JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Hyperbolisen geometrian historiaa

Joni Ruokaismäki

10. kesäkuuta 2024

Tekijä Joni Ruokaismäki	
Otsikko Hyperbolisen geometrian historiaa (engl. History of hyperbolic geometry)	
Tutkinto-ohjelma Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma	
Päivämäärä 10. kesäkuuta 2024	**Sivumäärä** 75

Tiivistelmä

Tämän pro gradu -tutkielman tarkoituksena on tutustua yleisesti hyperbolisen geometrian historiaan ja siihen, miten hyperbolisesta geometriasta tuli tunnustettu osa nykypäivän matematiikkaa. Tutkielma keskittyy paralleeliaksioomasta syntyneisiin todistuksiin ja niistä seuranneisiin tuloksiin, joista huomattiin, että euklidisen geometrian lisäksi saattaa olla olemassa toisenlaista geometriaa.

Tutkielman alkupuolella käymme läpi paralleeliaksiooman varhaisia todistusyrityksiä Ptolemaioksen, Prokloksen sekä John Wallisin toimesta. Tätä työtä jatkoi Girolamo Saccheri, joka teki siihen asti parhaan yrityksen paralleeliaksiooman todistamiseksi. Saccherin työ perustuu nelikulmioon, joka tunnetaan nykyään Saccherin nelikulmiona.

Käsittelemme Saccherin työtä syvällisemmin kuin muita, sillä Saccherin tekemät hypoteesit Saccherin nelikulmion huippukulmista toimivat pohjana usean eri geometrikon töille ja siitä jatkoivat esimerkiksi Johann Heinrich Lambert sekä Adrien-Marie Legendre. Heidän työnsä eivät kuitenkaan tuoneet pituuden absoluuttisen mitan käsitteen lisäksi mitään, mitä edeltävät geometrikot eivät olisi löytäneet. Legendren tyylikäs ja yksinkertainen tapa lähestyä ongelmia kuitenkin lisäsi yhdensuuntaisten suorien teorian tutkijoiden määrää.

Tutkielman lopussa tutustumme Carl Friedrich Gaussin, Nikolai Lobatševskin sekä János Bolyain töihin. Heitä pidetään yleisesti epäeuklidisen geometrian löytäjinä ja pystymme näkemään Gaussin, Lobatševskin ja Bolyain töissä yhteyden Lambertin, Legendren sekä Saccherin töiden kanssa. Edellä mainittujen matemaatikoiden käsittely on kuvailevampaa, sillä niissä esiintyvät yksityiskohdat vaatisivat syvällisempiä pohjatietoja, joten niiden käsittely ohitetaan. Tutkielma päättyy hyperbolisen geometrian leviämisen tarkasteluun sen löytymisen jälkeen.

Sisällys

Johdanto

Hyperbolinen geometria on verrattain uusi osa-alue nykypäivän matematiikkaa. Se syntyi 1800-luvulla, mutta juuret ovat paljon kauempana Eukleideen esittämässä paralleeliaksioomassa. Ero euklidisen ja hyperbolisen geometrian välillä onkin yhdensuuntaisten suorien määrä annetun suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta. Euklidisessa geometriassa määrä on yksi, mutta hyperbolisessa geometriassa ainakin kaksi.

Eukleideen aksioomien oli tarkoitus olla itsestäänselviä, jotta matematiikka voitaisiin rakentaa niiden pohjalta. Moni on kuitenkin kyseenalaistanut Eukleideen viidennen postulaatin eli paralleeliaksiooman itsestäänselvyyden ja vaatinut sille todistusta. Tutkielmassa lähdetään liikkeelle paralleeliaksiooman varhaisista todistusyrityksistä Ptolemaioksen, Prokloksen sekä Wallisin toimesta. Yrityksistä huomataan, että niissä on yleisesti vain yksi vaihe, jota ei pystytä perustelemaan.

Vaikka edellä mainitut tunnetut matemaatikot eivät onnistuneet todistamaan paralleeliaksioomaa, eivät myöhemmät geometrikot luovuttaneet todistuksen saavuttamisen suhteen. Aikansa parhaan todistusyrityksen teki Girolamo Saccheri, jonka työhön keskitymme syvällisesti sen merkitsevyyden takia, vaikka todistusyritys olikin virheellinen. Saccherin työ perustui Saccherin nelikulmioon, jonka kantakulmat ovat suoria kulmia ja huippukulmista Saccheri teki kolme eri hypoteesia: ne ovat joko suoria, teräviä tai tylppiä. Saccherin jälkeisten matemaatikoiden todistukset perustuivat näihin kolmeen hypoteesiin. Saccheri oivalsi myös, että annetun kolmion kulmien summa on yhtä suurta kuin Saccherin nelikulmion huippukulmien summa. Viimeisimpänä havaintona Saccheri huomasi, että kahdella suoralla voi olla yhteinen normaali, mutta terävän kulman hypoteesi tuotti tässä ongelmia. Lopulta Saccheri löysi asymptoottisten suorien olemassaolon.

On vaikea sanoa paljonko Saccherin työ vaikutti hänen jälkeisten matemaatikkojen tutkimuksiin, mutta esimerkiksi Johann Heinrich Lambert ja Adrien-Marie Legendre saattoivat tuntea hänen työnsä. Heidän tapansa tutkia paralleeliaksioomaa oli hyvin samankaltainen kuin Saccherin. Lambert huomasi, että terävän kulman hypoteesi johtaisi pituuden absoluuttisen yksikön olemassaoloon. Aluksi hän ajatteli sen olevan vain looginen järjettömyys, mutta lopulta päätti ettei näin ole. Myös Legendre huomasi pituuden absoluuttisen yksikön, mutta piti tätä kuitenkin mahdottomana.

Suurimman harppauksen hyperbolisen geometrian kanssa tekivät Carl Friedrich Gauss, Nikolai Lobatševski sekä János Bolyai. Voisi sanoa, että he jatkoivat siitä mihin Saccheri jäi ja heitä pidetäänkin hyperbolisen geometrian löytäjinä. Gauss ajatteli epäuklidista geometriaa vuosia, mutta ei halunnut julkaista siitä mitään elinaikanaan. Gauss määritteli yhdensuuntaisuuden eri tavalla kuin Saccheri. Hänen mukaansa suorat ovat yhdensuuntaisia tietyssä mielessä, eli jonkin suoran oikealla tai vasemmalla puolella.

Lobatševski sekä János Bolyai kehittivät epäeuklidista geometriaa toisistaan riippumatta, vaikka heidän töissään käsitellään samoja asioita. He ajattelivat suorien yhdensuuntaisuuden samaan tapaan kuten Gauss. Lobatševskin mielestä imaginaarigeometrian tärkein asia on trigonometristen kaavojen muodostaminen. Hän myös huomasi, että sopivasti tulkittuina uuden pallotrigonometrian kaavat ovat vastaavat kuin normaalissa pallotrigonometriassa. János Bolyai päätyi samankaltaisiin tuloksiin, mutta ero syntyi kun Lobatševski pyrki kehittämään imaginaarigeometrian analyyttistä puolta ja Bolyai taas paneutui geometrian lauseiden riippuvuteen tai riippumattomuuteen viidennestä postulaatista. János kehitti myös avaruuden absoluuttisen tieteen eli neutraalin geometrian.

Tutkielman päälähteet ovat Roberto Bonolan kirja *Non-Euclidean Geometry* [1] sekä Marvin-Jay Greenbergin kirja *Euclidean and non-Euclidean geometries* [3]. Näiden lisäksi Saccherin kappaleen päälähteenä toimii Robin Hartshornen kirja *Geometry: Euclid and beyond* [4]. Päälähteinä hyödynnettyjen kirjojen lähestymistavat hyperboliseen geometriaan vaihtelevat ja tutkielmassa on pyritty yhdistämään katkelmia eri lähteistä. Myös lähteiden todistukset ovat lähtökohdiltaan erilaisia ja niitä on muokattu sekä täydennetty vastaamaan toisiaan.

1 Eukleideen postulaatit ja esitietoja

Tässä kappaleessa käsitellään Eukleideen viisi ensimmäistä postulaattia sekä tarvittavia esitietoja, jotka on otettu Greenbergin [3] kirjasta sekä Juha Lehrbäckin geometrian luentomonisteesta [6]. Eukleides oli Platonin akatemian oppilas ja noin 300 eaa. hän tuotti aikansa kreikkalaisen geometrian ja lukuteorian perusteiden kattavan käsittelyn 13-osaiseen teokseensa *Alkeet*. Laatiessaan tätä mestariteosta Eukleides nojautui edeltäjiensä kokemuksiin ja saavutuksiin aikaisemmilta vuosisadoilta. Eukleideen työ oli niin ylivertainen, että se syrjäytti aiemmat yritykset esittää geometriaa ja näistä yrityksistä ei nykypäivänä tiedetäkään paljoa. Hänen tapansa lähestyä geometriaa onkin hallinnut tapaa opettaa aihetta jo yli kaksi tuhatta vuotta. Eukleideen käyttämä aksiomaattinen menetelmä on prototyyppi kaikelle sille, jota nykyään kutsumme ”puhtaaksi matematiikaksi”.

Matemaatikot voivat keksiä uusia lauseita käyttäen yritystä ja erehdystä, laskemalla erikoistapauksia, valistuneella arvauksella tai millä tahansa muulla tavalla. Aksiomaattinen menetelmä on tapa, jolla todistetaan tulokset oikeiksi. Halutaan osoittaa, että jokin väite on totta jonkin toisen väitteen nojalla. Jos väite ei ole uskottava sellaisenaan, niin täytyy se perustella jonkin toisen väitteen avulla. Tämä mahdollisesti joudutaan suorittamaan muutaman kerran, mutta jossakin vaiheessa löytyy sellainen väite, joka voidaan hyväksyä sellaisenaan. Tällaista väitettä kutsutaan aksioomaksi tai postulaatiksi [3].

Eukleideen geometria perustui viiteen perustavanlaatuiseen oletukseen eli postulaattiin.

Postulaatti 1 (Eukleideen ensimmäinen postulaatti)**.** Jokaiselle pisteelle P ja jokaiselle pisteelle Q, jotka ovat eri pisteet, on olemassa yksikäsitteinen suora l, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta.

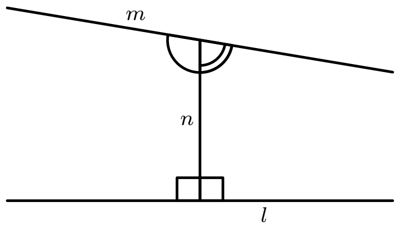
Postulaatti 2 (Eukleideen toinen postulaatti)**.** Jokaiselle janalle AB ja jokaiselle janalle CD on olemassa yksikäsitteinen piste E siten, että piste B on pisteiden A ja E välissä ja janat CD ja BE ovat yhtenevät.

Postulaatti 3 (Eukleideen kolmas postulaatti)**.** Jokaiselle pisteelle O ja jokaiselle pisteelle A, jotka ovat eri pisteet, voidaan piirtää ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde on OA.

Postulaatti 4 (Eukleideen neljäs postulaatti)**.** Kaikki suorat kulmat ovat yhteneviä.

Moni on hyväksynyt Eukleideen neljä ensimmäistä postulaattia sellaisinaan, mutta viidennestä postulaatista eli niin sanotusta paralleeliaksioomasta on kiistelty pitkään. Eukleides muotoili viidennen postulaatin seuraavasti:

Postulaatti 5 (Eukleideen viides postulaatti eli paralleeliaksiooma)**.** Jos kahta suoraa leikkaavan suoran leikkauskulmat suorien kanssa ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, nämä kaksi suoraa leikkaavat toisensa sillä puolella, jolla kulmat ovat vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa.



Kuva 1.1: Eukleideen 5 postulaatti.

Eukleides ei itse täysin luottanut viidenteen postulaattiinsa minkä takia hän vältteli sen käyttöä niin pitkään kuin mahdollista. Seuraavat tulokset Eukleides pystyi todistamaan ilman paralleeliaksioomaa:

Määritelmä 1.1 (Vieruskulmat)**.** Olkoon AC suora ja piste B välillä AC. Olkoon piste P suoran AC ulkopuolella. Tällöin kulmat ABP ja CBP ovat toistensa vieruskulmat.

Määritelmä 1.2 (Yhtenevät vieruskulmat ja normaali)**.** Jos vieruskulmat ovat yhtenevät, niin kulmat ovat suoria kulmia. Suorassa kulmassa leikkaavat suorat ovat toistensa normaalit.

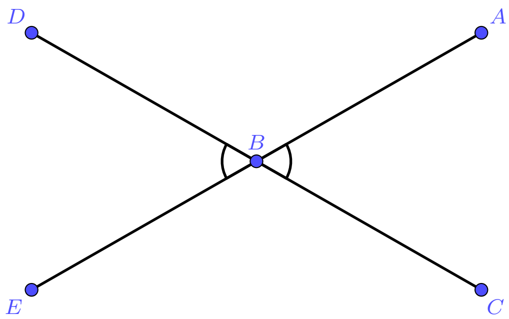
Lause 1.3 (Ristikulmat)**.** *Leikatkoon suorat AE ja CD pistessä B. Tällöin kulmat DBE ja ABC ovat yhtä suuret.*

Lause 1.4 (Suoran normaali)**.** *Olkoot l suora ja P piste. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi suoran l normaali, joka kulkee pisteen P kautta.*

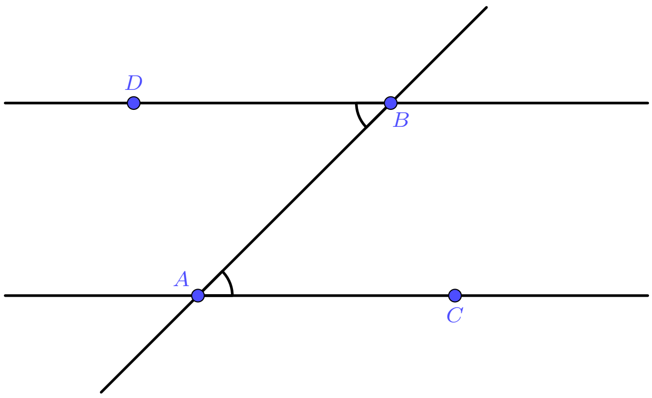
Määritelmä 1.5 (Suorien yhdensuuntaisuus)**.** Kaksi eri suoraa l ja m ovat yhdensuuntaiset, jos ne eivät leikkaa eli suorilla l ja m ei ole yhteisiä pisteitä.

Määritelmässä 1.5 on hyvä huomata, että siinä ei oleteta suorien olevan vakioetäisyydellä toisistaan.

Lause 1.6 (Vuorakulmalause)**.** *Olkoot AC ja BD eri suoria ja pisteet C ja D eri puolilla suoraa AB. Olkoon kulmat CAB ja DBA yhtä suuret. Tällöin suorat AC ja BD ovat yhdensuuntaiset.*



Kuva 1.2: Lause 1.3.



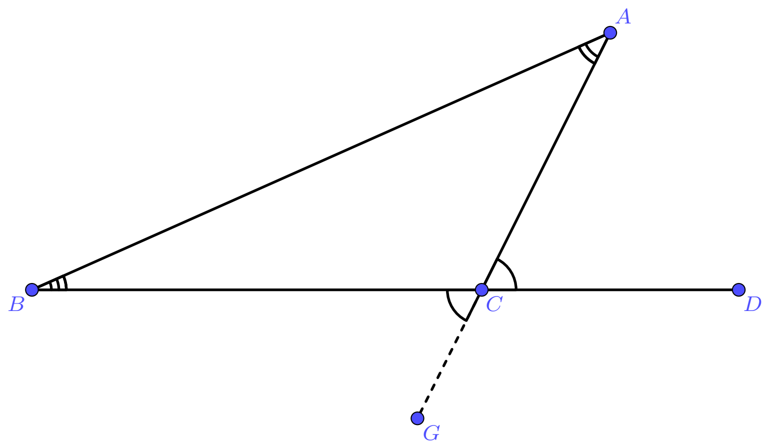
Kuva 1.3: Lause 1.6.

Vuorokulmalauseen avulla saadaan seuraava kolmioille pätevä ulkokulmaepäyhtälö.

Lause 1.7 (Ulkokulmaepäyhtälö)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja piste D suoralla BC siten, että piste C on pisteiden B ja D välissä. Tällöin kulmille A, B ja ACD pätee $A < ACD$ ja $B < ACD$.*

Ulkokulmaepäyhtälön avulla saadaan kolmioiden kks-yhtenevyyssääntö.

Lause 1.8 (KKS-yhtenevyys)**.** *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita, joille kyljet AC ja DF sekä kulmat A ja D sekä B ja E ovat yhtenevät. Tällöin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhtenevät.*



Kuva 1.4: Lause 1.7.

Joissakin todistuksissa hyödynetään myös Arkhimedeen aksioomaa:

Postulaatti 6 (Arkhimedeen aksiooma)**.** Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin on olemassa luonnollinen luku k ja piste E siten, että piste E kuuluu puolisuoralle CD välin CD ulkopuolelle ja

$$k \cdot AB \cong CE$$

Neutraalissa geometriassa olemme neutraaleja paralleeliaksiooman suhteen, eli emme oleta sitä todeksi tai epätodeksi. Kaikki edellä olevat tulokset siis pätevät neutraalissa geometriassa.

Osaan tutun tasogeometrian tuloksista Eukleideen täytyi kuitenkin olettaa paralleeliaksiooma todeksi, jotta hän pystyi perustelemaan ne moitteettomasti. Tällaisia tuloksia ovat esimerkiksi seuraavat:

Lause 1.9 (Käänteinen vuorokulmalause)**.** *Olkoot AC ja BD yhdensuuntaiset suorat ja pisteet C ja D eri puolilla suoraa AB. Tällöin kulmat ABD ja CAB ovat yhtenevät.*

Lause 1.10 (Kolmion kulmasummalause)**.** *Kolmion $\triangle ABC$ kulmille pätee, että $A + B + C = 2$ suoraa kulmaa.*

Lauseet 1.9 ja 1.10 ovat itse asiassa yhtäpitäviä paralleeliaksiooman kanssa.

Moni geometrikko, joka tutki paralleeliaksioomaa, hyödynsi jossakin vaiheessa tutkimuksiaan yhdenmuotoisia kolmioita.

Määritelmä 1.11 (Yhdenmuotoiset kolmiot)**.** Kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoiset, jos niiden kulmille pätee $A \cong D, B \cong E$ ja $C \cong F$ sekä sivuille pätee $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

KKS-yhtenevyys ei vaatinut paralleeliaksioomaa, mutta seuraava SKS-yhdenmuotoisuus vaatii.

Lause 1.12 (SKS-yhdenmuotoisuus)**.** *Oletetaan, että kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kulmat A ja D ovat yhtä suuret sekä sivuille AB, AC, DE ja DF pätee $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. Tällöin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoiset.*

2 Paralleeliaksiooman varhaisia todistusyrityksiä

Aksioomien oli tarkoitus olla yksinkertaisia ja intuitiivisesti itsestäänselviä, jotta kukaan ei kyseenalaistaisi niiden oikeellisuutta. Miksi Paralleeliaksioomaa sitten pidetään niin kiistanalaisena? Sitä kohtaan hyökättiin jo alusta lähtien, koska se ei ollut matemaatikoiden mielestä riittävän uskottava ollakseen todistamaton oletus. Paralleeliaksiooma onkin yritetty korvata yksinkertaisemmilla aksioomilla esimerkiksi John Playfairin (1748–1819) toimesta.

Postulaatti 7 (Playfairin postulaatti)**.** Jokaiselle suoralle l ja jokaiselle pisteelle P, joka ei ole suoralla l, on olemassa yksikäsitteinen suora m, joka kulkee pisteen P kautta ja on yhdensuuntainen suoran l kanssa.

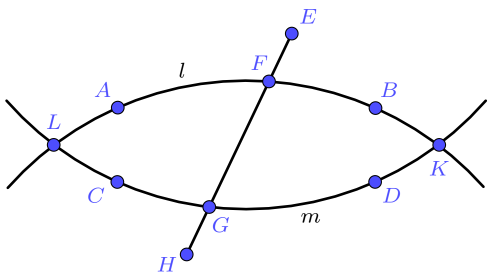
Voimme nähdä eron viidennen ja neljän ensimmäisen postulaatin välillä. Neljä ensimmäistä postulaattia pystymme mallintamaan, mutta viidettä postulaattia emme. Voimme piirtää janoja ja pystymme jatkamaan ne suoriksi, mutta emme pysty jatkamaan suoria äärettömyyksiin ja tarkastaa leikkaavatko suorat toisensa jossakin vaiheessa.

Kahdentuhannen vuoden ajan matemaatikot yrittivät johtaa paralleeliaksioomaa neljästä ensimmäisestä postulaatista tai korvata sitä jollakin toisella itsestäänselvällä postulaatilla. Kaikki yritykset johtaa paralleeliaksiooma neljästä ensimmäisestä postulaatista kuitenkin epäonnistuivat, sillä ne sisälsivät jonkin perusteettoman oletuksen ja olivat kehäpäätelmiä. Korvaavista postulaateista taas huomattiin, että ne olivat lopulta yhtäpitäviä paralleeliaksiooman kanssa. Täytyy kuitenkin muistaa, että vaikka todistukset olivat virheellisiä, niin ne olivat aikansa parhaiden matemaatikoiden tekemiä. Käymme tässä kappaleessa läpi muutamia paralleeliaksiooman varhaisia todistusyrityksiä, jotka löytyvät Greenbergin [3] ja Heathin [5] kirjoista, pohjustuksena myöhemmille perusteellisemmille yrityksille.

2.1 Proklos

Prokloksen (410-585 jaa.) tekstit ovat antiikin ajan geometrian päälähde. Proklos kritisoi paralleeliaksioomaa seuraavasti: ”Tämä pitäisi jopa poistaa postulaateista kokonaan; sillä se on lause, joka sisältää monia vaikeuksia joita Ptolemaios yritti ratkaista eräässä kirjassaan. Väite, joka sanoo, että kun kaksi eri suoraa lähenevät jatkuvasti ja kun niitä jatketaan yhä enemmän, leikkaavat on todennäköistä, mutta ei välttämätöntä” [3, s. 149].

Ensimmäisen yleisesti tunnetun yrityksen paralleeliaksiooman todistukselle teki Ptolemaios (85–165 jaa.) [3]. Seuraavat kaksi Ptolemaioksen todistusta, joista jälkimmäinen on paralleeliaksiooman todistusyritys, löytyvät Heathin [5] ja jälkimmäinen Bonolan [1] kirjoista.



Kuva 2.1: Ptolemaioksen vuorokulmalauseen todistusta havainnollistava kuvio.

Ptolemaioksen vuorokulmalauseen todistus. Olkoon pisteet ja suorat kuten kuvassa 2.1. Leikatkoon suora EH suorat l ja m pisteissä F ja G ja oletetaan, että kulmat BFG ja FGD muodostavat yhteensä kaksi suoraa kulmaa.

Oletetaan, että suorat l ja m leikkaisivat ja olkoon piste K niiden leikkauspiste. Koska kulmat BFG ja FGD summautuvat kahdeksi suoraksi kulmaksi ja kulmat AFG, BFG, FGD ja FGC summautuvat neljäksi suoraksi kulmaksi, niin kulmat AFG ja FGC summautuvat kahdeksi suoraksi kulmaksi.

Jos nyt suorat l ja m leikkaavat toisensa pisteessä K, kun sisäkulmat BFG ja DGF summautuvat kahdeksi suoraksi kulmaksi, niin Ptolemaioksen mukaan suorat l ja m leikkaavat myös suoran EH toisella puolella, jos niitä jatketaan, koska myös kulmat AFG ja CGF summautuvat kahdeksi suoraksi kulmaksi.

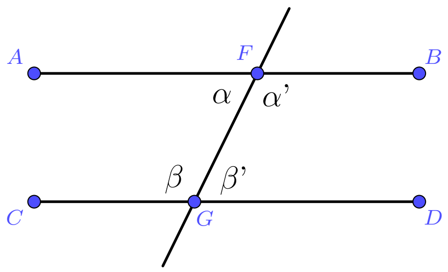
Täten suorat l ja m leikkaavat joko molemmissa suunnissa tai ei kummassakaan suunnassa, jos niiden sisäkulmat summautuvat kahdeksi suoraksi kulmaksi.

On mahdotonta, että suorat l ja m leikkaisivat kahdessa eri pisteessä K ja L, sillä kahdella eri suoralla voi olla vain yksi leikkauspiste.

Jos siis suorien l ja m sekä leikkaussuoran EH leikkauskulmat summautuvat kahdeksi suoraksi kulmaksi, niin suorien on oltava yhdensuuntaisia. □

Ptolemaios todistaa edellisessä todistuksessaan itse asiassa vuorokulmalauseen. Ptolemaios olettaa kaiken tapahtuvan symmetrisesti eli, jos sisäkulmat muodostavat kaksi suoraa kulmaa ja suorat l ja m leikkaavat suoran EH toisella puolella, niin tämän olisi tapahduttava myös toisella puolella.

Tämän jälkeen Ptolemaios yrittää todistaa paralleeliaksiooman.



Kuva 2.2: Ptolemaioksen paralleeliaksiooman todistusyritystä havainnollistava kuvio.

Ptolemaioksen todistusyritys. Olkoot suorat AB ja CD yhdensuuntaisia ja FG niiden leikkaussuora. Olkoon α ja β sisäkulmia suoran FG vasemmalla puolella sekä α' ja β' sisäkulmia suoran FG oikealla puolella. Tällöin $\alpha + \beta$ on joko suurempaa, yhtä suurta tai pienempää kuin $\alpha' + \beta'$.

Oletetaan, että jos jokin näistä tilanteista pätee yhdelle parille yhdensuuntaisia suoria, niin se pätee myös kaikille muille yhdensuuntaisille suorille.

Koska suorat AB ja CD ovat yhdensuuntaisia niin myös puolisuorat FB ja GD sekä FA ja GC ovat yhdensuuntaisia.

Oletetaan, että $\alpha + \beta > 2$ suoraa kulmaa. Tällöin myös $\alpha' + \beta' > 2$ suoraa kulmaa symmetrian vuoksi. Täten on oltava, että $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4$ suoraa kulmaa, joka on järjetöntä.

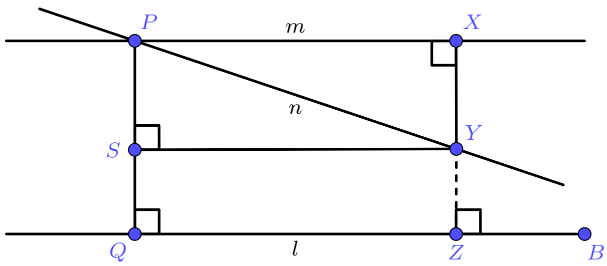
Täten $\alpha + \beta$ ei voi olla suurempaa kuin kaksi suoraa kulmaa. Samaan tapaan pystymme osoittamaan, että $\alpha + \beta$ ei voi olla pienempää kuin kaksi suoraa kulmaa.

Tämän vuoksi on oltava, että $\alpha + \beta = 2$ suoraa kulmaa. □

Kahdessa edellisessä todistuksessa Ptolemaios olettaa kulmien toimivan symmetrisesti leikkaussuoran molemmilla puolilla. Jälkimmäinen todistus ei kuitenkaan todista paralleeliaksioomaa vaan Ptolemaios yritti todistaa vuorokulmalauseen käänteisen version eli käänteisen vuorokulmalauseen. Pystymme myös osoittamaan, että käänteinen vuorokulmalause on yhtäpitävää paralleeliaksiooman kanssa, joten Ptolemaios epäonnistui yrityksessään.

Greenberg [3] jatkaa kirjassaan kertomalla, että Ptolemaios olettaa todistuksessaan Playfairin postulaatin 7 todeksi välttämättä sitä huomaamatta. Playfairin postulaatti on ekvivalentti Eukleideen viidennen postulaatin kanssa ja oikeastaan Ptolemaios oletti sen mitä hän yritti todistaa, eli teki kehäpäätelmän.

Myös Proklos yritti todistaa Eukleideen viidennen postulaatin. Prokloksen idea todistukseen oli hyperbeli, joka lähestyy asymptoottejaan niin lähelle kuin haluamme, mutta ei koskaan leikkaa niitä. Tämä idea osoittaa ainakin sen, että voimme kuvitella Eukleideen päätelmän vastakohdan.



Kuva 2.3: Prokloksen todistusta havainnollistava kuvio.

Prokloksen todistusyritys. Olkoon suorat l ja m yhdensuuntaiset. Oletetaan, että suora n leikkaa suoran m pisteessä P. Haluamme osoittaa, että suora n leikkaa myös suoran l. Olkoon piste Q suoralla l siten, että suora PQ on suoran l normaali. Jos suorat n ja PQ ovat samat, niin suora n leikkaa suoran l pisteessä Q. Muussa tilanteessa jokin suoran n puolisuora PY on puolisuoran PQ ja suoran m välissä. Olkoon piste X suoralla m siten, että suora YX on suoran m normaali.

Nyt jos piste Y liikkuu äärettömän kauas pisteestä P, joka on suoralla n, niin jana XY kasvaa rajattomasti ja on jossakin vaiheessa pidempi kuin jana PQ. Täten pisteen Y täytyy jossakin vaiheessa kulkea suoran l toiselle puolelle, jolloin suora n leikkaa suoran l. $\square$

Ongelmana Prokloksen todistuksessa on se, että hän itse asiassa olettaa, että yhdensuuntaiset suorat ovat joka puolella yhtä kaukana toisistaan.

Viimeisin kappale on Prokloksen väitteen ydin. Se on melko hienostunut väite, joka sisältää liikettä ja jatkuvuutta. Prokloksen todistuksen jokainen väite ennen viimeistä vaihetta voidaan osoittaa todeksi, mutta johtopäätös ei seuraa väitteestä. Miten viimeinen vaihe sitten voitaisiin osoittaa oikeaksi?

Otetaan pisteen Y kautta suoralle l kohtisuora jana YZ kuten kuvassa 2.3. Tällöin voitaisiin väittää kaksi asiaa:

1. Pisteet X, Y ja Z ovat samalla suoralla ja
2. Janoille XZ ja PQ pätee $XZ \cong PQ$.

Tällöin, jos janasta XY tulee pidempi kuin janasta PQ niin janan XY täytyy olla myös pidempi kuin janan XZ, joten pisteen Y täytyy olla suoran l toisella puolella. Tällöin johtopäätös seuraa väitteistä 1 ja 2. Ongelmana on vain se, että näille väitteille ei ole perusteluita muiden aksioomien nojalla.

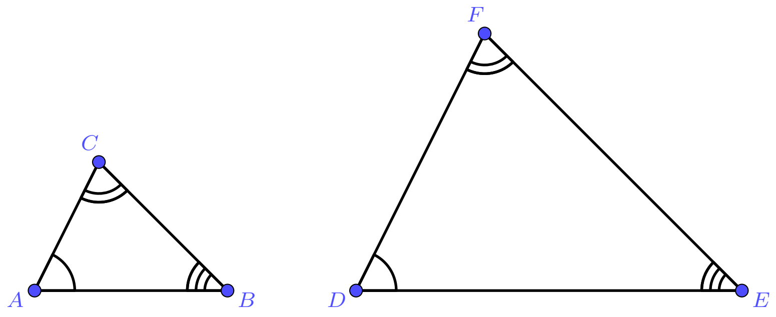
Prokloksen virheellinen todistusyritys osoittaa hyvin, kuinka varovainen täytyy olla sen suhteen miten yhdensuuntaiset suorat ajatellaan. Yleisesti yhdensuuntaiset suorat ajatellaan esimerkiksi junaratana; kaikkialla yhtä kaukana toisistaan ja poikkipuut toimivat normaaleina yhdensuuntaisille raiteille. Tämä ajatustapa on kuitenkin oikea ainoastaan euklidisessa geometriassa. Ilman paralleeliaksioomaa ainoa asia mitä voimme sanoa yhdensuuntaisista suorista on se, että niillä ei ole yhteisiä pisteitä. Emme voi olettaa, että ne olisivat yhtä kaukana toisistaan tai edes, että suorilla olisi yhtä yhteistä normaalia.

2.2 John Wallis

Seuraavan tärkeän paralleeliaksiooman todistusyrityksen teki persialainen tähtitieteilijä ja matemaatikko Nasir Eddin al-Tusi (1201–1274). Hänen yrityksessään oli kuitenkin niin paljon perustelemattomia oletuksia, että keskitytään seuraavaksi John Wallisiin (1616–1703), josta Greenberg [3] kertoo kirjassaan. Aluksi Wallis yritti todistaa paralleeliaksioomaa neutraalissa geometriassa, mutta epäonnistumisen jälkeen luovutti. Wallis kuitenkin ehdotti uutta aksioomaa, joka oli vakuuttavamman oloinen kuin itse paralleeliaksiooma. Tämän jälkeen Wallis todisti paralleeliaksiooman hyödyntäen itse keksimäänsä aksioomaa sekä muita neutraalin geometrian aksioomia.

Postulaatti 8 (Wallisin postulaatti)**.** Mille tahansa kolmiolle $\triangle ABC$ ja mille tahansa janalle DE on olemassa kolmio $\triangle DEF$, joka on yhdenmuotoinen kolmion $\triangle ABC$ kanssa.

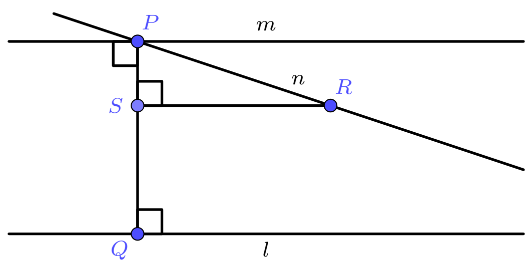
Yhdenmuotoiset kolmiot ovat kolmioita, joiden kärkipisteet voidaan asettaa yksi yhteen niin, että vastaavat kulmat ovat yhteneviä. Euklidisessa geometriassa on todistettu, että yhdenmuotoisten kolmioiden toisiaan vastaavat sivut ovat verrannollisia. Esimerkiksi kolmion $\triangle DEF$ jokainen sivu voi olla



Kuva 2.4: Wallisin yhdenmuotoiset kolmiot.

kaksi kertaa pidempi kuin kolmion $\triangle ABC$ vastaava sivu. Wallisin postulaatin intuitiivinen merkitys on siis se, että voimme joko suurentaa tai pienentää kolmioita niin paljon kuin haluamme ilman vääristymiä.

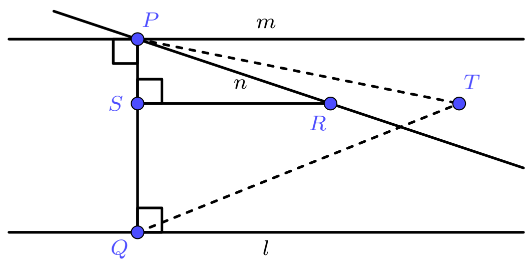
Paralleeliaksiooma pystytään todistamaan Wallisin aksiooman avulla seuraavasti:



Kuva 2.5: Wallisin todistuksen alkua havainnollistava kuvio.

Wallisin todistusyritys. Olkoon pisteet ja suorat kuten kuvassa 2.5. Kun on annettu mikä tahansa piste P, joka ei ole suoralla l, tiedetään, että pisteen P kautta kulkee ainakin yksi yhdensuuntainen suora m suoran l kanssa. Piirretään suoran l normaali PQ, jolloin suora m on suoran PQ normaali. Olkoon suora n mikä tahansa muu suora, joka kulkee pisteen P kautta. Meidän täytyy osoittaa, että suora n leikkaa suoran l. Oletetaan siis, että suora n alkaa pisteestä P ja on suorien m ja PQ välissä. Valitaan piste R

suoralta n ja piirretään janan PQ normaali pisteen R kautta siten, että piste S on tämän normaalin kantapiste janalla PQ.



Kuva 2.6: Wallisin todistuksen loppua havainnollistava kuvio.

Hyödynnetään nyt Wallisin omaa postulaattia 8 kolmioon $\triangle PSR$ ja janaan PQ. Wallisin postulaatin nojalla on olemassa piste T kuten kuvassa 2.6 siten, että kolmiot $\triangle PSR$ ja $\triangle PQT$ ovat yhdenmuotoiset. Oletetaan, että pisteet T ja R ovat samalla puolella suoraa PQ ja jos näin ei ole, voidaan ne peilata toiselle puolelle suoraa PQ.

Yhdenmuotoisten kolmioiden määritelmän nojalla kulmille TPQ ja RPS pätee $TPQ \cong RPS$. Kuitenkin, koska puolisuorat $PQ = PS$ muodostavat yhteisen kyljen kulmille TPQ ja RPS ja pisteet T ja R ovat samalla puolella suoraa PQ, niin ainoaksi vaihtoehdoksi jää, että kulmat ovat samat. Täten täytyy olla, että $PR = PT$, joten piste T on suoralla n. Sama päättely toimii kulmille PQT ja PSR, sillä piste T on suoralla l. Tällöin suorat n ja l leikkaavat pisteessä T. Tällöin suora m on ainoa suora pisteen P kautta, joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa. $\square$

Vaikka Wallisin postulaatti 8 voi tuntua itsestäänselvemmältä kuin Eukleideen viides postulaatti, niin voidaan osoittaa, että postulaatit ovat ekvivalentit.

3 Girolamo Saccheri

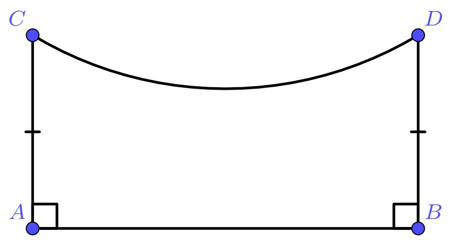
Vaikka varhaiset paralleeliaksiooman todistusyritykset eivät tuottaneet haluttua tulosta, eivät geometrikot luovuttaneet saavuttaakseen maalin.

Girolamo Saccheri (1667-1773) oli loogikko sekä jesuiittapappi, joka julkaisi juuri ennen kuolemaansa Eukleidesta käsittelevän kirjan *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Kirja sai kuitenkin ansaitsemansa suosion vasta kun Eugenio Beltrami (1835–1900) löysi sen uudelleen noin puolitoista vuosisataa myöhemmin.

Vaikka Saccherin yritys todistaa paralleeliaksiooma lopulta epäonnistui, niin yrityksellä oli suuri merkitys. Saccherin todistus oli siihen mennessä kaikista päättäväisin yritys todistaa Eukleideen viides postulaatti. Kappale seuraa Bonolan [1], Greenbergin [3] ja Hartshornen [4] tekstejä.

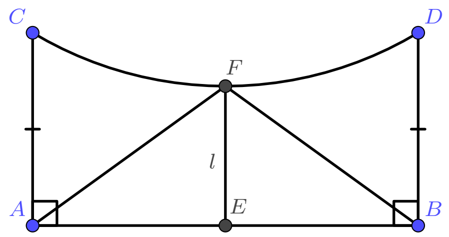
3.1 Saccherin nelikulmio ja siihen liittyviä tuloksia

Saccherin idea todistaa Eukleideen viides postulaatti oli käyttää sen negaatiota ja yrittää päästä ristiriitaan. Saccheri hyödynsi nelikulmiota, joka tunnetaan nykyään Saccherin nelikulmiona. Kappaleessa kaikkia tuloksia käsitellään neutraalissa geometriassa, eli voimassa ovat kaikki muut euklidisen geometrian aksioomat paitsi paralleeliaksiooma.



Kuva 3.1: Saccherin nelikulmio.

Lause 3.1 (Saccherin nelikulmio)**.** *Oletetaan, että janan AB kärkipisteistä lähtee kaksi yhtenevää janaa AC ja BD, jotka ovat kohtisuorassa janan AB kanssa. Yhdistetään pisteet C ja D. Tällöin kulmat C ja D ovat yhtenevät ja edelleen jana joka yhdistää janojen AB ja CD keskipisteet on kohtisuorassa janojen AB ja CD kanssa.*



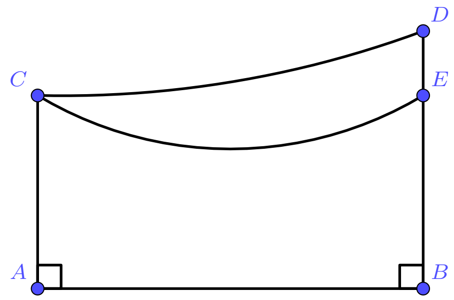
Kuva 3.2: Saccherin todistuksessa hyödynnetty nelikulmio.

Todistus. Olkoon nelikulmio $\square ABDC$ sekä pisteet ja suorat kuten kuvassa 3.2. Olkoon suora l janan AB keskinormaali jolloin pisteet A ja C sekä B ja D ovat eri puolilla suoraa l. Tällöin suora l leikkaa janan CD pisteessä F ja SKS-säännön nojalla kolmiot $\triangle AEF$ ja $\triangle BEF$ ovat yhtenevät jolloin kulmille FAE ja FBE pätee $FAE = FBE$ ja janoille AF ja FB pätee $AF = FB$. Vähentämällä kulma FAE kulmasta A ja kulma FBE kulmasta B saadaan, että kulmat CAF ja DBF ovat yhtenevät, koska $FAE = FBE$ ja kulmat A ja B olivat alun perin yhtä suuria. Nyt SKS-säännön nojalla myös kolmiot $\triangle CAF$ ja $\triangle DBF$ ovat yhtenevät jolloin kulmat C ja D ovat yhtenevät sekä piste E on janan CD keskipiste. Koska kolmiot $\triangle AEF$ ja $\triangle BEF$ sekä kolmiot $\triangle CAF$ ja $\triangle DBF$ ovat yhtenevät, niin summaamalla kulmat CFA ja AFE sekä DFB ja BFE saadaan, että kulmat CFE ja DFE ovat yhtenevät jolloin määritelmän nojalla ne ovat suoria kulmia. □

Kulmien C ja D yhtäsuuruudesta Saccheri erotti kolme eri tapausta, joita hän kutsui hypoteesiksi terävästä kulmasta, suorasta kulmasta ja tylpästä kulmasta riippuen siitä, ovatko huippukulmat C ja D teräviä, suoria vai tylppiä. Saccheri todisti, että jos jokin näistä pätee mille tahansa Saccherin nelikulmiolle, niin se pätee kaikille Saccherin nelikulmioille. Tämän tuloksen perustelua varten tarvitaan ensin joitakin aputuloksia.

Lause 3.2. *Olkoon $\square ABDC$ nelikulmio, jolla on suorat kulmat kulmissa A ja B ja erisuuruiset sivut AC ja BD. Tällöin kulma C on suurempi kuin kulma D jos ja vain jos $AC < BD$.*

Todistus. Oletetaan, että $AC < BD$ ja valitaan piste E janalta BD siten, että $AC = BE$. Tällöin nelikulmio $\square ABEC$ on Saccherin nelikulmio ja lauseen 3.1 nojalla kulmille ACE ja BEC pätee $ACE = BEC$. Nyt kulma ACD on



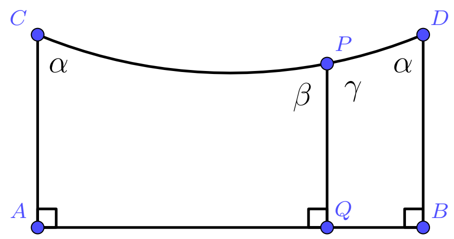
Kuva 3.3: Lause 3.2.

suurempi kuin kulma ACE ja kulma BEC on surempi kuin kulma D ulkokulmalauseen nojalla. Tällöin kulma C on suurempi kuin kulma D kuten haluttiin.

Jos taas oletetaan, että $AC > BD$, niin sama päättelyketju kuin edellä todistaa, että kulma C on pienempi kuin kulma D. Tämä todistaa, että lauseessa pätee ekvivalenssi. □

Lause 3.3. *Olkoon $\square ABDC$ Saccherin nelikulmio, olkoon P mikä tahansa piste janalla CD ja olkoon jana PQ kohtisuorassa janan AB kanssa. Merkitään kulmaa C symbolilla α. Tällöin:*

1. *Jos $PQ < BD$, niin α on terävä kulma.*
2. *Jos $PQ = BD$, niin α on suora kulma.*
3. *Jos $PQ > BD$, niin α on tylppä kulma.*



Kuva 3.4: Lause 3.3.

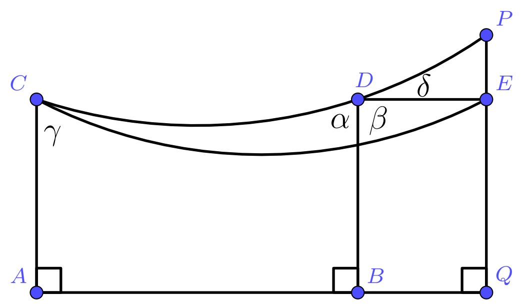
Tapaus 1. Olkoon β ja γ kulmat pisteessä P kuten kuvassa 3.4. Jos janoille PQ ja BD pätee, että $PQ < BD$, niin lauseen 3.1 nojalla $PQ < AC$. Lauseen 3.2 nojalla $\alpha < \beta$ ja $\alpha < \gamma$. Täten $2\alpha < \beta + \gamma = 2$ suoraa kulmaa. Tällöin kulma α on terävä kulma.

Tapaukset 2 ja 3. Todistukset vastaavia kuin tapaus 1. □

Tapaukset 1, 2 ja 3 ovat itse asiassa ekvivalensseja eivätkä vain implikaatioita toisistaan.

Lause 3.4. *Olkoon $\square ABDC$ jälleen Saccherin nelikulmio, mutta tällä kertaa P on sellainen piste suoralla CD, joka on välin CD ulkopuolella. Olkoon jana PQ kohtisuorassa janan AB kanssa ja merkitään kulmaa C symbolilla α. Tällöin*

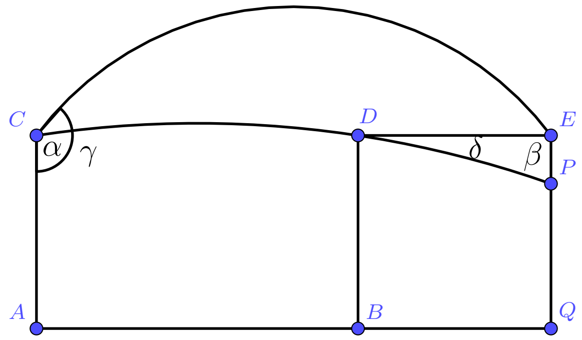
1. *Jos $PQ > BD$, niin kulma α on terävä kulma.*
2. *Jos $PQ = BD$, niin kulma α on suora kulma.*
3. *Jos $PQ < BD$, niin kulma α on tylppä kulma.*



Kuva 3.5: Lauseen 3.4 tapaus 1.

Tapaus 1. Olkoon pisteet ja suorat kuten kuvassa 3.5. Tällöin meillä on kolme Saccherin nelikulmiota. Vertaillaan näiden nelikulmioiden kulmia. Olkoon α, β ja γ nelikulmioiden $\square ABDC, \square BQED$ ja $\square AQEC$ huippukulmia tässä järjestyksessä ja olkoon $\delta = EDP$. Tällöin δ on kolmion $\triangle CDE$ ulkokulma. Tällöin ulkokulmaepäyhtälön nojalla kulma δ on suurempi kuin kulma $DCE = \alpha - \gamma$. Toisaalta, jos tutkitaan pisteessä E sijaitsevia eri kulmia niin huomataan, että $\beta > \gamma$. Nyt 2 suoraa kulmaa $= \alpha + \beta + \delta > \alpha + \gamma + \alpha - \gamma = 2\alpha$, jolloin α on terävä.

Tapaus 2. Jos $PQ = BD$ niin nelikulmio $\square AQPC$ on Saccherin nelikulmio jolloin kulma α on lauseen 3.3 b) -kohdan nojalla suora kulma, sillä se vastaa nelikulmion $\square ABDC$ kulmaa D.



Kuva 3.6: Lauseen 3.4 tapaus 3.

Tapaus 3. Jos $PQ < BD$ todistus on saman tyyppinen. Jatketaan janaa PQ pisteeseen E siten, että $BD = QE$ ja muodostetaan janat CE ja DE. Tällöin saamme kolme Saccherin nelikulmiota, joiden huippukulmia ovat α, β ja γ. Olkoon $\delta =$ kulma PDE. Tällöin ulkokulmaepäyhtälön nojalla saadaan, että

$$\delta > DCE = \gamma - \alpha.$$

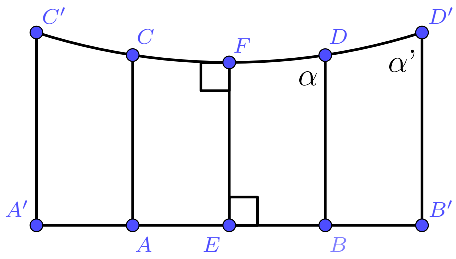
Tarkastellaan nyt pisteessä E sijaitsevia kulmia. Nähdään, että $\gamma > \beta$. Toisaalta tarkastellessa kulmaa D huomataan, että $\alpha + \beta - \delta = 2$ suoraa kulmaa. Yhdistämällä nämä tulokset saadaan, että

$$2 \text{ suoraa kulmaa} = \alpha + \beta - \delta < \alpha + \gamma - \delta < 2\alpha.$$

Täten kulma α on tylppä kuten haluttiin. $\square$

Saccherin oletukset toimivat yhdelle tietynlaiselle Saccherin nelikulmiolle. Niinpä hänen täytyi todistaa vielä jokaiselle tapaukselle, että jos hypoteesi pätee yhdelle Saccherin nelikulmiolle niin se pätee myös kaikille muille Saccherin nelikulmioille.

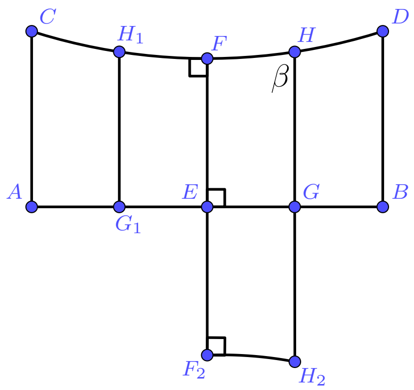
Lause 3.5. *Jos yhdellä Saccherin nelikulmiolla on terävät kulmat, niin kaikilla muillakin Saccherin nelikulmioilla on terävät kulmat. Jos yhdellä on suorat kulmat, niin kaikilla on. Jos yhdellä on tylpät kulmat niin kaikilla on.*



Kuva 3.7: Lauseen 3.5 tapaus 1.

Tapaus 1. Oletetaan, että nelikulmio $\square ABDC$ on Saccherin nelikulmio, jolla on terävät kulmat huippukulmissa C ja D. Olkoon EF janan AB keskinormaali. Olkoon $\square A'B'D'C'$ toinen Saccherin nelikulmio, jonka keskinormaali on myös EF. Oletetaan, että $AB < A'B'$. Saamme kuvan 3.7 kaltaisen kuvion, jossa kulma α on terävä kulma. Täten Lauseen 3.4 nojalla $BD < B'D'$ ja lauseen 3.3 nojalla α' on myös terävä kulma. Käytämme samaa perustelua käänteisessä järjestyksessä, jos oletettaisiin, että $AB > A'B'$. Tästä seuraa, että kaikilla Saccherin nelikulmioilla, joilla on keskinormaalin EF kanssa yhtenevä keskinormaali, on terävät kulmat. Jos oletetaan, että kulmat ovat suoria tai tylppiä, niin todistus on vastaava.

Saccherin täytyi vielä todistaa, että mille tahansa muulle mielivaltaiselle janalle on olemassa Saccherin nelikulmio, jolla on terävät kulmat ja keskinormaali, joka vastaa kyseessä olevaa janaa.

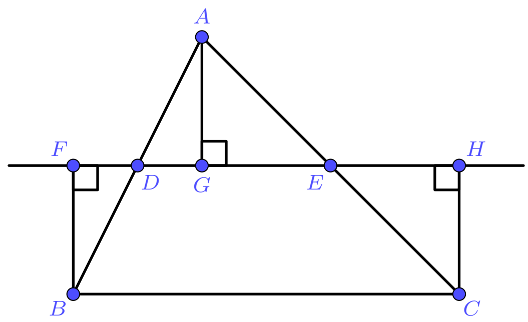


Kuva 3.8: Lauseen 3.5 tapaus 2.

Tapaus 2. Leikatkoon sivun AB normaali pisteessä G janan CD pisteessä H. Peilataan jana FH janan AB suhteen jolloin saadaan jana F_2H_2. Tällöin syntyy Saccherin nelikulmio $\square H_2HFF_2$, jonka keskinormaali on jana AB. Peilataan jana GH janan EF suhteen siten, että saadaan jana G_1H_1. Tällöin saamme kuvan 3.8 kaltaisen kuvion. Nyt nelikulmio $\square G_1GHH_1$ on Saccherin nelikulmio, jonka keskinormaali jana EF on. Tällöin äskeisen perustelun mukaan kulma $\beta = FHG$ on terävä. Mutta nyt nelikulmio $\square H_2HFF_2$ on myös Saccherin nelikulmio, jolla on sama terävä kulma β ja keskinormaali EG, kuten edellä mainittiin. Nyt todistuksen aikaisemman perustelun mukaan myös jokaisella muulla Saccherin nelikulmiolla jonka keskinormaali jana EG on, on terävät kulmat. Jana EG oli kuitenkin mielivaltainen, jolloin väite on todistettu. $\square$

Saccheri myös oivalsi helposti kolmioihin liittyvän tärkeän tuloksen:

Lause 3.6. *Annetulle kolmiolle $\triangle ABC$ on olemassa Saccherin nelikulmio, jonka huippukulmien summa on yhtä suurta kuin kolmion kulmien summa.*



Kuva 3.9: Lauseen 3.6 todistusta havainnollistava kuvio.

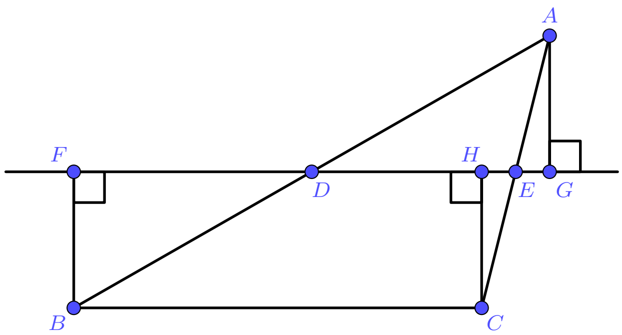
Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ annettu kolmio. Olkoon pisteet D ja E janojen AB ja AC keskipisteet ja piirretään jana DE. Piirretään kohtisuorat janat BF, AG ja CH suoralle DE.

Oletetaan, että piste G on pisteiden D ja E välissä. Nyt koska $AD = DB$ ja ristikulmat pisteessä D ovat yhtenevät, niin KKS-yhtenevyyden nojalla kolmiot $\triangle ADG$ ja $\triangle BDF$ ovat yhtenevät. Myös kolmiot $\triangle AEG$ ja $\triangle CEH$ ovat KKS-yhtenevyyden nojalla yhtenevät. Näiden yhtenevien kolmioiden nojalla pätee, että $BF = AG = CH$.

Nelikulmiolla $\square BCHF$ on suorat kulmat pohjakulmissa F ja H, jolloin se on Saccherin nelikulmio.

Saccherin nelikulmion $\square BCHF$ kulmat B ja C muodostuvat kolmion $\triangle ABC$ kulmista B ja C sekä kärjessä A olevista kulmien DBF ja HCE kanssa yhtenevistä kulmista DAG ja EAG.

Täten nelikulmion kulmat B ja C ovat yhtä suurta kolmion kulmasumman kanssa.



Kuva 3.10: Lauseen 3.6 tilanne, jossa piste G välin FH ulkopuolella.

Jos taas piste G on välin FH ulkopuolella kuten kuvassa 3.10, niin sama argumentti toimii, mutta käytämme kulmien summan sijasta kulmien erotusta. $\square$

Seuraava lause on yksinkertainen johtopäätös edeltävistä tuloksista:

Lause 3.7. *Jos kolmion kulmien summa on yhtä suurta, suurempaa tai pienempää kuin kaksi suoraa kulmaa yhdessä kolmiossa, niin tämä summa on vastaavasti yhtä suurta, suurempaa tai pienempää kuin kaksi suoraa kulmaa jokaisessa muussa kolmiossa.*

Pienempää kuin kaksi suoraa kulmaa. Jos on olemassa kolmio, jonka kulmien summa on pienempää kuin kaksi suoraa kulmaa, niin on olemassa Saccherin nelikulmio, jonka huippukulmat ovat teräviä kulmia lauseen 3.6 nojalla. Tällöin lauseen 3.5 nojalla kaikilla Saccherin nelikulmioilla on terävät kulmat ja jälleen lauseen 3.6 nojalla kaikkien kolmioiden kulmien summa on pienempää kuin kaksi suoraa kulmaa.

Suurempaa kuin kaksi suoraa kulmaa. Todistus on sama kuin edellinen kohta, mutta on olemassa Saccherin nelikulmio, jonka huippukulmat ovat tylppiä kulmia.

Yhtä suurta kuin kaksi suoraa kulmaa. Sama kuin kaksi edellistä, mutta on olemassa Saccherin nelikulmio, joka on normaali suorakulmio, sillä huippukulmat ovat suoria kulmia. □

Saccheri ei ilmaise lausetta selkeästi ja Legendre löysikin lauseen uudestaan ja julkaisi sen noin sata vuotta myöhemmin.

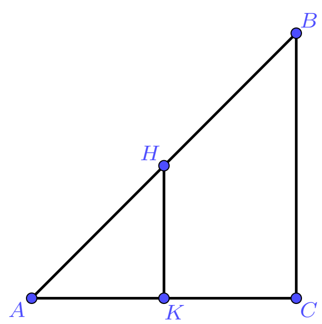
Kaksi edellistä lausetta todistettiin Saccherin ja muiden geometrikoiden toimesta hyödyntäen jatkuvuusperiaatetta ja Arkhimedeen postulaattia. Lause on kuitenkin mahdollista todistaa myös ilman näitä ja Max Dehn onkin todistanut lauseen [1, s. 30], mutta tässä tutkielmassa emme perehdy Dehnin todistukseen sen enempää.

3.2 Saccherin aputulokset ja paralleeliaksiooman todistusyritys

Ennen kun Saccheri alkoi tutkia paralleeliaksiooman oikeellisuutta suoran kulman, tylpän kulman ja terävän kulman hypoteesien suhteen, hän tarvitsi vielä muutaman aputuloksen.

Lemma 3.8. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa kulma C on suora kulma. Olkoon piste H kyljen AB keskipiste ja piste K kyljen AC pisteen H kautta kulkevan normaalin kantapiste. Tällöin*

1. *$AK = KC$ suoran kulman hypoteesin nojalla*
2. *$AK < KC$ tylpän kulman hypoteesin nojalla*
3. *$AK > KC$ terävän kulman hypoteesin nojalla.*



Kuva 3.11: Lemma 3.8.

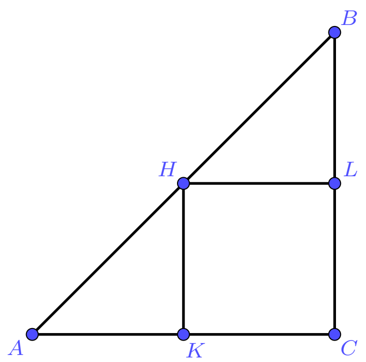
Tapaus 1. Suoran kulman hypoteesin nojalla itsestäänselvä.

Tapaus 2. Tylpän kulman hypoteesin nojalla nelikulmion kulmien summa on suurempaa kuin neljä suoraa kulmaa jolloin kulmille AHK ja HBC pätee $AHK < HBC$. Olkoon jana HL sivun BC normaali siten, että piste L on normaalin kantapiste kuten kuvassa 3.12. Tapauksen 1 ja tiedon, että kolmioilla $\triangle AHK$ ja $\triangle HBL$ on yhtenevät hypotenuusat nojalla $AK < HL$. Mutta nelikulmiolla $\square HKCL$ on kolme suoraa kulmaa, joten kulman H on oltava tylppä kulma. Tästä seuraa, että

$$HL < KC$$

ja täten

$$AK < KC.$$

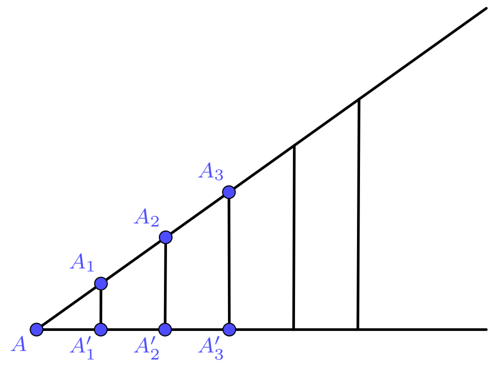


Kuva 3.12: Lemma 3.8 tapaus 2.

Tapaus 3. Todistus sama kuin tapauksessa 2 mutta nelikulmion $\square HKCL$ kulma H on terävä jolloin $HL > KC$ josta seuraa, että $AK > KC$. $\square$

Lemma 3.9. *Jos kulman A toinen kylki jaetaan yhtä suuriksi janoiksi AA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ ja janat AA'_1, $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3, \ldots$ ovat niiden projektiot kulman A toiselle kyljelle kuten kuvassa 3.13, niin seuraavat ovat tosia:*

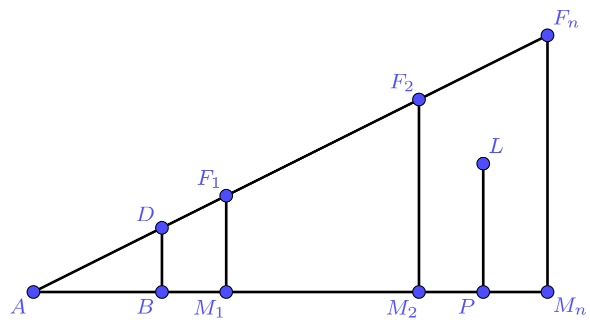
1. $AA'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \ldots$ *suoran kulman hypoteesin nojalla;*
2. $AA'_1 < A'_1A'_2 < A'_2A'_3 < \ldots$ *tylpän kulman hypoteesin nojalla;*
3. $AA'_1 > A'_1A'_2 > A'_2A'_3 > \ldots$ *terävän kulman hypoteesin nojalla.*



Kuva 3.13: Lemma 3.9.

Todistus. Samankaltainen kuin lemman 3.8 todistus. □

Lause 3.10. *Suoraa vastaan kohtisuorassa oleva suora ja sitä terävässä kulmassa leikkaava suora leikkaavat toisensa suoran kulman ja tylpän kulman hypoteesien nojalla.*



Kuva 3.14: Lauseen 3.10 todistusta havainnollistava kuvio.

Todistus. Olkoon LP ja AD suoria siten, että toinen on kohtisuorassa suoran AP kanssa ja toinen nousee terävässä kulmassa suoraan AP nähden kulmassa DAP.

Valitaan piste F_1 suoralta AD siten, että D on pisteiden A ja F_1 välissä ja $AD = DF_1$. Piirretään pisteiden D ja F_1 kautta kohtisuorat janat DB ja F_1M_1 suoralle AP.

Lemman 3.9 nojalla saadaan, että

$$BM_1 \geq AB, \text{ joten } AM_1 \geq 2AB$$

suoran kulman ja tylpän kulman hypoteesien nojalla.

Jatketaan suoraa AF_1 ja valitaan piste F_2 suoralta AF_1 siten, että F_1 on pisteiden A ja F_2 välissä ja $AF_1 = F_1F_2$. Piirretään pisteen F_2 kautta kohtisuora jana F_2M_2 suoralle AP. Tällöin

$$AM_2 \geq 2AM_1$$

ja täten

$$AM_2 \geq 2^2 AB.$$

Edellä oleva voidaan toistaa niin monta kertaa kuin halutaan.

Näin saamme pisteen F_n suoralta AD siten, että sen projektio suoralle AP määrittää janan AM_n, jolle pätee $AM^n \geq 2^n AB$.
Jos kuitenkin n valitaan tarpeeksi suureksi, niin Arkhimedeen postulaatin nojalla saisimme, että

$$2^n AB > AP$$

ja tällöin

$$AM_n > AP.$$

Näin ollen piste P sijaitsee suorakulmaisen kolmion $\triangle AM_nF_n$ sivulla AM_n. Kohtisuora suora PL ei voi leikata kolmion toista sivua M_nF_n, joten sen on leikattava hypotenuusa AF_n. □

Näiden tulosten jälkeen Saccherin oli mahdollista alkaa todistamaan seuraavaa paralleeliaksioomaan liittyvää lausetta:

Lause 3.11. *Suoran kulman ja tylpän kulman hypoteesien tilanteissa viides postulaatti on totta.*

Todistus. Olkoon pisteet ja suorat kuten kuvassa 3.15.

Oletetaan, että kulmien BAC ja ACD summa on pienempää kuin kaksi suoraa kulmaa. Tällöin joko kulma BAC tai ACD on terävä kulma ja valitaan, että kulma BAC on terävä.

Piirretään pisteestä C janan AB normaali CH. Tehtyjen hypoteesien nojalla kolmion $\triangle ACH$ kulmille BAC, ACH ja CHA pätee, että niiden summa on suurempaa tai yhtä suurta kuin kaksi suoraa kulmaa. Koska kulma CHA on suora kulma, niin kulmille BAC ja ACH pätee, että

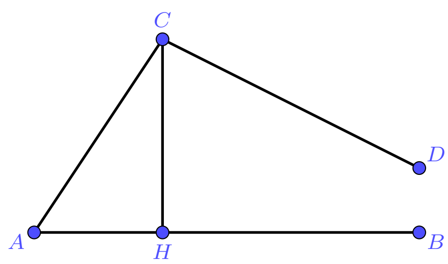
$$BAC + ACH \geq \text{suora kulma.} \tag{3.1}$$

Toisaalta oletettiin, että $BAC + ACD < 2$ suoraa kulmaa, joka voidaan esittämällä kulma ACD kulmien ACH ja HCD avulla muuttaa muotoon

$$BAC + ACH + HCD < 2 \text{ suoraa kulmaa.} \tag{3.2}$$

Sijoittamalla yhtälö (3.1) yhtälöön (3.2) saadaan, että $HCD <$ suora kulma ja täten kulman HCD täytyy olla terävä.

Tällöin lauseesta 3.10 seuraa, että suorat AB ja CD leikkaavat. □



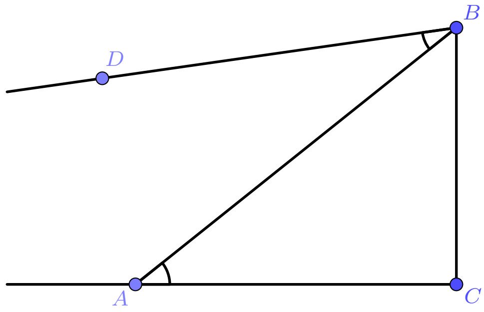
Kuva 3.15: Lauseen 3.11 todistusta havainnollistava kuvio.

Tämän tuloksen ansiosta Saccheri pystyi toteamaan, että hypoteesi tylpästä kulmasta on virheellinen. Itse asiassa lause 3.11 osoittaa, että Eukleideen viides postulaatti pätee tässä hypoteesissa ja tämän seurauksena myös tästä postulaatista johdetut tavanomaiset lauseet pätevät. Täten normaalin nelikulmion kulmien summa on yhtä suurta kuin neljä suoraa kulmaa, joten hypoteesi suorista kulmista on totta.

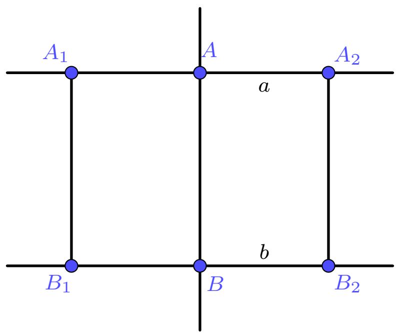
Saccheri kuitenkin haluaa todistaa, että viides postulaatti on totta kaikissa tapauksissa. Täten hän ryhtyy kumoamaan hypoteesia terävästä kulmasta.

Lause 3.12. *Terävän kulman hypoteesin tilanteessa, kun suora on annettu, voidaan sille piirtää normaali ja sitä terävässä kulmassa leikkaava suora, jotka eivät leikkaa toisiaan.*

Todistus. Olkoon pisteet ja suorat kuten kuvassa 3.16. Kolmion $\triangle ABC$ kulma C on suora kulma. Jana BD on piirretty siten, että kulmat ABD ja BAC ovat yhtä suuret. Tällöin vuorokulmalauseen nojalla suorat CA ja BD eivät leikkaa ja toinen suorista CA ja BD muodostaa suoran kulman janan BC kanssa ja terävän kulman hypoteesin nojalla kulma CBD on terävä kulma. □



Kuva 3.16: Lauseen 3.12 todistusta havainnollistava kuvio.



Kuva 3.17: Saccherin kulmatilanteet

Tutkitaan jatkossa ainoastaan terävän kulman hypoteesia.

Olkoon pisteet ja suorat kuten kuvassa 3.17 niin, että suorat a ja b eivät leikkaa toisiaan ja janat A_1B_1 ja A_2B_2 ovat kohtisuorassa suoran b kanssa.

Tällöin nelikulmion $\square B_1B_2A_2A_1$ kulmille A_1 ja A_2 pätee, että

1. Toinen on suora ja toinen terävä kulma.

2. Molemmat ovat teräviä kulmia.

3. Toinen on terävä ja toinen tylppä kulma.

Tapauksessa 1 suorilla a ja b on jo olemassa yhteinen normaali.

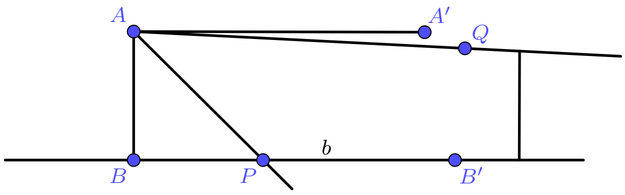
Tapauksessa 2 yhteisen normaalin olemassaolo pystytään todistamaan jatkuvuuden avulla seuraavasti. Jos janaa A_1B_1 liikutetaan jatkuvasti kohti janaa A_2B_2 siten, että se pysyy suoran b normaalina, niin kulma $B_1A_1A_2$ on aluksi terävä kulma, mutta kasvaa kunnes se on tylppä kulma. Tällöin pisteiden B_1 ja B_2 välillä on oltava piste jossa kulma $B_1A_1A_2$ on suora kulma jatkuvuusperiaatteen nojalla. Olkoon tämä kohta piste B ja tällöin kulma BAA_2 on suora kulma ja jana AB on suorien a ja b yhteinen normaali.

Tapauksessa 3 pätee, että jos suorilla a ja b on yhteinen normaali, niin se ei voi sijaita pisteiden B_1 ja B_2 välissä.

Selvästi suorilla ei ole yhteistä normaalia täsmälleen silloin, kun nelikulmion $\square B_1B_rA_rA_1$ kulma A_1 on terävä kulma ja kun valitaan mikä tahansa piste A_r pisteen A_2 kanssa samalta puolelta, niin kulma A_r on tylppä kulma.

Kun oletetaan, että samassa tasossa on olemassa kaksi suoraa jotka eivät leikkaa ja joilla ei ole olemassa yhteistä normaalia, Saccheri todistaa, että nämä suorat lähestyvät jatkuvasti toisiaan ja niiden välinen etäisyys on lopulta pienempää kuin mikä tahansa valittu etäisyys. Saccheri todistaa siis asymptoottien olemassaolon.

Lause 3.13. *Jos samassa tasossa on olemassa kaksi suoraa, jotka eivät leikkaa ja niillä ei ole yhteistä normaalia, niin suorien on oltava toistensa asymptootteja, eli suorat lähestyvät toisiaan äärettömyydessä, mutta eivät leikkaa.*



Kuva 3.18: Lauseen 3.13 todistusta havainnollistava kuvio.

Todistus. Samassa tasossa suoran b kanssa olevien saman pisteen A kautta kulkevien suorien joukossa on olemassa suoria, jotka leikkaavat suoran b kuten suoran b normaali AB, ja suoria, joilla on suoran b kanssa yhteinen normaali kuten AA'.

Jos suora AP leikkaa suoran b, niin kaikki muut pisteen A kautta kulkevat suorat, jotka muodostavat pienemmän kulman kuin terävä kulma BAP, leikkaavat myös suoran b. Toisaalta jos suoran AA' kanssa eri suoralla AQ on suoran b kanssa yhteinen normaali, niin jokaisella suoralla, joka muodostaa janan AB kanssa suuremman terävän kulman kuin BAQ, on yhteinen normaali suoran b kanssa.

On myös selvää, että pisteen A kautta kulkevien suorien joukossa, jotka leikkaavat suoran b ja jotka ovat suorien AB ja AA' välissä, ei ole olemassa viimeistä suoraa joka leikkaisi suoran b. On siis olemassa jokin yläraja, AX, joka sijaitsee jossakin kulman QAP sisäpuolella. Tässä ylärajassa kulma BAP on niin suuri, että suoran AP kaltaiset suorat eivät enää leikkaa suoraa b. □

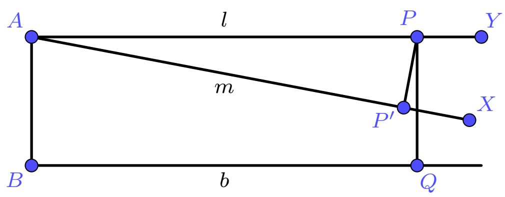
Tämän jälkeen Saccheri todistaa, että jos aloitetaan suorasta AA' ja jatketaan pisteen A kautta kulkevien suorien joukossa vastakkaiseen suuntaan kuin lauseen 3.13 todistuksessa, niin emme löydä viimeistä suoraa niiden suorien joukosta joilla on yhteinen normaali suoran b kanssa. Kulmassa BAQ, jossa kyljellä AQ on yhteinen normaali suoran b kanssa, on olemassa alaraja kulma BAY, jossa kylki AY ei leikkaa suoraa b ja sillä ei ole sen kanssa yhteistä normaalia. Tästä seuraa, että suora AY on suoran b asymptootti.

Edelleen Saccheri todistaa, että suorat AX ja AY yhtyvät.

Lause 3.14. *Kulman BAP yläraja AX ja kulman BAQ alaraja AY yhtyvät.*

Hänen todistuksensa riippuu pisteistä äärettömyydessä ja hyödyntääkin seuraava lausetta, jonka perustelu ohitetaan tässä tutkielmassa.

Lause 3.15. *Suoran ja terävän kulman hypoteesien nojalla kulman toisella kyljellä sijaitsevan pisteen etäisyys toisesta kyljestä kasvaa rajatta, kun piste liikkuu kohti äärettömyyttä.*



Kuva 3.19: Lauseen 3.14 todistusta havainnollistava kuvio.

Lauseen 3.14 todistus. Jos suora AX ei ole sama suoran AY kanssa, niin voimme lauseen 3.15 perusteella valita pisteen P suoralta AY siten, että suoran AX normaali PP' täyttää seuraavan epäyhtälön

$$PP' > AB. \tag{3.3}$$

Toisaalta jos PQ on suoran b normaali pisteen P kautta, niin asymptoottisten suorien ominaisuuden, joka liittyy edellisen sivun pohdintoihin, nojalla

$$AB > PQ.$$

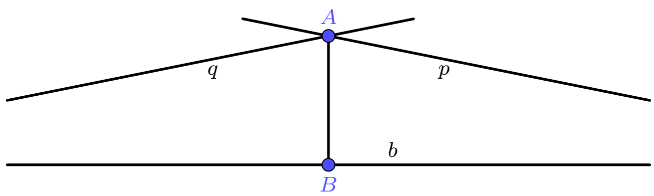
Mutta koska piste P on eri puolella suoraa AX kuin b, niin

$$PQ > PP'.$$

Yhdistämällä edelliset epäyhtälöt saadaan, että $AB > PP'$, mikä on ristiriidassa epäyhtälön (3.3) kanssa, joten suorat AX ja AY ovat sama suora. □

Edelliset tulokset voidaan yhdistää seuraavaan lauseeseen.

Lause 3.16. *Terävän kulman hypoteesin nojalla pisteen A kautta kulkevien suorien joukossa on olemassa suoran b kanssa asymptoottiset suorat p ja q toinen oikealle ja toinen vasemmalle, jotka jakavat pisteen A kautta kulkevien suorien joukon kahteen osaan. Ensimmäinen osa sisältää kaikki ne suorat, jotka leikkaavat suoran b, ja toinen osa sisältää ne suorat, joiden kanssa suoralla b on yhteinen normaali.*



Kuva 3.20: Lauseen 3.16 kuvio.

Tässä vaiheessa Saccheri yrittää tehdä johtopäätöksen luottaen logiikan sijasta intuitioon ja uskoon viidennen postulaatin pätevyydestä. Todistaakseen, että terävän kulman hypoteesi on kerta kaikkiaan väärä, koska se on yhteensopimaton suoran luonteen kanssa Saccheri tukeutuu viiteen lemmaan. Pääasiassa hänen väitteensä on seuraava: Jos terävän kulman hypoteesi olisi totta, niin suorilla p ja q olisi yhteinen normaali suoran b kanssa jossakin äärettömyydessä sijaitsevassa pisteessä, mikä on ristiriidassa suoran luonteen kanssa. Saccherin perustelu siis soveltaa äärellisiä ominaisuuksia äärettömyydessä, eikä se näin ollen ole oikein.

Saccheri ei kuitenkaan ollut tyytyväinen päättelyynsä ja yritti päästä toivottuun todistukseen ottamalla uudelleen käyttöön vanhan idean yhdensuuntaisten suorien välisestä vakioetäisyydestä. Saccherin todistukset eivät kuitenkaan tuottaneet mitään uutta tai tärkeää.

Vaikka hän ei havainnut ristiriitoja terävän kulman hypoteesin seurauksissa, ei voida olla esittämättä kysymystä: eikö voisi olla sellaista geometrisesti loogista järjestelmää, jossa Eukleideen postulaattia ei voida todistaa?

4 Epäeuklidisen geometrian edelläkävijät

Tutkimus yhdensuuntaisista suorista, joka oli jo Saksassa ja Italiassa saanut merkittävää kiinnostusta, alkoi saada mielenkiintoa myös Ranskassa 1700-luvun lopulla.

D'Alemebertin (1717–1783) mielestä yhdensuuntaisten suorien ongelma pystyttäisiin välttämään, jos suora määriteltäisiin kunnolla. Ideana oli määritellä yhdensuuntainen suora kahden pisteen yhdistävänä viivana, kun pisteet ovat samalla puolella ja yhtä etäällä toisesta annetusta suorasta. Ongelmana on kuitenkin todistaa suorien vakioetäisyys kaikkialla.

Kolmioiden yhdenmuotoisuutta hyödynsivät L. N. M. Carnot (1753–1823) ja Laplace (1749–1827) samaan tapaan kuten Wallis käytti omissa todistuksissaan vuonna 1663.

Edellisten geometrikoiden ohella on hyvä mainita J. B. Fourier (1749–1827), joka piti kahden pisteen välistä etäisyyttä ensisijaisena ajatuksena. Fourier käsitteli pisteiden uria samoin tavoin kuin esimerkiksi Gauss, jonka töihin perehdymme myöhemmin. Fourier keskusteli asiasta Mongen (1746–1818) kanssa ja tätä keskustelua voidaankin pitää varhaisimpina asiakirjoina, joissa viitataan epäeuklidiseen geometriaan.

Edellä mainittujen geometrikoiden työt ja ajatukset eivät kuitenkaan vieneet epäeuklidisen geometrian tutkimuksia eteenpäin. Keskitytään seuraavaksi 1700-luvun lopun geometrikoihin, jotka omilla ponnisteluillaan pystyivät edistämään epäeuklidisen geometrian tutkimuksia. Tämä kappale seuraa Roberto Bonolan [1] sekä Grayn kirjojen esityksiä [2].

4.1 Johann Heinrich Lambert

On vaikeaa sanoa, kuinka paljon Saccherin työ vaikutti 1700-luvun matemaatikoihin. On kuitenkin todennäköistä, että ainakin sveitsiläinen matemaatikko Johann Heinrich Lambert (1728–1777) tunsi hänen työnsä, sillä hän viittaa kirjassaan *Theorie der Parallellinien* G. S. Klügelin väitöskirjaan, jossa italialaisen työtä on analysoitu tarkasti. Lambertin kirjan toimittivat J. Bernoulli (1744–1807) ja C. F. Hindenburg (1741–1808) ja se julkaistiin vasta Lambertin kuoleman jälkeen. Lambertin kirjan julkaisun jälkeen Saccherin työ unohdettiin melkein koko 1800-luvun ajaksi, mutta *Theorie der Parallellinien* säilyi ainakin asiantuntijoiden tietoisuudessa [2]. Kirja on jaettu kolmeen eri osaan, josta ensimmäinen osa on luonteeltaan kriittinen ja filosofinen. Se käsittelee viidennestä postulaatista nousevaa kaksitahoista kysymystä: voidaanko se todistaa ainoastaan edeltävien väittämien pohjalta vai tarvitaanko sen todistamiseen mahdollisesti joitakin muita oletuksia.

Toinen osa käsittelee erilaisia yrityksiä, joissa viides postulaatti pelkistetään hyvin yksinkertaisiksi lauseiksi, jotka kuitenkin tarvitsevat myös omat todistuksensa. Kolmas ja tärkein osa sisältää Saccherin töitä muistuttavan tutkimuksen.

Lambertin olennainen pohja tälle tutkimukselle on nelikulmio, jossa on kolme suoraa kulmaa kuten kuvassa 4.1.

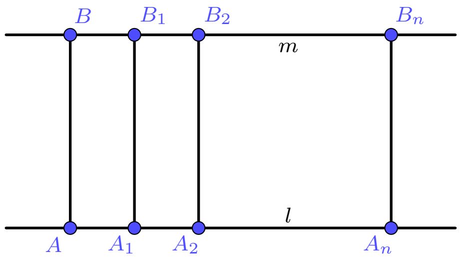
Kuva 4.1: Lambertin nelikulmio.

Nyt neljännestä kulmasta voidaan tehdä kolme eri hypoteesia:

1. Kulma on suora kulma.
2. Kulma on tylppä.
3. Kulma on terävä.

Lambertin nelikulmiosta pystytään muokkaamaan Saccherin nelikulmio peilaamalla se sivujen AC tai AB suhteen kuvan 4.1 tilanteessa. Lambertin nelikulmion tilanteet johtavat samankaltaisiin tilanteisiin kuin Saccherin vastaavissa hypoteeseissa.

Ensimmäinen hypoteesi johtaa helposti euklidiseen järjestelmään. Yrittäessään hylätä toista hypoteesia Lambert vetoaa kuvioon, missä on kaksi suoraa l ja m, jotka ovat kohtisuorassa kolmannen janan AB kanssa kuten kuvassa 4.2. Valitaan suoralta m pisteet $B_1, B_2, \ldots, B_n$ siten, että $BB_1 = B_1B_2 = \ldots = B_nB_{n+1}$ ja piirretään pisteiden $B, B_1, B_2, \ldots, B_n$ kautta suoralle l kohtisuoria janoja AB, A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, A_nB_n, joissa pisteet $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sijaitsevat suoralla l. Lambert todistaa aluksi, että suoran l kanssa kohtisuorat janat $AB, A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ pienenevät jatkuvasti alkaen janasta AB.



Kuva 4.2: Lambertin todistusyritystä havainnollistava kuvio.

Seuraavaksi Lambert osoittaa, että ero janojen A_nB_n ja $A_{n+1}B_{n+1}$ välillä kasvaa jatkuvasti. Täten saamme, että

$$AB - A_nB_n > n(AB - A_1B_1).$$

Nyt Arkhimedeen postulaatin nojalla, jos n valitaan riittävän suureksi, niin tämän epäyhtälön oikeasta puolesta tulee niin suuri kuin haluamme, samaan aikaan kun epäyhtälön vasen puoli on aina pienempää kuin AB. Tämä ristiriita vakuuttaa Lambertin siitä, että toisen hypoteesin on oltava virheellinen. Lambert kuitenkin hyödyntää Arkhimedeen postulaattia muodossa, jossa suoran oletetaan olevan äärettömän pitkä.

Lambert käsittelee kolmannen hypoteesin samaan tapaan kuin toisen hypoteesin mutta olettaa, että janat $AB, A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ kasvavat jatkuvasti. Hän olettaa myös, että kunkin janan ja sitä edeltävän janan ero kasvaa jatkuvasti. Lambert ei kuitenkaan saa tällä aikaan ristiriitaa, joten hänen on Saccherin tapaan pakko jatkaa argumenttia pidemmälle. Seuraavaksi Lambert huomaa, että kolmannen hypoteesin kohdalla kolmion kulmien summa on vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. Hän kuitenkin menee pidemmälle kuin Saccheri ja havaitsee, että monikulmion kulmasumma on verrannollinen monikulmion pinta-alaan. Tämän tuloksen saa helpoiten havaitsemalla, että monikulmion pinta-ala ja kulmasumma ovat niiden monikulmioiden pinta-alojen ja kulmien summa, joista kyseessä oleva monikulmio on muodostettu [1].

Toinen merkittävä Lambertin tekemä löytö liittyy geometristen suuruuksien mittaamiseen. Hän huomasi, että jos hypoteesi terävästä kulmasta olisi totta, niin olisi olemassa pituuden absoluuttinen mitta. Selventääksemme tätä havaitaan, että voimme määritellä kulmien suuruuden murto-osina täydestä ympyrästä. Emme kuitenkaan voi määritellä pituuksia, jos emme aiemmin ole sopineet yksiköstä. Lambert kuitenkin huomasi, että jokaiseen pituuteen voidaan liittää yksikäsitteinen kulma, joka on tasasivuisen kolmion kulma, johon kyseinen sivu liittyy. Tämä kolmio on yksikäsitteinen, koska terävän kulman hypoteesin perusteella yhdenmuotoiset kolmiot ovat yhteneviä, kuten myös Wallis oli huomannut. Jonkin aikaa Lambert ajatteli, että pituuden absoluuttinen mitta oli vain looginen järjettömyys, mutta lopulta hän päätti, että näin ei ole [2].

Kirjaan *Theorie der Parallellinien* sisältyy muitakin hyvin mielenkiintoisia seikkoja, esimerkiksi epäeuklidisen tasogeometrian läheinen samankaltaisuus pallogeometrian kanssa, joka pätisi jos toinen hypoteesi olisi voimassa. Lisäksi Lambert huomasi, että pallogeometria on täysin riippumaton paralleeliaksioomasta [1].

Lambert myös huomasi, että epäeuklidisen kolmion, jonka kulmat ovat α, β ja γ, pinta-ala on verrannollinen lukuun:

$$2 \text{ suoraa kulmaa} - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Tuloksena tästä hän päätyy toteamaan, että kolmannen hypoteesin mukainen geometria olisi totta imaginaarisella pallolla. Selittääksemme tätä huomataan, että jos pallon säde on r, niin pallogeometrian perusteiden mukaan kolmion, jonka kulmat ovat α, β ja γ, pinta-ala on

$$r^2(\alpha + \beta + \gamma - 2 \text{ suoraa kulmaa}),$$

ja terävän kulman hypoteesin tapauksessa pinta-alalle esiintyy kaavoja kuten:

$$(ir)^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = -r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = r^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)).$$

Tämän vuoksi Lambert totesi: ”Tästä minun pitäisi melkein päätellä, että kolmas hypoteesi toteutuisi imaginaarisen pallon tapauksessa” [2].

Lambert ei julkaissut tutkimustuloksiaan eikä ilmeisesti muodostanut lopullista kantaansa viidennen postulaatin todistamisen mahdollisuudesta. Hän oli mahdollisesti myös tyytymätön omaan tutkimukseensa, kuten usein käy hyvälle työlle, jota ei voida viedä loppuun asti [2, s. 85].

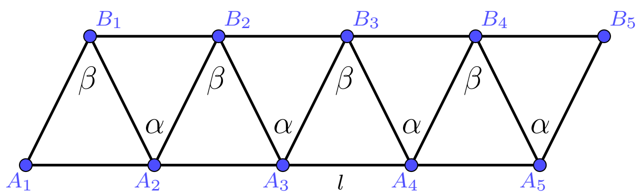
Muutenkin todistusyritysten yleisestä menestyksen puutteesta alkoi 1700-luvulla muodostua ajatus, että olisi tarpeen hyväksyä Eukleideen viides postulaatti tai jokin muu vastaava postulaatti ilman minkäänlaista todistusta [1, s. 50].

4.2 Adrien-Marie Legendre

Edeltävät geometrikot rajoittivat itsensä vain osoittamaan ongelmia ja ilmaisemaan omia mielipiteitään viidennestä postulaatista. Adrien-Marie Legendre (1752-1833), josta Bonola kertoo kirjassaan [1], toisaalta yritti muuttaa sen lauseeksi. Hänen *Elements de Géométrie* -teoksensa eri painoksiin hajallaan olevat tutkimuksensa on koottu yhteen teoksessa *Refléxions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle*, joka siis käsittelee pohdintoja erilaisista tavoista havainnollistaa yhdensuuntaisten suorien teoriaa tai kolmion kulmien summaa koskevaa lauseketta.

Legendren mielenkiintoisimmassa yrityksessä hän lähestyy postulaattia samaan tapaan kuten Saccheri. Hän tutkii kolmion kulmien summia ja haluaisi todistaa, että kolmion kulmien summa on yhtä suurta kuin kaksi suoraa kulmaa. Tätä tarkoitusta silmällä pitäen hän onnistuu työnsä alussa hylkäämään Saccherin hypoteesin tylpästä kulmasta, sillä hän huomasi, että kolmion kulmien summa ei voi olla yli kahta suoraa kulmaa.

Lause 4.1 (Saccheri-Legendren lause)**.** *Minkä tahansa kolmion kulmien summa on pienempää tai yhtä suurta kuin kaksi suoraa kulmaa.*



Kuva 4.3: Lauseen 4.1 todistusta havainnollistava kuvio.

Todistus. Muodostakoon yhtenevät janat $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ suoran l. Olkoon suoran l samalla puolella yhteneviä kolmioita joiden kanta on suoralla l. Olkoon kolmioiden kolmannet kulmat pisteissä B_1, B_2, $\ldots$, B_n. Janat B_1B_2, B_2B_3, $\ldots$, $B_{n-1}B_n$ yhdistävät pisteet sekä ovat yhteneviä ja niitä voidaan pitää yhtenevien kolmioiden $\triangle B_1A_2B_2, \triangle B_2A_3B_3, \ldots, \triangle B_{n-1}A_nB_n$ kantoina. Kuvio täydennetään valmiiksi lisäämällä kolmio $\triangle B_nA_{n+1}B_{n+1}$, joka on yhtenevä kaikkien muiden kolmioiden kanssa. Olkoon β kulma $A_1B_1A_2$ ja α kulma $B_1A_2B_2$. Koska kolmiot ovat yhteneviä, niin kaikille kulmille B_n ja A_n pätee, että $B_n = \beta$ ja $A_n = \alpha$, kaikilla n.

Tällöin $\beta \leq \alpha$, sillä jos $\beta > \alpha$ niin vertaamalla kolmioita $\triangle A_1B_1A_2$ ja $\triangle B_1A_2B_2$, joilla on kaksi yhtenevää sivua, saisimme, että $A_1A_2 > B_1B_2$. Näytetään, että tämä johtaa ristiriitaan:

Koska murtoviiva $A_1B_1B_2 \ldots B_{n+1}A_{n+1}$ on janaa $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ pidempi, niin

$$A_1B_1 + n \cdot B_1B_2 + B_{n+1}A_{n+1} > n \cdot A_1A_2,$$

jolloin

$$2 \cdot A_1B_1 > n(A_1A_2 - B_1B_2).$$

Mutta jos n on tarpeeksi suuri niin syntyy ristiriita Arkhimedeen postulaatin kanssa. Täten jana A_1A_2 ei voi olla pidempi kuin jana B_1B_2 ja kulma β ei voi olla suurempi kuin kulma α. Täten on oltava, että $\beta \leq \alpha$.

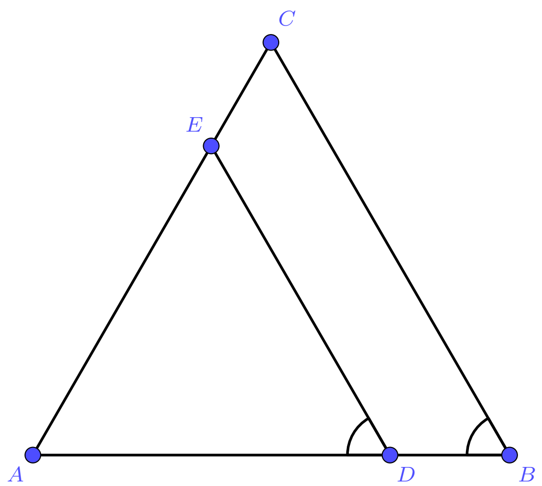
Koska kolmiot $\triangle A_1B_1A_2$ ja $\triangle A_2B_2A_3$ ovat yhtenevät, niin kulmat $B_1A_1A_2$ ja $B_2A_2A_3$ ovat yhtenevät. Tällöin kolmion $\triangle A_1B_1A_2$ kulmasumma on

$$\beta + B_1A_1A_2 + B_1A_2A_1 \leq \alpha + B_2A_2A_3 + B_1A_2A_1 = 2 \text{ suoraa kulmaa.}$$

Tästä seuraa, että kolmion $\triangle A_1B_1A_2$ kulmien summa on pienempää tai yhtä suurta kuin kaksi suoraa kulmaa. $\square$

Lausetta 4.1 kutsutaan yleisesti virheellisin perustein Legendren ensimmäiseksi lauseeksi. Virhe tehdään siinä, että Saccheri oli saavuttanut tämän jo melkein sata vuotta aikaisemmin, kun hän todisti, että hypoteesi tylpästä kulmasta on virheellinen. Seuraavaksi Legendre todisti, että kolmion kulmien summa on yhtä suurta kuin kaksi suoraa kulmaa.

Lause 4.2. *Kolmion kulmien summa on yhtä suurta kuin kaksi suoraa kulmaa.*



Kuva 4.4: Lauseen 4.2 kuva.

Todistusyritys. Oletetaan, että kolmiossa $\triangle ABC$ kulmille pätee

$$BAC + ABC + BCA < 2 \text{ suoraa kulmaa.}$$

Valitaan janalta AB piste D ja janalta AC piste E siten, että kulma ADE on yhtä suuri kulman ABC kanssa. Tällöin Legendren mukaan nelikulmion $\square DBCE$ kulmien summa on aidosti pienempää kuin neljä suoraa kulmaa. Tämän vuoksi on oltava, että kulmille AED ja ACB pätee $AED > ACB$. Kolmion $\triangle ADE$ kulma AED on sivun AD hyvin määritelty funktio. Toisin sanoen janan AD pituus tiedetään, kun tiedämme kulman AED ja vakiokulmien BAC ja ABC suuruudet.

Tulos on Legendren mielestä kuitenkin järjetön, sillä janan pituudella ei ole merkitystä, jos ei tiedetä mihin pituusyksikköön sillä viitataan. Kysymyksen luonne ei viittaa yksikköön millään tapaa.

Tästä syntyy ristiriita ja oletus

$$BAC + ABC + BCA < 2 \text{ suoraa kulmaa}$$

hylätään ja seurauksena saadaan

$$BAC + ABC + BCA = \ 2 \text{ suoraa kulmaa.} \qquad \square$$

Eukleideen postulaatti seuraa tästä yhtäsuuruudesta helposti. Legendren menetelmä perustuu siis Lambertin postulaattiin, joka kiistää absoluuttisen yksikön olemassaolon.

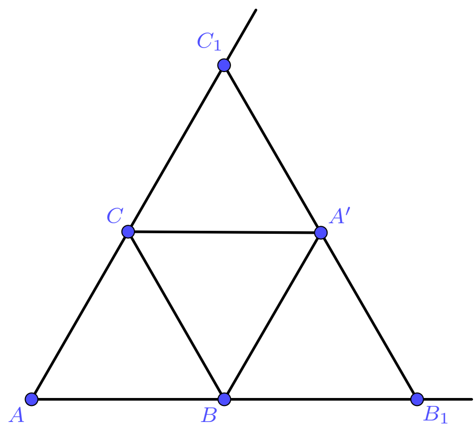
Eräässä toisessa osoituksessa Legendre hyödyntää oletusta: Voimme aina piirtää mistä tahansa kulman sisällä olevasta pisteestä suoran, joka leikkaa kulman molemmat sivut.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kuvan 4.5 mukainen kolmio jossa, jos mahdollista kulmien summa olisi vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. Olkoon α kolmion $\triangle ABC$ defekti eli kulmapoikkeama euklidisen kolmion kulmien summasta eli kahdesta suorasta kulmasta. Tällöin

$$2 \text{ suoraa kulmaa } - BAC - ABC - BCA = \alpha$$

Otetaan piste A', joka on symmetrinen pisteen A kanssa sivun BC suhteen, jolloin uuden kolmion $\triangle BCA'$ defekti on myös α, sillä pisteen A' symmetrisyyden nojalla kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle BCA'$ ovat yhtenevät.

Piirretään edellä esitetyn hypoteesin mukaisesti pisteen A' kautta poikittaissuuntainen suora, joka leikkaa kulman BAC kyljet pisteissä B_1 ja C_1. Kolmion $\triangle AB_1C_1$ defekti on sen osakolmioiden defektien summa. Näin ollen kolmion $\triangle AB_1C_1$ defekti on vähintään 2α.



Kuva 4.5: Todistusta havainnollistava kuvio.

Jos nyt aloitetaan kolmiosta $\triangle AB_1C_1$ ja suoritetaan samat vaiheet, mitä edellä suoritettiin kolmiolle $\triangle ABC$, niin saamme uuden kolmion, jonka defekti on suurempaa kuin 4α.

Kun tämä on suoritettu n kertaa saamme kolmion, jonka defekti on suurempaa kuin $2^n\alpha$.

Kuitenkin, jos n on tarpeeksi suuri niin defektin $2^n\alpha$ täytyy olla suurempaa kuin kaksi suoraa kulmaa, mikä on järjetöntä.

Täten on oltava, että $\alpha = 0$, joten

$$BAC + ABC + BCA = 2 \text{ suoraa kulmaa.} \qquad \square$$

Edellinen todistus perustuu Arkhimedeen aksioomaan. Näytetään seuraavaksi, miten postulaatin käyttö voitaisiin kiertää.

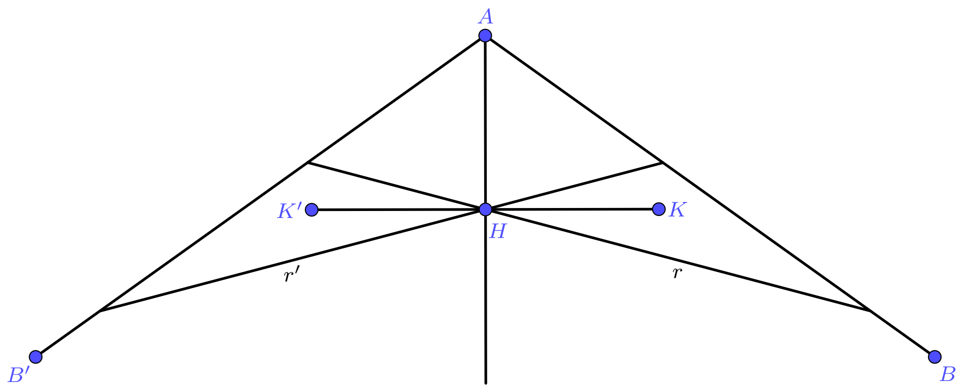
Todistus ilman Arkhimedeen aksioomaa. Olkoot AB ja HK suoria siten, että suora AB muodostaa terävän kulman ja suora HK muodostaa suoran kulman suoran AH kanssa.

Pirretään suoran AB kanssa symmetrinen suora AB' suoran AH suhteen. Pisteen H kautta kulkee Legendren oletuksen nojalla suora r joka leikkaa kulman BAB' molemmat kyljet. Jos suora $r \neq HK$, niin suoran HK suhteen sen kanssa symmetrinen suora r' leikkaa myös kulman BAB' molemmat kyljet. Tästä seuraa, että myös suoran HK on leikattava kulman BAB' molemmat kyljet.

Näin ollen suoran AH kanssa kohtisuorassa oleva suora ja sen kanssa terävän kulman muodostava suora leikkaavat aina.

Yleinen paralleeliteoria seuraa tästä tuloksesta ja on oltava, että

$$BAC + ABC + BCA = 2 \text{ suoraa kulmaa.} \qquad \square$$



Kuva 4.6: Todistus ilman Arkhimedeen aksioomaa.

Näiden hyvin monipuolisten tutkimusten avulla Legendre uskoi, että hän oli vihdoin poistanut geometrian perusteita ympäröivät vakavat vaikeudet. Sisällöllisesti Legendre ei kuitenkaan lisännyt mitään oleellisesti uutta hänen edeltäjiensä tuloksiin. Legendren suurin saavutus olikin tyylikäs ja yksinkertainen tapa, jolla hän kirjoitti kaikki tutkimuksensa. Tästä syystä ne saivat laajan lukijakunnan ja auttoivat lisäämään yhdensuuntaisten suorien teorian tutkijoiden määrää.

5 Epäeuklidisen geometrian kehittäjät

Kaksituhatta vuotta hyödyttömiä ponnisteluja ja erityisesti viimeiset epäonnistuneet tutkimukset ja todistusyritykset viidennestä postulaatista vakuuttivat useat 1700- ja 1800-lukujen vaihteessa vaikuttaneet geometrikot siitä, että yhdensuuntaisten suorien teorian lopullinen ratkaiseminen sisälsi ongelman, jolle ei ole ratkaisua [1, s. 64]. Saksassa, jossa kysymystä koskevat kirjoitukset seurasivat tiiviisti toisiaan, tämä näkemys oli jo saanut melko selvän muodon. Tämä tunnistetaan A. G. Kästneristä (1719–1800), joka oli tunnettu yhdensuuntaisten suorien teorian opiskelija ja hänen oppilaastaan G. S. Klügelista (1739–1812), joka kirjoitti arvokasta kritiikkiä tunnetuimmista paralleeliaksiooman todistusyrityksistä.

Työssään Klügel pitää kutakin todistusyritystä riittämättömänä ja ehdottaa, että toisiaan leikkaamattomat suorat voisivat olla erisuuntaisia eli ne eivät olisi vakioetäisyydellä toisistaan. Saccherin ja Lambertin tutkimukset vahvistivat Klügelin mielipiteen, mutta niitä ei voida pitää todisteena siitä, että paralleeliaksioomaa ei voitaisi todistaa [1, s. 50-51]. Lopulta Göttingenin yliopisto julisti virallisesti, että viides postulaatti olisi hyväksyttävä. Tämän näkemyksen esitti A. G. Kästnerin tukemana juuri mainittu Georg Simon Klügel väitöskirjassaan *Conatuum*.

Aihe kuitenkin herätti aina kiinnostusta ja tämä kiinnostus jatkoi edelleen niiden hedelmättömän työn tekemistä, jotka halusivat todistaa viidennen postulaatin. Saccherin ja Lambertin töistä Lobatševskin ja János Bolyain töihin kului vielä yli puoli vuosisataa ja nämä työt johtivat lopulta täysin uuden geometrian löytymiseen! [1, s. 64] Tässä kappaleessa käsitellään Gaussin, Lobatševskin sekä János Bolyain tutkimuksia paralleeliaksioomasta, joita pidetään epäeuklidisen geometrian varsinaisena alkuna. Kappale seuraa Roberto Bonolan [1] kirjan esitystä, mutta sisältää katkelmia myös Greenbergin [3] ja Grayn [2] kirjoista.

5.1 Carl Friedrich Gauss

Carl Friedririch Gauss (1777–1855) oli ensimmäisiä matemaatikkoja, jolla oli selvä näkemys uudesta geometriasta, joka ei tarvinnut paralleeliaksioomaa. Tieto pysyi kuitenkin kolmenkymmenen vuoden ajan piilossa suuren geometrikon mielessä ja se paljastui vasta, kun Lobatševskin ja János Bolyain tutkimukset ilmestyivät. [1, Kappale 3]

Gaussin työtä yhdensuuntaisista suorista pystytään rekonstruoimaan tutkimalla hänen kirjeenvaihtoansa Farkas Bolyain, Olbersin, Schumacherin, Gerlinin sekä Tarinuksen ja Besselin kanssa vuosien 1799 ja 1844 välillä. Aineistoa saadaan myös kahdesta lyhyestä artikkelista saksalaisesta arvosteluja kirjallisuuslehdestä *Gött. gelehrten Anzeigen*, jotka julkaistiin vuosina 1816 ja 1822, sekä hänen muistiinpanoistaan.

Vertailemalla monia Gaussin kirjeiden tekstikatkelmia voidaan arvioida, että Gauss aloitti ”meditointinsa” vuonna 1792.

Gauss yritti todistaa paralleeliaksiooman hyödyntämällä antiteesiä Saccherin ja Lambertin tapaan. Tämä ilmenee hänen kirjeensä osasta Farkas Bolyaille vuonna 1799. ”Olen jo edennyt työssäni. Valitsemani tie ei kuitenkaan johda lainkaan siihen päämäärään, jota etsimme ja jonka vakuutit saavuttaneesi. Se näyttää pikemminkin pakottavan minut epäilemään itse koko geometrian totuutta.

On totta, että olen löytänyt paljon sellaista, jota useimmat ihmiset pitäisivät todisteena, mutta minun silmissäni se todistaa yhtä paljon kuin ei mitään. Jos esimerkiksi voitaisiin osoittaa, että on mahdollista muodostaa suorakulmainen kolmio, jonka pinta-ala on suurempi kuin mikä tahansa tietty pinta-ala, niin olisin valmis todistamaan koko geometrian.

Monet ihmiset varmasti antaisivat tämän pysyä aksioomana, mutta minä en! Olisi todellakin mahdollista, että pinta-ala pysyisi aina tietyn rajan alapuolella, vaikka kolmion kolme kulmapistettä olisivat kuinka kaukana toisistaan.” [1]

Vuonna 1804 Gauss vastasi Farkas Bolyaille tämän *Theoria parallelarum* -teoksesta ja toivoi, että esteet, jotka olivat pysäyttäneet heidän tutkimuksensa, antaisivat vihdoin mahdollisuuden jatkaa ne loppuun.

Kaikesta tästä Stäckel ja Engel, jotka keräsivät ja tarkistivat Gaussin kirjeenvaihtoa aiheeseen liittyen, tulivat siihen johtopäätökseen, että Gauss ei tunnistanut loogisesti perustellun epäeuklidisen geometrian olemassaoloa intuition tai neronleimahduksen kautta; päinvastoin Gauss oli viettänyt tämän aiheen parissa monta vaivalloista tuntia, ennen kuin hän oli voittanut perityt ennakkoluulot sitä kohtaan.

Tiesikö Gauss tutkimustensa alussa Saccherin ja Lambertin teksteistä? Miten ne vaikuttivat hänen työhönsä? Segre huomauttaa *Congetture* -julkaisussaan, että Gauss sekä Farkas Bolyai opiskelivat Göttingenissä vuosina 1795–1798 ja jälkimmäinen vuosina 1796–1799 ja olivat kiinnostuneita yhdensuuntaisten suorien teoriasta.

Gaussin työn toinen vaihe alkoi vuoden 1813 jälkeen. Tästä saamme tietoa Gaussin omista muistiinpanoista sekä Wachterin lähettämästä kirjeestä Gaussille että Gaussin lähettämistä kirjeistä Gerlinille, Taurinukselle ja Schumacherille.

Nämä asiakirjat todistavat, että toisessa vaiheessa Gauss oli vihdoin päässyt yli epävarmuuksistaan ja jatkoi uuden geometrian perusideoiden kehittämistä. Gauss kutsui uutta geometriaa aluksi anti-euklidiseksi geometriaksi, tämän jälkeen astraaligeometriaksi ja lopulta epäeuklidiseksi geometriaksi.

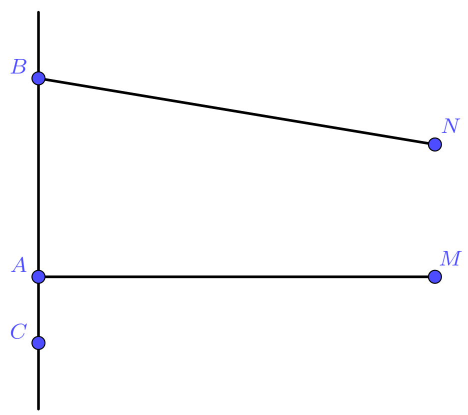
Näin hän tuli vakuuttuneeksi siitä, että epäeuklidinen geometria ei sinänsä sisältänyt ristiriitoja, vaikka ensi näkemältä jotkin sen tuloksista näyttivätkin paradokseilta.

Hän ei kuitenkaan antanut mieleipiteitänsä koskevien huhujen levitä ulkomaille, sillä Gauss uskoi, että hänet ymmärrettäisiin väärin. Gauss paljasti vain muutamalle läheiselle ystävälleen työstään. Kun olosuhteet lopulta pakottivat Gaussin kirjoittamaan Taurinukselle hän aneli, että Taurinus pysyisi hiljaa sisällöistä mitä hän kertoi.

Gaussin papereiden joukosta löytyneet muistiinpanot sisältävät kaksi lyhyttä yhteenvetoa uudesta yhdensuuntaisten suorien teoriasta ja ne luultavasti kuuluvat suunniteltuun epäeuklidisen geometrian selostukseen, josta hän kirjoitti Schumacherille: "parin viimeisen viikon aikana olen alkanut kirjoittaa ylös pohdiskelujani, jotka ovat jo lähes 40 vuotta vanhoja. En ole koskaan kirjoittanut näitä, joten olen joutunut kolme tai neljä kertaa käymään koko asian uudelleen läpi päässäni. Toivoin myös, että se ei häviäisi kanssani." [1, s. 67]

Gaussin määriteli yhdensuuntaiset suorat seuraavasti:

Määritelmä 5.1 (Gaussin määritelmä yhdensuuntaisille suorille)**.** Jos samassa tasossa olevat suorat AM ja BN eivät leikkaa toisiaan, mutta jokainen suorien AM ja AB välinen pisteen A kautta kulkeva suora leikkaa suoran BN niin sanotaan, että suorat AM ja BN ovat yhdensuuntaiset.



Kuva 5.1: Gaussin yhdensuuntaisuutta havainnollistava kuvio.

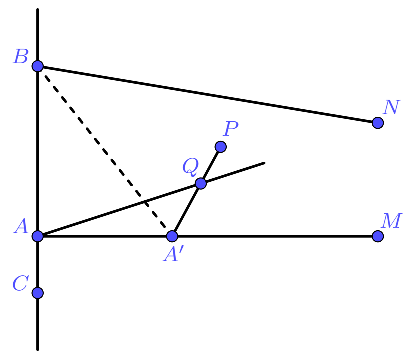
Gauss olettaa, että pisteen A kautta kulkee suora, joka lähtee liikkeelle samasta asemasta, jossa suora AB on. Tämän jälkeen suora alkaa kiertyä pisteen A ympäri sitä kautta, missä suora BN on, kunnes se saavuttaa suoran AC kuten kuvassa 5.1. Aluksi tämä suora leikkaa suoran BN, mutta lopullisessa tilanteessa se ei enää leikkaa suoraa BN. Täten voi olla yksi ja vain yksi kohta, joka erottaa suoran BN leikkaavat suorat niistä suorista, jotka eivät leikkaa suoraa BN. Tämän suoran täytyy olla ensimmäinen niistä suorista, jotka eivät leikkaa suoraa BN ja täten määritelmän nojalla kyseessä oleva suora on yhdensuuntainen suora AM; koska ei voi olla mitään viimeistä suoraa niiden suorien joukossa, jotka leikkaavat suoraa BN, kuten jo Saccheri oli huomannut.

On syytä huomata, miten tämä määritelmä eroaa Eukleideen määritelmästä. Jos Eukleideen postulaatti hylättäisiin, voisi olla olemassa useita eri suoria pisteen A kautta, jotka on piirretty samaan suuntaan kuin suora BN mutta jotka eivät kuitenkaan leikkaisi sen kanssa. Eukleideen määritelmän nojalla kaikki nämä suorat olisivat yhdensuuntaisia suoran BN kanssa. Gaussin määritelmän nojalla vain ensimmäinen näistä suorista olisi yhdensuuntainen suoran BN kanssa.

Jatkaessaan argumenttiaan Gauss huomauttaa seuraavaksi, että hänen määritelmässään oletetaan suorien AM ja BN alkupisteet, vaikka suorien oletetaan jatkuvan rajoittamattomasti suorien AM ja BN suuntiin.

Tämän jälkeen Gauss lähti todistamaan seuraavaa lausetta.

Lause 5.2. *Suoran AM yhdensuuntaisuus suoran BN kanssa on riippumaton pisteistä A ja B.*



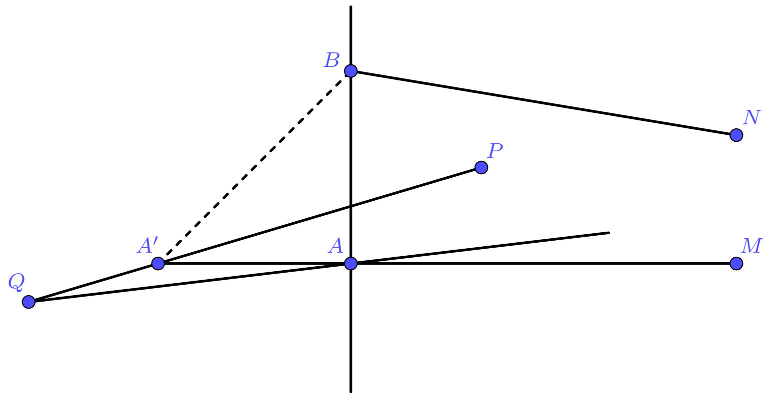
Kuva 5.2: Lauseen 5.2 tapaus 1.

Tapaus 1. On selvää, että saisimme saman yhdensuuntaisen suoran AM, jos piste A olisi edelleen kiinteä ja ottaisimme pisteen B sijasta toisen pisteen B' suoralta BN.

On vielä osoitettava, että jos suora AM on yhdensuuntainen suoran BN kanssa piirrettynä pisteen A kautta, niin se on myös yhdensuuntainen suoran BN kanssa vaikka valittaisiin mikä tahansa toinen alkupiste suoralta AM.

Pisteen A sijasta valitaan piste A', joka on puolisuoralla AM ja pirretään pisteen A' kautta suorien BN ja $A'M$ välille suora $A'P$ mihin tahansa suuntaan kunhan se on suorien $A'B$ ja $A'M$ välillä kuten kuvassa 5.2.

Valitaan piste Q suoralta $A'P$ siten, että piste Q on pisteiden A' ja P välissä ja piirretään suora AQ. Tällöin määritelmän nojalla suora AQ leikkaa suoraa BN esimerkiksi pisteessä S. Tällöin myös suoran QP on leikattava suora BN, sillä se leikkaa kolmion $\triangle ABS$ sivua AS ja ei voi leikata sivua AB, joten se leikkaa sivua BS, joka on osa suoraa BN. Tällöin suora $A'M$ on ensimmäinen suora, joka ei leikkaa suoraa BN ja suora $A'M$ on yhdensuuntainen suoran BN kanssa.



Kuva 5.3: Lauseen 5.2 tapaus 2.

Tapaus 2. Valitaan jälleen piste A', mutta puolisuoralta, joka on vastakkaissuuntainen puolisuoran AM kanssa kuten kuvassa 5.3.

Valitaan piste P suorien $A'B$ ja $A'M$ väliltä ja piirretään suora $A'P$. Valitaan mikä tahansa piste Q niin, että A' on pisteiden P ja Q välissä. Tällöin määritelmän nojalla suora QA leikkaa suoraa BN esimerkiksi pisteessä R. Täten jana $A'P$ on suljetun nelikulmion $\square A'ARB$ sisäpuolella ja tällöin suora $A'P$ leikkaa joko sivua AR tai BR. Ainoa mahdollisuus on, että suora

$A'P$ leikkaa sivua BR, joka on osa suoraa BN.

Siispä suora $A'M$ on yhdensuuntainen suoran BN kanssa määritelmän 5.1 nojalla. □

Gauss todistaa seuraavaksi yhdensuuntaisuuden symmetrisyyden.

Lause 5.3. *Jos suora AM on yhdensuuntainen suoran BN kanssa, niin suora BN on yhdensuuntainen suoran AM kanssa.*

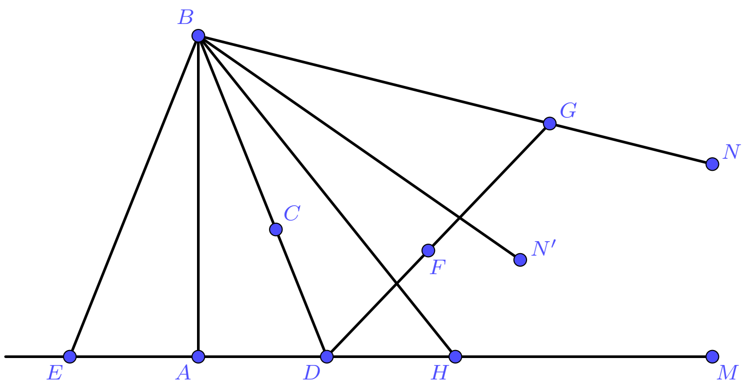
Todistus. Piirretään mistä tahansa pisteestä B suoralle BN suora AB, joka on kohtisuorassa suoran AM kanssa. Piirretään pisteestä B suorien BA ja BN väliin suora BN'.

Valitaan piste C, joka on samalla puolella suoraa AB kuin piste N siten, että kulmille ABC ja $N'BN$ pätee

$$ABC = \tfrac{1}{2}\, N'BN.$$

Tällöin on olemassa kaksi eri mahdollista tilannetta:

1. Suora BC leikkaa suoran AM.
2. Suora BC ei leikkaa suoraa AM.



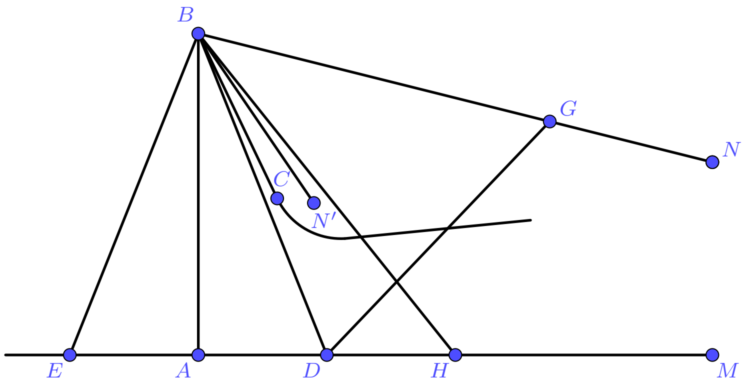
Kuva 5.4: Lauseen 5.3 todistuksen tapaus 1.

Tapaus 1. Leikatkoon suora BC suoran AM pisteessä D ja valitaan piste E suoralta AM siten, että $AE = AD$ ja piirretään suora BE. Olkoon kulmat BDF ja BED yhtä suuret.

Koska suora AM on yhdensuuntainen suoran BN kanssa niin suoran DF täytyy leikata suoraa BN esimerkiksi pisteessä G. Valitaan piste H puolisuoralta EM siten, että jana EH on yhtä pitkä janan DG kanssa.

Nyt kolmioiden $\triangle BEH$ ja $\triangle BDG$ kulmille EBH ja DBG pätee, että $EBH = DBG$. Tällöin myös kulmille EBD ja HBG pätee, että $EBD = HBG$. Mutta nyt kulmille EBD ja $N'BN$ pätee pisteen C valinnan nojalla, että $EBD = N'BN$ ja tällöin suorat BN' ja BH ovat sama suora, jolloin suora BN' leikkaa suoran AM pisteessä H.

Kuitenkin suora BN' on mikä tahansa suora pisteen B kautta suorien BA ja BN välissä. Tällöin suoran BN on oltava yhdensuuntainen suoran AM kanssa.



Kuva 5.5: Lauseen 5.3 todistuksen tapaus 2.

Tapaus 2. Olkoon D mikä tahansa piste suoralla AM. Nyt samoin perusteltuna kuin tapauksessa 1 kulmille EBD ja GBH pätee, että $EBD = GBH$.

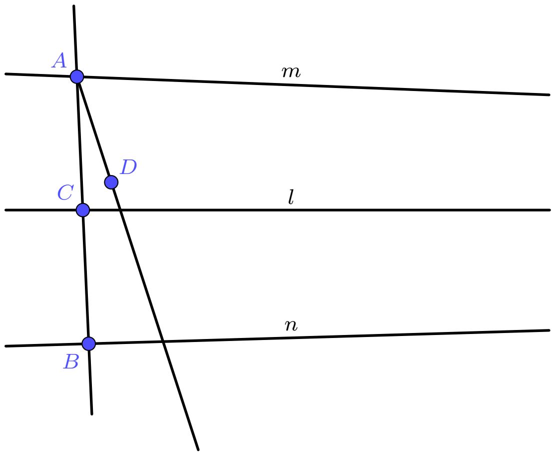
Mutta kulmille ABD ja ABC pätee, että $ABD < ABC$, jolloin kulmille EBD ja $N'BN$ pätee, että $EBD < N'BN$ ja tämän takia kulmille GBH ja $N'BN$ pätee, että $GBH < N'BN$. Tällöin suoran BN' on leikattava suoraa AM.

Suora BN' on kuitenkin mikä tahansa suora pisteen B kautta suorien BA ja BN välissä, jolloin suora BN on yhdensuuntainen suoran AM kanssa.

Olemme nyt todistaneet tapauksissa yksi ja kaksi, että jos suora AM on yhdensuuntainen suoran BN kanssa, niin suora BN on yhdensuuntainen suoran AM kanssa. $\square$

Seuraava lause, jota Gauss lähti todistamaan, kuuluu seuraavasti:

Lause 5.4. *Jos suora l on yhdensuuntainen suorien m ja n kanssa, niin suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset.*

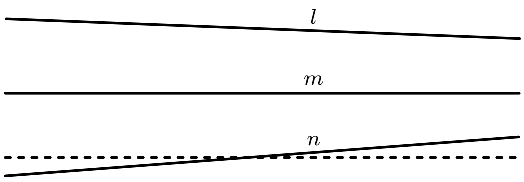


Kuva 5.6: Lauseen 5.4 todistuksen tapaus 1.

Tapaus 1. Olkoon suora l suorien m ja n välissä. Olkoon piste A suoralla m ja piste B suoralla n ja piirretään suora AB. Koska suora l on suorien m ja n välissä niin leikatkoon suora AB sitä pisteessä C.

Piirretään pisteen A kautta suora AD siten, että se on suorien AB ja m välissä. Tällöin sen on leikattava suora l ja jos suoraa AD jatketaan tarpeeksi se leikkaa myös suoran n.

Koska tämä pätee mille tahansa suoran AD kaltaiselle suoralle, niin suora m on yhdensuuntainen suoran n kanssa.



Kuva 5.7: Lauseen 5.4 todistuksen tapaus 2.

Tapaus 2. Olkoon nyt suora m suorien l ja n välissä. Jos suora m ei ole yhdensuuntainen suoran n kanssa niin minkä tahansa satunnaisesti valitun suoralla n olevan pisteen kautta voidaan piirtää suorasta n poikkeava suora, joka on yhdensuuntainen suoran m kanssa.

Nyt tapauksen yksi nojalla myös tämä suora on yhdensuuntainen suoran l kanssa mikä on järjetöntä. $\square$

Tämä lyhyt muistiinpano yhdensuuntaisuudesta päättyy lauseeseen, jossa Gauss väittää, että

Lause 5.5. *Jos kaksi puolisuoraa AM ja BN ovat yhdensuuntaiset, niin nämä puolisuorat eivät leikkaa jos niitä jatketaan vastakkaisiin suuntiin.*

Tästä kaikesta käy ilmi, että Gaussin yhdensuuntaisuus tarkoittaa yhdensuuntaisuutta tietyssä mielessä. Hänen määritelmänsä yhdensuuntaisuudesta koskee puolisuoraa, joka on piirretty pisteestä A poikittaisen suoran AB tietylle puolelle; esimerkiksi oikealle piirretty säde, joten voimme puhua suorasta AM suoran BN oikealle suuntautuvana yhdensuuntaisena suorana. Yhdensuuntainen suora suoralle BN pisteestä A piirrettynä vasemmalle puolelle ei välttämättä ole suora AM. Jos näin olisi, saisimme Eukleideen hypoteesin.

Lauseen 5.4 tilanteessa kaikki suorat ovat yhdensuuntaisia samassa mielessä eli jonkin niitä leikkaavan suoran vasemmalla tai oikealla puolella.

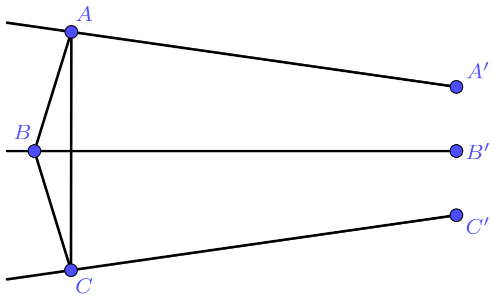
Toisessa yhdensuuntaisuutta käsittelevässä muistiossaan Gauss käsittelee samaa asiaa, mutta lisää ajatuksen toisiaan vastaavista pisteistä kahdella yhdensuuntaisella suoralla AA' ja BB'.

Määritelmä 5.6. Kahden pisteen A ja B sanotaan vastaavan toisiaan, kun suora AB muodostaa yhtä suuret sisäkulmat samalla puolella olevien yhdensuuntaisten suorien kanssa.

Näihin toisiaan vastaaviin pisteisiin liittyen Gauss esittää seuraavat lauseet:

Lause 5.7. *Jos pisteet A ja B ovat kaksi toisiaan vastaavaa pistettä kahdella yhdensuuntaisella suoralla ja M on janan AB keskipiste, niin suoraa AB vastaan kohtisuorassa oleva suora MN on yhdensuuntainen näiden kahden suoran kanssa ja jokainen piste, joka on samalla puolella suoraa MN kuin piste A, on lähempänä pistettä A kuin pistettä B.*

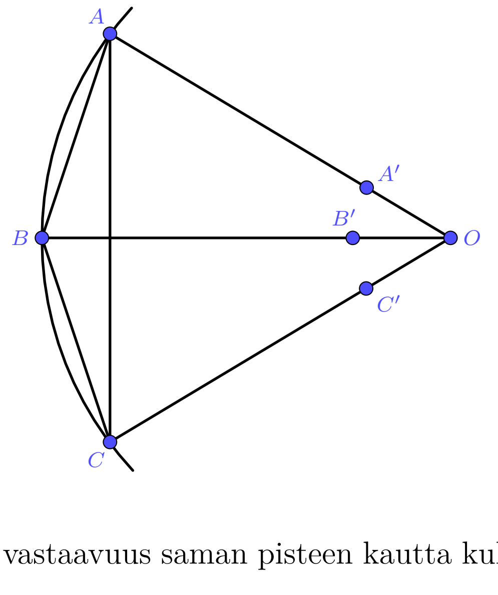
Lause 5.8. *Jos pisteet A ja B ovat kaksi toisiaan vastaavaa pistettä yhdensuuntaisilla suorilla m ja n sekä pisteet A' ja B' ovat kaksi muuta toisiaan vastaavaa pistettä samoilla suorilla, niin $AA' = BB'$ ja päinvastoin.*



Kuva 5.8: Määritelmän 5.6 kuvio.

Lause 5.9. *Jos pisteet A, B ja C ovat kolme eri pistettä yhdensuuntaisilla suorilla l, m ja n siten, että pisteet A ja B sekä B ja C vastaavat toisiaan, niin myös pisteet A ja C vastaavat toisiaan.*

Kun toisiaan vastaavien pisteiden ajatus yhdistetään kolmeen saman pisteen O kautta kulkevaan suoraan kuten kuvassa 5.9, voidaan ympyrä määritellä niiden pisteiden uraksi, jotka vastaavat pisteen O kautta kulkevilla suorilla toisiaan.



Kuva 5.9: Pisteiden vastaavuus saman pisteen kautta kulkevien suorien suhteen.

Tämä käyrä pystytään konstruoimaan myös silloin, kun edellä mainitut suorat ovat yhdensuuntaisia. Euklidisessa tapauksessa ura on tällöin suora. Jos Eukleideen hypoteesi unohdetaan, niin kyseessä oleva ura on käyrä, jolla on paljon yhteisiä ominaisuuksia ympyrän kanssa, mutta se ei kuitenkaan ole ympyrä. Jos uralta otetaan mitkä tahansa kolme eri pistettä, niin niiden kautta ei voida piirtää ympyrää. Tätä suoraa voidaan pitää ympyrän rajatapauksena kun ympyrän säde on ääretön. Lobatševskin ja Bolyain epäeuklidisessa geometriassa tämä ura on tärkeässä asemassa ja tapaamme sen sielä nimellä horosykli.

Gaussin ei kuitenkaan tarvinnut saattaa loppuun epäeuklidiseen geometriaan liittyvää työtään, sillä vuonna 1832 hän sai Farkas Bolyain pojan Jánoksen työn kopion absoluuttisesta geometriasta.

Kirjeistä ennen ja jälkeen päivämäärän, jolloin Gauss keskeytti työnsä, tiedämme, että hän oli löytänyt geometriassaan absoluuttisen pituusyksikön ja että hänen kaavoissaan esiintyi vakio k, jonka avulla kaikki epäeuklidisen geometrian ongelmat voitiin Gaussin mukaan ratkaista.

Vuonna 1831 hän käsitteli näitä asioita perusteellisemmin ja antoi r -säteisen ympyrän kehän pituuden muodossa

$$\pi k(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}).$$

Vakion k osalta hän sanoo, että jos haluamme saada uuden geometrian vastaamaan tosiasioita kokemuksesta, meidän on oletettava, että k on äärettömän suuri verrattuna kaikkiin tunnettuihin mittauksiin.

Greenberg [3] ja Gray [2] kertovat vielä Gaussista seuraavasti. On ihmeellistä, että maineestaan huolimatta Gauss pelkäsi julkaista epäeuklidisen geometrian töitään. Hän kirjoitti Besselille vuonna 1829, että hän pelkää ”boiotialaisten ulvontaa”, jos hän julkaisisi vallankumoukselliset löydöksensä. Hän kertoi H. C. Schumacherille, että hänellä oli ”suuri vastenmielisyys sitä kohtaan, että hänet vedettäisiin mukaan minkäänlaiseen polemiikkiin” [1, s. 182]. Gaussin löytämä epäeuklidinen geometria kumosi Kantin näkemyksen, jonka mukaan euklidinen avaruus on luontainen mielemme rakenteessa. Kant ilmoittaa teoksessaan *Puhtaan järjen kritiikki*, että ”Euklidisen avaruuden käsite ei suinkaan ole empiiristä alkuperää, vaan se on ajattelun väistämätön välttämättömyys” [3, s. 182].

Miksi tällä sitten on väliä? Euklidista geometriaa pidettiin antiikin ajoista alkaen fysiikan osana ja ”fysikaaliset teoriat Einsteiniin asti pitivät avaruutta teatterina, näyttämönä, jossa kappaleet liikkuvat ja jota Newton kutsui tunnetusti Jumalan sensoriumiksi” [2, s. 134]. Tämän näyttämön muuttaminen oli merkittävää kuten Einsteinin aikaansaamat vielä syvällisemmät muutokset avaruuden ja ajan käsitteissä. Sillä on merkitystä myös siksi, että se katkaisee arvostetun yhteyden matematiikan ja fysiikan välillä. Jos matematiikkaa ajatellaan loogisten totuuksien kokonaisuutena, jonka keskeisenä osana geometria toimii, niin epäeuklidisen geometrian olemassaolo tarkoittaa, että kaikki puhtaasti looginen matematiikka ei voi olla totta samanaikaisesti. Siitä on siis olemassa ainakin kaksi keskenään ristiriitaista muotoa, joista vain toinen voi olla totta ja sen selvittämiseksi kumpi on totta, tarvitaan empiiristä työtä. Pian se jakautui äärettömän moneen geometriaan ja empiirinen työ oikean löytämiseksi kävi toivottomaksi [2].

Toinen syy miksi Gauss pidätteli julkaisujaan oli, että hän oli perfektionisti. Gauss halusi julkaista vain täydellisiä töitä ja hän ei välttämättä saanut epäeuklidiseen geometriaan liittyviä töitään täysin valmiiksi. Tähän voisi olla syynä se, että hän teki töitä niin monen tieteenhaaran parissa kuten tähtitieteen, maanmittauksen ja fysiikan. Gaussia on kuitenkin kutsuttu ”matemaatikkojen ruhtinaaksi” hänen työnsä laajuuden ja syvyyden vuoksi [3].

5.2 Nikolai Lobatševski

Nikolai Lobatševski (1793–1856) opiskeli matematiikkaa Kazanin yliopistossa Gaussin ystävän J. M. C. Bartelsin (1769–1836) oppilaana. Lobatševski suoritti tutkintonsa vuonna 1813 ja jäi Kazanin yliopistoon ensin avustajaksi ja tämän jälkeen professoriksi. Professorina hän luennoi matematiikan kaikkia eri aloja sekä fysiikkaa ja tähtitiedettä.

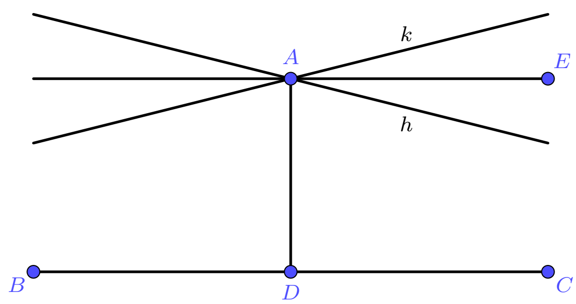
Lobatševski työskenteli Bonolan [1] mukaan yhdensuuntaisten suorien parissa jo vuonna 1815 ja hänen luentomuistiinpanojensa kopioista on löydetty useita yrityksiä viidennen postulaatin todistamiseksi sekä joitakin Legendren töitä muistuttavia tutkimuksia.

Hän kuitenkin ajatteli imaginaarista geometriaa vasta vuoden 1823 jälkeen. Tämä voidaan päätellä hänen alkeellista geometriaa käsittelevän kirjansa käsikirjoituksesta, jossa hän sanoo, että viidennelle postulaatille ei ole olemassa todistusta, mutta tällainen todistus voi olla mahdollinen.

Vuosien 1823 ja 1825 välillä Lobatševski käänsi huomionsa geometriaan, joka on riippumaton Eukleideen viidennestä postulaatista. Hänen töidensä ensimmäinen hedelmä oli teos *Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles* vuodelta 1826. Tässä ”luennossa”, jonka käsikirjoitusta ei ole löydetty, Lobatševski selittää tavallista geometriaa yleisemmän geometrian periaatteet, jossa kolmion kulmien summa on pienempää kuin kaksi suoraa kulmaa.

Myöhemmin vuosien 1829 ja 1830 välillä hän julkaisi tutkielman *On the principles of Geometry*, joka sisältää edellisen ”luennon” keskeiset osat sekä uuden teorian lisäsovelluksia matemaattisessa analyysissä. Peräkkäin ilmestyivät myös teokset *Imaginary Geometry*, *New Principles of Geometry, with a Complete theory of Parallels*, *the Applications of the Imaginary Geometry to Some Integrals*, *Géométrie Imaginaire* ja vuonna 1840 lyhyt saksankielinen kirja *Geometrische Untersuchungen sur Theorie der Parallellinien*, joka sisältää yhteenvedon hänen töistään ja jonka tarkoituksena oli kiinnittää muiden matemaatikoiden huomio hänen tutkimuksiinsa. Viimeisimmän teoksensa hän saneli ja julkaisi vuonna 1855, vuosi ennen kuolemaansa ollessaan jo sokea. Teos sisälsi venäjän sekä ranskan kielisen täydellisen selostuksen hänen geometriajärjestelmästään otsikolla *Pangréométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles.*

Esitellään seuraavaksi menetelmä, jota Lobatševski noudatti imaginaarigeometrian tai pangeometrian rakentamisessa vuonna 1840 ilmestyneessä teoksessa *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.*



Kuva 5.10: Lobatševskin yhdensuuntaisuus

Teoksessaan Lobatševski esittää ensinnäkin joukon paralleeliteoriasta riippumattomia lauseita. Tämän jälkeen hän tarkastelee niiden suorien joukkoa, joiden yhteinen leikkauspiste on A, sekä tämän pisteen kanssa samassa tasossa olevaa suoraa BC, joka ei kulje pisteen A kautta. Olkoon suora AD kohtisuorassa suoran BC kanssa, sekä suora AE kohtisuorassa suoran AD kanssa. Euklidisessa geometriassa suora AE on ainoa suora, joka on yhdensuuntainen suoran BC kanssa. Lobatševskin geometriassa on kuitenkin olemassa muitakin suoria, jotka kulkevat pisteen A kautta eivätkä leikkaa suoraa BC. Suorat, jotka eivät leikkaa suoraa BC, ovat erotettuna leikkaavista suorista suorien h ja k avulla, jotka eivät myöskään leikkaa suoraa BC. Itse asiassa Lobatševskin yhdensuuntaiset suorat h ja k ovat täsmälleen Gaussin määritelmän 5.1 mukaiset yhdensuuntaiset suorat. Nyt siis kuten kuvassa 5.10 suora h on suoran BC kanssa yhdensuuntainen suoran AD oikealla puolella ja suora k vasemmalla puolella. Kulma, jonka suoran BC normaali AD

muodostaa yhden yhdensuuntaisen suoran kanssa, on pituuden AD yhdensuuntaisuuskulma. Lobatševski käyttää symbolia $\Pi(a)$ merkitäkseen yhdensuuntaisuuskulmaa, joka vastaa pituutta a. Euklidisessa geometriassa tämän kulman suuruus on aina $90°$. Lobatševskin geometriassa $\Pi(a)$ on pituuden a tietty funktio, joka lähestyy $90°$, kun pituus a lähestyy nollaa, ja kun a kasvaa rajatta, niin $\Pi(a)$ lähestyy nollaa.

Yhdensuuntaisten suorien määritelmästä Lobatševski päättelee seuraavaksi niiden tärkeimmät ominaisuudet.

Lause 5.10. *Jos suora AE on yhdensuuntainen suoran BC kanssa pisteessä A, niin suora AE on yhdensuuntainen suoran BC kanssa siihen suuntaan jokaisessa pisteessä, jotka ovat suoralla AE.*

Lause 5.11. *Jos suora AE on yhdensuuntainen suoran BC kanssa niin suora BC on yhdensuuntainen suoran AE kanssa.*

Lause 5.12. *Jos kaksi suoraa ovat yhdensuuntaisia kolmannen suoran kanssa, niin nämä kaksi suoraa ovat myös keskenään yhdensuuntaiset.*

Lause 5.13. *Jos suorat AE ja BC ovat yhdensuuntaiset, niin suora AE on asymptoottinen suoran BC kanssa.*

Nämä tulokset ovat siis hyvin samankaltaisia kuin Gaussin saamat tulokset ja asymptoottisuus esiintyi jo Saccherilla lausessa 3.13.

Näiden kysymysten käsittelyä edeltää kolmion kulmien summaa koskevia lauseita, jotka ovat vastaavia kuin jo Legendre ja Saccheri esittivät aikoinaan. Ei ole epäilystäkään siitä ettei Lobatševski olisi tuntenut Legendren töitä.

Kuitenkin imaginaarigeometrian tärkein osa on Lobatševskin mukaan trigonometristen kaavojen muodostaminen. Näiden saamiseksi Lobatševski ottaa käyttöön kaksi uutta käsitettä: horosyklin ja horopallon, joita euklidisessa geometriassa vastaa suora sekä taso. Horopallolla, joka koostuu äärettömän monesta horosyklistä, on olemassa tavallista euklidista geometriaa vastaava geometria, jossa horosyklit korvaavat suorat. Näin Lobatševski saa ensimmäisen merkittävän tuloksen: Euklidinen geometria sekä erityisesti normaali tason trigonometria ovat voimassa horopallolla.

Lobatševski käyttää tätä huomattavaa ominaisuutta ja toista koaksiaalisiin horosykleihin liittyvää ominaisuutta johtaessaan uuden taso- ja pallotrigonometrian kaavat. Osoittautuu, että sopivasti tulkittuna uuden pallotrigonometrian kaavat ovat täysin vastaavat kuin normaalissa pallotrigonometriassa.

Lobatševski ilmaisee tulokset seuraavasti: Merkitään kolmion $\triangle ABC$ sivuja a, b, c ja kulmia A, B, C. Olkoon $\Pi(a)$, $\Pi(b)$ ja $\Pi(c)$ yhdensuuntaisuus-kulmia, jotka vastaavat sivuja a, b ja c. Tällöin Lobatševskin peruskaava on

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1. \tag{5.1}$$

Lobatševski johtaa myös kaavan

$$\tan \frac{\Pi(x)}{2} = a^{-x}, \tag{5.2}$$

joka esiintyi itse asiassa jo Taurinuksella hieman eri muodossa.

Vakio a, joka esiintyy kaavassa (5.2), on tuntematon. Lobatševskin mukaan, jos valitsemme sopivan yksikön, voimme valita tuntemattoman a yhtä suureksi kuin e, joka on luonnollisten logaritmien kantaluku. Jos taas haluamme, että Lobatševskin tulos on sopusoinnussa Gaussin epäeuklidisen geometrian kanssa, valitsemme

$$a = e^{\frac{1}{k}},$$

jolloin yhtälö (5.2) voidaan muokata muotoon

$$\tan \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}. \tag{5.3}$$

Lobatševski päätteli kaavasta (5.1) esimerkiksi seuraavia tuloksia:

(a) kun kyseessä ovat sellaiset kolmiot, joiden sivut ovat hyvin pieniä, voimme käyttää tavallisia trigonometrisia kaavoja imaginaarisen trigonometrian kaavoina, sillä korkeamman kertaluvun infinitesimaalit jätetään huomiotta.

(b) Jos sivut a, b ja c korvataan sivuilla ia, ib ja ic, niin imaginaarisen trigonometrian kaavat muuttuvat tavallisen pallotrigonometrian kaavoiksi.

(c) Jos otamme käyttöön kaksi- ja kolmiulotteisen koordinaatiston, joka on samanlainen kuin tavallinen karteesinen koordinaatisto, niin voimme löytää käyrien pituudet, pinta-alat ja kappaleiden tilavuudet analyyttisen geometrian menetelmin.

Miten Lobatševski päätyi tutkimaan yhdensuuntaisten suorien teoriaa ja löytämään imaginaarisen geometrian? On jo mainittu, että Kazanin yliopistossa opiskelleen Lobatševskin opettaja Bartels oli Gaussin ystävä. Jos nyt lisätään se, että Gauss ja Bartels olivat kaksi vuotta yhdessä Braunschweigissa ennen kuin Bartels lähti Kazanin yliopistoon ja tämän jälkeen piti kirjeenvaihtoa Gaussin kanssa syntyy hypoteesi, että Gaussin työt olisivat voineet vaikuttaa Lobatševskin työhön.

Tiedämme myös, että Gauss oli jo ennen vuotta 1807 yrittänyt ratkaista yhdensuuntaisten suorien ongelmaa ja että hänen ponnistelunsa eivät siihen mennessä olleet tuottaneet muuta hedelmää kuin toivon voittaa ne esteet, joihin hänen tutkimuksensa olivat hänet johtaneet. Näin ollen kaikki se, mitä Bartels olisi voinut oppia Gaussilta ennen vuotta 1807, ei olisi voinut vaikuttaa Lobatševskin työhön. Mitä tulee Gaussin myöhempiin näkemyksiin vaikuttaa melko varmalta, että Bartelsilla ei ollut niistä mitään tietoa. Voimme siis olla varmoja, että Gauss ei vaikuttanut Lobatševskin luomaan geometriaan. Muitakin mahdollisia vaikuttajia voitaisiin mainita; Legendren lisäksi esimerkiksi Saccherin ja Lambertin teokset, jotka venäläinen geometrikko saattoi tuntea, joko suoraan tai Klügelin ja Montuclan kautta. Emme kuitenkaan voi luoda lopullista mielipidettä tästä kysymyksestä. Joka tapauksessa joko edeltäjiensä demonstraatioiden epäonnistuminen tai hänen omien aikaisempien tutkimustensa hyödyttömyys saivat Lobatševskin Gaussin tavoin uskomaan, että vaikeudet, jotka oli voitettava, johtuivat muista syistä kuin niistä, joihin ne siihen asti oli liitetty. Lobatševski ilmaisee omia ajatuksiaan selvästi vuonna 1825 julkaistussa uudessa teoksessaan *New Principles of Geometry*, missä hän sanoo:

”Eukleideen ajoista lähtien 2000 vuoden ajan tehtyjen yritysten hedelmättömyys herätti minussa epäilyn siitä, että totuus, joka haluttiin todistaa, ei sisältynyt itse tietoihin vaan, että sen vahvistamiseksi tarvittaisiin kokeellisia menetelmiä esimerkiksi tähtitieteellisiä havaintoja, kuten muidenkin luonnonlakien kohdalla. Kun olin vihdoin vakuuttanut itseni olettamukseni oikeellisuudesta ja uskoin ratkaisseeni tämän vaikean kysymyksen täydellisesti, kirjoitin vuonna 1826 tutkielman tästä aiheesta.” [1, s. 92]

Jäljellä on enää kuvailla Lobatševskin pangeometrian suhdetta Eukleideen postulaattia koskevaan kiisteltyyn kysymykseen. Kuten olemme nähneet, tämän keskustelun tarkoituksena oli muodostaa paralleeliteoria Eukleideen 28 ensimmäisen lauseen avulla.

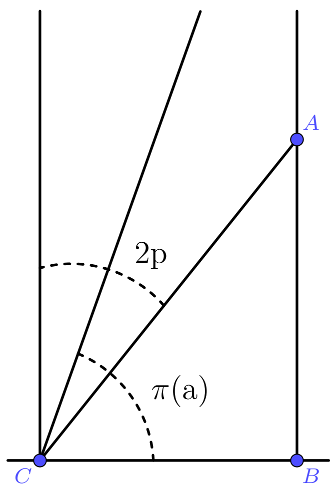
Tämän ongelman osalta Lobatševski määritteli yhdensuuntaisuuden ja määrittelee sille symmetrisyyden ja transitiivisuuden erityispiirteet. Tällöin yhtäsuuren etäisyyden ominaisuus näyttäytyy Lobatševskille sen todellisessa valossa. Se on kaukana siitä, että se olisi erottamattomasti sidoksissa Eukleideen 28 ensimmäiseen lauseeseen, mutta se sisältää täysin uuden elementin.

Tämän väittämän todenmukaisuus seuraa suoraan pangeometrian olemassaolosta, missä yhdensuuntaiset suorat eivät ole yhtä kaukana toisistaan vaan ovat asymptoottisia. Bonola toteaa kirjassaan [1], että voimme olla varmoja siitä, että pangeometria on tiede, jossa tulokset seuraavat suoraan toisistaan eli ovat ristiriidattomia keskenään. Todistaaksemme tämän täytyy vain harkita sen analyyttistä muotoa missä se voidaan ilmaista.

Lobatševski esittää tämän näkökohdan teoksensa loppupuolella seuraavasti:

”Nyt kun olemme edellä näyttäneet tavan, jolla voimme laskea käyrien pituuksia sekä kappaleiden pinta-aloja ja tilavuuksia, voimme väittää, että pangeometria on täydellinen geometrian järjestelmä. Yksikin vilkaisu yhtälöihin, jotka ilmaisevat tasokolmioiden sivujen ja kulmien välisiä suhteita, riittää osoittamaan, että niistä lähtien pangeometriasta tulee analyysin haara, joka sisältää ja laajentaa tavallisen geometrian analyyttisiä menetelmiä. Voimme sitten yrittää korvata nämä yhtälöt muilla yhtälöillä, jotka ilmaisevat jokaisen tasokolmion sivujen ja kulmien väliset suhteet. Kuitenkin jälkimmäisessä tilanteessa olisi tarpeellista näyttää, että nämä uudet yhtälöt olisivat yhteensopivia geometrian peruskäsitteiden kanssa. Koska vakioyhtälöt on johdettu näistä peruskäsitteistä, niiden on välttämättä oltava niiden mukaisia ja kaikki yhtälöt, jotka korvaamme niillä, jos niitä ei voida johtaa yhtälöistä, johtaisivat näiden käsitteiden kanssa ristiriitaisiin tuloksiin. Meidän yhtälömme ovat siis perusta kaikista yleisimpään geometriaan, sillä ne eivät riipu siitä oletuksesta, että tasokolmion kulmien summa on yhtä suurta kuin kaksi suoraa kulmaa." [1, s. 93-94]

Jotta saisimme syvällisempää tietoa vakion k olemuksesta Lobatševskin yhtälössä, meidän on sovellettava uutta trigonometriaa johonkin todelliseen tilanteeseen. Lobatševski käytti tätä varten kolmiota $\triangle ABC$, jossa sivu BC, jota voidaan merkitä kirjaimella a, on maapallon kiertoradan säde ja A on kiinteä tähti, jonka sijainti on kohtisuorassa sivuun BC nähden.



Kuva 5.11: Vakiota k havainnollistaman esimerkin kuva.

Merkitään tähden maksimiparallaksia $2p$. Tällöin saadaan:

$$\Pi(a) > BAC = \frac{\pi}{2} - 2p$$

ja tämän takia

$$\tan\frac{1}{2}\Pi(a) > \tan\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \tan(p)}{1 + \tan(p)}.$$

Mutta

$$\tan\Pi(a) = e^{-\frac{a}{k}},$$

joten

$$e^{\frac{a}{k}} < \frac{1 + \tan}{1 - \tan}.$$

Oletuksella $p < \frac{\pi}{4}$ saadaan

$$\frac{a}{k} < \log\frac{1 + \tan p}{1 - \tan p} = 2(\tan p + \frac{1}{3}\tan^3 p + \frac{1}{5}\tan^5 p + \dots).$$

Myös $\tan 2p = \frac{2\tan p}{1 - \tan^2 p} = 2(\tan p + \tan^3 p + \tan^5 p + \dots)$, jolloin saadaan, että

$$\frac{a}{k} < \tan 2p.$$

Otetaan nyt Sirius-tähden parallaksiksi noin 0,00034°, jolloin saadaan, että

$$\frac{a}{k} < 0,000006012.$$

Tämän tuloksen perusteella vakiolle k ei voida antaa arvoa, mutta tulos kertoo, että vakio k on hyvin suuri maapallon kiertoradan halkaisijaan verrattuna. Voisimme suorittaa laskut uudelleen paljon pienemmälle parallaksille; esimerkiksi 0,1 ja saisimme, että vakio k olisi miljoona kertaa suurempi kuin maapallon kiertoradan halkaisija.

Täten, jos euklidinen geometria ja viides postulaatti pitävät paikkansa todellisessa avaruudessa, niin vakion k on oltava äärettömän suuri. Toisin sanoen on oltava tähtiä, joiden parallaksit ovat äärettömän pieniä.

On kuitenkin selvää, että emme voi koskaan sanoa onko näin vai ei, sillä tähtitieteelliset havainnot pitävät aina paikkansa vain tietyissä rajoissa. Kuitenkin, koska tiedämme vakion k valtavan koon verrattuna mitattaviin pituuksiin, meidän on Lobatševskin tavoin myönnettävä, että viides postulaatti on voimassa kaikkiin käytännön tarkoituksiin.

Pääsisimme samaan tulokseen, jos tarkastelisimme kysymystä kolmion kulmien summan näkökulmasta. Tähtitieteellisten havaintojen tulokset osoittavat, että sellaisen kolmion defekti, jonka sivut lähestyvät maan etäisyyttä auringosta, ei voi olla suurempi kuin 0,0003. Tarkastellaan nyt tähtitieteellisen kolmion sijasta maan pinnalle piirrettyä kolmiota, jonka kulmat voidaan suoraan mitata. Koska kolmion pinta-ala on verrannollinen sen defektiin, mahdollinen defekti on eksperimentaalisen virheen rajoissa. Täten voimme olettaa defektin olevan nolla kokeellisessa työssä ja Eukleideen postulaatti pitää paikkansa kokemuksen piirissä.

Grayn [2] mukaan venäläiset asiantuntijat kuten Ostrogradskii haukkuivat Lobatševskin työtä, jota he eivät yksinkertaisesti ymmärtäneet. Hänen saksankielinen kirjansa sai vain yhden arvostelun, joka oli pilantekoa Lobatševskia kohtaan. Yksi harvoista henkilöistä, joka kunnioitti Lobatševskin työtä sen julkaisun yhteydessä, oli Petr Ivanovich Kotelnikov, joka toimi matematiikan professorina Kazanin yliopistossa. Kotelnikov piti julkisen luennon Kazanin yliopistolla 1842 yleisestä inhosta matematiikkaa kohtaan. Luennolla hän ylisti Lobatševskia kertomalla hänen rakentaneen kokonaisen tieteen, geometrian, jossa oletetaan, että kolmion kulmasumma on vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa.

Lobatševski oli lähettänyt myös Gausille kopion työstään *Geometrische Untersuchungen*. Hän ei tiennyt Gaussin mielenkiinnosta asiaa kohtaan, sillä Bartels ei ollut kertonut asiasta Lobatševskille ja Gauss ei aikonut julkaista mitään asiaan liittyen. Gaussin mielenkiinto oli kuitenkin syvällinen sekä elinikäinen. Gauss alkoi välittömästi ylistää Lobatševskin työtä ja koska hän oli opiskellut venäjän kieltä jo vuoden 1839 keväästä lähtien, alkoi hän etsiä Lobatševskin muita töitä. Gauss sai Lobatševskista Göttingenin tiededeakatemian jäsenen vuonna 1842.

Vuonna 1841 Gauss kirjoitti J. F. Enckelle seuraavasti: ”Olen edistynyt kohtuullisesti venäjän kielen opinnoissani ja tämä tuottaa minulle paljon iloa. Knorre lähetti minulle lyhyen Lobatševskin tutkielman, joka on kirjoitettu venäjäksi ja tämä tutkielma sekä lyhyt saksankielinen kirja yhdensuuntaisista suorista herätti minussa innon oppia lisää tästä taitavasta matemaatikosta.” [2, s. 133]

Vuonna 1846 Gauss kirjoitti Schumacherille seuraavasti: ”Olen viime aikoina lukenut uudelleen Lobatševskin pienen teoksen. Tämä työ sisältää euklidisen geometrian kanssa yhtenevän geometrian perustan, jos euklidinen geometria ei olisi totta. Muuan Schweikart kutsui tätä astraaligeometriaksi. Lobatševski kutsuu sitä imaginaarigeometriaksi. Tiedät, että olen 54 vuoden ajan jakanut samoja näkemyksiä ja kehittänyt niitä jonkin verran, mihin en halua tässä yhteydessä puuttua; näin ollen en ole löytänyt Lobatševskin teoksesta mitään varsinaisesti uutta itselleni. Mutta kehittäessään aihetta hän seurasi eri tietä kuin minä: Lobatševski toteutti tehtävän mestarillisesti ja todella geometrisessa hengessä. Katson velvollisuudekseni kiinnittää huomionne tähän teokseen, joka varmasti tuottaa teille todella poikkeuksellista iloa." [2, s. 133]

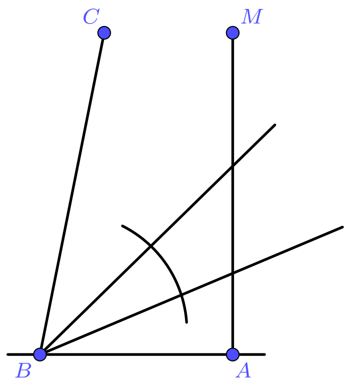
Tähän mennessä aiemmin energisen venäläisen elämässä oli alkamassa taantuma. Hirvittävä tulipalo vuonna 1841 poltti puolet Kazanin yliopistosta sekä tuhosi observatorion. Onneksi opiskelijat, Lobatševskin johdolla pelastivat laitteet ja pystyivät suojelemaan kirjastoa. 30 vuoden kuluttua hänen rehtorikautensa päättyi ja koska yliopiston professorit halusivat säilyttää demokratian, he valitsivat mieluummin uuden rehtorin. Tämä maksoi Lobatševskille tulot sekä asuinpaikan yliopiston alueella. Epäonnistunut avioliitto ajautui taloudelliseen kriisiin, kun hänen vaimonsa huomattavat myötäjäiset yritettiin järjestää uudelleen ja rahat joutuivat häikäilemättömän roiston käsiin. Hänen tasainen luonteensa laantui väsymykseksi, hänen henkiset kykynsä heikkenivät, ja eräänlainen seniiliys näytti alkaneen. Hän kuoli vuonna 1856.

5.3 János Bolyai

Bonola [1] kertoo János Bolyain (1802–1860) olleen unkarilainen upseeri Itävallan armeijassa. Häntä voidaan pitää Lobatševskin kanssa epäeuklidisen geometrian löytäjänä. Hänen isänsä Farkas Bolyai (1775–1856), joka oli Gaussin opiskelijaystävä, tutki myös viidennettä postulaattia. Tutkimukset eivät kuitenkaan kantaneet hedelmää ja hän varoittikin Jánosta, ettei halua poikansa lähtevän tutkimaan samaa asiaa kuin hän, sillä Farkas oli omien sanojensa mukaan menettänyt kaiken valon ja ilon elämästään.

János oli näyttänyt jo nuoruudestaan lähtien ilmiömäistä kykyä matematiikan parissa, jolloin Farkas ohjasi häntä. Farkasin ohjaus veti nopeasti Jánoksen mielenkiinnon viidenteen postulaattiin. Isänsä kielloista huolimatta János lähti etsimään postulaatin todistusta kuten jo edellä mainittiin. Tällä tavoin yhdensuuntaisten suorien teoria muodostui hänen lempiajanvietteeksi opiskeluaikana Wienissä vuosina 1817–1822. Tähän aikaan Carl Szász oli Jánoksen läheinen ystävä ja heidän keskustelunsa kylvi joitakin ideoita, jotka johtivat Bolyain luomaan avaruuden absoluuttisen tieteen, joka tunnetaan nykypäivänä nimellä neutraali geometria.

Vaikuttaa siltä, että Szászille on ominaista ajatus siitä, että pisteen B kautta kulkeva yhdensuuntainen suora suoran AM kanssa on pisteen B ympärillä tiettyyn suuntaan kääntyvän sekantin BC rajakohta; toisin sanoen ajatus siitä, että sekanttia BC pidetään suoran AM kanssa yhdensuuntaisena silloin, kun BC Szászin kielellä ilmaistuna "irtautuu suorasta AM" kuten kuvassa 5.12.



Kuva 5.12: Szászin mukainen yhdensuuntaisuus.

Tälle yhdensuuntaisuudelle Bolyai antoi nimeksi asymptoottinen yhdensuuntaisuus tai asymptootti. Kahden ystävyksen keskusteluista johtui myös käsitys suorien yhtäläisestä etäisyydestä ja toisesta tärkeästä ideasta parasyklistä. Edelleen he huomasivat, että viidennen postulaatin todistus saavutettaisiin, jos pystyttäisiin todistamaan, että parasykli olisi suora.

János joutui jatkamaan pohdintojaan yksin vuoden 1821 jälkeen kun Szász lähti opettamaan lakia Nagy-Enyedin yliopistoon Unkariin. Vuoteen 1820 saakka Bolyai oli täynnä intoa saavuttaa paralleeliaksiooman todistus seuraten samoja polkuja kuten Saccheri ja Lambert. Kirjeenvaihto hänen isänsä Farkasin kanssa näyttää, että János luuli saavuttaneensa maalin.

Tekemiensä virheiden tunnustaminen oli syynä siihen, että János otti ratkaisevan askeleen kohti tulevia keksintöjään, sillä hän ymmärsi, "ettei luonnolle saa tehdä väkivaltaa eikä sitä saa mallintaa minkään sokeasti muodostetun illuusion mukaisesti; vaan luontoa on sen sijaan suojeltava järkevästi ja luonnollisesti kuten totuutta, ja tyytyä vain sellaiseen väitteeseen, joka on mahdollisimman vähän virheellinen." [1, s. 97-98]

János Bolyai ryhtyi siis rakentamaan absoluuttista teoriaa avaruudesta kreikkalaisten klassisia menetelmiä noudattaen eli pitäytymällä deduktiivisessa menetelmässä, mutta päättämättä etukäteen viidennen postulaatin oikeellisuudesta tai virheellisyydestä.

Jo vuonna 1823 Bolyai oli saanut otteen ongelmansa todellisesta luonteesta. Hänen myöhemmät lisäyksensä koskivat vain materiaalia ja sen muodollista ilmaisua. Tuolloin hän oli keksinyt kaavan

$$e^{-\frac{a}{k}} = \tan\frac{\Pi(a)}{2}, \tag{5.4}$$

joka on itse asiassa yhteydessä Lobatševskin keksimään kaavaan (5.3). Kaavassaan János yhdistää yhdensuuntaisuuskulman siihen suoraan, jota se vastaa. Jánoksen mukaan tämä yhtälö on avain kaikkeen epäeuklidiseen geometriaan. Havainnollistaaksemme Jánoksen löytöjä tänä aikakautena lainaamme seuraavaa otetta kirjeestä, jonka hän kirjoitti Timișoarasta isälleen marraskuussa vuonna 1823. "Olen nyt päättänyt julkaista työn liittyen yhdensuuntaisten suorien teoriaan, kunhan olen saanut kaiken materiaalini järjestykseen ja tilanteeni sen sallii. En ole saanut tätä työtä vielä valmiiksi mutta tie jota olen seurannut on tehnyt siitä lähes varmaa, että saavutan maalin, jos se on saavutettavissa. Olen tehnyt uskomattomia löytöjä ja olen melkein häkeltynyt niistä ja se olisi jatkuvan katumuksen aihe, jos ne katoaisivat. Kun näet ne, sinäkin tunnistat ne. Sillä aikaa voin vain sanoa: olen luonut uuden universumin tyhjästä. Kaikki se mitä olen tähän mennessä lähettänyt sinulle on vain korttitalo verrattuna torniin. Olen täysin vakuuttunut siitä, että se tuo minulle kunniaa, kuin olisin jo tehnyt löydön." [1, s. 98]

Samoihin aikoihin Jánoksen isä Farkas oli kirjoittamassa teosta *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos*, joka kokosi hänen matemaattisia periaatteitaan yhteen. Farkas vastasikin Jánoksen kirjeeseen haluavansa lisätä poikansa teorian välittömästi teokseensa sillä, "jos olet onnistunut löytämään vastauksen kysymykseen on vain oikein ettei sen julkaisemiseen käytetä enempää aikaa kahdesta syystä. Ensinnäkin siksi, että ajatukset siirtyvät helposti yhdeltä toiselle, joka voi ennakoida sen julkaisemista; ja toiseksi tässä on jonkinlainen totuus, että monilla asioilla on aikakausi, jolloin ne esiintyvät samaan aikaan useissa paikoissa, aivan kuten orvokit ilmestyvät keväällä joka puolelle. Myös jokainen tieteellinen kamppailu on vain vakava sota, josta en voi sanoa, milloin rauha saapuu. Niinpä meidän on valloitettava silloin, kun kykenemme siihen, sillä etu on aina sillä, joka tulee ensimmäisenä." [1, s. 99]

Farkas Bolyái tuskin ajatteli, että hänen aavistuksensa vastaisi totuutta sillä Gauss, Taurinus ja Lobatševski löysivät epäeuklidisen geometrian myös omien töidensä myötä.

Vuonna 1825 János lähetti työnsä tiivistelmän isälleen sekä J. Walter von Eckwehrille, joka toimi hänen opettajanaan sotakoulussa. Vuonna 1829 János lähetti myös käsikirjoituksensa isälleen. Farkas ei ollut täysin tyytyväinen Jánoksen työhön sillä hän ei nähnyt miksi kaavaan (5.4) tulisi epämääräinen tuntematon vakio. Farkas ja János olivat kuitenkin yhtä mieltä siitä, että uusi teoria avaruudesta julkaistiin *Tentamenin* ensimmäisen kirjan liitteenä.

Vuonna 1831 liite lähetettiin ensimmäistä kertaa Gaussille, mutta se ei koskaan saapunut perille. Vuonna 1832 se lähetettiin toista kertaa ja Gauss vastasikin seitsemän viikon päästä Farkasille seuraavasti: "Jos aloitan sanomalla, että en pysty ylistämään poikasi työtä olisit yllättynyt. Mutta en voi sanoa muuta. Jos ylistäisin tätä työtä ylistäisin itseäni. Työn sisältö, tie, jota poikasi kulki ja tulokset, joita hän sai totisesti kohtaavat minun pohdintojeni kanssa, jotka ovat olleet osittain mielessäni jo 30-35 vuotta. Niinpä jäin melko tyrmistyneeksi. Omaa työtäni ajatellen mitä en ole kirjoittanut paljoa paperille ajatuksenani oli, että sitä ei julkaistaisi minun elinaikanani. Suurimmalla osalla ihmisistä ei todellakaan ole selkeitä käsityksiä niistä kysymyksistä joista puhumme ja olen havainnut hyvin harvoja ihmisiä, jotka voisivat suhtautua erityisellä mielenkiinnolla siihen mitä olen kertonut heille tästä aiheesta. Tällaisen kiinnostuksen osoittaminen edellyttää ensinnäkin sitä, että on pohtinut tarkkaan sen todellista luonnetta mitä halutaan ja tässä asiassa lähes kaikki ovat hyvin epävarmoja. Toisaalta oli minun ideani kirjoittaa tämä kaikki ylös myöhemmin, jotta se ei katoaisi kanssani. Siksi on miellyttävä yllätys minulle, että säästyn tältä vaivalta ja olen hyvin iloinen, että juuri vanhan ystäväni poika menee minun edelleni näin huomattavalla tavalla.” [1, s. 100]

Farkas lähetti kirjeen edelleen pojalleen ja lisäsi: ”Gaussin vastaus, joka koskee työtäsi on erittäin tyydyttävä ja vaikuttaa maamme ja kansakuntamme kunniaan.” [1, s. 100-101]

Gaussin kirjeen vaikutus Jánokseen oli kuitenkin erilainen. Hän oli kykenemätön sekä haluton vakuuttamaan itselleen, että muut riippumatta hänestä olivat löytäneet epäeuklidisen geometrian. Edelleen János epäili, että Farkas olisi pitänyt Gaussin kanssa yhteyttä hänen löydöistään ennen kuin liite lähetettiin ja että Gauss haluaisi kaiken kunnian löydöstä. Myöhemmin Jánoksen kuitenkin piti vakuuttaa itselleen, että näin ei ollut ja János suhtautui ”geometrien ruhtinaaseen” aina perusteettomalla vastenmielisyydellä.

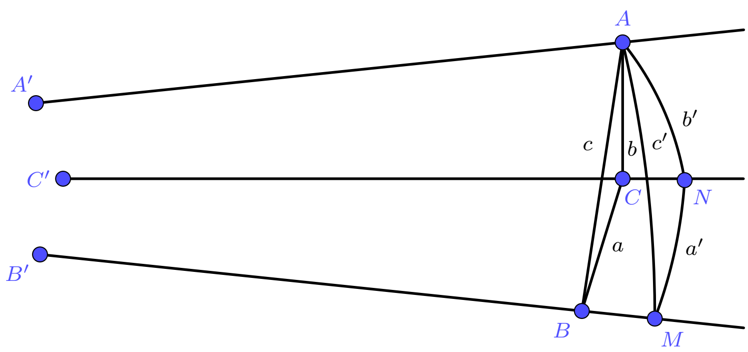
János Bolyain työhön sisältyneitä tärkeimpiä tuloksia ovat:

- Eukleideen postulaatista riippumaton yhdensuuntaisten suorien määritelmä ja niiden ominaisuudet.
- Äärettömän säteen omaava ympyrä ja pallo eli horopallo. Äärettömän säteen omaavan pallon geometria on identtinen tavallisen tasogeometrian kanssa.
- Pallotrigonometria on riippumaton Eukleideen postulaatista ja näiden kaavojen suora todistaminen.
- Tasogeometria epäeuklidisessa geometriassa. Pinta-alojen ja tilavuuksien laskemisen sovelluksia.
- Ongelmia, jotka pystytään ratkaisemaan alkeellisin keinoin. Ympyrän neliöinti olettaen, että viides postulaatti ei ole voimassa.

Lobatševski on kehittänyt imaginaarigeometriaa perusteellisemmin erityisesti sen analyyttisen puolen osalta, kun taas Bolyai on paneutunut perusteellisemmin kysymykseen geometrian lauseiden riippuvuudesta tai riippumattomuudesta Eukleideen postulaatista. Kun Lobatševski pyrki pääasiassa rakentamaan geometrian järjestelmän mainitun postulaatin negaation varaan, János Bolyai toi esiin tavallisen geometrian lauseita ja konstruktioita, jotka ovat siitä riippumattomia. Tällaiset väitteet, joita hän kutsuu absoluuttisen totuudenmukaisiksi, kuuluvat absoluuttiseen avaruuden tieteeseen eli neutraaliin geometriaan. Voisimme löytää tämän tieteen väittämiä vertaamalla euklidista geometriaa Lobatševskin geometriaan. Se, mitä yhteistä niillä on; esimerkiksi pallotrigonometrian kaavat kuuluvat absoluuttiseen geometriaan. János Bolyai ei kuitenkaan seuraa tätä tietä. Hän osoittaa suoraan eli euklidisesta postulaatista riippumatta, että hänen väittämänsä ovat varmasti totta.

Mainitaan esimerkin vuoksi yksi Bolyain absoluuttisista lauseista, joka on merkittävä yksinkertaisuutensa ja siisteytensä vuoksi, ja hahmotellaan myös todistuksen ideaa.

Lause 5.14. *Kolmion kulmien sinit ovat toisiinsa nähden yhtä suuret kuin niiden ympyröiden kehät, joiden säteet ovat yhtä suuret kuin vastakkaiset sivut.*



Kuva 5.13: Lauseen 5.14 todistuksen hahmotelmaa havainnollistava kuvio.

Todistuksen hahmotelma. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa kulma C on suorakulma ja BB' on kulman B kautta kolmion tasoon nähden kohtisuora suora. Piirretään kulmien A ja C kautta yhdensuuntaiset suorat suoran BB' kanssa.

Piirretään horopallo kulman A kautta siten, että se leikkaa suorat AA', BB' ja CC' pisteissä A, M ja N.

János merkitsi horopallolla olevan suorakulmaisen kolmion $\triangle AMN$ sivuja a', b' ja c', jolloin edellä olevista Bolyain tärkeiden tulosten listasta toisen perusteella

$$\sin AMN = \frac{b'}{c'}.$$

Mutta kahden horopallon muodostavien horosyklien kaaret ovat verrannollisia niiden ympyröiden kehiin, joiden säteet ovat nämä kaaret.

János käytti merkintää piiri x' sen ympyrän piirille, jonka säde on x'. Tällöin hän pystyi kirjoittamaan, että

$$\sin AMN = \frac{\text{piiri } b'}{\text{piiri } c'}. \tag{5.5}$$

Jánoksen mukaan horopallolle piirrettyä ympyrää, jonka horosyklin säde on pituus x', voidaan pitää sellaisen tavallisen ympyrän kehänä, jonka säde on puolet horosyklin kaaren $2x'$ jänteestä.

Seuraavaksi János merkitsi $\circ x$ sellaisen ympyrän kehää, jonka säde on x, ja havaitsi, että kulmat ABC ja AMN ovat yhtä suuret. Tällöin kaava (5.5) on yhtäpitävää seuraavan yhtälön kanssa

$$\sin ABC = \frac{\circ b}{\circ c}. \tag{5.6}$$

Kaava (5.6) pätee siis suorakulmaiselle kolmiolle $\triangle ABC$ ja väite seuraa tästä, aivan kuten euklidisessa tapauksessa yhtälöstä

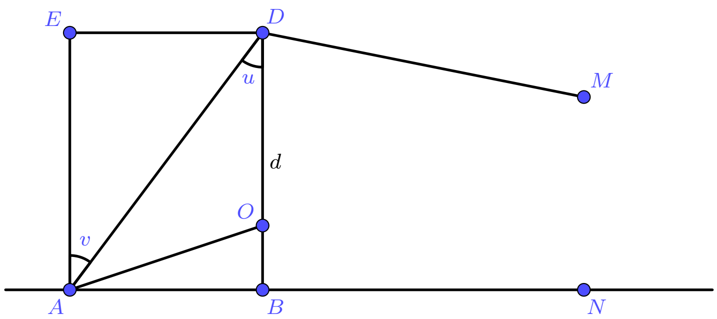
$$\sin ABC = \frac{b}{c}$$

voidaan päätellä, että kolmion kulmien sinit ovat verrannollisia vastakkaisiin sivuihin eli sinilause pätee. □

Bolyai esittää myös seuraavan konstruktion yhdensuuntaiselle suoralle pisteen D kautta, joka kuuluu myös neutraaliin geometriaan.

Piirretään suoralle AN kohtisuorat janat DB ja AE kuten kuvassa 5.14. Piirretään myös janan AE kohtisuora jana DE. Nelikulmion $\square ABDE$ kolme kulmaa BAE, ABD ja AED ovat suoria kulmia ja kulma EDB on joko suora tai terävä kulma riippuen siitä, onko sivu ED suurempaa vai yhtä suurta kuin sivu AB.

Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on A ja säde on sivu ED. Tällöin ympyrä leikkaa sivun DB pisteessä O, joka on joko pisteessä B tai pisteiden B ja D välissä.



Kuva 5.14: Konstruktion kuva.

Kulmaa, jonka jana AO muodostaa sivun BD kanssa, kutsutaan yhdensuuntaisuuskulmaksi, joka vastaa janaa BD.

Tällöin suoran AN kanssa yhdensuuntainen suora pisteen D kautta pystytään konstruoimaan piirtämällä suora DM siten, että kulma BDM on yhtä suuri kuin kulma AOB.

Yksi Bolyain mielenkiintoisimmista epäeuklidisen geometrian konstruktioista on ympyrän neliöinti. Emme kuitenkaan keskity ympyrän neliöinnin konstruktioon tässä tutkielmassa.

Vuoden 1831 jälkeen Bolyai jatkoi uurtamista geometriansa ja erityisesti seuraavien ongelmien parissa:

1. Pallogeometrian ja epäeuklidisen geometrian yhteys.

2. Voidaanko todistaa täsmällisesti, että Eukleideen aksiooma ei ole seurausta siitä, mikä sitä edeltää?

3. Tetraedrin tilavuus epäeuklidisessa geometriassa.

Ensimmäisen ongelman osalta Bolyai määritteli analyyttisen suhteen, joka yhdistää nämä kaksi trigonometriaa sekä tunnusti, että epäeuklidisen hypoteesin nojalla on olemassa kolme eri kategoriaa yhteneviä pintoja joilla epäeuklidinen trigonometria, tavallinen trigonometria ja pallotrigonometria ovat voimassa. Ensimmäiseen kategoriaan kuuluu tasot sekä hyperpallot; toiseen parapallot, jotka ovat samoja kuin Lobatševskin horopallot ja kolmanteen kategoriaan pallot. Parapallot toimivat rajana, kun siirrymme hyperpallojen pinnoista pallojen pinnoille. Tämä kohta osoitetaan analyyttisesti muuttamalla erästä kaavassa esiintyvää parametria yhtäjaksoisesti reaalialueelta puhtaasti imaginaarialueelle äärettömyyden kautta.

Viidennen aksiooman todistamisen suhteen Bolyai ei onnistunut ratkaisemaan tai muodostamaan varmaa mielipidettä siitä. Jonkin aikaa János uskoi, että emme pysty mitenkään perustelemaan onko viides postulaatti vai epäeuklidinen postulaatti totta. Lobatševskin tapaan hän luotti uuden geometrian analyyttiseen mahdollisuuteen. Tämän jälkeen János palasi vanhojen ideoiden kanssa takaisin viidennen postulaatin pariin ja yritti todistaa sitä. Yrityksessään hän hyödyntää epäeuklidisen geometriansa kaavoja viiden samassa tasossa olevan pisteen systeemiin. Näiden pisteiden välisillä etäisyyksillä on välttämättä oltava jokin suhde. Laskuvirheidensä vuoksi János ei löytänyt tätä suhdetta ja uskoi, että oli todistanut epäeuklidisen geometrian hypoteesin vääryden ja viidennen postulaatin ehdottoman oikeellisuuden.

Myöhemmin hän kuitenkin löysi virheensä mutta ei jatkanut tukimuksiaan pidemmälle, sillä hänen tapansa kuudelle tai useammalle pisteelle olisi sisältänyt liian hankalia laskutoimituksia.

Kolmas ongelma on luonteeltaan täysin geometrinen. Stäckel on julkaissut Bolyain ratkaisuja tähän liittyen. Myös Lobatševski yritti ratkaista samaa ongelmaa vuodesta 1829 lähtien ja Gauss ehdotti tätä kirjeessään, jonka hän lähetti Jánoksen isälle Farkasille.

János kuuli Lobatševskin *Geometrische Untersuchungen* -teoksesta vuonna 1848 ja teki siitä kriittisen tutkimuksen kohteen. Hän ryhtyi myös laatimaan tärkeää teosta matematiikan periaatteiden uudistamisesta siinä toivossa, että voisi voittaa Lobatševskin. Hän oli suunnitelut tätä työtä jo *Tentamenin* liitteen julkaisun aikana, mutta ei koskaan onnistunut saamaan työtään päätökseen.

6 Löytymisen jälkeen

Greenbergin [3] mukaan matemaattinen maailma alkoi suhtautua epäeuklidisen geometrian ajatuksiin vakavasti vasta Gaussin kuoleman jälkeen 1855, jolloin hänen kirjeenvaihtonsa julkaistiin. Kuitenkin vielä vuonna 1888 Lewis Carrol pilkkasi epäeuklidista geometriaa. Jotkut tuon ajan parhaista matematiikoista kuten Eugenio Beltrami (1835–1900), Felix Klein (1849–1925), Henri Poincaré (1854–1912) ja Bernhard Riemann (1826–1866) jatkoivat aiheen parissa ja laajensivat, selvensivät sekä yhdistivät sitä muihin matematiikan osa-alueisiin, erityisesti kompleksifunktioiden teoriaan. Vuonna 1868 italialainen matemaatikko Beltrami ratkaisi lopullisesti kysymykset paralleeliaksiooman todistamisesta: hän todisti, että todistusta ei ole olemassa. Hän teki tämän esittelemällä euklidisen mallin epäeuklidisesta geometriasta.

Gaussin oppilaalla Bernhard Riemannilla oli kaikista syvällisin käsitys geometriaan, ei vain sen logiikkaan. Vuonna 1854 hän jatkoi Gaussin aloittamaa työtä kolmiulotteisen avaruuden pintojen sisäiseen geometriaan liittyen. Riemann keksi käsitteen abstraktista geometrisesta pinnasta, jonka ei tarvitse olla upotettavissa euklidiseen kolmanteen ulottuvuuteen, mutta jonka ”suorat” voidaan tulkita geodeeseiksi eli lyhimmän etäisyyden antaviksi käyriksi ja jonka pinnan kaarevuus voidaan määritellä tarkasti. Elliptinen ja tietysti pallogeometria ovat olemassa sellaisilla pinnoilla, joiden kaarevuus on jatkuvasti positiivinen, kun taas Bolyain ja Lobatševskin hyperbolinen geometria on olemassa sellaisilla pinnoilla, joiden kaarevuus on jatkuvasti negatiivinen. Tällaisen negatiivisen kaarevuuden omaava pinta voi olla esimerkiksi satulapinta.

Erityisen suhteellisuusteorian ja hyperbolisen geometrian välillä on suora yhteys ja tämän yhteyden löysi fyysikko Arnold Sommerfeld (1868–1951) vuonna 1909. Kroatialainen geometrikko Vladimir Varičak (1865–1942) valaisi tätä yhteyttä vuonna 1912. Hyperbolisen tasogeometrian malli on imaginaarisen säteen omaava pallo, jonka antipodiset pisteet on samastettu erityissuhteellisuusteorian kolmiulotteisessa avaruusajassa, mikä vahvistaa Lambertin ajatuksen. Sen lisäksi Taurinuksen tapa muuttaa säde r arvoksi ir siirtyäkseen pallotrigonometriasta hyperboliseen trigonometriaan sai selvennyksen vuosina 1926–1927 Élie Cartanin (1869–1951) toimesta, joka kehitti Riemmanin symmetristen avaruuksien teoriaa.

Bonola [1] kertoo kirjassaan, että Lobatševskin ja Bolyain työt eivät saaneet julkaisunsa yhteydessä sellaista vastaanottoa, jota monen vuosisadan hidas ja jatkuva valmistelu näytti lupaavan. Tämän ei kuitenkaan pitäisi yllättää meitä. Tieteellisten keksintöjen historia opettaa, että jokainen radikaali muutos sen eri osa-alueilla ei yhtäkkiä muuta niitä käsityksiä ja olettamuksia, joihin tutkijat ja opettajat ovat huomattavan pitkään perustaneet oman tietämyksensä.

Tässä tapauksessa epäeuklidisen geometrian hyväksyntä viivästyi hyvistä syistä; esimerkiksi Lobatševskin töitä oli vaikea lukea, sillä ne olivat venäjäksi, Lobatševski ja Bolyai olivat vielä uusia ja tuntemattomia nimiä tieteelliselle maailmalle sekä Kantin käsitys avaruudesta oli valloillaan.

Lobatševskin ranskan- ja saksankieliset tekstit auttoivat nostamaan näitä töitä esille. Eräiden geometrikoiden jatkuva ja väsymätön työ auttoi epäeuklidisen geometrian leviämiseen. Näistä geometrikoista voi erityisesti mainita saksalaiset C. L. Gerling (1788–1864), R. Baltzer (1818–1887) ja Fr. Schmidt (1827–1901) sekä ranskalaiset ja italialaiset J. Hoüel (1823–1886), G. Battaglini (1826–1894), E. Beltrami (1835–1900) ja A. Forti (1861–1931).

Vuodesta 1816 lähtien Gerling piti kirjeenvaihtoa yhdensuuntaisista suorista Gaussin kanssa ja lähettikin vuonna 1819 Schweikartin muistion astraaligeometriasta. Lisäksi hän oli kuullut Gaussilta erään nuoren itävaltalaisen upseerin, Farkas Bolyain pojan, kirjoittamasta epäeuklidista geometriaa käsittelevästä teoksesta *kleine Schrift*. Gaussilta myöhemmin saamansa Lobatševskin ja Bolyain teoksia koskevat bibliografiset muistiinpanot saivat Gerlingin hankkimaan itselleen teokset *Geometrischen Untersuchungen* ja Jánoksen liitteen, joka oli Farkasin teoksessa *Tentamen*. Gerlin pelasti nämä teokset unohduksesta, johon ne näyttivät vajonneen.

Gaussin ja Schumacherin välinen kirjeenvaihto, joka julkaistiin vuosien 1860 ja 1863 välillä, lukuisat viittaukset Lobatševskin ja Bolyain teoksiin sekä Legendren yritykset sisällyttää alkeisoppikirjoihin yhdensuuntaisten suorien teorian täsmällinen käsittely saivat Baltzerin korvaamaan euklidisen yhdensuuntaisten suorien määritelmän uudesta avaruuskäsityksestä johdetulla määritelmällä *Elementse der Mathmetik* -teoksensa toisessa painoksessa. Hän esimerkiksi kirjoitti kokeellisten tulosten joukkoon yhtälön $A+B+C=180°$, joka kuvaa euklidista kolmiota. Oikeuttaakseen tätä keksintöä Baltzer lisäsi lyhyen viittauksen normaalia geometriaa mahdollisesti yleisemmästä geometriasta, joka perustuu yhdensuuntaisiin suoriin. Hän antoi myös asianmukaisen aseman tämän löytäjien nimille. Samalla hän kiinnitti Hoüelin huomion epäeuklidiseen geometriaan ja pyysi häntä kääntämään teokset *Geometrischen Untersuchungen* ja Jánoksen liitteen ranskaksi.

Lobatševskin kirjoittaman lyhyen kirjan ranskankielinen käännös ilmestyi vuonna 1866 ja siihen liitettiin joitakin otteita Gaussin ja Schumacherin välisestä kirjeenvaihdosta. Se, että Lobatševskin, Bolyain ja Gaussin näkemyksiä tuotiin yhteen oli todella onnekasta, koska Gaussin nimi ja hänen hyväksyntänsä kahden tuolloin vielä tuntemattoman geometrikon löydöksille auttoivat tuomaan luottoa ja huomiota uusille opeille tehokkaimmalla ja varmimmalla mahdollisella tavalla.

Ranskankielinen käännös *Tentamen* -teoksen liitteenä olevasta Jánoksen työstä ilmestyi vuonna 1867. Sitä edelsi teos *Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai de Bolya*, jonka kirjoitti arkkitehti Fr. Schmidt Hoüelin pyynnöstä. Sitä täydennettiin joillakin Farkas Bolyain huomautuksilla, jotka oli otettu teoksen *Tentamen* 1. niteestä sekä Farkasin tekemästä lyhyestä analyysistä aritmetiikan ja geometrian periaatteista.

Samana vuonna 1867 Schmidtin löydökset Bolyaita koskien julkaistiin lehdessä *Archiv d. Math. u. Phys.* Tätä seuraavana vuonna italialainen A. Forti, joka oli jo kirjoittanut kriittisen ja historiallisen tutkielman Lobatševskista, teki kahden nyt juhlitun unkarilaisen geometrikon nimet tutuiksi italialaisille.

Hoüelin ansioksi on mainittava myös hänen kiinnostuksensa János Bolyain käsikirjoituksia kohtaan, joita säilytettiin Farkasin testamentin mukaisesti Maros-Vásárhelyin reformoidun yliopiston kirjastossa vuonna 1867. Prinssi B. Boncampagnin sai Unkarin opetusministerin paroni Eötvösin kiinnostumaan asiasta ja Bolyain käsikirjoitukset saatiin sijoitettua Unkarin tiedeakatemiaan Budapestiin vuonna 1869. Tällä tavoin teokset olivat helpommin saatavilla ja olivat huolellisen sekä tarkan tutkimustyön kohteena ensin Schmidtin ja myöhemmin Stäckelin toimesta.

Lisäksi Hoüel ei epäonnistunut pyrkimyksissään varmistaa epäeuklidisen geometrian menestystä kaikissa mahdollisissa tilanteissa. Jos mainitsemme Hoüelin teokset *Essai critique sur les principes fondamenteaux de la géométrie*, artikkelit *Sur l'imppossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide*, *Notices sur la vie et les travaux de N. J. Lobatchewsky* sekä hänen monet käännöksensä epäeuklidisesta geometriasta ranskaksi, ymmärretään, kuinka kiihkeän pioneerin tämä tiede oli löytänyt kuuluisasta ranskalaisesta matemaatikosta.

Hoüelin työt mahdollisesti yllyttivät J. Frischaufin (1837–1924) tekemään saksaksi saman, minkä Hoüel teki ranskaksi. Frischaufin kirja *Absolute geometrie nach J. Bolyai* vuodelta 1872 on yksinkertaisesti vapaa käännös Jánoksen liitteestä teoksessa *Tentamen*, johon oli lisätty Farkas Bolyain mielipiteitä geometrian perusteista. Frischaufin teoksesta julkaistiin uusi ja tarkistettu painos vuonna 1876. Kyseisessä teoksessa viitataan Lobatševskin sekä muiden kirjoittajien teoksiin, jotka olivat tuohon aikaan ryhtyneet tutkimaan tätä asiaa edistyneemmistä lähtökohdista. Tämä nidos oli monen vuoden ajan ainoa kirja, jossa uudet opit avaruudesta tuotiin yhteen ja niitä vertailtiin keskenään.

Giuseppe Battaglini toi uudet geometriset spekulaatiot Italiaan ja levitti niitä sieltä ulkomaille. Vuodesta 1867 eteenpäin Battaglinin perustama italiankielinen matematiikkalehti *Giornale di Mathematica* toimi epäeuklidisen geometrian tunnustettuna edistäjänä.

Battaglinin ensimmäisessä tutkielmassa *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky* hän käsitteli periaatteita, jotka ovat Lobatševskin yleisen yhdensuuntaisten suorien teorian ja trigonometrian perusta. Samaan aikaan *Giornale de Mathematican* kuudennessa osassa esiintyi Beltramin kuuluisa artikkeli *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*. Tämä valotti yllättäen kysymystä, joka koski tuolloin keskustelua geometrian perusperiaatteista, sekä Gaussin ja Lobatševskin käsityksistä.

Vilkaisemalla läpi lehden *Giornale di Mathematica* myöhempiä osia löydämme usein artikkeleja epäeuklidiseen geometriaan liittyen. Kaksi Beltramin toimesta, useita Battaglinilta ja d'Ovidiolta (1842–1933), Hoüelin artikkeli, joka käsitteli paralleeliaksiooman todistamisen mahdottomuutta sekä muita Cassanilta, Güntherilta, De Zoltilta, Frattinilta ja Ricordilta.

Edellä mainittujen geometrikkojen aloittama ja tarmokkaasti jatkama työ uuden geometrian tuntemuksen levittämiseksi ulkomaille sai voimakkaan sysäyksen toisesta julkaisujen sarjasta, joka ilmestyi noin vuosina 1868-1872. Näissä käsiteltiin geometrian perusteita koskevaa ongelmaa yleisemmällä ja vähemmän alkeellisella tavalla kuin Gaussin, Lobatševskin ja Bolyain tutkimuksissa. Vanha kysymys yhdensuuntaisista suorista, josta Legendren tutkimukset neljäkymmentä vuotta aikaisemmin näyttivät vieneen kaiken mielenkiinnon, herätti jälleen kerran ja aivan uudessa valossa geometrikoiden ja filosofien huomion ja siitä tuli erittäin laajan tutkimuksen kohde. Osa näistä ponnisteluista kohdistui yksinkertaisesti siihen, että epäeuklidisen geometrian perustajien teokset olisivat paremmin matemaattisen yleisön saatavilla. Toisia kannusti toivo laajentaa uusien oppien tuloksia, sisältöä ja merkitystä ja samalla edistää tiettyjen korkeamman matematiikan erikoisalojen edistymistä.

Viitteet

[1] Robert Bonola: *Non-Euclidean geometry: A critical and historical study of its development.* Dover, 1995.

[2] Jeremy Gray: *Worlds out of nothing: a course in the history of geometry in the 19th century.* Toinen painos, Springer cop, 2011.

[3] Marvin J. Greenberg: *Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history.* kolmas painos, W.H. Freeman, 1993.

[4] Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid and beyond.* Springer cop, 2000.

[5] Eukleides; Heath, Thomas L. *The thirteen books of Euclid's elements. 1, Introduction. Books I, II.* Toinen uusittu painos, 1956

[6] Juha Lehrbäck: *Geometria, luentomoniste.* Jyväskylän yliopisto, 2023