JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Fourier-sarjojen suppeneminen

Jenni Tarvainen

1. kesäkuuta 2024

Tekijä
Jenni Tarvainen

Otsikko
Fourier-sarjojen suppeneminen (engl. Convergence of Fourier series)

Tutkinto-ohjelma
Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä	**Sivumäärä**
1. kesäkuuta 2024	66

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tutustutaan Fourier-sarjoihin ja niiden suppenemiseen. Tutkielman tarkoituksena on selvittää, mitkä funktioiden ominaisuudet takaavat niiden Fourier-sarjojen suppenemisen kohti alkuperäistä funktiota ja mitkä toisaalta eivät. Tarkastelun keskiössä ovat jatkuvat 2π-periodiset funktiot ja Fourier-sarjojen pisteittäinen suppeneminen.

Fourier-sarjat ovat äärettömiä trigonometrisiä sarjoja, jotka määritellään 2π-mittaisella välillä määritellyille Lebesgue-integroituville funktioille tai yhtäpitävästi niiden 2π-periodisille laajennuksille. Tutkielmassa käsiteltävät funktiot ovat kompleksiarvoisia, jolloin Fourier-sarjat ja -kertoimet määritellään kompleksisten eksponenttifunktioiden avulla.

Analyysille luontaiseen tapaan Fourier-sarjojen suppenemista tutkitaan niiden osasummien muodostamien funktiojonojen avulla. Tällöin esimerkiksi jatkuvan 2π-periodisen funktion Fourier-sarjan, joka suppenee itseisesti, osoitetaan suppenevan myös tasaisesti kohti alkuperäistä funktiota. Havaittaessa, että Fourier-sarjojen osasummat voidaan esittää tarkasteltavan funktion ja Dirichlet-ytimen konvoluutiona, avautuu uusi näkökulma suppenemisen tutkimiseen. Koska jatkuvien funktioiden konvoluutiot hyvien ytimien kanssa muodostavat tasaisesti suppenevan funktiojonon, herää toive jatkuvien funktioiden Fourier-sarjojen suppenemisesta. Valitettavasti Dirichlet-ytimet eivät muodosta hyvien ytimien joukkoa, jolloin suppenemisen tutkimista täytyy jatkaa. Dirichlet-ytimille ja hyville ytimille osoitettujen tulosten avulla saadaan kuitenkin todistettua derivoituvien ja Hölder-jatkuvien funktioiden Fourier-sarjojen suppenevan pisteittäin kohti tarkasteltuja funktioita.

Ratkaisua jatkuvien funktioiden Fourier-sarjojen suppenemiseen etsitään lopuksi funktionaalianalyysin perusteista. Tasaisen rajoituksen periaatteen avulla osoitetaan, että on olemassa jatkuva 2π-periodinen funktio, jonka Fourier-sarja hajaantuu origossa. Näin ollen funktion jatkuvuus ei ole riittävä ehto sen Fourier-sarjan pisteittäiselle suppenemiselle kaikkialla.

Sisällys

Johdanto

Tarve jaksollista liikettä kuvaaville funktioille sai alkunsa fysiikan ilmiöistä. Lämmönjohtumista tutkinut Joseph Fourier esitti vuonna 1807, että “jokainen funktio” voidaan esittää äärettömänä trigonometrisenä sarjana

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

missä vakiot a_n ja b_n riippuvat tarkasteltavasta funktiosta. Fourier uskoi tämän Fourier-sarjaksi kutsutun sarjan olevan yhtä suuri tarkasteltavan funktion kanssa jokaisessa pisteessä. Fourierin tekemä työ sai muut pohtimaan, mitä hän tarkoitti jokaisella funktiolla ja pitikö suppenemiseen liittyvä väite paikkansa. Fourier-sarjojen tutkimisessa heränneet kysymykset toimivat alkusysäyksenä modernille analyysille, kuten integroituvuuden käsitteille. Käsitteiden täsmentyessä oltiin vakuuttuneita siitä, että jatkuvien funktioiden Fourier-sarjat suppenevat. Kuitenkin vuonna 1876 P. du Bois-Reymond osoitti, että on olemassa jatkuva funktio, jonka Fourier-sarja hajaantuu pisteessä. Tämä havainto osoitti Fourier-sarjojen suppenemisen tutkimisen haastavuuden. Lisätietoa historiasta voi lukea Bhatian teoksesta [1, Luku 0].

Tämän tutkielman aiheena on Fourier-sarjojen suppeneminen. Ennen suppenemisen tutkimista selvitetään, miten Fourier-sarjat ja -kertoimet määritellään ja millaisille funktioille ne on määritelty. Tämän jälkeen siirrytään tutkimaan, mitkä funktioiden ominaisuudet takaavat niiden Fourier-sarjojen suppenemisen ja mitkä toisaalta eivät. Positiivisten suppenemistulosten antamisen lisäksi tutkielman yksi tavoite on osoittaa, että funktion jatkuvuus ei ole riittävä ehto sen Fourier-sarjan pisteittäiselle suppenemiselle kaikkialla.

Ensimmäisessä luvussa tutkitaan sini- ja kosinifunktioiden avulla määriteltyjä reaalisia trigonometrisiä polynomeja. Niiden kertoimien motivoimana määritellään Fourier-kertoimet ja -sarja 2π-mittaisella välillä määritellyille Lebesgue-integroituville reaaliarvoisille funktioille. Luvussa 1.2 Fourier-sarjojen ja -kertoimien määritelmät laajennetaan vastaaville kompleksiarvoisille funktioille Eulerin kaavan avulla. Luvussa 1.3 puolestaan tarkastellut funktiot laajennetaan 2π-periodisiksi funktioiksi, joiden Fourier-sarjojen suppenemista aloitetaan tutkimaan.

Luvussa 2.1 tutkitaan jatkuvia 2π-periodisia funktioita, joiden Fourier-kertoimet ovat yhtä suuria. Laajan todistuksen seurauksena tiedetään funktioiden olevan tällöin sama funktio. Luvun 2.2 aluksi esitetään funktiosarjojen tutut suppenemisen määritelmät Fourier-sarjoille niiden osasummien avulla. Tämän jälkeen Fourier-sarjoille annetaan ensimmäinen positiivinen suppenemistulos, jonka mukaan jatkuvan 2π-periodisen funktion Fourier-sarja, joka suppenee itseisesti, suppenee myös tasaisesti kohti alkuperäistä funktiota.

Luvussa 3 suppenemisen tutkimista jatketaan ytimien ja konvoluutioiden avulla. Luvussa 3.2 osoitetaan, että Fourier-sarjojen osasummat voidaan esittää tutkittavan funktion ja Luvussa 3.1 määritellyn Dirichlet-ytimen konvoluutiona. Luvussa 3.3 määritellään joukko hyviä ytimiä, joiden konvoluutioille osoitetaan hyviä suppenemistuloksia. Dirichlet-ytimet eivät kuitenkaan muodosta hyvien ytimien joukkoa, jolloin tuloksia ei voida suoraan soveltaa Fourier-sarjoihin. Luvussa 3.4 tarkasteluun tuodaan uusi näkökulma tutkimalla Dirichlet-ytimien keskiarvoina saatavia Fejer-ytimiä, jotka muodostavat hyvien ytimien joukon. Koska Fourier-sarjojen osasummien keskiarvot voidaan esittää tutkittavan funktion ja Fejer-ytimen konvoluutiona, päästään hyville ytimille osoitetut suppenemistulokset antamaan Fourier-sarjojen osasummien keskiarvoille. Tulosten avulla Luvussa 3.5 osoitetaan derivoituvien ja Hölder-jatkuvien funktioiden Fourier-sarjojen suppenevan pisteittäin.

Lopuksi tutustutaan funktionaalianalyysin perusteisiin ja todistetaan, että on olemassa jatkuva 2π-periodinen funktio, jonka Fourier-sarja hajaantuu origossa. Luvuissa 4.1 ja 4.2 käsitellään Banach-avaruuksista ja rajoitetuista lineaarikuvauksista ne tiedot, joita tarvitaan Luvussa 4.3 esiteltävän tasaisen rajoituksen periaatteen todistamisessa. Tämän funktionaalianalyysin perustuloksen todistamiseen esitetään varsin lyhyt tapa. Tuloksen avulla Luvussa 4.4 osoitetaan tutkielman viimeinen tulos, jonka mukaan funktion jatkuvuus ei ole riittävä ehto sen Fourier-sarjan pisteittäiselle suppenemiselle kaikkialla. Todistuksen yhteydessä analysoidaan valittua todistusstrategiaa vertaamalla sitä muihin kirjallisuudessa esitettyihin tapoihin.

Tutkielma edellyttää lukijalta mitta- ja integraaliteorian perustulosten, kuten Lebesgue-integroituvuuden, Fubinin lauseen ja konvergenssilauseiden, tuntemista. Lukijan oletetaan tuntevan analyysin yleiset määritelmät ja tulokset. Myös kompleksilaskennan perusteiden tunteminen tukee kompleksiarvoisten funktioiden tarkastelua.

Tutkielman pääasiallinen lähde on Elias M. Steinin ja Rami Shakarchin teos *Fourier Analysis: An Introduction* [8], johon luvut 2 ja 3 pohjautuvat. Erona tähän teokseen tutkielmassa käsiteltävät funktiot ovat Lebesgue-integroituvia. Luku 1 perustuu pitkälti Russell L. Hermanin teokseen [3]. Luvussa 4 perehdytään funktionaalianalyysin perusteisiin Marat V. Markinin teoksen [5] sekä Andrew M. Brucknerin, Judith B. Brucknerin ja Brian S. Thomsonin teoksen [2] avulla. Tasaisen rajoituksen periaate todistetaan Alan D. Sokalin artikkelin [7] avulla. Jatkuvan funktion pisteessä hajaantuvan Fourier-sarjan olemassaolon todistus perustuu Yitzhak Katznelsonin teokseen [4]. Lukujen alussa kerrotaan vielä tarkemmin, mihin teokseen ja sen lukuihin esiteltävät määritelmät, tulokset ja niiden todistukset pohjautuvat. Yhdistän eri kirjallisuuden lähteitä sekä lisään yksityiskohtia. Erityismainintana nostan Lauseen 4.24, jolle esitän vaihtoehtoisen todistustavan.

1 Fourier-sarjat ja -kertoimet

Ensimmäisessä johdattelevassa luvussa tutustutaan Fourier-sarjoihin ja -kertoimiin. Fourier-sarjojen ollessa trigonometrisiä sarjoja on luontevaa aloittaa niihin tutustuminen trigonometristen polynomien kautta. Trigonometristen polynomien kertoimien motivoimana määritellään reaaliset Fourier-kertoimet välillä $[-\pi, \pi]$ Lebesgue-integroituville funktiolle sekä esitellään funktioiden reaalinen Fourier-sarja. Tämän jälkeen Fourier-sarjan ja -kertoimien määritelmät laajennetaan vastaaville kompleksiarvoisille funktioille, ja osoitetaan reaalisten ja kompleksisten määritelmien välinen yhteys. Luvun lopuksi tarkastellaan käsiteltyjen funktioiden 2π-periodisia laajennuksia. Luku 1.1 mukailee Russell L. Hermanin teosta [3, Luvut 2.2 ja 2.3]. Luku 1.2 mukailee niin ikään Hermanin teosta [3, Luku 5.2] sekä Elias M. Steinin ja Rami Shakarchin teosta [8, Luku 2.1]. Myös Luvun 1.3 päätelmien tukena käytetään Steinin ja Shakarchin teosta [8, Luku 2.1].

1.1 Reaalinen Fourier-sarja

Palautetaan mieleen lemma, jonka mukaan $\{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ja $\{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$, missä $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, ovat ortonormaaleja joukkoja välillä $[-\pi, \pi]$. Erityisesti kahden sinifunktion tai vastaavasti kahden kosinifunktion sisätulo on nolla aina, kun $m \neq n$, ja yksi, kun $m = n$, missä sisätulo määritellään jatkuville funktioille f ja g seuraavasti

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Lisäksi osoitetaan joukkojen $\{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ja $\{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ olevan keskenään ortogonaalisia.

Lemma 1.1. *Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \textit{kun } m \neq n, \\ 1, & \textit{kun } m = n, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \textit{kun } m \neq n, \\ 1, & \textit{kun } m = n, \end{cases}$$

ja

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0 \quad \textit{kaikilla } m \textit{ ja } n.$$

Todistus. Osoitetaan, että $\{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ muodostaa ortonormaalin joukon. Joukon $\{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormaalisuus voidaan todistaa vastaavasti. Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$. Kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavojen nojalla pätee

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y. \tag{1.1}$$

Kun $n \neq m$, edellä esitellyn trigonometrisen kaavan nojalla pätee

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(mx-nx) - \cos(mx+nx))\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\Bigg/_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} - \frac{\sin((m+n)x)}{m+n}\right) = 0.\end{aligned}$$

Kun $n = m$, niin ikään kaavan (1.1) nojalla pätee

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(mx)\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(mx-mx) - \cos(mx+mx)\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos(2mx))\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\Bigg/_{-\pi}^{\pi} \left(x - \frac{\sin(2mx)}{2m}\right) = 1.\end{aligned}$$

Lemman viimeinen väite voidaan perustella funktioiden parillisuuden ja parittomuuden avulla. Parittoman sinifunktion $\sin(mx)$ tulo parillisen kosinifunktion $\cos(nx)$ kanssa on pariton, jolloin määrätty integraali origon suhteen symmetrisen välin $[-\pi, \pi]$ yli on tunnetusti nolla kaikilla m ja n. $\square$

Määritellään reaalinen trigonometrinen polynomi. Funktioita, jotka voidaan esittää sinifunktioiden $\sin(nx)$ ja kosinifunktioiden $\cos(nx)$ äärellisenä lineaarikombinaationa, kutsutaan trigonometrisiksi polynomeiksi.

Määritelmä 1.2. Olkoot $N \in \mathbb{N}$, $a_0 \in \mathbb{R}$ ja $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ kaikilla $n = 1, \ldots, N$. Funktiota $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)),$$

kutsutaan reaaliseksi trigonometriseksi polynomiksi, jonka aste on suurin n, jolla $a_n \neq 0$ tai $b_n \neq 0$.

Hyödynnetään nyt sini- ja kosinifunktioiden ortogonaalisuutta trigonometrisen polynomin kertoimien a_n ja b_n johtamiseen. Myöhemmin osoitetaan, että lauseessa esiintyvät kertoimet ovat myös trigonometrisen polynomin P reaaliset Fourier-kertoimet, jotka määritellään Määritelmässä 1.4.

Lause 1.3. *Olkoot $N \in \mathbb{N}$ ja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astetta N oleva trigonometrinen polynomi*

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Tällöin kertoimet a_n ja b_n ovat

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cos(nx)\, dx \quad \textit{kaikilla } n = 0, 1, 2, \dots, N$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \sin(nx)\, dx \quad \textit{kaikilla } n = 1, 2, \dots, N.$$

Todistus. Johdetaan kerroin a_0 integroimalla trigonometristä polynomia P. Integraalin lineaarisuuden nojalla integraalin ja sarjan järjestystä voidaan vaihtaa. Tällöin kosinin parillisuuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\, dx \\
&= \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\, dx \\
&= a_0 \pi + \sum_{n=1}^{N} \Big/_{-\pi}^{\pi} \left(a_n \frac{\sin(nx)}{n} - b_n \frac{\cos(nx)}{n} \right) = a_0 \pi.
\end{aligned}$$

Jaetaan yhtälö puolittain luvulla π. Koska $\cos(0) = 1$, saadaan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cos(nx)\, dx, \quad \text{kun } n = 0.$$

Olkoon $m \in \{1, 2, \dots, N\}$. Johdetaan loput kertoimet a_m integroimalla funktiota $P(x)\cos(mx)$ termeittäin. Integroinnin ja sarjan järjestystä vaihtamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cos(mx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(mx)\, dx &+ \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(mx)\, dx \\
&+ \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \cos(mx)\, dx.
\end{aligned}$$

Ensimmäinen määrätty integraali on nolla. Lemman 1.1 nojalla ensimmäisestä sarjasta jää jäljelle ainoastaan termi $a_m \pi$, kun taas jälkimmäinen sarja on nolla. Kokoamalla yllä tehdyt havainnot ja jakamalla puolittain luvulla π saadaan

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cos(mx)\, dx \quad \text{kaikilla } m = 1, 2, \dots, N.$$

Olkoon $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Kertoimet b_m johdetaan vastaavasti integroimalla funktiota $P(x)\sin(mx)$ termeittäin. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\sin(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos(nx)\sin(mx)\,dx \\ + \sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin(nx)\sin(mx)\,dx.\end{aligned}$$

Ensimmäinen määrätty integraali on sinin parittomuuden nojalla nolla. Lemman 1.1 nojalla ensimmäinen sarja on nolla ja jälkimmäisestä sarjasta jää jäljelle ainoastaan termi $b_m\pi$. Jakamalla puolittain luvulla π saadaan

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\sin(mx)\,dx \quad \text{kaikilla } m = 1, 2, \ldots, N. \qquad \square$$

Annetaan nyt Lauseen 1.3 motivoimana reaalisten Fourier-kertoimien ja -sarjan määritelmä välillä $[-\pi, \pi]$ määritellyille Lebesgue-integroituville reaaliarvoisille funktioille. Käytetään merkintää $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Määritelmä 1.4. Olkoon $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integroituva funktio. Tällöin funktion f reaaliset Fourier-kertoimet ovat

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}_0$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Trigonometristä sarjaa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)),$$

jonka sini- ja kosinitermien kertoimet ovat edellä annetut Fourier-kertoimet, kutsutaan funktion f reaaliseksi Fourier-sarjaksi.

Koska Fourier-sarjat ovat äärettömiä sarjoja, niiden suppeneminen ei ole itsestään selvää eikä suppenemista täten oleteta tässä yhteydessä. Tutkielman tavoitteena onkin selvittää, mitä oletuksia funktion tulee täyttää, jotta sen ja Fourier-sarjan välille saadaan yhtäsuuruus annetussa pisteessä. Fourier-sarjojen suppenemista aloitetaan tutkimaan tarkemmin Luvussa 2. Trigonometrisen polynomin yhteys sen Fourier-sarjaan sen sijaan tunnetaan ja se esitellään seuraavaksi.

Esimerkki 1.5. Olkoot $N \in \mathbb{N}$ ja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astetta N oleva trigonometrinen polynomi

$$P(x) = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (p_n \cos(nx) + q_n \sin(nx)).$$

Määritelmän 1.4 nojalla trigonometrisen polynomin P Fourier-kertoimet ovat

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}_0$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \sin(nx)\, dx \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Vertaamalla Fourier-kertoimia Lauseessa 1.3 johdettuihin trigonometrisen polynomin kertoimiin nähdään, että $a_0 = p_0$ ja lisäksi kaikilla $n = 1, 2, \ldots, N$ pätee $a_n = p_n$ ja $b_n = q_n$. Toisaalta, kun $n > N$, Lemman 1.1 nojalla pätee $a_n = 0 = b_n$. Yksityiskohdat voidaan perustella vastaavasti kuin Lauseen 1.3 todistuksessa. Tällöin Määritelmän 1.4 nojalla trigonometrisen polynomin P Fourier-sarjalle pätee

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (p_n \cos(nx) + q_n \sin(nx)) = P(x)$$

kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$. Näin ollen trigonometrisen polynomin P Fourier-sarja suppenee pisteittäin kohti arvoa $P(x)$ jokaisella $x \in [-\pi, \pi]$.

Esitellään funktion parillisuuteen ja parittomuuteen liittyvä lause, joka voi yksinkertaistaa funktion Fourier-kertoimien määrittämistä. Tämän jälkeen lasketaan erään reaalisen funktion Fourier-kertoimet ja -sarja.

Lause 1.6. *Olkoon $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integroituva funktio. Jos f on pariton, niin sen Fourier-kertoimille a_n pätee $a_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Jos f on parillinen, niin sen Fourier-kertoimille b_n pätee $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Väite voidaan perustella vastaavasti kuin sini- ja kosinifunktioiden ortogonaalisuus. Parittoman funktion f tulo parillisen kosinifunktion $\cos(nx)$ kanssa on pariton, jolloin määrätty integraali origon suhteen symmetrisen välin $[-\pi, \pi]$ yli on nolla. Tällöin Fourier-kertoimet a_n ovat nolla kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$, jolloin funktion f Fourier-sarja koostuu ainoastaan sinitermeistä. Vastaavasti parillisen funktion f tulo parittoman sinifunktion $\sin(nx)$ kanssa on pariton, jolloin Fourier-kertoimet b_n ovat nolla kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin funktion f Fourier-sarja koostuu kosinitermeistä ja vakiotermistä. $\square$

Esimerkki 1.7. Lasketaan funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, reaalinen Fourier-sarja. Funktion f ollessa parillinen tiedetään Lauseen 1.6 nojalla, että $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi funktion parillisuuden nojalla saadaan

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi.$$

Olkoon nyt $n \in \mathbb{N}$. Funktio $|x|\cos(nx)$ on parillisten funktioiden tulona parillinen, jolloin osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\Big/_{\!0}^{\pi} \frac{x\sin(nx)}{n} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(0 + \Big/_{\!0}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Tästä muodosta nähdään, että $a_n = 0$, kun n on parillinen, ja $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$, kun n on pariton. Näin ollen funktion f Fourier-sarja on

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

1.2 Kompleksinen Fourier-sarja

Laajennetaan Fourier-sarjan ja -kertoimien määritelmät kompleksiarvoisille funktiolle, joihin keskitytään jatkossa. Reaalisten ja kompleksisten Fourier-sarjojen välinen yhteys seuraa Eulerin kaavasta $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Käyttämällä kompleksisen Fourier-sarjan määritelmää huomataan merkintöjen muuttuvan tiiviimmiksi. Tämän luvun jälkeen puhuttaessa Fourier-sarjasta ja -kertoimista tarkoitetaan nimenomaan kompleksiarvoisia versioita näistä.

Edellisessä aliluvussa määriteltiin reaalinen trigonometrinen polynomi sini- ja kosinifunktioiden avulla. Määritellään nyt kompleksiarvoinen trigonometrinen polynomi kompleksisen eksponenttifunktion avulla. Tämän jälkeen osoitetaan, että reaalinen trigonometrinen polynomi voidaan esittää yhtäpitävästi kompleksisessa muodossa.

Määritelmä 1.8. Olkoot $N \in \mathbb{N}_0$ ja $c_n \in \mathbb{C}$ kaikilla $n = -N, \dots, N$. Funktiota $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx},$$

kutsutaan kompleksiseksi trigonometriseksi polynomiksi, jonka aste on suurin $|n|$, jolla $c_n \neq 0$.

Huomautus 1.9. Trigonometriset polynomit ovat suljettuja yhteen- ja kertolaskun suhteen. Lisäksi kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$ pätee

$$P(x - x_0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in(x-x_0)} = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-inx_0} e^{inx},$$

missä $c_n e^{-inx_0} \in \mathbb{C}$ kaikilla $n = -N, \ldots, N$. Tällöin trigonometriset polynomit ovat suljettuja myös siirron suhteen.

Lause 1.10. *Olkoot $N \in \mathbb{N}$ ja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astetta N oleva trigonometrinen polynomi*

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $P(x) = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$, missä kertoimet c_n ovat

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & \textit{kun } n = 1, 2, \ldots, N, \\ \frac{a_n}{2}, & \textit{kun } n = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & \textit{kun } n = -1, -2, \ldots, -N. \end{cases}$$

Todistus. Osoitetaan, että reaalisesta trigonometrisestä polynomista saadaan johdettua kompleksinen trigonometrinen polynomi yhtäsuuruuksien avulla. Esitetään reaalinen trigonometrinen polynomi ensin kompleksisten sini- ja kosinifunktioiden avulla

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \right).$$

Laventamalla jälkimmäinen termi vakiolla i ja ryhmittelemällä termit uudelleen saadaan

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(\left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-inx} \right).$$

Merkitään kertoimia $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots, N$. Kertoimien kompleksikonjugaatit ovat $\overline{c_n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots, N$. Tällöin saadaan

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} \overline{c_n} e^{-inx}.$$

Siirretään jälkimmäisen sarjan indeksointi negatiivisiin kokonaislukuihin ja asetetaan $c_n = \overline{c_{-n}}$ kaikilla $n = -1, -2, \ldots, -N$. Merkitään lisäksi $c_0 = \frac{a_0}{2}$, jolloin saadaan haluttu kompleksinen muoto

$$P(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Näin ollen kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}. \qquad \square$$

Määritellään kompleksiset Fourier-kertoimet ja -sarja välillä $[-\pi, \pi]$ määritellyille Lebesgue-integroituville kompleksiarvoisille funktioille. Tämän jälkeen annetaan Lauseen 1.10 motivoimana muunnoskaava reaalisten ja kompleksisten Fourier-kertoimien välille.

Määritelmä 1.11. Olkoon $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Lebesgue-integroituva funktio. Tällöin funktion f kompleksiset Fourier-kertoimet ovat

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z}.$$

Trigonometristä sarjaa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx},$$

jonka eksponenttifunktioiden kertoimet ovat edellä annetut Fourier-kertoimet, kutsutaan funktion f kompleksiseksi Fourier-sarjaksi.

Lause 1.12. *Olkoon $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Funktion f reaalisten ja kompleksisten Fourier-kertoimien välillä on seuraava yhteys:*

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & \textit{kun } n = 1, 2, \ldots, \\ \frac{a_n}{2}, & \textit{kun } n = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & \textit{kun } n = -1, -2, \ldots . \end{cases}$$

Todistus. Käsitellään tapaukset erikseen. Kun $n = 0$, saadaan

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \widehat{f}(0).$$

Kun $n = 1, 2, \ldots$, kosinin parillisuuden, sinin parittomuuden ja Eulerin kaavan $e^{-inx} = \cos(-nx) + i\sin(-nx)$ nojalla pätee

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(a_n - ib_n) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)\,dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

Kun $n = -1, -2, \ldots$, edellä johdetun ja funktion f reaalisuuden nojalla pätee

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) &= \overline{\frac{1}{2}(a_{-n} - ib_{-n})} \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-n)x}\,dx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{inx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \widehat{f}(n). \qquad \square
\end{aligned}$$

Esimerkissä 1.7 laskettiin itseisarvofunktion reaalinen Fourier-sarja. Määritetään nyt Lauseen 1.12 avulla funktion kompleksiset Fourier-kertoimet. Tällöin saadaan funktion kompleksinen Fourier-sarja.

Esimerkki 1.13. Olkoon $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Funktion reaaliset Fourier-kertoimet ovat $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ sekä

$$a_n = \begin{cases} \pi, & \text{kun } n = 0, \\ 0 & \text{kaikilla parillisilla } n \in \mathbb{N}, \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{kaikilla parittomilla } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Kun $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, Lauseen 1.12 nojalla pätee

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2}(a_{|n|} \pm ib_{|n|}) = \frac{1}{2}(a_{|n|} \pm i0) = \frac{a_{|n|}}{2}.$$

Tällöin funktion f kompleksiset Fourier-kertoimet ovat

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{kun } n = 0, \\ 0 & \text{kaikilla parillisilla } n \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{kaikilla parittomilla } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Muodostetaan nyt itseisarvofunktion kompleksinen Fourier-sarja. Ottamalla vakiotermi ulos sarjasta saadaan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Koska Fourier-kertoimet $\widehat{f}(n)$ ovat nolla kaikilla parillisilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, saadaan itseisarvofunktion kompleksiseksi Fourier-sarjaksi

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ on pariton}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{i(2n-1)x}.$$

1.3 2π-periodinen laajennus

Edellisissä luvuissa esitellyt trigonometriset polynomit ovat 2π-periodisia funktioita, mikä seuraa suoraan sini- ja kosinifunktioiden sekä kompleksisten eksponenttifunktioiden 2π-periodisuudesta. Erityisesti jokaiselle 2π-periodiselle funktiolle pätee

$$f(x + 2\pi m) = f(x) \quad \text{kaikilla } m \in \mathbb{Z} \text{ ja } x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Tämän vuoksi Fourier-sarjat määriteltiin nimenomaan 2π-mittaisella välillä määritellyille funktioille. Toisaalta 2π-mittaisella välillä määritellyt funktiot voidaan laajentaa reaaliakselilla määritellyiksi 2π-periodisiksi funktioiksi.

Määritelmä 1.14. Olkoon $f\colon [-\pi, \pi[\to \mathbb{C}$. Funktion f 2π-periodinen laajennus on funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, joka määritellään kaavalla $g(x) = f(y)$, missä $y \in [-\pi, \pi[$ ja $x = y + 2\pi m$ jollakin $m \in \mathbb{Z}$.

2π-periodisessa laajennuksessa tulee joissain tilanteissa ottaa huomioon funktion mahdollinen jatkuvuus. Jotta 2π-periodisesti laajennettu funktio olisi jatkuva koko reaaliakselilla, tulee 2π-mittaisella välillä määritellyn funktion olla jatkuva ja saada sama arvo tarkasteluvälin päätepisteissä. Tällöin on mielekästä tarkastella funktioita, jotka on määritelty suljetulla välillä $[-\pi, \pi]$. Myös nämä funktiot voidaan laajentaa 2π-periodisesti, koska ehto $f(-\pi) = f(\pi)$ takaa sen, että laajennettu funktio on hyvin määritelty, eli saa vain yhden arvon kussakin pisteessä.

Määritelmä 1.15. Merkitään joukkoa, joka koostuu jatkuvista funktioista, joiden 2π-periodiset laajennukset ovat jatkuvia, seuraavasti

$$C_{\text{per}}([-\pi, \pi]) \coloneqq \{f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \text{ on jatkuva} \mid f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

Jatkossa siirrytään tarkastelemaan 2π-mittaisella välillä määriteltyjen Lebesgue-integroituvien funktioiden 2π-periodisia laajennuksia. Näin saatavat funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ovat lokaalisti Lebesgue-integroituvia ja 2π-periodisia. Lokaalisti Lebesgue-integroituvalla funktiolla tarkoitetaan tässä Lebesgue-mitallista funktiota, jolle jokaisen suljetun välin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ yli pätee

$$\|f\|_{L^1([a,b])} \coloneqq \int_a^b |f(x)|\, dx < \infty.$$

Kutsutaan merkintää $\|f\|_{L^1([a,b])}$ funktion f L^1-normiksi. Normin varsinaiseen käsitteeseen palataan tarkemmin Luvussa 4.1.

Huomautus 1.16. Lokaalisti Lebesgue-integroituvan 2π-periodisen funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet voidaan määritellä tarkastelemalla sen rajoittumafunktiota $g\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, jolle pätee $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$. Koska g on Lebesgue-integroituva, voidaan sille määrittää Määritelmän 1.11 mukaiset Fourier-kertoimet. Näin ollen funktioiden f ja g Fourier-kertoimet ja täten myös Fourier-sarjat ovat yhtä suuret.

Osoitetaan 2π-periodiseen laajennukseen liittyvä aputulos, jonka mukaan lokaalisti Lebesgue-integroituvan 2π-periodisen funktion määrätty integraali minkä tahansa 2π-mittaisen välin yli on aina yhtä suuri.

Lemma 1.17. *Olkoot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio ja $a \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

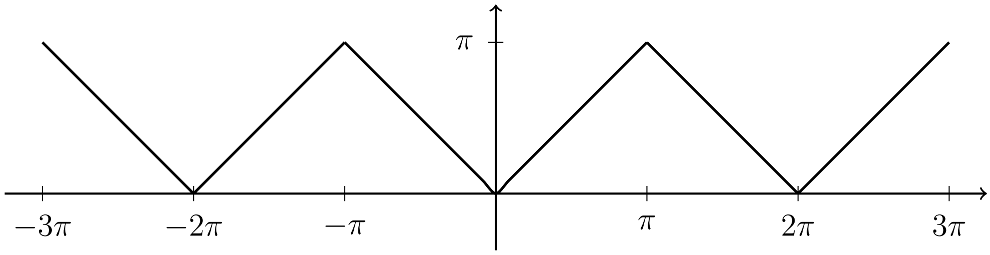
Todistus. Ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa suoraan muuttujanvaihdosta $u = x+a$. Jälkimmäisen yhtäsuuruuden osoittamista varten jaetaan integroimisväli osiin ja hyödynnetään funktion 2π-periodisuutta eli yhtälöä (1.2). Kun $a \in [0, 2\pi]$, niin $\pi \in [-\pi + a, \pi + a]$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{\pi+a} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi-2\pi}^{\pi+a-2\pi} f(x+2\pi)\,dx \\
&= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Olkoon sitten $a \in \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa $m \in \mathbb{Z}$ siten, että $a+2\pi m \in [0, 2\pi]$, jolloin funktion 2π-periodisuuden ja edellä todistetun nojalla pätee

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx &= \int_{-\pi+a+2\pi m}^{\pi+a+2\pi m} f(x-2\pi m)\,dx \\
&= \int_{-\pi+a+2\pi m}^{\pi+a+2\pi m} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \qquad \square
\end{aligned}$$

Esimerkki 1.18. Olkoon $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Koska $f(-\pi) = f(\pi)$, niin $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$, jolloin funktio f voidaan laajentaa 2π-periodisesti. Tällöin 2π-periodisena laajennuksena saatava funktio on jatkuva, ja sen kuvaaja on esitetty Kuvassa 1.1.



Kuva 1.1: Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, 2π-periodinen laajennus.

Annetaan luvun lopuksi esimerkki välillä $[-\pi, \pi[$ määritellystä jatkuvasta funktiosta, jonka 2π-periodinen laajennus ei kuitenkaan ole jatkuva. Funktion Fourier-kertoimet ja -sarja voidaan määrittää Määritelmän 1.11 ja Huomautuksen 1.16 avulla. Laskut sivuutetaan. Katso Steinin ja Shakarchin teos [8, Luku 2.1, s. 36].

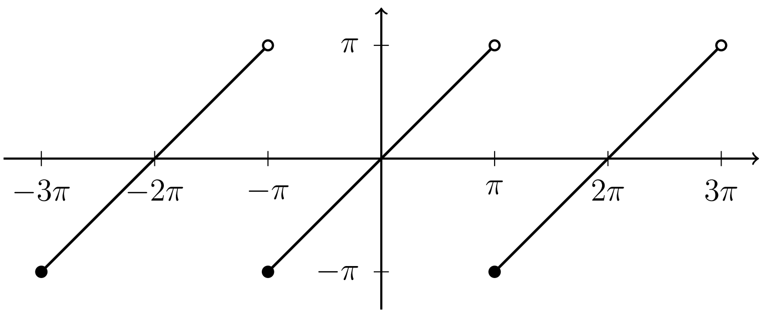
Esimerkki 1.19. Olkoon $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktion $g\colon [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, 2π-periodinen laajennus. Funktion h kompleksiset Fourier-kertoimet ovat

$$\widehat{h}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{in}, & \text{kun } n \neq 0 \\ 0, & \text{kun } n = 0. \end{cases}$$

Tällöin funktion h kompleksinen Fourier-sarja on

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx}.$$

Koska esimerkiksi $h(-\pi) \neq h(\pi)$, niin funktio h ei ole jatkuva. Kuvasta 1.2 nähdään, että 2π-periodisesti laajennetulla funktiolla on hyppäysepäjatkuvuus pisteissä $x = \pi + 2\pi m$, missä $m \in \mathbb{Z}$.



Kuva 1.2: Funktion $g\colon [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, 2π-periodinen laajennus.

2 Fourier-sarjoista ja niiden suppenemisesta

Fourier-sarjoihin ja niiden suppenemiseen liittyen voidaan esittää useita keskeisiä kysymyksiä: Voidaanko funktiot erottaa toisistaan niiden Fourier-kertoimien avulla? Millä ehdoilla Fourier-sarja suppenee? Jos funktion Fourier-sarja suppenee jossakin pisteessä, suppeneeko se kohti funktion arvoa tässä pisteessä? Miten Fourier-sarjojen suppenemista kannattaa ylipäätään tutkia? Muun muassa näihin kysymyksiin etsitään vastausta tutkimalla aluksi jatkuvia funktioita ja niiden Fourier-kertoimia. Luku 2 mukailee Elias M. Steinin ja Rami Shakarchin teosta [8, Luku 2.2].

2.1 Yksikäsitteisyys

Tässä luvussa selvitetään, minkä oletusten vallitessa funktiot voidaan erottaa toisistaan niiden Fourier-kertoimien avulla. Tarkastellaan ensin kahta lokaalisti Lebesgue-integroituvaa 2π-periodista funktiota $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, joille pätee $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ pätee

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}\, dx = \widehat{g}(n).$$

Koska erotusfunktion $f - g$ Fourier-kertoimille pätee integraalin lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\widehat{(f-g)}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))e^{-inx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}\, dx \\
&= \widehat{f}(n) - \widehat{g}(n) \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z}, \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

niin $\widehat{(f-g)}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin funktiolla $f - g$, jolle pätee $(f - g)(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja nollafunktiolla on yhtä suuret Fourier-kertoimet. Näin ollen ilman lisäoletuksia funktioita f ja g ei voida erottaa toisistaan niiden Fourier-kertoimien avulla.

Johdannon innoittamana siirrytään tarkastelemaan funktiota, jonka kaikki Fourier-kertoimet ovat nollia. Jos kyseinen funktio on lisäksi jatkuva jossakin pisteessä, osoitetaan, että tällöin funktio saa arvon nolla kyseisessä pisteessä. Tämän todistamista varten muodostetaan joukko hyödyllisiä trigonometrisiä polynomeja.

Lemma 2.1. *Olkoot $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ ja $k \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa vakiosta δ riippuvat vakiot $\varepsilon > 0$ ja $0 < \eta < \delta$ sekä trigonometrinen polynomi*

$p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_k(x) = (p(x))^k$, missä $p(x) = \varepsilon + \cos x$, siten, että

$$|p_k(x)| < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \quad \textit{aina, kun } \delta \le |x| \le \pi \tag{2.2}$$

ja

$$p_k(x) > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \quad \textit{aina, kun } |x| < \eta. \tag{2.3}$$

Todistus. Olkoot $0 < \delta \le \frac{\pi}{2}$ ja $k \in \mathbb{N}$. Valitaan $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(1 - \cos\delta)$. Olkoon sitten $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_k(x) = (p(x))^k$, missä $p(x) = \varepsilon + \cos x$. Funktio p on trigonometristen polynomien summana trigonometrinen polynomi. Koska trigonometriset polynomit ovat suljettuja myös kertolaskun suhteen, funktio p_k on niin ikään trigonometrinen polynomi.

Kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joille $\delta \le |x| \le \pi$, pätee $-1 \le \cos x \le \cos\delta$. Tällöin trigonometristä polynomia p saadaan arvioitua alhaalta päin

$$p(x) = \varepsilon + \cos x \ge \varepsilon - 1 > \frac{\varepsilon}{2} - 1 = -\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ja ylhäältä päin

$$p(x) = \varepsilon + \cos x \le \varepsilon + \cos\delta = \varepsilon + 1 - (1 - \cos\delta) < \varepsilon + 1 - 2\varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tällöin $|p(x)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joille $\delta \le |x| \le \pi$, jolloin saadaan

$$|p_k(x)| = |p(x)|^k < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \quad \text{aina, kun } \delta \le |x| \le \pi.$$

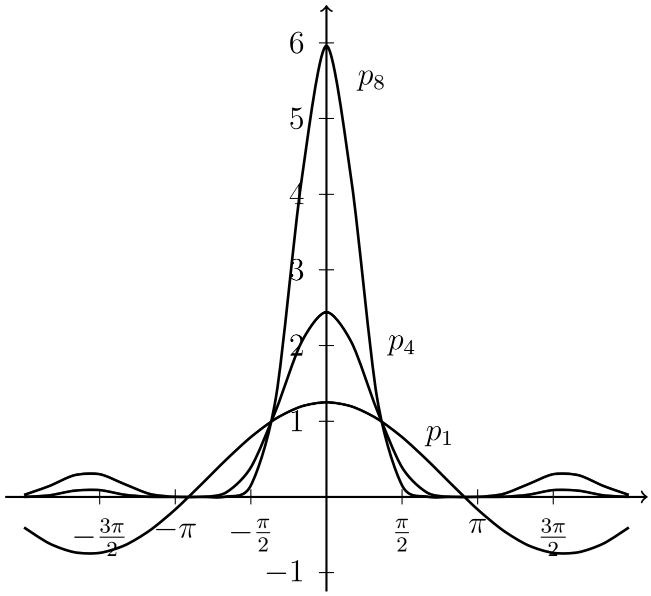
Toisaalta kosinin jatkuvuuden nojalla on olemassa $0 < \eta < \delta$ siten, että $|\cos x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ aina, kun $|x| < \eta$. Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joille $|x| < \eta$, pätee

$$p(x) = \varepsilon + \cos x = \varepsilon + 1 + (\cos x - 1) > \varepsilon + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} > 1.$$

Tällöin saadaan

$$p_k(x) = (p(x))^k > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \quad \text{aina, kun } |x| < \eta. \qquad \square$$

Kuvassa 2.1 esitellään muutama Lemman 2.1 trigonometrisen polynomin kuvaaja, jotka havainnollistavat edellä osoitettuja tuloksia. Kuvasta nähdään, että kuvaajilla on sitä korkeampi piikki origossa, mitä suurempi vakio k on. Toisaalta, mitä suurempi vakio k on, sitä lähempänä polynomien arvot ovat nollaa kauempana origosta. Näiden trigonometristen polynomien hyvien ominaisuuksien avulla funktion käytöksen tarkastelu saadaan seuraavassa lauseessa rajattua origon ympäristöön.



Kuva 2.1: Trigonometristen polynomien p_1, p_4 ja p_8 kuvaajat, missä $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_k(x) = (p(x))^k$ ja $p(x) = \cos x + 0,25$.

Lause 2.2. *Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio, jonka Fourier-kertoimet ovat $\widehat{f}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Jos f on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, niin $f(x_0) = 0$.*

Todistus. Jaetaan todistus kolmeen osaan todistuksen yksinkertaistamiseksi.

1) Osoitetaan väite ensin reaaliarvoiselle origossa jatkuvalle funktiolle antiteesin avulla. Olkoon siis $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio, jonka kaikki Fourier-kertoimet ovat nollia ja joka on jatkuva pisteessä $x_0 = 0$. Tehdään antiteesi olettamalla, että pätee $f(0) \neq 0$. Tapausten $f(0) > 0$ ja $f(0) < 0$ symmetrisyyden vuoksi riittää käsitellä tapaus $f(0) > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä $x_0 = 0$, on olemassa $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ siten, että

$$|f(x) - f(0)| < \frac{f(0)}{2} \quad \text{aina, kun } |x| < \delta.$$

Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joille $|x| < \delta$, pätee

$$f(x) > \frac{f(0)}{2} > 0. \tag{2.4}$$

Olkoot $N \in \mathbb{N}_0$ ja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$, astetta N oleva trigonometrinen polynomi. Koska funktion f Fourier-kertoimille pätee $\widehat{f}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, integraalin lineaarisuuden nojalla pätee

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)P(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\,dx \\ &= \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = \sum_{n=-N}^{N} 2\pi c_n \widehat{f}(-n) = 0. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Johdetaan ristiriita tämän tiedon kanssa muodostamalla joukko trigonometrisiä polynomeja $P_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, siten, että $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)P_k(x)\,dx \to \infty$, kun $k \to \infty$. Olkoot vakiot $\varepsilon > 0$ ja $0 < \eta < \delta$ kuten Lemmassa 2.1. Osoitetaan, että lemmassa määritetyt trigonometriset polynomit $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_k(x) = (p(x))^k$, missä $p(x) = \varepsilon + \cos x$ ja $k \in \mathbb{N}$, toteuttavat ehdon.

Tutkitaan funktion fp_k määrättyä integraalia välillä $[-\pi, \pi]$ jakamalla integroimisväli kolmeen osaan ja hyödyntämällä edellä käsiteltyjä aputuloksia. Kun $|x| < \eta < \delta$, epäyhtälöiden (2.3) ja (2.4) nojalla pätee

$$\begin{aligned}\int_{|x|<\eta} f(x)p_k(x)\,dx &= \int_{|x|<\eta} f(x)(p(x))^k\,dx \\ &\geq \int_{|x|<\eta} \frac{f(0)}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k dx \\ &\geq 2\eta\,\frac{f(0)}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \to \infty, \quad \text{kun } k \to \infty.\end{aligned}$$

Kun $0 < \eta \leq |x| < \delta \leq \frac{\pi}{2}$, niin $\cos x > 0$, jolloin trigonometriset polynomit p_k saavat pelkästään positiivisia arvoja. Epäyhtälön (2.4) nojalla myös f on positiivinen kyseisellä välillä, jolloin saadaan arvio

$$\int_{\eta \leq |x| < \delta} f(x)p_k(x)\,dx \geq 0.$$

Integraalin arvioimiseen kolmannella välillä $\delta \leq |x| \leq \pi$ voidaan hyödyntää kolmioepäyhtälöä sekä epäyhtälöä (2.2). Koska f on lokaalisti Lebesgue-integroituva, saadaan

$$\begin{aligned}\left|\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} f(x)p_k(x)\,dx\right| &\leq \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |f(x)||p(x)|^k\,dx \\ &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \|f\|_{L^1([-\pi,\pi])} \to 0, \quad \text{kun } k \to \infty.\end{aligned}$$

Yhdistämällä edellä tehdyt arviot saadaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p_k(x)\,dx \to \infty, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Tämä on ristiriidassa yhtälön (2.5) kanssa. Näin ollen antiteesi on väärin ja alkuperäinen väite on totta tutkituille reaaliarvoisille origossa jatkuville funktioille.

2) Tapaus, jossa oletukset täyttävä reaaliarvoinen funktio f on jatkuva yleisessä pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, voidaan osoittaa määrittelemällä joukko trigonometrisiä polynomeja $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_k(x) = (p(x))^k$, missä $p(x) = \varepsilon + \cos(x - x_0)$ ja $k \in \mathbb{N}$. Tutkitaan vastaavasti funktion fp_k määrättyä integraalia välin $[-\pi, \pi]$ yli. Koska funktiot f ja p_k ovat molemmat 2π-periodisia, funktio fp_k on 2π-periodinen. Tällöin Lemman 1.17 nojalla pätee

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p_k(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\varepsilon + \cos(x - x_0))^k\,dx \\ &= \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(x + x_0)(\varepsilon + \cos x)^k\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x + x_0)(\varepsilon + \cos x)^k\,dx.\end{aligned}$$

Merkitään $g(x) = f(x + x_0)$, joka vastaa funktion f siirtoa vakion x_0 verran. Tällöin g on funktion f tavoin lokaalisti Lebesgue-integroituva ja 2π-periodinen. Lisäksi funktion g Fourier-kertoimille pätee

$$\begin{aligned}\widehat{g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + x_0)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(x)e^{-in(x-x_0)}\,dx \\ &= e^{inx_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = e^{inx_0}\widehat{f}(n) = 0 \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Koska f on jatkuva pisteessä x_0, niin g on jatkuva pisteessä $x = 0$. Tällöin edellä todistetun tapauksen 1) nojalla pätee $f(x_0) = g(0) = 0$. Näin ollen alkuperäinen väite on todistettu oletukset täyttäville reaaliarvoisille funktioille.

3) Osoitetaan väite vielä oletukset täyttävälle kompleksiarvoiselle pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ jatkuvalle funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Määritelmän mukaan f voidaan esittää sen reaali- ja imaginaariosan summana, eli muodossa $f = u + iv$, missä u ja v ovat reaaliarvoisia ja niin ikään pisteessä x_0 jatkuvia funktioita. Merkitään funktion f kompleksikonjugaattia $\overline{f}$, jolloin funktioille u ja v pätee

$$u = \frac{f + \overline{f}}{2} \quad \text{ja} \quad v = \frac{f - \overline{f}}{2i}.$$

Koska kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ pätee $\widehat{f}(n) = 0$ ja

$$\overline{\widehat{f}(-n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{-i(-n)x}} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{-inx} \, dx = \widehat{\overline{f}}(n),$$

niin kompleksikonjugaatin $\overline{f}$ Fourier-kertoimet ovat kaikki nollia. Tällöin yhtälön (2.1) tavoin integraalin lineaarisuuden nojalla pätee $\widehat{u}(n) = 0$ ja $\widehat{v}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Näin ollen edellä todistetun reaalisen tapauksen 2) nojalla pätee $u(x_0) = 0$ ja $v(x_0) = 0$, jolloin $f(x_0) = u(x_0) + iv(x_0) = 0$, mikä todistaa väitteen. $\square$

Edellä käsitelty pisteittäinen tulos voidaan yleistää jatkuville funktioille. Erityisesti, jos kahdella jatkuvalla 2π-periodisella funktiolla on yhtä suuret Fourier-kertoimet, täytyy funktioiden olla sama funktio.

Seuraus 2.3. *Jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on jatkuva 2π-periodinen funktio, jonka kaikki Fourier-kertoimet ovat nollia, niin $f = 0$, eli kyseessä on nollafunktio.*

Todistus. Väite seuraa suoraan Lauseesta 2.2 jatkuvien 2π-periodisten funktioiden ollessa lokaalisti Lebesgue-integroituvia. $\square$

Seuraus 2.4. *Jos $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia 2π-periodisia funktioita, joiden Fourier-kertoimille pätee $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin $f = g$.*

Todistus. Jatkuvien 2π-periodisten funktioiden f ja g erotusfunktio $f - g$ on niin ikään jatkuva ja 2π-periodinen. Lisäksi yhtälön (2.1) nojalla erotusfunktion $f - g$ Fourier-kertoimille pätee $\widehat{(f - g)}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin Seurauksen 2.3 nojalla $f - g$ on nollafunktio, eli erityisesti pätee $f = g$. $\square$

2.2 Fourier-sarjojen osasummat ja niiden suppeneminen

Aloitetaan Fourier-sarjojen suppenemisen tarkastelu antamalla funktiosarjojen tutut suppenemisen määritelmät Fourier-sarjoille. Tämän jälkeen kerrataan Weierstrassin M-testi, joka on hyödyllinen apuväline Fourier-sarjojen tasaista suppenemista tutkittaessa. Nämä ja muut luvussa esiintyvät analyysin määritelmät ja tulokset kompleksiarvoisille funktioille voi kerrata Bruce P. Palkan teoksesta [6, Luvut 7.1 ja 7.2].

Määritelmä 2.5. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio. Funktion f Fourier-sarja $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$ suppenee

1) pisteittäin joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota f, jos Fourier-sarjan osasummien $S_N(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,
$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx},$$
muodostama funktiojono $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}_0}$ suppenee pisteittäin joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota f, eli
$$|S_N(f)(x) - f(x)| \to 0, \quad \text{kun } N \to \infty, \text{ jokaisella } x \in \mathbb{R}.$$
2) itseisesti, jos $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty.$
3) tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota f, jos funktiojono $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}_0}$ suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota f, eli
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_N(f)(x) - f(x)| \to 0, \quad \text{kun } N \to \infty.$$

Käsitellään tarkemmin Fourier-sarjojen itseistä suppenemista.

Lause 2.6 (Weierstrassin M-testi)**.** *Olkoon* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ *sarja funktioita* $f_n\colon A \to \mathbb{C}$, *missä* $A \subset \mathbb{R}$. *Jos kaikilla* $n \in \mathbb{Z}$ *on olemassa* $0 \le M_n < \infty$ *siten, että*
$$|f_n(x)| \le M_n \text{ kaikilla } x \in A \quad \text{ja} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n < \infty,$$
niin funktiosarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ *suppenee itseisesti ja tasaisesti joukossa* A.

Todistus. Sivuutetaan. Katso Palkan teos [6, Luku 7.2.2, ss. 253–255]. Väite seuraa tästä jakamalla tarkasteltava funktiosarja kahteen osaan
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n. \qquad \square$$

Seuraava Fourier-sarjojen suppenemista koskeva tulos seuraa suoraviivaisesti Weierstrassin M-testistä ja Seurauksesta 2.4.

Lause 2.7. *Olkoon* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *jatkuva* 2π*-periodinen funktio, jonka Fourier-sarja suppenee itseisesti. Tällöin funktion* f *Fourier-sarja suppenee tasaisesti joukossa* $\mathbb{R}$ *kohti funktiota* f.

Todistus. Funktion f Fourier-sarja koostuu funktioista $\widehat{f}(n)e^{inx}$, joille kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ pätee $|\widehat{f}(n)e^{inx}| = |\widehat{f}(n)|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Valitaan $M_n = |\widehat{f}(n)|$. Koska funktion f Fourier-sarja suppenee itseisesti, niin pätee
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty.$$

Tällöin Weierstrassin M-testin nojalla Fourier-sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$ suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$. Näin ollen on olemassa rajafunktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jolle pätee

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx} = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x)$$

tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$. Koska $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}_0}$ on jono jatkuvia trigonometrisiä polynomeja ja jatkuvuus säilyy tasaisessa suppenemisessa [6, Luku 7.1.1, ss. 244–245], niin rajafunktio g on jatkuva ja lisäksi 2π-periodinen.

Tutkitaan nyt funktion g Fourier-kertoimia. Olkoon tätä varten $m \in \mathbb{Z}$. Määritelmän 1.11 nojalla pätee

$$\widehat{g}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g\left(x\right) e^{-imx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}e^{-imx}\, dx.$$

Koska tasaisesti suppenevan funktiosarjan integraalin ja sarjan järjestystä voidaan tunnetusti vaihtaa, funktion g Fourier-kertoimille pätee

$$\widehat{g}(m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\, dx.$$

Kun $n \neq m$, kompleksisen eksponenttifunktion 2π-periodisuuden nojalla pätee

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\, dx = \frac{1}{i(n-m)} \Big/_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} = 0.$$

Tällöin sarjasta jää jäljelle ainoastaan termi $n = m$, jolloin pätee

$$\widehat{g}(m) = \frac{\widehat{f}(m)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-imx}\, dx = \frac{\widehat{f}(m)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = \widehat{f}(m).$$

Näin ollen funktioiden f ja g Fourier-kertoimille pätee $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m)$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}$. Koska f ja g ovat molemmat lisäksi jatkuvia 2π-periodisia funktioita, Seurauksen 2.4 nojalla pätee $f = g$. Näin ollen funktion f Fourier-sarja suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota f. □

Palataan luvun lopuksi Luvun 1.3 esimerkkifunktioihin ja tutkitaan niiden Fourier-sarjojen suppenemista.

Esimerkki 2.8. Olkoon $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, 2π-periodinen laajennus. Esimerkin 1.13 nojalla funktion h Fourier-sarja on

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{i(2n-1)x}.$$

Koska yliharmoniselle sarjalle pätee

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(2n-1)^2} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} < \infty,$$

funktion h Fourier-sarja suppenee itseisesti. Koska h on Esimerkin 1.18 nojalla lisäksi jatkuva ja 2π-periodinen, tiedetään Lauseen 2.7 nojalla funktion h Fourier-sarjan suppenevan tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota h.

Esimerkki 2.9. Olkoon $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktion $g \colon [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, 2π-periodinen laajennus. Esimerkin 1.19 nojalla funktion h Fourier-sarja on

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx}.$$

Koska sarja

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{in} \right| = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|n|}$$

hajaantuu, funktion h Fourier-sarja ei suppene itseisesti. Toisaalta, jotta Fourier-sarja suppenisi tasaisesti, tulisi rajafunktion olla jatkuva. Kuten Kuvasta 1.2 nähdään, funktio h ei ole jatkuva. Näin ollen funktion h Fourier-sarja ei suppene myöskään tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota h.

3 Ytimet ja konvoluutiot

Tutustutaan Fourier-sarjojen suppenemisen tutkimisen kannalta tärkeisiin trigonometrisiin polynomeihin, Dirichlet-ytimiin ja niiden aritmeettisina keskiarvoina saataviin Fejer-ytimiin. Tutkittaessa edelleen konvoluutiota ja niin kutsuttuja hyviä ytimiä tehdään tärkeitä havaintoja Fourier-sarjojen suppenemisesta.

Tutustuttaessa konvoluutioihin havaitaan, että Fourier-sarjan osasummat voidaan esittää tutkittavan funktion ja Dirichlet-ytimen konvoluutiona. Koska jatkuvien funktioiden konvoluutiot hyvien ytimien kanssa muodostavat tasaisesti suppenevan funktiojonon, herää toive jatkuvien funktioiden Fourier-sarjojen suppenemisesta. Dirichlet-ytimet eivät kuitenkaan muodosta hyvien ytimien joukkoa, jolloin suppenemisen tutkimista täytyy jatkaa. Fejer-ytimet sen sijaan muodostavat hyvien ytimien joukon. Havaittaessa, että Fourier-sarjojen osasummien keskiarvot voidaan esittää tutkittavan funktion ja Fejer-ytimen konvoluutiona, saadaan hyville ytimille osoitetut suppenemistulokset käyttöön ja päästään antamaan positiivisia suppenemistuloksia Fourier-sarjojen osasummien keskiarvoille. Luvussa 3 esiteltävät L^1-normin suhteen pätevät suppenemistulokset on esitelty Yitzhak Katznelsonin teoksessa [4, Luku 1.2]. Muuten Luku 3 mukailee Elias M. Steinin ja Rami Shakarchin teosta [8, Luku 2], ellei toisin mainita.

3.1 Dirichlet-ytimet

Tutustutaan tärkeään trigonometriseen polynomiin ja selvitetään, mitä jatkon kannalta hyviä ja toisaalta huonoja ominaisuuksia sillä on. Sellaista astetta $N \in \mathbb{N}_0$ olevaa trigonometristä polynomia, jonka kertoimille pätee $c_n = 1$ kaikilla $|n| \leqslant N$, kutsutaan N:nneksi Dirichlet-ytimeksi.

Määritelmä 3.1. Olkoon $N \in \mathbb{N}_0$. Astetta N olevaa trigonometristä polynomia $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx},$$

kutsutaan N:nneksi Dirichlet-ytimeksi, ja siitä käytetään merkintää D_N.

Huomautus 3.2. Dirichlet-ytimet ovat trigonometrisinä polynomeina lokaalisti Lebesgue-integroituvia, 2π-periodisia ja jatkuvia.

Annetaan Dirichlet-ytimelle toinen tunnettu esitysmuoto.

Lause 3.3. *Olkoot $N \in \mathbb{N}_0$ ja $D_N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ N:s Dirichlet-ydin. Tällöin pätee*

$$D_N(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, & \textit{kun } x \neq 2\pi m \textit{ kaikilla } m \in \mathbb{Z}, \\ 2N+1, & \textit{kun } x = 2\pi m \textit{ jollakin } m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Todistus. Olkoon $m \in \mathbb{Z}$. Kun $x = 2\pi m$, Dirichlet-ytimen määritelmän nojalla pätee

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\cdot 2\pi m} = \sum_{n=-N}^{N} 1 = 2N+1.$$

Olkoon sitten $x \neq 2\pi m$. Merkitään $\omega = e^{ix}$. Jakamalla sarja kahteen osaan saadaan

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \sum_{n=-N}^{-1} \omega^n + \sum_{n=0}^{N} \omega^n.$$

Koska $\omega \neq 1$, jälkimmäinen sarja voidaan esittää geometrisen sarjan summakaavan nojalla muodossa

$$\sum_{n=0}^{N} \omega^n = \frac{1-\omega^{N+1}}{1-\omega} = \frac{\omega^{N+1}-1}{\omega-1}.$$

Tehdään ensimmäiseen sarjaan muuttujanvaihto ja siirretään indeksointi alkamaan nollasta. Tällöin geometrisen sarjan summakaavan nojalla pätee

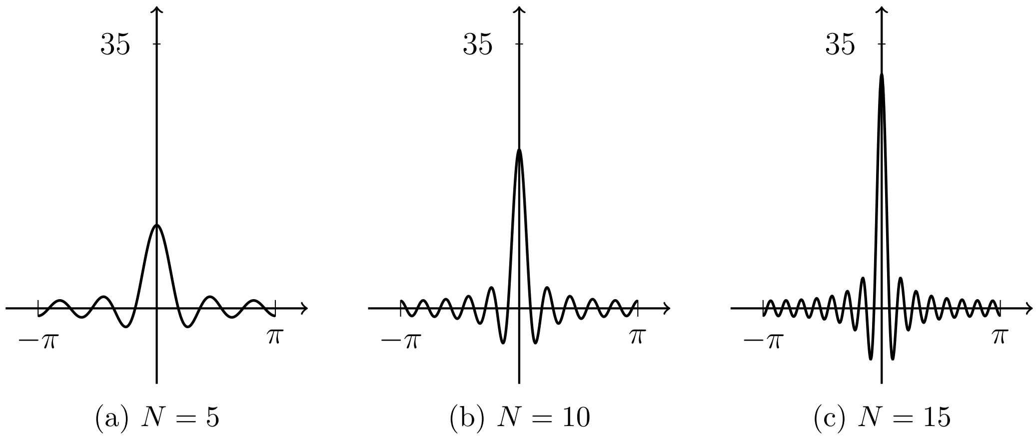
$$\sum_{n=-N}^{-1} \omega^n = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-k-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}\right)^k = \frac{\frac{1}{\omega}\left(1-\left(\frac{1}{\omega}\right)^N\right)}{1-\frac{1}{\omega}} = \frac{1-\omega^{-N}}{\omega-1}.$$

Lasketaan lopuksi sarjojen summa. Laventamalla sopivasti ja palauttamalla merkintä $\omega = e^{ix}$ saadaan Dirichlet-ydin esitettyä kompleksisen sinifunktion avulla halutussa muodossa

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{\omega^{N+1}-\omega^{-N}}{\omega-1} = \frac{\omega^{-\frac{1}{2}}\left(\omega^{N+1}-\omega^{-N}\right)}{\omega^{-\frac{1}{2}}(\omega-1)} = \frac{\omega^{N+\frac{1}{2}}-\omega^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{\omega^{\frac{1}{2}}-\omega^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)x}-e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)x}}{2i} \cdot \frac{2i}{e^{\frac{1}{2}ix}-e^{-\frac{1}{2}ix}} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$ □

Huomautus 3.4. Vaikka Dirichlet-ytimet määritellään kompleksisina trigonometrisinä polynomeina, Lauseen 3.3 muotoilusta nähdään niiden olevan reaaliarvoisia funktioita.

Piirretään nyt Lauseen 3.3 avulla muutama Dirichlet-ytimen kuvaaja välille $[-\pi, \pi]$.



Kuva 3.1: Dirichlet-ytimien D_5, D_{10} ja D_{15} kuvaajat välillä $[-\pi, \pi]$.

Verrataan Kuvan 3.1 Dirichlet-ytimien kuvaajia Kuvan 2.1 trigonometristen polynomien kuvaajiin. Huomataan, että funktioilla on samankaltaisia ominaisuuksia. Mitä suurempi vakio N on, sitä suurempia arvoja Dirichlet-ytimet saavat origon ympäristössä. Toisaalta, kun etäisyys origosta kasvaa, Dirichlet-ytimien arvot värähtelevät vaimentuen x-akselin ympärillä. Erityisesti Dirichlet-ytimet saavat myös negatiivisia arvoja, mikä tulee aiheuttamaan haasteita Fourier-sarjojen suppenemista tutkittaessa. Positiivisten ja negatiivisten arvojen osittaisesta kumoutumisesta seuraa kuitenkin seuraava hyödyllinen tulos.

Lemma 3.5. *Olkoot $N \in \mathbb{N}_0$ ja $D_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dirichlet-ydin. Tällöin pätee*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = 1.$$

Todistus. Ottamalla vakiotermi ulos sarjasta saadaan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^0 + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} e^{inx} \right) dx.$$

Tällöin integraalin lineaarisuuden ja eksponenttifunktion e^{inx} 2π-periodisuuden nojalla pätee

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} \frac{1}{in} \Big/_{-\pi}^{\pi} e^{inx} = 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-N, \\ n \neq 0}}^{N} 0 = 1. \qquad \square$$

Dirichlet-ytimien kuvaajista on lisäksi havaittavissa niiden symmetrisyys y-akselin suhteen.

Lemma 3.6. *Olkoon* $N \in \mathbb{N}_0$. *Dirichlet-ydin* $D_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on parillinen funktio.*

Todistus. Olkoon $m \in \mathbb{Z}$. Lauseen 3.3 ja sinifunktion parittomuuden nojalla kaikilla $x \neq 2\pi m$ pätee

$$D_N(-x) = \frac{\sin\left(-\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{-x}{2}\right)} = \frac{-\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{-\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = D_N(x).$$

Lisäksi, kun $x = 2\pi m$, pätee $D_N(-x) = 2N + 1 = D_N(x)$. Näin ollen Dirichlet-ydin on parillinen funktio. $\square$

Kuvasta 3.1 nähdään Dirichlet-ytimien vaihtavan sitä useammin merkkiään välillä $[-\pi, \pi]$, mitä suurempi vakio N on. Esitellään tämän havainnon innoittamana porrasfunktio, joka palauttaa siihen syötetyn muuttujan merkin. Tällaista merkkifunktiota käytetään esimerkiksi paloittain määriteltyjen funktioiden, kuten itseisarvofunktion, ja konvoluutioiden yhteydessä. Seuraava aputulos on esitelty Katznelsonin teoksessa [4, Luku 2.1, s. 48].

Lemma 3.7. *Olkoon* $\operatorname{sgn} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *porrasfunktio, jolle pätee*

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \textit{kun } x < 0, \\ 0, & \textit{kun } x = 0, \\ 1, & \textit{kun } x > 0. \end{cases}$$

Lisäksi olkoot $N \in \mathbb{N}_0$ *ja* $D_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Dirichlet-ydin. Tällöin pätee*

$$|D_N| = D_N \operatorname{sgn}(D_N).$$

Todistus. Yhdistetty funktio $\operatorname{sgn}(D_N) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään

$$\operatorname{sgn}(D_N(x)) = \begin{cases} -1, & \text{kun } D_N(x) < 0, \\ 0, & \text{kun } D_N(x) = 0, \\ 1, & \text{kun } D_N(x) > 0. \end{cases}$$

Tällöin saadaan

$$D_N(x) \operatorname{sgn}(D_N(x)) = \begin{cases} -D_N(x) > 0, & \text{kun } D_N(x) < 0, \\ 0, & \text{kun } D_N(x) = 0, \\ D_N(x) > 0, & \text{kun } D_N(x) > 0. \end{cases}$$

Näin ollen kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $D_N(x) \operatorname{sgn}(D_N(x)) = |D_N(x)|$. $\square$

3.2 Konvoluutiot

Määritellään konvoluutio, joka on kahdelle lokaalisti Lebesgue-integroituvalle 2π-periodiselle funktiolle määritelty laskutoimitus.

Määritelmä 3.8. Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituvia 2π-periodisia funktioita. Funktiota $f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y)\, dy,$$

kutsutaan funktioiden f ja g konvoluutioksi.

Osoitetaan, että näin määritelty konvoluutio on hyvin määritelty melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Seuraava tulos ja sen todistus mukailevat Katznelsonin teosta [4, Luku 1.1, ss. 4–5]. Todistuksessa ja myöhemmin luvussa käytettävän Fubinin lauseen eri versiot voi kerrata Steinin ja Shakarchin teoksesta [9, Luku 2.3].

Lause 3.9. *Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituvia 2π-periodisia funktioita. Tällöin konvoluutio $f * g$ on hyvin määritelty melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Lisäksi konvoluutio $f * g$ on lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio, jolle pätee*

$$\|f * g\|_{L^1([-\pi,\pi])} \leq \|f\|_{L^1([-\pi,\pi])} \|g\|_{L^1([-\pi,\pi])}\,.$$

Todistus. Funktiot f ja g ovat mitallisia, jolloin funktiot $|f|$ ja $|g|$ ovat mitallisia. Tällöin myös tulofunktio $|f||g| \geq 0$ on mitallinen. Tällöin ei-negatiivisille funktioille suunnatun Fubinin lauseen nojalla integroimisjärjestystä voidaan vaihtaa ja integrointi voidaan suorittaa osissa. Koska $|g|$ on 2π-periodinen, saadaan Lemman 1.17 nojalla

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(x - y)|\, dy\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| \int_{-\pi}^{\pi} |g(x - y)|\, dx\, dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|\, dx\, dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|\, \|g\|_{L^1([-\pi,\pi])}\, dy \\
&= \|f\|_{L^1([-\pi,\pi])} \|g\|_{L^1([-\pi,\pi])} < \infty.
\end{aligned}$$

Näin ollen integraali $\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(x - y)|\, dy$ on äärellinen melkein kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$. Edelleen Lemman 1.17 ja funktion $|g|$ 2π-periodisuuden nojalla integraali $\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(x - y)|\, dy$ on äärellinen melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen konvoluutio $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y)\, dy$ on hyvin määritelty melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Konvoluution $f * g$ 2π-periodisuus seuraa suoraan funktion g 2π-periodisuudesta. Lisäksi edellä tehdyn päättelyn nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^1([-\pi,\pi])} &= \int_{-\pi}^{\pi} |(f * g)(x)| \, dx \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(x-y)| \, dy \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1([-\pi,\pi])} \|g\|_{L^1([-\pi,\pi])} < \infty.
\end{aligned}$$

Tällöin konvoluutio $f * g$ on lokaalisti Lebesgue-integroituva ja sille pätee

$$\|f * g\|_{L^1([-\pi,\pi])} \leq \|f\|_{L^1([-\pi,\pi])} \|g\|_{L^1([-\pi,\pi])} . \qquad \square$$

Seuraava lause avaa konvoluutioiden merkitystä Fourier-sarjojen suppenemisen tutkimisessa. Huomionarvoista on, että Fourier-sarjan osasummat voidaan esittää tutkittavan funktion ja Dirichlet-ytimen konvoluutiona.

Lause 3.10. *Olkoot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio ja $D_N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dirichlet-ydin, missä $N \in \mathbb{N}_0$. Tällöin funktion f Fourier-sarjan osasummille $S_N(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pätee*

$$S_N(f) = f * D_N.$$

Todistus. Olkoon $N \in \mathbb{N}_0$. Tällöin Fourier-kertoimien, Dirichlet-ytimen ja konvoluution määritelmien nojalla kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{inx} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \, dy \right) e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)} \, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) \, dy = (f * D_N)(x). \qquad \square
\end{aligned}$$

Esitellään seuraavaksi konvoluution ominaisuuksia, joita tullaan jatkossa tarvitsemaan.

Lause 3.11. *Olkoot $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituvia 2π-periodisia funktioita. Tällöin pätee*

1) $f * (g + h) = f * g + f * h.$ *(lineaarisuus)*

2) $f * g = g * f$. *(vaihdannaisuus)*
3) $(f * g) * h = f * (g * h)$. *(liitännäisyys)*

Todistus. Konvoluution lineaarisuus seuraa suoraan integraalin lineaarisuudesta. Konvoluution vaihdannaisuuden osoittamiseksi tehdään muuttujanvaihto $u = x - y$. Tällöin Lemman 1.17 nojalla kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} g(u)f(x-u)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)f(x-u)\,du = (g * f)(x).\end{aligned}$$

Osoitetaan sitten konvoluution liitännäisyys. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Lauseen 3.9 nojalla kahden lokaalisti Lebesgue-integroituvan funktion konvoluutio on lokaalisti Lebesgue-integroituva ja hyvin määritelty melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska $f * g$ ja h ovat molemmat lokaalisti Lebesgue-integroituvia, $(f * g) * h$ on lokaalisti Lebesgue-integroituva. Tällöin konvoluution määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(y)h(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(y-z)\,dz \right) h(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(y-z)h(x-y)\,dz\,dy.\end{aligned}$$

Funktion ollessa lokaalisti Lebesgue-integroituva Fubinin lauseen nojalla integroimisjärjestystä voidaan vaihtaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(y-z)h(x-y)\,dy\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y-z)h(x-y)\,dy \right) dz.\end{aligned}$$

Tehdään muuttujanvaihto $u = y - z$. Tällöin Lemman 1.17 nojalla pätee

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y-z)h(x-y)\,dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-z}^{\pi-z} g(u)h(x-z-u)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)h(x-z-u)\,du.\end{aligned}$$

Lopuksi konvoluution määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)h(x-z-u)\,du\right)dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)(g*h)(x-z)\,dz \\ &= (f*(g*h))(x).\end{aligned}$$

□

Lause 3.12. *Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituvia 2π-periodisia funktioita. Jos f tai g on jatkuva, niin $f * g$ on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Konvoluution vaihdannaisuuden nojalla voidaan olettaa, että g on jatkuva. Osoitetaan ensin, että tällöin g on tasaisesti jatkuva koko reaaliakselilla. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska g jatkuva koko reaaliakselilla, on se tasaisesti jatkuva suljetulla välillä $[-3\pi, 3\pi]$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x, y \in [-3\pi, 3\pi], \text{ joille } |x-y| < \delta. \tag{3.1}$$

Valitaan $\delta_0 = \min\{\delta, 2\pi\}$. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ siten, että $|x-y| < \delta_0 \leq 2\pi$. Erityisesti on olemassa $m \in \mathbb{Z}$ siten, että $x + 2\pi m \in [-\pi, \pi]$. Tällöin pätee $y + 2\pi m \in [-3\pi, 3\pi]$. Nyt funktion g 2π-periodisuuden ja epäyhtälön (3.1) nojalla pätee

$$|g(x) - g(y)| = |g(x + 2\pi m) - g(y + 2\pi m)| < \varepsilon$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, joille $|x - y| < \delta_0$. Näin ollen g on tasaisesti jatkuva koko reaaliakselilla.

Osoitetaan sitten, että konvoluutio $f * g$ on tasaisesti jatkuva. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska g on tasaisesti jatkuva reaaliakselilla, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ joille } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Olkoot siis $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $|x_1 - x_2| < \delta$. Koska kaikilla $y \in \mathbb{R}$ pätee $|(x_1 - y) - (x_2 - y)| = |x_1 - x_2| < \delta$, saadaan

$$\begin{aligned}|(f*g)(x_1) - (f*g)(x_2)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(y)g(x_1-y) - f(y)g(x_2-y))\,dy\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)||g(x_1-y) - g(x_2-y)|\,dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\,dy \\ &= \frac{\varepsilon\,\|f\|_{L^1([-\pi,\pi])}}{2\pi}.\end{aligned}$$

Väite seuraa tästä vakion $\varepsilon > 0$ ollessa mielivaltainen. □

3.3 Hyvät ytimet

Tässä luvussa määritellään joukko hyviä ytimiä. Tällaiseen joukkoon kuuluvien funktioiden ominaisuudet muistuttavat Lemmassa 2.1 muodostettujen trigonometristen polynomien ominaisuuksia. Dirichlet-ytimien muistuttaessa puolestaan edellä mainittuja trigonometrisiä polynomeja, herää kysymys siitä, muodostavatko Dirichlet-ytimet hyvien ytimien joukon. Tutkimalla ominaisuuksia tarkemmin huomataan, että Dirichlet-ytimet eivät toteuta kaikkia hyvien ytimien ominaisuuksia.

Määritelmä 3.13. Olkoon $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ joukko lokaalisti Lebesgue-integroituvia 2π-periodisia funktioita $K_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kyseessä on hyvien ytimien joukko, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1) Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1.$$

2) On olemassa $M > 0$ siten, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee
$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|\,dx \leq M.$$

3) Jokaiselle $\varepsilon > 0$ ja $\delta > 0$ on olemassa $N_{\varepsilon,\delta} \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n \geq N_{\varepsilon,\delta}$ pätee
$$\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |K_n(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Se, miksi hyviä ytimiä kutsutaan hyviksi, ilmenee niiden hyvistä suppenemistuloksista konvoluutioiden yhteydessä. Erityisesti jatkuville 2π-periodisille funktioille pätee $f * K_n \to f$ pisteittäin sekä tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$.

Lause 3.14. *Olkoot $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hyvien ytimien joukko ja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio. Jos f on jatkuva, funktiojono $(f * K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota f.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että funktion f jatkuvuudesta seuraa funktion rajoittuneisuus. Koska f on jatkuva suljetulla välillä $[-\pi, \pi]$, f on rajoitettu tällä välillä. Tällöin on olemassa $C \geq 0$ siten, että kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$ pätee $|f(x)| \leq C$. Olkoon nyt $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti on olemassa $m \in \mathbb{Z}$ siten, että $x + 2\pi m \in [-\pi, \pi]$. Tällöin funktion f 2π-periodisuuden nojalla pätee
$$|f(x)| = |f(x + 2\pi m)| \leq C \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Osoitetaan sitten, että funktion f jatkuvuudesta seuraa funktiojonon $(f * K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tasainen suppeneminen joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota f. Olkoon

$\varepsilon > 0$. Lauseen 3.12 todistuksessa osoitettiin, että f on jatkuvana 2π-periodisena funktiona tasaisesti jatkuva koko reaaliakselilla. Tällöin on olemassa $0 < \delta < \pi$ siten, että

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}, \text{ joille } |(x-y) - x| = |y| < \delta. \tag{3.3}$$

Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin hyvien ytimien määritelmän kohdan 1) ja konvoluution vaihdannaisuuden nojalla kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}(f * K_n)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)K_n(x-y)\,dy - f(x)\cdot 1 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)K_n(y)\,dy - f(x)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)(f(x-y) - f(x))\,dy.\end{aligned}$$

Hyödynnetään kolmioepäyhtälöä ja jaetaan integroimisväli osiin, jolloin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ edelleen pätee

$$\begin{aligned}|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq{}& \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta} |K_n(y)||f(x-y) - f(x)|\,dy \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)||f(x-y) - f(x)|\,dy.\end{aligned}$$

Ensimmäisen määrätyn integraalin arvioimiseen voidaan hyödyntää funktion f tasaista jatkuvuutta eli epäyhtälöä (3.3). Hyvien ytimien määritelmän kohdan 2) nojalla on olemassa $M > 0$ siten, että kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta} |K_n(y)||f(x-y) - f(x)|\ dy &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|y|<\delta} |K_n(y)|\,dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\,dy \leq \frac{\varepsilon M}{2\pi}.\end{aligned}$$

Toisen määrätyn integraalin arvioimiseen voidaan hyödyntää kolmioepäyhtälöä sekä funktion f rajoittuneisuutta. Tällöin epäyhtälön (3.2) nojalla on olemassa $C \geq 0$ siten, että

$$|f(x-y) - f(x)| \leq |f(x-y)| + |f(x)| \leq 2C.$$

Tällöin hyvien ytimien määritelmän kohdan 3) nojalla on olemassa $N_{\varepsilon,\delta} \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n \geq N_{\varepsilon,\delta}$ pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)||f(x-y) - f(x)|\,dy \leq \frac{2C}{2\pi}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)|\,dy \leq \frac{2C\varepsilon}{2\pi}.$$

Kootaan yllä tehdyt arviot. Tällöin supremumin määritelmän nojalla kaikilla $n \geq N_{\varepsilon,\delta}$ pätee

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f * K_n)(x) - f(x)| \leq \left(\frac{M + 2C}{2\pi}\right) \varepsilon.$$

Väite seuraa tästä vakion $\varepsilon > 0$ ollessa mielivaltainen. $\square$

Tutkitaan nyt hyvien ytimien konvoluutioita Lebesgue-integroituvien 2π-periodisten funktioiden kanssa. Osoitetaan, että tällöin $f * K_n \to f$ pätee L^1-normin suhteen. Annetaan tämän todistamista varten seuraava aputulos, jonka mukaan funktiot, joiden 2π-periodinen laajennus on jatkuva, ovat tiheässä avaruudessa $L^1([-\pi, \pi])$.

Lemma 3.15. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio. Jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $g \in C_{per}([-\pi, \pi])$ siten, että*

$$\|f - g\|_{L^1([-\pi,\pi])} < \varepsilon.$$

Todistus. Esitellään ainoastaan todistuksen idea. Katso lisätietoa Steinin ja Shakarchin teoksesta [9, Luku 2.2, ss. 71–72].
Tarkastellaan funktiota $f\chi_{[-\pi,\pi]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jolle pätee $(f\chi_{[-\pi,\pi]})(x) = f(x)$, kun $x \in [-\pi, \pi]$, ja $(f\chi_{[-\pi,\pi]})(x) = 0$, kun $x \notin [-\pi, \pi]$. Tällöin pätee

$$\left\|f\chi_{[-\pi,\pi]}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |(f\chi_{[-\pi,\pi]})(x)|\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Yllä mainitun viitteen nojalla on olemassa jatkuva funktio $h_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ siten, että $\left\|f\chi_{[-\pi,\pi]} - h_0\right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{2}$. Olkoon nyt $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ funktion h_0 rajoittumafunktio. Tällöin pätee

$$\|f - h\|_{L^1([-\pi,\pi])} \leq \left\|f\chi_{[-\pi,\pi]} - h_0\right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jos funktiolle h pätee $h(-\pi) = h(\pi)$, väite seuraa tästä. Jos taas pätee $h(-\pi) \neq h(\pi)$, voidaan konstruoida jatkuva funktio $g \in C_{\mathrm{per}}([-\pi, \pi])$ siten, että $\|h - g\|_{L^1([-\pi,\pi])} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin pätee

$$\|f - g\|_{L^1([-\pi,\pi])} \leq \|f - h\|_{L^1([-\pi,\pi])} + \|h - g\|_{L^1([-\pi,\pi])} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Lause 3.16. *Olkoot $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hyvien ytimien joukko ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio. Tällöin pätee*

$$\|f * K_n - f\|_{L^1([-\pi,\pi])} \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lemman 3.15 nojalla on olemassa $g \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ siten, että $\|f-g\|_{L^1([-\pi,\pi])} < \varepsilon$. Lisäksi hyvien ytimien määritelmän kohdan 2) nojalla on olemassa $M > 0$ siten, että $\|K_n\|_{L^1([-\pi,\pi])} \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin konvoluution lineaarisuuden ja Lauseen 3.9 nojalla kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}\|f * K_n - g * K_n\|_{L^1([-\pi,\pi])} &= \|(f-g) * K_n\|_{L^1([-\pi,\pi])}\\ &\leq \|f-g\|_{L^1([-\pi,\pi])}\,\|K_n\|_{L^1([-\pi,\pi])} \leq \varepsilon M.\end{aligned}$$

Toisaalta, koska $g \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ on jatkuva, Lauseen 3.14 nojalla on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |(g * K_n)(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N_\varepsilon.$$

Arvioidaan integrandia supremumin avulla. Tällöin kaikilla $n \geq N_\varepsilon$ pätee

$$\|g * K_n - g\|_{L^1([-\pi,\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} |(g * K_n)(x) - g(x)|\,dx \leq 2\pi\varepsilon.$$

Näin ollen kolmioepäyhtälön nojalla kaikilla $n \geq N_\varepsilon$ pätee

$$\begin{aligned}\|f * K_n - f\|_{L^1([-\pi,\pi])} &\leq \|f * K_n - g * K_n\|_{L^1([-\pi,\pi])}\\ &\quad + \|g * K_n - g\|_{L^1([-\pi,\pi])} + \|f-g\|_{L^1([-\pi,\pi])}\\ &\leq (M + 2\pi + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Väite seuraa tästä vakion $\varepsilon > 0$ ollessa mielivaltainen. □

Edellisessä luvussa todistetun Lauseen 3.10 nojalla Fourier-sarjojen osasummat voidaan esittää konvoluutiona $S_N(f) = f * D_N$. Jos Dirichlet-ytimet muodostaisivat hyvien ytimien joukon, tiedettäisiin Lauseen 3.14 nojalla jatkuvan funktion Fourier-sarjan suppenevan tasaisesti kohti funktiota itseään. Vaikka Lemman 3.5 nojalla Dirichlet-ytimet toteuttavatkin hyvien ytimien määritelmän ensimmäisen ehdon, Dirichlet-ytimet eivät valitettavasti muodosta hyvien ytimien joukkoa. Tämä herättää epäilyksen siitä, että funktion jatkuvuus ei ole riittävä ehto sen Fourier-sarjan pisteittäiseen suppenemiseen.

Lause 3.17. *Olkoon $\{D_N\}_{N\in\mathbb{N}_0}$ Dirichlet-ytimien joukko. Tällöin kyseessä ei ole hyvien ytimien joukko. Erityisesti Dirichlet-ytimelle $D_N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä $N \in \mathbb{N}_0$, pätee*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx \geq \frac{8}{\pi} \ln N.$$

Todistus. Todistus mukailee Bhatian teoksessa [1, Luku 2.2, ss. 33–35] kuvailtua todistusstrategiaa. Olkoon $N \in \mathbb{N}_0$. Dirichlet-ytimien parillisuuden ja Lauseen 3.3 nojalla pätee

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx = 2\int_0^{\pi} |D_N(x)|\, dx = 2\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)\right|}{\left|\sin(\frac{x}{2})\right|}\, dx.$$

Tehdään muuttujanvaihto $u = \frac{x}{2}$. Tällöin kaikilla u, joille $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$, pätee $|\sin(u)| = \sin(u) \leq u$. Tällöin saadaan arvio

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin\left((2N+1)\,u\right)|}{|\sin(u)|}\, du \geq 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin((2N+1)u)|}{u}\, du.$$

Tehdään uusi muuttujanvaihto $t = (2N+1)u$. Jakamalla integroimisväli osiin saadaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx \geq 4\int_0^{(2N+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt = 4\sum_{k=0}^{2N} \int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt.$$

Tarkastellaan määrättyä integraalia yksittäisen välin yli. Koska $t \leq (k+1)\frac{\pi}{2}$, saadaan

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt \geq \frac{1}{(k+1)\frac{\pi}{2}} \int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} |\sin(t)|\, dt.$$

Sinin symmetrian ja jaksollisuuden nojalla funktion $|\sin(t)| \geq 0$ määrätty integraali välin $[k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}]$ yli on yhtä suuri kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$. Täten voidaan tarkastella määrättyä integraalia välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$, jolloin $\sin(t) \geq 0$. Tällöin pätee

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt \geq \frac{1}{(k+1)\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\, dt = \frac{1}{(k+1)\frac{\pi}{2}}.$$

Näin ollen saadaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx \geq 4\sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{(k+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{k+1} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k}.$$

Pinta-alatulkinnan avulla kyseessä on funktion $\frac{1}{x}$ määrätyn integraalin eräs yläsumma. Tällöin logaritmin kasvavuuden nojalla pätee

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx \geq \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k} \geq \frac{8}{\pi}\int_1^{2N+2} \frac{1}{x}\, dx = \frac{8}{\pi}\ln(2N+2) \geq \frac{8}{\pi}\ln N. \quad \square$$

3.4 Fejer-ytimet

Tutustutaan toiseen Fourier-sarjojen suppenemisen tutkimisen kannalta tärkeään ytimeen. Vaikka Dirichlet-ytimet eivät muodosta hyvien ytimien joukkoa, osoittautuu, että niiden aritmeettisena keskiarvona saatavat Fejer-ytimet muodostavat.

Määritelmä 3.18. Olkoon $N \in \mathbb{N}$. Funktiota $F_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x),$$

joka on N:n ensimmäisen Dirichlet-ytimen aritmeettinen keskiarvo, kutsutaan N:nneksi Fejer-ytimeksi.

Huomautus 3.19. Fejer-ytimet ovat Dirichlet-ytimien äärellisenä summana lokaalisti Lebesgue-integroituvia, 2π-periodisia ja jatkuvia.

Annetaan myös Fejer-ytimille toinen tunnettu esitysmuoto.

Lause 3.20. *Olkoot $N \in \mathbb{N}$ ja $F_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ N:s Fejer-ydin. Tällöin pätee*

$$F_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}, & \text{kun } x \neq 2\pi m \text{ kaikilla } m \in \mathbb{Z}, \\ N, & \text{kun } x = 2\pi m \text{ jollakin } m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Todistus. Olkoon $m \in \mathbb{Z}$. Käsitellään ensin tapaus $x = 2\pi m$. Tällöin Lauseen 3.3 nojalla Fejer-ydin voidaan esittää sarjana

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(2n+1) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} n + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1.$$

Siirretään ensimmäisen sarjan indeksointia ja hyödynnetään tunnettua summakaavaa, jolloin saadaan

$$\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}(n-1) = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} n - \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} 1 = \frac{2}{N}\cdot\frac{N(N+1)}{2} - 2 = N - 1.$$

Jälkimmäisen sarjan ollessa 1, saadaan $F_N(x) = N-1+1 = N$, kun $x = 2\pi m$.

Olkoon sitten $x \neq 2\pi m$. Merkitään $\omega = e^{ix}$. Tällöin Lauseen 3.3 todistuksen nojalla Fejer-ydin voidaan esittää sarjana

$$\begin{aligned} NF_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega^{n+\frac{1}{2}} - \omega^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\omega^{n+\frac{1}{2}} - \omega^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right). \end{aligned}$$

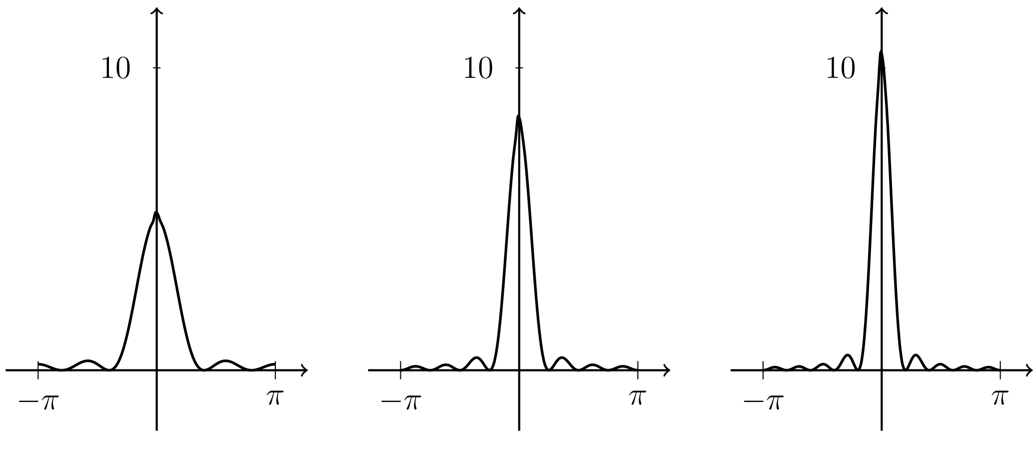
Geometrisen sarjan summakaavan nojalla sarja voidaan sieventää muotoon

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1}\left(\omega^{n+\frac{1}{2}}-\omega^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) &= \omega^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{n}-\omega^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{-n} \\
&= \frac{1}{\omega^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\omega^{N}-1}{\omega-1}-\frac{1}{\omega^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\omega^{-N}-1}{\omega^{-1}-1} \\
&= \frac{\omega^{N}-1}{\omega^{\frac{1}{2}}-\omega^{-\frac{1}{2}}}+\frac{\omega^{-N}-1}{\omega^{\frac{1}{2}}-\omega^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\omega^{N}-2+\omega^{-N}}{\omega^{\frac{1}{2}}-\omega^{-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Palauttamalla merkintä $\omega = e^{ix}$ ja hyödyntämällä kompleksisen sinifunktion määritelmää saadaan Fejer-ydin esitettyä halutussa muodossa

$$\begin{aligned}
F_N(x) &= \frac{1}{N}\frac{1}{\omega^{\frac{1}{2}}-\omega^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\omega^{N}-2+\omega^{-N}}{\omega^{\frac{1}{2}}-\omega^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{N}\frac{\left(\omega^{\frac{N}{2}}-\omega^{-\frac{N}{2}}\right)^2}{\left(\omega^{\frac{1}{2}}-\omega^{-\frac{1}{2}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{e^{i\frac{N}{2}x}-e^{-i\frac{N}{2}x}}{2i}\right)^2\left(\frac{2i}{e^{\frac{1}{2}ix}-e^{-\frac{1}{2}ix}}\right)^2 = \frac{1}{N}\frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Piirretään nyt Lauseen 3.20 avulla Fejer-ytimien kuvaajia välille $[-\pi, \pi]$.



(a) $N = 5$ (b) $N = 8$ (c) $N = 10$

Kuva 3.2: Fejer-ytimien F_5, F_8 ja F_{10} kuvaajat välillä $[-\pi, \pi]$.

Erona Dirichlet-ytimiin Fejer-ytimet saavat pelkästään ei-negatiivisia arvoja, mikä nähdään niin Lauseen 3.20 muotoilusta kuin Kuvasta 3.2. Tällöin

Fejer-ytimien tapauksessa hyvien ytimien määritelmän ehdon 1) toteutuminen ei seuraa positiivisten ja negatiivisten arvojen osittaisesta kumoutumisesta. Näin ollen Fejer-ytimet toteuttavat myös hyvien ytimien määritelmän toisen ehdon siinä, missä Dirichlet-ytimet eivät.

Lause 3.21. *Olkoon $\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ Fejer-ytimien muodostama joukko. Tällöin kyseessä on hyvien ytimien joukko.*

Todistus. Olkoon $N \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että Fejer-ydin $F_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa Määritelmän 3.13 ehdot.

1) Lemman 3.5 nojalla Dirichlet-ytimille pätee $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Tällöin Fejer-ytimen määritelmän ja integraalin lineaarisuuden nojalla pätee

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)\,dx \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1 = \frac{1}{N}\cdot N = 1.\end{aligned}$$

2) Koska kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $F_N(x) \geq 0$, edellä todistetun nojalla pätee

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx = 2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N\left(x\right)\,dx = 2\pi\cdot 1 \leq 2\pi.$$

3) Olkoot $\delta > 0$ ja $\delta \leq |x| \leq \pi$. Koska $0 < \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, saadaan Fejer-ydintä arvioitua

$$|F_N(x)| = F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{N\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}.$$

Tällöin edelleen pätee

$$\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |F_N(x)|\,dx \leq \int_{\delta\leq|x|\leq\pi}\frac{1}{N\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\,dx \leq \frac{2\pi}{N\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \to 0, \text{ kun } N\to\infty.$$

Väite seuraa tästä raja-arvosta. □

Lauseissa 3.14 ja 3.16 esitellyt hyvien ytimien suppenemistulokset päästään nyt Lauseen 3.21 nojalla antamaan Fejer-ytimille.

Lause 3.22. *Olkoot $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fejer-ytimien muodostama joukko ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jatkuva 2π-periodinen funktio. Tällöin funktiojono $(f * F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota f.*

Lause 3.23. *Olkoot* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Fejer-ytimien muodostama joukko ja* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *lokaalisti Lebesgue-integroituva* 2π*-periodinen funktio. Tällöin pätee*

$$\|f * F_n - f\|_{L^1([-\pi,\pi])} \to 0, \quad \textit{kun } n\to\infty.$$

Vaikka Fourier-sarjan osasummia ei saatukaan esitettyä funktion ja hyvien ytimien konvoluutiona, niiden aritmeettinen keskiarvo saadaan. Tällöin edellä esitellyt tulokset saadaan yleistettyä Fourier-sarjojen osasummien keskiarvoille.

Lause 3.24. *Olkoot* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *lokaalisti Lebesgue-integroituva* 2π*-periodinen funktio ja* $F_N\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *Fejer-ydin, missä* $N\in\mathbb{N}$*. Tällöin funktion* f *Fourier-sarjan osasummille* $S_n(f)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *pätee*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = f * F_N.$$

Todistus. Olkoon $N\in\mathbb{N}$. Lauseen 3.10 ja konvoluution lineaarisuuden nojalla kaikilla $x\in\mathbb{R}$ pätee

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(f * D_n)(x) = \left(f * \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n\right)(x) = (f*F_N)(x).$$

□

Näin ollen Lauseiden 3.22 ja 3.24 nojalla jatkuvien 2π-periodisten funktioiden Fourier-sarjojen osasummien keskiarvot muodostavat funktiojonon, joka suppenee pisteittäin sekä tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ kohti tutkittua funktiota.

Seuraus 3.25. *Olkoon* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *jatkuva* 2π*-periodinen funktio. Tällöin funktion* f *Fourier-sarjan osasummille* $S_n(f)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *pätee*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) - f(x)\right| \to 0, \quad \textit{kun } N\to\infty.$$

Lauseiden 3.23 ja 3.24 nojalla puolestaan Lebesgue-integroituvien 2π-periodisten funktioiden Fourier-sarjojen osasummien keskiarvot suppenevat L^1-normin suhteen kohti tutkittua funktiota.

Seuraus 3.26. *Olkoon* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *lokaalisti Lebesgue-integroituva* 2π*-periodinen funktio. Tällöin funktion* f *Fourier-sarjan osasummille* $S_n(f)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *pätee*

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) - f\right\|_{L^1([-\pi,\pi])} \to 0, \quad \textit{kun } N\to\infty.$$

Lauseilla 3.23 ja 3.24 on toinen suoraviivainen seuraus, jonka mukaan lokaalisti Lebesgue-integroituvia 2π-periodisia funktioita voidaan approksimoida trigonometrisillä polynomeilla. Näin ollen myös trigonometriset polynomit ovat tiheässä avaruudessa $L^1([-\pi,\pi])$. Tähän tulokseen palataan heti seuraavan luvun alussa.

Seuraus 3.27. *Olkoon* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *lokaalisti Lebesgue-integroituva* 2π*-periodinen funktio. Tällöin jokaiselle* $\varepsilon>0$ *on olemassa trigonometrinen polynomi* $P\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *siten, että*

$$\|f-P\|_{L^1([-\pi,\pi])}<\varepsilon.$$

Todistus. Lauseen 3.24 nojalla $f*F_n$ on trigonometristen polynomien äärellisenä summana trigonometrinen polynomi. Näin ollen valitsemalla $P=f*F_n$ väite seuraa Lauseesta 3.23 riittävän suurella $n\in\mathbb{N}$. □

3.5 Dini-testi ja pisteittäisiä suppenemistuloksia

Tässä luvussa selvitetään, mikä oletus on riittävä takaamaan Fourier-sarjan pisteittäisen suppenemisen. Tällaisia lieviä oletuksia on useita, joista tässä esitellään Dini-testi. Dini-testin mukaan lokaali oletus tarkastelupisteen ympäristössä riittää takaamaan lokaalisti Lebesgue-integroituvan 2π-periodisen funktion Fourier-sarjan pisteittäisen suppenemisen. Dini-testin avulla voidaan osoittaa funktion derivoituvuuden ja Hölder-jatkuvuuden olevan esimerkkejä vahvemmista ehdoista, jotka takaavat Fourier-sarjan pisteittäisen suppenemisen. Luku mukailee Yitzhak Katznelsonin teosta [4, Luvut 1.2 ja 2.2] sekä Elias M. Steinin ja Rami Shakarchin teosta [8, Luku 3.2.1].

Seuraava tulos, jota kutsutaan Riemann–Lebesguen lemmaksi, on esimerkki funktion säännöllisyyden tutkimisesta sen Fourier-kertoimien avulla.

Lause 3.28. *Olkoon* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *lokaalisti Lebesgue-integroituva* 2π*-periodinen funktio. Tällöin pätee* $\widehat{f}(n)\to 0$*, kun* $|n|\to\infty$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon>0$. Seurauksen 3.27 nojalla on olemassa astetta $N\in\mathbb{N}_0$ oleva trigonometrinen polynomi P siten, että $\|f-P\|_{L^1([-\pi,\pi])}<2\pi\varepsilon$. Trigonometrisen polynomin P Fourier-kertoimille pätee $\widehat{P}(n)=0$ kaikilla $n>|N|$. Tällöin kaikilla $n>|N|$ pätee

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\widehat{f}(n)-\widehat{P}(n)\right| &= \left|\widehat{(f-P)}(n)\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-P(x)|\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\|f-P\|_{L^1([-\pi,\pi])}<\varepsilon.\end{aligned}$$ □

Lemma 3.29. *Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio. Tällöin pätee*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin((n+\tfrac{1}{2})x)\,dx \to 0, \quad \textit{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{N}_0$. Kompleksisen sinifunktion määritelmän nojalla kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{2i},$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\,dx = &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)e^{\frac{1}{2}ix}}{2i}e^{-i(-n)x}\,dx \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)e^{-\frac{1}{2}ix}}{2i}e^{-inx}\,dx.\end{aligned}$$

Osoitetaan, että molemmat määrätyt integraalit lähestyvät nollaa, kun n kasvaa rajatta. Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ välillä $[-\pi, \pi[$ määritellyn funktion $\frac{f(x)e^{\frac{1}{2}ix}}{2i}$ 2π-periodinen laajennus. Koska f on lokaalisti Lebesgue-integroituva, saadaan

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x)e^{\frac{1}{2}ix}}{2i}\right|dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx < \infty.$$

Näin ollen g on lokaalisti Lebesgue-integroituva ja 2π-periodinen. Tällöin Riemann–Lebesguen lemman, eli Lauseen 3.28, nojalla pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)e^{\frac{1}{2}ix}}{2i}e^{-i(-n)x}\,dx = \widehat{g}(-n) \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty. \tag{3.4}$$

Olkoon $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ välillä $[-\pi, \pi[$ määritellyn funktion $\frac{f(x)e^{-\frac{1}{2}ix}}{2i}$ 2π-periodinen laajennus. Vastaavasti h on lokaalisti Lebesgue-integroituva ja 2π-periodinen, jolloin Lauseen 3.28 nojalla pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)e^{-\frac{1}{2}ix}}{2i}e^{-inx}\,dx = \widehat{h}(n) \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty. \tag{3.5}$$

Raja-arvojen (3.4) ja (3.5) nojalla pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\,dx \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty. \qquad \square$$

Esitellään nyt lause, jota kutsutaan Dini-testiksi. Dini-testin mukaan lokaalisti Lebesgue-integroituvan 2π-periodisen funktion Fourier-sarjan suppeneminen tarkastelupisteessä riippuu funktion käytöksestä pelkästään tarkastelupisteen ympäristössä.

Lause 3.30. *Olkoot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio ja $x \in \mathbb{R}$. Jos on olemassa $0 < \delta < \pi$ siten, että*

$$\int_{|y|<\delta} \left| \frac{f(x-y) - f(x)}{y} \right| dy < \infty,$$

niin funktion f Fourier-sarja suppenee pisteessä x kohti arvoa $f(x)$.

Todistus. Olkoot $x \in \mathbb{R}$ ja $0 < \delta < \pi$ siten, että lauseen oletus pätee. Lauseen 3.10 ja konvoluution vaihdannaisuuden nojalla Fourier-sarjan osasummille pätee $S_N(f) = D_N * f$ kaikilla $N \in \mathbb{N}_0$. Lisäksi Lemman 3.5 nojalla Dirichlet-ytimille pätee $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)\,dy = 1$ kaikilla $N \in \mathbb{N}_0$. Olkoon nyt $N \in \mathbb{N}_0$. Tällöin Lauseen 3.14 todistuksen tavoin $S_N(f) - f$ saadaan esitettyä muodossa

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta} D_N(y)(f(x-y) - f(x))\,dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \le |y| \le \pi} D_N(y)(f(x-y) - f(x))\,dy. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Osoitetaan, että ensimmäinen määrätty integraali lähestyy nollaa, kun N kasvaa rajatta. Merkitään $I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta} D_N(y)(f(x-y) - f(x))\,dy$. Nyt Lauseen 3.3 nojalla kaikilla $0 < |y| < \delta$ pätee

$$D_N(y)(f(x-y) - f(x)) = \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right) y\right).$$

Koska yksittäinen piste ei vaikuta määrätyn integraalin arvoon, ei jatkossa keskitytä funktion käyttäytymiseen origossa. Tällöin karakteristisen funktion $\chi_{\{|y|<\delta\}}$, jolle pätee $\chi_{\{|y|<\delta\}}(y) = 1$, kun $|y| < \delta$, ja $\chi_{\{|y|<\delta\}}(y) = 0$, kun $\delta \le |y| \le \pi$, avulla saadaan

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \chi_{\{|y|<\delta\}}(y) \sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right) y\right) dy.$$

Olkoon $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funktion $g\colon [-\pi, \pi[\ \to \mathbb{C}$,

$$g(y) = \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \chi_{\{|y|<\delta\}}(y),$$

2π-periodinen laajennus. Koska kaikilla $0 < |y| < \delta < \pi$ pätee $\frac{\left|\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right|}{|y|} \geq C$, missä $C > 0$, lauseen oletuksen nojalla pätee

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \chi_{\{|y|<\delta\}}(y) \right| dy &= \int_{|y|<\delta} \frac{|f(x-y) - f(x)|}{\left|\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right|} \, dy \\ &\leq \frac{1}{C} \int_{|y|<\delta} \frac{|f(x-y) - f(x)|}{|y|} \, dy < \infty.\end{aligned}$$

Näin ollen g_1 on lokaalisti Lebesgue-integroituva ja 2π-periodinen, jolloin Lemman 3.29 nojalla saadaan

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_1(y) \sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right) y\right) dy \to 0, \quad \text{kun } N \to \infty. \tag{3.7}$$

Osoitetaan, että myös jälkimmäinen määrätty integraali lähestyy nollaa, kun N kasvaa rajatta. Merkitään $I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} D_N(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy$. Vastaavasti Lauseen 3.3 ja karakteristisen funktion avulla saadaan

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \chi_{\{\delta \leq |y| \leq \pi\}}(y) \sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right) y\right) dy.$$

Olkoon $g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funktion $g \colon [-\pi, \pi[\to \mathbb{C}$,

$$g(y) = \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \chi_{\{\delta \leq |y| \leq \pi\}}(y),$$

2π-periodinen laajennus. Koska $0 < \left|\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right|$ kaikilla $\delta \leq |y| \leq \pi$ ja f on lokaalisti Lebesgue-integroituva, saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \chi_{\{\delta \leq |y| \leq \pi\}}(y) \right| dy &= \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \frac{|f(x-y) - f(x)|}{\left|\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right|} \, dy \\ &\leq \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \frac{|f(x-y)| + |f(x)|}{\left|\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right|} \, dy \\ &\leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right|} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)| + |f(x)| \, dy \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Näin ollen g_2 on lokaalisti Lebesgue-integroituva ja 2π-periodinen, jolloin Lemman 3.29 nojalla pätee

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_2(y) \sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right) y\right) dy \to 0, \quad \text{kun } N \to \infty. \tag{3.8}$$

Näin ollen yhtälön (3.6) sekä raja-arvojen (3.7) ja (3.8) nojalla saadaan $S_N(f)(x) \to f(x)$, kun $N \to \infty$, mikä todistaa väitteen. $\square$

Esitellään seuraavaksi Fourier-sarjojen pisteittäisestä suppenemisesta kertovia tuloksia, jotka seuraavat suoraviivaisesti Dini-testistä. Jos kaksi lokaalisti Lebesgue-integroituvaa funktiota ovat yhtä suuret tarkastelupisteen $x \in \mathbb{R}$ sisältävällä avoimella välillä, funktioiden Fourier-sarjat joko suppenevat tässä pisteessä ja $S_N(f)(x) = S_N(g)(x)$ tai niiden Fourier-sarjat hajaantuvat. Funktioiden käytöksen ei täten tarvitse olla yhtenevää etäämpänä tarkastelupisteestä.

Seuraus 3.31. *Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituvia 2π-periodisia funktioita ja $x \in \mathbb{R}$. Jos on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla $y \in \mathbb{R}$, joille $|y - x| < \delta$, pätee $f(y) = g(y)$, niin*

$$(S_N(f)(x) - S_N(g)(x)) \to 0, \quad \textit{kun } N \to \infty,$$

missä $S_N(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ja $S_N(g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ovat funktioiden f ja g Fourier-sarjojen osasummat jokaisella $N \in \mathbb{N}_0$.

Todistus. Olkoot $x \in \mathbb{R}$ ja $N \in \mathbb{N}_0$. Funktioiden f ja g erotusfunktio $h = f - g$ on lokaalisti Lebesgue-integroituva ja 2π-periodinen. Oletuksen nojalla on olemassa $0 < \delta < \pi$ siten, että kaikilla $y \in \mathbb{R}$, joille $|y - x| < \delta$, pätee $h(y) = 0$. Tällöin kaikilla $|y| < \delta$ pätee $h(x - y) = 0$ ja $h(x) = 0$. Näin ollen

$$\int_{|y|<\delta} \left| \frac{h(x-y) - h(x)}{y} \right| dy = 0 < \infty,$$

jolloin Dini-testin, eli Lauseen 3.30, nojalla pätee

$$S_N(f)(x) - S_N(g)(x) = S_N(h)(x) \to h(x) = 0 \quad \text{kun } N \to \infty. \qquad \square$$

Derivoituvat sekä Hölder-jatkuvat funktiot ovat selkeitä esimerkkejä funktioista, jotka toteuttavat Dini-testin ehdon ja takaavat näin funktion Fourier-sarjan pisteittäisen suppenemisen.

Seuraus 3.32. *Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva 2π-periodinen funktio. Jos f on derivoituva pisteessä $x \in \mathbb{R}$, niin funktion f Fourier-sarja suppenee pisteessä x kohti arvoa $f(x)$.*

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Koska f on derivoituva pisteessä x, erotusosaamärän raja-arvo on olemassa äärellisenä. Tällöin on olemassa $0 \le C < \infty$ ja $0 < \delta < \pi$ siten, että

$$\left| \frac{f(x-y) - f(x)}{y} - C \right| < 1 \quad \text{kaikilla } y \in \mathbb{R}, \text{ joille } 0 < |y| < \delta.$$

Näin ollen saadaan

$$\int_{|y|<\delta} \left| \frac{f(x-y)-f(x)}{y} \right| dy \leq \int_{|y|<\delta} \left| \frac{f(x-y)-f(x)}{y} - C \right| dy$$
$$+ \int_{|y|<\delta} |C| \, dy < \infty.$$

Tällöin Dini-testin nojalla funktion f Fourier-sarja suppenee pisteessä x kohti arvoa $f(x)$. $\square$

Määritelmä 3.33. Olkoon $0 < \alpha \leq 1$. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on α-Hölder-jatkuva pisteessä $x \in \mathbb{R}$, jos on olemassa $0 \leq C < \infty$ ja $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x-y) - f(x)| \leq C|y|^{\alpha} \quad \text{kaikilla } y \in \mathbb{R}, \text{ joille } |y| < \delta.$$

Seuraus 3.34. *Olkoot* $0 < \alpha \leq 1$ *ja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *pisteessä* $x \in \mathbb{R}$ α*-Hölder-jatkuva lokaalisti Lebesgue-integroituva* 2π*-periodinen funktio. Tällöin funktion* f *Fourier-sarja suppenee pisteessä* x *kohti arvoa* $f(x)$*.*

Todistus. Olkoot $x \in \mathbb{R}$ ja $0 < \alpha \leq 1$. Koska f on α-Hölder-jatkuva pisteessä x, on olemassa $0 \leq C < \infty$ ja $0 < \delta < \pi$ siten, että

$$\frac{|f(x-y) - f(x)|}{|y|} \leq C|y|^{\alpha-1} \quad \text{kaikilla } y \in \mathbb{R}, \text{ joille } 0 < |y| < \delta.$$

Näin ollen saadaan

$$\int_{|y|<\delta} \frac{|f(x-y)-f(x)|}{|y|} \, dy \leq C \int_{|y|<\delta} |y|^{\alpha-1} \, dy < \infty.$$

Tällöin Dini-testin nojalla funktion f Fourier-sarja suppenee pisteessä x kohti arvoa $f(x)$. $\square$

4 Fourier-sarjan hajaantuminen

Tähän mennessä esitellyt Fourier-sarjojen suppenemista käsittelevät tulokset ovat olleet myönteisiä. Kuten mainittu, Fourier-sarjojen suppeneminen ei kuitenkaan ole näin itsestään selvää. Tämän luvun tavoitteena onkin osoittaa todeksi Dirichlet-ytimien parissa herännyt epäilys siitä, että funktion jatkuvuus ei ole riittävä ehto sen Fourier-sarjan pisteittäiseen suppenemiseen. Jatkuvan 2π-periodisen funktion origossa hajaantuvan Fourier-sarjan olemassaolon todistamiseksi tutustutaan funktionaalianalyysin perusteisiin. Luvuissa esitellään Banach-avaruuksista ja rajoitetuista lineaarikuvauksista vain ne tiedot, joita tarvitaan tasaisen rajoituksen periaatteen ja täten jatkuvan funktion hajaantuvan Fourier-sarjan olemassaolon todistamisessa. Lähdekirjallisuus esitellään kunkin luvun alussa.

4.1 Banach-avaruudet

Tässä luvussa tutustutaan Fourier-sarjojen suppenemisen tutkimisen kannalta tärkeään esimerkkiin Banach-avaruudesta. Aloitetaan kertaamalla kompleksikertoimisen vektoriavaruuden määritelmä. Jatkossa tarkasteltavat vektoriavaruudet ovat kompleksikertoimisia, ja näihin viitataan pelkästään vektoriavaruuksina. Tämän jälkeen varustetaan vektoriavaruus normilla. Nämä ja muut luvussa esitellyt määritelmät mukailevat Marat V. Markinin teosta [5, Luvut 3.1.1 ja 3.2.1].

Määritelmä 4.1. Olkoon X epätyhjä joukko varustettuna alkioiden yhteenlaskulla $+ \colon X \times X \to X$ ja vakiolla kertomisella $\cdot \colon \mathbb{C} \times X \to X$. Kyseessä on kompleksikertoiminen vektoriavaruus, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in X$.
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ kaikilla $x, y, z \in X$.
3) On olemassa $0 \in X$ siten, että $x + 0 = x$ kaikilla $x \in X$.
4) Jokaiselle $x \in X$ on olemassa $-x \in X$ siten, että $x + (-x) = 0$.
5) $c(dx) = (cd)x$ kaikilla $c, d \in \mathbb{C}$ ja $x \in X$.
6) $c(x + y) = cx + cy$ kaikilla $c \in \mathbb{C}$ ja $x, y \in X$.
7) $(c + d)x = cx + dx$ kaikilla $c, d \in \mathbb{C}$ ja $x \in X$.
8) $1x = x$ kaikilla $x \in X$.

Annetaan esimerkki vektoriavaruudesta. Annetuilla laskutoimituksilla varustetun joukon todistaminen vektoriavaruudeksi on yksinkertaista, mutta työlästä, joten se sivuutetaan. Myös muita yksinkertaisia todistuksia tullaan sivuuttamaan, jotta luvun pääpaino säilyy jatkon kannalta tärkeään Banach-avaruuteen tutustumisessa.

Esimerkki 4.2. Joukko

$$C_{\text{per}}([-\pi,\pi]) = \{f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \text{ on jatkuva } \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$$

varustettuna funktioiden yhteenlaskulla $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ ja vakiolla kertomisella $(cf)(x) = cf(x)$ on vektoriavaruus.

Määritelmä 4.3. Olkoon X vektoriavaruus. Kuvaus $\|\cdot\| : X \to [0,\infty[$ on normi, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1) $\|x\| = 0$, jos ja vain jos $x = 0$.
2) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$ kaikilla $c \in \mathbb{C}$ ja $x \in X$.
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kaikilla $x, y \in X$.

Vektoriavaruutta varustettuna normilla kutsutaan normiavaruudeksi, ja tästä käytetään merkintää $(X, \|\cdot\|)$.

Euklidinen avaruus varustettuna euklidisella normilla on luonnollinen esimerkki normiavaruudesta. Seuraavassa esimerkissä esiteltävät normiavaruudet havainnollistavat sitä, että sama vektoriavaruus voidaan varustaa usealla eri normilla. Myöhemmin osoitetaan, että normin valinnalla voidaan joissain tapauksissa vaikuttaa merkittävästi normiavaruuden suppenemisominaisuuksiin.

Esimerkki 4.4. Vektoriavaruus $C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ varustettuna supremum-normilla

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$$

on normiavaruus. Vastaavasti $C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ varustettuna L^1-normilla

$$\|f\|_{L^1([-\pi,\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$$

on normiavaruus. Todistukset sivuutetaan. Katso lisätietoa A. Brucknerin, J. Brucknerin ja Thomsonin teoksesta [2, Luku 12.1, ss. 511–512] sekä Markinin teoksesta [5, Luku 3.2.1, ss. 116–117].

Määritellään seuraavaksi Euklidisesta avaruudesta tutut käsitteet, avoin pallo, suppeneva lukujono sekä Cauchy-jono, normiavaruudessa.

Määritelmä 4.5. Olkoot $(X, \|\cdot\|_X)$ normiavaruus, $x_0 \in X$ ja $r > 0$. Joukko

$$B_X(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X < r\}$$

on avoin x_0-keskinen r-säteinen pallo.

Määritelmä 4.6. Olkoot $(X, \|\cdot\|_X)$ normiavaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ jono sen alkioita, eli $x_n \in X$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jono (x_n) suppenee normiavaruudessa $(X, \|\cdot\|_X)$ kohti raja-arvoa $x \in X$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|x_n - x\|_X < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N_\varepsilon.$$

Erityisesti jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee, jos on olemassa jokin $x \in X$ siten, että jono suppenee kohti raja-arvoa x.

Määritelmä 4.7. Olkoot $(X, \|\cdot\|_X)$ normiavaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ jono sen alkioita. Kyseessä on Cauchy-jono, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon \quad \text{kaikilla } m \geq N_\varepsilon \text{ ja } n \geq N_\varepsilon.$$

Euklidisesta avaruudesta tiedetään, että jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ suppenee, jos ja vain jos (x_n) on Cauchy-jono. Yleisesti normiavaruuksille tämä ei kuitenkaan välttämättä päde. Näin ollen määritellään erikseen ne normiavaruudet, joissa kaikki Cauchy-jonot suppenevat. Tällaisia avaruuksia kutsutaan Banach-avaruuksiksi.

Määritelmä 4.8. Olkoon $(X, \|\cdot\|_X)$ normiavaruus. Kyseessä on Banach-avaruus, jos jokainen Cauchy-jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ suppenee.

Esimerkki 4.9. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna euklidisella normilla on Banach-avaruus. Myös kompleksiavaruus $\mathbb{C}$ varustettuna modulilla on Banach-avaruus. Näiden todistukset sivuutetaan. Katso lisätietoa jälkimmäisestä esimerkistä Palkan teoksesta [6, Luku 2.4.2, ss. 53–54].

Tutkitaan nyt Esimerkin 4.4 normiavaruuksia tarkemmin. Seuraavan lauseen todistus mukailee A. Brucknerin, J. Brucknerin ja Thomsonin teosta [2, Luku 9.6, ss. 393–395].

Lause 4.10. *Normiavaruus $(C_{per}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_\infty)$ on Banach-avaruus.*

Todistus. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{\mathrm{per}}([-\pi, \pi])$ Cauchy-jono. Tällöin on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \text{kaikilla } m \geq N_\varepsilon \text{ ja } n \geq N_\varepsilon.$$

Olkoon $x \in [-\pi, \pi]$. Tällöin supremumin ja supremum-normin määritelmien nojalla kaikilla $m \geq N_\varepsilon$ ja $n \geq N_\varepsilon$ pätee

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x' \in [-\pi,\pi]} |f_n(x') - f_m(x')| = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Näin ollen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ on Cauchy-jono. Koska $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ on Banach-avaruus, Määritelmän 4.8 nojalla Cauchy-jono $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ suppenee. Tällöin jokaiselle $x \in [-\pi,\pi]$ on olemassa $f(x) \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x).$$

Näin muodostuu rajafunktio $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, jolle epäyhtälön (4.1) nojalla kaikilla $x \in [-\pi,\pi]$ pätee

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \ge N_\varepsilon. \tag{4.2}$$

Koska supremum on pienin yläraja, saadaan

$$\sup_{x'\in[-\pi,\pi]} |f_n(x') - f(x')| \le \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \ge N_\varepsilon.$$

Tällöin supremum-normin määritelmän nojalla pätee

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x'\in[-\pi,\pi]} |f_n(x') - f(x')| \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty. \tag{4.3}$$

Osoitetaan vielä, että pätee $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lisäksi olkoot $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ kuten edellä ja $n \ge N_\varepsilon$. Koska $f_n \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$, niin f_n on tasaisesti jatkuva. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kaikilla } x, y \in [-\pi,\pi], \text{ joille } |x-y| < \delta. \tag{4.4}$$

Tällöin kolmioepäyhtälön sekä epäyhtälöiden (4.2) ja (4.4) nojalla kaikilla $x, y \in [-\pi,\pi]$, joille $|x-y| < \delta$, pätee

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Näin ollen f on jatkuva. Lisäksi, koska kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $f_n(-\pi) = f_n(\pi)$, niin epäyhtälön (4.2) nojalla pätee

$$f(-\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(-\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = f(\pi).$$

Näin ollen raja-arvon (4.3) nojalla Cauchy-jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee normiavaruudessa $(C_{\text{per}}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty)$ kohti funktiota $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$. Tällöin Määritelmän 4.8 nojalla $C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ varustettuna supremum-normilla on Banach-avaruus. $\square$

Varustetaan vektoriavaruus $C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ vuorostaan L^1-normilla. Tällöin kyseessä ei ole Banach-avaruus. Näin ollen vektoriavaruus voi olla normiavaruus yhden normin suhteen, mutta ei välttämättä toisen. Seuraavan lauseen todistus mukailee Markinin teosta [5, Luku 2.13.2, ss. 35–36].

Lause 4.11. *Normiavaruus* $(C_{per}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_{L^1([-\pi,\pi])})$ *ei ole Banach-avaruus.*

Todistus. Osoitetaan, että on olemassa Cauchy-jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, joka ei suppene normiavaruudessa $(C_{\text{per}}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_{L^1([-\pi,\pi])})$. Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono funktioita $f_n\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], \\ n(-x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}), & \text{kun } x \in]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}[, \\ 0, & \text{kun } x \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}], \\ n(x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}), & \text{kun } x \in]\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}[, \\ 1, & \text{kun } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Laskemalla toispuoleiset raja-arvot palojen rajakohdissa nähdään, että funktiot f_n ovat jatkuvia kaikilla n. Lisäksi kaikilla n pätee $f_n(-\pi) = 1 = f_n(\pi)$, jolloin $f_n \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$. Osoitetaan sitten, että jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono. Olkoon $m, n \in \mathbb{N}$ siten, että $n \geq m$. Koska funktiot f_n ovat parillisia, $|f_n - f_m|$ on parillinen, jolloin riittää tarkastella väliä $[0, \pi]$. Tällöin pätee

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in [0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{m}], \\ m(x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{m}), & \text{kun } x \in]\frac{\pi}{2} - \frac{1}{m}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}], \\ (m - n)(x - \frac{\pi}{2}), & \text{kun } x \in]\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}[, \\ 0, & \text{kun } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Näin ollen erotusfunktion L^1-normi $\|f_n - f_m\|_{L^1([-\pi,\pi])} \coloneqq L$ on

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^\pi |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \\ &= 2\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} m\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{m}\right)\,dx + 2\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} (m-n)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,dx \\ &= 2m\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,dx + 2\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} 1\,dx - 2n\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,dx. \end{aligned}$$

Sievennetään integraalit. Olkoon sitten $\varepsilon > 0$. Valitaan $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$. Tällöin kaikilla $n \geq m \geq N_\varepsilon$ pätee

$$\|f_n - f_m\|_{L^1([-\pi,\pi])} = -\frac{1}{m} + \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Näin ollen Määritelmän 4.7 nojalla jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ on Cauchy-jono.

Tehdään nyt antiteesi olettamalla, että on olemassa $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$, johon Cauchy-jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee. Osoitetaan, että tällöin $f(x) = 1$ kaikilla $x \in]\frac{\pi}{2},\pi[$ ja $f(x) = 0$ kaikilla $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$. Olkoon nyt $n \in \mathbb{N}$. Koska funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee normiavaruudessa $(C_{\text{per}}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_{L^1([-\pi,\pi])})$ kohti funktiota $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$, pätee

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi |f_n(x) - f(x)|\,dx &\le \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{L^1([-\pi,\pi])} = 0.\end{aligned}$$

Sieventämällä määrättyä integraalia $\int_0^\pi |f_n(x) - f(x)|\,dx$ saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} |0 - f(x)|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |1 - f(x)|\,dx\right) = 0.$$

Määritellään jono funktioita $g_n\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$, $g_n(x) = |f(x)|\chi_{[0,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}]}(x)$. Koska funktiojono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on kasvava ja $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = |f(x)|$ kaikilla $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$, monotonisen konvergenssilauseen [9, Luku 2.1, s. 62] nojalla pätee

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} |0 - f(x)|\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Määritellään vastaavasti jono funktioita $h_n\colon [\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$,

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|\chi_{[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}]}(x).$$

Tällöin $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ kaikilla $x \in [\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{2}[$. Koska kaikilla $x \in [\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{2}]$ pätee edelleen

$$|h_n(x)| \le |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| \le 1 + |f(x)|$$

ja $1 + |f|$ on lokaalisti Lebesgue-integroituva, dominoidun konvergenssilauseen [9, Luku 2.1, s. 67] nojalla pätee

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} |f_n(x) - f(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} h_n(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} h_n(x)\,dx = 0.$$

Tällöin tarkasteltu yhtälö sievenee muotoon

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |1 - f(x)|\,dx = 0.$$

Molempien integrandien ollessa ei-negatiivisia yhtälö pätee täsmälleen silloin, kun molemmat määrätyt integraalit ovat nollia. Koska $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\,dx = 0$, $|f(x)| \geq 0$ ja f on jatkuva välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$, niin kaikilla $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ pätee $f(x) = 0$. Vastaavasti jälkimmäisen määrätyn integraalin ollessa nolla funktion jatkuvuuden ja integrandin ei-negatiivisuuden nojalla kaikilla $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ pätee $f(x) = 1$. Tällöin f ei ole jatkuva pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$, jolloin $f \notin C_{\mathrm{per}}([-\pi, \pi])$. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Näin ollen antiteesi on väärin ja alkuperäinen väite on totta. $\square$

Huomautus 4.12. Tästä eteenpäin vektoriavaruus $C_{\mathrm{per}}([-\pi, \pi])$ varustetaan supremum-normilla normiavaruuden ollessa Lauseen 4.10 nojalla Banach-avaruus. Tähän Banach-avaruuteen palataan tutkielman viimeisessä luvussa.

4.2 Rajoitetut lineaarikuvaukset

Tässä luvussa käsitellään normiavaruudessa määriteltyjä rajoitettuja lineaarikuvauksia. Luku on tyyliltään tiivis, koska tarkoitus on esitellä vain ne tulokset, joita tarvitaan jatkuvan 2π-periodisen funktion pisteessä hajaantuvan Fourier-sarjan olemassaolon todistamisessa. Luku mukailee Andrew M. Brucknerin, Judith B. Brucknerin ja Brian S. Thomsonin teosta [2, Luku 12.3].

Kerrataan aluksi rajoitetun lineaarikuvauksen määritelmä.

Määritelmä 4.13. Olkoot X ja Y vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon X \to Y$ on lineaarikuvaus, jos kaikilla $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ja $x_1, x_2 \in X$ pätee

$$L(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1L(x_1) + c_2L(x_2).$$

Määritelmä 4.14. Olkoot $(X, \|\cdot\|_X)$ ja $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normiavaruuksia. Lineaarikuvaus $L\colon X \to Y$ on rajoitettu, jos on olemassa $C \geq 0$ siten, että

$$\|L(x)\|_Y \leq C\,\|x\|_X \quad \text{kaikilla } x \in X.$$

Merkitään rajoitettujen lineaarikuvausten muodostamaa joukkoa

$$\mathcal{L}(X, Y) \coloneqq \{L\colon X \to Y \mid L \text{ on rajoitettu lineaarikuvaus}\}.$$

Huomautus 4.15. Jatkossa oletetaan, että merkinnässä $\mathcal{L}(X, Y)$ esiintyvät X ja Y viittaavat normiavaruuksiin $(X, \|\cdot\|_X)$ ja $(Y, \|\cdot\|_Y)$, ellei toisin mainita. Erityisesti joukko $\mathcal{L}(X, Y)$ riippuu vektoriavaruuksien X ja Y lisäksi niille valituista normeista $\|\cdot\|_X$ ja $\|\cdot\|_Y$.

Lause 4.16. *Rajoitettujen lineaarikuvausten joukko $\mathcal{L}(X, Y)$ varustettuna lineaarikuvausten yhteenlaskulla $(L_1 + L_2)(x) = L_1(x) + L_2(x)$ ja vakiolla kertomisella $(cL_1)(x) = cL_1(x)$ on vektoriavaruus.*

Todistus. Olkoot $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Tällöin on olemassa $C_1 \geq 0$ ja $C_2 \geq 0$ siten, että $\|L_1(x)\|_Y \leq C_1 \|x\|_X$ ja $\|L_2(x)\|_Y \leq C_2 \|x\|_X$ kaikilla $x \in X$. Koska $(Y, \|\cdot\|_Y)$ on normiavaruus, Määritelmän 4.3 nojalla kaikilla $x \in X$ pätee

$$\begin{aligned} \|(L_1 + L_2)(x)\|_Y &= \|L_1(x) + L_2(x)\|_Y \\ &\leq \|L_1(x)\|_Y + \|L_2(x)\|_Y \leq (C_1 + C_2) \|x\|_X . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Näin ollen lineaarikuvaus $L_1 + L_2$ on rajoitettu ja $L_1 + L_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Olkoon sitten $c \in \mathbb{C}$. Koska $(Y, \|\cdot\|_Y)$ on normiavaruus, Määritelmän 4.3 nojalla kaikilla $x \in X$ pätee

$$\|(cL_1)(x)\|_Y = \|cL_1(x)\|_Y = |c| \|L_1(x)\|_Y \leq |c| C_1 \|x\|_X . \tag{4.6}$$

Näin ollen lineaarikuvaus cL_1 on rajoitettu ja $cL_1 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Tarkistamalla vielä Määritelmän 4.1 loput kahdeksan ehtoa nähdään, että $\mathcal{L}(X,Y)$ on vektoriavaruus. Nämä yksityiskohdat sivuutetaan. □

Varustetaan vektoriavaruus $\mathcal{L}(X,Y)$ kuvauksella, jota kutsutaan operaattorinormiksi. Operaattorinormi on infimum niistä vakioista, joilla rajoittuneisuuden ehto pätee. Tämän jälkeen osoitetaan, että operaattorinormi toteuttaa normin määritelmän.

Määritelmä 4.17. Olkoon $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ rajoitettu lineaarikuvaus. Kuvausta $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)} : \mathcal{L}(X,Y) \to [0, \infty[$,

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \inf \{C \geq 0 : \|L(x)\|_Y \leq C \|x\|_X \text{ kaikilla } x \in X\},$$

kutsutaan operaattorinormiksi.

Lemma 4.18. *Olkoon $L \in \mathcal{L}(X,Y)$. Tällöin pätee*

$$\|L(x)\|_Y \leq \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \quad \textit{kaikilla } x \in X.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Määritelmän 4.17 nojalla on olemassa $C \geq 0$ siten, että $\|L(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$ kaikilla $x \in X$ ja $C < \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \varepsilon$. Tällöin pätee

$$\|L(x)\|_Y \leq C \|x\|_X \leq (\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \varepsilon) \|x\|_X \quad \text{kaikilla } x \in X.$$

Väite seuraa tästä vakion $\varepsilon > 0$ ollessa mielivaltainen. □

Lause 4.19. *Rajoitettujen lineaarikuvausten joukko $\mathcal{L}(X,Y)$ varustettuna operaattorinormilla $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ on normiavaruus.*

Todistus. Lauseen 4.16 nojalla riittää osoittaa, että operaattorinormi toteuttaa normin määritelmän. Koska operaattorinormi on infimum niistä vakioista $C \geq 0$, jotka toteuttavat rajoittuneisuuden ehdon, kaikilla $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ pätee $\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq 0$. Osoitetaan, että operaattorinormi toteuttaa loput Määritelmän 4.3 ehdot.

1) Olkoon $L \in \mathcal{L}(X, Y)$. Oletetaan, että $\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$. Tällöin Lemman 4.18 nojalla kaikilla $x \in X$ pätee

$$\|L(x)\|_Y \leq 0 \cdot \|x\|_X = 0.$$

Koska $(Y, \|\cdot\|_Y)$ on normiavaruus, kaikilla $x \in X$ pätee $L(x) = 0$.

Oletetaan sitten, että $L(x) = 0$ kaikilla $x \in X$. Koska $(Y, \|\cdot\|_Y)$ on normiavaruus, kaikilla $x \in X$ pätee

$$\|L(x)\|_Y = 0 \leq 0 \cdot \|x\|_X .$$

Koska $\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ on infimum niistä vakioista $C \geq 0$, joilla rajoittuneisuuden ehto toteutuu kaikilla $x \in X$, täytyy olla $\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$.

2) Tapaus $c = 0$ on triviaali. Olkoot $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lemman 4.18 ja epäyhtälön (4.6) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee

$$\|(cL)(x)\|_Y \leq |c| \, \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X .$$

Tällöin $|c| \, \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq 0$ on eräs vakio, joka rajoittaa lineaarikuvausta cL. Koska operaattorinormi $\|cL\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ on infimum näistä vakioista, saadaan

$$\|cL\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq |c| \, \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} . \tag{4.7}$$

Toisaalta Määritelmän 4.3 ja Lemman 4.18 nojalla kaikilla $x \in X$ pätee

$$|c| \, \|L(x)\|_Y = \|(cL)(x)\|_Y \leq \|cL\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X .$$

Jaetaan epäyhtälö puolittain vakiolla $|c| > 0$, jolloin kaikilla $x \in X$ pätee

$$\|L(x)\|_Y \leq \frac{\|cL\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{|c|} \|x\|_X .$$

Tällöin operaattorinormin määritelmän nojalla pätee $\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{\|cL\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{|c|}$. Kertomalla epäyhtälö puolittain vakiolla $|c| > 0$ saadaan

$$|c| \, \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|cL\|_{\mathcal{L}(X,Y)} . \tag{4.8}$$

Epäyhtälöiden (4.7) ja (4.8) nojalla pätee $\|cL\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = |c| \, \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

3) Olkoot $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Lemman 4.18 ja epäyhtälön (4.5) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee

$$\|(L_1 + L_2)(x)\|_Y \leq \left(\|L_1\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|L_2\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right) \|x\|_X .$$

Tällöin operaattorinormin määritelmän nojalla pätee

$$\|L_1 + L_2\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|L_1\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|L_2\|_{\mathcal{L}(X,Y)} . \qquad \square$$

Annetaan operaattorinormille toinen, vaihtoehtoinen määritelmä, jossa esiintyvä $B_X(0,1)$ on Määritelmän 4.5 mukainen avoin origokeskinen 1-säteinen pallo.

Lause 4.20. *Olkoon $L \in \mathcal{L}(X,Y)$. Tällöin pätee*

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in B_X(0,1)} \|L(x)\|_Y .$$

Todistus. Lemman 4.18 nojalla kaikilla $x \in B_X(0,1)$ pätee

$$\|L(x)\|_Y \leq \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \leq \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot 1 = \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} .$$

Tällöin supremumin määritelmän nojalla pätee

$$\sup_{x \in B_X(0,1)} \|L(x)\|_Y \leq \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} . \tag{4.9}$$

Olkoot sitten $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin pätee $\frac{x}{\|x\|_X + \varepsilon} \in B_X(0,1)$. Nyt Määritelmän 4.3, kuvauksen L lineaarisuuden ja supremumin määritelmän nojalla pätee

$$\frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X + \varepsilon} = \left\| L\left(\frac{x}{\|x\|_X + \varepsilon}\right)\right\|_Y \leq \sup_{x' \in B_X(0,1)} \|L(x')\|_Y .$$

Kertomalla epäyhtälö puolittain vakiolla $\|x\|_X + \varepsilon > 0$ saadaan

$$\|L(x)\|_Y \leq \sup_{x' \in B_X(0,1)} \|L(x')\|_Y \left(\|x\|_X + \varepsilon\right).$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, nähdään, että $\sup_{x' \in B_X(0,1)} \|L(x')\|_Y$ on eräs vakio, joka rajoittaa lineaarikuvausta L. Koska operaattorinormi $\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ on infimum näistä vakioista, saadaan

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \sup_{x' \in B_X(0,1)} \|L(x')\|_Y . \tag{4.10}$$

Väite seuraa epäyhtälöistä (4.9) ja (4.10). $\square$

Annetaan luvun lopuksi operaattorinormin skaalaamiseen liittyvä tulos.

Lemma 4.21. *Olkoon $L \in \mathcal{L}(X,Y)$. Tällöin jokaisella $r > 0$ pätee*

$$\sup_{x \in B_X(0,r)} \|L(x)\|_Y = \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\, r.$$

Todistus. Olkoon $r > 0$. Merkitään joukkoa $rB_X(0,1) = \{rx \mid x \in B_X(0,1)\}$. Koska tällöin pätee $B_X(0,r) = rB_X(0,1)$, kuvauksen L lineaarisuuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\sup_{x \in B_X(0,r)} \|L(x)\|_Y &= \sup_{x \in rB_X(0,1)} \|L(x)\|_Y \\ &= \sup_{x \in B_X(0,1)} \|L(rx)\|_Y = \sup_{x \in B_X(0,1)} \|(rL)(x)\|_Y .\end{aligned}$$

Koska operaattorinormi on normi, Lauseen 4.20 ja Määritelmän 4.3 nojalla pätee

$$\sup_{x \in B_X(0,r)} \|L(x)\|_Y = \sup_{x \in B_X(0,1)} \|(rL)(x)\|_Y = \|rL\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\, r. \qquad \square$$

4.3 Tasaisen rajoituksen periaate

Edellisessä luvussa käsiteltiin yksittäisten lineaarikuvausten rajoittuneisuutta. Tässä luvussa esiteltävä tasaisen rajoituksen periaate puolestaan kertoo rajoitettujen lineaarikuvausten muodostaman joukon rajoittuneisuudesta. Tasaisen rajoituksen periaate on yksi funktionaalianalyysin keskeisistä tuloksista, ja se tulee olemaan avainasemassa tutkielman viimeisessä todistuksessa. Luku mukailee Alan D. Sokalin artikkelia [7].

Lemma 4.22. *Olkoon $L \in \mathcal{L}(X,Y)$. Tällöin jokaisella $x_0 \in X$ ja $r > 0$ pätee*

$$\sup_{x \in B_X(x_0,r)} \|L(x)\|_Y \geq \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\, r.$$

Todistus. Olkoon $x_0 \in X$ ja $r > 0$. Kolmioepäyhtälön ja kuvauksen L lineaarisuuden nojalla kaikilla $\xi \in X$ pätee

$$\begin{aligned}\max\{\|L(x_0+\xi)\|_Y, \|L(x_0-\xi)\|_Y\} &\geq \frac{1}{2}\left(\|L(x_0+\xi)\|_Y + \|L(x_0-\xi)\|_Y\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\|L(x_0+\xi) - L(x_0-\xi)\|_Y \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\,\|L(\xi)\|_Y = \|L(\xi)\|_Y .\end{aligned}$$

Otetaan supremum avoimen pallon $B_X(0,r)$ yli. Koska järjestys säilyy supremumia otettaessa, saadaan

$$\sup_{\xi \in B_X(0,r)} \max\{\|L(x_0+\xi)\|_Y, \|L(x_0-\xi)\|_Y\} \geq \sup_{\xi \in B_X(0,r)} \|L(\xi)\|_Y. \tag{4.11}$$

Olkoon nyt $\xi \in B_X(0,r)$. Koska tällöin pätee $\|x_0 + \xi - x_0\|_X = \|\xi\|_X < r$, niin piste $x_0 + \xi$ kuuluu avoimeen palloon $B_X(x_0,r)$. Tällöin supremumin määritelmän nojalla saadaan

$$\sup_{x \in B_X(x_0,r)} \|L(x)\|_Y \geq \|L(x_0+\xi)\|_Y.$$

Vastaavasti $x_0 - \xi \in B_X(x_0,r)$, jolloin pätee

$$\sup_{x \in B_X(x_0,r)} \|L(x)\|_Y \geq \|L(x_0-\xi)\|_Y.$$

Koska funktion $\|L(x)\|_Y$ supremum avoimen pallon $B_X(x_0,r)$ yli on suurempi tai yhtäsuuri kuin maksimi edellisistä arvioista, saadaan

$$\sup_{x \in B_X(x_0,r)} \|L(x)\|_Y \geq \max\{\|L(x_0+\xi)\|_Y, \|L(x_0-\xi)\|_Y\}.$$

Näin ollen $\sup_{x \in B_X(x_0,r)} \|L(x)\|_Y$ on eräs yläraja kaikilla $\xi \in B_X(0,r)$. Koska supremum on pienin yläraja, saadaan

$$\sup_{x \in B_X(x_0,r)} \|L(x)\|_Y \geq \sup_{\xi \in B_X(0,r)} \max\{\|L(x_0+\xi)\|_Y, \|L(x_0-\xi)\|_Y\}.$$

Tällöin epäyhtälön (4.11) ja Lemman 4.21 nojalla pätee

$$\begin{aligned}\sup_{x \in B_X(x_0,r)} \|L(x)\|_Y &\geq \sup_{\xi \in B_X(0,r)} \max\{\|L(x_0+\xi)\|_Y, \|L(x_0-\xi)\|_Y\} \\ &\geq \sup_{\xi \in B_X(0,r)} \|L(\xi)\|_Y = \|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\, r.\end{aligned}$$ □

Seuraavaa rajoitettujen lineaarikuvausten muodostaman joukon ominaisuutta käsittelevää tulosta kutsutaan tasaisen rajoituksen periaatteeksi. Sen mukaan Banach-avaruudessa määriteltyjen pisteittäin rajoitettujen lineaarikuvausten muodostama joukko on tasaisesti rajoitettu. Huomionarvoista on, että lähtöavaruuden tulee todella olla Banach-avaruus, jotta todistuksessa muodostettava pistejono suppenee.

Lause 4.23. *Olkoot $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach-avaruus ja $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normiavaruus. Lisäksi olkoon $F \subset \mathcal{L}(X,Y)$ joukko rajoitettuja lineaarikuvauksia. Jos F on pisteittäin rajoitettu, eli jos jokaiselle $x \in X$ on olemassa $C_x \geq 0$ siten, että*

$$\|L(x)\|_Y \leq C_x \|x\|_X \quad \textit{kaikilla } L \in F,$$

niin F on tasaisesti rajoitettu, eli on olemassa $C \geq 0$ siten, että

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C \quad \textit{kaikilla } L \in F.$$

Todistus. Tehdään antiteesi olettamalla, että F ei ole tasaisesti rajoitettu. Osoitetaan, että tällöin on olemassa piste $x \in X$ ja jono $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ rajoitettuja lineaarikuvauksia $L_n \colon X \to Y$, siten, että

$$\|L_n(x)\|_Y \to \infty, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Tällöin F ei ole pisteittäin rajoitettu, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Koska F ei ole tasaisesti rajoitettu, on olemassa jono $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ rajoitettuja lineaarikuvauksia $L_n \colon X \to Y$, joille pätee

$$\|L_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq 4^n \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Muodostetaan jono pisteitä $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset X$. Olkoon $x_0 = 0$. Tällöin Lemman 4.22 nojalla pätee

$$\sup_{x\in B_X(0,\frac{1}{3})} \|L_1(x)\|_Y \geq \frac{1}{3}\|L_1\|_{\mathcal{L}(X,Y)} > 0.$$

Nyt supremumin määritelmän nojalla on olemassa $x_1 \in B_X(0, \frac{1}{3})$ siten, että

$$\begin{aligned}\|L_1(x_1)\|_Y &> \sup_{x\in B_X(0,\frac{1}{3})} \|L_1(x)\|_Y - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\|L_1\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \\ &\geq \frac{1}{3}\|L_1\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\|L_1\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\|L_1\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.\end{aligned}$$

Lisäksi pisteelle $x_1 \in B_X(0, \frac{1}{3})$ pätee $\|x_1 - x_0\|_X < \frac{1}{3}$. Hyödynnetään nyt Lemmaa 4.22 uudestaan lineaarikuvauksen L_2 arvioimiseen:

$$\sup_{x\in B_X(x_1,\frac{1}{9})} \|L_2(x)\|_Y \geq \frac{1}{9}\|L_2\|_{\mathcal{L}(X,Y)} > 0.$$

Vastaavasti tällöin on olemassa $x_2 \in B_X(x_1, \frac{1}{9})$ siten, että $\|x_2 - x_1\|_X < \frac{1}{9}$ ja

$$\|L_2(x_2)\|_Y > \frac{1}{9}\|L_2\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\|L_2\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}\|L_2\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Jatkamalla näin induktiivisesti saadaan arvio lineaarikuvauksen L_n normille pisteessä x_n. Olkoon siis $n \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että pisteet $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ on konstruoitu edellä kuvatulla tavalla. Tällöin Lemman 4.22 nojalla pätee

$$\sup_{x\in B_X(x_{n-1},\frac{1}{3^n})} \|L_n(x)\|_Y \geq \frac{1}{3^n}\|L_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} > 0.$$

Erityisesti on olemassa $x_n \in B_X(x_{n-1}, \frac{1}{3^n})$ siten, että $\|x_n - x_{n-1}\|_X < \frac{1}{3^n}$ ja

$$\|L_n(x_n)\|_Y > \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \|L_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} . \tag{4.13}$$

Osoitetaan, että edellä muodostettu lukujono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset X$, jolle kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $\|x_n - x_{n-1}\|_X < \frac{1}{3^n}$, on Cauchy-jono. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $N_\varepsilon > \log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla kaikilla $m \geq n \geq N_\varepsilon$ pätee

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|_X &\leq \|x_m - x_{m-1}\|_X + \|x_{m-1} - x_{m-2}\|_X + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\|_X \\ &< \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{3^k}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Nyt geometrisen sarjan summankaavan nojalla kaikilla $m \geq n \geq N_\varepsilon$ pätee

$$\|x_m - x_n\|_X < \frac{\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^{m+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^{m+1}}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^{N_\varepsilon}} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Näin ollen Määritelmän 4.7 nojalla jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset X$ on Cauchy-jono. Koska $(X, \|\cdot\|_X)$ on Banach-avaruus, Määritelmän 4.8 nojalla Cauchy-jono $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \subset X$ suppenee. Erityisesti on olemassa $x \in X$ siten, että $x_m \to x$, kun $m \to \infty$. Tällöin epäyhtälön (4.14) nojalla kaikilla $n \geq N_\varepsilon$ pätee

$$\|x_n - x\|_X = \lim_{m \to \infty} \|x_n - x_m\|_X \leq \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{3^k} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}. \tag{4.15}$$

Johdetaan nyt ristiriita osoittamalla, että lineaarikuvaus L_n ei ole pisteittäin rajoitettu. Käänteisen kolmioepäyhtälön ja Lemman 4.18 nojalla pätee

$$\begin{aligned} \|L_n(x_n)\|_Y - \|L_n(x)\|_Y &\leq \|L_n(x_n) - L_n(x)\|_Y \\ &= \|L_n(x_n - x)\|_Y \leq \|L_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x_n - x\|_X . \end{aligned}$$

Järjestetään termit uudelleen ja hyödynnetään epäyhtälöitä (4.12), (4.13) ja (4.15), jolloin kaikilla $n \geq N_\varepsilon$ pätee

$$\begin{aligned} \|L_n(x)\|_Y &\geq \|L_n(x_n)\|_Y - \|L_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x_n - x\|_X \\ &\geq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \|L_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \|L_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n . \end{aligned}$$

Näin ollen on olemassa $x \in X$ siten, että

$$\|L_n(x)\|_Y \geq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Tämä on ristiriita, sillä oletettiin, että F on pisteittäin rajoitettu. Näin ollen antiteesi on väärin ja alkuperäinen väite on totta. $\square$

4.4 Jatkuva funktio, jonka Fourier-sarja hajaantuu

Tässä luvussa osoitetaan tutkielman viimeinen tulos, jonka mukaan funktion jatkuvuus ei ole riittävä ehto sen Fourier-sarjan pisteittäiseen suppenemiseen kaikkialla. Erityisesti on olemassa jatkuva 2π-periodinen funktio, jonka Fourier-sarja hajaantuu origossa. Muodostetaan tätä varten sopivia rajoitettuja lineaarikuvauksia, joiden operaattorinormeja saadaan arvioitua alhaalta päin Dirichlet-ytimien L^1-normin avulla. Huomionarvoista on, että rajoitetuille lineaarikuvauksille saadaan todella alaraja. Lisäksi luvussa valittuja todistusstrategioita verrataan muihin kirjallisuudessa esitettyihin tapoihin. Seuraava tulos on esitelty Katznelsonin teoksessa [4, Luku 2.1, s. 48].

Lause 4.24. *Olkoon $N \in \mathbb{N}_0$. Tällöin lineaarikuvaus $L_N \colon C_{per}([-\pi,\pi]) \to \mathbb{C}$, $L_N(f) = S_N(f)(0)$, missä $S_N(f) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on funktion f Fourier-sarjan osasumma, on rajoitettu. Lisäksi lineaarikuvauksen L_n operaattorinormille pätee*

$$\|L_N\|_{\mathcal{L}(C_{per}([-\pi,\pi]),\mathbb{C})} \geq \frac{1}{2\pi} \|D_N\|_{L^1([-\pi,\pi])},$$

missä $D_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Dirichlet-ydin.

Todistus. Olkoon $L_N \colon C_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi]) \to \mathbb{C}$, $L_N(f) = S_N(f)(0)$ lineaarikuvaus. Koska kaikilla $f \in C_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi])$ pätee

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty\,dx = \|f\|_\infty \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z},$$

niin kaikilla $f \in C_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi])$ pätee edelleen

$$|S_N(f)(0)| \leq \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)| \leq \sum_{n=-N}^{N} \|f\|_\infty = (2N+1)\|f\|_\infty.$$

Näin ollen L_N on rajoitettu lineaarikuvaus.

Osoitetaan jälkimmäinen väite arvioimalla Dirichlet-ytimen L^1-normia ylhäältä päin. Olkoot $N \in \mathbb{N}_0$ ja $D_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dirichlet-ydin. Lemman 3.7 nojalla pätee

$$\|D_N\|_{L^1([-\pi,\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,\mathrm{sgn}(D_N(x))\,dx.$$

Olkoon $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fejer-ytimien muodostama joukko. Koska Dirichlet-ydin on jatkuva ja 2π-periodinen, Lauseen 3.22 nojalla funktiojono $(D_N * F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ kohti funktiota D_N. Tällöin integraalin ja raja-arvon järjestystä voidaan vaihtaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,\mathrm{sgn}(D_N(x))\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} (D_N * F_n)(x)\,\mathrm{sgn}(D_N(x))\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (D_N * F_n)(x)\,\mathrm{sgn}(D_N(x))\,dx.\end{aligned}$$

Olkoon nyt $n \in \mathbb{N}$. Dirichlet-ytimen parillisuuden sekä konvoluution liitännäisyyden nojalla pätee

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (D_N * F_n)(x) \operatorname{sgn}(D_N(x))\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (D_N * F_n)(x) \operatorname{sgn}(D_N(0-x))\, dx \\ &= 2\pi((D_N * F_n) * \operatorname{sgn}(D_N))(0) \\ &= 2\pi(D_N * (F_n * \operatorname{sgn}(D_N))(0).\end{aligned}$$

Nyt konvoluution vaihdannaisuuden ja Lauseen 3.10 nojalla pätee

$$\begin{aligned}2\pi(D_N * (F_n * \operatorname{sgn}(D_N))(0) &\le |2\pi(D_N * (F_n * \operatorname{sgn}(D_N))(0)| \\ &= 2\pi \left| S_N(F_n * \operatorname{sgn}(D_N))(0) \right| .\end{aligned}$$

Koska Fejer-ydin F_n on jatkuva ja 2π-periodinen, konvoluutio $F_n * \operatorname{sgn}(D_N)$ on Lauseen 3.12 nojalla tasaisesti jatkuva. Lisäksi $F_n * \operatorname{sgn}(D_N)$ on 2π-periodisten funktioiden konvoluutiona 2π-periodinen. Näin ollen tiedetään, että $F_n * \operatorname{sgn}(D_N) \in C_{\mathrm{per}}([-\pi, \pi])$, jolloin lineaarikuvauksen L_N määritelmän ja Lemman 4.18 nojalla pätee

$$\begin{aligned}\left| S_N(F_n * \operatorname{sgn}(D_N))(0) \right| &= |L_N(F_n * \operatorname{sgn}(D_N))| \\ &\le \|L_N\|_{\mathcal{L}(C_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi]),\mathbb{C})} \|F_n * \operatorname{sgn}(D_N)\|_\infty .\end{aligned}$$

Tutkitaan nyt termiä $\|F_n * \operatorname{sgn}(D_N)\|_\infty$. Koska Fejer-ydin on ei-negatiivinen ja kuuluu hyvien ytimien joukkoon, hyvien ytimien määritelmän kohdan 1) nojalla pätee

$$\begin{aligned}|(F_n * \operatorname{sgn}(D_N))(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_n(y)| |\operatorname{sgn}(D_N(x-y))|\, dy \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_n(y)|\, dy = 1.\end{aligned}$$

Tällöin supremum-normin ja supremumin määritelmien nojalla pätee

$$\|F_n * \operatorname{sgn}(D_N)\|_\infty = \sup_{x' \in [-\pi,\pi]} \left| \left(F_n * \operatorname{sgn}(D_N)\right)(x') \right| \le 1.$$

Näin ollen yhdistämällä edellä osoitetut tulokset saadaan

$$\begin{aligned}\|D_N\|_{L^1([-\pi,\pi])} &\le \limsup_{n\to\infty} 2\pi \|L_N\|_{\mathcal{L}(C_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi]),\mathbb{C})} \|F_n * \operatorname{sgn}(D_N)\|_\infty \\ &\le 2\pi \|L_N\|_{\mathcal{L}(C_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi]),\mathbb{C})} .\end{aligned}$$ □

Huomautus 4.25. Katznelsonin teoksessa [4, Luku 2.1, ss. 47–48] esitetään vaihtoehtoinen tapa Lauseen 4.24 todistamiseen. Tässä tavassa konstruoidaan jatkuva funktio ψ siten, että $\psi = \operatorname{sgn}(D_N)$ kaikissa niissä pisteissä, joissa $\operatorname{sgn}(D_N)$ on jatkuva. Pisteisiin, joissa $\operatorname{sgn}(D_N)$ on epäjatkuva, täytyy konstruoida Lauseen 4.11 todistuksen tyylinen esimerkkifunktio, jotta tarkasteltavasta funktiosta ψ saadaan jatkuva. Koska $\operatorname{sgn}(D_N)$ on epäjatkuva niissä pisteissä, joissa Dirichlet-ydin vaihtaa merkkiään, ja näiden epäjatkuvuuspisteiden lukumäärä kasvaa vakion N kasvaessa, funktion ψ huolellinen konstruointi ja saatujen lausekkeiden arviointi on työlästä. Sen sijaan hyödyntämällä Luvussa 3 todistettuja tuloksia saatiin Lause 4.24 todistettua täsmällisesti ja tiiviisti.

Osoitetaan nyt tutkielman viimeinen tulos, jonka mukaan funktion jatkuvuus ei ole yksistään riittävä ehto sen Fourier-sarjan pisteittäiseen suppenemiseen kaikkialla. Seuraava tulos ja sen todistus mukailevat Katznelsonin teosta [4, Luku 2.2, s. 51].

Lause 4.26. *On olemassa jatkuva 2π-periodinen funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jonka Fourier-sarja hajaantuu origossa.*

Todistus. Olkoot $N \in \mathbb{N}_0$ ja $L_N\colon C_{\text{per}}([-\pi,\pi]) \to \mathbb{C}$, $L_N(f) = S_N(f)(0)$ rajoitettu lineaarikuvaus. Tällöin Lauseiden 4.24 ja 3.17 nojalla pätee

$$\begin{aligned}\|L_N\|_{\mathcal{L}(C_{\text{per}}([-\pi,\pi]),\mathbb{C})} &\geq \frac{1}{2\pi}\|D_N\|_{L^1([-\pi,\pi])} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|\,dx > \frac{4}{\pi^2}\ln N \to \infty, \quad \text{kun } N \to \infty.\end{aligned}$$

Näin ollen joukko $\{L_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ ei ole tasaisesti rajoitettu. Lisäksi, koska normiavaruus $(C_{\text{per}}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty)$ on Lauseen 4.10 nojalla Banach-avaruus, tasaisen rajoituksen periaatteen, eli Lauseen 4.23, nojalla tiedetään, että joukko $\{L_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ ei ole pisteittäin rajoitettu. Tällöin on olemassa $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ siten, että kompleksilukujono $(L_N(f))_{N\in\mathbb{N}} = (S_N(f)(0))_{N\in\mathbb{N}}$ ei ole rajoitettu. Näin ollen funktion f Fourier-sarja ei suppene pisteessä $x = 0$. □

Huomautus 4.27. Zygmundin teoksessa [10, Luku 8.1, ss. 298–300] esitetään Lauseelle 4.26 vaihtoehtoinen todistustapa, joka ei vaadi funktionaalianalyysin tuloksia. Tässä Fejerin esimerkiksi nimetyssä vaihtoehtoisessa todistustavassa annetaan konkreettinen esimerkki jatkuvasta 2π-periodisesta funktiosta, jonka Fourier-sarja hajaantuu origossa. Zygmundin teoksesta nähdään, että esimerkkifunktion konstruointi ei kuitenkaan ole yksinkertaista ja vaatii laskennallista työtä. Lisäksi kyseinen todistustapa antaa ratkaisun vain Lauseen 4.26 mukaiseen tilanteeseen. Funktionaalianalyysin tuloksiin nojaavalla todistustavalla on sen sijaan laajemmat sovellusmahdollisuudet.

Viitteet

[1] RAJENDRA BHATIA: *Fourier Series.* The Mathematical Association of America, 2005.

[2] ANDREW M. BRUCKNER, JUDITH B. BRUCKNER & BRIAN S. THOMSON: *Real Analysis.* Prentice Hall, 1997.

[3] RUSSELL L. HERMAN: *An Introduction to Fourier Analysis.* Taylor & Francis, 2017.

[4] YITZHAK KATZNELSON: *An introduction to Harmonic Analysis.* Second Corrected Edition, Dover, 1976.

[5] MARAT V. MARKIN: *Elementary Functional Analysis.* De Gruyter, 2018.

[6] BRUCE P. PALKA: *An Introduction to Complex Function Theory.* Springer-Verlag, 1990.

[7] ALAN D. SOKAL: *A Really Simple Elementary Proof of the Uniform Boundedness Theorem.* The American Mathematical Monthly, Vol. 118, 2011, pp. 450-452.

[8] ELIAS M. STEIN & RAMI SHAKARCHI: *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton University Press, 2003.

[9] ELIAS M. STEIN & RAMI SHAKARCHI: *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces.* Princeton University Press, 2005.

[10] ANTONI ZYGMUND: *Trigonometric series.* Second edition, Volumes I & II Combined, Cambridge University Press, 1988.