Jos monikulmio ei ole neliö, sen kulmien summa on 360 astetta”
0	0	1	”Jos monikulmio ei ole neliö, sen kulmien summa ei ole 360 astetta”

5. Ekvivalenssi eli jos ja vain jos. Tällöin väitelauseita A ja B voidaan kutsua ekvivalenteiksi. Pätee siis, että A ⇒ B ja B ⇒ A. Esimerkiksi A = ”Kolmio on tasasivuinen” ja B = "Jokainen kolmion kulma on 60 astetta”. Nyt ekvivalenssi (A ⇔ B) = ”Kolmio on tasasivuinen, jos ja vain jos kolmion jokainen kulma on 60 astetta.” Näin ollen ekvivalenssi pätee. Nämä voidaan ilmaista totuustaululla seuraavasti:

A	B	(A ⇒ B)	(B ⇐ A)	(A ⇔ B)
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Totuustauluissa esiintyville konnektiiveille voidaan Saarimäen (2007) mukaan määritellä peruslaskutoimituksia mukaileva suoritusjärjestys.

Määritelmä 3.6 (Suoritusjärjestys): Konnektiivit suoritetaan seuraavassa järjestyksessä:

1) negaatio
2) konjunktio sekä disjunktio
3) implikaatio
4) ekvivalenssi

Totuustaulujen avulla voidaan määritellä minkä tahansa propositiolauseiden totuusarvo. Määritellään seuraavaksi tautologisuus.

Määritelmä 3.61 (tautologia): Väitelause A on tautologia, jos kaikilla totuusjakaumilla t pätee v(A) = 1. Tautologinen väitelause saa aina totuusarvon 1. Väitelauseiden tautologisuus voidaan osoittaa totuustaulujen avulla, jolloin jokaisen kohdan totuusarvoksi tulee 1. Esitellään seuraavaksi De Morganin lait.

Lause 3.6 (De Morganin lait):

1. $\left(\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)\right)$
2. $\left(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)\right)$

Tutkitaan jälkimmäistä totuustaulun avulla:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Totuustaulusta nähdään De Morganin lain kohdan 2 saavan arvon 1 kaikissa kohdissa. Sama voitaisiin tehdä myös kohdalle 1. Molemmat De Morganin lait ovat tautologioita Kootaan Saarimäen (2007) mukaan seuraavaan lauseeseen muutamia yleisiä päättelysääntöjä, jotka kaikki ovat tautologioita:

Lause 3.61.

1. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ Kaksoiskiellon poisto
2. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontraponointilaki
3. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ Ekvivalenssilaki

4. $A \vee \neg A$ Vaihtoehtopakko
5. $\neg(A \wedge \neg A)$ Ristiriidattomuuspakko

Lisäksi listaan voidaan lisätä De Morganin lait.

Todistus. Käydään läpi muut kohdat totuustaulujen avulla.

1. Kaksoiskiellon poisto

$\neg\neg A$	$\Leftrightarrow$	A
1	1	1
0	1	0

2. Kontraponointilaki:

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1

3. Ekvivalenssilaki

A	B	$(A \Leftrightarrow B)$	$(A \Rightarrow B)$	$\wedge$	$(B \Rightarrow A)$	$\Leftrightarrow$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

4. Vaihtoehtopakko

A	$\vee$	$\neg A$
1	1	0
0	1	1

5. Ristiriidattomuuspakko

A	$\neg A$	$(A \wedge \neg A)$	$\neg(A \wedge \neg A)$
1	0	0	1
0	1	0	1

Nyt tarkastelemalla totuustauluja nähdään, että jokainen lauseen kohdista saadaan osoitettua tautologioiksi.

Määritellään seuraavaksi universaali- ja eksistenssikvanttorit, jotka ovat tärkeä osa predikaattilogiikkaa. Väitelause A(x) on *avoin lause*, koska väitelause riippuu muuttujasta x. Universaalikvanttoria (kaikille x) merkitään symbolilla ∀ ja eksistenssikvanttoria (on olemassa x, jolle…) merkitään symbolilla ∃ .

Määritelmä 3.62.

1) Universaalikvanttori ∀: Lause ∀x A(x) pätee jos ja vain jos A(x) on totta riippumatta x:n arvosta.
2) Eksistenssikvanttori ∃: Lause ∃x A(x) pätee jos ja vain jos on olemassa (ainakin yksi) x, joka toteuttaa väitelauseen A(x).

Kvanttoreille pätevät Saarimäen (2007) mukaan seuraavat vaihtosäännöt:

Määritelmä (Negaation ja kvanttorin vaihtosääntö):

Avoimelle lauseelle A(x) pätee seuraavat tautologiat:

1. $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$
2. $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$

Nämä vaihtosäännöt voidaan Käenmäen (2005) mukaan havainnollistaa arkikielelle seuraavasti:

1. ”Ei ole totta, että jokainen monikulmio on neliö” ⇔ ”On olemassa monikulmio, joka ei ole neliö”
2. ”Ei ole olemassa monikulmioita, joka olisi neliö” ⇔ ”Jokainen monikulmio on ei-neliö”

Kvanttorit voivat esiintyä myös yhdessä, mutta tällöin on kiinnitettävä erityistä huomiota niiden esiintymisjärjestykseen.

Perehdytään seuraavaksi todistamiseen väitelauseiden ja konnektiivien avulla. Suora todistus (modus ponens) sekä käänteinen suora todistus (modus tollens) koostuvat joko annetuista tai päätellyistä lauseiden joukoista. Nämä lauseet ovat joko alkutietoa, lisättyjä oletuksia tai päättelyitä, jotka seuraavat logiikan sääntöjä. Jos väitelause halutaan osoittaa epätodeksi, riittää löytää yksi vastaesimerkki, jolla lause ei päde.

Usein suoran todistuksen sijaan on helpompaa käyttää epäsuoraa todistusta, missä väitettä lähestytään vaihtoehtojen poissulkemisen kautta. Epäsuorassa todistuksessa (reductio ad absurdum) tehdään alussa antiteesi eli vastaväite, joka pyritään saattamaan ristiriitaan ja tällöin saadaan alkuperäinen väite osoitettua todeksi.

Saarimäen (2007) mukaan väitelauseista saadaan loogisia konnektiiveja hyödyntäen muodostettua todistamisen menetelmät:

Lause 3.62. Olkoon A, B ja C väitelauseita, tällöin seuraavat ovat tautologioita:

1) $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$ *Suora päättely*
2) $[A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)] \Rightarrow B$ *Käänteinen suora päättely*
3) $\{A \wedge [(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)]\} \Rightarrow B$ *Epäsuora päättely*

Todistus.

Kohta (1): Suorassa todistamisessa väitelauseesta A (eli oletuksesta) pyritään suoraan väitelauseeseen B.

A	B	(A⇒B)	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$\boxed{[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B}$

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Nyt väitelause $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$ on tautologia, joten päättelyketju on osoitettu todeksi. Myös kohdat 2 ja 3 voidaan osoittaa totuustaulukoiden avulla tautologioiksi.

Käänteinen suora päättely on epäsuoran päättelyn alalaji, koska väitelause B kuvastaa epäsuoran päättelyn väitelausetta C. Kontraponointilain mukaan korvataan väitelause $(A \Rightarrow B)$ väitelauseella $(\neg B \Rightarrow \neg A)$, jolloin suorasta päättelystä saadaan käänteinen suora päättely. Vastaväitteestä eli antiteesistä ¬B johdetaan oletuksen vastakohta ¬A.

Epäsuorassa todistamisessa vastaväitteestä ¬B johdetaan oletuksen A avulla jokin epätosi väitelause $(C \wedge \neg C)$, jolloin syntyy ristiriita eli kontradiktio. Nyt väitelause C avulla ristiriidaksi voidaan valita mikä tahansa väitelause, ei pelkästään oletuksen väitelause A.

Esimerkki (Suora todistus):

Väite: Neliö, jonka sivun pituus $a + b$, pinta-ala on $a^2 + b^2 + 2ab$.

Todistus. Muodostetaan pinta-alan lauseke $(a + b)^2$.

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Näin saadaan osoitettua suoraan laskemalla, että väite pätee.

Esimerkki (käänteinen suora päättely):

Väite: Olkoon suorakulmion kanta $a \geq 0$ ja korkeus $h \geq 0$, a ja $h \in \mathbb{N}$. Jos suorakulmion pinta-ala on positiivista, molempien lukujen tulee olla aidosti positiivisia.

Todistus. Todistus voidaan jakaa seuraaviin Käenmäen (2005) mukaan:

1) Oletetaan että oletus A on totta
2) Muodostetaan antiteesi ¬B

3) Yritetään johtaa antiteesin avulla ¬A
4) Jos kohta 3 onnistuu, antiteesi ¬B ei voi olla totta, joten väite B on totta.

Oletus A = ”Lukujen a ja h tulo on aidosti positiivista.” Väite B = ”Molemmat luvut ovat aidosti positiivisia.” Antiteesi ¬B = ”ainakin toinen luvuista on nolla.” Valitaan, että $a = 0$ ja h mikä tahansa luonnollinen luku. Pinta-alan lasku

$a*h = 0*h = 0$, jolloin pinta-ala on nolla eli ei-aidosti positiivista. Nyt johdettiin antiteesin avulla ¬A, joten B = ”Pinta-ala on aidosti positiivista” on totta.

Epäsuora todistus voidaan jakaa seuraaviin vaiheisiin Käenmäen (2005) mukaan:

1. Oletetaan että oletus A on totta
2. Muodostetaan antiteesi ¬B
3. Yritetään johtaa jokin ristiriita oletuksen A ja antiteesin ¬B avulla
4. Jos kohta 3 onnistuu, niin antiteesi ¬B ei voi olla totta, joten väite on totta.

Käänteinen suora päättely on epäsuoran päättelyn erikoistapaus, missä C = A. Sekä käänteisessä että epäsuorassa todistuksessa on osatta muodostaa väitteen negaatio.

Yllä esiteltyjen kolmen tavan lisäksi matematiikassa yleinen todistusmenetelmä on käyttää induktioperiaatetta. Induktioperiaate perustuu ketjureaktioon: jos väite pitää paikkansa yksittäisessä tilanteessa se yleistetään pätemään kaikissa seuraavissa tilanteissa. Perehdytään seuraavaksi matematiikan induktioperiaatteeseen Chartrandin (2008) mukaan. Matematiikan induktioperiaate koostuu alkuaskeleesta, induktioaskeleesta sekä induktio-oletuksesta. Induktio-oletus mahdollistaa induktioaskeleen ottamisen.

Matematiikan induktioperiaate:

Olkoon lause A(x) kaikille positiivisille kokonaisluvuille x. Jos

1) A(1) on totta ja
2) $\forall x \in \mathbb{N},\ A(x) \Rightarrow A(x+1)$ on totta

Niin A(x) pätee kaikille positiivisille kokonaisluvuille

Matemaattinen induktio on varma todistusmenetelmä, mutta oppilaat käyttävät usein virheellistä induktiota. Oppilaiden todistuksissa onkin usein kyse induktiivisesta päättelystä matemaattisen induktioperiaatteen sijaan.

Esimerkiksi: Piirin ja pinta-alan tunnilla oppilaiden selvittäessä monikulmion pinta-alaa. Käytössä on 12 tulitikkua ja oppilaat rakentavat ensimmäistä monikulmiota, jonka pinta-alaksi he saavat 5 ruutua. He rakentavat erilaista monikulmiota ja saavat taas pinta-alaksi viisi. Tämän jälkeen oppilaat toteavat pinta-alan olevan aina viisi, jos tikkuja on 12.

Induktiivisessa päättelyssä yleistetään yksittäisistä havainnoista tai päättelyistä johtopäätöksiä, minkä takia päättely voi olla epävarmaa ja ongelmallista. Esimerkissä ollut päättelyketju kohtaa ongelman, kun oppilaat saavatkin pinta-alaksi yhdeksän.

Yllä esitellyt tavat keskittyvät suoraviivaiseen todistamiseen, missä todistetaan vain yksi suunta väitelauseesta. Väitelause voi koostua useammista propositiolauseista, jolloin väitteen osoittaminen todeksi voi vaatia propositioiden tarkastelua yksittäin sekä suunta huomioiden. Monimutkaisten propositiolauseiden todistaminen perustuu luonnolliseen päättelyyn, mikä pyrkii mukailemaan ihmiselle luontaista loogisen ajattelun ketjua. Sääntöjen, lauseiden ja oletuksien avulla luonnollinen päättely rakentuu kohti johtopäätöstä. Luonnollisen päättely helpottaa ihmisen monimutkaisen päättelyketjun ilmaisemista matemaattisin termein.

Erilaisten todistamistapojen avulla on mahdollista perehtyä väitelauseiden todistamiseen. Menetelmiä on erilaisia ja työssä on perehdytty vain muutamiin. Lauseiden todistamisessa on tärkeää pyrkiä huomioimaan kaikki mahdolliset tilanteet, jolloin todistaminen on jaettava vaiheisiin. Todistamisen avulla voidaan osoittaa, että matematiikka tarvitsee laskemisen lisäksi myös loogisen päättelyn ja perustelun taitoja, joiden avulla rakennetaan ja laajennetaan matemaattista ajattelua.

4 TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tämän tutkimuksen tavoitteena on saada informaatiota siitä, millaisia virheitä 7.–8.-luokkalaiset tekevät geometriassa ja miten he suhtautuvat vertaistensa tekemiin virheisiin. Olemme tutkimusvaiheessa seuranneet, millaisia virheitä oppilaat ryhmätyön aikana tekevät, millaisia mahdollisia virhekäsityksiä löytyy, sekä miten muut oppilaat reagoivat virheen ilmaantuessa. Tutkimuksen tehtävä yleisellä tasolla on tarjota merkittävää tietoa 7.–8.-luokkalaisten argumentaatiotaidoista tilanteessa, jossa joutuu joko puoltamaan omaa virheellistä käsitystään, tai haastamaan toisen virheellistä ajatustapaa.

Yksi tutkimuskysymyksistä on, mitä virheitä tai virhekäsityksiä aineistossa mukana olleilla ryhmillä esiintyy. Olemme seuranneet aineiston videoilta, miten oppilaat työskentelevät tehtävän parissa, ja miten he tekemiään ratkaisuja perustelevat. Tässä tutkimuksessa paneudutaan tilanteisiin, joissa oppilas päätyy tekemään jossain vaiheessa tehtävää virheen. Tällaiset voivat olla sekä spontaaneja virheitä, että syvällisempiä virhekäsityksiä. Tulosten pohjalta tarkastellaan, missä kategoriassa virheitä esiintyy eniten, ja pohditaan mahdollisia syitä siihen.

Toinen tutkimuskysymys on, miten virheet vaikuttavat dialogin etenemiseen. Kun virhe esiintyy, seuraamme, miten keskustelu siitä jatkuu. Analysoimme tapoja, miten oppilaat reagoivat toistensa tekemiin virheisiin. Analyysivaiheessa tätä tarkastellaan erilaisten dialogiulottuvuuksien avulla, jotka esitellään Luvussa 5.

5 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

5.1 Tutkimuskonteksti

Matematiikka on paljon muutakin, kuin laskuja ja ratkaisuja. Ratkaisuun päästäkseen tulee edetä loogisesti, ja omia ratkaisumenetelmiään tulee osata perustella. Jo varhaisessa vaiheessa opetusta oppilaille painotetaan, että matematiikassa pelkkä vastaus ei riitä. Tällä pyritään kehittämään oppilaiden argumentaatiotaitoja, sillä tehdessään välivaiheita näkyviin, he käytännössä perustelevat omaa ratkaisuaan.

Tässä tutkimuksessa keskitytään argumentaatioprosessiin, kun 7.–8.-luokkalaiset perustelevat tehtäviään vertaisilleen. Tarkastelun alla ovat tilanteet, joissa oppilas tekee virheen. Virheen esiintymisen jälkeen dialogi jatkuu, joko virheellistä menetelmää haastaen tai sen täysin sivuuttamalla. Tutkimuksessa analysoidaan sitä, millaisia virheitä oppilailla esiintyy, ja miten dialogi siitä jatkuu.

5.2 Tutkimusaineisto

Tutkimuksessa on hyödynnetty DARLING-aineistoa, eli Dialogic argumentation for learning-aineistoa. Sen on kerännyt Markus Hähkiöniemi, Pasi Nieminen, Sami Lehesvuori, Kaisa Jokiranta, Jenna Hiltunen ja Jouni Viiri Jyväskylän opettajankoulutuslaitokselta. Aineistossa seurataan samoja oppilaita samojen opettajien ohjaamina sekä matematiikassa että fysiikassa 7.-luokan alusta 8.-luokan loppuun. Aineisto koostuu videomateriaalista, jota on kuvattu oppitunneilla. Oppilaat ovat noin kolmen-neljän hengen ryhmissä ratkaisemassa ryhmätyötehtävää. Tunnin puolessavälissä jokaisen ryhmän tehtävät asetetaan kaikkien näkyville, ja niitä käydään yhdessä läpi. Esittelytilanteessa ryhmän tulee osata perustella omaa ratkaisuaan ja muut saavat kysellä ratkaisusta. Videointi on tapahtunut siten, että jokaisen ryhmän luona on kamera, sekä lisäksi opettajaa kuvaa oma kamera.

Tähän tutkimukseen valikoitui 12 eri oppituntia ja viisi eri oppitunnin aihetta. Jokaisella oppitunnilla oli noin kuusi ryhmää, joissa työskenteli kolme-neljä oppilasta. Kamera kuvasi koko tunnin ajan aina tietyn ryhmän työskentelyä. Tällä otannalla tutkimukseen valikoitui yhteensä 69 videota. Tuntien aiheita olivat geometrinen piirtäminen, 3D-geometria, piiri ja pinta-ala, Pythagoraan palapeli ja nelikulmion kulman suuruus. Näistä 7.-luokalla olevia oppitunteja ovat nelikulmion kulman suuruus, geometrinen piirtäminen sekä piiri ja pinta-ala. 8.-luokalla olevat oppitunnit ovat Pythagoraan palapeli sekä 3D-geometria.

Tutkimukseen osallistujat ovat 7.–8.-luokkalaisia peruskoulun oppilaita. Tutkimustuloksia tulkittaessa käytetään pseudonyymeja. Tunnistekoodeina käytetään oppilaita numeroituina, esimerkiksi Oppilas 1 ja Oppilas 2. Koodausta käytetään videokohtaisesti, ei koko aineiston kohdalla. Esimerkiksi videolla 1 esiintyvä Oppilas 1 saattaa olla eri, kuin videolla 2 esiintyvä Oppilas 1. Lisäksi opettajille käytetään tunnistekoodeja Opettaja 1 ja Opettaja 2. Nämä pysyvät vakioina, joten esimerkiksi Opettajasta 1 puhuttaessa tarkoitetaan aina tiettyä opettajaa.

5.3 Tutkimuksen oppituntien aiheet

Tutkimusaineistosta käyttöön valikoitui viisi eri oppitunnin aihetta, joita olivat nelikulmion kulman suuruus, geometrinen piirtäminen, piiri ja pinta-ala, Pythagoraan palapeli ja 3D-geometria. Tässä luvussa esitellään oppituntien aiheet ja ryhmätöiden tehtävänannot. Käsitellään myös sitä, millaisia matemaattisia taitoja oppilailta edellytetään tehtävän ratkaisemiseksi.

5.3.1 Nelikulmion kulman suuruus

Oppitunnit nelikulmion kulman suuruudesta on pidetty seitsemännen luokan puolivälissä. Tehtävänä on GeoGebra-appletin avulla selvittää, mikä on suurin mahdollinen nelikulmion kulman suuruus. Oppilaille tunnilla jaettu tehtäväpaperi on seuraavanlainen:

Kuva 14

Nimet: ____

Kuinka suuri voi nelikulmion kulma olla suurimmillaan?

Alustavat arviomme ennen tutkimista:

____

____

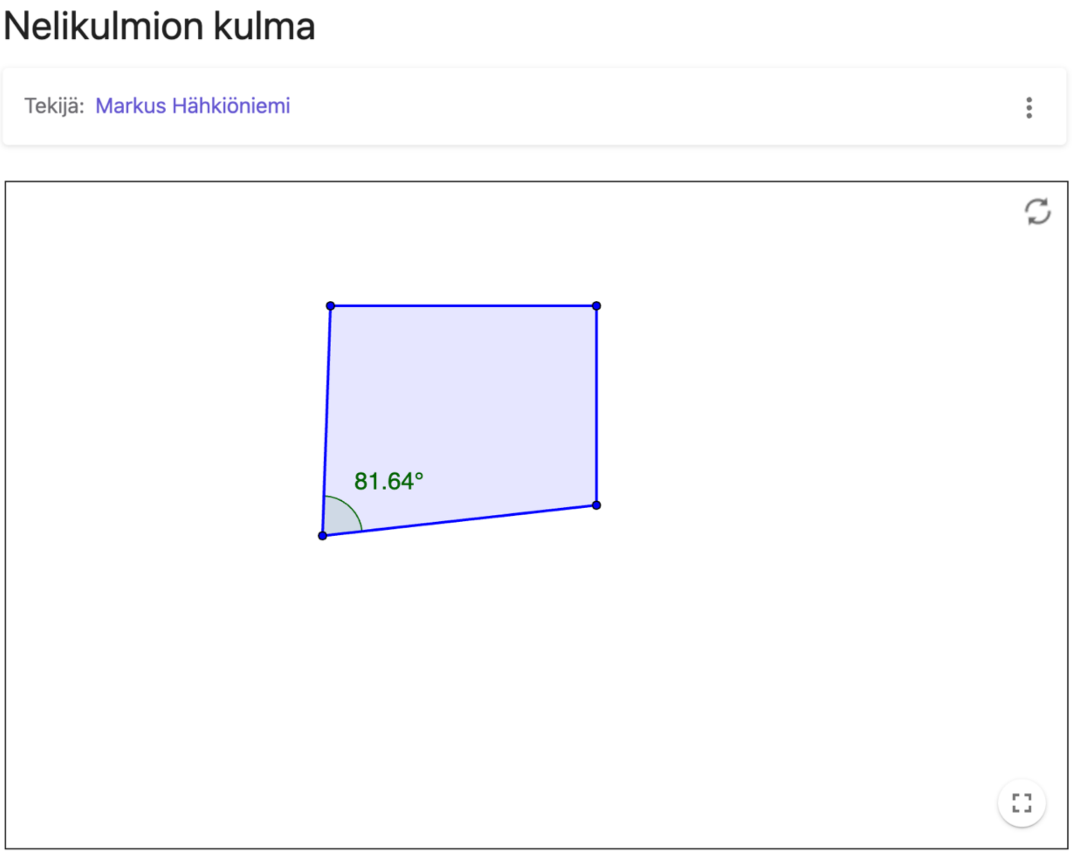
Tutkikaa asiaa oheisella nettisivulla: http://ggbtu.be/m1910199

Tutkimuksen jälkeen vastauksemme on: ______________________

Perustelut (piirrä/kirjoita):

Oppilaita ohjeistetaan ensin arvioimaan itsenäisesti, mikä voisi olla suurin mahdollinen nelikulmion kulma. Sen jälkeen kolmen-neljän hengen ryhmissä he jakavat arvionsa, ja kirjoittavat ryhmänä yhteisen arvionsa tehtäväpaperille. Arviointien jälkeen oppilaille jaetaan iPadit, joilla he avaavat tehtäväpaperissa lukevan linkin, joka vie Markus Hähkiöniemen luomaan GeoGebra-applettiin. Appletista aukeaa seuraavanlainen tiedostonäkymä:

Kuva 15



Nyt appletissa olevaa nelikulmiota pystyy tutkimaan siirtelemällä sen jokaista kulmaa. Applettiin on jätetty näkyviin vain yhden kulman suuruus, joka muuttuu sen mukaan, kun nelikulmion kulmia liikuttaa. Kulmasta, jossa asteluku on näkyvillä, olisi tehtävässä tarkoitus saada mahdollisimman suuri. Lopuksi appletin avulla saatu ratkaisu tulee kirjoittaa tehtäväpaperiin, ja perusteluina piirtää kyseinen nelikulmio ja sanallisesti selittää sitä.

Tehtävässä onnistuminen edellyttää oppilaalta tietämystä siitä, mikä on nelikulmio. Nelikulmion ominaisuuksista seitsemäsluokkalaisen oletetaan tietävän, että nelikulmiossa on neljä kulmaa, joiden astelukujen yhteenlaskettu summa on 360 astetta. Tehtävässä edellytetään myös hahmottamista, miten yhden kulman muuttaminen vaikuttaa muihin kulmiin. On myös olennaista osata ottaa huomioon kaikkien kulmien yhteisvaikutus yhden kulman suuruuteen. Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että koska jokaisen kulman on oltava aidosti suurempaa kuin nolla astetta ollakseen kulmia, niin pohtiessa yhden kulman suurinta mahdollista astelukua tulisi muistaa, että mukana on myös kolme muuta kulmaa, jotka eivät voi olla nolla astetta. Siispä yhden kulman suurin mahdollinen asteluku on aidosti pienempää kuin 360 astetta.

5.3.2 Geometrinen piirtäminen

Geometrisen piirtämisen oppitunnit sijoittuvat myös seitsemännen luokan puoliväliin. Tehtävänanto on seuraavanlainen:

Kuva 16

Geometrinen piirtäminen

Nimet: ____

1. Piirtäkää geometrisesti nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät. Valmistautukaa selittämään muille, miksi piirtämistapa toimii.

Kuva 17

Geometrinen piirtäminen

Nimet: ____

2. Piirtäkää geometrisesti kaksi samankokoista ympyrää, joilla on tasan yksi yhteinen piste. Valmistautukaa selittämään muille, miksi piirtämistapa toimii.

Kuva 18

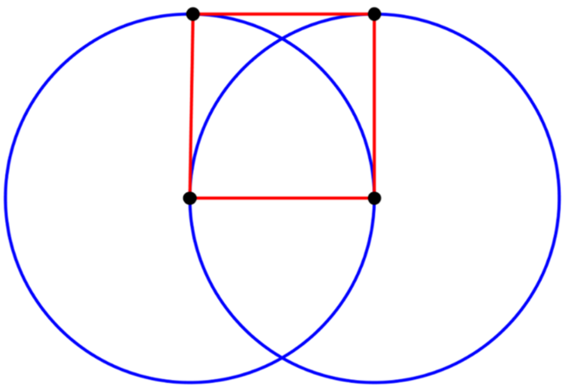
Valmistautukaa kommentoimaan tai kysymään muiden ratkaisuista.

Ainakin yksi kommentti tai kysymys jokaiselta ryhmältä.

- Mihin kohtaan ratkaisussa haluaisitte lisäselitystä?
- Mitä kohtaa ratkaisussa pitäisi teidän mielestänne kehittää?
- Miksi ratkaisu on mielestänne toimiva?

Kuva 19

Mitä mieltä tästä ratkaisusta?



Jokainen tehtävä oli omalla pdf-sivullaan, joten tähän tutkielmaan tuotiin vain tehtävänannon näyttävä osa.

Tunnin alussa opettaja kertaa oppilaille, mitä tarkoittaa geometrinen piirtäminen. Opettaja ohjeistaa, että tehtävissä saa käyttää vain harppia ja viivainta. Viivainta ei kuitenkaan saa käyttää mittaamiseen, vaan ainoastaan suorien viivojen piirtämiseen. Varsinaisia tehtäviä on kaksi kappaletta, jotka näkyvät Kuvissa 16 ja 17. Kuvassa 18 on ohjeistukset loppukeskustelua varten. Kuvassa 19 näkyvä ratkaisu on tarkoitettu esitettäväksi tunnin lopussa, jolloin oppilaat pääsevät arvioimaan esitettyä ratkaisutapaa ja sen oikeellisuutta.

Tällä tunnilla olennaista on ymmärtää, mitä geometrinen piirtäminen on. Esitietoina on myös nelikulmion ja ympyrän määritelmä. Haastavin osuus tehtävässä on se, kun oppilaan on osattava hyödyntää ja käyttää erilaisia geometrisia menetelmiä, kuten keskinormaaleja ja kulmanpuolittajia päästäkseen ratkaisuun.

5.3.3 Piiri ja pinta-ala

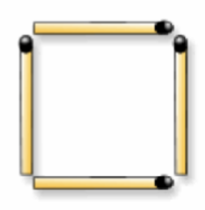
Piiri ja pinta-alan oppitunnit sijoittuvat seitsemännen luokan kevätlukukaudelle. Tehtävänanto tällä oppitunnilla on seuraavanlainen:

Kuva 20

Tikut ja pinta-ala

Nimet:

____



Neljästä tikusta muodostetun neliön pinta-ala on 1.

Kuinka pienen monikulmion saatte koottua 12 tikusta?

Piirtäkää ratkaisunne ja valmistautukaa selittämään, mistä tiedätte monikulmionne pinta-alan.

Kuva 21

Valmistautukaa kommentoimaan tai kysymään muiden ratkaisuista.

Ainakin yksi kommentti tai kysymys jokaiselta ryhmältä.

- Mihin kohtaan ratkaisussa haluaisitte lisäselitystä?
- Mitä kohtaa ratkaisussa pitäisi teidän mielestänne kehittää?
- Miksi ratkaisu on mielestänne toimiva?

Nyt oppilaiden tulee siis muodostaa 12 tulitikusta monikulmio, jonka pinta-ala on mahdollisimman pieni. Neljästä tikusta muodostetun neliön pinta-ala on yksi, eli yksi tikku vastaa tehtäväpaperissa olevan ruudukon yhden ruudun sivun pituutta. Monikulmiolle ei ole muuta ehtoa, kuin se, että pinta-ala tulee pystyä laskemaan siitä tarkasti.

Oppilaan tulee tuntea monikulmion määritelmä ja hänen tulee myös osata laskea erilaisten kuvioiden pinta-aloja. Tässä tehtävässä pinta-alan laskemisen apuna on ruudukot, joten pinta-alan voi laskea niiden mukaan, eli varsinaisia laskukaavoja ei välttämättä tarvitse. Halutessaan pinta-alan voi kuitenkin tehtävässä laskea myös laskukaavoja käyttäen, jos monikulmio on rakennettu sen mukaisesti. Joidenkin monikulmioiden laskeminen laskukaavoja hyödyntäen voi kuitenkin olla tässä tehtävässä seitsemäsluokkalaiselle haastavaa, joten tehtävässä on hyvä hallita hyvää hahmottamista. Hahmottaminen tulee olennaiseksi siinä vaiheessa, kun tikkuja ei asetella enää ruutujen sivujen mukaan, vaan vinosti ruudun sisälle.

5.3.4 Pythagoraan palapeli

Oppitunti Pythagoraan palapelistä on pidetty kahdeksannen luokan loppupuolella. Tehtävänanto on kaksiosainen:

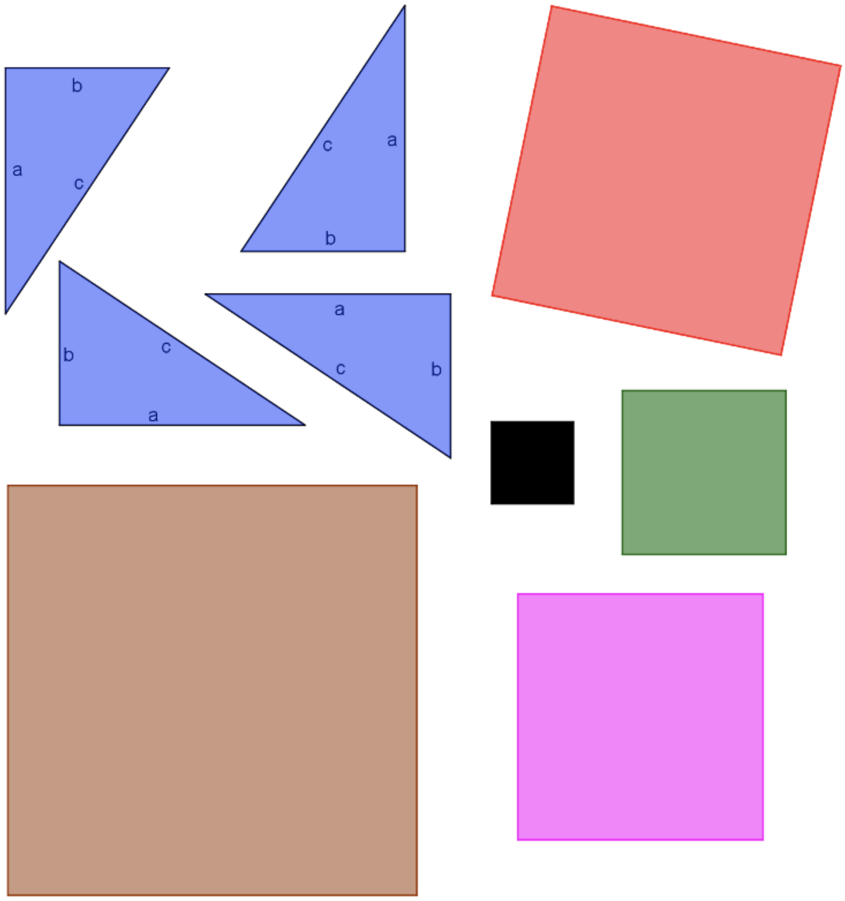
Kuva 22

Palapeli Nimet: ____

Käyttäkää apuna paperisia paloja.

Tehtävä 1. Valitkaa vaihtoehdoista oikea pinta-ala kullekin kuviolle. Perustelkaa.

a^2 b^2 c^2 $\frac{ab}{2}$ $(a + b)^2$ $(a - b)^2$



Kuva 23

Tehtävä 2. Perustelkaa onko väittämä tosi vai epätosi. Kopioikaa kuva tai kuvat perusteluksi.

Väittämä	Tosi/epätosi	Perustelu
1. Suurimman neliön (ruskea) pinta-ala on $a^2 + b^2$.		
2. Suurimman neliön (ruskea) pinta-ala on $a^2 + b^2 + 2ab$.		
3. Suurimman neliön (ruskea) pinta-ala on $c^2 + 2ab$.		
4. Neljän kolmion pinta-ala on yhteensä c^2.		
5. Mustan neliön ja neljän kolmion pinta-ala on yhteensä c^2.		
6. Mustan neliön ja neljän kolmion pinta-ala on yhteensä $a^2 + b^2$.		
7. $c^2 = a^2 + b^2$ Vihje: Mitä hyötyä on edellisistä väittämistä?		

Kuvassa 22 näkyy ensimmäinen tehtävä, jossa oppilaiden tulee osata yhdistää oikein, millä kaavalla saa minkäkin kappaleen pinta-alan laskettua. Tehtävässä tulee hyödyntää tietoa kolmioista, joihin on merkattu sivujen pituudet *a*, *b* ja c. Muut kuviot ovat neliöitä, ja niiden sivujen pituudet saa etsittyä kolmion annettujen sivujen pituuksien avulla. Tehtävässä jokainen annettu pinta-alan laskukaava tulee käytetyksi.

Kuvassa 23 on toinen tehtävä, jossa tulee tutkia väitteitä ja niiden todenmukaisuutta. Oppilaan tulee vastata, pitääkö annettu väite paikkansa vai ei, ja perustella vastauksensa. Tehtävä johdattelee Pythagoraan lauseen todistukseen, joka on $a^2 + b^2 = c^2$.

Tämä tehtävä edellyttää oppilaalta tietoa, mikä on pinta-ala ja miten se lasketaan. Oikeaan ratkaisuun pääseminen vaatii myös hahmottamiskykyä osatakseen verrata oikein sivujen pituuksia annettujen kolmioiden sivujen pituuksien kanssa. Olennaisia taitoja ovat myös potenssien laskusäännöt ja binomin neliön kaava. Tässäkään tehtävässä ei välttämättä tarvitse laskea ollenkaan, jos osaa tarpeeksi hyvin hyödyntää annettuja kappaleita. Jokaisen väitetehtävän pystyisi ratkaisemaan annettujen kappaleiden avulla. Esimerkiksi kohdassa 1 oppilas voi koittaa asettaa neliöt, joiden pinta-alat ovat a^2 ja b^2 ruskean neliön päälle, ja tutkia, täyttävätkö kyseisten neliöiden pinta-alat ruskean neliön pinta-alan. Vastaavasti kohdan 1 saa myös laskettua. Ruskean neliön pinta-ala on $(a + b)^2$, josta ratkaisemalla laskemalla sulut auki oppilas voi tutkia, tuleeko siitä $a^2 + b^2$.

5.3.5 3D-geometriaa

3D-geometrian tunti on pidetty kahdeksannen luokan kevätlukukauden loppupuolella. Oppitunnin aiheeseen kuului kolme GeoGebra-appletilla suoritettavaa tehtävää. Tehtävät oli jaettu kahteen tiedostoon, joista toinen oli muodostettu kolmiulotteiseksi, jolloin käyttöön sai 3D-lasit, ja toinen tiedosto oli tavallinen GeoGebra-tiedosto. Tehtävänannot olivat seuraavanlaiset:

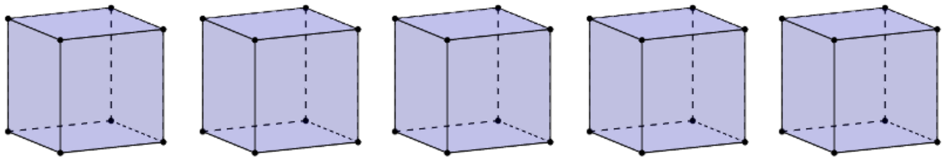
Kuva 24

Nimet: ____

Osoite: https://ggbm.at/qRXX9yav

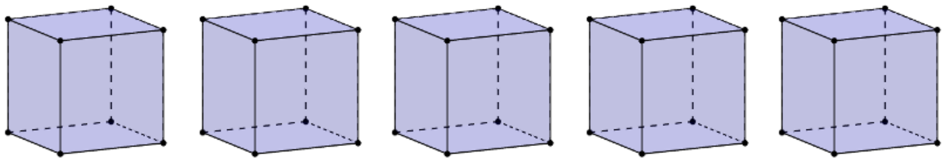
Tehtävä 1. Tutkitaan appletin kuutioita.

a) Kuinka monta eripituista janaa voidaan piirtää yhdistämällä kaksi kuution kärkeä?



b) Mikä a-kohdan janoista on pisin? Perustelkaa.

c) Kuinka monta erikokoista kolmiota voidaan piirtää yhdistämällä kolme kuution kärkeä?



d) Mikä c-kohdan kolmioista on pinta-alaltaan suurin? Perustelkaa.

Kuva 25

Nimet: ____

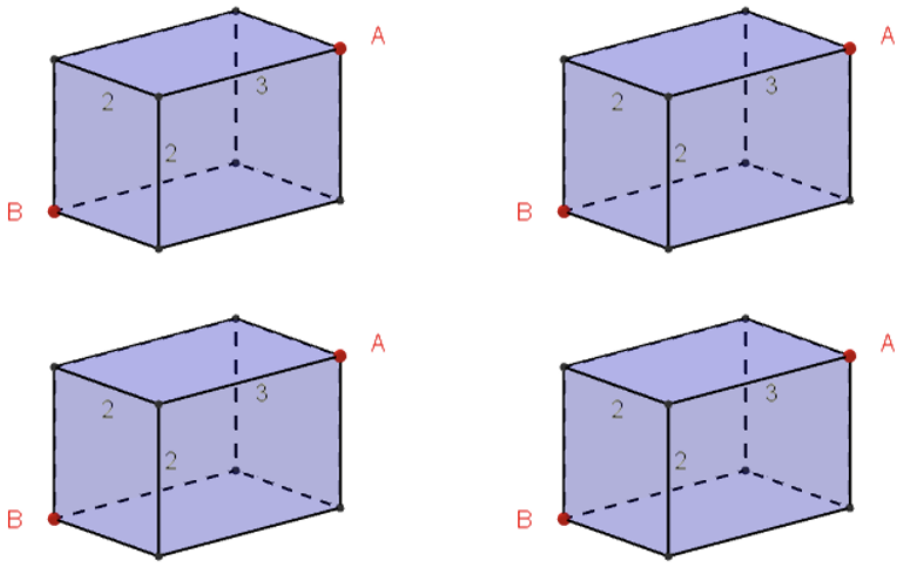
Tehtävä 2. Tutkitaan appletin laatikkoa (suorakulmainen särmiö).

Mikä on lyhin reitti laatikon kärjestä *A* kärkeen *B* laatikon pintaa pitkin?

Montako erilaista vaihtoehtoa lyhimmälle reitille on?

Perustelkaa.

Piirtäkää reitit oheisiin kuviin.



Kuva 26

Nimet: ____

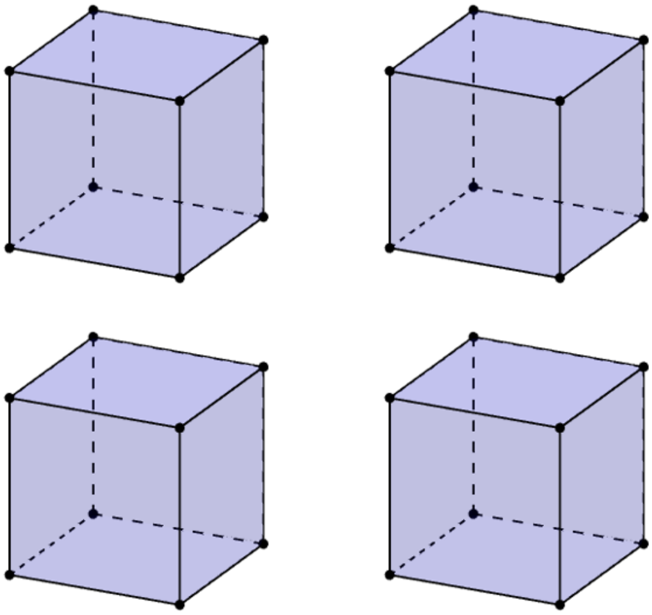
Tehtävä 3.

Piirtäkää appletilla kysytty pallo. Perustelkaa, miksi piirtämistapanne on tarkka.

a) Piirtäkää pienin mahdollinen pallo, jonka sisällä on koko kuutio.

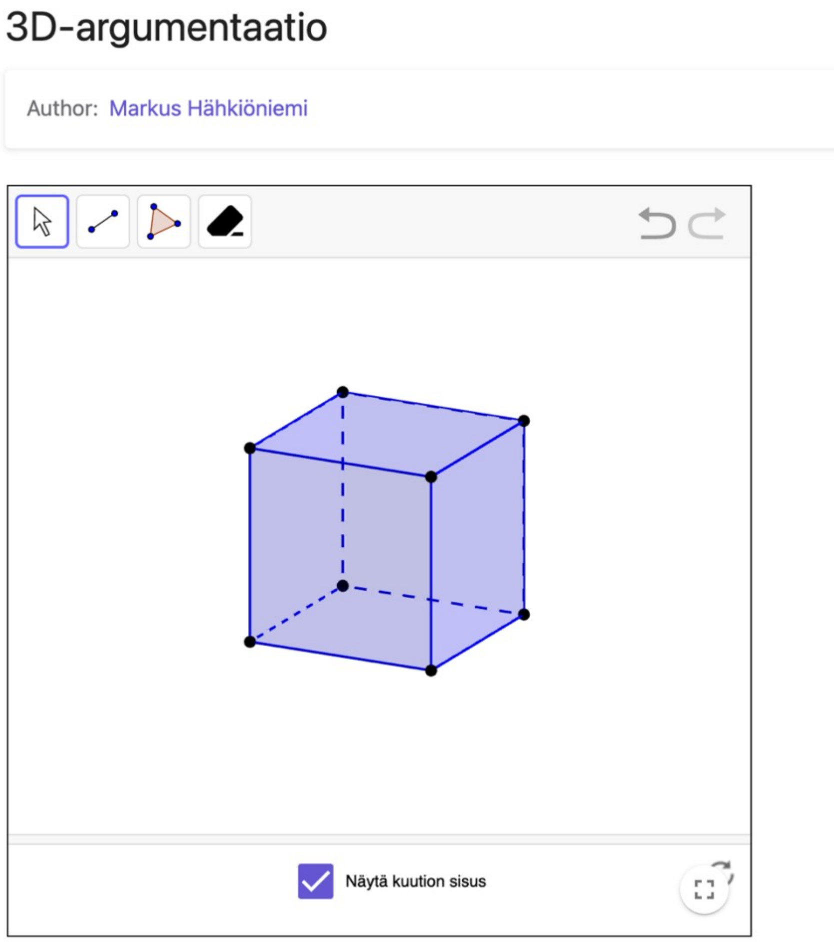
b) Piirtäkää suurin mahdollinen pallo, joka mahtuu kuution sisään.

Kuvia muistiinpanoja varten:



Tehtävässä yksi (Kuva 24) on tarkoitus appletin avulla itse piirtämällä tutkia tehtävää. Tehtävänäkymä on seuraavanlainen:

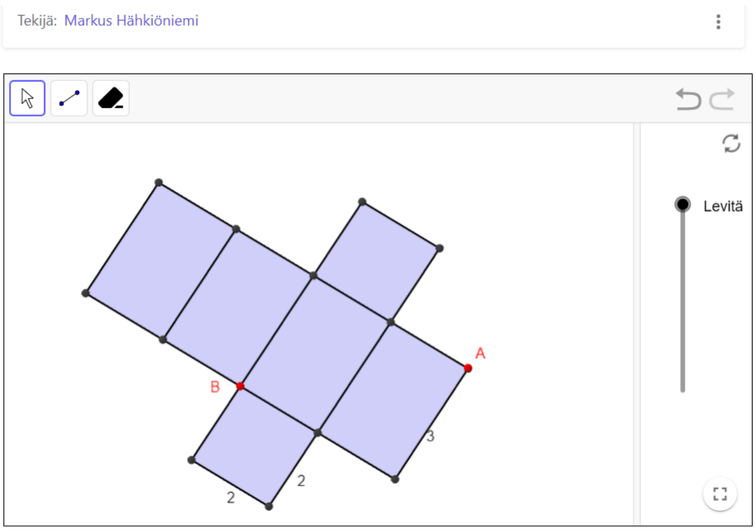
Kuva 27



Tässä tehtävässä oppilaan tulee ymmärtää janojen pituuksien suhteita. Olennaista on hahmottaa avaruuskappaleen rakennetta, tässä tapauksessa kuutiota. C-kohdassa tarvitaan myös taitoa laskea kolmioiden pinta-aloja.

Tehtävässä kaksi (Kuva 25) oppilasta auttaa appletissa näkymä, jossa kuution saa levitettyä auki. Levitettynä kuutio näyttää seuraavanlaiselta:

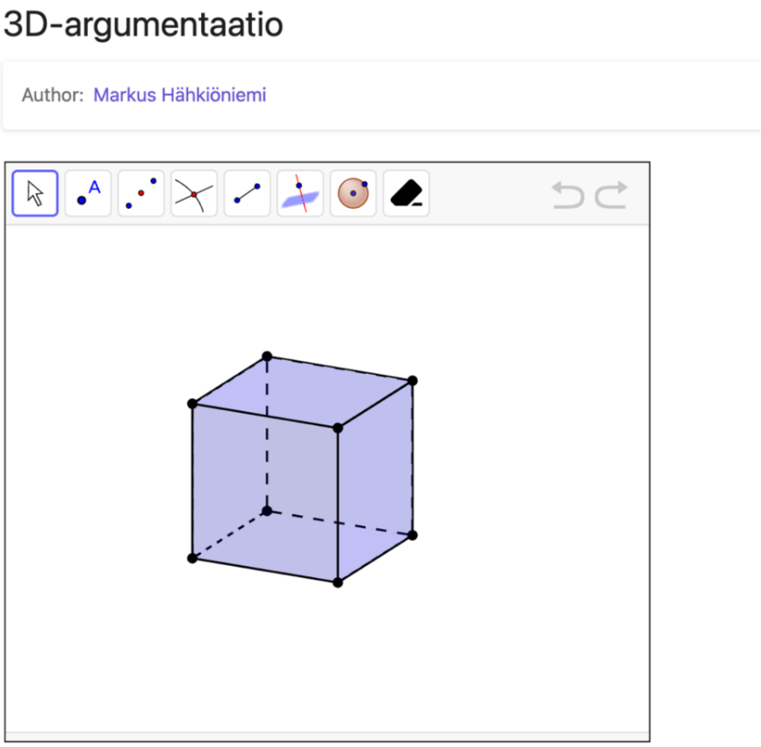
Kuva 28



Nyt oppilaan tulee selvittää lyhin reitti pisteestä A pisteeseen B. Tehtävä vaatii avaruudellista hahmottamista, mutta sen tukena on GeoGebra-appletti. Kun osaa appletilla pyörittää suorakulmaisen särmiön yllä olevaan muotoon, tulee ensin hahmottaa lyhin reitti, eli jana välillä $\overline{AB}$, jonka jälkeen sen pituus tulee osata ratkaista Pythagoraan lauseen avulla.

Tehtävässä kolme (Kuva 26) oppilaan tulee piirtää halutun kokoisia palloja. GeoGebra-appletista aukeava näkymä on seuraavanlainen:

Kuva 29



Tässä tehtävässä onnistuakseen oppilaan tulee tuntea pallon ominaisuudet hyvin. Tulee ymmärtää, mikä pallon säteen tulee olla, missä kohdassa pallon tulee sivuta kuutiota, ja miten sivuamispisteet löytyvät. Sivuamispisteiden löytämiseksi tulee osata hyödyntää lävistäjiä oikeaoppisesti.

5.4 Aineiston analyysi

Tutkimuksessa käytetään laadullista sisällönanalyysia, joka voidaan jakaa neljään vaiheeseen. Ensimmäisessä vaiheessa on tärkeää tehdä päätös siitä, mikä aineistosta on kiinnostavaa sekä relevanttia (Tuomi ja Sarajärvi, 2018). DARLING-aineistosta on jo tutkittu argumentaatiota. Tässä tutkimuksessa rajasimme tutkimuskysymykset keskittymään pienryhmätyöskentelyyn matematiikan parissa, ja vielä tarkentaen tilanteisiin, joissa oppilas tekee virheen. Virhetilanteiksi on laskettu kaikki virheet, mutta tilanteet, jotka ovat selkeitä lipsahduksia, ovat jätetty huomiotta. Tällainen voi olla esimerkiksi tilanne, jossa oppilas tarkoittaa sanoa ”kaksi kertaa kaksi on neljä”, mutta sanookin vahingossa ”kaksi kertaa kaksi on kaksi, ei kun siis neljä". Tällaisissa tilanteissa oppilas huomaa välittömästi lipsauttaneensa väärän sanan, ja korjaa tilanteen heti. Toisessa vaiheessa aineistoa läpikäydessä merkitään systemaattisesti kiinnostavat kohdat sekä pidetään ne erillään muusta aineistosta. Olemme listanneet aineistosta kaikki kohdat, joissa virhe syntyy, ja kuvailleet niitä lyhyesti. Näin olemme voineet helposti palata tilanteisiin, joissa virhe on ollut.

Kolmannessa vaiheessa aineistosta poimitut osat luokitellaan, tyypitellään tai teemoitetaan (Tuomi ja Sarajärvi, 2018). Dialogia tutkiessa on keskitytty vain oppilaiden väliseen dialogiin, joten tilanteissa, joissa opettaja vastaa oppilaan virheeseen, on jätetty dialogia analysoidessa huomiotta. Aineiston ositteluun olemme käyttäneet Hähkiöniemen ym. (2019) artikkelissa esittelemiä erilaisia dialogisia liikkeitä hieman soveltaen itse sitä soveltumaan tutkimukseemme parhaimmalla mahdollisella tavalla. Hähkiöniemi ym. (2019) artikkelissa erilaisia dialogin ulottuvuuksia ovat kysymyksen esittäminen, haastaminen, syventäminen, kommentointi ja vastaaminen. Kysymyksen esittäessään oppilas kysyy kysymyksen toisen ideaan liittyen. Haastaessaan oppilas osoittaa epäkohdan toisen oppilaan ideassa. Syventäessään oppilas analysoi, kehittää tai vahvistaa toisen oppilaan ideaa. Kommentointi pitää sisällään sen, kun oppilas kommentoi toisen oppilaan väitettä haastamatta, kysymystä esittämättä tai syventämättä sitä. Vastaaminen tarkoittaa sitä, kun oppilas vastaa toisen oppilaan kysymykseen haastamatta, kyseenalaistamatta, syventämättä tai kommentoimatta sitä.

Hähkiöniemi ym. (2019) artikkelissa näitä ulottuvuuksia on tutkittu yksittäisinä puheenvuoroina. Tässä tutkimuksessa ei ole analysoitu jokaista puheenvuoroa erikseen, vaan tutkitaan dialogia yleisellä tasolla. Tästä lisää seuraavassa kappaleessa. Ulottuvuuksia on hieman täsmennetty ja muokattu soveltumaan paremmin tähän tutkimukseen. Olemme käyttäneet ulottuvuuksina kysymyksen esittäminen, haastaminen, syventäminen, kommentointi, vastaaminen ja ei huomioida. Kysymyksen esittäminen on sitä, kun esitetään kysymys liittyen toisen ideaan. Tässä halutaan saada lisää informaatiota toisen ideasta, mutta ei esitetä kysymystä kyseenalaistavassa muodossa. Esimerkiksi seuraavanlainen tilanne luokiteltaisiin kysymyksen esittämiseksi:

Oppilas 1: Monikulmios on enemmän ku 4 kulmaa

Oppilas 2: Onko siis neliö monikulmio?

Oppilas 1: Ei ku se on neliö

Kun taas seuraava luokiteltaisiin kyseenalaistuksen vuoksi haastamiseksi:

Oppilas 1: Mä mittaan tän sivun et saadaa toi toinen sivu saman mittaseks

Oppilas 2: Voiko nii muka tehä? Eihän geometrises piirtämises saa mitata?

Haastaminen tarkoittaa sitä, kun esitetään jokin epäkohta toisen ideaan liittyen. Tähän ulottuvuuteen kuuluu myös kyseenalaistavat kysymykset, joista tulee ilmi, että kysymyksen kohteena olevassa ideassa on epäkohta. Syventäminen on toisen idean vieminen eteenpäin ja sen tarkentaminen. Tässä tutkimuksessa syventämiseen on otettu mukaan vain väärän idean kehittäminen eteenpäin väärällä tavalla. Jos oppilas osaa kertoa väärään ideaan oikean idean ja viedä eteenpäin omaa oikeaa ideaansa, niin se kuuluu haastamiseen eikä syventämiseen. Kommentointi on mitä tahansa kommentointia ilman kysymyksen esittämistä, syventämistä tai haastamista. Kommentointiin kuuluu myös sanaton kommentointi, esimerkiksi nyökkäys tai jonkinlainen reagointiin kuuluva ilme. Vastaaminen on sitä, kun toinen kysyy kysymyksen, ja siihen vastataan. Tähän ulottuvuuteen lasketaan tässä tutkimuksessa tilanteet, kun oppilas kysyy virheellisen kysymyksen, ja saa siihen vastauksen toiselta. Vastaamisesta on kuitenkin poissuljettu vastaukset, jotka sisältävät haastamista, tai epäkohdan korjaamisen. Esimerkiksi seuraavanlainen tilanne luokiteltaisiin tutkimuksessamme vastaamiseksi:

Oppilas 1: Eikös kolmion pinta-ala oo kanta kertaa korkeus?

Oppilas 2: Joo on.

Kun taas seuraava tilanne luokiteltaisiin haastamiseksi:

Oppilas 1: Nyt ku tän kolmion kateetit on kolme ja kaks, nii eikös sen pinta-ala oo kolme kertaa kaks eli kuus?

Oppilas 2: Ei, vaan se on kolme kertaa kaks jaettuna kahella, eli kolme.

Viimeisenä ulottuvuutena on ei huomioida. Tähän ulottuvuuteen kuuluvat kaikki virheiden huomiotta jättämiset. Tällaiset tilanteet ovat niitä, kun yksikään oppilas ei vastaa tai reagoi mitenkään toisen esittämään virheeseen. Alla vielä taulukon muodossa oma analysointimenetelmämme.

Taulukko 1

Dialogiset liikkeet virheen esiintymisen jälkeen	
Kysymyksen esittäminen	Oppilas esittää kysymyksen liittyen toisen oppilaan virheelliseen ideaan. Kysymys ei ole kyseenalaistavaan sävyyn esitetty.
Haastaminen	Oppilas esittää epäkohdan toisen oppilaan ideassa.
Syventäminen	Oppilas kehittää eteenpäin toisen oppilaan virheellistä ideaa virheelliseen suuntaan.
Kommentointi	Oppilas ainoastaan kommentoi toisen oppilaan ideaa ilman kysymyksen esittämistä, syventämistä tai haastamista. Kommentointi voi myös olla sanatonta reagointia, kuten nyökkäys tai kasvojen ilme.
Vastaaminen	Oppilas vastaa toisen oppilaan esittämään kysymykseen, mutta vastaus ei sisällä haastamista.
Ei huomioida	Oppilas ei huomioi millään tavalla toisen oppilaan tekemää virhettä.

Yllä olevaa analysointimenetelmää on käytetty luokittelemaan koko dialogitilanne. Olemme katsoneet aineiston videoilta tilanteen, jossa esiintyy virhe ja sen jälkeen listasimme ylös, millainen virhe on kyseessä. Tämän jälkeen seurasimme videolta tilannetta, mitä tapahtuu virheen esiintymisen jälkeen. Näiden tilanteiden analysointiin on käytetty Taulukkoa 1. Tilanteita on analysoitu yleisesti koko tilanteena, ei yksittäisinä puheenvuoroina. Analyysissamme ei siis ole ratkaisevaa se, mitä ensimmäisessä ja toisessa puheenvuorossa tarkalleen sanotaan ja mihin ulottuvuuteen ne menevät, vaan tärkeää on se, millaisena tilanne yleisesti jatkuu. Jos edes yksi oppilas tilanteessa haastaa virheen tekijän, niin koko tilanne on luokiteltu haastamiseksi. Jos taas kukaan muu ei reagoi virheeseen, mutta yksi oppilas nyökkää virheen esittäjälle, niin tilanne luokitellaan kommentoinniksi.

Tilanteiden luokittelun jälkeen olemme koonneet Excel-tiedostoon yhteenvedon. Listasimme aineiston oppitunnit kronologiseen järjestykseen, ja kokosimme niiden alle eri tunneilla esiintyneiden ulottuvuuksien määrät. Eri oppitunneilla oli eri määrät osallistuneita ryhmiä, niin laskimme oppitunneittain yhteensä olevat ulottuvuuksien määrät. Näistä laskimme prosenttiosuudet, jolloin näimme, mikä ulottuvuus esiintyy eniten/vähiten eri oppitunneilla. Näiden perusteella analysoimme, mikä on oppilaiden yleisin tapa reagoida muiden tekemiin virheisiin. Käyttämämme Excel-taulukon pohjalta saisi myös tietoa siitä, onko prosenttiosuuksissa muutosta, kun verrataan oppitunteja 7.-luokalta 8.-luokkaan.

Taulukoissa näkyvät oppituntien aiheet ja tuntien pitäneet opettajat. Dialogiulottuvuuksien riville on merkattu opettajittain määrät, millaisina dialogitilanteet jatkuvat virheen jälkeen. Oikeanpuolimmaisessa sarakkeessa on prosenttiosuus, eli laskettuna oppitunnin kaikki dialogitilanteet yhteen, saadaan ulottuvuuksien prosenttiosuudet.

Neljännessä eli viimeisessä vaiheessa kirjoitetaan yhteenveto. Tutkielmassa tämä näkyy kahdessa seuraavassa luvussa, tuloksissa sekä pohdinnassa. Tuloksissa avataan analyysin tarjoamat tiedot. Pohdinnassa lopuksi pohditaan saatuja tuloksia ja niiden merkitystä.

5.5 Eettiset ratkaisut

Tutkimusaineiston käyttöä varten molemmat tutkielman tekijät ovat kirjoittaneet salassapitovelvollisuuden aineistoa varten. Aineistoa ei saa nähdä tai kuulla kukaan muu, kuin tutkielman tekijät. Aineistoa on käytetty tietoturvallisesti, eli mitään kuvia tai videointeja aineistosta ei ole tallennettu omalle tietokoneelle. Tutkielman ollessa valmis, oikeudet aineistoon poistetaan tekijöiltä, ja kaikki mahdolliset tallennetut tiedot ja muistiinpanot aineistoon liittyen poistetaan.

Tutkimuksessa käytetään pseudonyymeja. Kun tutkielmassa esitetään dialogitilanteita litteroituna, niin ei käytetä aineistossa esiintyneiden henkilöiden oikeita nimiä, vaan tunnistekoodeina käytetään esimerkiksi Oppilas 1 ja Oppilas 2.

Myös opettajat on koodattu tunnistein Opettaja 1 ja Opettaja 2. Opettajilla tunniste on vakio, eli esimerkiksi Opettajasta 1 puhuttaessa kyseessä on aina sama henkilö.

6 TUTKIMUSTULOKSET

Tulokset on jaettu kahteen kategoriaan. Luvussa 6.1 käsitellään erilaisia virhetyyppejä. Tässä osiossa esitellään, millaisia olivat yleisimmät aineiston geometrisissa aiheissa esiintyneet virheet ja virhekäsitykset. Luvussa 6.2 syvennytään virheen esiintymisen jälkeiseen dialogiin. Dialogia analysoidaan luvussa 5.4 esitellyllä sovelletulla mallilla, joka löytyy Taulukosta 1. Tämä osio antaa informaatiota siitä, miten oppilaat yleisesti reagoivat muiden tekemiin virheisiin.

6.1 Erilaiset virhetyypit

Yksi tämän tutkimuksen tutkimuskysymyksistä pohjautuu siihen, millaisia virheitä/virhekäsityksiä aineistossa mukana olleilla ryhmillä esiintyy. Olemme poimineet aineistosta yleisimmin ilmenneitä virheitä ja virhekäsityksiä, ja esittelemme ne tässä luvussa. Olemme kategorisoineet erilaisia yleisimpiä aihealueita, joilla virheitä eniten esiintyy.

Kaikki aineiston oppitunnit ovat geometrian tunteja. Eri oppitunteja on viisi kappaletta, ja aiheita ovat piiri ja pinta-ala, geometrinen piirtäminen, 3D-geometria, nelikulmion kulman suuruus ja Pythagoraan palapeli. Oppituntien aiheet on esitelty tarkemmin luvussa 5.3.

6.1.1 Termit ja niiden määritelmät

Kaikista yleisin aihealue, jossa virheitä ilmenee, on termit ja niiden määritelmät. Näissä virheissä ilmeni paljon samankaltaisuuksia oppilaiden kesken ja tätä esiintyi lähes jokaisella oppitunnin aiheista. Virheiden määrät kategorioittain esitetään Taulukossa 2.

Taulukko 2

Virheiden määrät tyypeittäin

Virhetyyppi	Määrä
Termit	84
Pinta-ala & lävistäjän pituus	44
Geometrinen piirtäminen	7
Kulman suuruus	22
Yhteensä	157

Tästä huomataan, että virheet termeihin liittyen kattaa yli puolet kaikista virheistä. Lisäksi oppitunneittain jaoteltuna virheet jakautuivat kategorioittain seuraavasti:

Taulukko 3

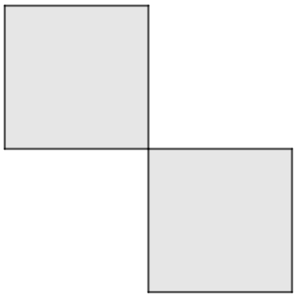
Virheiden määrät tunneittain sekä tyypeittäin

	Nelikulmion kulman suuruus	Geometrinen piirtäminen	Piiri ja ala	Pythagoraan palapeli	3D geometriaa
Termit	12	14	26	9	23
Pinta-ala & lävistäjän pituus	0	1	19	20	4
Geometrinen piirtäminen	0	7	0	0	0
Kulman suuruus	22	0	0	0	0
Yhteensä	34	22	45	29	27

Yleisimmät termeihin liittyvät virheet koskivat kuvioiden määritelmiä. Näihin kuvioihin sisältyy sekä kaksiulotteisia tasokuvioita että kolmiulotteisia avaruuskappaleita. Tasokuvioissa näytti olevan selkeitä määritelmiä koskevia virhekäsityksiä, kun taas avaruuskappaleissa kyseessä oli useassa tapauksessa vain virheellisesti sanottu termi, esimerkiksi kuutiosta puhuttaessa mainitaan kuution sijasta neliö, tai pallosta puhuttaessa pallon sijasta ympyrä.

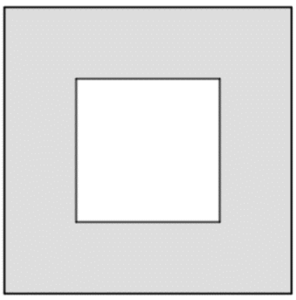
Tasokuvioita koskevat virheet painottuivat monikulmion, nelikulmion ja neliön määritelmiin. Näitä ilmeni oppitunneilla aiheissa piiri ja pinta-ala sekä nelikulmion kulman suuruus. Monikulmion määritelmä löytyy luvusta 3.2. Monikulmio on suljetun murtoviivan rajaama tason osa, jonka janat eivät leikkaa toisiaan muualla, kuin janojen päätepisteissä. Tästä huolimatta oppilaat kuitenkin useassa tilanteessa ajattelivat, että monikulmio voisi olla useassa eri osassa. Esimerkiksi piiri ja pinta-alan tunnilla vastaan tuli useita tämänkaltaisia ehdotuksia monikulmioksi:

Kuvio 30



Toinen usein ilmenevä virheellinen ajatus monikulmiosta oli kuvio, jossa on reikä keskellä.

Kuvio 31



Näistä kumpikaan Kuvioista 30 ja 31 ei kuitenkaan ole monikulmio. Nyt kyseessä on sisällöllinen virhekäsitys. Oppilaat ymmärtävät monikulmion määritelmän väärin, ja siten syntyy virheellisiä ratkaisutapoja. Tällaiset tilanteet eivät olleet aineistossa yksittäistapauksia, vaan niitä ilmeni useita.

Kolmiulotteisten avaruuskappaleiden virheet koskivat pääasiassa tilanteita, joissa avaruuskappaleen termin sijasta käytettiin vastaavan kaksiulotteisen kuvion nimeä. Tällaisia olivat esimerkiksi pallon sijasta ympyrä tai kuution sijasta neliö. Seuraava esimerkki on Opettajan 5 tunnilta 3D-geometriaa:

Opettaja 5: Mihin te haluatte sen pallon keskipisteen?

Oppilas 1: Varmaan keskelle

Opettaja 5: Ja mitä?

Oppilas 2: Neliöö

Opettaja 5: Sitä kuutioo

Tässä tilanteessa ei varsinaista virhekäsitystä ole havaittavissa, sillä virheellinen ilmaisu vaikuttaa tilanteessa vain epätarkalta termien käytöltä. Tilanteessa kuitenkin syntyy virhe, sillä kyseessä on väärä termi.

Oppitunnilla nelikulmion kulman suuruus ilmeni paljon nelikulmioon ja neliöön liittyviä virheitä. Neliö on eräs tietynlainen nelikulmio, jolla on neliölle tyypilliset ominaisuudet. Oppilaat kuitenkin useassa tapauksessa yhdistävät jokaisen nelikulmion olevan neliö, vaikka näin ei kuitenkaan ole. Seuraava tilanne esiintyi Opettajan 1 oppitunnilla nelikulmion kulman suuruus:

Oppilas 1: [piirtää ipadillä] Näin, no vielähän toi neljä neliö peri eikse oo neliö jos siin on neljä kulmaa

Oppilas 2: Jooh hyvä (Oppilas 1) osaatkin ton

Neliössä on kyllä neljä kulmaa, mutta ollakseen neliö, sen kaikkien sivujen tulisi olla samanmittaisia ja jokaisen kulman tulisi olla 90 astetta. Nyt kuitenkin tilanteessa Oppilas 1 piirtää iPadilla nelikulmiota, joka ei täytä neliön ominaisuuksia, mutta viittaa siihen kysymyksensä neliöön liittyen.

Toinen merkittävä virhe nelikulmion ominaisuuksiin liittyvistä virheistä liittyi nelikulmion kulman suuruksiin. Monessa tilanteessa luultiin, että mikään nelikulmion kulmista ei voisi olla kupera, eli suurempaa kuin 180 astetta. Toinen ajatus oli se, että suurin kulma voisi olla 360 astetta. Kulman ollessa 360 kyseessä ei kuitenkaan ole enää nelikulmio, vaan kuviosta tulee piste. Opettajan 2 oppitunnilla nelikulmion kulman suuruudesta käytiin seuraava keskustelu:

Oppilas 1: Se kävi 360.

Oppilas 2: Häh.

Oppilas 1: Se kävi 360.

Oppilas 2: Mis vaihees.

Oppilas 3: Äsken. Siis se (ESS). Siin tulee se 360.

Oppilas 1: Siit tulee 360. Siin ei oo. Yhes vaihees näkyy et siin ei oo enää noit juttuja.

Oppilaat tutkivat GeoGebralla annettua tehtävää. Kun he saivat sovelluksella kulman muutettua 360 asteiseksi, niin nelikulmion muut osat katosivat jättäen GeoGebra-tiedostoon pelkän pisteen. Oppilaat huomasivat kuvion katoavan, mutta olettivat sen silti vielä olevan nelikulmio. Myös monessa muussa tilanteessa oletettiin suurimmaksi mahdolliseksi kulmaksi 360 astetta. Tällöin ei osata ottaa huomioon kolmea muuta kulmaa, joiden tulisi olla suurempia kuin nolla. Nelikulmion kulmien yhteenlaskettu summa on 360 astetta, joten yksi kulma ei voi olla sitä kokonaan. Kulman kasvaessa 360-asteiseksi jää jäljelle vain piste. Oppilaiden olettaessa kuitenkin 360-asteisen nelikulmion kulman mahdolliseksi, voi taustalla olla joko virheellinen käsitys nelikulmion ominaisuuksista, tai puutteellinen hahmottaminen kappaleesta. Puutteellinen hahmottaminen voi olla näkyvää juuri siinä, kun ei osata ottaa kokonaisuutta huomioon. Kokonaisuus jää huomiotta, kun keskitytään ainoastaan yhden kulman suuruuteen, ja muut kulmat jäävät huomiotta.

6.1.2 Kuvion pinta-ala ja sivujen pituudet

Virheet pinta-alaan liittyen olivat yleisiä. Oli käytetty vääriä laskukaavoja, keksitty yhteyksiä piirin ja pinta-alan välillä sekä virheellisiä silmämääräisiä laskutapoja pinta-alan laskemiselle. Pinta-alan laskemisen yhteydessä yleisiä virheitä aiheutti myös vääränlainen käsitys sivujen ja pinnan lävistäjän yhteydestä.

Erilaisia laskukaavoja pinta-alalle oli käytetty paljon. Vastaan tuli muun muassa seuraavanlaisia laskukaavoja pinta-alalle: $(a+b)^2$, $\frac{(a \cdot b)}{3}$ ja $(a+b) \cdot 2$. Viimeisimpänä mainittu on Opettajan 4 tunnilta, ja tilanne eteni seuraavasti:

Oppilas 1: Noni, eli monikulmio, eli meijän pitäis, eli se pinta-ala, nii eihän periaattees, onks se niinku niitten tikkujen pituus, niinku sillee.

Oppilas 2: Piiri oli se kaikki yhtee.

Oppilas 1: Nii.

Oppilas 3: Oliks se pituus ja leveys…

Oppilas 1: Joo.

Oppilas 3: …yhtee kertaa kaks.

Oppilas 1: Eiks pinta-ala, miten se laskettii.

Oppilas 2: Eiks se ollu leveys…

Oppilas 3: Se laskettii leveys ja…

Oppilas 2: …kertaa.

Oppilas 3: …levey, eiku se oli leveys ja pituus kertaa 2.

Oppilas 2: Joo. Tuliks siihen sitä kahta.

Oppilas 3: Siis ne yhtee, ne yhtee. Sitte kertaa 2.

Oppilas 1: Joo eli se oli vaikka niinku 10 kertaa 2, eli joo.

Oppilas 3: Kato, täs on vaikka boksi. Tää on esimerkiks 5 senttimetriä, ja tää on 10. Se on niinku 15, 15 kertaa 2 on 30.

Yllä olevassa tilanteessa suorakulmion pinta-alan laskukaava muistetaan väärin. Oppilas 2 muistelee suorakulmion pinta-alan kaavaa oikein, mutta oppilas 3 kertoo sen olevan kannan ja korkeuden summa kerrottuna kahdella. Tilanteessa oppilas 2 jopa haastaa virheellistä ideaa, mutta vakuuttuu lopulta oppilaan 1 ja oppilaan 3 laskutavasta. Oppilailla on tässä tilanteessa sekoittunut piirin laskeminen pinta-alan laskemisen kanssa. Kyseisellä laskukaavalla saa laskettua nelikulmion piirin, jonka oppilaat ovat nyt mainitsemassaan esimerkissä laskeneet, mutta pinta-ala jää kyseisessä tapauksessa ratkaisematta.

Ilmeni myös toinen tapa, millä oppilaat sekoittavat piirin ja pinta-alan keskenään. Tunnilla piiri ja pinta-ala oppilaille annetaan 12 tulitikkua, joiden avulla tulisi tehdä monikulmio, jonka pinta-ala on mahdollisimman pieni. Koska tikkujen määrä pysyy samana, niin piiri on vakio. Oppilaat kuitenkin sekoittivat sen koskevan myös pinta-alaan, jolloin pinta-alakin pysyisi vakiona. Opettajan 4 tunnilla oppilaat kävivät seuraavan keskustelun:

Oppilas 1: Nyt tän pinta-ala on yheksän

(oppilas 1 rakentaa ison neliön ja siirtää neliön kulman kohti keskustaa)

Oppilas 2: Nii sit siit tulee viis vaa ku sä teet tollei

Oppilas 1: Voi vitsi

Oppilas 2: [ess]

Oppilas 1: Ihanko oikeesti täst tulee viis

Oppilas 2: Niin tulee. Ihan miten sen tekee nii tulee viis [ess] katoin nyt oikein.

Oppilas 3: [ess]

Oppilas 1: Täs on viis ruutuu.

Yllä olevassa tilanteessa ryhmä on kokeillut erilaisia ratkaisuja saaden viimeisimpänä yhdeksän ruudun kokoisen neliön. Pienentäessään tätä neliötä he saavat jälleen viiden ruudun kokoisen monikulmion. Oppilas 2 toteaakin pinta-alan pysyvän aina viiden ruudun kokoisena piirin pysyessä vakiona. Tilanne ei ole yksittäistapaus, sillä useammalla ryhmällä ilmeni samaa ajattelutapaa pinta-alan vakiona pysymisestä.

Piiri ja pinta-alan tunnilla oppilailla oli käytössään tulitikut, joilla tuli tehdä ruutupaperille monikulmio, jolla on mahdollisimman pieni pinta-ala. Tikkuja sai asetella miten halusi, kunhan pinta-ala on laskettavissa. Yksi tikku oli ruudukon yhden sivun pituinen. Tehtävää ratkaistessaan lähes jokaisella ryhmällä ilmeni jossain vaiheessa samanlainen virhekäsitys ruudun lävistäjän pituudesta. Tehtävänannossa oli annettu ruudun sivun pituus, joka oli yksi tulitikku. Todella moni siirsi tikun ruudun lävistäjäksi, ja oletti tällöin lävistäjän pituudeksi yksi. Tästä on silmämääräisestikin huomattavissa, että tikku ei lävistäjänä yllä kulmasta kulmaan, mutta se jätettiin huomiotta. Seuraavassa tilanteessa oppilaat huomasivat, että tikku ei yllä lävistäjänä reunasta reunaan. Tilanne on Opettajan 5 tunnilta piiri ja pinta-ala:

Oppilas 1: Pitäskö tehä semmonen niinku siksak sinne ylös niin siitä sais

Oppilas 2: Niin puolet

Oppilas 1: laittaa ni siitä saa sen niinku pinta-alan

Oppilas 3: No ei oo tarpeeks [ESS]

Oppilas 2: Ne menee ihan hyvin, riittää pituudeks

[Puhuvat muista asioista]

Oppilas 3: Miten tost voi laskee sen pinta-alan

Oppilas 1: Kato ku tästä sit niinku tavallaan kun tekee

Oppilas 2: Puolet on tota toista

Oppilas 1: Nii

Oppilas 2: Ne ei mee tuonne yläreunaan asti [tikku lävistäjään]

Oppilas 3: Jos nää laittaa keskemmälle, niin sit noist molemmista saman verran

Oppilas 2: Saaks ne tehä silleen

Oppilas 3: En mä tiedä

Vaikka oppilaat huomasivat, että tapa ei toimi, he päättivät silti jatkaa tehtävää virheellistä tapaa hyödyntäen.

Ajatus siitä, että neliön lävistäjä olisi sama kuin sivun pituus, oli todella yleistä ja sitä esiintyikin lähes jokaisella ryhmällä.

6.1.3 Geometrinen piirtäminen

Yksi oppituntien aiheista oli geometrinen piirtäminen. Geometrinen piirtäminen tapahtuu ainoastaan harppia ja viivainta käyttäen, mutta mittaaminen on kiellettyä. Viivainta saa siis käyttää vain suorien piirtämiseen. Tunnin alussa oppilaille kerrottiin, mitä on geometrinen piirtäminen, ja mitä saa, ja mitä ei saa tehdä. Silti tällä oppitunnilla ilmeni todella paljon silmämääräistä tekemistä ja mittaamista viivaimen avulla.

Suurimmat virheet liittyivät siihen, mitä oikeasti on mittaaminen ja viivaimen hyödyntäminen. Monessa tilanteessa yritettiin mitata jollain tavoin piirrettyä kuviota. Ongelmia oli myös siinä, mikä on perustellusti piirretty geometrisesti, ja milloin ratkaisu oli tehty silmämääräisesti. Esimerkiksi Opettajan 4 tunnilla eräs ryhmä piirsi ensin kaksi janaa, jotka silmämääräisesti olivat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tällöin janojen leikkauskohdassa syntyy oletetusti neljä 90 asteen kulmaa. Tämän jälkeen oppilaat puolittivat jokaisen oletetun 90 asteen kulman. Kulmat saatuaan he harpin avulla etsivät janoilta yhtä kaukana olevat pisteet, ja piirsivät tehtävänannossa halutun neliön. Lopuksi he perustelivat ratkaisunsa olevan geometrisesti tehty, sillä he käyttivät harppia ja viivainta kulmanpuolittajiin, jolloin he saivat mielestään varmasti 90 asteen kulmat. Lisäksi harpin mitan avulla he saivat neliön sivut samanmittaisiksi, jolloin ratkaisu olisi perustellusti neliö. Tehtävä eteni lopussa oikeaoppisesti, mutta kuitenkin väärin alun virheen vuoksi. Silmämääräisesti piirretyt janat eivät välttämättä olleet kohtisuorassa, joten kulmanpuolittajilla ei välttämättä saatu 90 asteen kulmia piirrettyä, joten ratkaisu ei välttämättä ollut neliö.

Virheet geometriseen piirtämiseen liittyen voivat olla oikeita virhekäsityksiä siitä, mitä geometrinen piirtäminen oikeasti on, ja milloin ratkaisu on perustellusti tehty, eikä silmämääräisiä vaiheita ole. Toisaalta virheitä tässä kategoriassa saatetaan tehdä paljon siksi, kun tehtävässä ei osata edetä, jolloin yritetään kaikkia mahdollisia keinoja päästäkseen jonkinlaiseen ratkaisuun.

6.2 Dialogin jatkuminen virheen jälkeen

Toinen tutkimuskysymyksistämme käsittelee virheiden vaikutusta argumentaatioprosessin etenemiseen. Virhetilanteiden jälkeiset tilanteet jaetaan eri ulottuvuuksiin, joita käsittelemme tässä luvussa.

Havaitessamme virheen olemme seuranneet dialogin jatkumista ja jakaneet tilanteet kuuteen eri ulottuvuuteen. Mallimme on sovellettu Hähkiöniemen ym. (2019) mallista ja löytyy Taulukosta 1. Mallissamme emme analysoi virhetilanteita yksittäisten puheenvuorojen perusteella, vaan luokittelemme koko tilanteen vain yhteen ulottuvuuteen. Olemme listanneet kuusi ulottuvuutta ja laskeneet prosenttiosuudet aihepiireittäin. Käsittelemme seuraavaksi jokaista ulottuvuutta ja niiden yleisyyttä tutkimuksessamme. Taulukoissa ovat oppituntien aiheittain tunnin pitäneet opettajat, dialogin eri ulottuvuudet sekä niiden prosenttiosuudet oikeanpuoleisessa sarakkeessa. Prosenttiosuudessa on laskettu yhteen kaikki tilanteet.

Taulukko 4

Seitsemännen luokan prosenttiosuudet

Nelikulmion kulman suuruus

	Opettaja 2	Opettaja 1	%
Kysymyksen esittäminen	1	1	6.25%
Haastaminen	6	3	28.13%
Syventäminen	0	1	3.13%
Kommentoiminen	8	6	43.75%
Vastaaminen	0	2	6.25%
Ei huomioida	0	4	12.50%

Geometrinen piirtäminen

	Opettaja 4	Opettaja 5	%
Kysymyksen esittäminen	0	1	5.00%
Haastaminen	4	3	35.00%
Syventäminen	0	0	0.00%
Kommentoiminen	8	2	50.00%
Vastaaminen	9	0	0.00%
Ei huomioida	0	2	10.00%

Piiri ja ala

	Opettaja 3	Opettaja 4	Opettaja 5	%
Kysymyksen esittäminen	0	0	1	2.38%
Haastaminen	2	4	5	26.19%
Syventäminen	3	4	0	16.67%
Kommentoiminen	4	8	7	45.42%
Vastaaminen	1	0	1	4.76%
Ei huomioida	1	1	0	4.76%

Taulukko 5

Kahdeksannen luokan prosenttiosuudet

Pythagoraan palapeli

	Opettaja 4	Opettaja 5	%
Kysymyksen esittäminen	2	1	10.34%
Haastaminen	4	2	20.69%
Syventäminen	1	4	17.24%
Kommentoiminen	7	4	37.93%
Vastaaminen	0	0	0.00%
Ei huomioida	3	1	13.79%

3D geometriaa

	Opettaja 2	Opettaja 4	Opettaja 5	%
Kysymyksen esittäminen	0	1	0	3.70%
Haastaminen	2	1	0	11.11%
Syventäminen	1	0	1	7.41%
Kommentoiminen	5	6	2	48.15%
Vastaaminen	0	0	0	0.00%
Ei huomioida	1	1	6	29.63%

6.2.1 Kommentoiminen

Dialogi jatkui eniten kommentoimisella sekä seitsemännen että kahdeksannen luokkien virhetilanteissa. Kommentoidessa oppilas reagoi toisen oppilaan vastaukseen joko sanallisesti tai sanattomasti esimerkiksi nyökkäyksellä.

Opettajan 1 tunnilta nelikulmion kulman suuruus:

Oppilas 1: no kirjotetaan eli öm onkse niinku onks meiän perustelu se että se ei voi olla 179 koska

Oppilas 2: jos jos öö laittaa enemmän kun 171 se muuttuu kolmioksi

Oppilas 1: joo

Yllä olevassa tilanteessa ryhmä on saanut nelikulmion suurimmaksi kulmaksi virheellisen vastauksen 179 astetta. Kirjoittaessa perusteluja oppilas 2 sanoo virheellisesti 171, johon oppilas 1 kommentoi sanallisesti. Tilanteessa oppilas 1 ei lähde haastamaan oppilaan 2 vastausta vaan myötäilee virhettä. Oppilas 1 saattaa epäillä omaa ideaansa tai sen perusteluja, jolloin tilanteessa hyväksytään virheellinen vastaus. Koska virheellistä kulman suuruutta ei korjata, ryhmä päätyy lopulta vastaamaan 171 astetta. Samankaltaisia tilanteita kommentoimisesta esiintyy tutkimuksessa useasti.

Kaikissa viidessä aihepiirissä kommentoimista esiintyi eniten emmekä havainneet suurta kannatuksen muutosta. Kommentoimisen esiintyvyys oli aaltomaista ja vaihteli aihepiireittäin. Tunnin aiheella ja tehtävillä onkin vaikutusta kommentoimisen yleisyyteen. Oppilaat saattavat kokea kommentoimisen helpoksi tavaksi reagoida virheeseen ollessaan epävarmoja joko omasta tai toisen ideasta tai sen perusteluista.

6.2.2 Haastaminen

Havaitsimme toiseksi eniten haastamista, missä oppilas osoittaa epäkohdan toisen ideasta kommentoimalla tai kysymällä. Haastamista esiintyi prosentuaalisesti lähes saman verran kaikissa aihepiireissä lukuun ottamatta 3D-geometrian tunteja, missä esiintyvyys oli vähäisempää.

Alla olevassa esimerkissä pienryhmä on aikaisemmin saanut yhdistettyä pinta-alat ja tasokuviot oikein. Pinkin neliön pinta-alaksi on onnistuttu saamaan a^2 ja vihreän neliön pinta-alaksi on onnistuttu saamaan b^2. Ryhmä aloittaa käsittelemään uudelleen väitettä 1 eli *suurimman neliön pinta-ala olisi* $a^2 + b^2$, mikä oli heidän mielestään totta.

Opettajan 4 tunnilta Pythagoraan palapeli:

Oppilas 1: Ei, ku.
Ei, ku venaa. Tää on epätosi. [osoittaa väitettä 1]

Oppilas 2: Mikä.
Ei oo epätosi.

Oppilas 1: Kyllä on, ku se on tämä plus tämä.

Tämä plus tämä (ESS). [osoittaa a^2 ja b^2 neliöitä]

Oppilas 3: Mähän sanoin.

Oppilas 2: Ei ole. Se on tosi. [viittaa väitteeseen 1]

Oppilas 1: Mikä on ab.

A kaks.

Mikä on a kaks. Tämä. [osoittaa pinkkiä a^2 neliötä]

Oppilas 2: Tämä on tosi.

Oppilas 1: Nii, nii. Mikä on a kaks. Se on tämä. [osoittaa pinkkiä a^2 neliötä]

Mikä on b kaks. Se on tämä. [osoittaa vihreää b^2 neliötä]

Ja nämäkö sinä sanot et se on yhtä sama ku tämä.

Mä en tiiä, mitä, mitä huumeit sun pitää vetää sä saat et tämä on sama kuin tämä [suurin neliö sekä vihreä ja pinkki neliö]

Oppilas 2: Niin, mutta se on sama

Oppilas 3: Ei se (ESS). Ei tosta voi tulla A plus B (ESS).

Tilanteessa oppilas 1 huomaa väitteen yksi olevankin epätosi, mutta oppilas 2 uskoo sen olevan tosi. Oppilas 1 lähtee haastamaan tätä virhettä ja näyttämään geometrisesti neliöillä väitteen olevan epätosi. Vaikka oppilas 1 osoittaa geometrisesti apukuvioiden avulla väitteen olevan epätosi, oppilas 2 ei meinaa uskoa tätä. Tilanteessa oppilas 3 on samaa mieltä oppilaan 1 kanssa, joka haastoi virheellistä vastausta.

Vaikka epäkohdan osoittaminen toisen ideasta voi vaikuttaa epäsuositulta tavalta reagoida virheeseen, huomasimme oppilaiden haastavan pienryhmissä rohkeasti toisten ideoita. Prosentuaalisesti haastaminen oli hieman suositumpaa seitsemännellä vuosiluokalla.

6.2.3 Syventäminen

Syventämisessä toisen oppilaan virheellistä ratkaisua tai vastausta kehitetään virheelliseen suuntaan. Syventämisen esiintyvyydessä oli vaihtelevuutta eri aihepiirien välillä.

Opettajan 5 tunnilta 3D geometriaa:

Oppilas 1: pistettiin pallon keskipiste

Oppilas 2: mä sanoin, että sain ympyrän keskipisteen (ESS)

Oppilas 1: sit pistettiin ympyrän kaari just ja just kuution kulman ulkopuolelle

Tilanteessa Oppilas 1 on käyttänyt oikeaa termiä pallo, mutta Oppilaan 2 virheen takia Oppilas 1 muuttaa terminsä ympyräksi. Tilanteessa vahvistetaan Oppilaan 2 virheellistä termiä. Ryhmän lopullisessa vastauksessa käytetään virheellistä termiä.

Osassa aiheista syventäminen oli olematonta tai todella vähäistä. Oppilaat eivät lähteneet vahvistamaan toisten opiskelijoiden virheellistä ideaa. Syventäminen oli prosentuaalisesti suositumpaa ainoastaan piiri ja pinta-alan sekä Pythagoraan palapelin tunneilla.

6.2.4 Kysymyksen esittäminen

Esittäessään kysymyksen oppilas haluaa saada lisätietoa toisen oppilaan virheellisestä ideasta, mutta ei kyseenalaista virhettä. Oppilaat esittivät vain vähän kysymyksiä toisten virheisiin liittyen.

Opettajan 5 tunnilta piiri ja pinta-ala:

Oppilas 3: Mikä on monikulmio?

Oppilas 1: Monikulmio on enemmän kuin neljäkulmainen kolmio --- Siis se on, siinä on enemmän kulmia kuin neljä mun mielestä

Oppilas 2: Ai oikeesti

Oppilas 3: Riittääkö jos siinä on neljä

Yllä olevassa tilanteessa oppilas 1 vastaa virheellisesti oppilaan 3 kysymykseen monikulmion määritelmästä. Tähän virheelliseen ideaan oppilas 3 kysyy täydentävän kysymyksen. Oppilaan 2 ja oppilaan 3 puheenvuorot tulevat lähes yhtäaikaisesti, joten oppilaan 3 puheenvuoro analysoitiin.

Kysymyksen esittäminen vaatii oppilailta vähemmän rohkeutta, mutta ulottuvuus ei silti ollut kolmen suosituimman kärjessä. Toisaalta kysymyksen esittäminen asettaa kysyvässä olevan oppilaan haavoittuvaan asemaan.

6.2.5 Vastaaminen

Vastaaminen oli vähiten käytetty ulottuvuus. Havaitsimme oppilaiden esittävän harvoin kysymyksiä ja usein muotoillen kysymyksen siten, ettei niissä esiinny virhettä.

Opettajan 1 tunnilta nelikulmion kulman suuruus:

Oppilas 1: [piirtää ipadillä] Miltä näyttää ees neliökulma neliökulma
Oppilas 2: Neliökulma
Oppilas 1: Emmää muista
Oppilas 2: Siis ihan normaalilta neliöltä varmaan

Tilanteessa Oppilas 1 esitti virheen sisältävän kysymyksen käyttäen virheellistä termiä neliökulma nelikulmion sijaan. Oppilas 2 vastaa tähän kysymykseen neliökulman näyttävän normaalilta neliöltä. Tätä tilannetta ei luokitella kommentoimiseksi, sillä Oppilaan 1 virheellinen käsitys esitettiin kysymyksen muodossa. Syventäminen ei sovi tilanteeseen, koska ideaa ei lähdetä kehittämään eteenpäin.

6.2.6 Ei huomioida

Mallimme kuudes ulottuvuus, ei huomioida, kattaa kaikki virhetilanteet, joissa virhettä ei käsitellä tai se jätetään kokonaan huomioimatta. Oppilaan ideassa esiintyy virhe, mutta muut ryhmän jäsenet eivät reagoi tilanteeseen sanallisesti eikä sanattomasti. Tämä ulottuvuus oli kolmanneksi yleisin yli puolessa tutkimuksemme aiheista. Oppilaat saattoivat huomata virheellisen idean, mutta eivät uskaltaneet haastaa tätä. Virhe saattoi myös jäädä toisilta oppilailta täysin huomaamatta, jonka takia he eivät kommentoi tilannetta millään tavalla.

7 POHDINTA

7.1 Tulosten tarkastelu

Tämän tutkielman tavoitteena on tarjota tietoa 7.–8. -luokkalaisten tyypillisimmistä virheistä geometriassa. Analyysi ei pääty vain virheiden käsittelyyn, vaan halutaan myös selvittää, miten muut oppilaat reagoivat vertaistensa tekemiin virheisiin.

Kuten tutkimuksen alussa saattoi jo olettaa, virheitä esiintyy joka tunti lähes jokaisella ryhmällä. Virheiden määriin liittyen ei siis ilmennyt mitään uutta, vaan oli ryhmä- ja tehtäväkohtaista, missä määrin virheitä esiintyy.

Virheitä analysoidessamme huomasimme niiden olevan suhteellisen samankaltaisia oppilaiden välillä. Kategoria, jossa virheitä esiintyi kaikista eniten, oli terminologia. Termien nimet sekoittuivat sekä määritelmät ja ominaisuudet muistettiin vajavaisesti. Tutkimusta tehdessä tuli ilmi myös oppilaiden puutteita spesifien termien käytössä. Puheessaan ja ratkaisuissaan oppilaat käyttivät paljon termien yläkäsitteitä, vaikka tilanteessa olisi ollut mielekkäämpää käyttää spesifimpiä termejä. Esimerkkinä tästä on geometrisen piirtämisen tunnilla useasti toistunut viiva-sanan käyttö. Tehtävässä käytettiin paljon janoja, mutta usein oppilaiden käyttämä termi oli kuitenkin janan sijasta viiva. Tätä ei olla tutkimuksessa luokiteltu virheeksi, joten sitä ei tutkimustuloksissa lue. Tämä ilmeni kuitenkin havaintona tutkimusta tehdessä, ja se liittyy vahvasti termien puutteelliseen hallintaan.

Vastaavan kaltaista geometrian virhetutkimusta on tehnyt Özerem (2012). Hän tutkimuksessaan on tutkinut koetuloksien kautta 7.-luokkalaisten geometrian virheitä, ja tuloksiin listannut kaikki virhetyypit, joita tuli vastaan. Hänen tuloksissaan on paljon samankaltaisia tuloksia, kuin tässä tutkimuksessa. Myös Özeremin (2012) tuloksista käy ilmi, että puutteita on kuvioiden hahmottamisessa ja monikulmioiden tunnistamisessa ja niiden ominaisuuksien hallitsemisessa. Siispä myös hänen tuloksensa tukevat tietoa siitä, että termien hallinnassa on puutteita.

Oppilaiden termien tarkkuuteen vaikuttaa sekä oppilaan oma osaamistaso että kiinnostus, mutta myös opettajan opetus. Opettajan tulisi opetuksessaan käyttää tarkkoja termejä ja opettaa oppilaat puhumaan matematiikkaa. Kuullessaan opettajalta oikeaoppista termien hallintaa oppilaat ehdollistuvat oikeanlaiseen matemaattiseen kieleen. Kärki (2015) on havainnut tutkimuksessaan opettajaopiskelijoiden tekevän virheitä määritellessään geometrian termejä, jolloin on esimerkiksi puutteita yläkäsitteissä tai määritelmissä sekä määritelmien ehdot ovat riittämättömiä. Silfverbergin (1999) väitöskirjassa kerrotaan opettajien puutteellisten tietojen geometriasta vaikuttavan tasokkaaseen opetukseen negatiivisesti. Jos siis opettaja tekee paljon virheitä ja on huolimaton termien käytössä, niin se voi näkyä myös oppilaissa. Tämä pätee lähinnä termien hallintaan ja oikean termin oikeaoppiseen käyttöön, mutta määritelmien virhekäsityksiin vaikuttaa niiden sisällöllinen ymmärtäminen. Oppikirjoissa tulisi selkeästi ja tarkasti kuvailla termien määritelmät. Matematiikan oppiminen tapahtuu rakentamalla uutta tietoa vanhan tiedon päälle. Oppikirjojen tulisi rakentaa tietoa selkeänä jatkumona ja ikäluokalle sopivalla tavalla, jolloin oppilaan on helpompi yhdistää uusi tieto vanhan tiedon kanssa, ja siten optimoida oppiminen ja välttää mahdollisesti syntyviä virhekäsityksiä.

Analyysin toinen vaihe keskittyi oppilaiden tapoihin reagoida toisten oppilaiden tekemiin virheisiin. Yleisimmäksi tavaksi reagoida toisen oppilaan tekemään virheeseen ilmeni kommentointi. Kommentoinnin määritelmä löytyy Taulukosta 1. Positiivista oli huomata, että toiseksi yleisin tapa näytti olevan kuitenkin haastaminen. Haastamisen ja kommentoinnin väliseen eroon voi vaikuttaa monta eri asiaa. Virhettä ei välttämättä tunnisteta, siitä ei uskalleta sanoa tai omaa kantaansa ei välttämättä osata perustella, jolloin oppilas ei uskalla sanoa mielipidettään vaan päättää hyväksyä toisen virheen ja jättää reagoinnin kommentoimiseksi. Jos oppilas tunnistaa virheen, mutta ei kuitenkaan sano sitä ääneen, voi kyse olla itseluottamuksen puutteesta ja epävarmuudesta. Vähäiseen dialogisuuteen voi Webbin (2009) tutkimuksen mukaan vaikuttaa ilmapiiri, jossa oppilailta vaaditaan oikeaa tai täydellistä selittämistä tehtävälle.

Ryhmädynamiikalla huomattiin myös olevan selkeästi vaikutusta virheisiin reagoimiseen tai reagoimatta jättämiseen sekä yleiseen aktiivisuuteen tehtävien teossa. Aineistossa olevien pienryhmien kokoonpanot vaihtelivat, ja sillä oli vaikutusta ryhmän roolien jakaantumisessa sekä oppilaiden ulosannissa. Oppilas, joka saattoi jossain ryhmässä olla paljonkin äänessä ja johtavassa asemassa, olikin toisen ryhmän kesken täysin hiljaa. Videoilta oli myös selkeästi huomattavissa tiiviitä kaveriporukoita. Ystävyyssuhteet joissain tapauksissa vaikuttivat negatiivisesti tehtävään keskittymisessä, mutta positiivisesti rohkeuteen haastaa ryhmän muiden jäsenten ideoita heidän ollessa läheisiä ystäviä. Vaikka tämän perusteella voisi olla perusteltua harjoittaa argumentaatiotaitoja tutussa ryhmässä, niin on oppilaan itseluottamuksen ja tulevaisuuden tilanteiden osalta kuitenkin tärkeää oppia näitä taitoja erilaisissa ryhmissä myös vieraampien henkilöiden kesken. Vuorovaikutustaitojen kehittyminen yhteisössä on myös osa perusopetuksen (2014) laaja-alaisia opetustavoitteita, joten myös se tukee ajatusta ryhmien vaihtuvuuden kannattamisesta.

7.2 Tutkimuksen arviointi

Tutkimustulosten luotettavuuteen vaikuttavat muun muassa ryhmien vaihtelu, oppilaan mieliala sekä tehtävien haastavuus ja mielekkyys. Pienryhmät vaihtelivat tehtävien kesken, jolloin ryhmädynamiikalla oli vaikutusta varsinkin analyysin toisessa vaiheessa. Oppilaiden roolit olivat erilaisia eri ryhmien kesken, jolloin rohkeutta virheiden haastamiseen ei välttämättä ollut jokaisessa ryhmässä. Oppilas, jolta jossain ryhmässä tuli laadukkaita vasta-argumentteja, saattoi vaieta täysin toisessa ryhmässä.

Myös oppilaan mielialalla voi olla vaikutusta tehtävässä osallistumiseen. Mielialaa on mahdotonta neutralisoida tutkimusta varten, joten se vaikuttaa tuloksiin väistämättä. Vaikutusta on myös tehtävien vaativuustasolla ja mielekkyydellä. Ne vaikuttavat innokkuutena tehtävässä osallistumiseen, joilla on merkitystä ideoiden syntyyn ja halukkuuteen päästä oikeaan ratkaisuun tehtävässä.

Tutkimusta rajoitti hieman videoiden laatu sekä tekniset haasteet. Osassa videoista oppilaiden puheesta ei meinaa saada selvää taustahälinän takia. Oppilaat puhuvat myös välillä hiljaa ja epäselvästi, joten puheenvuorojen sisällöstä ei voinut olla aina varma. Tehtävät tehtiin joko paperille tai tabletille. Välillä kameran sijainnista ja suuntauksesta johtuen oppilaiden työalustaa ei näkynyt kunnolla, jolloin oli haastavaa seurata, mitä oppilaat tekevät. Oppilaat käyttivät paljon ”tuolta tuonne” tai ”tähän tällainen” -ilmaisuja, jotka vaikeuttivat tilanteiden analysointia.

Tutkimuksen luotettavuutta arvioidessa on tärkeää huomioida myös objektiivisuus. Tulokset eivät ole täysin objektiivisia, sillä analyysiin vaikuttaa väistämättä meidän omat tulkintamme. Analyysia varten on pyritty tehdä mahdollisimman tarkat määritelmät, mutta haastavissa ja moniulotteisissa tilanteissa olemme joutuneet neuvottelemaan ja yhdessä tekemään ratkaisuja.

Tulosten yleistettävyyteen vaikuttaa suhteellisen pieni aineisto. Käytössä oli viisi oppitunnin aihetta, viisi eri opettajaa ja yhteensä 69 pienryhmävideota. Tällä otoksella saatiin merkityksellistä tietoa, mutta suuremmalla otoksella voitaisiin tulosten yleisyydestä olla varmempia.

Tutkimusaineiston keruu on toteutettu eettisyys huomioiden. Tutkimukseen osallistuminen oli vapaaehtoista, ja tutkittavien ollessa alaikäisiä, osallistuminen tapahtui vanhempien suostumuksella. Tutkimukseen osallistuvat oppilaat eivät joudu eriarvoiseen asemaan tutkimukseen osallistumattomien oppilaiden kanssa, sillä opetus on kaikille ryhmille samanlaista.

7.3 Jatkotutkimusideat sekä käytännön sovellukset

Tämän tutkimuksen keskittyessä virheisiin geometriassa, voisi tutkimusta jatkaa muillakin matematiikan osa-alueilla, kuten algebrassa tai trigonometriassa. Dialogisuutta virheiden jälkeen voisi tutkia pitkittäistutkimuksena, jolloin nähtäisiin, tapahtuuko mahdollisesti kehitystä argumentaatiotaidoissa virheen jälkeen. Pitkittäistutkimuksessa tulisi kuitenkin pohtia, olisiko olennaista vakiinnuttaa pienryhmät pysymään samoina läpi tutkimuksen. Tällöin voitaisiin ehkä nähdä paremmin henkilökohtaista kehitystä, kun ympäristötekijät pysyvät samana. Kuitenkin argumentaatiotaitoja tulisi osata osoittaa eri tilanteissa ja eri ihmisten seurassa, joten voisi olla myös perusteltua antaa ryhmien vaihtua.

Eräs mahdollinen jatkotutkimusidea olisi myös lähteä tutkimaan tuottavaa ponnistelua. Tuottavalla ponnistelulla tarkoitetaan Warshauerin (2014) mukaan tehtävän ylläpitämiä kognitiivisia tavoitteita ja vaatimuksia, oppilaiden ajatustyötä sekä ponnistelua tehtävän ratkaisemiseksi. Tehtävät aiheuttavat oppilaille haasteita, jolloin he joutuvat välillä suurestikin ponnistelemaan päästäkseen tehtävässä eteenpäin. Näistä tilanteista voisi tutkia, millaista ponnistelu on ja miten ryhmällä on siihen vaikutusta, esimerkiksi tukeeko ryhmä ponnistelua vai tapahtuuko sitä enemmän yksilökeskeisesti.

Tämän tutkimuksen pohjalta voisi olla aihetta tutkia, miten geometriaa opetetaan läpi luokka-asteiden. Tällöin voisi paneutua opetettujen määritelmien tarkkuuteen ja siihen, miten geometriset opit rakentuvat. Tällaisen tutkimuksen avulla voitaisiin konkreettisesti tunnistaa opetuksen ja oppimateriaalien kehityskohdat, sekä aloittaa niiden kehittäminen.

Tämän tutkimuksen tuloksista on hyötyä erityisesti opetuskäytössä. Matematiikan alalla Tuohilammen mukaan (2017) virheet nähdään usein negatiivisessa mielessä sekä oppimista hidastavana. Virheitä tietysti pyritään ehkäisemään, mutta joskus virheet voivat kuitenkin herättää oivallusta ja oppimista. Tässä tutkimuksessa yksi tarkoituksista olikin nähdä, miten virheet oppilaiden kesken vaikuttavat. Tulosten nojalla voidaankin sanoa virheiden synnyttäneen useasti oppimistilanteita ryhmien kesken, kun virheitä on haastettu ja siten ryhmän kesken opittu virheestä ja harjoitettu argumentaatiotaitoja.

Kokonaisuudessaan tämä tutkimus vastasi asetettuihin tutkimuskysymyksiin. Nyt tiedämme enemmän, millaisia ovat yleisimmät virheet geometriassa, ja miten oppilaat yleisesti reagoivat toisten oppilaiden tekemiin virheisiin. Tämän tutkimuksen pohjalta nähdään, mitä opetuksessa ja oppimateriaaleissa tulisi jatkossa kehittää.

LÄHTEET

Asterhan, C. S., & Schwarz, B. B. (2009). Argumentation and explanation in conceptual change: Indications from protocol analyses of peer-to-peer dialog. *Cognitive Science*, 33, 374-400.

Aleksandrialainen, E. (2016) *Alkeet. Kuusi ensimmäistä kirjaa eli Tasogeometria.* (2. painos). Grano Helsinki.

Ausubel DP. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Bandura A. (1986*). Social Foundations of Thought and Action: A Social Cognitive Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Barnes JM, Underwood BJ. (1959). *Fate of first-list associations in transfer theory*. J. Exp. Psychol.

Bold, B. (1982). *Famous problems of geometry and how to solve them*. Dover.

Boyer, C. B., Merzbach, U. C., & Pietiläinen, K. (1994). *Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia. Osa 1 ja 2*. Art House.

Chartrand, G., Polimeni, A. D. & Zhang P. (2008). *Mathematical Proofs: A Transition to Advanced Mathematics*. Pearson.

Conner, AM., Singletary, L.M., Smith, R.C., Wagner, P.A., & Francisco, R.T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 401–429.

Granberg, C. (2016). Discovering and addressing errors during mathematics problem-solving—A productive struggle. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 33-48.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). *Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof.* Teoksessa F. K. Lester (toim.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (s. 805–842*)*. Information Age Pub.

Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and beyond*. Springer.

Herranen, J., Loimisto, J., Mäkimarttunen, T., Pusa, J., Rahila, S., Tapiainen, T., Tikka, T. (2022). *Ääretön 7 kurssi 2 Geometrian käsitteitä.* Kustannusosakeyhtiö Otava.

Hiltunen, J., Hähkiöniemi, M., Jokiranta, K., Lehesvuori, S., Nieminen, P., Viiri, J., . . . luonnontieteet, M. j. (2016). *Recognising Articulated Reasoning in Students' Argumentative Talk in Mathematics Lessons*. Finnish Mathematics and Science Education Research Association (FMSERA).

Hähkiöniemi, M., Lehesvuori, S., Nieminen, P., Hiltunen, J., Jokiranta, K., tutkimuslaitos, K., . . . luonnontieteet, M. j. (2019). *Three Dimensions of Dialogicity in Dialogic Argumentation*. Masarykova univerzita.

Keef, P. & Guichard, D. (2010). *An Introduction to Higher Mathematics*. Whitman College.

Kivi, M. (2020). *Algebralliset virhekäsitykset yläkoulun matematiikassa* [Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto]. https://helda.helsinki.fi/items/e3f8d4d4-ca96-4888-8009-c68d7e6a61f2

Kurittu, L., Hokkanen, V., & Kahanpää, L. (2006). *Geometria*. Jyväskylän yliopisto.

Käenmäki, A. (2005). Johdatus matematiikkaan -luentomoniste.

Kärki, T. (2015). *Luokanopettajaopiskelijoiden geometrisista määritelmistä*. Teoksessa H. Silfverberg & P. Hästö (toim.), Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran tutkimuspäivät 2015 (s. 48-59). Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseura r.y.

Lee, J. M. (2010). *Axiomatic Geometry*. American Mathematical Society.

Lehtinen. M. (2014). Matematiikan historia -luentomoniste.

Lehtinen. M. (2011). Geometrian perusteita -luentomoniste.

Metcalfe, J. (2017). *Learning from errors*. Annual Review of Psychology, 68, 465–489.

Miettinen, S. K. (2002). *Logiikka: Perusteet*. Gaudeamus.

Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Opetushallitus.

Palkki, R, (2022) *Vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet – erilaisia ratkaisutapoja tarkastelemalla kohti joustavaa matematiikan osaamista* [Väitöskirja, Oulun yliopisto]. https://oulurepo.oulu.fi/handle/10024/36862

Pehkonen, E. (2003). *Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa*. Tieteessä tapahtuu, 21(6).

Saarimäki, M. (2007). *Diskreettiä ja äärellistä matematiikkaa: Approbatur 3 -kurssille*. Jyväskylän yliopisto.

Salminen, H., & Väänänen, J. (1992). *Johdatus logiikkaan*. Gaudeamus.

Silfvberg, H. (1999) *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto*. [Väitöskirja, Tampereen yliopisto]. https://trepo.tuni.fi/handle/10024/66665

Skinner BF. (1953). *Science and Human Behavior*. New York: MacMillan.

Stylianides, A., Bieda, K., Morselli, F. (2016). *Proof and argumentation in mathematics education research.* Teoksessa Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero & (toim.), The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues. (s. 315-351). Sense Publishers.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi* (Uudistettu laitos.). Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Tuohilampi, L. (2017). *Matikkanälkä*. PS-kustannus.

Valkonen, J. (2021). Pinta-ala euklidisessa tasogeometriassa. [Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto]. https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/74611

Väisälä, Kalle. (1959). *Geometria*. (5. painos) Wsoy.

Warshauer, H. K. (2014). *Productive struggle in middle school mathematics classrooms*. Math Teacher Educ, 18, 375–400.

Webb, N., Franke, M., Ing, M., Wong, J., Fernandez, C., Shin, N., Turrou, A., (2014). *Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning*. Elsevier, 63, 79-93.

Webb, N. M., Franke, M. L., De, T., Chan, A. G., Freund, D., Shein, P., & Melkonian, D. K. (2009*). 'Explain to your partner': teachers' instructional practices and students' dialogue in small groups*. Cambridge Journal of Education, 39(1), 49–70.

Wood, M. B & Kalinec, C. A. (2012). *Student talk and opportunities for mathematical learning in small group interactions*. International Journal of Educational Research. 51–52, 109–127.

Özerem, A. (2012). *Misconceptions In Geometry And Suggested Solutions For Seventh Grade Students*. Procedia, social and behavioral sciences, 55, 720-729.

LIITTEET

Taulukko 1

Dialogiset liikkeet virheen esiintymisen jälkeen	
Kysymyksen esittäminen	Oppilas esittää kysymyksen liittyen toisen oppilaan virheelliseen ideaan. Kysymys ei ole kyseenalaistavaan sävyyn esitetty.
Haastaminen	Oppilas esittää epäkohdan toisen oppilaan ideassa.
Syventäminen	Oppilas kehittää eteenpäin toisen oppilaan virheellistä ideaa virheelliseen suuntaan.
Kommentointi	Oppilas ainoastaan kommentoi toisen oppilaan ideaa ilman kysymyksen esittämistä, syventämistä tai haastamista. Kommentointi voi myös olla sanatonta reagointia, kuten nyökkäys tai kasvojen ilme.
Vastaaminen	Oppilas vastaa toisen oppilaan esittämään kysymykseen, mutta vastaus ei sisällä haastamista.
Ei huomioida	Oppilas ei huomioi millään tavalla toisen oppilaan tekemää virhettä.

Taulukko 2

Virheiden määrät tyypeittäin

Virhetyyppi	Määrä
Termit	84
Pinta-ala & lävistäjän pituus	44
Geometrinen piirtäminen	7
Kulman suuruus	22
Yhteensä	157

Taulukko 3

Virheiden määrät tunneittain sekä tyypeittäin

	Nelikulmion kulman suuruus	Geometrinen piirtäminen	Piiri ja ala	Pythagoraan palapeli	3D geometriaa
Termit	12	14	26	9	23
Pinta-ala & lävistäjän pituus	0	1	19	20	4
Geometrinen piirtäminen	0	7	0	0	0
Kulman suuruus	22	0	0	0	0
Yhteensä	34	22	45	29	27

Taulukko 4

Seitsemännen luokan prosenttiosuudet

Nelikulmion kulman suuruus

	Opettaja 2	Opettaja 1	%
Kysymyksen esittäminen	1	1	6.25%
Haastaminen	6	3	28.13%
Syventäminen	0	1	3.13%
Kommentoiminen	8	6	43.75%
Vastaaminen	0	2	6.25%
Ei huomioida	0	4	12.50%

Geometrinen piirtäminen

	Opettaja 4	Opettaja 5	%
Kysymyksen esittäminen	0	1	5.00%
Haastaminen	4	3	35.00%
Syventäminen	0	0	0.00%
Kommentoiminen	8	2	50.00%
Vastaaminen	9	0	0.00%
Ei huomioida	0	2	10.00%

Piiri ja ala

	Opettaja 3	Opettaja 4	Opettaja 5	%
Kysymyksen esittäminen	0	0	1	2.38%
Haastaminen	2	4	5	26.19%
Syventäminen	3	4	0	16.67%
Kommentoiminen	4	8	7	45.42%
Vastaaminen	1	0	1	4.76%
Ei huomioida	1	1	0	4.76%

Taulukko 5

Kahdeksannen luokan prosenttiosuudet

Pythagoraan palapeli

	Opettaja 4	Opettaja 5	%
Kysymyksen esittäminen	2	1	10.34%
Haastaminen	4	2	20.69%
Syventäminen	1	4	17.24%
Kommentoiminen	7	4	37.93%
Vastaaminen	0	0	0.00%
Ei huomioida	3	1	13.79%

3D geometriaa

	Opettaja 2	Opettaja 4	Opettaja 5	%
Kysymyksen esittäminen	0	1	0	3.70%
Haastaminen	2	1	0	11.11%
Syventäminen	1	0	1	7.41%
Kommentoiminen	5	6	2	48.15%
Vastaaminen	0	0	0	0.00%
Ei huomioida	1	1	6	29.63%

Taulukko 6

Tuntien aiheet ja opettajat

	Nelikulmion kulman suuruus	Geometrinen piirtäminen	Piiri ja ala	Pythagoraan palapeli	3D geometriaa
Opettaja 1	X				
Opettaja 2	X				X
Opettaja 3			X		
Opettaja 4		X	X	X	X
Opettaja 5		X	X	X	X

Taulukko 7

Virheiden määrät luokittain

	Nelikulmion kulman suuruus	Geometrinen piirtäminen	Piiri ja ala	Pythagoraan palapeli	3D geometriaa
Luokka A (20)	17				
Luokka B (19)	17				9
Luokka C (17)			11		
Luokka D (23)		14	17	17	9
Luokka E (27)		8	17	12	9