

**Gradienttiekspansion sovelluksia:
primordiaalisten mustien
aukkojen synty primordiaalisista
perturbaatioista**

Pro gradu -tutkielma, 22.5.2024

Tekijä:

JESSE VASTAMAA

Ohjaaja:

SAMI NURMI



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIKAN LAITOS

© 2024 Jesse Vastamaa

Julkaisu on tekijänoikeussäännösten alainen. Teosta voi lukea ja tulostaa henkilökohtaista käyttöä varten. Käyttö kaupallisiin tarkoituksiin on kielletty. This publication is copyrighted. You may download, display and print it for Your own personal use. Commercial use is prohibited.

Tiivistelmä

Vastamaa, Jesse

Gradienttiekspansion sovelluksia: primordiaalisten mustien aukkojen synty primordiaalisista perturbaatioista

Pro gradu -tutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2023, 69 sivua

Kosmologiassa on saatu joitakin havaintoja viime vuosikymmenten aikana, jotka eivät sovi hyvin teorioihimme. Havaitsemme pimeän aineen olemassaolon muun muassa gravitaatiolinssien avulla, mutta emme tiedä, mistä se mikroskooppisesti koostuu ja on mahdollista, että olemme myös havainneet enemmän mustia aukkoja maailmankaikkeudessa kuin teorat ennustavat. Epävarmuuteen vaikuttaa paljon mallinnusten puutteellisuus. Ajattelemme yleensä mustan aukon syntyvän tähden romahduksesta, mutta jos niitä voisi syntyä voimakkaista energiatihentymistä säteilyn dominoivassa maailmankaikkeudessa (= primordiaalinen musta aukko), ne voisivat selittää osan molempia ongelmia. Emme kuitenkaan vielä tiedä niiden olemassaolosta.

Tutkielmassani lasken Einsteinin yhtälöt pallosymmetriselle metriikalle ja gradienttiekspansoin ne, jotta voin kuvata avaruuden mielivaltaisen pisteen ylitihentymää, joka voi synnyttää primordiaalisen mustan aukon. Lisäksi tutustun inflaation synnyttämiin perturbaatioihin ja esittelen, kuinka niistä saadaan ylitihentymän suuruus primordiaalisen mustan aukon syntymiselle. Lopuksi saan laskettua esimerkin primordiaalisen mustan aukon massalle ja sen massaisten primordiaalisten mustien aukkojen määrän syntyhetkellä pohjaten valittuun malliin. Vertaamalla tulosta pimeään aineeseen, saamme arvion paljonko tämän massaisia primordiaalisia mustia aukkoja olisi maailmankaikkeudessa mallin mukaan.

Avainsanat: primordiaalinen musta aukko, primordiaaliset perturbaatiot, gradienttiekspansion sovellus, primordiaalisten mustien aukkojen massa ja määrä

Abstract

Vastamaa, Jesse

Gradienttieksansion sovelluksia: primordiaalisten mustien aukkojen synty primordiaalisista perturbaatioista

Pro gradu -tutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2023, 69 sivua

There have been a few observations in cosmology in recent decades that do not fit our theories well. We detect the existence of dark matter for example by gravitational lensing, but we do not know what it consists of in microscopic scale and there is a chance that we have discovered more black holes in the universe than theories are predicting. The uncertainty rises from the imperfection of simulations. We usually think of a black hole as being born from the collapse of a star, but if they could arise from a strong energy density fluctuations in the radiation dominated universe (= primordial black hole), they could explain part of both problems. However, we do not know about their existence yet.

In my thesis, I calculate Einstein's equations for a spherically symmetric metric and make use of the long wavelength approximation to describe an overdensity in an arbitrary point in space which can give birth to a primordial black hole. In addition, I familiarize myself with perturbations created from inflation and derive the theory of how to get the magnitude of overdensity from them for the formation of a primordial black hole. Finally, I calculate an example mass of the primordial black hole and the corresponding abundance at the time of birth, based on a chosen model. By comparing the result with dark matter abundance, we get an estimate for the amount of Primordial black holes in the universe in the chosen model.

Keywords: primordial black hole, primordial perturbations, application of long wavelength approximation, abundance and mass of a primordial black holes

Sisällysluettelo

Tiivistelmä	3
Abstract	5
1 Mitä ovat primordiaaliset mustat aukot ja kuinka ne saattavat syntyä?	9
1.1 PBH ja tutkielman sisältö	10
1.2 PBH:en löytämisen merkittävyys	12
2 Pallosymmetrisen metriikan perturbointi gradienttiekspansion avulla	15
2.1 Einsteinin yhtälöt pallosymmetriselle metriikalle	15
2.2 MSH-yhtälöt	21
2.3 Kaarevuusprofiili	26
2.4 Perturbaation voimakkuus ja lisääminen yhtälöihin	29
2.5 Energiatiheyden perturbaation amplitudi δ	34
3 Alaraja perturbaation amplitudille δ, jolla voi syntyä primordiaalinen musta aukko	37
3.1 Kaarevuusprofiilin $K(r)$ parametrusointi numeriikkaa varten	37
3.2 Keskiarvoistetun kompaktiofunktion määrittely ja δ_m :n analyyttinen alaraja	40
3.3 Numeeriset tulokset kriittiselle perturbaation voimakkuudelle, jolla häiriö romahtaa PBH:ksi.	42
4 Primordiaalisten perturbaatioiden synty ja PBH:en massa ja määrä niiden pohjalta	45
4.1 Inflaatio	45
4.2 Primordiaalisten perturbaatioiden tehospektri $P_{\zeta}(k)$ ja varianssi σ^2 .	47
4.3 Pituuskaala r_m ja parametri α Gaussisille perturbaatioille	51

4.4	PBH:n massa ja määrä	52
4.5	Primordiaalisten mustien aukkojen massa ja määrä piikittyneelle spektrille	54
5	Yhteenveto	61
	Lähdeluettelo	63

1 Mitä ovat primordiaaliset mustat aukot ja kuinka ne saattavat syntyä?

Mustat aukot ovat olleet viime vuosina kovassa suosiossa sosiaalisessa mediassa, kun niistä julkaistiin Event Horizon Telescopen ottama kuva vuonna 2019 [1]. Tämä on ensimmäinen kerta, kun musta aukko on oikeasti kuvattu ja kuvan resoluutio on tarpeeksi hyvä erottamaan musta aukko avaruudesta. Musta aukko itsessään on äärimmäisen tiheä massakeskittymä aika-avaruudessa, mistä edes valo ei voi karata. Havaitsemme siis mustan aukon kuvassa vain sen reunat, jossa valo on kiertänyt mustan aukon reunan läheisyydessä ja pääsee vielä karkuun. Tämän määritelmän idea on syntynyt jo 1700-luvulla ja se on myöhemmin todettu oikeaksi [2]. Tutkijoille mustat aukot ovat herättäneet kiinnostusta myös gravitaatioaaltojen löytämisen jälkeen LIGO:n avulla vuonna 2016 [3] ja LIGO on sittemmin havainnut lukuisia vastaavien kohteiden gravitaatioaalloja [4]. Nämä gravitaatioaallot muodostuivat kahden mustan aukon törmäyksestä. Kiinnostus johtuu mustien aukkojen ainutlaatuisuudesta ja hyödynnämmekin niitä paljon, jotta ymmärtäisimme eri kosmologisia malleja, inflaatiota ja äärimmäisen heikkoja vuorovaikutuksia, kuten gravitaatiota. Tämän takia ei ole yllättävää, että tutkijat ovat miettineet, voisiko mustia aukkoja olla myös erilaisia ja miksi näin olisi.

Tämän hetkisen teorian ja erityisesti havaintojen pohjalta uskomme, että kaikki mustat aukot olisivat syntyneet suurten tähtien romahtamisen seurauksena, koska emme ole onnistuneet havaitsemaan muita syntytapoja mustille aukkoille [5]. Kuitenkin, jos aiemmat kosmologiset mallit ovat oikeassa, maailmankaikkeudessa on mahdollisesti havaittu enemmän mustia aukkoja kuin teoriat ennustavat [6] ja uusi data James Webb -avaruusteleskoopista tukee tätä kantaa [7]. Lisäksi, esimerkiksi massiivisten mustien aukkojen syntyperä on edelleen epävarma [8]. Ratkaisua edellä mainittuihin ongelmiin on etsitty muun muassa inflaatio- eli avaruuden laajenemismalleista, jotka mahdollistavat mustien aukkojen synnyn voimakkaiden energiatihentymien seurauksena. Näitä energian kasaumia olisi voinut syntyä heti alkuräjähdyksen jälkeen, kun avaruus oli vielä täynnä voimakkaita energiafluktuaatioita ja niin kuuma sekä tiheä,

että edes kvarkit eivät pystyneet luomaan välilleen sidoksia ja sen seurauksena muun muassa protoneita ja neutroneita ei myöskään muodostunut [6]. Tällaisissa olosuhteissa voisi teoriassa tietyin edellytyksin syntyä primordiaalisia mustia aukkoja (PBH = Primordial Black Hole) [9].

Yksi suurimmista fysiikan ongelmista on pimeä aine [10], joka ei vuorovaikuta tuntemamme materian tai säteilyn kanssa, muuta kuin gravitaation kautta. Emme vielä tiedä, mistä se koostuu tai miten sitä voitaisiin kiinnittää teorioihimme. Tämän vuoksi tutkijat ovat myös ehdottaneet, että PBH:t voisivat kattaa suuren osan pimeästä aineesta [11]. Kuitenkin, varsinkin viime vuosikymmeninä lukuisat havaintomme ovat karsineet suuren alueen PBH:en mahdollisista kokoluokista pois ja ne eivät todennäköisesti selitä kuin pienen osan pimeästä aineesta jos niitä on olemassa [12][13].

1.1 PBH ja tutkielman sisältö

Suuria kysymyksiä tämän päivän tutkijoille on, onko primordiaalisia mustia aukkoja olemassa ja jos on, niin kuinka ne voisi edes erotella tähden romahduksen seurauksena syntyneistä mustista aukoista, koska molemmilla tavoilla syntyy sama lopputulos, musta aukko. Mahdollinen tapa erottaa mustan aukon synty tapa on pyörimismäärä. Tähdillä on pyörimismäärää, joten niistä syntyvät mustat aukot säilyttävät tämän, mutta energiatihentymästä syntynyt primordiaalinen musta aukko ei välttämättä sisällä yhtä paljon pyörimismäärää, koska energiatihentymällä ei ole voimakasta ulkoisesti havaittavaa kokonaispyörimismäärää toisin kuin tähdellä [14].

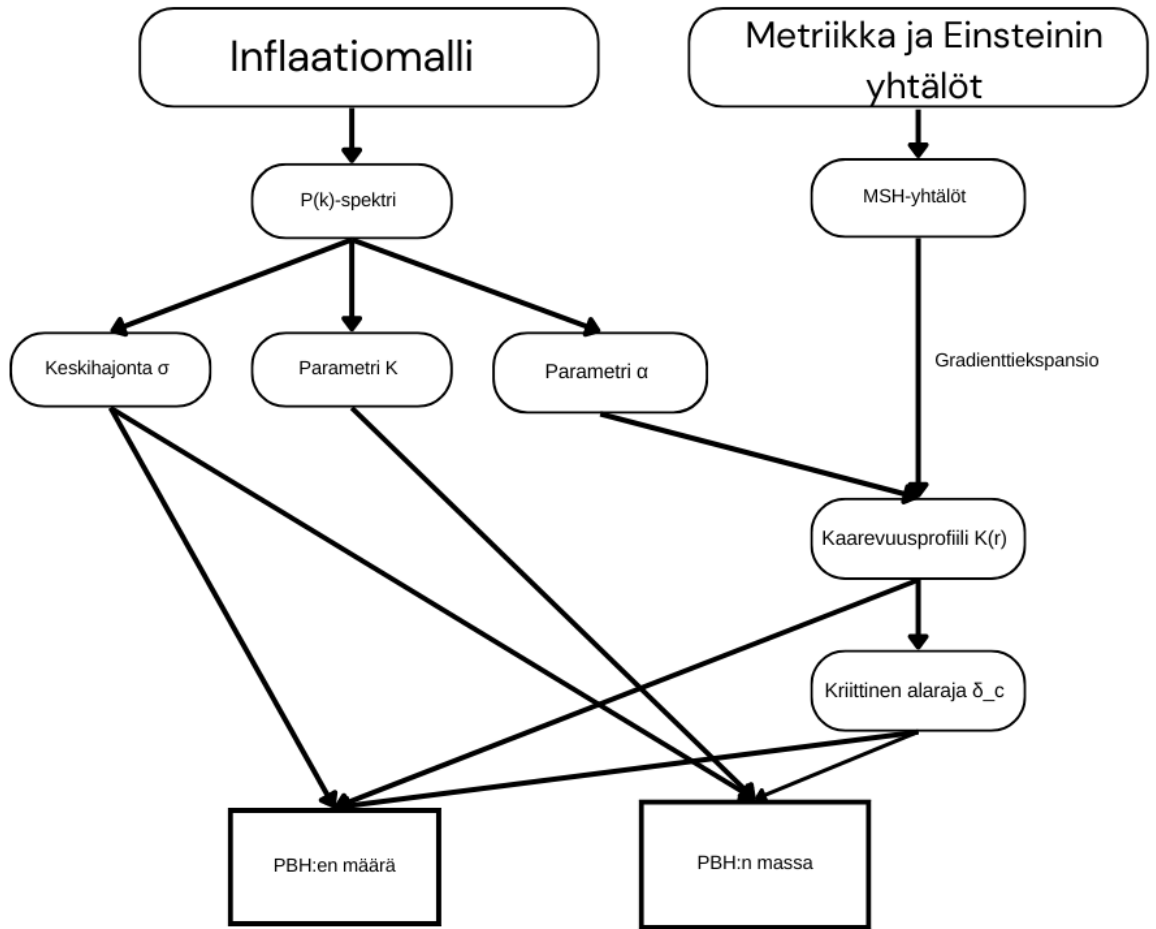
Tämä ei kuitenkaan kuulu tutkielmani sisältöön. Tässä tutkielmassa tutustutaan primordiaalisten mustien aukkojen syntyyn inflaatiosta syntyvien primordiaalisten perturbaatioiden pohjalta ja tämä toteutetaan soveltamalla gradienttiekspansiota. Lisäksi käydään läpi tämänhetkisiä numeerisia tuloksia teorian pohjalta ja lopuksi tarkastellaan tiettyä mallia, johon tuloksia voidaan soveltaa.

Tutkielman lopullinen päämäärä on saada johdettua yhtälöt primordiaalisten mustien aukkojen massalle ja määrälle maailmankaikkeudessa. Tätä varten käymme läpi useita yksittäisiä aihealueita, jotka ovat tärkeitä paloja kokonaisuuden luomiseksi. Kuviossa 1 on käyty läpi tärkeimmät osa-alueet, jotka tarvitsemme PBH:n massan ja määrän määrittämiseen sekä kuinka osa-alueet liittyvät toisiinsa ja minkä teorian pohjalta ne muodostuvat. Aloitamme analyysin valitsemalla pallosymmetrisen metriikan ja ratkaisemme Einsteinin yhtälöt haluttuun muotoon, jotta voimme

matemaattisesti kuvata perturbaation laajenevassa maailmankaikkeudessa. Tämän jälkeen määritämme ns. kaarevuusprofiilin $K(r)$ ja esittelemme siihen liittyvän parametrin α , jolla voidaan myöhemmin kiinnittää johdettu teoria inflaation luomaan perturbaatioon. Itse parametria α emme ratkaise vielä, mutta voimme kirjoittaa sen niin sanotun kompaktiofunktion C avulla ja ratkaista analyytisesti kriittisen alarajan perturbaation voimakkuudelle δ_c , joka muodostaa massattoman primordiaalisen mustan aukon. Kun alaraja δ_c on johdettu, tarvitsemme teoriaa inflaatiomalleille ja niistä syntyville perturbaatioille. Inflaatiomalleista saadaan johdettua perturbaation jyrkkyyttä kuvaava parametri α ja perturbaatiojakauman varianssi σ^2 , sekä numerikassa käytettävä vakio parametri K , joka riippuu energiatiheyden profiilista. Lopuksi saamme laskettua primordiaalisten mustien aukkojen määrän ja massan hyödyntämällä parametreja kuvion 1 mukaisesti.

Listaan vielä tarkemmin tutkielman sisällön tässä: aloitamme teorian johtamalla Einsteinin kenttäyhtälöt pallosymmetrisessä diagonaalimetriikassa kappaleessa 2.1. Tämän jälkeen muokkaamme ne metriikan pohjalta Misner-Sharp-Hernandez-yhtälöiksi kappaleessa 2.2. Lopuksi, kappaleet 2.3 ja 2.4 ovat yksi gradun tärkeimmistä asioista, jossa laskemme häiriöteorian avulla johtavat perturbaatiot ja lisäämme ne MSH-yhtälöihin, koska ennen tätä yhtälöt ovat kuvanneet vain tasaista avaruutta. Nyt yhtälöiden avulla voidaan kuvata voimakasta häiriötä avaruuden mielivaltaisessa pisteessä ja hyödyntämällä kompaktiofunktioita C saamme tärkeän tuloksen kappaleessa 2.5: paikallisen energiatiheysperturbaation ja tietyssä tilavuudessa olevan keskimääräisen ylijäämämassan välillä on yhteys. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa, että häiriön amplitudi ei ole riippuvainen kaarevuuden muodosta.

Luku 3 käsittelee kokonaan analyytisiä lähtökohtia numerikalle ja parametrisointeja kaarevuusprofiilille $K(r)$ (kappale 3.1) sekä massaylijäämälle δ_c (kappale 3.2). Tässä tutkielmassa ei lasketa numeerisia tuloksia vaan hyödynnetään saatuja tuloksia muun muassa I. Muscon koodista [15] ja tarkastellaan niitä kappaleessa 3.3. Luku 4 on jätetty kokonaan PBH:n massan määrittämiseen ja niiden yleisyyteen maailmankaikkeudessa. Alaluvussa 4.1 käsitellään inflaatiota ja sen seurauksena syntyviä primordiaalisia perturbaatioita, jotka mahdollistavat PBH:en syntymisen ja alaluku 4.4 hyödyntää inflaatiosta saatuja energiafluktuaatioiden jakaumia johtamaan yhtälöt PBH:n massalle ja määrälle. Viimeisenä alaluvussa 4.5 lasketaan yksittäinen esimerkki primordiaalisten mustien aukkojen massalle ja määrälle.



Kuvio 1. Aihealueiden esittely ja kuinka ne liittyvät toisiinsa. Einsteinin kenttäyhtälöt ratkaistaan pallosymmetrisellä metriikalla ja kirjoitetaan MSH-yhtälöiden muotoon. Inflaatiomalli antaa meille primordiaalisen perturbaatiojakauman $P(k)$ ja saamme siitä ratkaistua perturbaation varianssin σ^2 ja parametrit K ja α . Kaarevuusprofiili $K(r)$ saadaan parametrisoitua hyödyntäen α :a ja kiinnittäen metriikkaan, jota MSH-yhtälöt kuvaavat. Integroimalla kaarevuusprofiili $K(r)$ kriittisen skaalan r_m yli saadaan laskettua kriittinen alaraja δ_c :lle. Varianssin σ^2 , kaarevuusprofiilin $K(r)$ ja alarajan δ_c avulla saadaan laskettua primordiaalisten mustien aukkojen määrä ja vakioparametrin K ja alarajan δ_c avulla saadaan laskettua PBH:n massa.

1.2 PBH:en löytämisen merkittävyys

Primordiaalisten mustien aukkojen löytymisellä saattaisi olla suuri vaikutus teorioihin riippuen kuinka suuren osan pimeästä aineesta ne kattaisivat. Paperin [16] nojalla voimme rajata suuren osan primordiaalisten mustien aukkojen massaluokista

pois. Esimerkiksi kaikki primordiaaliset mustat aukot massalla $< 5 \cdot 10^{14}$ g ovat säteilleet kaiken massansa Hawkingin säteilyn seurauksena ja niitä ei voida enää suoraan nykyhetkessä havaita, mutta niiden säteilyn tulisi näkyä muun muassa kosmisessa mikroaaltotaustassa ja lisäksi kosmisessa mikroaaltotaustassa huomattaisiin vääristymiä COBE:n ja FIRAS:n datassa, jos $> 1 \cdot 10^{33}$ g massaiset primordiaaliset mustat aukot gaussisista perturbaatioista kattaisivat kaiken pimeän aineen.

Viimeisiä merkittäviä rajoitteita on saatu LIGO:n avulla, jolla pystytään havaitsemaan kahden mustan aukon törmäyksestä syntyviä gravitaatioaaltoja. Jos maailmankaikkeudessa olisi paljon Auringon massan kokoisia mustia aukkoja ja ne kiertäisivät toisiaan kaksoistähtimaisesti, niin LIGO havaitsisi huomattavasti enemmän törmäyksistä syntyviä gravitaatioaaltoja. Näin ei kuitenkaan ole ja tämä asettaa tiukan rajoitteen 10-300 auringon massan primordiaalisille mustille aukkoille, koska ne eivät voi kattaa kuin $< O(10^{-3})$ kaikesta pimeästä aineesta. Monien rajoitteiden ohessa tämän hetkisten havaintojen puutteesta johtuen $10^{17} - 10^{21}$ g primordiaaliset mustat aukot voisivat kuitenkin mahdollisesti selittää kaiken pimeän aineen.[16]

Suunnitteilla olevia tutkimuksia ja laitteistoja PBH:en massojen rajoittamiseen ovat muun muassa LISA [17] ja PIXIE [18]. LISA on Euroopan avaruusjärjestö ESA:n suunnitteilla oleva laser-interferometri, joka on tarkoitus lähettää avaruuteen havaitsemaan gravitaatioaaltoja 2030-luvulla ja tällä tavoin sen tarkoitus on rajoittaa muun tutkimuksen ohessa primordiaalisten mustien aukkojen mahdollista määrää $10^4 - 10^7$ Auringon massan kokoluokassa. PIXIE on NASA:n tutkimus, jossa tarkoituksena on lähettää laitteisto avaruuteen, joka mittaa polarisoidun kosmisen mikroaaltotaustan signaalia ja tämän avulla kartoittaa huomattavasti tarkemmin aluetta, jota myös FIRAS tutki.

2 Pallosymmetrisen metriikan perturbointi gradienttiekspansion avulla

Ensimmäisessä osassa tutkielman teoriaa laskemme Einsteinin yhtälöt pallosymmetriselle metriikalle ja sovellamme saatuihin yhtälöihin Misner-Sharp-Hernandez-menetelmää, joka yksinkertaistaa laskuja merkittävästi. Alaluvun 2.2 lopuksi olemme saaneet Einsteinin yhtälöt ns. MSH-yhtälöiden muotoon, jotka voimme tämän jälkeen perturboida gradienttiekspansion avulla alaluvussa 2.4. Gradienttiekspansio lasketaan, jotta voimme kuvata mielivaltaisen pisteen perturbaatiota ja fysikaalisesti alue, joka voisi romahtaa primordiaaliseksi mustaksi aukoksi saadaan täten kuvattua energiatiheiden perturbaatiolla. Viimeisenä alaluvussa 2.5 määrittelemme kompaktiofunktion ja sen avulla saamme laskettua tuloksen energiatiheysperturbaation ja keskimääräisen ylijäämämassan välille.

2.1 Einsteinin yhtälöt pallosymmetriselle metriikalle

Mustien aukkojen teoria pohjautuu vahvasti 1960-luvulla kosmologiassa puhuttuihin pallosymmetrisiin gravitaatoromahduksiin ja meille olennainen teoria primordiaalisten mustien aukkojen teorialle alkaa tästä hetkestä. Ennen 60-lukua Einsteinin kenttäyhtälöt ratkaistiin Oppenheimer-Volkoff-yhtälöiksi, joissa oletetaan pallosymmetrinen materian jakautuminen, adiabaattinen systeemi ja tilanyhtälöistä paine $p = 0$ [19], joka vastaa tyhjiötä. Oletuksista $p = 0$ ei kuitenkaan kuvaa tilaa tarpeeksi realistisesti vaan ratkaisuissa tulisi huomioida myös painegradientin muutokset $p = 0$, jotka luovat suuria voimia systeemin sisällä [19]. Havainnot oletetusta mustasta aukosta Cygnus X-1 ja sen kertymäkiekosta ovat näyttäneet, että painegradientista syntyvät voimat vaikuttavat myös kertymäkiekkoon ja ne tulee huomioida [20]. Misner ja Sharp täydensivät systeemiä realistisemmaksi olettamalla edelleen pallosymmetrisen materian jakautumisen ja adiabaattisen virtauksen, mutta nyt painegradientin muutokset otettiin huomioon [19].

Molempien teorioiden taustalla hyödynnetään oletusta, että tarpeeksi kaukana romahduksesta avaruus/systemi palautuu tasaiseksi ja sen painegradientti on nolla

eli teorioissa asymptoottisena rajana käytetään Schwarzschildin metriikkaa [19][21]. Ajansaatossa mittaukset [22] ovat tarkentaneet paljon käsitystämme eri kosmologisista malleista ja nykyään aika-avaruuden uskotaan noudattavan FLRW-metriikkaa [23] suurilla skaaloilla (yli 100 MPc), joten tämä on parempi lähtökohta asymptoottiselle rajalle.

Ratkaistaan Einsteinin yhtälöt pallosymmetriselle metriikalle Misnerin ja Sharpin tapaan olettamalla pallosymmetrinen materian jakautuminen ja ideaalifluidi, mutta valitaan asymptoottiseksi rajaksi FLRW-metriikka. Pallosymmetrinen diagonaali-metriikka pallokoordinaatistossa ja etumerkeillä $(-, +, +, +)$ on

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -A^2(r,t) dt^2 + B^2(r,t) dr^2 + R(r,t) d\Omega^2, \quad (1)$$

jossa

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2.$$

Metriikan muoto muistuttaa paljon FLRW-metriikkaa, joka näyttää

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right].$$

Valitsemalla yksiköt siten, että valonnopeudelle c ja Newtonin gravitaatiovakion G arvo on 1, voidaan FLRW-metriikka kirjoittaa muodossa

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right] \quad (2)$$

Tärkeänä erona ovat kertoimet $A(r,t)$, $B(r,t)$ ja $R(r,t)$, jotka riippuvat sekä etäisyydestä että ajasta, mutta olettamalla universumin homogeenisuuden ne palautuvat FLRW-metriikassa nähtäviin parametreihin valonnopeus c ja skaalatekijä $a(t)$. FLRW-metriikan spatiaalikoordinaatissa on $1/(1 - Kr^2)$ -riippuvuus, jonka takia etäisyyden neliön arvo r^2 tulee valita $1/K$:sta poikkeavaksi, jotta vältymme koordinaattisingulariteetiltä. Vakio parametri K :n arvo on $= 0, \pm 1$ riippuen onko kyseessä tasainen eli Euklidinen, suljettu vai avoin maailmankaikkeus [23]. $K = +1$ eli suljettu maailmankaikkeus tarkoittaa, että eläisimme 4-ulotteisen pallon (3-sphere) pinnalla ja $K = -1$ vastaavasti tarkoittaa, että eläisimme 4-ulotteisen hyperboloidin (3-hyperboloid) pinnalla [24]. K :n arvo määrittää, kuinka skaalatekijä $a(t)$ voidaan kiinnittää avaruudessa [23]. Esimerkiksi tasaisessa avaruudessa se voidaan kiinnittää

mielivaltaiseen pisteeseen ja 3-pallon pinnalla se vastaisi kaarevuuden sädettä.

Seuraavaksi valitsemme materian mukana liikkuvan koordinaatiston. Materia voi koostua partikkeleista tai säteilystä eli tässä asiayhteydessä liikumme tähden tai energiapiikin mukana riippuen mitä ajanjaksoa universumista käsittelemme. Kirjoitetaan paikan koordinaatit muodossa

$$x^\mu = (t, r, \theta, \phi) = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Lisäksi määritellään aika-avaruudessa nelinopeus u^μ , joka vastaa kolmiulotteisen avaruuden nopeutta seuraavasti

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (3)$$

jossa τ on itseisaika. Nelinopeus u^μ saadaan kirjoitettua uuteen muotoon hyödyntämällä materian mukana liikkuvaa koordinaatistoa seuraavasti

$$u^0 = \frac{d\cancel{\tau}}{A(r,t) \cdot d\cancel{\tau}} = \frac{1}{A}, \quad u^i = 0; \quad i = r, \theta, \phi.$$

Lasketaan myös u_0

$$u_0 = g_{00}u^0 = -A^2 \cdot \frac{1}{A} = -A,$$

jossa hyödynsimme tietoa $u_\mu = g_{0\mu}u^\mu$. Paikan ja nopeuden koordinaattien määritelmät ja notaatio pohjautuvat Einsteinin paperiin [25].

Tarkoituksemme on hyödyntää Misner-Sharp-Hernandez-menetelmää, jolla voimme ratkaista Einsteinin kenttäyhtälöt pallosymmetrisessä metriikassa. ”Menetelmä” terminä ei ole paras mahdollinen, koska tarkoitus on vain valita muuttujat sopivasti helpottamaan Einsteinin yhtälöiden laskemista ja tekniikka esitellään vuoden 1964 paperissa [19]. Käytämme siis vanhaa ratkaisutapaa eri alkuoletuksilla ja reunaehdoilla. Esimerkiksi emme oleta avaruuden olevan tyhjiö tai homogeeninen.

Einsteinin yhtälö on

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (4)$$

jossa $G_{\mu\nu}$ on Einsteinin tensori ja $T_{\mu\nu}$ on energia-impulssitensori [25]. Einsteinin tensori on määritelty Ricci-tensorin $R_{\mu\nu}$ ja Ricci-skalaarin R avulla

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R,$$

jolloin Einsteinin kenttäyhtälöt ovat lopullisessa muodossaan [25]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (5)$$

Ricci-skalaari R saadaan kontraktoimalla Ricci-tensori käänteisellä metriikkatenso-
rilla [26] eli

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Viimeisenä energia-impulssitensori $T_{\mu\nu}$ ideaalifluidille [19] on

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (7)$$

jossa u_μ on nelinopeus, p on paine ja ρ on tiheys fluidille.

Seuraavaksi tarkoituksemme on laskea Einsteinin kenttäyhtälöiden termit $R_{\mu\nu}$, R ja $T_{\mu\nu}$ käyttämällä pallosymmetristä metriikkaa (1) ja lopuksi sijoittaa ne Einsteinin yhtälöön (5). Aloitetaan laskemalla Ricci-tensori $R_{\mu\nu}$, joka määritellään seuraavasti [25]

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha, \quad (8)$$

jossa $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ on Christoffelin symboli ja ∂_μ on osittaisderivaatta indeksin μ suhteen. Todistetaan, että Ricci-tensori on symmetrinen, olettamalla Riemannin-tensori vino-
symmetriseksi (skew-symmetry)[26]. Tällöin

$$R_{ik} = \Sigma_i R_{ijk}^j = \Sigma_{jn} g^{jn} R_{nik} = \Sigma_{jn} g^{jn} R_{jkn} = \Sigma_n R_{kni}^n = R_{ki}, \quad (9)$$

jossa hyödynsimme Riemannin-tensorin symmetrisyyttä $R_{nik} = R_{jkn}$. Ominaisuuden ansiosta Ricci-tensori saadaan kirjoitettua kuuden alkion avulla, 4 diagonaalilla ja 2 symmetrisesti kohdissa R_{01} sekä R_{10} . Nämä kuusi alkia Ricci-tensoriin saadaan laskettua Christoffelin symbolien avulla, jotka lasketaan kaavalla

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \quad (10)$$

jossa $g_{\mu\nu}$ määräytyy yhtälön (1) pallosymmetrisestä metriikasta. Christoffelin symbolit saadaan laskettua lähteen [27] tapaan ja tulokset kootaan neljään matriisiin

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \begin{pmatrix} \frac{A^{(0,1)}(r,t)}{A(r,t)} & \frac{A^{(1,0)}(r,t)}{A(r,t)} & 0 & 0 \\ \frac{A^{(1,0)}(r,t)}{A(r,t)} & \frac{B(r,t)B^{(0,1)}(r,t)}{A^2(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R(r,t)R^{(0,1)}(r,t)}{A^2(r,t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R(r,t)\sin^2(\theta)R^{(0,1)}(r,t)}{A^2(r,t)} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \begin{pmatrix} \frac{A(r,t)A^{(1,0)}(r,t)}{B^2(r,t)} & \frac{B^{(0,1)}(r,t)}{B(r,t)} & 0 & 0 \\ \frac{B^{(0,1)}(r,t)}{B(r,t)} & \frac{B^{(1,0)}(r,t)}{B(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R(r,t)R^{(1,0)}(r,t)}{B^2(r,t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R(r,t)\sin^2(\theta)R^{(1,0)}(r,t)}{B^2(r,t)} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{R^{(0,1)}(r,t)}{R(r,t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^{(1,0)}(r,t)}{R(r,t)} & 0 \\ \frac{R^{(0,1)}(r,t)}{R(r,t)} & \frac{R^{(1,0)}(r,t)}{R(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{R^{(0,1)}(r,t)}{R(r,t)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R^{(1,0)}(r,t)}{R(r,t)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \frac{R^{(0,1)}(r,t)}{R(r,t)} & \frac{R^{(1,0)}(r,t)}{R(r,t)} & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

Laskettujen Christoffelin kertoimien avulla voimme laskea Ricci-tensorin komponentit yhtälön (8) avulla. Laskettu Ricci-tensori löytyy liitteestä A, koska sen termien suuresta määrästä johtuen sitä ei voi mahduttaa osaksi tekstiä.

Seuraavaksi laskemme Ricci-skalaarin R yhtälöllä (6). Huomautettakoon vielä tässä, että Ricci-skalaari R on täysin eri asia kuin metriikassa käytetty etäisyysfunktio $R(r,t)$, joka saatetaan toisinaan kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa R , jos asiayhteys on tarpeeksi selkeä. Alla on laskettu Ricci-skalaari R

$$R = \frac{2A^{(1,0)}(r,t)B^{(1,0)}(r,t)}{A(r,t)B(r,t)^3} - \frac{2A^{(0,1)}(r,t)B^{(0,1)}(r,t)}{A(r,t)^3B(r,t)} - \frac{4A^{(1,0)}(r,t)R^{(1,0)}(r,t)}{A(r,t)B(r,t)^2R(r,t)} - \frac{2A^{(2,0)}(r,t)}{A(r,t)B(r,t)^2} - \frac{4A^{(0,1)}(r,t)R^{(0,1)}(r,t)}{A(r,t)^3R(r,t)} + \frac{4B^{(0,1)}(r,t)R^{(0,1)}(r,t)}{A(r,t)^2B(r,t)R(r,t)} + \frac{2B^{(0,2)}(r,t)}{A(r,t)^2B(r,t)} + \frac{2R^{(0,1)}(r,t)^2}{A(r,t)^2R(r,t)^2} + \frac{4R^{(0,2)}(r,t)}{A(r,t)^2R(r,t)} + \frac{4B^{(1,0)}(r,t)R^{(1,0)}(r,t)}{B(r,t)^3R(r,t)} - \frac{4R^{(2,0)}(r,t)}{B(r,t)^2R(r,t)} - \frac{2R^{(1,0)}(r,t)^2}{B(r,t)^2R(r,t)^2} + \frac{2}{R(r,t)^2}. \quad (11)$$

Tässä vaiheessa otamme käyttöön Misner-Sharp-Hernandez-menetelmän, jonka nojalla määrittelemme uudet muuttujat U ja Γ , joilla voimme kirjoittaa $R(r,t)$:n

paikka- ja aikaderivaatat seuraavasti

$$U \equiv D_t R(r,t) = \frac{1}{A} \frac{\partial R}{\partial t} \quad \text{ja} \quad \Gamma \equiv D_r R(r,t) = \frac{1}{B} \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (12)$$

Uusien muuttujien avulla emme joudu kirjoittamaan derivaattoja, joka helpottaa laskentaa, kun kirjoitamme Einsteinin yhtälöitä (5) kokonaisuudessaan auki. Fysikaalisesti uudet muuttujat viittaavat itseisaikaan ja lepopituuteen [19].

Voimme alkaa laskemaan Einsteinin yhtälöitä eri komponenteille, mutta on hyvä huomata, että koska Ricci-tensori on symmetrinen (9), niin jäljelle jää vain 5 riippumatonta yhtälöä: aika-aika, säde-säde, aika-säde, $\theta - \theta$ ja $\phi - \phi$ komponentit. Ensimmäisenä laskemme aika-aika komponentin eli hyödynnämme metrisen tensorin $g_{tt} = g_{00}$ komponenttia ja yhtälö (5) saadaan supistamisten jälkeen muotoon

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi T_{00} = 8\pi(\rho + p)u_0 u_0 + 8\pi p g_{00} \quad (13)$$

$$\frac{A^2}{R^2} + \frac{2}{Br} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial t} + \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 + \frac{2A^2}{B^3 R} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{A^2}{B^2 R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 - \frac{2A^2}{B^2 R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = 8\pi \rho A^2$$

$$U^2 + 1 - \Gamma^2 + \frac{2R}{AB} \frac{\partial B}{\partial t} U - \frac{2R}{B} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = 8\pi \rho R^2. \quad (14)$$

Viimeisellä rivillä Ricci-tensori ja Ricci-skalaari on kirjoitettu uudelleen sijoittamalla muuttujat U ja Γ yhtälön (12) nojalla. Vastaavat laskut saadaan muille nolllasta poikkeaville komponenteille ja ne ovat sieventämisen jälkeen esimerkiksi seuraavassa muodossa

$$\Gamma \frac{\partial B}{\partial t} = A \frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{TAI} \quad B \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = U \frac{\partial A}{\partial r} \quad (15)$$

$$\frac{1}{R} (-U^2 - 1 + \Gamma^2) + \frac{2}{A} \left(\frac{\Gamma}{B} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) = 8\pi p R \quad (16)$$

$$\frac{1}{A^3 B} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \frac{U}{RAB} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{RA} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\Gamma}{RAB} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{AB^3} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{RB} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = 8\pi p. \quad (17)$$

Viidestä riippumattomasta Einsteinin yhtälöstä radiaaliyhtälöt (termit G_{22} ja G_{33}) sievenevät samaan muotoon (17), joten jäljelle jää neljä riippumatonta Einsteinin yhtälöä (14),(15),(16) ja (17). Näiden neljän riippumattoman Einsteinin kenttäyhtälön lisäksi saamme riippumattoman yhtälön energia-impulssitensorista, kun oletamme

ideaalin fluidin [28]

$$M = \int_0^R 4\pi R^2 \rho dR. \quad (18)$$

2.2 MSH-yhtälöt

Edellisessä kappaleessa johdimme lineaarisesti riippumattomat Einsteinin kenttäyhtälöt pallosymmetriselle metriikalle ja seuraavaksi tarkoituksemme on kirjoittaa ne uudelleen niin sanotussa Misner-Sharp-Hernandez (MSH) muodossa, jotka löytyvät I. Muscon paperista [28]. MSH-muotoa käytetään analyysissä yksinkertaistamaan laskuja, mutta hyödyt tulevat esille myös numeriikkaa tehdessä [29]. MSH-yhtälöt voidaan johtaa Einsteinin yhtälöistä (14)(15)(16)(17), mutta jatkuvuusyhtälö yksinkertaistaa laskuja, koska se on kenttäyhtälöiden johdannainen [25]. Määritellään jatkuvuusyhtälö yleisessä suhteellisuusteoriassa [25]

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (19)$$

jossa $T^{\mu\nu}$ on energia-impulssitensori, joka on määritelty yhtälössä (7). Seuraavaksi ratkaisemme energian ja liikemäärän säilymlait jatkuvuusyhtälöstä sijoittamalla siihen yhtälön (7)

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = (\rho + p)\nabla_\mu(u^\mu u^\nu) + [\nabla_\mu(\rho + p)]u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}\nabla_\mu p = 0. \quad (20)$$

Lisäksi oletamme, että $u_\nu u^\nu = -1$, jolloin operoimme sitä termillä $u^\mu \nabla_\mu$ ja saamme tuloksen

$$0 = u^\mu \nabla_\mu u_\nu u^\nu + u_\nu u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 2u^\mu \nabla_\mu u^\nu u_\nu. \quad (21)$$

Yhtälö (20) voidaan kontraktoida nelinopeuden avulla ja saadaan ensimmäinen säilymlaki, joka on niin sanottu energian säilymlaki [26]

$$\begin{aligned} u_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \cancel{(\rho + p)u^\mu u_\nu \nabla_\mu u^\nu} + u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p)\nabla_\mu u^\mu = 0 \\ &= u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p)\nabla_\mu u^\mu = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

jossa ensimmäinen termi on supistettu yhtälön (21) nojalla. Kosmologiassa ei ole yleistä energian säilymlakia, mutta lokaalisti tämä yhtälö pätee ja voimme hyödyntää sitä [30]. Sijoittamalla tulos (22) takaisin yhtälöön (20) saadaan johdettua niin

sanottu liikemäärän säilymlaki [26]

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\mu\nu} &= (\rho + p)u^\mu \nabla_\mu u^\nu + \nabla^\nu p + u^\nu [u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p)\nabla_\mu u^\mu] + u^\nu u^\mu \nabla_\mu p = 0 \\ &= (\rho + p)u^\mu \nabla_\mu u^\nu + \nabla^\nu p + u^\nu u^\mu \nabla_\mu p = 0.\end{aligned}\quad (23)$$

Lasketaan energian ja liikemäärän säilymlait (22)(23) pallosymmetriselle metriikalle (1). Ensimmäisenä energian säilymlaki (22) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p)\nabla_\mu u^\mu &= 0 \\ u^0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho + p)[\partial_\mu u^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu u^\nu] &= 0 \\ \frac{1}{A} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho + p)\left[-\frac{\partial A}{A^2} + \left(\frac{\partial A}{A} + \frac{\partial B}{B} + \frac{2\partial R}{R}\right) \cdot \frac{1}{A}\right] &= 0 \\ 2R \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho + p)\left(\frac{2R}{B} \frac{\partial B}{\partial t} + 4 \frac{\partial R}{\partial t}\right) &= 0\end{aligned}\quad (24)$$

ja vastaavasti liikemäärän säilymlaki (23)

$$\begin{aligned}(\rho + p)u^\mu \nabla_\mu u^\alpha + \nabla^\alpha p + u^\alpha u^\mu \nabla_\mu p &= 0 \\ (\rho + p)u^0(\partial_0 u^\alpha + \Gamma_{0\beta}^\alpha \cdot u^\beta) + g^{\alpha c} \nabla_c p + u^\alpha u^0 \nabla_0 p &= 0 \\ (\rho + p)\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0.\end{aligned}\quad (25)$$

Käytän näistä lyhenteitä JY1 (24) ja JY2 (25), joissa JY viittaa jatkuvuusyhtälöön ja numero säilymlakiin.

Aloitetaan MSH-yhtälöiden [28] johtaminen yhdistämällä yhtälö (15) yhtälöön (14)

$$\begin{aligned}\Gamma^2 &= U^2 + 1 - 8\pi\rho R^2 + \frac{2R}{\Gamma B} \left(U \frac{\partial U}{\partial r} - \Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) \\ \Gamma^2 &= U^2 + 1 - 8\pi\rho R^2 + \frac{R}{\partial_r R} \partial_r (U^2 + 1 - \Gamma^2) \\ (U^2 + 1 - \Gamma^2) \partial_r R + R \partial_r (U^2 + 1 - \Gamma^2) &= \partial_r (RU^2 + R - R\Gamma^2) = 8\pi\rho R^2 \partial_r R \\ \Gamma^2 &= U^2 + 1 - \frac{\int_0^R 8\pi R^2 \rho dR}{R}.\end{aligned}\quad (26)$$

Sijoittamalla yhtälö (18) ylläolevaan tulokseen antaa

$$\Gamma^2 = 1 + U^2 - \frac{2M}{R}, \quad (27)$$

M kuvaa yhtälön (18) nojalla energiatiheyttä R-säteisen pallon sisällä, joka voidaan ajatella fysikaalisesti lepoenergiana eli massana [28]. Tämä yhtälö (27) toimii reunaehtona.

JY2:n termit voidaan järjestellä uudelleen ja kertoa puolittain termillä $\frac{1}{A}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} &= -\frac{A}{(\rho + p)} \frac{1}{A} \frac{\partial p}{\partial r} \\ D_r A &= -\frac{A}{(\rho + p)} D_r p,\end{aligned}\tag{28}$$

joka on meidän ensimmäinen MSH-yhtälömme [28]. Derivaatta merkinnät on määritelty seuraavasti D_t :lle ja D_r :lle

$$D_t = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{ja} \quad D_r = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial r}.\tag{29}$$

Seuraava yhtälö saadaan JY2 ja Einsteinin kenttäyhtälön (16) avulla, johon sijoitetaan lisäksi (27)

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{A}{2R}(-U^2 - 1 + \Gamma^2) + \frac{\Gamma}{B} \frac{\partial A}{\partial r} - 4\pi p R A \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{AM}{R^2} - 4\pi p R A + \frac{\Gamma}{B} \left(-\frac{A}{(\rho + p)} \frac{\partial p}{\partial r}\right) \\ D_t U &= -\frac{\Gamma}{(\rho + p)} D_r p - \frac{M}{R^2} - 4\pi p R,\end{aligned}\tag{30}$$

joka on meidän toinen MSH-yhtälömme. JY2:n avulla saadaan vielä kolmas MSH-yhtälö laskettua Einsteinin kenttäyhtälöstä (15)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= \frac{U}{B} \frac{\partial A}{\partial r} = U \cdot D_r A = -\frac{UA}{(\rho + p)} D_r p \\ D_t \Gamma &= -\frac{U}{(\rho + p)} D_r p.\end{aligned}\tag{31}$$

Loput MSH-yhtälöt [28] saadaan JY1:n avulla lukuunottamatta massan paikkaderivaattaa, joka saadaan suoraan massan määritelmästä (18)

$$\begin{aligned}D_r M &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^R 4\pi R^2 \rho dR = \frac{4\pi R^2 \rho}{B} \frac{\partial R}{\partial r} \\ D_r M &= 4\pi R^2 \rho \Gamma.\end{aligned}\tag{32}$$

Seuraavat MSH-yhtälöt ovat tiheydelle ρ yhtälön (15) avulla. Lähdetään liikkeelle JY1:sta ja jaetaan se puolittain termillä $\frac{1}{A}$ ja sijoitetaan siihen muuttuja U (12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{2}{AR} \frac{\partial R}{\partial t} (\rho + p) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial t} (\rho + p) \\ D_t \rho &= (\rho + p) \left[-\frac{2U}{R} - \frac{1}{BA} \frac{\partial B}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Tämän jälkeen sijoitetaan Einsteinin yhtälö (15) ja sievennetään tulonderivaatalla tulos muotoon

$$\begin{aligned} &= -\frac{(\rho + p)}{\Gamma R^2 B} (2\Gamma B R U + R^2 \frac{\partial U}{\partial r}) = -\frac{(\rho + p)}{\Gamma R^2 B} (\frac{\partial}{\partial r} (R^2 U)) \\ &= -\frac{(\rho + p)}{\Gamma R^2 B} \frac{\partial}{\partial r} (R^2 U) = \frac{\rho + p}{\rho_0} D_t \rho_0, \end{aligned} \quad (34)$$

jossa määrittelemme termin $D_t \rho_0$

$$D_t \rho_0 = -\frac{\rho_0}{\Gamma R^2} D_r (R^2 U). \quad (35)$$

Nämä ovat kaksi tiheyden ρ MSH-yhtälöä ja riippuvat toisistaan. Termi ρ_0 on lepomassan tiheys tai kompressiokerroin fluidille, jolla ei ole lepomassaa [28].

Viimeisenä MSH-yhtälönä laskemme massan aikaderivaatan. Se saadaan ratkaistua JY1:n avulla Einsteinin yhtälöstä (15). Ensiksi kerromme yhtälön JY1 termillä $2\pi R \frac{\partial R}{\partial r}$ ja sitten sijoitamme siihen kenttäyhtälön (15), jolloin tuloksena on

$$\begin{aligned} &4\pi R^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial r} + 8\pi R \rho \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial r} + 4\pi R^2 \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{4\pi R^2 \rho}{A} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial r} \\ &+ 8\pi R p \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial r} + 4\pi R^2 p \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{4\pi R^2 p}{A} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Tämän jälkeen kirjoitamme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (4\pi \rho R^2 \frac{\partial R}{\partial r}) &= 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} R^2 \frac{\partial R}{\partial r} + 8\pi \rho R \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial r} + 4\pi \rho R^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} (4\pi p R^2 \frac{\partial R}{\partial t}) &= 4\pi \frac{\partial p}{\partial r} R^2 \frac{\partial R}{\partial t} + 8\pi p R \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial t} + 4\pi R^2 p \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial t}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (36)

$$\frac{\partial}{\partial t}(4\pi\rho R^2 \frac{\partial R}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial r}(4\pi p R^2 \frac{\partial R}{\partial t}) - 4\pi \frac{\partial p}{\partial r} R^2 \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{4\pi R^2}{A} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial r} (\rho + p) = 0.$$

Sijoitetaan tähän A:n paikkaderivaattaan yhtälö (28), jolloin kaksi viimeistä termiä kumoavat toisensa ja integroidaan r:n suhteen jäljelle jääneet kaksi termiä

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(4\pi\rho R^2 \frac{\partial R}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial r}(4\pi p R^2 \frac{\partial R}{\partial t}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{A} \int_0^R 4\pi R^2 \rho dR &= -\frac{1}{A} \cdot 4\pi p R^2 \frac{\partial R}{\partial t} \\ D_t M &= -4\pi R^2 p R^2 U. \end{aligned} \tag{37}$$

Alle on koottuna kaikki seitsemän yhtälöä, jotka yhdessä muodostavat MSH-yhtälöt

$$\begin{aligned} D_t U &= -\frac{\Gamma}{(\rho + p)} D_r p - \frac{M}{R^2} - 4\pi p R \\ D_t \rho_0 &= -\frac{\rho_0}{\Gamma R^2} D_r (R^2 U) \\ D_t \rho &= \frac{\rho + p}{\rho_0} D_t \rho_0 \\ D_r A &= -\frac{A}{(\rho + p)} D_r p \\ D_r M &= 4\pi R^2 \rho \Gamma \\ D_t \Gamma &= -\frac{U}{(\rho + p)} D_r p \\ D_t M &= -4\pi R^2 p U. \end{aligned}$$

Aluksi meille oli neljä riippumatonta Einsteinin yhtälöä (14)-(17) ja ne muodostavat tässä kolme riippumatonta yhtälöä (28), (30) ja (31). Lisäksi $D_t \rho_0$ -yhtälö (35) ja $D_t \rho$ -yhtälö (34) muodostavat yhdessä neljännen riippumattoman yhtälön. Kaksi muuta MSH-yhtälöä on laskettu massan määritelmän (18) mukaan derivaatoilla (29).

2.3 Kaarevuusprofiili

Tähän mennessä olemme tarkastelleet yleisen pallosymmetrisen metriikan liikeyhtälöitä, mutta nyt haluamme lisätä avaruuden mielivaltaiseen pisteeseen pallosymmetrisen häiriön, josta muodostuu fyysikaalisesti musta aukko häiriön ollessa tarpeeksi voimakas. Voimme toteuttaa tämän johtamalla teorian energiatiheyden paikallisille muutoksille eli energian yli- ja alitihentymille avaruudessa perturboimalla MSH-yhtälöt gradienttiekspansion avulla [28]. Tarvitsemme siis tavan ilmaista energiatiheyden muutosta metriikan parametreilla. Tätä varten teemme koordinaattimuutoksen ABR-metriikalle (1) ja lisäksi oletamme aika-avaruuden adiabaattiseksi. Tällöin lämpöenergiaa ei siirry systeemin tai siitä pois muuta kuin mekaanisen työn kautta [31].

Valitaan $A(r,t) \equiv 1$ ja tällöin metriikka voidaan kirjoittaa muotoon [28]

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 - K(r,t)r^2} dr^2 + a^2(t)r^2 d\Omega^2. \quad (38)$$

Metriikka on edelleen pallosymmetrinen ja muoto muistuttaa paljon FLRW-metriikkaa (2), jota hyödynnetään vielä myöhemmin, mutta erityisesti metriikan dr -komponentit on kirjoitettu kaarevuusprofiilin $K(r,t)$ avulla. Tavoittemme on saada kuvattua energian ylitiheyttä tämän kaarevuusprofiilin avulla.

Tarkastellaan vielä kaarevuusprofiilia $K(r,t)$ ja sen aika-riippuvuutta tarkemmin, jotta voisimme mahdollisesti yksinkertaistaa yhtälöitä. Tämä pohjautuu lähteen [32] menetelmään, jonka nojalla $K(r,t)$ ei riipu ajasta homogeenisessa tilanteessa vaan pelkästään etäisyydestä r ja kirjoitetaan muotoon $K(r)$. Käydään seuraavaksi läpi, miksi näin pätee.

Yleinen tapa kirjoittaa (3+1)-metriikka on käyttää Arnowitt-Deser-Misner (ADM) muotoilua [28][32]

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt). \quad (39)$$

Kun vertaamme tätä metriikkaan (38), huomaamme, että ADM-metriikassa (39) on ylimääräinen termi $drdt$. Koska metriikka (38) ei sisällä ajan ja spatiaalikoordinaatin sekatermiä, valitsemme sen nollassi. Tämä voidaan matemaattisesti ilmaista $drdt$ -termin kertoimen β_i :n avulla

$$\beta_i = O(\epsilon) \quad (40)$$

jossa $\epsilon \rightarrow 0$, joka kuvaa perturboimatonta avaruutta. Tarkemmin ϵ määritellään Hubblen parametrin H , skaalatekijän $a(t)$ ja aaltoluvun k avulla

$$\epsilon = \frac{k}{aH}. \quad (41)$$

Gradienttieksiansio pohjautuu tähän yhtälöön ja käymme sen läpi tarkemmin seuraavassa alaluvussa 2.4. Tarvitsemme tässä vain tiedon, että suurilla skaaloilla avaruus on perturboimaton eli $\epsilon \rightarrow 0$.

Seuraavaksi oletamme aikaderivaatan $\dot{\gamma}_{ij} = O(\epsilon)$, koska määritelmän mukaan

$$\gamma_{ij} = \tilde{\gamma}_{ij} \cdot \frac{a^2(t)}{1 - K(r,t)r^2}, \quad (42)$$

jolloin γ_{ij} on aika-riippuvainen ja ei voi olla homogeeninen, jos kaarevuusparametri $K(r,t)$ poikkeaa FLRW-mallista [32][28]. Yhdessä yhtälöt (40) ja (42) vaativat avaruuden olevan homogeeninen ja suurilla skaaloilla perturboimaton. Yleensä emme ole kiinnostuneita heikkenevistä perturbaatioista, joten voimme vaatia $\dot{\gamma}_{ij} = O(\epsilon^2)$ [32].

Tarkastelemalla energian säilymislakia (22) saadaan

$$\begin{aligned} u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p) \nabla_\mu u^\mu &= 0 \\ u^0 \cdot \frac{d\rho}{dt} + \frac{d}{dt}(u^0) + \Gamma_{\mu 0}^\mu \cdot u^0 &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Nelinopeuden komponentti u^0 saadaan kirjoitettua määritelmän (3) avulla seuraavasti ADM-metriikalle (39) ja hyödyntämällä yhtälöä (40)

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{N^2 - \beta^i \beta_i}} = \frac{1}{N} + O(\epsilon^2).$$

Sijoitetaan tämä säilymislain yhtälöön (43) ja $T^{\mu\nu}$ on edelleen yhtälön (7) mukainen, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \dot{\rho} - \frac{\dot{N}}{N^2} + \Gamma_{\mu 0}^\mu \cdot \frac{1}{N} + O(\epsilon^2) &= 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\psi} &= -\frac{\dot{\rho}}{3(\rho + p)} + O(\epsilon^2) \\ \dot{\psi} &= -\dot{K} = O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (44)$$

jossa merkintä \dot{A} tarkoittaa A :n aikaderivaattaa. Tämän nojalla kaarevuusprofiili

K riippuu vain etäisyydestä r , kun avaruus on suurella skaalalla homogeeninen ja perturboinaton eli noudattaa FLRW-metriikkaa [32]. Kirjoitetaan metriikka (38) lopulliseen muotoonsa

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 - K(r)r^2} dr^2 + a^2(t)r^2 d\Omega^2. \quad (45)$$

Voimme kirjoittaa metriikan (45) myös eksponenttimuodossa, jolloin saamme kirjoitettua kaarevuusprofiilin eri funktiolla $\zeta(r)$, jolla voidaan välttää $K(r)$:n luoma koordinaattisingulariteetti pisteessä $K(r)r^2$ seuraavasti: tehdään metriikalle seuraavat koordinaattimuunnokset [28]

$$\begin{cases} r = \hat{r}e^{\zeta(\hat{r})} \\ \frac{1}{\sqrt{1-K(r)r^2}} dr = e^{\zeta(\hat{r})} d\hat{r}, \end{cases} \quad (46)$$

jolloin metriikka (45) saadaan muotoon

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)e^{2\zeta(\hat{r})} d\hat{r}^2 + a^2(t)r^2 e^{2\zeta(\hat{r})} d\Omega^2. \quad (47)$$

Voimme vielä ratkaista suoran riippuvuuden $K(r)$ ja $\zeta(\hat{r})$ välille. Derivoidaan yhtälöparin (46) ensimmäinen yhtälö \hat{r} :n suhteen ja sijoitetaan se toiseen yhtälöön

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\hat{r}} &= e^{\zeta(\hat{r})} \left(1 + \hat{r} \frac{d\zeta(\hat{r})}{d\hat{r}}\right) = e^{\zeta(\hat{r})} \sqrt{1 - K(r)r^2} \\ K(r)r^2 &= -\hat{r} \frac{d\zeta(\hat{r})}{d\hat{r}} [2 + \hat{r} \frac{d\zeta(\hat{r})}{d\hat{r}}]. \end{aligned} \quad (48)$$

Käytämme teoriassa kaarevuusprofiilin parametrusointi $K(r)$, mutta myöhemmin erityisesti inflaatioon liittyvässä tutkimuksessa käytetään myös parametrusointia $\zeta(\hat{r})$, jolloin hyödynnämme riippuvuutta (48)[9]. Kirjoitetaan yhtälö (27) uusissa koordinaateissa hyödyntämällä Γ :n määritelmää

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 = \frac{1 - K(r)r^2}{a^2(t)} \left(\frac{\partial}{\partial r}(a(t)r)\right)^2 \\ &= 1 - K(r)r^2 = \left(1 + \hat{r} \frac{d\zeta(\hat{r})}{d\hat{r}}\right)^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Ratkaistaan kaarevuusprofiili reunaehdosta separoimalla ja integroimalla se. Integroimista varten oletamme aika-avaruuden olevan spatiaalisesti laakea asympotoottisesti,

jolloin

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K(r)r^2 = 0, \quad \lim_{\hat{r} \rightarrow \infty} \zeta(\hat{r}) = 0.$$

Yhtälö (49) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta(\hat{r})}{d\hat{r}} &= (\sqrt{1 - K(r)r^2} - 1) \frac{1}{\hat{r}} \\ d\zeta(\hat{r}) &= (\sqrt{1 - K(r)r^2} - 1) \cdot \frac{1}{r/e^{\zeta(\hat{r})}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{1 - K(r)r^2} \cdot e^{\zeta(\hat{r})}}, \end{aligned} \quad (50)$$

jossa on käytetty koordinaattimuunnoksia (46). Viimeisenä integroidaan dr :n suhteen ja kaarevuusprofiilin ratkaisut ovat muotoa

$$\begin{cases} \zeta(\hat{r}) &= \int_{\infty}^r (1 - \frac{1}{\sqrt{1 - K(r)r^2}}) \frac{1}{r} dr \\ \hat{r} &= r \cdot \exp[\int_{\infty}^r (\frac{1}{\sqrt{1 - K(r)r^2}} - 1) \frac{1}{r} dr]. \end{cases} \quad (51)$$

2.4 Perturbaation voimakkuus ja lisääminen yhtälöihin

Jotta voimme teoreettisesti kuvata mustan aukon, meidän tulee perturboida aika-avaruus, joka noudattaa metriikkaa (45). Oletamme, että ratkaisut palautuvat asympotoottisesti FLRW-metriikasta saataviin Friedmannin yhtälöihin [33] ja tämän seurauksena voimme olettaa, että systeemin yleinen ratkaisu saadaan kuvattua homogeeniratkaisuna (FLRW-metriikka) ja siihen lisättynä isotrooppiset perturbaatiot. Perturbointi toteutetaan ekspansoimalla spatiaalisissa gradientteissa, jota kutsutaan gradienttiekspansioiksi tai pitkän aallonpituuden approksimaatioksi. Tämä tehdään kertomalla spatiaaligradienteja dimensiottomalla termillä ϵ ja kehittämällä sen Taylorin sarja. Valitaan johtavaksi kertaluvuksi ϵ^2 eli tiputamme suuremmat potenssit pois. Lopuksi asetamme $\epsilon = 1$. [32] [28]

Fysikaalisesti gradienttiekspansio perustuu ideaan, että jokainen määritelty termi tasaantuu tarpeeksi suurella skaalalla k^{-1} . Taustaratkaisussa on ainoastaan yksi parametri, jolla voidaan kuvata skaala ja skaala ilmaistaan tällöin Hubblen parametrimilla H ($K = 0$ taustassa). Tällöin termi ϵ ei ole vain kerroin spatiaaligradienteille vaan se voidaan määritellä yhtälön (41) avulla. Tällöin gradientit ovat pieniä kun $\frac{k}{aH} \ll 1$. [32] [28]

Ennen perturboimista pystymme perustelemaan, että ϵ^1 -termejä ei tarvitse tarkastella vaan voimme tiputtaa ne pois. Yleisessä suhteellisuusteoriassa on näytetty, että

$O(\epsilon)$ -termi $\tilde{\gamma}_{ij}$:lle on heikkenevä perturbaatio ja voimme vaatia, että $\dot{\gamma}_{ij} = O(\epsilon^2)$, joka tarkoittaa, että tarkastelemme suoraan ϵ^2 -kertaluokan perturbaatioita [32]. Yleinen ratkaisu on homogeeninen ratkaisu $\epsilon^0 f_0(x)$ ja siihen lisättynä perturbaatiot $\epsilon^1 f_1(x)$ ja $\epsilon^2 f_2(x)$, joista lineaaritermi ϵ^1 on aiemman perusteella nolla. Tällöin lähdemme liikkeelle tilanteesta FLRW-ratkaisu + toisen asteen perturbaatio [28]

$$A(t,r) = 1 + \epsilon^2 \tilde{A}(t,r) \quad (52)$$

$$B = \frac{R'}{\sqrt{1 - K(r)r^2}} (1 + \epsilon^2 \tilde{B}) \quad (53)$$

$$R = a(t)r(1 + \epsilon^2 \tilde{R}) \quad (54)$$

$$\rho = \rho_b(t)(1 + \epsilon^2 \tilde{\rho}) \quad (55)$$

$$U = H(t)R(1 + \epsilon^2 \tilde{U}) = Ha(t)r(1 + \epsilon^2 \tilde{R} + \epsilon^2 \tilde{U}) \quad (56)$$

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_b(t)R^3(1 + \epsilon^2 \tilde{M}), \quad (57)$$

jossa R' tarkoittaa R :n paikkaderivaattaa $\frac{d}{dr}$. Ratkaistaan ensimmäisenä yhtälö (49) lisäämällä siihen ylläolevat ratkaisut (56), (57) ja (54)

$$\begin{aligned} 1 + U^2 - \frac{2M}{R} &= 1 - K(r)r^2 \\ K(r)r^2 &= \frac{2M}{R} - H^2 R^2 (1 + \epsilon^2 \tilde{U})^2 \\ K(r)r^2 &= \frac{8\pi}{3} \rho_b R^2 - R^2 H^2 + \frac{8\pi}{3} \rho_b R^2 \epsilon^2 \tilde{M} - R^2 H^2 (\epsilon^2 \tilde{U})^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Viimeisellä rivillä olen linearisoinut yhtälön ϵ :n suhteen ja seuraavaksi tarkistamme, että ϵ^0 termit toteuttavat metriikan. Koska homogeeninen yhtälö on FLRW-metriikalle, niin tuloksen tulisi toteuttaa Friedmannin yhtälöt [33]. Yhtälön (58) viimeiseltä laskuriviltä kokoamalla ϵ^0 -termit yhteen, saamme Friedmannin ensimmäisen yhtälön

$$0 = \frac{8\pi}{3} \rho_b R^2 - H^2 R^2$$

Vastaavasti ϵ^2 -termit antavat ratkaisuksi

$$\begin{aligned} K(r)r^2 &= \epsilon^2 R^2 \left(\frac{8\pi}{3} \rho_b \tilde{M} - 2H^2 \tilde{U} \right) \\ K(r) &= H^2 \epsilon^2 a^2 (\tilde{M} - 2\tilde{U}). \end{aligned} \quad (59)$$

Määritelmän (41) nojalla $k = aH\epsilon$ ja lisäksi määritellään $r_k = \frac{1}{k}$ [28], jolloin yhtälö (59) saadaan muotoon

$$K(r)r_k^2 = \tilde{M} - 2\tilde{U}. \quad (60)$$

Seuraavaksi lasketaan MSH-yhtälöt perturboiduilla funktioilla. Aloitetaan yhtälöstä (28) sijoittamalla siihen (52) ja (55). Lisäksi adiabaattisessa systeemissä saadaan paineen ja tiheyden suhde $p = \omega\rho$, jossa ω on vakio [28]. Tällöin

$$\begin{aligned} D_r(1 + \epsilon^2 \tilde{A}) &= -\frac{(1 + \epsilon^2 \tilde{A})\omega}{\rho + \omega\rho} D_r(\rho) \\ D_r(1) + \epsilon^2 D_r(\tilde{A}) &= -\frac{\omega}{\rho_b(1 + \omega)} \rho'_b - \frac{\epsilon^2 \omega \rho_b}{\rho_b(1 + \omega)} D_r(\tilde{\rho}) \end{aligned}$$

Tämän nojalla ϵ^0 -termit vaativat $d_r(\rho) = 0$, joka pätee homogeeniselle ja isotrooppiselle metriikalle. ϵ^2 -termit antavat seuraavan tuloksen

$$\begin{aligned} D_r(\tilde{A}) &= -\frac{\omega}{(1 + \omega)} D_r(\tilde{\rho}) \\ \tilde{A} &= -\frac{\omega}{1 + \omega} \tilde{\rho}. \end{aligned} \quad (61)$$

Seuraavaksi saamme ratkaistua \tilde{R} :n lähtemällä liikkeelle U:n määritelmästä (12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \partial_t(R) &= U \\ \partial_t(ar(1 + \epsilon^2 \tilde{R})) &= (1 + \epsilon^2 \tilde{A})HR(1 + \epsilon^2 \tilde{U}), \end{aligned} \quad (62)$$

jossa ∂_t tarkoittaa osittaisderivaattaa ajan suhteen, $R = ar$ ja Hubblen parametri $H = \frac{\dot{a}}{a}$ [28]. Sijoittamalla R :n ja H :n yhtälöön (62) näemme, että ϵ^0 -termit sievenevät ja tarkasteltavaksi jää ϵ^2 -termit

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \tilde{R} + d_t(\epsilon^2 \tilde{R}) &= \epsilon^2 H(\tilde{A} + \tilde{U} + \tilde{R}) \\ \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon}\right)^2 \tilde{R} + \dot{\tilde{R}} &= H(\tilde{A} + \tilde{U}). \end{aligned}$$

Hyödynnetään ϵ :n määritelmää (41)

$$\epsilon^2 = \frac{k^2}{a^2 H^2} = \frac{1}{a^2 H^2 r^2} = \frac{1}{\dot{a}^2 r^2}, \quad (63)$$

jonka nojalla

$$\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon}\right)^2 = -2\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} = (1 + 3\omega)H, \quad (64)$$

jossa tiheyden ρ ja skaalatekijän a välinen yhteys saadaan jatkuvuusyhtälöstä (19) FLRW-metriikalle [33]

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \quad (65)$$

jolloin ylläoleva yhtälö \tilde{R} :lle saadaan muotoon

$$\begin{aligned} (1 + 3\omega)\tilde{R} + \dot{\tilde{R}}\frac{1}{H} &= \tilde{A} + \tilde{U} \\ \tilde{R} + \dot{\tilde{R}} \cdot \frac{1}{(1 + 3\omega)H} &= -\frac{\omega}{(1 + \omega)(1 + 3\omega)}\tilde{\rho} + \frac{1}{1 + 3\omega}\tilde{U}. \end{aligned} \quad (66)$$

Yhtälöstä (66) voidaan tiputtaa perturbaatiotermin aikaderivaatta pois, koska \tilde{R} -termin ratkaisu on eksponentiaalisesti kuolevan termin ja vakiotermin summa. Näistä jälkimmäinen vastaa asymptoottista ratkaisua, joka on ratkaistu kaarevuusprofiili-osiossa ja lähestyttäessä tätä eksponentiaalisesti, voidaan eksponentiaalisesti kuoleva termi tiputtaa pois eli tässä tapauksessa \tilde{R} :n aikaderivaatta. Tällöin \tilde{R} on muotoa

$$\tilde{R} = -\frac{\omega}{(1 + \omega)(1 + 3\omega)}\tilde{\rho} + \frac{1}{1 + 3\omega}\tilde{U}. \quad (67)$$

Seuraavana ratkaisemme \tilde{B} :n lähtemällä liikkeelle Einsteinin yhtälöstä (15)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Ad_r(U)}{d_t(B)} = \frac{1}{B}\partial_r(R) \\ \frac{\dot{B}}{B} &= A\frac{U'}{R'}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöt (52), (53) ja saadaan tulos

$$\frac{\dot{R}'}{R'} + \partial_t(\epsilon^2\tilde{B}) = (1 + \epsilon^2\tilde{A})\frac{U'}{R'}.$$

ϵ^0 -termit toteuttavat yhtälön $H = \frac{\dot{a}}{a}$ ja ϵ^2 -termit antavat tuloksen

$$\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon}\right)^2\tilde{B} + \dot{\tilde{B}} = \tilde{A}\frac{U'}{R'}$$

Tästä voidaan jälleen tiputtaa eksponentiaalisesti kuoleva termi $\dot{\tilde{B}}$ pois ja sijoittaa yhtälö (64), jolloin

$$\tilde{B} = -\frac{\omega r}{(1+\omega)(1+3\omega)}\tilde{\rho}'. \quad (68)$$

Seuraavaksi yhtälö (37), jonka ϵ^0 -termit toteuttavat jatkuvuusyhtälön FLRW-metriikalle (65). Vastaavasti ϵ^2 -termit muodostavat seuraavan yhtälön, johon voidaan sijoittaa juuri johdetut \tilde{R} ja \tilde{A}

$$\begin{aligned} \partial_t(\epsilon^2\tilde{M}) - 3\omega H\tilde{M} + 3\omega H\tilde{\rho} + 3H(1+\omega)\partial_t(\epsilon^2\tilde{R}) &= 0 \\ \tilde{M}H + \dot{\tilde{M}} &= -3\omega H\tilde{\rho} - 3(1+\omega)\dot{\tilde{R}} + \frac{3(1+\omega)}{\omega}\tilde{\rho}H + \omega - 3(1+\omega)H\tilde{U} \\ \tilde{M} &= -3(1+\omega)\tilde{U}. \end{aligned} \quad (69)$$

Seuraavaksi lasketaan \tilde{U} hyödyntämällä yhtälöä (60) ja (69)

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= -3(1+\omega)\tilde{U} = -5\tilde{U} + 2\tilde{U} - 3\omega\tilde{U} \\ -(5+3\omega)\tilde{U} &= \tilde{M} - 2\tilde{U} \\ \tilde{U} &= -\frac{1}{5+3\omega}K(r)r_k^2. \end{aligned} \quad (70)$$

Viimeisenä ratkaistaan $\tilde{\rho}$, joka saadaan yhtälöstä (32)

$$\begin{aligned} 4\pi\rho_b a^3 r^2 [1 + \epsilon^2(\tilde{\rho} + 3\tilde{R} + r\tilde{R}')] &= 4\pi\rho_b a^3 r^2 [1 + \epsilon^2(\tilde{M} + 3\tilde{R} + \frac{1}{3}r \cdot 3\tilde{R}' + \frac{r}{3}\tilde{M}')] \\ \epsilon^2(\tilde{M} + \frac{r}{3}\tilde{M}') &= \epsilon^2\tilde{\rho} \\ \tilde{\rho} &= \frac{1}{3r^2}(r^3\tilde{M})' \end{aligned} \quad (71)$$

Sijoittamalla tähän yhtälöt (69) ja (70) saadaan

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= 3(1+\omega)[- \tilde{U} - \frac{r}{3}\tilde{U}'] \\ &= \frac{3(1+\omega)}{5+3\omega}[K(r) + \frac{r}{3}K'(r)]r_k^2. \end{aligned} \quad (72)$$

Määritellään vielä termit $\frac{\delta\rho}{\rho_b}$ ja $\frac{\delta U}{U_0}$ [28], joita voimme hyödyntää myöhemmin pertur-

baation amplitudin määrittelyssä

$$\begin{aligned}\frac{\delta\rho}{\rho_b} &\equiv \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} = \epsilon^2 \tilde{\rho} \\ \frac{\delta U}{U_0} &\equiv \frac{U - U_0}{U_0} = \epsilon^2 \tilde{U}.\end{aligned}$$

Kirjoitetaan nämä määritelmät ρ :n (72) ja U :n (70) avulla ja lisäksi käytetään ϵ :n määritelmää (64), jolloin

$$\frac{\delta\rho}{\rho_b} = \frac{1}{a^2 H^2 r_k^2} \tilde{\rho} = \left(\frac{1}{aH}\right)^2 \frac{3(1+\omega)}{5+3\omega} [K(r) + \frac{r}{3}K'(r)] \quad (73)$$

$$\frac{\delta U}{U_0} = -\left(\frac{1}{aH}\right)^2 \frac{1}{5+3\omega} K(r). \quad (74)$$

2.5 Energiatiheyden perturbaation amplitudi δ

Aloitetaan määrittelemällä keskimääräinen massaylijäämä tilavuudessa V vähentämällä massan määritelmästä (18) tausta ρ_b [28]

$$\delta(r,t) = \frac{1}{V} \int_0^R 4\pi R^2 \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} dR. \quad (75)$$

Pallosymmetriselle metriikalle (45), voimme valita tilavuudeksi $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ [28]. Tällöin

$$\begin{aligned}\delta(r,t) &= \frac{1}{\frac{4\pi}{3}R^3} \int_0^R 4\pi R^2 \frac{\delta\rho}{\rho_b} dR \\ &= \frac{3}{r^3} \int_0^r \frac{\delta\rho}{\rho_b} r^2 dr \\ &= \frac{3}{r^3} \int_0^r \left(\frac{1}{aH}\right)^2 \frac{3(1+\omega)}{5+3\omega} [K(r) + \frac{r}{3}K'(r)] r^2 dr.\end{aligned} \quad (76)$$

Merkitään yhtälön (76) vakiokerroin seuraavasti

$$f(\omega) = \frac{3(1+\omega)}{5+3\omega}. \quad (77)$$

Käytetään lisäksi tulosta $[K(r) + \frac{r}{3}K'(r)]r^2 = \frac{d}{dr}[\frac{K(r)r^3}{3}]$ yhtälöön (76), jolloin saadaan tulos [28]

$$\delta(r,t) = \frac{3}{r^3} \int_0^r \frac{\delta\rho}{\rho_b} r^2 dr = \epsilon^2(t) f(\omega) K(r) r_k^2. \quad (78)$$

Toinen muoto kirjoittaa ylempi yhtälö on käyttäen ϵ :n määritelmää (41), missä

$$\delta(r,t) = \epsilon^2 \tilde{M} = \left(\frac{1}{aH}\right)^2 f(\omega) K(r). \quad (79)$$

Tämän nojalla $K(r)$ mittaa suoraan keskimääräistä massaylijäämää r -säteisen pallon sisällä. $f(\omega)$ antaa kertoimen $K(r)$:lle, joka riippuu tilanyhtälöstä[28].

Lähdettä [34] seuraten määrittelemme niin sanotun kompaktiofunktion C seuraavasti

$$C := \frac{2[M - M_b]}{R}, \quad (80)$$

jossa M_b on taustan massa ja yhtälöllä (80) kuvataan massaylijäämää pinta-alassa $4\pi R^2$. Hyödyntämällä yhtälöitä (54) ja (57) sekä hyödyntämällä Friedmannin ensimmäistä yhtälöä (59) saamme kompaktiofunktion muotoon

$$C = \frac{r^2}{r_k^2} \tilde{M} + O(\epsilon^2). \quad (81)$$

Tiputetaan ϵ^2 :n termit pois ja sijoitetaan yhtälöt (41) ja (79), jolloin kompaktiofunktio ei ole enää aikariippuvainen ja voidaan kirjoittaa muotoon

$$C(r) = f(\omega) K(r) r^2 = \frac{r^2}{r_k^2} \delta(r), \quad (82)$$

jossa

$$\delta(r,t) = \epsilon^2(t) \delta(r).$$

ϵ^2 saadaan yhtälöstä (41). Tämän nojalla on yhtäpitävää mitata perturbaation amplitudia δ , joko ylijäämämassana liikkuvassa tilavuudessa säteellä r_k eli $\delta(r,t)$:n avulla tai kompaktiofunktion paikallisella arvolla $\delta(r)$. Koska tutkimme PBH:n muodostumista, niin tarkastellaan tilannetta $r_k = r_m$ eli milloin kompaktiofunktio

(82) saavuttaa maksimiarvonsa

$$\begin{aligned} C'(r) &= \frac{1}{2}K'(r)r + K(r) = 0 \\ K'(r = r_m) &= -2\frac{K(r_m)}{r_m} \end{aligned} \quad (83)$$

Sijoitetaan $K'(r_m)$ yhtälöön (73) ja sievennetään

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho(r_m,t)}{\rho_b(t)} &= \left(\frac{1}{aH}\right)^2 f(\omega) \left[K(r_m) - \frac{2r_m}{3r_m} K(r_m) \right] \\ 3\frac{\delta\rho(r_m,t)}{\rho_b(t)} &= \left(\frac{1}{aH}\right)^2 f(\omega) K(r_m) = \delta(r_m,t). \end{aligned} \quad (84)$$

Tulos on täysin riippumaton kaarevuusprofiilin tarkan muodon valitsemisesta ja antaa yleisen suhteen paikallisen energiatiheysperturbaation $\frac{\delta\rho}{\rho_b}$ arvon pisteessä r_m ja keskimääräisen ylijäämämassan δ arvon liikkuvassa tilavuudessa säteellä r_m . 3:n kerroin johtuu tilavuuden spatiaalidimensioista pallosymmetrisessä tilanteessa [28].

3 Alaraja perturbaation amplitudille δ , jolla voi syntyä primordiaalinen musta aukko

Suurin osa teorian tuloksista on epälineaarisia tai äärimmäisen haastavia ratkaista analyttisesti, kuten aiemmin on todettu, joten numeriiikka ja sille käytettävät approksimaatiot ovat tästä eteenpäin pakollinen osa laskentaa. Tämän tutkielman aihe ei kuitenkaan ole laskea numeriiikkaa vaan johdamme tärkeät analyttiset tulokset ja approksimaatiot numeriiikkaa varten ja tämän jälkeen tarkastelemme muiden tutkimusten saamia numeerisia tuloksia. Oleellinen osa tätä lukua on, että saamme sekä numeerisen, että analyttisen tuloksen perturbaation $\frac{\delta\rho}{\rho_b}$ kriittiselle alarajalle, jolla primordiaalinen musta aukko syntyy. Aloitetaan luku teorialla ja käsitellään tuloksia lopuksi alaluvussa 3.3.

3.1 Kaarevuusprofiilin $K(r)$ parametrusointi numeriiikkaa varten

Yleensä valitsemme kaarevuusprofiilin $K(r)$ muodoksi Gaussisen jakauman, koska se on matemaattisesti yksinkertainen approksimaatio nopeuttamaan laskentaa, mutta tarkempia tuloksia varten tämä ei ole riittävä malli [28] [35]. Gaussisen jakauman etu on se, että se on kaikiällä jatkuva ja äärettömästi derivoituva kaikissa pisteissä eli kuuluu C^∞ joukkoon, joka on hyödyllistä, koska käytämme teoriassa korkeamman asteen derivaattoja (ks. yhtälö (89)). Muita yksinkertaisia vaihtoehtoja C^∞ joukossa ovat esimerkiksi trigonometriset funktiot ja polynomifunktiot, joilla voitaisiin jakaumaa kuvata [36]. Numeerisesti on kuitenkin todettu, että Gaussinen funktio sopii tarkemmin numeerisiin malleihin [35]. Vastakohtana C^∞ funktioille on esimerkiksi porraskuva, jossa on teräviä kulmia, jolloin sitä ei voida derivoida jokaisessa pisteessä ja laskenta menee jopa mahdottomaksi ilman approksimaatioita. Viime vuosina numeeriset tulokset [35] ovat auttaneet tarkentamaan arvoja, joilla primordiaalinen musta aukko voi syntyä ja samalla niistä on nähty, että profiilin muotoon vaikuttaa korkeamman asteen epälineaarisia perturbaatioita ja ne tulisi huomioida sekä teoriassa, että sen pohjalta tehtävästä numeriiikasta. Tässä tutkiel-

massa tarkastellaan analyysissa vain Gaussista kaarevuusprofiilin jakaumaa, eikä huomioida epälineaarisia perturbaatioita tai epägaussisia jakaumia.

On hyvä huomata, että Gaussisen jakauman parametrisoinnit pohjautuvat vahvasti primordiaalisten mustien aukkojen numeerisiin tuloksiin ja parametrisointia voidaan tarvittaessa muuttaa tai lisätä parametreja jos malli ei kuvaa numeerisia tuloksia halutulla tarkkuudella, kuten paperissa [28]. Ei siis suoranaisesti ole olemassa täydellistä parametrisaatiota, joka kattaisi kaikki gaussiset jakaumat myös aivan muissa asiayhteyksissä [37]. Määritellään tähän tapaukseen yleinen gaussinen jakauma kaarevuusprofiilille $K(r)$ parametrien α , λ ja A avulla seuraavasti [28]

$$K(r) = A \left(\frac{r}{\Delta} \right)^{2\lambda} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\Delta} \right)^{2\alpha}}, \quad (85)$$

jolloin yhtälö (73) tulee muotoon

$$\frac{\delta\rho}{\rho_b} = \left(\frac{1}{aH} \right)^2 f(\omega) K(r) \left[1 + \frac{2\lambda}{3} - \frac{\alpha}{3} \left(\frac{r}{\Delta} \right)^{2\alpha} \right]. \quad (86)$$

Parametrien A ja Δ avulla voimme kontrolloida profiilin amplitudia ja perturbaation pituuskaalaa tässä järjestyksessä. Lisäksi parametri α vaikuttaa profiilin jyrkkyyteen ja λ siirtää huipun paikkaa. Valitsemalla $\lambda = 0$, huippu on keskitetty pisteeseen $r = 0$. Hyödyntämällä kompaktiofunktion tulosta (83), voimme laskea r :n maksimiarvon ja sen avulla voidaan määrittää keskiarvoistetun massaylijäämän maksimi δ_m , jolle saamme tässä luvussa kriittisen alarajan synnyttämään primordiaalisen mustan aukon. Lasketaan tämä maksimi yleisen gaussisen kaarevuusprofiilin avulla

$$\begin{aligned} K(r_m) + \frac{r_m}{2} K'(r_m) &= 0 \\ K(r_m) + \frac{r_m}{2} \frac{1}{r_m} K(r_m) [2\lambda - \alpha \left(\frac{r_m}{\Delta} \right)^{2\alpha}] &= 0 \\ 1 + \lambda &= \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{r_m}{\Delta} \right)^{2\alpha} \\ r_m &= \Delta \left(\frac{2(1+\lambda)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2\alpha}}. \end{aligned} \quad (87)$$

Tuloksen (78) nojalla

$$\begin{aligned}\delta_m &= f(\omega)K(r_m)r_m^2 \\ &= f(\omega)A\left[\left(\frac{2(1+\lambda)}{\alpha}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}} \cdot \exp\left(-\frac{1+\lambda}{\alpha}\right)\right]r_m^2.\end{aligned}\quad (88)$$

Lisäksi tärkeä määritelmä kompaktiofunktion ja parametrin α välille on [38]

$$\alpha = -\frac{C''(r_m)r_m^2}{4\delta_m}.\quad (89)$$

Tietyllä pituuskaalalla r_m ja amplitudilla δ_m yhtälöstä (89) nähdään, että kompaktiofunktion huippu on laaja, kun energiatiheyden huippu on terävä ja päinvastoin [28]. Määritelmän (89) avulla voidaan lisäksi tarkistaa kaarevuusprofiilin $K(r)$ parametrisoinnin toimivuus, koska kaarevuusprofiilin tulee toteuttaa tämä määritelmä. Voimme tarkastaa sen pitävyyden parametrisaatiolle (85) laskemalla toisen derivaatan ja sijoittamalla sen α :n lausekkeeseen (89). Lisäksi hyödynnämme tietoa kaarevuusprofiilin ensimmäisen derivaatan maksimista yhtälön (83) nojalla. Tällöin

$$-\frac{C''(r_m)r_m^2}{4\delta_m} = -\frac{f(\omega)\frac{d^2}{dr^2}(K(r_m)r_m^2)r_m^2}{4f(\omega)K(r_m)r_m^2}.$$

Sijoittamalla yhtälöön kaarevuusprofiilin $K(r)$ (85), saamme lopputulokseksi α :n, joten kaarevuusprofiili toteuttaa määritelmän (89).

Tähän mennessä tarkastelemamme yleinen gaussinen kaarevuusprofiili $K(r)$ on tarkemmin kompensoitu yleinen kaarevuusprofiili, joka mallintaa vain yhden huipun. Sen seurauksena syntyviä primordiaalisia mustia aukkoja kutsutaan tyyppin I PBH:ksi [28]. Jos tarkastelemme metriikan yhtälöä (45), niin huomaamme, että dr^2 -termi sisältää koordinaattisingulariteetin, kun $K(r)r^2 = 1$ ja tällöin jakaja menee nolnaan. Olemme tähän mennessä laskennassa rajanneet tuloksen alueelle $K(r)r^2 < 1$. Koordinaattisingulariteetti voidaan ratkaista koordinaattimuutoksella [39] ja sen tuloksena huomataan, että primordiaalisia mustia aukkoja voi syntyä myös arvoilla $K(r)r^2 > 1$ [40] ja näitä kutsutaan tyyppin II PBH:ksi. Tilannetta voidaan kuvata epäkompensoidulla kaarevuusprofiililla ja tällöin jakauma voi koostua useammasta kuin yhdestä huipusta [28].

Kaarevuusprofiili $K(r)$ määritellään epäkompensoidulle profiilille seuraavasti [28]

$$K(r) = \frac{3aH}{r^3} \int_0^r \frac{\delta\rho}{\rho_b} x^2 dx^2. \quad (90)$$

Tätä vastaava energiatiheysperturbaatio yhtälöstä (73) kirjoitetaan muodossa [28]

$$\frac{\delta\rho}{\rho_b} = \left(\frac{1}{aH}\right)^2 f(\omega) \cdot A\left(\frac{r}{\Delta}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\Delta}\right)^2}, \quad (91)$$

jossa parametri n siirtää huipun paikkaa samoin kuin kompensoidun profiilin parametri λ [28]. Emme tarkastele tilannetta sen tarkemmin, koska kriittinen alaraja δ_m :lle, jotta primordiaalisen mustan aukon syntyy, voidaan määrittellä kokonaan tyyppin I PBH:en avulla [28]. Seuraavassa kappaleessa 3.2 laskemme yleisen analyttisen alarajan δ_m :lle, joka pätee kaikille gaussisille kaarevuusprofiileille [38].

3.2 Keskiarvoistetun kompaktiofunktion määrittely ja δ_m :n analyttinen alaraja

α :n määritelmän avulla voimme johtaa yleisen alarajan δ_m :lle [38], jota kutsutaan tästä eteenpäin kriittisenä alarajana δ_c . Määritellään keskiarvoistettu kompaktiofunktio kriittisellä skaalalla r_m , joka määriteltiin yhtälöä (83) varten [38]

$$\bar{C}_c = \frac{3}{r_m^3} \int_0^{r_m} C_c(x) x^2 dx, \quad (92)$$

jossa C_c on kriittinen kompaktiofunktio kuvaamaan tilannetta, jossa syntyisi massaton musta aukko eli kaikki ylitieheys mitä jää r_m :n ulkopuolelle hajaantuu pois ja romahtaminen tapahtuu vain r_m :n aluella olevasta tiheysperturbaatiosta [38]. C_c on kompaktiofunktion (80) parametrisaatio arvolla $r = r_m$. Yleinen gaussinen kaarevuusprofiili voidaan kirjoittaa myös seuraavanlaisella parametrisoinnilla [38]

$$K(r) = \frac{C(r_m)}{f(\omega)r_m^2} \exp\left[\frac{1}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{r}{r_m}\right)^{2\alpha}\right)\right], \quad (93)$$

joka pätee samaan tilanteeseen, kuin (85). Sijoittamalla (93) keskiarvoistettuun kompaktiofunktioon (92) saadaan

$$\begin{aligned}\overline{C}_c &= \frac{3C(r_m)}{r_m^3 \cdot r_m^2} e^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{r_m} r^2 \cdot e^{-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{2\alpha}} \cdot r^2 \cdot \left(\frac{r_m}{r_m}\right)^5 dr \\ &= \frac{3\delta_c}{r_m^5} e^{\frac{1}{\alpha}} \cdot r_m^5 \int_0^1 x^4 e^{-\frac{1}{\alpha} x^{2\alpha}} dx,\end{aligned}$$

jossa on tehty muuttujanvaihto $x = r/r_m$. Jatketaan sieventämistä toisella muuttujanvaihdolla $x^{2\alpha} = u$, jolloin

$$\begin{aligned}\overline{C}_c &= \frac{3\delta_c}{2\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^1 u^{\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - 1} e^{-\frac{u}{\alpha}} du \\ &= \frac{3\delta_c}{2\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \alpha^{\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha}} \int_0^{1/\alpha} v^{\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - 1} \cdot e^{-v} dv,\end{aligned}$$

jossa on vielä tehty kolmas muuttujanvaihto $v = u/\alpha$. Laskennan jälkeen saadaan tulos

$$\overline{C}_c = \frac{3}{2} \cdot e^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \alpha^{-1 + \frac{5}{2\alpha}} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{5}{2\alpha}\right) - \Gamma\left(\frac{5}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \right] \delta_c, \quad (94)$$

jossa $\Gamma(x)$ on gammafunktio ja $\Gamma(x,y)$ on epätäydellinen gammafunktio. Tämän muodon nojalla, jos tutkimme säteilyn dominoivaa maailmankaikkeutta eli $\omega = \frac{1}{3}$ [28], niin $\delta_c \rightarrow f(\omega) = \frac{2}{3}$, kun $\alpha \rightarrow \infty$. Suurella α :n arvolla $\overline{C}_c \approx (3/5)\delta_c$ [38] eli

$$\overline{C}_c = 2/5. \quad (95)$$

Tämä päättely on varmistettu numeerisesti [28],[41] ja siitä on myös analyyttinen argumentti paperin [38] kappaleessa III. Hyödyntämällä tulosta $\overline{C}_c = 2/5$, saamme yleisen alarajan δ_m :lle yhtälöstä (94), jos kaarevuusprofiili noudattaa Gaussista jakaumaa

$$\delta_c = \frac{4}{15} e^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{\alpha^{1 - \frac{5}{2\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2\alpha}\right) - \Gamma\left(\frac{5}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)}, \quad (96)$$

jossa α saadaan yhtälöstä (89). Tämä analyyttinen tulos on merkittävä, koska se on 2 %:n rajoissa simulaatioiden tuloksista [38], kuten kuviosta 2 voidaan nähdä vertaamalla kahta alinta sovitusta.

3.3 Numeeriset tulokset kriittiselle perturbaation voimakkuudelle, jolla häiriö romahtaa PBH:ksi.

Ennen tämän vuosikymmenen alkua numeeriset simulaatiot [15][41][42] käyttävät superhorisontti-skaalaa eli perturbaation aallonpituus on suurempaa, kuin havaittavan maailmankaikkeuden säde[43] ja olettavat, että kaarevuusprofiili ζ on aikainvariantti, kun lähestytään arvoa $\epsilon = \frac{1}{aHr_m} = 1$ ja tällöin voimme lineaarisesti ekstrapoloida horisontin reunan ohi[35]. Tämä approksimaatio yksinkertaistaa laskentaa, koska oletamme gradienttiekspansion toimivan lähellä arvoa $\epsilon = 1$. Todellisuudessa tulos ei ole kovin tarkka, koska approksimaatiossa ei huomioida gradienttiekspansion korkeamman asteen epälineaarisia termejä, jotka syntyvät kaarevuusprofiilin aikariippuvuudesta lähellä todellista horisontin reunaa eli, kun $\epsilon \approx 1$ [35].

Tilanne voidaan korjata seuraavalla tavalla: havaittava eli kosmologinen horisontti on pisin etäisyys, josta havaitsija voi saada informaatiota[44]. Tämä voidaan määrittellä suljettuna pintana laajenevassa alueessa ja pallosymmetrisessä tilanteessa se tarkoittaa, että $R(r,t) = 2M(r,t)$, jossa $R(r,t)$ on säde, jonka sisälle jää pinta-ala $4\pi R^2$ ja $M(r,t)$ on massa $R(r,t)$ säteiselle pallolle, jota kutsutaan Misner-Sharp massaksi. Tämä on hyvin yleinen määritelmä, koska se olettaa vain pallosymmetrian ja mahdollistaa minkä tahansa näennäishorisontin laskemisen, joka on mustan aukon rajapinta: jos väliaine (medium) laajenee, kyseessä on kosmologinen horisontti ja jos väliaine on romahtamassa niin kyseessä on mustan aukon näennäishorisontti. [45][46]

Simulaatioissa tämä nähdään kosmologisen horisontin hitaampana laajentumisena, kuin spatiaalisesti tasaisen avaruuden laajeneminen ja tämän seurauksena perturbaatioiden voimakkuus kasvaa ennen todellista horisontin ylitystä [35].

Ennen, kuin gradienttiekspansion epälineaarisia termejä on huomioitu δ_c :n sovitukset α :n funktiona antavat seuraavanlaisen muodon δ_c :lle [9]

$$\delta_c = \begin{cases} \alpha^{0,047} - 0,5 & 0,1 < \alpha < 7 \\ \alpha^{0,035} - 0,475 & 7 < \alpha < 13 \\ \alpha^{0,026} - 0,45 & 13 < \alpha < 30 \end{cases} \quad (97)$$

δ_c :n arvo nousee välillä 0,1 - 3 voimakkaasti, mutta jo arvoilla $\alpha > 7$ se saavuttaa melko tasaisen loppuarvon 0,6. $\alpha < 7$ on hyvä approksimaatio monen muotoisille tehon tiheysjakaumille [35], kuten laajalle, piikittyneelle ja Gaussiselle jakaumille, joita tarkastellaan luvussa (4.2). $\alpha > 7$ arvoilla energian tiheysprofiilin muoto on

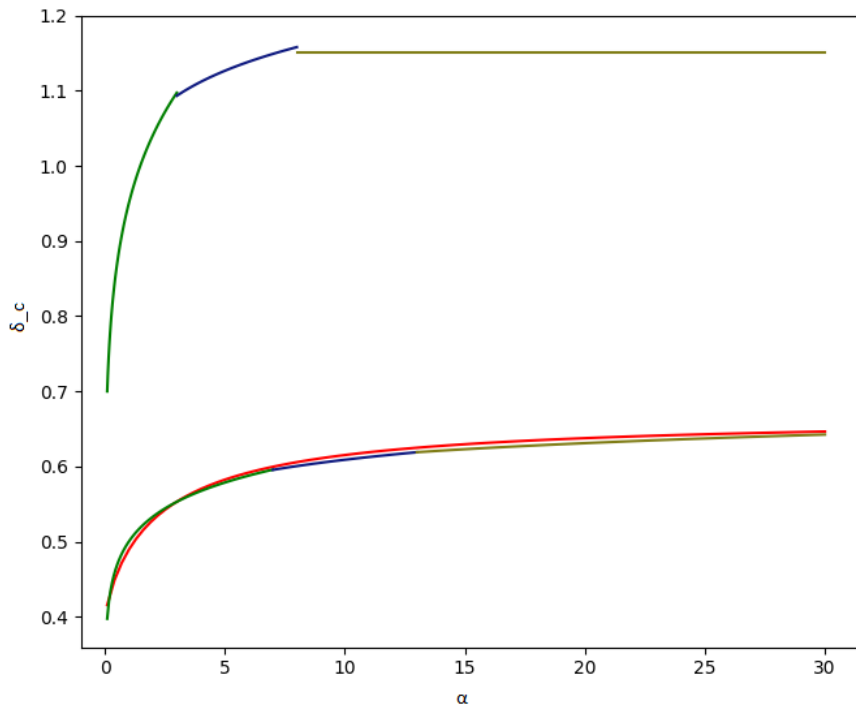
hyvin terävä skaalalla r_m , joten niitä tulee tasoittaa painegradientin avulla ja tämä johtaa tuloksen vaimentumiseen eli alaraja δ_m :lle ei ole täysin luotettava suuremmilla α :n arvoilla [35]. Tulokset pohjautuvat I. Musco, et al. koodiin [15], joka laskee numeriiikan virtausdynaamisella Lagrangianilla ja koodi on suunniteltu laajenevalle kosmologiselle taustalle [28]. Koodia on optimoitu logaritmisella välityksellä massan mukana liikkuvalla koordinaatilla ja se mahdollistaa laskemisen suuri säteiselle tilavuudelle sekä tarkemman resoluution pienelle säteelle [28].

Tuloksia on tarkennettu huomioimalla gradienttiekspansion epälineaarisia termejä ja uusista δ_c :n sovituksista α :n funktiona on esimerkiksi [9][35]

$$\delta_c = \begin{cases} \alpha^{0,125} - 0,05 & 0,1 < \alpha < 3 \\ \alpha^{0,06} + 0,025 & 3 < \alpha < 8 \\ 1,15 & 8 < \alpha \end{cases} \quad (98)$$

Oleellinen muutos näkyy α :n rajoissa, sillä aiemmin käytetyt $0,1 < \alpha < 7$ rajat on nyt jaettu kahteen eri sovitukseen ja tästä suuremmat α :n arvot antavat δ_c :lle vakioarvon 1,15. Nämä muutokset selviävät, kun tarkastelemme uusien ja vanhojen sovituksien suhdetta $\delta_{c,\text{vanha}}/\delta_{c,\text{uusi}}$. α :n arvoilla < 3 tämä suhde on positiivinen ja $\alpha > 3$ suhde muuttuu negatiiviseksi, joka selittää miksi uusissa sovituksissa pienet α :n arvot on eritelty. Molempien sovituksien skaala α :lle on välillä 0,1 - 30, koska numeeriset simulaatiot eivät pysty käsittelemään sitä suurempia tai pienempiä arvoja tarkasti [35]. Toinen merkittävä huomio alarajoissa δ_c eri tavoilla on se, että ilman gradienttiekspansion epälineaarisia termejä se on välillä $0,4 < \delta_c(t_i) < 0,6$, mutta epälineaaristen termien kanssa se on välillä $0,7 < \delta_c(t_H) < 1,15$ [35]. PBH:en määrä saattaa riippua siis voimakkaasti siitä kuinka tarkasti laskemme gradienttiekspansion termit [35]. Epälineaaristen termien analyysin eteneminen tähän hetkeen asti on summattu osana paperia [9].

Alla olevassa kuviossa 2 on sovitettuna analyttinen tulos yhtälön (96) δ_c :lle α :n funktiona punaisella ja molemmat numeeriset sovituksia (97) ja (98), jotka on paloittain määritetty tässä alaluvussa 3.3 kolmella eri värillä α :n arvon mukaan. Kuviosta huomataan, että yleinen analyttinen alaraja gaussiselle δ_c :lle (punaisella) on 2%:n rajoissa alemmasta numeerisesta sovituksista gradienttiekspansion lineaaritermeille. Selvästi korkeammalla oleva numeerinen tulos huomioi myös gradienttiekspansion epälineaarisia termejä, mutta tasaantuu muiden sovitusien tavoin vakioksi α :n kasvaessa suureksi.



Kuvio 2. Analyttisen ja numeeristen δ_c :en sovitukset α :n funktiona. Punaisella piirretty sovitus on yleinen analyttinen alaraja yhtälöstä (96), joka on alimpana ja lähes täysin päällekkäin numeerisen lineaaritermisovituksen kanssa. Ylin sovitus huomioi epälineaarisia korjauksia. Numeeriset tulokset (97) ja (98) ovat paloiteltu kolmeen osaan α :n funktiona ja täten piirretty kolmella eri värillä.

4 Primordiaalisten perturbaatioiden synty ja PBH:en massa ja määrä niiden pohjalta

Viimeinen osa gradua keskittyy tähän mennessä käymämme teorian soveltamiseen esimerkkitapauksessa, jossa laskemme primordiaalisen mustan aukon massan ja paljonko tämän massaisia mustia aukkoja syntyy.

Lähdetään liikkeelle inflaation luomista primordiaalisista perturbaatioista, kuinka niitä luodaan ja minkälaisia perturbaatioita saamme eri inflaatiomalleilla osiossa 4.1. Tämän jälkeen tarkastelemme minkälaisia tehon tiheyspektrejä primordiaaliset perturbaatiot noudattavat ja näitä spektrin muotoja käsitellään alaluvussa 4.2. Luvuissa 4.2 ja 4.3 käsitellään parametrejä, joiden avulla PBH:n massa ja määrä saadaan laskettua sekä niiden ratkaisemista. Loppu teoria on luvussa 4.4, jossa on PBH:en massan ja määrän yhtälöt johdettujen parametrien avulla ilmaistuna. Tutkielman viimeisessä osiossa 4.5 laskemme PBH:en massan ja määrän Gaussisille perturbaatioille, jotka noudattavat piikittyntä tehon tiheyspektriä (121).

4.1 Inflaatio

Kosminen inflaatio määritellään yksinkertaisesti maailmankaikkeuden kiihtyvänä laajenemisena. Se on oleellinen osa kosmologiaa, koska sen avulla voidaan selittää horisontti- ja laakeusongelmat sekä inflaation uskotaan olevan syynä primordiaalisille perturbaatioille [47]. Matemaattisesti inflaatio kuvataan skaalatekijän a toisen derivaatan avulla ja sen tulee olla positiivista

$$\ddot{a} = (aH)^{\dot{}} > 0. \quad (99)$$

Oleellisesti meitä kiinnostaa inflaatiosta syntyvät primordiaaliset perturbaatiot ja niiden uskotaan olevan siemeniä koko universumin rakenteelle [48]. Yleisesti mielletty (paradigma) inflaatio synnytti kvanttifluktuaatioita inflatonkentässä eksponenttisen laajentumisen seurauksena ja venytti inflatonkenttää makroskooppisiin skaaloihin [48]. Koska laajeneminen oli valoa nopeampaa, tämä kvanttifluktuaatio jäi horisontin

ulkopuolelle ja ”jäätyn” ajassa, kunnes horisontti sai sen kiinni säteilyn ja materian dominoivana aikana, jolloin universumissa oli jo muodostunut materiaa ja fluktuaatiot mahdollistivat materian paikallisen kasautumisen eli rakenteen muodostumisen [48]. Näiden fluktuaatioiden eli primordiaalistien perturbaatioiden jakauma on kriittinen tieto PBH:en mahdollisille muodostumiselle ja myös niiden kokoluokille. Primordiaalistien perturbaatioiden voimakkuuteen ja muotoon vaikuttaa merkittävästi se, mitä inflaatiomallia universumi noudattaa, joten tarkastellaan niitä seuraavaksi [49].

On hyvin epätodennäköistä, että inflaation syntymistä varten tulisi valita tietyt alkuehdot, koska inflaation uskotaan tapahtuvan ainakin lähes kaikissa universumeissa, joten myös alkuehtojen tulisi olla mielivaltaiset, että näin voi tapahtua. Tämä voitaisiin mahdollistaa, jos maailmankaikkeutta ajaa inflaation jonkinlainen attraktori. Attraktori on käytännössä joukko numeerisia arvoja, joita kohti systeemi ajautuu toisinaan vasta pitkänkin ajan kuluttua ja suurista poikkeavista lähtöarvoista huolimatta. Yksinkertaisiin ja yleisiin attraktorimalleihin lukeutuu muunmuassa slow-roll-inflaatio, fast-roll-inflaatio ja hybridi-inflaatio. [47]

Käsitellään tarkemmin slow-roll-inflaatiota ja sen seurauksena mahdollisesti syntyviä primordiaalisia mustia aukkoja. Slow-Roll-inflaatiossa idea on, että inflaatiota kuvataan vierimisellä potentiaalienergiasta kohti liikeyhtälön kineettistä termiä. Mallille olennaista on, että tämä vieriminen ja täten inflaation muutos tapahtuu hitaasti. Tarkastellaan tilannetta seuraavaksi matemaattisesti. Skalaarikentän liikeyhtälöt relativistisessa tapauksessa saadaan Klein-Gordon-yhtälöstä [50]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \partial_{\phi}V(\phi) = 0, \quad (100)$$

Slow-roll-mallissa voimme olettaa, että potentiaali on tasainen, koska muutos on hidasta ja täten termi $\ddot{\phi}$ voidaan tiputtaa pois [51]. Tällöin KG-yhtälön (100) nojalla

$$\dot{\phi} = \partial_{\phi}V(\phi)/(3H). \quad (101)$$

Sijoittamalla tämän Friedmannin yhtälöihin[33] saadaan tulos

$$H^2 = \frac{1}{3}V \approx \text{vakio} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{H}}{H^2} \ll 0. \quad (102)$$

Yhtälöt (101) ja (102) muodostavat yhtälöparin, josta voidaan johtaa kaksi potenti-

aalista riippuvaa slow-roll-parametria [51]

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_\phi V}{V} \right)^2 \quad (103)$$

$$\eta \equiv \frac{\partial_\phi^2 V}{V}. \quad (104)$$

Onnistuneen inflaation syntymiseksi vaatimukset ovat $0 < \epsilon < 1$ ja $|\eta| \ll 1$ [51]. Seuraavassa alaluvussa 4.2 käsitellään ohessa slow-roll-mallista syntyvää primordiaalisten perturbaatioiden spektriä tämän teorian pohjalta.

4.2 Primordiaalisten perturbaatioiden tehospektri $P_\zeta(k)$ ja varianssi σ^2

Määritellään alkuun oliot $P_\zeta(k)$, $P_\zeta(k, \eta)$ ja $P_\delta(k, r)$. $P_\delta(k, r)$ on tiheyden tehospektri [9], joka kuvaa primordiaalisista perturbaatioista syntyvien tihentymien voimakkuutta. Emme pysty suoraan kirjoittamaan tätä spektriä vaan voimme laskea sen P_ζ :sta. $P_\zeta(k)$ on kaarevuuden tehospektri [9], joka kuvaa karkeasti, kuinka paljon eri kaarevuuksia perturbaatioilla on. Esimerkiksi, jos perturbaatioiden kaarevuudet ovat hyvin lähellä toisiaan, ne voidaan kuvata yksinkertaisella dirac-delta jakaumalla [35]. $P_\zeta(k, \eta)$, kuvaa perturbaation kaarevuuden tehospektriä $P_\zeta(k)$, mutta se riippuu lisäksi ajasta η ja kertoo täten perturbaation aikaevoluution [35]. Parametri η kuvaa tarkemmin itseisaikaa, jotta pystymme laskemaan todellisen hetken, jolloin alue romahtaa mustaksi aukoksi.

Inflaation seurauksena syntyviä primordiaalisia fluktuaatioita voidaan mallintaa tiheyden tehospektrin $P_\delta(k, r)$ avulla ja sen varianssi saadaan laskettua seuraavasti [9]

$$\sigma^2 = \int_0^\infty P_\delta(k, r) \frac{1}{k} dk. \quad (105)$$

Varianssin avulla voidaan myöhemmin ratkaista PBH:en määrä. Emme kuitenkaan pysty tutkielman teorian pohjalta kirjoittamaan $P_\delta(k, r)$:n spektrin parametrisaatiota, vaan haluamme laskea varianssin $P_\zeta(k)$:lle, jolle meillä on mahdollisia parametrisaatioita tutkielmassa. Käydään seuraavaksi läpi, kuinka saamme ratkaistua varianssin $P_\zeta(k)$:lle.

δ_m voidaan laskea Gaussisesta kaarevuusprofiilista yhtälöiden (107) ja (48) mu-

kaan

$$\delta_m = -\frac{2}{3}r_m\zeta'(r_m)[2 + r_m\zeta'(r_m)] \quad (106)$$

ja määrittelemällä [52]

$$\delta_l = -\frac{4}{3}r_m\zeta'(r_m) \quad (107)$$

saadaan tulos

$$\delta_m = \delta_l - \frac{3}{8}\delta_l^2. \quad (108)$$

Tuloksen avulla voidaan todeta, että jos ζ on Gaussista niin myös δ_l on Gaussista [35][52]. Tällöin statistiikka voidaan kuvata täysin varianssilla $\langle\delta_l^2\rangle$. Lasketaan seuraavaksi $\langle\delta_l^2\rangle$.

Paperin [28] nojalla δ_m voidaan määritellä myös

$$\delta_m = C(r_m) = \frac{3}{r_m^3} \int_0^{r_m} \frac{\delta\rho}{\rho} r^2 dr. \quad (109)$$

Sijoitetaan (109) määritelmään (107)

$$\delta_l = -\frac{4}{3r_m} \int_0^{r_m} r^2 (\zeta'' + \frac{2}{r}\zeta') dr.$$

Olettamalla pallosymmetrian $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2d}{rdr}$ ja määrittelemällä muuttujan [52]

$$W(\bar{x}) \equiv \frac{\theta(r_m - |\bar{x}|)}{4\pi r_m^3/3} \quad (110)$$

saamme δ_l :n muotoon [52]

$$\begin{aligned} \delta_l &= -\frac{4r_m^2}{9} \int W(\bar{r}') \nabla^2 \zeta(\bar{r}') d\bar{r}' \\ &= \frac{4r_m^2}{9} \int \frac{e^{i\bar{k}\bar{r}'}}{(2\pi)^3} W(-\bar{k}) k^2 \zeta(\bar{k}) d\bar{k}. \end{aligned} \quad (111)$$

Lasketaan yhtälön (111) avulla varianssi $\langle\delta_l^2\rangle$

$$\langle\delta_l^2\rangle = \left(\frac{4}{9}\right)^2 r_m^4 \int \frac{d\bar{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\bar{k}\bar{r}'_\perp} \cdot e^{i\bar{k}'\bar{r}'}}{(2\pi)^3} W(-\bar{k}) W(-\bar{k}') k^2 k'^2 \langle\zeta_{\bar{k}}\zeta_{\bar{k}'}\rangle d\bar{k}'. \quad (112)$$

Sijoitetaan

$$\langle\zeta_{\bar{k}}\zeta_{\bar{k}'}\rangle = (2\pi)^3 \delta(\bar{k} - \bar{k}') P\zeta(k, \eta_H), \quad (113)$$

jossa $\eta_H = \frac{1}{k_0}$ sekä

$$W(k) = \int e^{-i\bar{k}\bar{r}} \frac{\theta(r_m - r)}{4\pi r_m^2/3} d\bar{r} = \frac{3}{(kr_m)^3} (\sin(kr_m) - kr_m \cos(kr_m)) \quad (114)$$

varianssin yhtälöön (112) [35]

$$\sigma^2 = \langle \delta_l^2 \rangle = \frac{16}{81} \int_0^\infty \frac{1}{k} (kr)^4 W^2(k, r) T^2(k, \eta_H) P_\zeta(k) dk, \quad (115)$$

jossa W on ns. ikkunafunktio ja T ns. siirtofunktio. Ikkunafunktiota W käytetään valitsemaan tietty skaala (esimerkiksi tässä r), jonka ulkopuolella tulo $P_\zeta(k)W$ on nolla ja jäljelle jää r -säteinen alue, jota tarkastellaan [9]. Tarkoituksena on tasoittaa tiheyskontrastia skaalalla r [53]. Siirtofunktiolla T $P_\zeta(k)$:n varianssi saadaan aina suppenemaan, koska ikkunafunktio ei takaa sitä ja lisäksi siirtofunktio tekee perturbaatiojakaumasta aikariippuvaisen, jolloin näemme miten spektri muuttuu ajassa [9][52]. Fysikaalisesti siirtofunktio T tasoittaa alle horisontin suuruiset moodit pois, jotta ne eivät vaikuta tutkittavaan skaalaan r_m [35]. Käytetään funktioista muotoja [52][35]

$$W(k, r_m) = 3 \frac{\sin(kr_m) - k\eta \cos(kr_m)}{(kr_m)^3} \quad (116)$$

$$T(k, \eta) = 3 \frac{\sin(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}) - \frac{k\eta}{\sqrt{3}} \cos(\frac{k\eta}{\sqrt{3}})}{(\frac{k\eta}{\sqrt{3}})^3}. \quad (117)$$

Näissä oletamme, että itseisaika η lasketaan skaalalla r_m , jonka tulee olla ainakin 10 kertaa suurempi, kuin Hubblen säde $r_H = 1/aH$, joka johtuu numeriiikalle valituista lähtöarvoista gradienttiekspansion sovelluksissa [35]. Inflaatiomalleista syntyviä primordiaalisten perturbaatioiden spektrejä voidaan approksimoida potentiaalin ϕ avulla seuraavasti [54]

$$P_\zeta^{1/2}(k) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left(\frac{H^2}{|\dot{\phi}|} \right) \Big|_{k=aH}. \quad (118)$$

Esimerkiksi Slow-roll-mallille potentiaalin derivaatta $\dot{\phi}$ on määritelty yhtälön (101) mukaan. Slow-roll-mallissa spektrin varianssi saadaan approksimoitua kaavalla [55]

$$\sigma^2 = \frac{H_I^2}{8\pi^2 \epsilon_H} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{9} \right)^2, \quad (119)$$

jossa $\epsilon_H = -\frac{d \ln(H_I)}{dN}$ ja H_I on Hubblen parametri inflaation aikana sekä N on inflaation

e-monikerrat. N :n arvo lasketaan takaperin ajassa eli $N = 0$ tarkoittaa inflaation loppua ja $N \approx 60$ on inflaation alku.

Slow-roll-mallin pohjalta on vaikea saada voimakkaita perturbaatioita, koska yhtälön (119) nojalla termin ϵ_H tulee olla mahdollisimman pieni, mutta samalla sen tulee noudattaa yhtälöä [55]

$$\left| \frac{\Delta \ln(\epsilon_H)}{\Delta N} \right| \ll 1. \quad (120)$$

Artikkelissa [55] todistetaan, että mielivaltaiselle yksiulotteiselle inflaatiomallille, slow-roll ehto (120) tulee rikkoutumaan, jos vaadimme, että PBH:t muodostaisivat kaiken pimeän aineen. Tämän vuoksi monet inflaatiomallit PBH:en luomiselle hyödyntävät usein moniulotteista potentiaaliakenttää tai joitain hybridimalleja, jotta primordiaaliset perturbaatiot olisivat mahdollisimman voimakkaita ja tarpeeksi tiheässä muodostaakseen niin paljon mustia aukkoja kuin mahdollista [49].

Tarkastellaan vielä kahta muuta kaarevuuden tehosppektriä $P_\zeta(k)$, jotka eivät ole tiettyjen inflaatiomallien ennusteita vaan aiempien havaintojen pohjalta luotuja parametrisaatioita [9]. Nämä ovat piikittynyt (peaked power spectrum) ja laaja/leveä tehosppektri (broad power spectrum). Piikittynyt tehosppektri on yksinkertaisin spektri, jolla voidaan kuvata kosmologista perturbaatiota. Se voidaan olettaa monokromaattiseksi ja se käyttäytyy Dirac-delta-jakauman mukaisesti [35]. Matemaattisesti se kirjoitetaan muodossa [36]

$$P_\zeta(k) = P_0 k_0 \delta(k - k_0), \quad (121)$$

jossa parametrit k ja k_0 viittaavat liikemääräavaruuden skaaloihin ja P_0 on amplitudi.

Toinen vaihtoehto on valita laaja tehosppektri, joka vastaa ”top hat”- muotoa tai lähes skaala invarianttia potenssilaki-jakaumaa [35]. Tämä malli huomioi epälineaarisen relaation keskimääräisen kaarevuusprofiilin ζ (123) ja kompaktiofunktion C välille [35]. Spektri voidaan kirjoittaa esimerkiksi muodoissa [35][36]

$$\begin{aligned} P_\zeta(k) &= P_0 \theta(k - k_{\min}) \theta(k_{\max} - k), & k_{\max} &\gg k_{\min}. \\ P_\zeta(k) &= 3 \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sigma^2 \cdot \left(\frac{k}{k_0} \right)^3 \cdot e^{-\frac{3k^2}{2k_0^2}}. \end{aligned} \quad (122)$$

Nämä kaksi kaarevuuden tehosppektriä $P_\zeta(k)$ ovat yksinkertaisimpia malleja, joilla primordiaalisten mustien aukkojen massaa ja määrää on approksimoitu [35]. Muita malleja ovat muun muassa Gaussinen ja logaritminen kaarevuuden tehosppektri, joita

emme käsittele sen tarkemmin. Laskuissa tulemme hyödyntämään yksinkertaista piikittynyttä tehospektriä (121).

4.3 Pituuskaala r_m ja parametri α Gaussisille perturbaatioille

Varianssin (115) laskemiseksi meidän tulee ratkaista dimensioton suure $k_0 r_m$, joka voidaan sijoittaa W :n (116) ja T :n (117) yhtälöihin, ajanhetkellä $\eta_H = \frac{1}{k_0}$. Tätä varten määrittelemme yhtälön keskiarvoistetulle kaarevuusprofiilille $\zeta(r)$ ja kaarevuuden tehospektrin $P_\zeta(k)$ välille [35]

$$\zeta(r) = \zeta_0 \int \frac{k^2 \sin(kr)}{kr} P_\zeta(k, \eta) dk, \quad (123)$$

jossa ζ_0 on amplitudi ja

$$P_\zeta(k, \eta) = \frac{2\pi}{k^3} P_\zeta(k) T^2(k, \eta). \quad (124)$$

Yhtälö (123) kuvaa keskiarvoistettua kaarevuusprofiilia ja hyödyntämällä derivaattaa

$$\frac{\partial}{\partial r_m} (-r_m \cdot \zeta'(r_m)) = 0, \quad (125)$$

joka vastaa yhtälön (83) tulosta saadaan [35]

$$\int k^2 [(k^2 r_m^2 - 1) \frac{\sin(kr_m)}{kr_m} + \cos(kr_m)] P_\zeta(k, \eta) = 0. \quad (126)$$

Tästä yhtälöstä (126) voidaan ratkaista suure $k_0 r_m$, kun tiedetään millaisella funktiolla primordiaalisten perturbaatioiden spektriä $P_\zeta(k)$ kuvataan [9].

Toinen parametri, joka halutaan laskea primordiaalista perturbaatioista on kriittinen amplitudi, jolla tihentymä romahtaa mustaksi aukoksi eli δ_c . Tätä varten tarkastelemme parametria α , joka on määritelty yhtälön (89) nojalla. Saamme kiinnitettyä α :n kaarevuusprofiiliin $\zeta(r)$ kompaktiofunktion tuloksen (82) ja koordinaattimuunnoksen (48) avulla ja täten pystymme laskemaan α :n primordiaalisen perturbaation spektristä $P_\zeta(k)$. Lisäksi Gaussisen perturbaation tapauksessa johdimme analyttisen tuloksen δ_c :n ja α :n välille (96).

Parametri α :n ja kaarevuusprofiili ζ :n välillä on epätriviaali yhteys, joka voidaan

linearisoida parametrin α_G avulla [9][35]

$$F(\alpha)[1 + F(\alpha)]\alpha = 2\alpha_G, \quad (127)$$

jossa

$$F(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha^{1-\frac{5}{2\alpha}}}{\Gamma(\frac{5}{2\alpha}) - \Gamma(\frac{5}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha})}}. \quad (128)$$

α_G :n ja keskiarvoistetun kaarevuusprofiilin ζ (123) välinen yhteys voidaan kirjoittaa hyödyntämällä yhtälöä (125) [35]

$$\alpha_G = \frac{1}{2} - \frac{r_m^2 \zeta'''(r_m)}{4 \zeta'(r_m)}. \quad (129)$$

Sijoitetaan α_G :n yhtälöön (129) tulokset (123) ja (126), jolloin saadaan laskennassa käytettävä tulos

$$\alpha_G = -\frac{1}{4} \left[1 + r_m \frac{\int k^4 \cos(kr_m) P_\zeta(k, \eta) dk}{\int k^3 \sin(kr_m) P_\zeta(k, \eta) dk} \right]. \quad (130)$$

Tuloksesta nähdään, että Gaussinen α_G sekä yhtälön (127) nojalla parametri α riippuu primordiaalisen perturbaation spektrin $P_\zeta(k)$ muodosta [35], kuten haluttiin ja ratkaisemalla nämä yhtälöt voimme laskea δ_c :n arvon yhtälöstä (96).

4.4 PBH:n massa ja määrä

Primordiaalisen mustan aukon massa voidaan approksimoida romahtaneella alueella kompaktiofunktio C :n avulla seuraavasti [56]

$$M_{PBH} = KM_H(\delta - \delta_c)^\gamma = KM_H(C - C_c)^\gamma, \quad (131)$$

jossa M_H on määritelmän mukaan kosmologisen horisontin massa ajanhetkellä t_H , kun ylitetään horisontin reuna eli alue romahtaa mustaksi aukoksi [57]. Matemaattisesti tämä kirjoitetaan muodossa

$$M_H = \frac{4\pi}{3H^3} \rho. \quad (132)$$

γ on yhtälössä (131) luku, joka riippuu ainoastaan tilanyhtälön arvosta ω ja meidän tapauksessa tarkastelemme säteilyn dominoivaa ajanjaksoa, joten $\gamma \approx 0,36$ [35].

Vakiokerroin K riippuu energiatiheysperturbaation $\frac{\delta\rho}{\rho_b}$:n profiilista.

Vakiot K ja $\delta_c = C_c$ saadaan laskettua inflaation seurauksena syntyvistä primordi-

aalisten flukтуаatioiden spektristä $P_\zeta(k)$. Tulokset ovat täysin numeerisesti laskettuja. Piikittyneelle spektrille (121) arvot ovat $C_c \approx 0,59$ ja $K \approx \mathcal{O}(1)$. Vastaavasti laajalle spektrille (122) arvot ovat $C_c \approx 0,55$ ja $K \approx 4$. [35][56][58]

Primordiaalisten mustien aukkojen massan lisäksi meitä kiinnostaa myös niiden määrä, joka määritellään usein integraalilla [59][9]

$$\beta(m_{PBH}) = \int_{\delta_c}^{\infty} P(m_{PBH}, \delta) d\delta = \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{M_{PBH}}{M_H} P(\delta) d\delta \quad (133)$$

joka mittaa m_{PBH} massaisten primordiaalisten mustien aukkojen määrää kaikkiin syntyhetkellä oleviin primordiaalisiin mustiin aukkoihin. $P(m_{PBH}, \delta)$ on todennäköisyysjakauma massaylijäämälle. Jos oletamme flukтуаatioiden olevan täysin gaussisia [60], niin voimme kirjoittaa määrän muodossa [9]

$$\beta(m_{PBH}) = 2 \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2\sigma^2}}\right). \quad (134)$$

Käyttämällä piikittyntä spektriä (121) δ_l :n tiheysfunktio (PDF) on muotoa [52]

$$P(\delta_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{\delta_l^2}{2\sigma^2}}, \quad (135)$$

jonka varianssi saadaan yhtälöstä (115). Tällöin olettamalla massan approksimaation (131) saamme laskettua PBH:en määrän yhtälöstä (133)

$$\beta = \int_{\delta_{l,c}}^{\delta_{l,max}} \frac{M_H K (\delta_m - \delta_{m,c})^\gamma}{M_H} P(\delta_l) d\delta_l, \quad (136)$$

jossa δ_l ja δ_m välinen yhteys saadaan yhtälöstä (108), $P(\delta_l)$ saadaan yhtälöstä (135), $\delta_{l,max} = \frac{4}{3}$ ja δ_c on alarajat molemmille δ :lle. Sijoituksilla yhtälö on muotoa

$$\beta = \int_{\delta_{l,c}}^{4/3} \frac{K}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{\delta_l^2}{2\sigma^2}} (\delta_l - \frac{3}{8}\delta_l^2 - \delta_{m,c})^\gamma d\delta_l. \quad (137)$$

Kiinnostavaa on lisäksi tutkia, kuinka paljon pimeästä aineesta syntyneet primordiaaliset mustat aukot voisivat kattaa. Tämä voidaan laskea integraalista [61]

$$\Omega = \int_{M_{PBH,min}}^{M_{PBH,max}} \beta(M_H) \left(\frac{M_{H,eq}}{M_H}\right)^{1/2} d(\ln M_H). \quad (138)$$

Jos massajakauma on monokromaattinen niin voimme käyttää approksimaatiota [62]

$$\Omega_{PBH} = \left(\frac{\beta(M)}{1,1 \cdot 10^{-8}} \right) \left(\frac{h}{0,72} \right)^{-2} \cdot \gamma_f \cdot \left(\frac{g_{*,i}}{106,75} \right)^{-1/4} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2}, \quad (139)$$

jossa h on dimensioton Hubblen vakio, $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, γ_f on numeerinen vakio $\approx 0,2$ ja $g_{*,i}$ on efektiivisten vapausasteiden lukumäärä ajanhetkenä, jolloin musta aukko syntyy.

4.5 Primordiaalisten mustien aukkojen massa ja määrä piikittyneelle spektrille

Tutkielman viimeisen alaluvun tarkoitus on laskea numeeriset arvot primordiaalisten mustien aukkojen määrälle ja massalle. Tätä varten valitsemme tietyn primordiaalisten perturbaatioiden spektrin $P_\zeta(k)$ ja laskemme sen avulla tarvittavat parametrit massan ja määrän yhtälöihin (131) ja (134). Tässä täytyy huomata, että lopputulokset pohjautuvat vahvasti valittavaan spektriin ja oletukseen, että kaarevuusprofiili ζ on Gaussinen. Todellisuudessa primordiaaliset perturbaatiot saattavat noudattaa jotain muuta spektriä ja kaarevuusprofiili ei välttämättä ole Gaussinen.

Valitaan Gaussisille perturbaatioille piikittynyt tiheyspektri (121) ja lasketaan sen avulla $P_\zeta(k, \eta)$ yhtälöstä (124)

$$P_\zeta(k, \eta) = \frac{2\pi}{k^3} P_0 k_0 \delta(k - k_0) \cdot 3^2 \cdot \left(\frac{\sin(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}) - \frac{k\eta}{\sqrt{3}} \cos(\frac{k\eta}{\sqrt{3}})}{(\frac{k\eta}{\sqrt{3}})^3} \right)^2. \quad (140)$$

Tämän avulla voidaan laskea kaarevuusprofiili $\zeta(r)$ yhtälöstä (123), kr_m yhtälöstä (126) ja α_G yhtälöstä (130). Varianssi σ^2 piikittyneelle spektrille saadaan yhtälöstä (115) $P_\zeta(k)$:n avulla. Lasketaan näille tulokset ja sijoitetaan ne lopuksi massan ja määrän yhtälöihin.

Ensimmäisenä lasketaan kaarevuusprofiili $\zeta(r)$ yhtälöstä (123)

$$\begin{aligned} \zeta(r) &= 2\pi\zeta_0 P_0 K_0 \int \frac{1}{k^3} \frac{k^2 \sin(kr)}{kr} \delta(k - k_0) T^2(k, \eta) \\ &= 2\pi\zeta_0 P_0 \frac{\sin(k_0 r)}{k_0 r} T^2(k_0, \eta). \end{aligned} \quad (141)$$

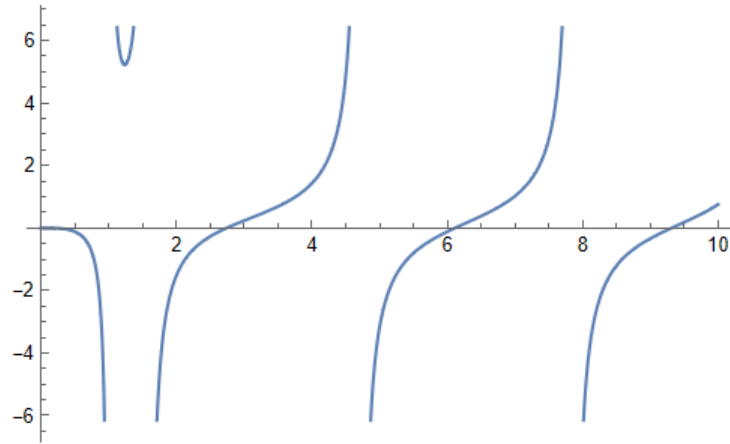
Kompaktiofunktion maksimista saadaan rajoite, kun $\omega = \frac{1}{3}$ yhtälön (106) mukaan

$$C'(r) = \delta'_m = -\frac{4}{3}(1 + r\zeta')(\zeta' + r\zeta'') = 0 \iff \zeta' + \zeta'' = 0. \quad (142)$$

Lasketaan kaarevuusprofiilin $\zeta(r)$ ensimmäinen ja toinen derivaatta yhtälöstä (141) ja sijoitetaan ne rajoitteeseen (142)

$$\begin{aligned} 2\pi\zeta_0 P_0 T^2(k_0, \eta) [\sin(k_0 r) - k_0 r (\cos(k_0 r) + k_0 r \sin(k_0 r))] &= 0 \\ \tan(k_0 r) &= \frac{k_0 r}{1 - (k_0 r)^2} \end{aligned} \quad (143)$$

Ratkaistaan yhtälö (143) numeerisesti ja tuloksena saadaan kuvion 3 sovitus, jossa yhtälö (143) on $k_0 r$:n funktiona. Valitaan ratkaisuksi ensimmäinen nollakohta positiiviselta x-akselilta, jotta romahtavan alueen skaala on fysikaalisesti realistinen, eikä tuloksen moninkerta. Tällöin saadaan tulos $k_0 r_m \approx 2,74$, jossa säde r_m vastaa kompaktiofunktion $C(r)$ maksimia. Ratkaisu $k_0 r_m \approx 2,74$ vastaa paperin [63] tulosta. Numeerisesti ratkaistava yhtälömme (143) on mahdollista johtaa myös suoraan yhtälöstä (126) ja se vastaa tekemäämme laskua ilman valittua $P_\zeta(k)$ spektrin sijoittamista kaarevuusprofiiliin $\zeta(r)$.

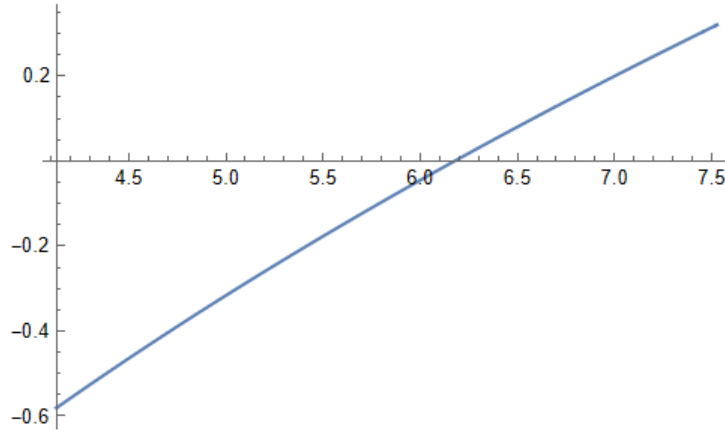


Kuvio 3. Yhtälön (143) sijoitus $k_0 r$:n funktiona. Ensimmäisen positiivisen nollakohdan ratkaisu on $k_0 r = 2,7437$.

Ratkaistun $k_0 r_m$ arvon avulla voimme ratkaista α_G :n yhtälöstä (130)

$$\begin{aligned}\alpha_G &= -\frac{1}{4} \left[1 + r_m \frac{\int k^4 \cos(kr_m) \frac{2\pi}{k^3} P_0 k_0 \delta(k - k_0) T^2 dk}{\int k^3 \sin(kr_m) \frac{2\pi}{k^3} P_0 k_0 \delta(k - k_0) T^2 dk} \right] \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left[\frac{k_0 r_m \cos(k_0 r_m)}{\sin(k_0 r_m)} \right].\end{aligned}$$

Sijoitetaan $k_0 r_m = 2,74$ ja tuloksena saamme $\alpha_G = 1,3630\dots$ Ratkaistaan α numeerisesti, koska α :n ja α_G :n välillä on epälineaarinen relaatio yhtälön (127) nojalla. Kuviossa 4 on sovitettu yhtälö (127), kun $\alpha_G = 1,3630\dots$ Sovituksen nollakohta on α :n arvo pisteessä $\alpha_G = 1,3630\dots$ eli $\alpha \approx 6,2$. Sijoittamalla arvon $\alpha = 6,2$



Kuvio 4. α :n ja α_G :n välinen riippuvuus. Kuvioon on sovitettu yhtälö (127), kun $\alpha_G = 1,3630\dots$ Sovituksen nollakohta kertoo α :n arvon pisteessä $\alpha_G = 1,3630\dots$ ja se on tällöin $\alpha \approx 6,2$.

analyttiseen tulokseen (96) saamme kriittisen alarajan, jolla alue romahtaa primordiaaliseksi mustaksi aukoksi jos perturbaatiot ovat Gaussisia ja noudattavat Dirac-delta jakaumaa. Tällöin $\delta_c = 0,5936\dots \approx 0,59$, joka vastaa aiemmin saatuja tuloksia [35].

Seuraavaksi laskemme piikittyneen spektrin (121) varianssin σ^2 arvon, jotta voimme laskea PBH:en määrän yhtälöstä (134). Lasketaan varianssi yhtälöstä (115) piikittyneelle spektrille (121)

$$\sigma^2 = \langle \delta_l^2 \rangle = \frac{16}{81} \int \frac{k^4 r_m^4}{k} P_0 k_0 \delta(k - k_0) W^2(k, r_m) T^2(k, \eta_H) dk. \quad (144)$$

Integroidaan yhtälö (144) ja sijoitetaan tulos $k_0 r_m = 2,74$ siihen

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{16}{81} P_0 (2,74)^4 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \left[\frac{\sin(2,74) - 2,74 \cos(2,74)}{2,74^3} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\frac{1}{\sqrt{3}})}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^3} \right]^2 \\ &= 1,87902... P_0 \approx 1,88 P_0.\end{aligned}\tag{145}$$

Kiinnitetään arvot piikkittyneen spektrin (121) vapaille parametreille P_0 ja k_0 . Kiinnostava kokoluokka, jossa primordiaaliset mustat aukot voisivat kattaa suuren osan pimeästä aineesta on noin Auringon massaiset PBH:t [16][64]. Tämän kokoluokan primordiaalisia mustia aukkoja syntyy noin $k_0 \approx 10^6 \text{Mpc}^{-1}$ aallonpituuksilla [16]. Vastaavasti valitaan $P_0 \approx 0,01$, jotta Diracin deltafunktion avulla laskettu varianssi on pieni ja tätä suuruusluokkaa on käytetty muissa papereissa [61][64].

Meillä on nyt kaikki tarvittavat lukuarvot, joilla voimme laskea PBH:en massan ja määrän oletuksella, että primordiaaliset perturbaatiot ovat Gaussisia ja niiden spektri noudattaa Dirac-delta-jakaumaa (121). Lasketaan ensiksi massa yhtälöstä (131). Laskemamme δ_c on $\approx 0,59$ ja tutkimme säteilyn dominoivaa ajanjaksoa, joten $\gamma = 0,36$. Valitaan K :n arvoksi 4, koska se on numeerinen vakio, jota emme voi ratkaista, mutta lähteiden [9] ja [52] nojalla se on noin 3-10 välillä. Tarkemmin K :n arvo riippuu δ_c :n arvosta ja arvolla $\delta_c \approx 0,55$ vakio K on noin 4, jonka oletan riittävän lähelle laskemaamme δ_c :n arvoa, jotta voimme pitää saman K :n arvon.

Tällöin PBH:n massa (131) on

$$M_{PBH} = 4M_H (\delta_m - 0,59)^{0,36}\tag{146}$$

Massan maksimiarvo saadaan, kun $\delta_m = 2/3$

$$M_{PBH,max} = 1,586... M_H \approx 1,6 M_H.$$

M_H :n arvoa voidaan lähteä approksimoimaan tilanteesta, jossa horisontin massa M_H on materian ja säteilyn tasapainotilassa (merkitään $M_{H,eq}$) [65]

$$M_H = M_{H,eq} (k_{eq} R)^2 \left(\frac{g_{*,eq}}{g_*} \right)^{1/3},\tag{147}$$

jossa g_* on efektiivisten vapausasteiden lukumäärä ja R kuvaa horisontin massan skaalaa. Kun skaala osuu horisonttiin niin $R = \frac{1}{aH}$. Varhaisessa universumissa g_* :n arvioidaan olevan suuruusluokaltaan noin 100 ja $g_{*,eq} \approx 3$, $k_{eq} = 0,07 \Omega_m h^2 \text{Mpc}^{-1}$ [65].

Horisontin massa tasapainotilanteessa on

$$M_{H,eq} = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho_{rad,0}}{k_{eq}^3 \cdot a_{eq}},$$

jossa $a_{eq} = (24000\Omega_m h^2)^{-1}$ ja $\Omega_{rad,0} h^2 = 4,17 \cdot 10^{-5}$. Valitaan lisäksi $\Omega_m h^2 = 0,14$ [66], jolloin

$$M_{H,eq} = 1,3 \cdot 10^{49} (\Omega_m h^2)^{-2} g = 7 \cdot 10^{50} g. \quad (148)$$

Sijoitetaan (148) M_H :n yhtälöön (147)

$$\begin{aligned} M_H &= 7 \cdot 10^{50} g (0,07 \cdot 0,14 \text{Mpc}^{-1} \cdot \frac{1}{aH})^2 \cdot (\frac{3}{100})^{1/3} \\ &\approx 2,1 \cdot 10^{46} (\frac{1}{aH})^2. \end{aligned}$$

Termi $\frac{1}{aH} = r_m$, jolloin $\frac{1}{aH} = \frac{1}{k_0}$ ja valitsimme $k_0 = 10^6 \text{Mpc}^{-1}$, jolloin tässä laskussa

$$M_H \approx 2,1 \cdot 10^{46} (\frac{1}{10^6})^2 = 2,1 \cdot 10^{34} (g).$$

Tällöin massiivisin primordiaalin musta aukko Gaussiselle piikittyneelle spektrille (121) on

$$M_{PBH,max} \approx 3,3 \cdot 10^{34} g \approx 17 M_\odot.$$

Jos oletamme primordiaalistien mustien aukkojen massajakauman monokromaattiseksi, niin $M_{PBH} = M_H$ eli

$$M_{PBH} \approx 10 M_\odot.$$

Lasketaan PBH:en määrä yhtälöstä (137), johon sijoitetaan arvot $\delta_{m,c} = 0,59$ ja

$$\delta_{l,c} = \frac{4}{3} (1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{2} \delta_{m,c}}) = 0,8811... \approx 0,88,$$

jossa (+)-ratkaisu on suurempaa kuin $\delta_{l,max}$ ja hylätty. Lisäksi varianssi $\sigma^2 = 1,88 P_0 = 0,0188$, jolloin yhtälö (137) on

$$\beta = \int_{0,8811}^{4/3} \frac{4}{\sqrt{2\pi \cdot 0,0188}} e^{-\delta_l^2 / (2 \cdot 0,0188)} (\delta_l - \frac{3}{8} \delta_l^2 - 0,59)^{0,36} d\delta_l \approx 3,842 \cdot 10^{-11}. \quad (149)$$

Tuloksen (149) nojalla $M_{PBH} = 4 M_H (\delta_m - 0,59)^{0,36}$ massaiset primordiaaliset mustat aukot kattavat noin $4 \cdot 10^{-9}$ prosenttia syntyhetkellä olevista primordiaalista mustista

aukoista. Samansuuruisia tuloksia PBH:en massalle ja määrälle on saatu paperissa [61], mutta tarkemmat arvot riippuvat voimakkaasti vapaiden parametrien P_0 ja k_0 valinnasta. Verrataan syntyneiden primordiaalisten mustien aukkojen määrää suhteessa pimeään aineeseen yhtälön (139) avulla, kun approksimoidaan massajakauma monokromaattiseksi eli $M = M_H$

$$\Omega = \left(\frac{3,842 \cdot 10^{-11}}{1,1 \cdot 10^{-8}} \right) \left(\frac{0,72}{0,72} \right)^{-2} \cdot 0,2 \cdot \left(\frac{100}{106,75} \right)^{-1/4} \left(\frac{10M_\odot}{M_\odot} \right)^{-1/2} \approx 2,25 \cdot 10^{-4}.$$

Tämän mallin pohjalta noin 10 Auringon massaiset primordiaaliset mustat aukot kattaisivat noin 0,02 prosenttia kaikesta pimeästä aineesta. Todellisuudessa luku on varmasti pienempi, koska primordiaalisten mustien aukkojen välillä on oletettavasti ainakin pientä massavaihtelua, eikä jakaumaa voida olettaa monokromaattiseksi [9]. Lisäksi käytimme yksinkertaisinta spektrimallia ja oletimme Gaussiset perturbaatiot, joten nämäkin voivat vaikuttaa merkittävästi lopputulokseen [9].

5 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa on esitelty primordiaalisten mustien aukkojen synnyn teoriaa sekä, kuinka niiden mahdollista massaa ja määrää maailmankaikkeudessa voidaan arvioida inflaation seurauksena syntyvien primordiaalisten perturbaatioiden pohjalta. Esitetty teoria olettaa perturbaatioiden olevan Gaussisia ja viimeisessä luvussa lasketut PBH:en massa ja määrä olettavat piikittyneen kaarevuusspektrin (121).

Käydään vielä läpi teoriasta saadut tulokset ja näiden pohjalta lasketut PBH:en massa ja määrä. Varsinainen primordiaalisten mustien aukkojen kannalta tärkeä teoria lähtee liikkeelle kappaleen 2.2 lopusta, kun olemme saaneet ratkaistua ns. MSH-yhtälöt Einsteinin yhtälöistä. Teorian pääpaino on alakappaleessa 2.4, jossa tehtiin gradienttiekspansio MSH-yhtälöille ϵ :n toisessa kertaluvussa. Näistä tärkeä tulos on energiatihedden perturbaatio (73), jolla kuvataan mielivaltaisen pisteen energiatihentymän voimakkuutta, joka tarpeeksi suurella arvolla vastaa tilannetta, jossa alue romahtaa primordiaaliseksi mustaksi aukoksi. Määrittelemällä kompaktiofunktion alaluvussa 2.5 saamme johdettua yleisen suhteen energiatihedusperturbaation ja keskimääräisen ylijäämämassan tilavuudessa r_m välille (107).

Kappale 3 keskittyy kokonaan energiatihedusperturbaation alarajan määrittämiseen eli, kuinka suuri perturbaatio r_m -säteisellä alueella tulee olla, jotta se romahtaa mustaksi aukoksi. Esittelemme tälle alarajalle approksimatiivisen analyttisen tuloksen (96) sekä numeerisesti laskettuja arvoja. Tämän jälkeen siirrytään lukuun 4. Aluksi käymme läpi inflaatiota ja inflaation synnyttämiä primordiaalisia perturbaatioita sekä perehdymme tarkemmin slow-roll-malliin. Primordiaalisten perturbaatioiden spektriä emme tarkastelleet inflaatiomallista lähtien vaan parametrisoimme sitä eri tavoin. Näihin lukeutuu esimerkiksi piikkittynyt tehospektri (121), joka noudattaa Dirac-delta-jakaumaa ja yksinkertaistaa integroimista merkittävästi. Tämän jälkeen teorian luvut 4.3 - 4.4 käyvät läpi PBH:en massaa ja määrää varten tarvittavien parametrien määrittelemistä ja kuinka ne voidaan laskea kaarevuusspektrin pohjalta.

Luku 4.5 keskittyy PBH:en massan ja määrän laskemiseen. Laskuissa oletamme Gaussiset perturbaatiot, jotka noudattavat piikittyntä kaarevuusspektriä (121). Tällöin dimensioton suure $k_0 r_m \approx 2,74$ ja tämän avulla laskettu tiheusperturbaation

amplitudin minimi $\delta_c \approx 0,59$. Spektrin varianssiksi saimme $\sigma^2 \approx 0,0188$. Kiinnittämällä vapaat parametrit $P_0 = 0,01$ ja $k_0 = 10^6 \text{Mpc}^{-1}$ saimme parametrisoinnit, joilla primordiaalisten mustien aukkojen keskimääräinen massa on noin $10 M_\odot$ ja tämän massaisten PBH:en määrä kaikista syntyvistä primordiaalisista mustista aukoista on $\beta \approx 4 \cdot 10^{-9}$ prosenttia. Lopuksi suhteutimme tämän pimeään aineeseen, joka antaa arvion paljonko tämän mallin pohjalta primordiaalisia mustia aukkoja olisi maailmankaikkeudessa. Laskun mukaan tämän massaiset PBH:t kattavat tässä mallissa näillä parametrivalinnoilla noin 0,02 prosenttia kaikesta pimeästä aineesta. Tämä arvo on melko suuri ja jos huomioisimme, että todellisuudessa primordiaaliset perturbaatiot voivat olla epägaussisia ja syntyneiden PBH:en massajakauma voi olla melko laaja niin arvo tippuu helposti useita kymmenpotensseja [9].

Lähdeluettelo

- [1] The Event Horizon Telescope Collaboration, "First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole", *ApJ* 875 L4 (2019).
- [2] John Michell, "November 27, 1783: John Michell anticipates black holes", *APS News Volume 18 Number 10* (2009).
- [3] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger", *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102 (2016).
- [4] J. M. Antelis, C. Moreno, "Obtaining gravitational waves from inspiral binary systems using LIGO data" *Eur. Phys. J. Plus* 132, 10 (2017).
- [5] NASA, "Black Hole Types", artikkeli NASA:n nettisivulta, <https://science.nasa.gov/universe/black-holes/types/> (2024), viitattu 22.5.2024.
- [6] Edward Kolb, Kirja: "The Early Universe", Boca Raton, Florida, USA, 1990, PDF-versio: <https://doi.org/10.1201/9780429492860> (2019).
- [7] A. Witze, " 'It's a dream': JWST spies more black holes than astronomers predicted", *Nature* (2023).
- [8] M. Volonteri, M. Habouzit and M. Colpi, "The origins of massive black holes", *Nat. Rev. Phys.* 3, 732–743 (2021).
- [9] LISA Cosmology Working Group, "Primordial black holes and their gravitational-wave signatures", *arXiv:2310.19857* (2023).
- [10] F. Zwicky, "The redshift of extragalactic nebulae", *arXiv:1711.01693* (2017), alkuperäinen paperi espanjaksi 1933.
- [11] G. F. Chapline, "Cosmological effects of primordial black holes", *Nature* 253 251 (1975).

- [12] B. Carr et al., "Primordial black hole constraints for extended mass functions", *Phys. Rev. D* 96, 023514 (2017).
- [13] M. Zumalacarregui and U. Seljak, "Limits on stellar-mass compact objects as dark matter from gravitational lensing of type Ia supernovae", *Phys. Rev. Lett.* 121, 141101 (2018).
- [14] M. Mirbabayi, A. Gruzinov and J. Noreña, "Spin of Primordial Black Holes", [arXiv:1901.05963](https://arxiv.org/abs/1901.05963) (2019).
- [15] I. Musco, J. C. Miller and L. Rezzolla, "Computations of primordial black hole formation", *Class. Quant. Grav.* 22 1405-1424 (2005).
- [16] : A. Green and B. Kavanagh, "Primordial black holes as a dark matter candidate", *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 48 043001 (2021).
- [17] LISA Cosmology Working Group, "Cosmology with the Laser Interferometer Space Antenna", [arXiv:2204.05434](https://arxiv.org/abs/2204.05434) (2022).
- [18] A. Kogut et al., "The Primordial Inflation Explorer (PIXIE): A Nulling Polarimeter for Cosmic Microwave Background Observations", [arXiv:1105.2044](https://arxiv.org/abs/1105.2044) (2011).
- [19] C. W. Misner and D. H. Sharp, "Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse", *Phys. Rev. B* 136 (1964) 571–576.
- [20] R. Hōshi and N. Shibazaki, "The Effect of Pressure Gradient Force on an Accretion Disk Surrounding a Black-Hole", *Progress of Theoretical Physics*, vuosikerta 58, numero 6, sivut 1759–1765 (1977).
- [21] K. Schwarzschild, "On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory", *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1916 (1916) 189-196.
- [22] Planck Collaboration, "Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters", [arXiv:1502.01589v3](https://arxiv.org/abs/1502.01589v3) (2016).
- [23] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers and E. Herlt, *Kirja: "Exact solutions of Einstein's field equations"*, Cambridge: Cambridge University Press, (2009).

- [24] Jean-Pierre Luminet, "The Shape and Topology of the Universe", arXiv:0802.2236 (2008).
- [25] A. Einstein, "The Foundation of the General Theory of Relativity", *Annalen der Physik* (1916).
- [26] Pavel Grinfeld, Kirja: "Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces", Philadelphia, PA, USA (2013).
- [27] Christoffelin symbolien laskeminen, <https://profoundphysics.com/christoffel-symbols-a-complete-guide-with-examples/>, viitattu 11.08.2023.
- [28] Ilia Musco, "Threshold for primordial black holes: Dependence on the shape of the cosmological perturbations", alkuperäinen julkaisu: *Phys. Rev. D* 100, 123524 (2019), päivitetty versio: arXiv:1809.02127v3 (2020).
- [29] J. Bloomfield, D. Bulhosa and S. Face, "Formalism for Primordial Black Hole Formation in Spherical Symmetry", arXiv:1504.02071 (2015).
- [30] P. E. Gibbs, "Energy Is Conserved in the Classical Theory of General Relativity", *Prespacetime Journal*, vuosikerta 1, numero 6, sivut 1072-1084 (2010).
- [31] Byueng C. Eu, Kirja: "Generalized Thermodynamics: The Thermodynamics of Irreversible Processes and Generalized Hydrodynamics", Springer, Dordrecht (2004).
- [32] David H. Lyth, Karim A. Malik and Misao Sasaki, "A general proof of the conservation of the curvature perturbation", *JCAP* 0505:004,2005.
- [33] A. Friedmann, "Über die Krümmung des Raumes", *Z. Phys.* (in German), 10 (1): 377–386, englanniksi: "On the Curvature of Space", *General Relativity and Gravitation*, 31 (12): 1991–2000 (1922).
- [34] M. Shibata and M. Sasaki, "Revisiting compaction functions for primordial black hole formation", *Phys. Rev. D* 60 084-002 (1999).
- [35] I. Musco, V. De Luca, G. Franciolini and A. Riotto, "The Threshold for Primordial Black Hole Formation: a Simple Analytic Prescription", *Phys. Rev. D* 103, 063538 (2021).

- [36] Chul-Moon Yoo, T. Harada, J. Garriga and K. Kohri, "PBH abundance from random Gaussian curvature perturbations and a local density threshold", PTEP 2018 (2018) no.12, 123E01.
- [37] S. nadarajah, "A generalized normal distribution", Journal of Applied Statistics 32(7):685-694 (2005).
- [38] A. Escrivà, C. Germani and R. K. Sheth, "A universal threshold for primordial black hole formation", Phys. Rev. D 101, 044022 (2020).
- [39] M. Kopp, S. Hoffmann and J. Weller, "Seperate Universes Do Not Constrain Primordial Black Hole Formation", Phys. Rev. D 83 124025 (2011).
- [40] B. J. Carr and T. Harada, "The separate universe problem: 40 years on", Phys. Rev. D 91 084048 (2015).
- [41] M. Shibata and M. Sasaki, "Black hole formation in the Friedmann universe: Formulation and computation in numerical relativity", Phys. Rev. D 60, 084002 (1999).
- [42] K. Jedamzik and J. C. Niemeyer, "Primordial Black Hole Formation during First-Order Phase Transitions", Phys. Rev. D 59:124014 (1999).
- [43] I. Ridpath, Kirja: "A Dictionary of Astronomy", Oxford University Press, eISBN: 9780191739439 (2012).
- [44] B. Margalef-Bentabol, J. Margalef-Bentabol and J. Cepa, "Evolution of the cosmological horizons in a universe with countably infinitely many state equations", Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 015 (2):015 (2013).
- [45] A. Helou, I. Musco adn J. C. Miller, "Causal Nature and Dynamics of Trapping Horizons in Black Hole Collapse", Classical and Quantum Gravity 34 135012 (2017).
- [46] V. Faraoni et al., "Foliation dependence of black hole apparent horizons in spherical symmetry", Phys. Rev. D 95 024008 (2017).
- [47] S. Tsujikawa, "Introductory Review of Cosmic Inflation", arXiv:hep-ph/0304257v1 (2003).

- [48] A. Linde, Kirja: "Particle physics and inflationary cosmology", Harwood, Chur, Switzerland, 1990, PDF versio: arXiv:hep-th/0503203v1 (2005).
- [49] S. Clesse and J. García-Bellido, "Massive Primordial Black Holes from Hybrid Inflation as Dark Matter and the seeds of Galaxies", *Phys. Rev. D* 92, 023524 (2015).
- [50] K. Helge, "Equation with the many fathers. The Klein–Gordon equation in 1926" *American Journal of Physics*, 52.11: 1024-1033 (1984).
- [51] Pascal Vaudrevange, "Slow roll inflation", https://www.desy.de/~westphal/workshop_seminar_fall_2010/slow_roll_inflation.pdf (2010), viitattu 15.4.2024.
- [52] S. Young, I. Musco and C. T. Byrnes, "Primordial black hole formation and abundance: contribution from the non-linear relation between the density and curvature perturbation", *JCAP* 11:012 (2019).
- [53] A. M. Green and B. J. Kavanagh, "Primordial black holes as a dark matter candidate", *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 48 043001 (2021).
- [54] A. S. Josan, "Constraints on the power spectrum of primordial perturbations from small-scale structure", *International Journal of Modern Physics A*, Vol. 29, No. 32 1450194 (2014).
- [55] H. Motohashi and W. Hu, "Primordial Black Holes and Slow-Roll Violation", *Phys. Rev. D* 96, 063503 (2017).
- [56] I. Musco, J. C. Miller and A. G. Polnarev, "Primordial black hole formation in the radioactive era: investigation of the critical nature of the collapse", *Class. Quant. Grav.* 26 235001 (2009).
- [57] J. García-Bellido, A. Linde and D. Wands, "Density Perturbations and Black Hole Formation in Hybrid Inflation", *Phys. Rev. D* 54 6040-6058 (1996).
- [58] Chul-Moon Yoo et al., "PBH abundance from random Gaussian curvature perturbations and a local density threshold", alkuperäinen julkaisu: *PTEP* 2018 no.12, 123E01 (2018), päivitetty versio: arXiv:1805.03946v7 (2024).

- [59] L. Frosina and A. Urbano, "On the inflationary interpretation of the nHz gravitational-wave background", arXiv:2308.06915 (2023).
- [60] A. M. Dizgah, G. Franciolini and A. Riotto, "Primordial Black Holes from Broad Spectra: Abundance and Clustering", arXiv:1906.08978v1 (2019).
- [61] S. Young and C. T. Byrnes, "Initial clustering and the primordial black hole merger rate", arXiv: 1910.06077 (2019).
- [62] B. Carr et al., "New cosmological constraints on primordial black holes", Phys. Rev. D 81:104019 (2010).
- [63] C. Germani and I. Musco, "The abundance of primordial black holes depends on the shape of the inflationary power spectrum", Phys. Rev. Lett. 122, 141302 (2019).
- [64] B. Carr et al., "CONSTRAINTS ON PRIMORDIAL BLACK HOLES", arXiv:2002.12778 (2021).
- [65] A. M. Green et al., "A new calculation of the mass fraction of primordial black holes", Phys. Rev. D 70 041502 (2004).
- [66] D. N. Spergel et al., "First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters", Astrophys. J. Suppl. 148 175-194 (2003).

Liitteet

Liite A: Riccitensoiri laskettu kokonaisuudessaan. (Liite PNG-tiedostona)

https://drive.google.com/file/d/1svLc_1H2ktoE8ENm7FDpwh01VDUJ9AuL/view?usp=sharing