JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Lineaarialgebra lukiomatematiikassa

Noora Tilli

24. toukokuuta 2024

Tekijä Noora Tilli	
Otsikko Lineaarialgebra lukiomatematiikassa (engl. Linear algebra in high school mathematics)	
Tutkinto-ohjelma Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma	
Päivämäärä 24. toukokuuta 2024	**Sivumäärä** 124

Tiivistelmä

Tämä matematiikan pro gradu–tutkielma keskittyy lineaarialgebraan ja sen opetukseen lukiomatematiikassa. Tarkoituksena on tarjota eheä kattaus lineaarialgebran viidestä keskeisestä aihealueesta; matriiseista, lineaarisista yhtälöryhmistä, vektoriavaruuksista, lineaarikuvauksista, sekä ominaisarvoista ja -vektoreista. Tutkielma pyrkii myös tarjoamaan ymmärrystä lineaarialgebran käsitteistä ja niiden keskinäisistä suhteista sekä tarjoamaan konkreettista opetusmateriaalia.

Jokaisesta aihealueesta keskitytään käsittelemään kyseisen aihealueen perusteet, keskeiset käsitteet ja joitakin sovelluksia. Konkreettisia esimerkkejä tarjotaan käsitteiden omaksumisen ja käytännön ymmärtämisen tueksi. Näin lukija saa kattavan käsityksen kunkin aihealueen merkityksestä. Lisäksi esitellään viimeaikaisia tuloksia matriisien käänteisominaisuudesta ja (3×3)-matriisien determinantin ratkaisemisesta alkioiden kopioinnilla.

Tutkielmassa käsitellään kompleksilukuja ja niiden käyttöä lineaarialgebrassa. Kompleksiluvut tarjoavat syvemmän ymmärryksen lineaarialgebrasta sekä työkalun monien lineaarialgebran ongelmien ratkaisemiseen. Tutkielmassa käsitellään lineaarialgebran opetusta käytännössä konkreettisten opetusvinkkien, tehtävien ja tietoteknisten apuvälineiden avulla opetuksen ja oppimisen tueksi.

Sisällys

Johdanto

Tutkielman aiheen valintaan vaikutti halu tarjota jotakin konkreettista materiaalia matematiikan opettajille ja opiskelijoille. Lineaarialgebran opetus lukiossa on yleistynyt muualla maailmalla, mutta Suomessa sitä opetetaan vielä hyvin vähän lukiotasolla, eikä lineaarialgebran oppimateriaaleja ole turhan paljoa saatavilla. Tämä käy ilmi vertailemalla lukion opetussuunnitelmaa vastaaviin muiden maiden opetussuunnitelmiin ja kurssi tarjontaan, esimerkiksi Seattlessa lukion oppimäärään kuuluu lineaarialgebraa monessa muodossa [1]. Oppimateriaalien vähyyttä selittää lineaarialgebran opetuksen vähäinen määrä. Tutkielman matemaattiseksi aihealueeksi valikoitui siis lineaarialgebra, joka on rajattu viiteen keskeisempään aihealueeseen; matriiseihin, lineaarisiin yhtälöryhmiin, vektoriavaruuksiin, lineaarikuvauksiin, sekä ominaisarvoihin ja -vektoreihin. Aiheen syventämiseksi tutkielmassa perehdytään myös kompleksilukuihin ja niiden käyttöön lineaarialgebrassa.

Tutkielman pohjalla on monta erilaista lähdettä, mutta näistä tärkeimmät ovat lineaarialgebraan painottuva teos *Elementary Linear Algebra* [2], joka käsittelee laajasti lineaarialgebran aihealueita, sekä lineaarialgebran oppikirjat *Matematiikan taito 15* [3] ja *Calculus 11* [4], joita on käytetty lineaarialgebran opetuksessa. Pääosin näiden lähteiden pohjalta on muodostettu tämän tutkielman rakennetta ja lineaarialgebran sisältöä.

Lineaarialgebran aihealueet on jaettu omiin lukuihinsa, joissa käsitellään kyseisen aihealueen perusteet, keskeiset käsitteet ja sovelluksia. Keskeisinä sisältöinä näissä luvuissa ovat matriisien laskutoimitukset luvussa 1, lineaariset yhtälöryhmät ja matriisimuoto sekä eliminointimenetelmät luvussa 2, vektoriavaruus ja aliavaruus luvussa 4, lineaarikuvaukset luvussa 5 ja ominaisarvot ja -vektorit luvussa 6.

Luku 3 käsittelee kompleksilukuja, jotka ovat matemaattisia objekteja muodossa $a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja ja i on imaginaariyksikkö, joka toteuttaa ehdon $i = \sqrt{-1}$. Kompleksilukujen käyttö laajentaa ymmärrystä matemaattisista käsitteistä ja tarjoaa laajempia ratkaisumahdollisuuksia ongelmissa, joissa reaaliluvut eivät riitä. Esimerkiksi matriiseille voidaan löytää kompleksiset ominaisarvot ja -vektorit.

Luvussa 7 keskitytään lineaarialgebran opetukseen, sen aikataulutukseen, teknisiin apuvälineisiin ja esimerkki tehtäviin. Luvun tarkoituksena on auttaa opettajaa käyttämään tutkielman materiaalia hyödykseen ja tarjota lisämateriaalia opettajille sekä opiskelijoille. Lisäksi tutkielmassa on useita konkreettisia esimerkkejä, jotka auttavat hahmottamaan lineaarialgebran käsitteiden ja suhteiden merkitystä sekä niiden soveltamista käytäntöön.

Tutkielmassa myös tarkastellaan ja arvioidaan viimeaikaisia keskeisiä tuloksia. Matriisien käänteisominaisuutta käsitellään luvussa 1.5.1 ja matriisien käänteisominaisuus todistetaan luvussa 4.2.1, kun lukijalle on tarjottu kaikki välineet ratkaisua varten. Lisäksi (3×3)-matriisien determinantin laskemiselle esitetään viimeaikaisia ratkaisutapoja, jotka perustuvat alkioiden kopiointiin. Tutkielmasta löytyy myös uusi alkioiden kopiointi menetelmä (3×3)-matriisien determinantin ratkaisemiselle ja esimerkki sen hyödyntämisestä (4×4)-matriisin determinantin ratkaisemisessa.

1 Matriisit

Matriisi on matemaattinen käsite, joka viittaa taulukkoon. Taulukko sisältää alkioita, jotka voivat olla esimerkiksi lukuja tai symboleita. Tässä työssä keskitytään pääosin matriiseihin, jotka sisältävät reaalilukuja. Luvussa 6 tutustumme kuitenkin myös muutamiin kompleksilukuja sisältäviin matriiseihin. Alkiot on järjestetty matriisissa riveihin ja sarakkeisiin, joita voidaan kutsua vektoreiksi. Matriiseja on erikokoisia ja erilaisia ja niitä hyödynnetään muun muassa lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisessa, kuvankäsittelyssä ja koneoppimisessa. Pääosin tämän luvun määritelmät ja lauseet ovat kirjasta *Elementary Linear Algebra*, jonka ovat kirjoittaneet Roland E. Larson ja Bruce H. Edwards [2].

1.1 Peruskäsitteitä

1.1.1 Matriisi ja sen merkintätavat

Määritelmä 1.1. [Matriisin määritelmä]

Jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja niin $(m \times n)$-matriisi on suorakulmion muotoinen taulukko, jossa jokainen alkio a_{ij} on luku. Matriisissa, joka on muotoa $(m \times n)$ on m **riviä** ja n **saraketta**. Matriisi on siis aina muotoa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

missä alkiot a_{ij} ovat reaalilukuja.

Matriisin määritelmästä nähdään, että matriisissa sijaitsee alkioita **vaaka-** ja **pystyriveillä**, eli **riveillä** ja **sarakkeilla**. Alkioiden ympärille merkitään kaari- tai hakasulut, mikä symboloi matriisin rakennetta. Matriisin koko määräytyy sen rivi- ja sarakemäärän perusteella, toisin sanoen matriisin koko on sen alkioiden lukumäärä. Yleisesti matriisin rivien lukumäärää merkitään kirjaimella m ja sarakkeiden lukumäärää kirjaimella n. Tällöin matriisia merkitään $(m \times n)$-matriisina, joka luetaan ”m kertaa n matriisi”.

Matriisin **dimensio** määrittää matriisin kokoa ja rakennetta ja myös se määritellään matriisin rivien ja sarakkeiden perusteella. Se on olennainen käsite, joka saadaan laskemalla matriisin rivien ja sarakkeiden lukumäärät. Dimensio ilmaistaan merkinnällä $m \times n$. Esimerkiksi, jos meillä on (3×2)-matriisi, niin sen koko on $3 \cdot 2 = 6$ ja sen dimensio on 3×2.

Esimerkkejä matriiseista:

$$\begin{array}{cc} & \text{sarakkeet} \\ & \downarrow \quad \downarrow \\ \text{rivit} \begin{array}{c}\longrightarrow \\ \longrightarrow\end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ & (2 \times 2) \end{array}, \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -6 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ (3 \times 2) \end{array} \quad \text{ja} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ (1 \times 5) \end{array}.$$

Matriisi on **neliömatriisi**, kun matriisissa on yhtä monta riviä ja saraketta. Samankokoisissa matriiseissa on yhtä monta alkiota, muussa tapauksessa matriisit ovat erikokoiset. Matriiseja merkitään tässä työssä pääosin isoilla kirjaimilla, kuten pääasiassa muissakin teoksissa.

Nimetään seuraavat matriisit matriiseiksi A ja B. Olkoon meillä nyt siis matriisi A, joka on (3×4)-matriisi ja matriisi B, joka on (4×3)-matriisi. Näillä matriiseilla on eri dimensio, sillä matriiseissa on eri määrä rivejä ja sarakkeita. Kumpikaan matriiseista ei ole myöskään neliömatriisi, sillä niissä ei ole yhtä montaa riviä ja saraketta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, jossa A on matriisi, jonka alkiot a_{ij} ovat lukuja, jotka sijaitsevat matriisin riveillä i ja sarakkeissa j:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Matriisissa A on kaksi riviä ja kolme saraketta. Matriisi A on siis (2×3)-matriisi. Matriisin koko on 6, dimensio on 2×3 ja matriisi sisältää kuusi alkiota $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}$ ja a_{23}. Alkioissa ensimmäinen alaindeksi merkitsee riviä ja toinen alaindeksi saraketta, jolla alkio sijaitsee, eli $a_{ij} = a_{12}$, kun alkio on rivillä yksi ja sarakkeessa kaksi.

Silloin, kun jonkin matriisin A dimensiota ei tiedetä, voidaan matriisia A merkitä seuraavasti: $A = [a_{ij}]$, jossa merkinnällä a_{ij} tarkoitetaan kaikkia matriisin A alkioita.

1.1.2 Matriisit ja vektorit

Matriisia, jossa on vain yksi rivi tai vain yksi sarake, kutsutaan **vektoriksi**. Vektoreita merkitään tässä työssä pääosin isoilla kirjaimilla, koska vektorit ovat matriiseja. Muita yleisiä merkintätapoja vektoreille ovat esimerkiksi nuoli pienen kirjaimen päällä $\vec{a}$, viiva pienen kirjaimen päällä $\overline{a}$ tai pelkkä pieni kirjain a. **Rivivektoreita** kutsutaan **vaakavektoreiksi** ja **sarakevektoreita pystyvektoreiksi**. Erikoistapauksessa, jossa rivejä ja sarakkeita on molempia vain yksi, saadaan (1×1)-matriisi, joka koostuu vain yhdestä alkiosta. Tällöin voidaan merkitä matriisin sijasta vain yksi luku.

Esimerkit vaaka- ja pystyvektoreista:

$$\underset{\text{vaakavektori}}{X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}} \quad \text{ja} \quad \underset{\text{pystyvektori.}}{Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

Esimerkki 1.2. [Matriisi vektoreina]

Matriisit voidaan jakaa vektoreiksi eli voidaan sanoa, että matriisit koostuvat vektoreista. Tarkastellaan uudestaan seuraavaa matriisia A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Matriisissa A on kaksi riviä, joten sillä on kaksi vaakavektoria:

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \text{ ja } X_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Matriisissa A on kolme saraketta, joten sillä on kolme pystyvektoria:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \text{ ja } Y_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}.$$

Nyt voimme esittää matriisin A vaaka- ja pystyvektoreiden avulla:

$$A = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{bmatrix}.$$

1.1.3 Nolla-, yksikkö- ja diagonaalimatriisi

Nollamatriisi on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia ja sitä ilmaistaan yleisesti symbolilla $\mathbf{0}$. Nollamatriisi toimii eräänlaisena ”neutraalina” elementtinä matriisien summassa ja erotuksessa. Katso luku 1.2.

Yksikkömatriisi on neliömatriisi, jonka **päädiagonaalilla** eli matriisin vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan kulkevalla viivalla on vain ykkösiä ja muut alkiot matriisissa ovat nollia. Tällaista matriisia, jolla on alkioita vain päädiagonaalilla, kutsutaan yleisemmin **diagonaalimatriisiksi**. Yksikkömatriisia merkitään yleisesti isolla I-kirjaimella ja se toimii ”neutraalina” elementtinä matriisien kertolaskussa. Katso luku 1.3.

Esimerkit nolla-, yksikkö- ja diagonaalimatriiseista:

$$\underset{\text{nollamatriisi } \mathbf{0}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}, \quad \underset{\text{yksikkömatriisi } I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \text{ja} \quad \underset{\text{diagonaalimatriisi.}}{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}$$

1.2 Matriisin peruslaskutoimitukset

Matriisien peruslaskutoimituksiin kuuluvat niiden summat ja erotukset, sekä skalaarilla, kuten luvulla 5 kertominen.

1.2.1 Matriisien summa ja erotus

Määritelmä 1.3. [Matriisien summa]

Jos $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$ ovat $(m \times n)$-matriiseja niin niiden summa on $(m \times n)$-matriisi, joka on määritelty kaavalla

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Kahden eri dimension matriisin summa on määrittelemätön.

Matriiseja voidaan summata ja niistä voidaan laskea erotus, mikäli matriiseilla on sama dimensio. Matriiseille, joiden dimeniot ovat erit, ei ole määritelty summaa ja erotusta. Matriisien summa suoritetaan laskemalla yhteen matriisien vastinalkiot ja erotus vähentämällä vastinalkiot toisistaan. **Vastinalkiot** tarkoittavat samalla kohdalla matriiseissa olevia alkioita eli, kun $C = A + B$ niin $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Lause 1.4. *[Matriisien summan ominaisuuksia]*

Jos A, B, C ovat samankokoisia $(m \times n)$-matriiseja niin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

1. $A + B = B + A$ *ja*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$.

Todistus. [2, lause 2.1]. □

Esimerkki 1.5. [Summia ja erotuksia]

Matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

summa ja erotus voidaan laskea, sillä matriiseilla on sama dimensio:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 & 3-3 \\ 4+4 & 5-1 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 & 2-2 & 3+3 \\ 4-4 & 5+1 & 6-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti voidaan yrittää laskea matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ ja } C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

summa ja erotus, mutta niitä ei ole määritelty, koska matriiseilla on eri dimensio.

1.2.2 Skalaarilla kertominen

Skalaari on matemaattinen käsite, joka kuvaa numeerista suuretta ilman suuntaa. Skalaarit ovat numeerisia arvoja eli esimerkiksi massa, pituus ja reaaliluvut ovat skalaareita. Kun kerromme matriisia skalaarilla, kaikki matriisin alkiot kertautuvat erikseen eli, kun $A = c \cdot B$ niin $a_{ij} = c \cdot b_{ij}$.

Määritelmä 1.6. [Skalaarilla kertominen]

Jos $A = [a_{ij}]$ on $(m \times n)$-matriisi ja c on skalaari niin matriisin A moninkerta skalaarilla c on $(m \times n)$-matriisi, jolle pätee $cA = [ca_{ij}]$.

Lause 1.7. *[Skalaarilla kertomisen ominaisuuksia]*

Jos A ja B ovat samankokoisia $(m \times n)$-matriiseja ja c ja d ovat skalaareja niin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

1. $(cd)A = c(dA)$,
2. $1A = A$,
3. $c(A + B) = cA + cB$ *ja*
4. $(c + d)A = cA + dA$.

Todistus. [2, lause 2.1]. □

Esimerkki 1.8. [Kertominen skalaarilla]

Kerrotaan matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

skalaarilla 2, jolloin saadaan

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 & -5 \cdot 2 & -6 \cdot 2 \\ 7 \cdot 2 & 8 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -8 & -10 & -12 \\ 14 & 16 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3 Matriisitulo

Matriisitulo lasketaan idealla $rivi \cdot sarake$. Tällöin ensimmäinen matriisi käydään rivi kerrallaan läpi ja toinen matriisi vastaavasti sarakkeiden osalta. Selvittäessä matriisituloa matriiseille A ja B tulomatriisin C alkio c_{ij} saadaan laskemalla matriisin A i:nnen rivin ja matriisin B j:nnen sarakkeen pistetulo. Pitkän matematiikan kurssilta *MAA4: Vektorit* voidaan muistaa, että vektoreiden $X_1 = i + 3j$ ja $X_2 = 2i - 2j$ pistetulo lasketaan seuraavasti:

$$X_1 \cdot X_2 = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = -4.$$

Matriisien A ja B tulo on määritelty vain, kun matriisit ovat sopivaa tyyppiä eli, kun matriisin A vaakarivillä on yhtä monta alkiota kuin matriisin B pystyrivillä. Matriisien A ja B tuloa voidaan merkitä joko AB tai $A \cdot B$. Esimerkiksi vektoreiden

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

tulo $A \cdot B$ olisi siis seuraavanlainen:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix} = -4.$$

Matriisitulosta ja $rivi \cdot sarake$ laskutavasta lisää esimerkeissä 1.12 ja 1.13.

Dimensioissa, jotka kuvaavat matriisien kokoa on kaksi indeksiä, jotka ovat rivien ja sarakkeiden määrät. Tulomatriisin koko määräytyy kerrottavien matriisien dimensioiden ulompien indeksien mukaan. Sisemmät indeksit tulee kuitenkin olla samat, sillä muuten matriisituloa ei voida laskea (matriisien rivien ja sarakkeiden määrä ei täsmää). Eli tulomatriisin koko saadaan kahdesta matriisista seuraavalla tavalla:

$$A_{(\mathbf{m} \times n)} \cdot B_{(n \times \mathbf{p})} = C_{(\mathbf{m} \times \mathbf{p})},$$

missä dimensiot $m \times n$ ja $n \times p$ määrittelevät matriisien A ja B koot eli montako riviä ja saraketta nissä on ja $(m \times p)$ on tulomatriisin dimensio, joka saadaan matriisien A ja B dimensioiden uloimpien indeksien avulla.

Esimerkki 1.9. [Tulomatriisin havainnollistus]

Tarkastellaan seuraavaksi kolmea tapausta, joissa tulomatriisin kokoa havainnollistetaan.

Olkoon meillä aluksi (2×2)-matriisi A, jossa on 2 riviä ja 2 saraketta ja (2×4)-matriisi B, joissa on 2 riviä ja 4 saraketta. Tulomatriisi C olisi siis seuraavan kokoinen:

$$A_{(\mathbf{2}\times 2)} \cdot B_{(2\times \mathbf{4})} = C_{(\mathbf{2}\times \mathbf{4})},$$

eli tulomatriisi C on (2×4)-matriisi.

Tarkastellaan sitten matriiseiden A ja B matriisituloa, kun matriisi A on (3×4)-matriisi ja B on (4×1)-matriisi. Tulomatriisin C kooksi saadaan:

$$A_{(\mathbf{3}\times 4)} \cdot B_{(4\times \mathbf{1})} = C_{(\mathbf{3}\times \mathbf{1})},$$

eli tulomatriisi C on (3×1)-matriisi.

Tarkastellaan uudelleen samoja matriiseja kuin ensimmäisessä kohdassa eli (2×2)-matriisia A ja (2×4)-matriisia B, mutta yritetään laskea matriisitulo toisinpäin. Nyt siis:

$$B_{(\mathbf{2}\times 4)} \cdot A_{(1\times \mathbf{2})}.$$

Huomataan, että matriisitulon sisemmät indeksit eivät ole samat, joten matriisien rivien ja sarakkeiden lukumäärä ei täsmää ja siten tätä matriisituloa ei ole määritelty.

Määritelmä 1.10. [Matriisitulo]

Jos $A = [a_{ij}]$ on $(m \times n)$-matriisi ja $B = [b_{ij}]$ on $(n \times p)$-matriisi niin tulo AB on $(m \times p)$-matriisi $AB = [c_{ij}]$, jossa

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Lause 1.11. *[Matriisitulon ominaisuudet]*

Jos A, B ja C ovat matriiseja (sellaisessa järjestyksessä, että matriisitulo on hyvin määritelty) ja c on skalaari niin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

1. $(A)BC = AB(C)$,
2. $A(B + C) = AB + AC$,
3. $(A + B)C = AC + BC$ *ja*
4. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$.

Todistus. Kohdat 1 ja 2: [2, liite A, lause 2.3], kohta 3: [5, toinen lause luvussa matriisialgebraa] ja kohta 4: [6, lause 2.4.2]. □

Esimerkki 1.12. [Vaaka- ja pystyvektorin tulo]

Olkoon meillä kaksi vektoria: X, joka on vaakavektori ja Y, joka on pystyvektori. Lasketaan vektoreiden tulot $X \cdot Y$ ja $Y \cdot X$. (Käyttäen *rivi* · *sarake* menetelmää.)

Vektorit:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Tulo $X \cdot Y$:

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 1 + 21 + 0 + 8 = 30.$$

Tulo $Y \cdot X$:

$$Y \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 2 \\ 7 \cdot 1 & 7 \cdot 3 & 7 \cdot 5 & 7 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 3 & 0 \cdot 5 & 0 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 5 & 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 7 & 21 & 35 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 20 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vektoreissa on saman verran alkioita, joten niiden tulon laskeminen toimii molempiin suuntiin. Jos vektoreissa olisi ollut eri määrä alkioita, kuten (1×2)-vektorissa ja (3×1)-vektorissa, niin tuloa ei olisi voinut laskea molempiin suuntiin, kuten ei silloinkaan, jos kyseessä olisi kaksi vaakavektoria tai kaksi pystyvektoria.

Esimerkki 1.13. [Kahden matriisin tulo]

Olkoon meillä (2×2)-matriisi A ja (3×2)-matriisi B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Yritetään laskea matriisitulo AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriistulon laskeminen ei onnistu, koska sitä ei ole määritelty, sillä matriisien rivi- ja sarakemärät eivät täsmää.

Lasketaan sitten matriisitulo BA:

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Edellisestä esimerkistä nähdään, että matriisitulo ei ole vaihdannainen eli $AB \neq BA$. Matriisitulot AB ja BA voivat saada eri alkioiset matriisit tai niin kuin edellisessä esimerkissä, toinen matriisituloista ei ole määritelty lainkaan.

Esimerkki 1.14. [Matriisin ja yksikkömatriisin tulo]

Yksikkömatriisille pätee $I \cdot A = A \cdot I = A$, kun tulo on määritelty. Olkoon meillä nyt yksikkömatriisi I, joka on (3×3)-matriisi ja (3×3)-matriisi A, jossa on alkiot $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Lasketaan $I \cdot A$:

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A.$$

Yksikkömatriisin ja matriisin tulossa vastaus on aina kerrottava matriisi, sillä yksikkömatriisi ei vaikuta matriisiin.

1.4 Matriisin potenssi ja transpoosi

1.4.1 Matriisin potenssi

Matriisin potenssilaskuja voidaan laskea neliömatriiseille. Matriisin potenssi noudattaa samankantaisten potenssien tulosääntöä ja potenssin potenssin laskusääntöä eli

$$A^p A^q = A^{p+q} \quad \text{ja} \quad (A^p)^q = A^{pq}, \text{ kun} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Molemmat kohdat voidaan todistaa samaan tapaan kuin reaalilukujen vastaavat säännöt. [3]

Määritelmä 1.15. [Matriisin potenssi]

Jos A on $(n \times n)$-matriisi, sen potenssi A^p tarkoittaa tuloa $AA \cdots A$, jossa on p tekijää, ehdolla $p \geq 2$. Lisäksi sovitaan, että $A^1 = A$ ja $A^0 = I$.

Esimerkki 1.16. [Matriisin potenssi]

Lasketaan A^4, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Aloitetaan laskemalla, mitä on A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan seuraavaksi A^4 hyödyntäen saamaamme matriisia A^2:

$$A^4 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 7 + 10 \cdot 15 & 7 \cdot 10 + 10 \cdot 22 \\ 15 \cdot 7 + 22 \cdot 15 & 15 \cdot 10 + 22 \cdot 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{bmatrix}.$$

Nyt olemme saaneet laskettua A^4 suhteellisen yksinkertaisesti.

1.4.2 Transpoosi

Matriisi voidaan transponoida eli matriisin rivit ja sarakkeet voidaan vaihtaa toisiinsa. Matriisin ensimmäinen rivi siirtyy ensimmäiseksi sarakkeeksi, toinen rivi toiseksi sarakkeeksi ja niin edelleen. Matriisin A transpoosia merkitään yläindeksillä T eli matriisin A transpoosia merkitään A^T.

Matriisin transpoosi voitaisiin määritellä seuraavasti; kun $B = A^T$ niin $b_{ij} = a_{ij}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$ ja $j = 1, \ldots, m$. Lisäksi transpoosi muuntaa $(m \times n)$-matriisin $(n \times m)$-matriisiksi.

Esimerkki 1.17. [Matriisien transpoosit]

Matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ transpoosi on $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

ja matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ transpoosi on $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Lause 1.18. *[Transpoosin ominaisuudet]*

Jos A ja B ovat matriiseja (sellaisessa järjestyksessä, että matriisin laskutoimitukset on hyvin määritelty) ja c on skalaari niin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
3. $(cA)^T = c(A)^T$ *ja*
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Todistus. Kohta 1: [5, neljäs lause luvussa matriisialgebraa], kohdat 2 ja 3: [7, alaluku; Transpose of a matrix properties] ja kohta 4: [9, sivu 9]. □

1.5 Käänteismatriisi ja determinantti

1.5.1 Käänteismatriisi

Jos a ja b ovat reaalilukuja ja niiden tulo $ab = 1$, niin luvut a ja b ovat toistensa käänteislukuja eli luvun a käänteisluku on $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Myös matriisien teoriassa **käänteismatriisit** määritellään tuloa käyttäen. Kaikilla matriiseilla ei kuitenkaan ole käänteismatriisia; esimerkiksi nollamatriisilla. Matriisi, jolla on käänteismatriisi on **kääntyvä** ja mikäli käänteismatriisia ei ole, sanotaan matriisia **singulaariseksi** eli poikkeukselliseksi.

Määritelmä 1.19. [Käänteismatriisi]

Olkoon A neliömatriisi eli $(n \times n)$-matriisi. Matriisi A on kääntyvä eli epäsingulaarinen, jos on olemassa $(n \times n)$-matriisi B, jolle pätee

$$AB = BA = I_n,$$

jossa I_n on yksikkömatriisi dimensioltaan $n \times n$. Tällöin matriisia B kutsutaan matriisin A käänteismatriisiksi. Matriisia, jolle ei ole olemassa käänteismatriisia kutsutaan kääntymättömäksi eli singulaariseksi.

Lause 1.20. *[Matriisien käänteisominaisuus]*

Jos A ja B ovat $(n \times n)$-matriiseja, joille pätee $AB = I$ niin $BA = I$.

Todistus. Todistetaan myöhemmin kohdassa **??**. $\square$

Esimerkki 1.21. [Matriisin käänteismatriisi]

Lasketaan matriisin A käänteismatriisi A^{-1}, kun $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, jos se on olemassa.

Valitaan aluksi avuksi matriisi $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ja lasketaan AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - c & 2b - d \\ 4a - 6c & 4b - 6d \end{bmatrix}.$$

Nyt täytyy olla, että

$$\begin{bmatrix} 2a - c & 2b - d \\ 4a - 6c & 4b - 6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jotta $AB = I$.

Muodostetaan pystyriveistä yhtälöparit ja ratkaistaan alkiot a, b, c, d:

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 4a - 6c = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 2b - d = 0 \\ 4b - 6d = 1. \end{cases}$$

Yhtälöparien ratkaisuiksi saadaan $a = \frac{3}{4}, b = -\frac{1}{8}, c = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{4}$, joten saadaan:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Varmistetaan vielä, että lasku meni oikein eli lasketaan BA, josta vastaukseksi pitäisi tulla I:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} &= -\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -6 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & -6 \cdot (-1) + 1 \cdot (-6) \\ -4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & -4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-6) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kuten haluttiin, joten matriisin A käänteismatriisi on olemassa ja se on

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seuraava laskukaava on esitelty matriisilaskennan luentomonisteessa [9].

Lause 1.22. *[Matriisien kääntyvyys]*

Yleisesti (2×2)*-matriiseille pätee seuraava kaava, jossa* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$*:*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0.$$

Todistus. [5, neljäs lause luvussa matriisialgebraa]. □

Huomautus 1.23. Nyt on myös helppo havaita ettei matriisilla A ole käänteismatriisia, jos $ad = bc$.

Huomautus 1.24. Vertaa kaavaa esimerkkiin 1.21.

Lause 1.25. *[Käänteismatriisin ominaisuuksia]*

Jos A on kääntyvä matriisi, k on positiivinen kokonaisluku ja c on skalaari niin seuraavat käänteismatriisin ominaisuudet ovat voimassa:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$,
2. $(A^k)^{-1} = A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1} = (A^{-1})^k$,
3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$, *jossa* $c \neq 0$ *ja*
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Todistus. Kohdat 1 ja 3: [2, lause 2.8], kohta 2: [5, toinen lause luvussa matriisialgebraa] ja kohta 4: [4, sivu 22]. □

1.5.2 Determinantti

Determinantti on $(n \times n)$-matriisista laskettava luku, jonka avulla voidaan esimerkiksi arvioida matriisin kääntyvyyttä ja laskea sen ominaisarvot, joista kerrotaan luvussa 6.

Määritelmä 1.26. [Determinantin määritelmä (1×1)-matriisille]

Yhden rivin ja yhden sarakkeen omaavan matriisin eli (1×1)-matriisin determinantti on sen ainoa alkio eli

$$\det[a] = a.$$

Määritelmä 1.27. [Determinantin määritelmä (2×2)-matriisille]

Matriisin $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ determinantti on $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Huomaa yhteys lauseeseen 1.22, jossa $ad - bc \neq 0$, jotta käänteismatriisi on olemassa.

Esimerkki 1.28. [Determinantin laskeminen (2×2)-matriisille]

Olkoon meillä matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

jonka determinantti halutaan selvittää.

Kerrotaan matriisin alkiot ristiin aloittaen vasemmasta yläkulmasta ja lasketaan tuloista erotus:

$$\det(A) = |A| = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2.$$

Determinantin yleisessä määritelmässä otetaan käyttöön termi **alimatriisi**. Alkiota a_{ij} vastaava alimatriisi C_{ij} löytyy siten, että jätetään huomioimatta alkion kanssa samassa rivissä ja samassa sarakkeessa olevat muut alkiot. Loput alkiot muodostavat halutun alimatriisin.

Määritelmä 1.29. [Determinantin yleinen määritelmä]

Jos A on neliömatriisi (dimensioltaan 2×2 tai suurempi) niin silloin matriisin A determinantti on ensimmäisen rivin alkioiden summa kerrottuna niiden alimatriiseiden determinanteilla ja ottaen huomioon vaihtuvan etumerkin:

$$\begin{aligned}\det(A) = |A| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det C_{1j} \\ &= a_{11} \det C_{11} - a_{12} \det C_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det C_{1n}.\end{aligned}$$

Determinantin laskeminen voidaan eritellä seuraaviin vaiheisiin:

1. Lasketaan ensimmäisen rivin alkioita vastaavien alimatriisien determinantit.

2. Kerrotaan ensimmäisen rivin alkiot ja niitä vastaavien alimatriisien determinantit keskenään.

3. Lasketaan tulot yhteen vaihtuvalla etumerkillä alla esitetyn ”shakkilautasäännön” mukaan, jossa joka toinen on merkki $+$ (plus) ja joka toinen merkki $-$ (miinus):

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \end{bmatrix}.$$

Alimatriisien determinantit lasketaan samalla menetelmällä, kunnes saavutetaan (2×2)-matriisien determinantit. Tätä prosessia nimitetään determinantin kehittämiseksi rivin 1 suhteen.

Esimerkki 1.30. [Determinantti (3×3)-matriisille määritelmän avulla]

Olkoon meillä matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

jonka determinantti halutaan selvittää.

Valitaan aluksi ylimmän rivin alkiot, joita vastaavien alimatriisien determinantteja aletaan selvittämään. Lasketaan sitten alimatriisien determinantit kerrottuna niitä vastaavilla rivin alkioilla. Rivillä 1 ovat alkiot 1, 2 ja 3.

Alkiota **1** vastaava alimatriisi on $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Alimatriisin determinantiksi saadaan $1 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 = \mathbf{-1}$.

Alkiota **2** vastaava alimatriisi on $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Alimatriisin determinantiksi saadaan $-2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 = \mathbf{2}$.

Alkiota **3** vastaava alimatriisi on $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Alimatriisin determinantiksi saadaan $-2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = \mathbf{-10}$.

Lasketaan vielä lopuksi rivin alkioiden ja niitä vastaavien alimatriisien determinanttien tulot yhteen vaihtuvalla etumerkillä:

$$1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-10) = -35.$$

Edelliset kohdat tiivistettynä yhteen lausekkeeseen saadaan laskettua determinantti seuraavasti:

$$\begin{aligned} \det(A) &= |A| \\ &= 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) - 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\right) + 3 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= -35. \end{aligned}$$

Dardan Hajrizaj esittelee teoksessaan *New method to compute the determinant of a* 3×3 *matrix* [8], kolme uutta tapaa (3×3)-matriisien determinanttien laskemiselle, jotka ovat helpompia ja nopeampia kuin ennen löydetyt tavat, kuten alimatriisien avulla laskeminen. Uudet laskutavat perustuvat alkioiden kopioimiseen matriisin ulkopuolelle niin, että saadaan muodostettua vinoriveille kolmen alkion ryhmiä. Vinorivien muodostamien alkioryhmien avulla saadaan laskettua determinantti ilman alideterminantteja. Seuraavassa esimerkissä on esitelty nämä kolme erilaista alkioiden kopioimistapaa, joilla saadaan ratkaistua (3×3)-matriisien determinantit.

Esimerkki 1.31. [Determinantin laskeminen alkioiden kopioinnilla]

Olkoon meillä matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan matriisin determinantti kolmella erilaisella alkioiden kopioimistavalla.

Tapa 1:

Kopioidaan matriisin A kulmissa olevat alkiot matriisin reunoille siten, että alkio a_{11} kopioidaan alkion a_{13} oikealle puolelle ja samoin alkio a_{13} kopioidaan alkion a_{11} vasemmalle puolelle. Sama suoritetaan myös alkioille a_{31} ja a_{33}. Alkio a_{31} kopioidaan alkion a_{33} oikealle puolelle ja alkio a_{33} kopioidaan alkion a_{31} vasemmalle puolelle:

$$\begin{matrix} a_{13} \\ \\ a_{33} \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ \\ a_{31} \end{matrix}$$

Nyt vinoriveille muodostuu kuusi kolmen alkion ryhmää. Vinosti vasemmalta oikealle ylös muodostuvat ryhmät saavat ”$-$”-merkin ja vinosti oikealta vasemmalle ylös muodostuvat ryhmät saavat ”$+$”-merkin. Kolmen alkion ryhmien alkiot kerrotaan keskenään ja summataan toisiin alkioryhmiin huomioiden etumerkit.

$$\begin{matrix} + \quad + \quad + \qquad - \quad - \quad - \\ \begin{matrix} a_{13} \\ \\ a_{33} \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ \\ a_{31} \end{matrix} \end{matrix}$$

Nyt saadaan lauseke

$$
\begin{aligned}
\det(A) = {} & a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
& - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32},
\end{aligned}
$$

joka vastaa determinantin yleisen määritelmän 1.29 mukaista lauseketta, kun alimatriisien determinantit on laskettu auki.

Tapa 2:

Kopioidaan matriisin A kulmissa olevat alkiot matriisin ylä- ja alapuolelle siten, että alkio a_{11} kopioidaan alkion a_{31} alapuolelle ja samoin alkio a_{13} kopioidaan alkion a_{33} alapuolelle. Sama suoritetaan myös alkioille a_{31} ja a_{33}. Alkio a_{31} kopioidaan alkion a_{11} yläpuolelle ja alkio a_{33} kopioidaan alkion a_{13} yläpuolelle:

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} a_{31} & \phantom{a_{12}} & a_{33} \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
\begin{matrix} a_{11} & \phantom{a_{12}} & a_{13} \end{matrix}
\end{array}
$$

Nyt vinoriveille muodostuu kuusi kolmen alkion ryhmää. Vinosti vasemmalta oikealle ylös muodostuvat ryhmät saavat ”−”-merkin ja vinosti oikealta vasemmalle ylös muodostuvat ryhmät saavat ”+”-merkin. Kolmen alkion ryhmien alkiot kerrotaan keskenään ja summataan toisiin alkioryhmiin huomioiden etumerkit:

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{matrix} + \\ + \\ + \\ \\ \end{matrix} &
\begin{array}{c}
\begin{matrix} a_{31} & \phantom{a_{12}} & a_{33} \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
\begin{matrix} a_{11} & \phantom{a_{12}} & a_{13} \end{matrix}
\end{array} &
\begin{matrix} - \\ - \\ - \\ \\ \end{matrix}
\end{array}
$$

Nyt saadaan lauseke

$$
\begin{aligned}
\det(A) = {} & a_{21}a_{32}a_{13} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} \\
& - a_{33}a_{12}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11},
\end{aligned}
$$

joka vastaa determinantin yleisen määritelmän 1.29 mukaista lauseketta, kun alimatriisien determinantit on laskettu auki.

Tapa 3:

Kopioidaan matriisin A toisen sarakkeen ensimmäinen ja kolmas alkio sekä toisen rivin ensimmäinen ja kolmas alkio matriisin reunoille siten, että alkio a_{12} kopioidaan alkion a_{32} alapuolelle ja alkio a_{32} kopioidaan alkion a_{12} yläpuolelle. Sama suoritetaan myös alkioille a_{21} ja a_{23}. Alkio a_{21} kopioidaan alkion a_{23} oikealle puolelle ja alkio a_{23} kopioidaan alkion a_{21} vasemmalle puolelle:

$$\begin{array}{ccc} & a_{32} & \\ a_{23} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & a_{21} \\ & a_{12} & \end{array}$$

Nyt vinoriveille muodostuu kuusi kolmen alkion ryhmää. Vinosti vasemmalta oikealle ylös muodostuvat ryhmät saavat ”−”-merkin ja vinosti oikealta vasemmalle ylös muodostuvat ryhmät saavat ”+”-merkin. Kolmen alkion ryhmien alkiot kerrotaan keskenään ja summataan toisiin alkioryhmiin huomioiden etumerkit:

$$\begin{array}{ccccc} & & + \quad - & & \\ & + & a_{32} & - & \\ + & & & & - \\ & a_{23} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & a_{21} & \\ & & a_{12} & & \end{array}$$

Nyt saadaan lauseke

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{23}a_{31}a_{12} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{32}a_{13}a_{21} \\ & - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{33}a_{12}, \end{aligned}$$

joka vastaa determinantin yleisen määritelmän 1.29 mukaista lauseketta, kun alimatriisien determinantit on laskettu auki.

Neljäs tapa, jota ei ole Dardan Hajrizajin teoksessa toimii niin, että alkiot kopioidaan saman sivun kulmiin. Tämä tapa on esitelty seuraavassa esimerkissä. Esimerkissä vain alakulmiin kopionnin esittely, mutta alkiot voisi kopioida myös minkä vaan muun sivun kulmiin samaan tapaan.

Esimerkki 1.32. [Alkioiden kopiointi kulmiin]

Kopioidaan matriisin A kulmissa olevat alkiot matriisin kahteen alakulmaan siten, että alkio a_{11} kopioidaan alkion a_{31} alapuolelle ja samoin alkio a_{13} kopioidaan alkion a_{33} alapuolelle. Alkiot a_{31} ja a_{33} kopioidaan toistensa viereen eli alkio a_{31} kopioidaan alkion a_{33} oikealle puolelle ja alkio a_{33} kopioidaan alkion a_{31} vasemmalle puolelle:

$$\begin{array}{ccccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ {\color{blue}a_{33}} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & {\color{blue}a_{31}} \\ & {\color{blue}a_{11}} & & {\color{blue}a_{13}} & \end{array}$$

Nyt vinoriveille muodostuu kuusi kolmen alkion ryhmää. Vinosti vasemmalta oikealle ylös muodostuvat ryhmät saavat ”−”-merkin ja vinosti oikealta vasemmalle ylös muodostuvat ryhmät saavat ”+”-merkin. Kolmen alkion ryhmien alkiot kerrotaan keskenään ja summataan toisiin alkioryhmiin huomioiden etumerkit:

$$\begin{array}{cccccc} & + & + & & - & - \\ + & a_{11} & a_{12} & a_{13} & - & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & \\ & a_{11} & & a_{13} & & \end{array}$$

Nyt saadaan lauseke

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{21}a_{32}a_{13} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11}, \end{aligned}$$

joka vastaa determinantin yleisen määritelmän 1.29 mukaista lauseketta, kun alimatriisien determinantit on laskettu auki.

Tämä voidaan tehdä mihin vain matriisin vierekkäisiin kulmiin.

Esimerkki 1.33. [(4×4)-matriisin ratkaiseminen alkioiden kopioinnilla]

Käytetään alkioiden kulmiin kopiointia apuna seuraavan (4×4)-matriisin determinantin ratkaisemisessa. Olkoon meillä nyt matriisi

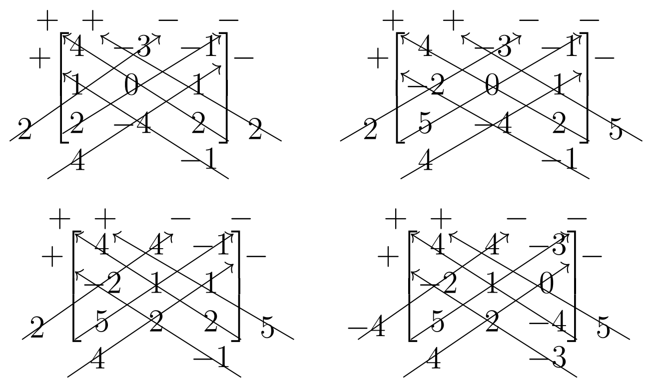
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix},$$

jonka determinantti halutaan selvittää.

Aloitetaan muodostamalla lauseke ensimmäisen rivin alkioista ja niiden alideterminanteista:

$$\det(A) = 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\right) - (-1) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}\right)$$
$$+ 6 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) - 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}\right)$$

Nyt (3×3)-matriisit voidaan laskea kulmiin kopioimalla, seuraavaan tapaan:



josta saadaan edelleen, että

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot (1 \cdot (-4) \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 \\
&\quad - (-3) \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) \cdot 4) \\
&\quad + 1 \cdot ((-2) \cdot (-4) \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot 5 \\
&\quad - (-3) \cdot (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \cdot 4) \\
&\quad + 6 \cdot ((-2) \cdot 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 5 \\
&\quad - 4 \cdot (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4) \\
&\quad - 2 \cdot ((-2) \cdot 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 0 \cdot 5 \\
&\quad - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) - (-3) \cdot 1 \cdot 5 - 0 \cdot 2 \cdot 4) \\
&= 2 \cdot 20 + 1 \cdot (-19) + 6 \cdot 45 - 2 \cdot (-21) \\
&= 333.
\end{aligned}$$

Matriisin A determinantiksi saatiin siis 333.

Lause 1.34. *[Nolladeterminantti]*

Jos A on neliömatriisi ja mikä vain seuraavista ehdoista on tosi niin matriisin A determinantti on 0.

1. *Koko rivi tai koko sarake koostuu nollista.*
2. *Kaksi riviä tai kaksi saraketta ovat samat.*
3. *Yksi rivi on toisen rivin tai yksi sarake on toisen sarakkeen moninkerta.*

Todistus. [2, lause 3.4]. □

1.5.3 Käänteismatriisin ja determinantin yhteys

Matriisin kääntyvyyttä voidaan arvioida tarkastelemalla sen determinanttia. Nollasta poikkeava determinantti viittaa kääntyvään matriisiin, kun taas determinantin ollessa nolla, matriisilla ei ole käänteismatriisia. Tämä antaa meille ennakkotietoa mahdollisista ratkaisuista.

Lause 1.35. *[Determinantti ja kääntyvyys]*

Erityisesti, kun $detA = 0$ matriisin kääntäminen ei ole mahdollista. Näin ollen matriisi A on kääntyvä juuri silloin, kun $detA \neq 0$.

Todistus. [5, seitsemäs lause luvussa matriisin determinantti]. □

Lause 1.36. *[Determinantti ja kääntyvyys]*

Olkoon meillä matriisit A ja B, jotka ovat samankokoisia neliömatriiseja. Tällöin

$$det(AB) = detA \cdot detB.$$

Todistus. [5, kahdeksas lause luvussa matriisin determinantti]. □

Lause tarkoittaa, että tulomatriisin determinantti voidaan saada kertomalla kunkin tekijän determinantit keskenään. Jos joku tekijöistä on singulaarinen matriisi, eli sen determinantti on nolla, koko tulomatriisin determinantti on myös nolla. Näin ollen voidaan päätellä, että jos jokin tekijä matriisitulossa on singulaarinen niin myös tulomatriisi on singulaarinen. Tämä antaa meille laskusäännöt determinanttien kertomiselle matriisien tulossa:

1. kääntyvä · kääntyvä = kääntyvä,
2. singulaarinen · kääntyvä = singulaarinen ja
3. singulaarinen · singulaarinen = singulaarinen.

Tässä on mielenkiintoinen yhteys reaalilukujen kertolaskuun, jossa nollalla kertominen tekee mistä vain luvusta nollan; singulaarisella matriisilla kertominen tekee mistä vain matriisista singulaarisen.

2 Lineaariset yhtälöryhmät

Pääosin tämän luvun määritelmät ja lauseet ovat kirjasta textitElementary Linear Algebra, jonka ovat kirjoittaneet Roland E. Larson ja Bruce H. Edwards [2].

Yhtälöä kutsutaan **lineaariseksi**, mikäli jokainen siinä esiintyvä tuntematon on ensimmäistä astetta. Esimerkiksi $3x = 4$ on yhden tuntemattoman ja $2x - y = 1$ on kahden tuntemattoman lineaarinen yhtälö.

Määritelmä 2.1. [Lineaarinen yhtälö]

Lineaarinen yhtälö, jossa on n muuttujaa esitetään muodossa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

jossa $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat **kertoimia**, b on **vakiotermi** ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat **tuntemattomia** eli **muuttujia**.

Esimerkiksi seuraavat ovat lineaarisia yhtälöitä:

$$2x_1 - 3x_2 = 0 \quad \text{ja} \quad x + 4y - 2z = 1.$$

Lineaarinen yhtälöryhmä koostuu yhdestä tai useammasta lineaarisesta yhtälöstä. Jos yhtälöitä on vain yksi, käytetään siitä vain nimitystä yhtälö ja jos yhtälöitä on kaksi sanotaan yhtälöryhmää yleisemmin **yhtälöpariksi**. Yhtälöryhmän ratkaisut ovat ne tuntemattomien arvot, jotka toteuttavat yhtälöryhmän jokaisen yhtälön.

Esimerkiksi seuraavat ovat lineaarisia yhtälöryhmiä:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = -6 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ -x - y - z = 3 \\ 4x + 5y + 6z = -3. \end{cases}$$

2.1 Ratkaisuiden olemassaolo ja lukumäärä

Määritelmä 2.2. [Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut]

Tapauksesta riippuen lineaariselle yhtälöryhmälle voidaan löytää ratkaisuja joko

- tasan yksi,
- äärettömän monta tai
- ei lainkaan.

Lineaarisella yhtälöryhmällä, jossa on sama määrä yhtälöitä ja muuttujia, on yleensä löydettävissä tasan yksi ratkaisu. Tilanteessa, jossa yhtälöitä on vähemmän kuin muuttujia, niin tavallisesti saadaan äärettömän monta ratkaisua lineaariselle yhtälöryhmälle. Päinvastoin, kun yhtälöitä on enemmän kuin muuttujia niin ratkaisuja ei yleensä löydetä yhtään.

Esimerkki 2.3. [Lineaarinen yhtälöpari, yksi ratkaisu]

Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä, jossa on kaksi yhtälöä ja kaksi muuttujaa eli lineaarinen yhtälöpari:

$$\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 3x - 6y = -6. \end{cases}$$

Lineaarisessa yhtälöparissa on kaksi lineaarista yhtälöä ja kaksi muuttujaa, joten todennäköisesti yhtälöparilla on yksi ratkaisu. (Tämä ei kuitenkaan ole varmaa).

Kerrotaan aluksi ylempi yhtälö kahdella ja saadaan yhtälöryhmä seuraavaan muotoon:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 16 \\ 3x - 6y = -6. \end{cases}$$

Nyt voidaan laskea samojen muuttujien kertoimet yhteen ja vakiotermit yhteen, josta saadaan $x = 2$.

Jatketaan sijoittamalla $x = 2$ ensimmäiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} 2 + 3y &= 8 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla saadut x ja y toiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 - 6 \cdot 2 &= -6 \\ -6 &= -6. \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x = 2$, $y = 2$ ja se on yhtälöryhmän ainut ratkaisu.

Esimerkki 2.4. [Lineaarinen yhtälöryhmä, ei ratkaisuja]

Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä, jossa on kolme yhtälöä ja kaksi muuttujaa:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x - y = -2 \\ x + 3y = 1. \end{cases}$$

Samaan tapaan kuin edellisessä esimerkissä, voidaan vertailla ja laskea kahden ensimmäisen yhtälön ratkaisut. Saadaan ratkaisuksi $x = 1$ ja $y = 1$. Nämä eivät kuitenkaan toteuta kolmatta yhtälöä sillä $1 + 3 \neq 1$, joten yhtälöryhmällä ei ole yhtäkään ratkaisua.

Esimerkki 2.5. [Lineaarinen yhtälöpari, äärettömästi ratkaisuja]

Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä, jossa on kaksi yhtälöä ja kolme muuttujaa eli yhtälöpari:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y + z = -6. \end{cases}$$

Lasketaan samojen muuttujien kertoimet yhteen ja vakiotermit yhteen, josta saadaan $2x = -2$ eli $x = -1$.

Kun $x = -1$ saadaan seuraava yhtälöpari:

$$\begin{cases} \quad y - z = 5 \\ -y + z = -5, \end{cases}$$

joka on sama kuin yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} y = 5 + z \\ y = 5 + z. \end{cases}$$

Yhtälöt ovat samat, joten yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua, jotka ovat muotoa $y = 5 + z$ ja $z \in \mathbb{R}$. Siis alkuperäisellä kahden yhtälön ja kolmen muuttujan yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, jotka ovat muotoa $x = -1$, $y = 5 + z$ ja $z \in \mathbb{R}$.

2.2 Yhtälöryhmien geometrinen tulkinta

Geometrisesti yhtälöryhmien muuttujat x, y ja z voidaan ajatella koordinaatiston koordinaatteina. Tasossa olevat pisteet ovat muotoa (x, y) ja avaruudessa pisteet ovat muotoa (x, y, z).

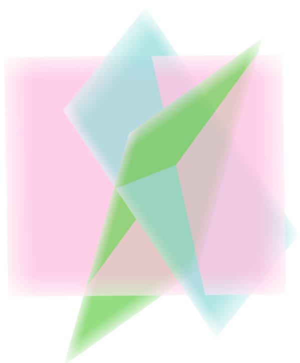
Tasossa olevan yhtälöparin molempien yhtälöiden ratkaisujoukko on suora, kun yhtälöissä on kaksi muuttujaa x ja y eli, kun muuttujien x ja y kertoimet ovat nollasta poikkeavia. Kun yhtälöparille löydetään yksi ratkaisu on ratkaisu yksi piste, jossa suorat leikkaavat. Äärettömän monta ratkaisua löydettäessä suorat ovat yhtyvät eli samat. Lisäksi tilanteessa, jossa ratkaisuja ei löydetä ollenkaan ovat suorat yhdensuuntaiset eivätkä siten koskaan leikkaa.

(a) Yksi ratkaisu.

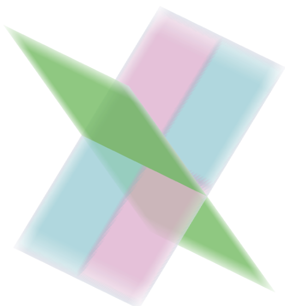
(b) Äärettömän monta ratkaisua.

(c) Ei ratkaisuja.

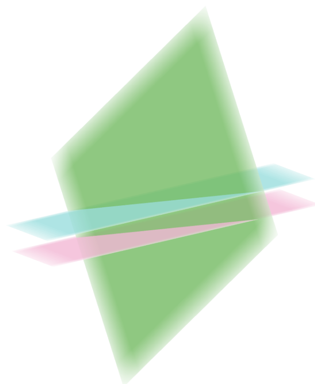
Yhtälön sisältäessä kolme muuttujaa ajatellaan sen edustavan **avaruutta**, joten kaikkien lineaaristen yhtälöiden ratkaisut ovat tasoja, kun yhtälössä on kolme muuttujaa x, y ja z eli, kun muuttujien x, y ja z kertoimet ovat nollasta poikkeavia. Kun yhtälöryhmässä on kolme yhtälöä, joista muodostuvat tasot leikkaavat toisiaan täsmälleen yhdessä pisteessä on yhtälöryhmällä tismalleen yksi ratkaisu. Äärettömän monta ratkaisua yhtälöryhmälle saadaan, kun tasot leikkaavat toisiaan jatkuvasti eli niillä on äärettömän monta leikkauskohtaa ja ratkaisuja vaille jäädään, kun kaikki tasot eivät leikkaa toisiaan kertaakaan samaan aikaan.



(a) Yksi ratkaisu.



(b) Äärettömän monta ratkaisua.



(c) Ei ratkaisuja.

2.3 Matriisi- ja porrasmuoto

Lineaariset yhtälöryhmät voidaan esittää eri tavoin. Luvussa 1 kävimme läpi matriiseja, niiden muotoja ja esitystapoja. Myös lineaariset yhtälöryhmät voidaan esittää matriisien avulla ja lisäksi porrasmuodossa.

2.3.1 Matriisimuoto

Lineaariset yhtälöryhmät voidaan esittää matriisimuodossa ja se on myös hyvin luonteva tapa ilmaista lineaarisia yhtälöryhmiä, sillä se on tiivis esitysmuoto, joka helpottaa teoreettisia tarkasteluja.

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälöryhmää, jossa on m yhtälöä ja n muuttujaa. Merkitään kertoimia alkioilla a_{ij}, muuttujia x_j ja vakiotermejä b_i, kun $i = 1, \ldots, m$ ja $j = 1, \ldots, n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Jokainen m yhtälön yhtälöryhmä voidaan ilmaista kahden $m \times 1$-vektorin yhtäsuuruutena:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Yhtälön vasen puoli voidaan esittää matriisien tulona, sillä kullakin rivillä on samat muuttujat x_n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Otetaan käyttöön merkinnät edellisille matriiseille, jotta saadaan lyhyt ja siisti esitystapa lineaaristen yhtälöryhmien matriisimuodolle:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Näin ollen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$A \cdot X = B.$$

2.3.2 Porrasmuoto

Porrasmuotoinen lineaarinen yhtälöryhmä tarkoittaa sellaista yhtälöryhmää, jossa yhtälön muuttujat ovat samassa järjestyksessä ja jokaisessa yhtälössä on enemmän ”alkunollia” kuin edellisessä yhtälössä. Toisin sanoen jokaisen yhtälön ensimmäinen sellainen muuttuja, jonka kerroin on $\neq 0$, on järjestysnumeroltaan pienempi kuin seuraavan yhtälön vastaava seuraava muuttuja (muuttujien x, y, z järjestysnumerot ovat $1, 2, 3$). Nollasta poikkeavan rivin ensimmäistä nollasta poikkeavaa alkiota kutsutaan yleisemmin **tukialkioksi** eli ”pivotiksi”. Porrasmuotoa kutsutaan myös **kolmiomuodoksi**, jos yhtälöitä on saman verran kuin muuttujia ja k:nnessa yhtälössä on tarkalleen $k-1$ alkunollaa.

Esimerkiksi seuraava yhtälöryhmä on porrasmuotoinen:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2y = 2. \end{cases}$$

Porrasmuotoisen lineaarisen yhtälöryhmän **täydennetty kerroinmatriisi** on porrasmuotoinen matriisi. Täydennetty kerroinmatriisi on matriisi, jossa vasemmalla puolella matriisia ovat muuttujien kertoimet ja oikealla puolella vakiotermit. Näitä erottaa pystypalkki. Puhuttaessa vain **kerroinmatriisista** oikealla puolella olevat vakiotermit unohdetaan, eli tällöin matriisi koostuu vain muuttujien kertoimista.

Esimerkki 2.6. [Porrasmuotoisia yhtälöryhmiä]

Seuraavat yhtälöryhmät ovat porrasmuotoisia:

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2z = 4 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ - 5y - 3z = 1 \\ 6z = -12, \end{cases}$$

joissa tukialkiot ovat ensimmäisessä yhtälöryhmässä 1 ja 2 sekä toisessa yhtälöryhmässä 1, -5 ja 6.

Kerroinmatriisina nämä ovat seuraavat porrasmuotoiset matriisit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Täydennettynä kerroinmatriisina nämä ovat seuraavat porrasmuotoiset matriisit:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \quad \text{ja} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right].$$

Ratkaistaan jälkimmäinen yhtälöryhmä sijoitusmenetelmällä.

Kolmannen yhtälön perusteella $z = -2$, joka sijoittamalla toiseen yhtälöön saamme $-5y+6 = 1$, josta saadaan, että $y = 1$. Sijoitetaan nyt saadut y ja z ensimmäiseen yhtälöön, josta saamme $x - 2 - 6 = 4$ ja muuttujan x arvoksi saadaan 12. Ratkaisu on siis $x = 12$, $y = 1$ ja $z = -2$ eli vektorimuodossa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2.4 Gaussin eliminointimenetelmä

Gaussin eliminointimenetelmä suoritetaan lineaarisille yhtälöryhmille tai niitä vastaaville täydennetyille kerroinmatriiseille porrasmuodon saavuttamiseksi.

2.4.1 Alkeismuunnokset lineaariselle yhtälöryhmälle

Määritelmä 2.7. [Alkeismuunnokset]

Lineaarisen yhtälöryhmän alkeismuunnokset ovat

- vaihto,
- skaalaus ja
- korvaus.

Vaihto tarkoittaa sitä, että kahden yhtälön paikat voidaan vaihtaa. Skaalauksessa yhtä yhtälöä kerrotaan nollasta poikkeavalla vakiolla ja korvauksessa yhteen yhtälöön lisätään toinen yhtälö vakiolla kerrottuna. Yhtälöryhmien alkeismuunnokset eivät vaikuta ratkaisuihin vaan ne pysyvät samoina.

Gaussin eliminointimenetelmää käytetään lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen niin, että ensin suoritetaan alkeismuunnoksia porrasmuotoisen yhtälöryhmän saavuttamiseksi, ja sen jälkeen ratkaistaan tämä muunnettu yhtälöryhmä takaisinsijoituksella.

Esimerkki 2.8. [Lineaarisen yhtälöryhmän muuntaminen porrasmuotoon]

Muunnetaan seuraava lineaarinen yhtälöryhmä porrasmuotoon:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -4 \\ 3y + z = -15 \\ -4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Aloitetaan vaihtamalla toisen ja kolmannen yhtälön paikat ja saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -4 \\ -4x - y + 5z = 3 \\ 3y + z = -15. \end{cases}$$

Jatketaan eliminoimalla muuttuja x toisesta yhtälöstä ensimmäisen avulla. Lisätään siis ensimmäinen yhtälö toiseen yhtälöön kertoimella 2. Yleisesti tätä eliminaatiota merkitään $\downarrow \cdot a$, jossa a on lisättävän yhtälön kerroin ja nuoli osoittaa mikä yhtälö lisätään mihinkin yhtälöön. Tehdään siis korvaus:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -4 & \downarrow \cdot 2 \\ -4x - y + 5z = 3 & \\ 3y + z = -15, & \end{cases}$$

joka muokkaa yhtälöryhmän muotoon

$$\begin{cases} 2x + y - z = -4 \\ y + 3z = -5 \\ 3y + z = -15. \end{cases}$$

Seuraavaksi eliminoidaan kolmannesta yhtälöstä muuttuja y toisen yhtälön avulla. Samaan tapaan kuin aiemmin, nyt käyttäen kerrointa -3. Tehdään siis uudelleen korvaus:

$$\left\{\begin{aligned} 2x + y - z &= -4 \\ y + 3z &= -5 \\ 3y + z &= -15, \end{aligned}\right. \quad \cdot(-3)$$

joka muokkaa yhtälöryhmän muotoon

$$\left\{\begin{aligned} 2x + y - z &= -4 \\ y + 3z &= -5 \\ -\,8z &= 0. \end{aligned}\right.$$

Nyt voimme ratkaista muuttujat sijoitusmenetelmällä. Alimmasta yhtälöstä nähdään suoraan, että $z = 0$, josta seuraa se, että $y = -5$. Nyt sijoittamalla saadut y ja z ylimpään yhtälöön saadaan $2x - 5 = -4$, josta saadaan $x = \frac{1}{2}$.

2.4.2 Alkeismuunnokset matriisille

Määritelmä 2.9. [Alkeismuunnokset]

Matriisin alkeismuunnokset ovat

- vaihto,
- skaalaus ja
- korvaus.

Vaihto tarkoittaa sitä, että kaksi vaakariviä vaihdetaan keskenään. Skaalauksessa yhtä vaakariviä kerrotaan nollasta eroavalla vakiolla ja korvauksessa yhteen vaakariviin lisätään toinen vaakarivi vakiolla kerrottuna. Matriisien alkeismuunnokset eivät vaikuta ratkaisuihin vaan ne pysyvät samoina.

Matriisien alkeismuunnokset toimivat siis samaan tapaan kuin yhtälöryhmien alkeismuunnokset, mutta yhtälöiden sijaan käytetään matriisin vaakarivejä. Matriisien alkeismuunnoksia laskiessa käytetään matriisien välillä merkintää ”$\sim$”, joka tarkoittaa, että toisesta matriisista saadaan toinen jollakin alkeismuunnoksella ($A \sim B$ luetaan A mato B).

Esimerkki 2.10. [Matriisin muuntaminen porrasmuotoon]

Muunnetaan yhtälöryhmä täydennetyksi kerroinmatriisiksi ja muokataan se porrasmuotoiseksi samaan tapaan kuin yhtälöryhmät. Olkoon meillä siis yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y - \ \ z = -4 \\ -4x - \ \ y + 5z = 3 \\ \qquad\ \ 3y + \ \ z = -15, \end{cases}$$

jonka täydennetty kerroinmatriisimuoto on:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -15 \end{array}\right].$$

Muunnetaan täydennetty kerroinmatriisi porrasmuotoiseksi lisäämällä toiseen riviin ensimmäinen kertoimella 2 ja sitten lisäämällä kolmanteen riviin toinen rivi kertoimella -3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -15 \end{array}\right] \cdot 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & -15 \end{array}\right] \cdot (-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right].$$

2.5 Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmä

Gaussin eliminointimenetelmässä saatettiin täydennetty kerroinmatriisi porrasmuotoon. Nyt otetaan mukaan myös Jordanin ajatukset, josta saadaan Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmä, jonka tarkoituksena on saada matriisi pelkistettyyn porrasmuotoon. Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmällä mahdollistuu myös suurten matriisien kääntäminen.

2.5.1 Pelkistetty porrasmuoto

Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmällä ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä siten, että täydennetty kerroinmatriisi muokataan **pelkistettyyn porrasmuotoon**, jossa jokainen päädiagonaalilla oleva alkio on yksi ja kaikki muut alkiot ovat nollia. Tämä voidaan tehdä monella tavalla, mutta lopputulos on kuitenkin sama. Menetelmän seurauksena yhtälöryhmän ratkaisu voidaan suoraan lukea matriisista.

Esimerkki 2.11. [Matriisin saattaminen pelkistettyyn porrasmuotoon]

Saatetaan seuraava matriisi
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$
pelkistettyyn porrasmuotoon hyödyntäen luvussa 2.4 opittuja alkeismuunnoksia:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot(-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow \cdot \tfrac{1}{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tässä ensin lisättiin toiseen riviin ensimmäinen rivi kertoimella -2. Sitten ensimmäiseen riviin lisättiin toinen rivi kertoimella -1, jonka jälkeen kerrottiin toista riviä vakiolla $\frac{1}{2}$.

Esimerkki 2.12. [Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmä]

Ratkaistaan Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä:
$$\begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ -x + y + z = 3 \\ 2x + y + 5z = 1. \end{cases}$$

Muunnetaan ensin yhtälöryhmä matriisimuotoon, jolloin saadaan seuraava täydennetty kerroinmatriisi:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Tehdään täydennetylle kerroinmatriisille alkeismuunnoksia niin kauan, kunnes saavutetaan pelkistetty porrasmuoto:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \cdot 1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \cdot(-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 19 & 1 \end{array}\right] \cdot 1$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 4 \end{array}\right] \leftarrow \cdot \tfrac{1}{3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & 4 \end{array}\right] \cdot(-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & 4 \end{array}\right] \leftarrow \cdot \tfrac{1}{13}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} \end{array}\right] \cdot 3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{14}{13} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} \end{array}\right] \cdot 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{14}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} \end{array}\right].$$

Nyt nähdään suoraan täydennetystä kerroinmatriisista, että yhtälöryhmän ratkaisu on

$$x = -\frac{14}{13},\ y = \frac{21}{13} \text{ ja } z = \frac{4}{13}.$$

Tämä voitaisiin tarkistaa sijoittamalla muuttujat alkuperäiseen yhtälöryhmään.

2.5.2 Matriisin kääntäminen Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmällä

Matriisit voidaan kääntää Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmällä sijoittamalla matriisin oikealle puolelle samankokoinen yksikkömatriisi. Sitten suoritetaan alkeismuunnoksia, kuten luvussa 2.4.2. Ratkaisu on valmis, kun vasemmalle puolelle on muodostunut yksikkömatriisi. Tällöin oikealle puolelle muodostunut matriisi on etsitty käänteismatriisi [9]:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} \end{array}\right].$$

Mikäli vasemmalle puolelle syntyy rivi, jossa kaikki alkiot ovat nollia niin matriisilla ei ole käänteismatriisia ja matriisi ei siis ole kääntyvä.

Esimerkki 2.13. [Matriisin kääntäminen]

Yritetään kääntää seuraava matriisi A käyttäen Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmää:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kirjoitetaan ensin matriisit A ja I peräkkäin pystypalkilla eroteltuina toisistaan ja ratkaistaan käänteismatriisi alkeismuunnoksien avulla:

$$
\begin{aligned}
A|I = &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot(-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \cdot(-1) \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \cdot 1 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \cdot 2 \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \cdot(-5) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 11 & -5 \end{array}\right] = I|A^{-1}.
\end{aligned}
$$

Nyt nähdään, että matriisin A käänteismatriisi A^{-1} on yksikkömatriisin I jälkeinen matriisi eli

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 11 & -5 \end{bmatrix}.$$

Tämä voidaan tarkistaa laskemalla $A^{-1} \cdot A$, josta pitäisi tulla ratkaisuksi yksikkömatriisi I:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 11 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Kuten haluttiin, joten saatiin ratkaistua matriisin A käänteismatriisi A^{-1}.

3 Kompleksiluvut

Kompleksiluvut laajentavat laskennallisia mahdollisuuksia ja mahdollistavat monimutkaisemman matemaattisen tutkimisen. Tässä gradussa on ensisijaisesti kyse siitä, että esimerkiksi yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole reaaliluku ratkaisua, mutta kompleksinen on. Käydään läpi kompleksilukujen peruskäsitteitä ja muutamia määritelmiä, joita tarvitaan seuraavien lukujen käsittelyssä.

Tämän luvun määritelmät ovat John M. Gilliksen kirjoittamasta kirjasta *Everything You Need to Know About Complex Numbers* [10] ja Roope Hietalan kirjoittamasta pro gradu–tutkielmasta *Vektoriavaruudet ja niiden representaatiot* [11].

3.1 Imaginaariyksikkö i ja kompleksilukujen joukko

Aloitetaan kompleksilukujen tarkastelu **imaginaariyksiköstä** i.

Määritelmä 3.1. [Imaginaariyksikkö]

Imaginaariyksikkö $i = \sqrt{-1}$.

Esimerkki 3.2. [Reaaliluvuista kompleksilukuihin]

Tarkastellaan yhtälöä

$$x^2 + 1 = 0,$$

joka jättää ratkaisun reaaliluvuilla laskettaessa vaiheeseen

$$x^2 = -1.$$

Nyt voimme käyttää imaginaariyksikköä i laskennan apuna. Saadaan

$$x = \pm\sqrt{-1} \quad \to \quad x = \pm i, \text{ koska } i = \sqrt{-1}.$$

Huomautus 3.3. Kun $i = \sqrt{-1}$, niin $i^2 = -1$.

Lukujoukko, joka saadaan reaalilukujen ja imaginaariyksiköiden yhdistämisestä on kompleksilukujen joukko.

Määritelmä 3.4. [Kompleksiluvut]

Kompleksiluku z on muotoa $z = a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Kompleksilukujen joukkoa merkitään kirjaimella $\mathbb{C}$.

Esimerkki 3.5. [Imaginaariyksikön i hyödyntämistä]

Ratkaistaan seuraavat hyödyntäen imaginaariyksikköä i:

1. $\sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 25} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} = 5i$,
2. $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-16} = 2i \cdot 4i = 8i^2 = 8 \cdot (-1) = -8$.

Määritelmä 3.6. [Reaali- ja imaginaariosa]

Kompleksiluku voidaan jakaa reaali- ja imaginaariosaan. Olkoon meillä yhtälö $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Tällöin reaaliosa on a eli $\mathrm{Re}(z) = a$ ja imaginaariosa on b eli $\mathrm{Im}(z) = b$.

3.2 Kompleksilukujen laskusäännöt

Reaalilukujen laskusäännöt ovat päteviä myös kompleksiluvuille. Määritellään seuraavaksi laskusäännöt summa ja erotus sekä tehdään niistä konkreettiset laskut esimerkeiksi.

Määritelmä 3.7. [Kompleksilukujen summa]

Kompleksilukujen $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ summaksi saadaan:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \in \mathbb{C}.$$

Määritelmä 3.8. [Kompleksilukujen erotus]

Kompleksilukujen $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ erotukseksi saadaan:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \in \mathbb{C}.$$

Esimerkki 3.9. [Kompleksilukujen summa ja erotus]

Lasketaan kompleksilukujen $z_1 = 1 + 2i$ ja $z_2 = 4 + 3i$ summa:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + 3i) = (1 + 4) + (2 + 3)i = 5 + 5i.$$

Lasketaan seuraavaksi kompleksilukujen $z_3 = 1 - i$ ja $z_4 = -2 + 5i$ erotus:

$$z_3 - z_4 = (1 - i) - (-2 + 5i) = (1 - (-2)) + (-1 - 5)i = 3 - 6i.$$

Kompleksiluvuille voidaan helposti laskea summan ja erotuksen lisäksi myös tulo. Määritellään kompleksilukujen tulo ja lasketaan konkreettiset esimerkit.

Määritelmä 3.10. [Kompleksilukujen tulo]

Kompleksilukujen $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ tuloksi saadaan:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.11. [Kompleksilukujen tulot]

Lasketaan kompleksilukujen $z_1 = 3i$ (reaaliosa 0) ja $z_2 = -1 + 4i$ tulo:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 3i(-1 + 4i) \\ &= -1 \cdot 3i + 4i \cdot 3i \\ &= -3i + 12i^2 \\ &= -3i + 12 \cdot (-1) \\ &= -12 - 3i. \end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi kompleksilukujen $z_3 = 1 + 2i$ ja $z_4 = 4 + 3i$ tulo:

$$\begin{aligned} z_3 z_4 &= (1 + 2i)(4 + 3i) \\ &= (1 \cdot 4) + 1 \cdot 3i + 4 \cdot 2i + 2 \cdot 3i^2 \\ &= 4 + 3i + 8i + 6i^2 \\ &= 4 + 11i + 6 \cdot (-1) \\ &= 4 - 6 + 11i \\ &= -2 + 11i. \end{aligned}$$

3.3 Kompleksikonjugaatti ja itseisarvo

Määritelmä 3.12. [Kompleksikonjugaatti]

Kompleksiluvun $z = a + bi$ kompleksikonjugaatti on

$$\overline{z} = a - bi.$$

Kun kompleksiluku ja sen konjugaatti kerrotaan yhteen, tulokseksi saadaan aina reaaliluku, koska imaginaariosat ovat vastalukuja (, joten niiden summa on nolla). Eli

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2 \ ,$$

jossa $a^2 + b^2$ on reaaliluku.

Esimerkki 3.13. [Konjugaatti]

Olkoon meillä kompleksiluku $z = 2 - i$, tällöin sen konjugaatti on $\overline{z} = 2 + i$. Lasketaan kompleksiluvun ja sen konjugaatin tulo:

$$z \cdot \overline{z} = (2 - i)(2 + i) = 4 + 2i - 2i - i^2 = 4 - (-1) = 5$$

tai

$$z \cdot \overline{z} = 2^2 + (-1)^2 = 5.$$

Määritelmä 3.14. [Itseisarvo]

Kompleksiluvun $z = a + bi$ itseisarvo on

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Kompleksikonjugaatin ja itseisarvon yhteys nähdään seuraavasti. Olkoon meillä kompleksiluvun z itseisarvo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

josta korottamalla molemmat puolet neliöön, saadaan

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \overline{z}.$$

Eli kompleksiluvun itseisarvon neliö on sama kuin kompleksiluvun ja sen konjugaatin tulo.

Esimerkki 3.15. [Itseisarvo]

Lasketaan kompleksiluvun $z = 4 - 6i$ itseisarvo:

$$|z| = |4 - 6i| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} \approx 7{,}211.$$

Kompleksilukuja ja niiden laskutoimituksia tulemme hyödyntämään seuraavissa luvuissa.

4 Vektoriavaruudet

Aiemmin määrittelimme, että matriisia, jossa on vain yksi rivi tai vain yksi sarake kutsutaan vektoriksi. Merkitsemme siis vektoreita isoilla kirjaimilla, koska ne ovat eräänlaisia matriiseja. Lisäksi ajatellaan vektoreiden olevan ”paikkavektoreita” eli niiden alkupiste voidaan määrätä origoksi. Pääosin tämän luvun määritelmät ja lauseet ovat kirjasta *Elementary Linear Algebra*, jonka ovat kirjoittaneet Roland E. Larson ja Bruce H. Edwards [2].

4.1 Vektoriavaruus ja aliavaruus

Vektoriavaruus on joukko vektoreita, jotka täyttävät tiettyjä aksioomia. **Aliavaruus** taas on osa jotakin vektoriavaruutta. Esimerkiksi kolmiulotteinen vektoriavaruus voi sisältää erilaisia vektorialiavaruuksia, kuten suoria tai tasoja.

4.1.1 Vektoriavaruus

Määritelmä 4.1. [Vektoriavaruus]

Olkoon V epätyhjä joukko vektoreita, joille on määritelty kaksi laskutoimitusta: vektoreiden yhteenlasku ja skalaarilla kertominen. Mikäli seuraavat aksioomat täyttyvät jokaiselle avaruuden V vektorille X, Y ja Z ja jokaiselle c ja d, jotka kuuluvat reaalilukuihin $\mathbb{R}$ tai kompleksilukuihin $\mathbb{C}$ niin avaruutta V kutsutaan **vektoriavaruudeksi**:

1. $X + Y$ on avaruudessa V eli $+ : V \times V \to V$,
2. $X + Y = Y + X$,
3. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
4. $X + 0 = X$,
5. $X + (-X) = 0$,
6. cX on avaruudessa V eli $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$,
7. $c(X + Y) = cX + cY$,

8. $(c+d)X = cX + dY$,
9. $c(dX) = (cd)X$ ja
10. $1(X) = X$.

Määritelmä 4.2. [Reaalisten vektoreiden yhteenlasku ja skalaaritulo]

Olkoon

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ja } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja olkoon c skalaari. Tällöin vektoreiden X ja Y summa on määritelty vektoriksi

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

ja vektorin X ja skalaarin c tulo on määritelty vektoriksi

$$cX = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}.$$

Seuraus 4.3. *Avaruus $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus, kun kertoimet ovat reaalilukuja.*

Todistus. Vektoriavaruuden ehtojen toteutumisen tarkistaminen on suoraviivaista avaruudelle $\mathbb{R}^n$, joten se sivuutetaan. $\square$

Esimerkki 4.4. [Geometriset tulkinnat]

Tutustutaan vektoriavaruuksien geometrisiin tulkintoihin.

1. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}$ geometrinen tulkinta on suora.

2. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ geometrinen tulkinta on taso.
3. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ geometrinen tulkinta on kolmiulotteinen avaruus.

Esimerkki 4.5. [Matriisi vektoriavaruudet]

Kaikkien reaalisten $(m \times n)$-matriisien muodostama joukko $\mathbb{R}^{m\times n}$ on vektoriavaruus, sillä matriisien yhteenlasku ja skalaarilla kertominen toteuttavat vektoriavaruuden aksioomat.

Aksioomat 1, 4 ja 5 seuraavat määritelmästä 1.3, aksioomat 2 ja 3 seuraavat lauseesta 1.4, aksiooma 6 seuraa määritelmästä 1.6 ja aksioomat $7-10$ seuraavat lauseesta 1.7.

Esimerkki 4.6. [Kompleksinen vektoriavaruus]

Merkitään tässä esimerkissä $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ ja $z_3 = a_3 + b_3 i$. Lisäksi kertoimet c ja d voivat olla kompleksilukuja.

Avaruus $\mathbb{C}$ on vektoriavaruus, sillä alkiot avaruudessa $\mathbb{C}$ toteuttavat kaikki vektoriavaruuden aksioomat:

1. Seuraa määritelmästä 3.7.
2. Kompleksilukujen yhteenlasku on vaihdannainen, joten $z_1+z_2 = z_2+z_1$, sillä

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \\ &= (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

3. Kompleksilukujen yhteenlasku on liitännäinen, joten $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, sillä

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i + a_3 + b_3 i) \\ &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i) \\ &= (a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i) + a_3 + b_3 i) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

4. Seuraa määritelmästä 3.7.

5. Seuraa määritelmästä 3.7.

6. Seuraa määritelmästä 3.10.

7. Kompleksilukujen skaalaaminen pätee myös yhteenlaskun $c(z_1 + z_2) = cz_1 + cz_2$ suhteen, sillä

$$\begin{aligned}
c(z_1 + z_2) &= c(a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i) \\
&= c((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) \\
&= c(a_1 + b_1 i) + c(a_2 + b_2 i) \\
&= cz_1 + cz_2.
\end{aligned}$$

8. Kompleksilukujen skaalaaminen pätee myös yhteenlaskun $(c + d)z_1 = cz_1 + dz_1$ suhteen, sillä

$$\begin{aligned}
(c + d)z_1 &= (c + d)(a_1 + b_1 i) \\
&= ca_1 + cb_1 i + da_1 + db_1 i \\
&= c(a_1 + b_1 i) + d(a_1 + b_1 i) \\
&= cz_1 + dz_1.
\end{aligned}$$

9. Kompleksilukujen skaalaaminen on liitännäinen, joten $c(dz_1) = (cd)z_1$, sillä

$$\begin{aligned}
c(dz_1) &= c(da_1 + db_1 i) \\
&= c(d(a_1 + b_1 i)) \\
&= cd(a_1 + b_1 i) \\
&= (cd)z_1.
\end{aligned}$$

10. Kompleksiluvun 1 ja kompleksisen vektorin tulo on yhtä suuri kuin vektori itse, joten $1(z_1) = z_1$, sillä

$$\begin{aligned}
1(z_1) &= 1(a_1 + b_1 i) \\
&= 1a_1 + 1b_1 i \\
&= a_1 + b_1 i \\
&= z_1.
\end{aligned}$$

4.1.2 Aliavaruus

Määritelmä 4.7. [Aliavaruus]

Vektoriavaruuden V **osajoukkoa** W kutsutaan vektoriavaruuden V **aliavaruudeksi**, jos W on vektoriavaruus vektoriavaruudessa V määriteltyjen yhteenlasku ja skalaaritulo operaatioiden mukaisesti. Osajoukko W on aliavaruus, jos $X + Y \in W$ ja $cX \in W$, koska muut aksioomat tulevat siitä, että yhteenlasku ja skalaarilla kertominen ovat samat operaatiot avaruuksille V ja W.

Huomautus 4.8. Suora on avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus aina, kun se kulkee origon kautta.

Esimerkki 4.9. [Suora, joka on aliavaruus]

Osoitetaan, että vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukko $W = \left(t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\right)$ on aliavaruus.

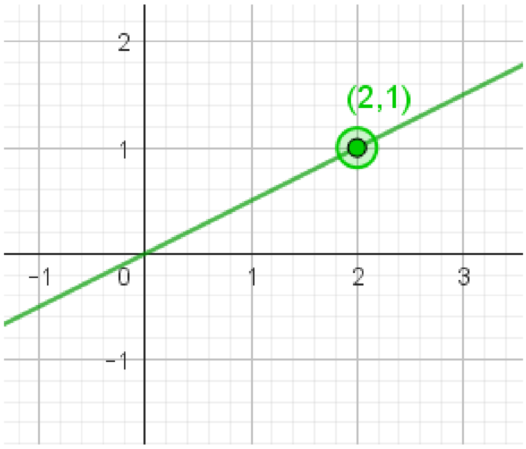
Olkoon $X \in W$, $Y \in W$, $c \in \mathbb{R}$. Koska $X = u \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $Y = v \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ joillakin u, $v \in \mathbb{R}$, niin

$$X + Y = u \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (u + v) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merkitsemällä $t = u + v$ huomaamme, että $X + Y \in W$.

Vastaavasti $cX = c \cdot u \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$.

Geometriselta merkitykseltään W on suora $y = \frac{1}{2}x$, koska kun $t = 0$ saadaan pisteeksi origo eli $(0, 0)$ ja kun $t = 1$ saadaan pisteeksi $(2, 1)$ ja suoran tulee kulkea näiden pisteiden kautta.



Kuva 4.1: Suora $y = \frac{1}{2}x$ ja piste $(2, 1)$.

Esimerkki 4.10. [Suora, joka ei ole aliavaruus]

Osoitetaan ettei suora $V = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, y = -x + 2 \right)$ ole vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

Valitaan esimerkiksi seuraavat vektorit $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, jotka ovat avaruudessa V.

Vektoreiden summaksi saamme kuitenkin

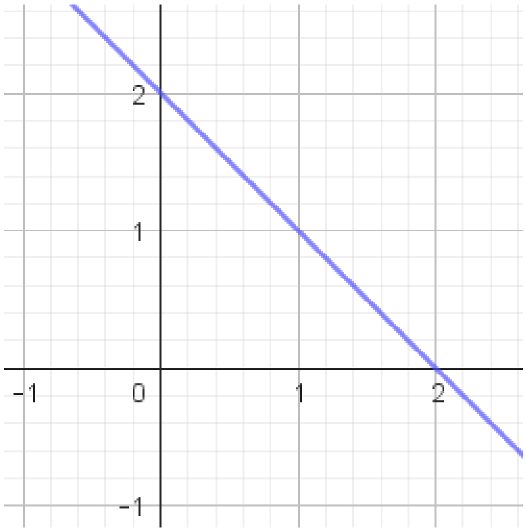
$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \notin V.$$

Lisäksi valitaan $c = 2$ ja lasketaan tulo cX:

$$cX = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \notin V.$$

Siis vektoreiden yhteenlasku eikä skalaaritulo ole voimassa ja näin ollen ollaan saatu osoitettua ettei suora $V = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, y = -x + 2 \right)$ ole vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

Suoran kuvaajastakin nähdään ettei suora ole aliavaruus, koska se ei kulje origon kautta.



Kuva 4.2: Suora $y = -x + 2$.

4.1.3 Lineaarikombinaatiot

Määritelmä 4.11. [Lineaarikombinaatiot]

Vektoria Y, joka kuuluu vektoriavaruuteen V kutsutaan vektoreiden $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **lineaarikombinaatioksi** vektoriavaruudessa V, jos vektori Y voidaan kirjoittaa muodossa

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n,$$

jossa $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ovat skalaareita.

Esimerkki 4.12. [Lineaarikombinaatio]

Esitetään vektoreiden Y ja Z lineaarikombinaationa vektori X, kun

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ ja } X = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Etsitään lukuja c_1 ja c_2, joilla $X = c_1 Y + c_2 Z$ eli

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tästä saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} c_1 = -3 \\ -2c_1 - 6c_2 = 0 \\ 3c_1 - c_2 = -10, \end{cases}$$

jonka ratkaisut ovat $c_1 = -3$ ja $c_2 = 1$.

Siis $X = c_1Y + c_2Z = -3Y + Z$.

Esimerkki 4.13. [Lineaarikombinaatio ei onnistu]

Yritetään esittää vektori X vektoreiden Y ja Z lineaarikombinaationa, kun

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ ja } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Etsitään lukuja c_1 ja c_2, joilla $X = c_1Y + c_2Z$ eli

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Tästä saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} - 3c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \\ 2c_1 - 4c_2 = 4, \end{cases}$$

josta näemme, että $c_2 = -\frac{1}{3}$, joten yhtälön $c_1 + 2c_2 = 1$ perusteella $c_1 = \frac{5}{3}$. Nyt siis täytyisi olla, että

$$2 \cdot \frac{5}{3} - 4 \cdot (-\frac{1}{3}) = 4,$$

mutta saadaan

$$2 \cdot \frac{5}{3} - 4 \cdot (-\frac{1}{3}) = \frac{14}{3},$$

joten vektoria X ei voida esittää vektoreiden Y ja Z lineaarikombinaationa.

4.2 Kanta ja dimensio

4.2.1 Lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus

Lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus ovat käsitteitä, jotka liittyvät vektoriavaruuden vektoreiden väliseen suhteeseen. Lineaariseen riippuvuuteen kuuluu olennaisesti käsite **virittäminen**, joten määritellään se ennen lineaarista riippuvuutta ja riippumattomuutta.

Määritelmä 4.14. [Vektoreiden virittämä aliavaruus]

Olkoon $S = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ vektoriavaruuden V osajoukko. Osajoukkoa S kutsutaan aliavaruuden W virittäväksi joukoksi, jos jokainen vektori aliavaruudessa W voidaan kirjoittaa osajoukon S vektoreiden lineaarikombinaationa. [2]

Esimerkiksi, jos osajoukko S sisältää vektorit $(1, 0)$ ja $(0, 1)$, niin niiden virittämä aliavaruus olisi koko taso, koska kaikki kaksiulotteisen tason vektorit voidaan saavuttaa näiden kahden vektorin lineaarikombinaationa.

Esimerkki 4.15. [Virittävä joukko]

Osoitetaan, että joukko $S = \{V_1, V_2\}$ virittää avaruuden $\mathbb{R}^2$, kun

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ja } V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Valitaan vektori $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, joka on mikä tahansa vektori avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Etsitään skalaareita c_1 ja c_2 siten, että

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 V_1 + c_2 V_2.$$

Nyt saadaan yhtälöryhmä, josta voidaan ratkaista c_1:

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 = u_1 \quad || \cdot 2 \\ c_1 + 2c_2 = u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4c_1 - 2c_2 = 2u_1 \\ c_1 + 2c_2 = u_2 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
5c_1 &= 2u_1 + u_2 \\
c_1 &= \frac{2u_1 + u_2}{5}.
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan saatu c_1 ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan c_2:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 2\left(\frac{2u_1 + u_2}{5}\right) - c_2 \\
c_2 &= 2\left(\frac{2u_1 + u_2}{5}\right) - u_1 && || \cdot 5 \\
5c_2 &= 2(2u_1 + u_2) - 5u_1 \\
5c_2 &= 4u_1 + 2u_2 - 5u_1 \\
5c_2 &= -u_1 + 2u_2 && || : 5 \\
c_2 &= \frac{-u_1 + 2u_2}{5}.
\end{aligned}
$$

Nyt, kun tiedetään c_1 ja c_2 niin voidaan muodostaa vektori U vektoreiden V_1 ja V_2 lineaarikombinaationa:

$$
\begin{aligned}
U &= \left(\frac{2u_1 + u_2}{5}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-u_1 + 2u_2}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4u_1+2u_2}{5} + \frac{u_1-2u_2}{5} \\ \frac{2u_1+u_2}{5} + \frac{-2u_1+4u_2}{5} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jokainen vektori U voidaan siis muodostaa vektoreiden V_1 ja V_2 lineaarikombinaationa, joten vektorit V_1 ja V_2 virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$.

Määritelmä 4.16. [Lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus]

Vektoriavaruuden V vektorit $V_1, \ldots, V_n$ ovat **lineaarisesti riippuvia**, jos jokin vektoreista voidaan esittää muiden vektoreiden lineaarikombinaationa eli jos jokin vektori kuuluu muiden vektoreiden virittämään aliavaruuteen. Tällöin joukko $\{V_1, \ldots, V_n\}$ on lineaarisesti riippuva.

Muussa tapauksessa vektorit $V_1, \ldots, V_n$ ovat **lineaarisesti riippumattomia**. Yhtäkään vektoria ei siis voida esittää muiden vektoreiden lineaarikombinaationa. Tällöin joukko $\{V_1, \ldots, V_n\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Lause 4.17. *[Lineaarisen riippuvuuden ehto]*

Vektorit $V_1, \ldots, V_n$ *ovat lineaarisesti riippuvia, jos ja vain jos ne toteuttavat ehdon*

$$c_1V_1 + \cdots + c_nV_n = 0,$$

joillakin sellaisilla luvuilla $c_1, \ldots, c_n$*, joista ainakin yksi on eri kuin* 0*.*

Todistus. [3, sivu 102]. □

Esimerkki 4.18. [Lineaarinen riippuvuus]

Tarkastellaan ovatko vektorit V_1 ja V_2 lineaarisesti riippuvia, kun

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Yritetään esittää vektori V_2 vektorin V_1 lineaarikombinaationa. Nyt

$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot V_1,$$

joten vektori V_2 on onnistuttu esittämään vektorin V_1 lineaarikombinaationa. Vektorit V_1 ja V_2 ovat siis lineaarisesti riippuvia.

Lause 4.19. *[Lineaarisen riippumattomuuden ehto]*

Vektorit $V_1, \ldots, V_n$ *ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos ainoat reaaliluvut* $c_1, \ldots, c_n$*, joille*

$$c_1V_1 + \cdots + c_nV_n = 0,$$

ovat $c_1 = \cdots = c_n = 0$*.*

Todistus. Seuraa lauseesta 4.17. □

Esimerkki 4.20. [Lineaarinen riippumattomuus]

Tarkastellaan ovatko vektorit V_1, V_2 ja V_3 lineaarisesti riippumattomia, kun

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad V_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt saamme yhtälön $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = 0$, josta voimme muodostaa yhtälöryhmän:

$$\begin{cases} c_1 \qquad - c_3 = 0 \\ \qquad c_2 + c_3 = 0 \\ \qquad c_2 \qquad = 0. \end{cases}$$

Nähdään, että $c_2 = 0$, joten yhtälöstä $c_2 + c_3 = 0$ saadaan, että myös $c_3 = 0$ ja samoin myös yhtälöstä $c_1 - c_3 = 0$ saadaan, että $c_1 = 0$. Näin ollen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, joten vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat.

Yksikin vektori voi muuttaa vektoreiden välistä riippuvuutta lineaarisesta riippumattomuudesta lineaariseen riippuvuuteen ja toisinpäin. Seuraava esimerkki osoittaa tämän.

Esimerkki 4.21. [Lineaarisesta riippumattomuudesta lineaariseen riippuvuuteen]

Jatketaan edellistä esimerkkiä 4.20. Otetaan mukaan vektori

$$V_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ja tarkastellaan ovatko vektorit V_1, V_2, V_3 ja V_4 lineaarisesti riippuvia vai riippumattomia.

Nyt saamme yhtälön $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4 = 0$, josta voimme muodostaa yhtälöryhmän:

$$\begin{cases} c_1 \qquad - c_3 + 2c_4 = 0 \\ \qquad c_2 + c_3 + 2c_4 = 0 \\ \qquad c_2 \qquad - \; c_4 = 0. \end{cases}$$

Muunnetaan yhtälöryhmä kerroinmatriisiksi ja suoritetaan alkeismuunnoksia, kunnes ratkaisu voidaan lukea kerroinmatriisista:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nyt voimme lukea ratkaisun kerroinmatriisista, josta saadaan seuraava ratkaisu:

$$\begin{cases} c_1 + 5c_4 & = 0 \\ c_2 - c_4 & = 0 \\ c_3 + 3c_4 & = 0 \\ c_4 \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \text{ jolloin } \begin{cases} c_1 = -5c_4 \\ c_2 = c_4 \\ c_3 = -3c_4 \\ c_4 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ratkaisuja on äärettömän monta, joten vektorit ovat lineaarisesti riippuvat.

Esimerkiksi eräs ratkaisu saadaan, kun valitaan $c_4 = 1$, jolloin

$$\begin{cases} c_1 = -5 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -3 \\ c_4 = 1. \end{cases}$$

Meillä on nyt melkein kaikki tieto matriisien käänteisominaisuuden eli lauseen 1.20 todistamiseen. Esitetään vielä yksi lause, joka on oleellinen todistuksen kannalta ja todistetaan, että kun $AB = I$, niin $BA = I$.

Lause 4.22. *[Ekvivalenssi-lause matriiseille]*

Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Seuraavat väittämät ovat loogisesti ekvivalentteja. Eli tietylle matriisille A ne ovat joko molemmat totta tai ne ovat molemmat epätosia.

1. *Yhtälöllä $AX = B$ on ratkaisu kaikilla $B \in \mathbb{R}^n$.*
2. *Matriisin A sarakkeet virittävät vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$.*

Todistus. Lause kokonaisuudessaan ja sen todistus löytyy lähteestä [12, luku 1, lause 4]. Todistetaan lauseen suunta, kun matriisin A sarakkeet virittävät vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ niin yhtälöllä $AX = B$ on ratkaisu kaikilla $B \in \mathbb{R}^n$.

Olkoon A $(n \times n)$-matriisi, joka koostuu sarakevektoreista $A_1, A_2, \ldots, A_n$, jotka virittävät vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$. Tällöin mikä tahansa vektori B avaruudessa $\mathbb{R}^n$ voidaan ilmaista lineaarikombinaationa $c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n$, missä $c_1, c_2, \ldots c_n$ ovat skalaareita.

Haluamme löytää vektorin X, jolle pätee, että $AX = B$.

Olkoon $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, jolloin yhtälö $AX = B$ saadaan muotoon

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = B.$$

Koska sarakevektorit $A_1, A_2, \ldots A_n$ virittävät vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$, niin jokainen vektori B voidaan ilmaista niiden lineaarikombinaationa. Siis voimme valita vektorin X alkiot siten, että saamme halutun vektorin B. Siten kaikilla $B \in \mathbb{R}^n$ on ratkaisu X, joten yhtälöllä $AX = B$ on ratkaisu kaikilla $B \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Todistus. [Lauseen 1.20 todistus]

Todistus pohjautuu Pietro Paparellan kirjoittaman artikkelin *A short and elementary proof of the two sidedness of the matrix inverse* [13] vastaavaan todistukseen.

Olkoot A ja B $(n \times n)$-matriiseja, joille $AB = I$. Osoitetaan aluksi, että matriisin B sarakkeet muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon. Tehdään vastaoletus, että on olemassa vektori $X \neq 0$ niin, että $BX = 0$. Täytyy olla, että $IX = X$, koska yksikkömatriisi toimii "neutraalina" elementtinä matriisien kertolaskussa. Koska $AB = I$, saadaan $IX = ABX$. Matriisitulon ominaisuuksien 1.11 nojalla saadaan edelleen $ABX = A(BX)$. Kuitenkin $BX = 0$, joten $A(BX) = A(0) = 0$. Tästä seuraa, että $X = 0$, mikä on ristiriita oletuksen $X \neq 0$ kanssa, joten matriisin B sarakkeet muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon. Kun $B = [B_1, \ldots, B_n]$ ja $X = (x_1, \ldots x_n)$, niin $BX = x_1 B_1 + \ldots + x_n B_n$ eli BX voidaan esittää sarakevektoreiden lineaarikombinaatioina.

Koska sarakevektoreita on n kappaletta ja ne ovat lineaarisesti riippumattomia niin ne virittävät avaruuden $\mathbb{R}^n$ [15, lause 8.17 ja sen todistus]. Siis lauseen 4.22 nojalla voimme päätellä, että yhtälöllä $BX = V$ on ratkaisu jokaiselle vektorille $V \in \mathbb{R}^n$, koska matriisin B sarakkeet muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon.

Osoitetaan seuraavaksi, että myös matriisin A sarakkeet muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon. Tehdään vastaoletus, että on olemassa vektori $Y \neq 0$ niin, että $AY = 0$. Edellisten johtopäätösten nojalla meillä on $X \neq 0$ niin, että $BX = Y$ on olemassa. Täytyy olla, että $IX = X$, koska yksikkömatriisi toimii "neutraalina" elementtinä matriisien kertolaskussa. Koska $AB = I$, saadaan $IX = ABX$. Matriisitulon ominaisuuksien 1.11 nojalla saadaan edelleen $ABX = A(BX)$. Kuitenkin $BX = Y$, joten $A(BX) = AY = 0$. Tästä seuraa, että $X = 0$, mikä on ristiriita oletuksen $X \neq 0$ kanssa, joten matriisin A sarakkeet muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon.

Koska $AB = I$ niin täytyy olla, että $ABA = IA = A$. Tästä seuraa, että $ABA - AI = A(BA - I) = 0$. Olkoon meillä matriisi Z ja väitetään, että $Z = BA - I$. Tehdään vastaoletus, että $Z \neq 0$. Tällöin matriisiin Z kuuluu ainakin yksi nollasta eroava alkio ja siten myös ainakin yksi nollasta eroava sarake Z_j. Kuitenkin $A(BA - I)_j = AZ_j = 0$, mikä on ristiriita, kun $Z \neq 0$. Siis täytyy olla, että $Z = 0$, jolloin $BA = I$.

Siis on todistettu, että kun $AB = I$, niin myös $BA = I$. □

4.2.2 Kanta

Määritelmä 4.23. [Kanta]

Vektoriavaruudessa V vektorijoukkoa $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ kutsutaan vektoriavaruuden V **kannaksi**, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1. S virittää vektoriavaruuden V ja
2. S on lineaarisesti riippumaton.

Voidaan todistaa, että vektorijoukko $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ on vektoriavaruuden V kanta, jos ja vain jos vektoriavaruuden V jokainen vektori on esitettävissä yksikäsitteisesti vektoreiden $S_1, S_2, \dots, S_n$ lineaarikombinaationa [2, lause 4.9]. Sovitaan lisäksi, että nolla-avaruudella $\{0\}$ on tyhjä kanta $\emptyset$.

Lause 4.24. *[Kanta ja lineaarinen riippuvuus]*

Jos $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ on vektoriavaruuden V kanta, niin jokainen joukko, joka sisältää enemmän kuin n vektoria vektoriavaruudessa V on lineaarisesti riippuva.

Todistus. [2, lause 4.10]. □

Lause 4.25. *[Kannan vektorit]*

Jos vektoriavaruudella V on yksi kanta, jossa on n vektoria niin kaikissa vektoriavaruuden V kannoissa on n vektoria.

Todistus. [2, lause 4.11]. □

Esimerkki 4.26. [Tason kanta]

Tutkitaan muodostavatko vektorit $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan eli onko $\{V_1, V_2\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Määritelmän 4.23 mukaan vektorit V_1 ja V_2 muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan, jos vektorit V_1 ja V_2 virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$ ja vektorit V_1 ja V_2 ovat lineaarisesti riippumattomat.

Tarkastellaan ensin virittävätkö vektorit V_1 ja V_2 avaruuden $\mathbb{R}^2$. Tarkastelua varten valitaan vektori $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ edustamaan mielivaltaista vektoria avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Nyt vektori S pitäisi esittää vektoreiden V_1 ja V_2 lineaarikombinaationa. Yritetään siis löytää luvut c_1 ja c_2, joilla $c_1V_1 + c_2V_2 = S$ eli

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}.$$

Tästä saamme yhtälöparin:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = s_1 \\ c_1 - c_2 & = s_2. \end{cases}$$

Yhtälöparilla on yksikäsitteinen ratkaisu, jossa

$$c_1 = \frac{s_1 + s_2}{2} \quad \text{ja} \quad c_2 = \frac{s_1 - s_2}{2},$$

joten vektorit V_1 ja V_2 virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$.

Nyt täytyy vielä näyttää, että vektorit V_1 ja V_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. Yritämme siis nyt löytää luvut c_1 ja c_2, joilla $c_1V_1 + c_2V_2 = 0$ eli

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tästä saamme yhtälöparin:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= 0. \end{cases}$$

Nähdään, että yhtälöryhmän ainoa mahdollinen ratkaisu on $c_1 = c_2 = 0$, joten vektorit V_1 ja V_2 ovat lineaarisesti riippumattomat.

Näin ollen $\{V_1, V_2\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

4.2.3 Dimensio

Määritelmä 4.27. [Dimensio]

Jos vektoriavaruudessa V on kanta, joka koostuu n vektorista, niin lukua n kutsutaan vektoriavaruuden V **dimensioksi**, $\dim(V) = n$. Jos vektoriavaruus V koostuu pelkästä nollavektorista niin vektoriavaruuden V dimensio määritellään nollaksi. Dimensio on kannan valinnasta riippumaton eli vektoriavaruudessa V ei ole kantoja, joissa olisi eri määrä vektoreita.

Vektoriavaruuden dimensio on siis sen vektorikannan vektoreiden lukumäärä. Jos jossain kannassa on n vektoria, nin muissakaan kannoissa ei voi olla kuin n vektoria. Lisäksi kannoissa ei voi myöskään olla vähempää kuin n vektoria, koska jos vektoriavaruuden dimensio on n niin jokaisessa kannassa täytyy olla vähintään n lineaarisesti riippumatonta vektoria, jotta se voisi virittää koko vektoriavaruuden. Nämä seuraavat lauseesta 4.25.

Esimerkki 4.28. [Vektoriavaruuksien dimensioita]

$\dim(\mathbb{R}^1) = 1, \ \dim(\mathbb{R}^2) = 2, \ \dim(\mathbb{R}^3) = 3, \ \ldots, \ \dim(\mathbb{R}^n) = n.$

Esimerkki 4.29. [Matriisiavaruuden dimensio]

Ratkaistaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dimensio.

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ eräät vektorit eli matriisit ovat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osoitetaan, että vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, joten muodostetaan yhtälö vektoreista kertoimilla c_1, c_2, c_3 ja c_4 ja asetetaan yhtälö nollaksi sekä sievennetään:

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Joten $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Matriisien A, B, C ja D lineaarikombinaatioilla voidaan esittää kaikki vektorit avaruudessa $\mathbb{R}^{2\times 2}$, sillä matriisi

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

voidaan kirjoittaa matriisien A, B, C ja D lineaarikombinaationa seuraavasti:

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siis matriisit A, B, C ja D virittävät avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ja avaruudessa $\mathbb{R}^{2\times 2}$ on neljän vektorin kanta, joten $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$.

4.3 Sisätulo ja normi

Sisätuloa ja normia käytetään vektoriavaruuksissa vektoreiden välisten ominaisuuksien mittaamiseen. Normi kuvaa vektorin pituutta ja sisätulo vektoreiden välisiä ominaisuuksia. Lasketaan seuraavissa alaluvuissa myös kompleksilukujen sisätulo, normi ja etäisyys. Tämän luvun kirjoittamiseen on hyödynnetty Peter Petersenin kirjoittamaa kirjaa *Linear Algebra* [14].

4.3.1 Sisätulo

Sisätulo eli toiselta nimeltään pistetulo lasketaan kahdelle vektorille. Vektorit voivat olla reaalisia tai kompleksisia.

Määritelmä 4.30. [Sisätulo n-ulotteisessa reaalisessa vektoriavaruudessa]

Vektoreiden

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ja } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

sisätulo saadaan kaavalla:

$$X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Huomautus 4.31. Sisätulo on sama kuin matriisitulo X^TY.

Määritelmä 4.32. [Sisätulo]

Vektoriavaruuden V sisätulo joukossa $\mathbb{C}$ on $(X \mid Y)$ kaikilla $X, Y \in V$ eli kuvaus $(\cdot \mid \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$, joka täyttää seuraavat vaatimukset:

1. $(X \mid X) \geq 0$, ja $(X \mid X) = 0$, jos ja vain jos $X = 0$,
2. $(X \mid Y) = \overline{(Y \mid X)}$ ja
3. Jokaiselle $X, Y, Z \in V$ ja $c, d \in \mathbb{C}$ pätee
$$(cX + dZ \mid Y) = c(X \mid Y) + d(Z \mid Y).$$

Huomautus 4.33. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ sisätulo 4.30 toteuttaa määritelmän 4.32 ehdot.

Esimerkki 4.34. [Sisätulon laskeminen]

Lasketaan vektoreiden

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ ja } Y = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sisätulo:

$$X \cdot Y = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = -2 - 1 + 3 + 8 = 8.$$

Esimerkki 4.35. [Kompleksilukujen sisätulo]

Lasketaan kompleksilukujen $z_1 = 1 - 2i$ ja $z_2 = 4 + 3i$ sisätulo. Jotta sisätulo voidaan laskea tulee jälkimmäisestä kompleksiluvusta ottaa kompleksikonjugaatti. Kompleksiluvun $z_2 = 4 + 3i$ kompleksikonjugaatti on $z_2 = 4 - 3i$. Nyt voidaan laskea kompleksilukujen z_1 ja z_2 sisätulo:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot \overline{z}_2 &= (1 - 2i)(4 - 3i) \\
&= 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-3i) + 4 \cdot (-2i) + (-2) \cdot (-3)i^2 \\
&= 4 - 3i - 8i + 6i^2 \\
&= 4 - 11i - 6 \\
&= -2 - 11i.
\end{aligned}$$

Huomautus 4.36. Kompleksilukujen tulo ei ole sisätulo, sillä

$$(z_1 \mid z_2) = (ac + bd) + (bc - ad)i = \overline{(z_2 \mid z_1)}.$$

Lisäksi vrt. edellisessä esimerkissä 4.35 esitettyjen kompleksilukujen tulo ei ole sisätulo, koska $z_1 \cdot z_2 = 10 - 5i \neq -2 - 11i = z_1 \cdot \overline{z}_2$.

4.3.2 Normi

Sisätuloavaruuksissa vektoreiden pituuksia kutsutaan **normeiksi**. Normia merkitään kaksilla itseisarvoviivoilla, joiden keskelle on merkitty vektori eli esim. $||X||$.

Määritelmä 4.37. [Vektorin normi]

Vektorin X normi on $||X|| = \sqrt{(X \mid X)}$.

Määritelmä 4.38. [Vektorin normi reaalisessa vektoriavaruudessa]

$$\text{Vektorin } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{normi on} \quad ||X|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Käytämme vektoreiden yhdensuuntaisuutta esimerkissä 4.40, joten määritellään se ennen esimerkkiä.

Määritelmä 4.39. [Yhdensuuntaiset vektorit]

Vektorit X ja Y ovat yhdensuuntaiset eli $X \,||\, Y$, jos ja vain jos $X = cY$, jollakin $c \neq 0$.

Esimerkki 4.40. [Vektorin normin laskeminen]

Olkoon meillä vektori $Y = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$. Lasketaan vektorin normi ja etsitään sellainen vektori U, joka on yhdensuuntainen vektorin Y kanssa ja jonka normi on 2.

Vektorin Y normi on:

$$||Y|| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7.$$

Normi on sama kuin pisteen $(-2, 6, 3)$ etäisyys origosta katso luku 4.3.3, sillä origo toimii nollapisteenä vektorin alkupisteelle, joten sen lopullinen sijainti on juuri kyseisen pisteen etäisyys origosta.

Vektorin Y kanssa yhdensuuntainen vektori U saadaan kaavalla

$$U = \pm \frac{2Y}{||Y||} \quad \text{, jossa 2 on vektorin } U \text{ normi.}$$

Nyt siis

$$U = \pm \frac{2}{7} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Löydettiin siis kaksi vektoria $U = \pm\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$, jotka ovat yhdensuuntaisia vektorin Y kanssa ja joiden normi on 2.

Kompleksiluvun normi lasketaan hyödyntäen kompleksiluvun kompleksikonjugaattia. Kompleksiluvusta ja sen kompleksikonjugaatista lasketaan sisätulo, josta otetaan neliöjuuri. Kompleksiluvun normiksi saadaan aina reaaliluku kts. 3.3.

Esimerkki 4.41. [Kompleksiluvun normi]

Kompleksiluvun $z = 3 + 3i$ kompleksikonjugaatti on $\overline{z} = 3 - 3i$. Lasketaan kompleksiluvun $z = 3 + 3i$ normi:

$$\begin{aligned}
||z|| &= \sqrt{z \cdot \overline{z}} \\
&= \sqrt{(3+3i)(3-3i)} \\
&= \sqrt{3 \cdot 3 + 3 \cdot (-3i) + 3 \cdot 3i + 3 \cdot (-3)i^2} \\
&= \sqrt{9 - 9i + 9i - 9i^2} \\
&= \sqrt{9+9} \\
&= \sqrt{18} \\
&= 3\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

4.3.3 Etäisyys ja kulma

Määritellään ja lasketaan kahden vektorin välinen etäisyys ja kulma sekä lasketaan esimerkkinä kompleksilukujen etäisyys.

Määritelmä 4.42. [Kahden vektorin välinen etäisyys]

Vektoreiden X ja Y välinen etäisyys saadaan kaavalla:

$$d(X, Y) = ||X - Y||.$$

Esimerkki 4.43. [Vektoreiden etäisyys]

Olkoon meillä vektorit $X = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix}$ ja $Y = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$. Lasketaan vektoreiden X ja Y etäisyys toisistaan:

$$d(X, Y) = ||X - Y|| = ||(11 - 10, 6 - 3)|| = ||1, 3|| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Kompleksilukujen etäisyys lasketaan kompleksilukujen erotuksen ja normin avulla, samaan tapaan kuin vektoreiden etäisyys.

Esimerkki 4.44. [Kompleksilukujen etäisyys]

Olkoon meillä kompleksiluvut $z_1 = 11+i$ ja $z_2 = 10-3i$. Lasketaan kompleksilukujen z_1 ja z_2 etäisyys toisistaan laskemalla ensin $z_1 - z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 11 + i - (10 - 3i) \\ &= 11 + i - 10 + 3i \\ &= 1 + 4i. \end{aligned}$$

Lasketaan sitten erotuksen normi hyödyntäen erotuksen kompleksikonjugaattia:

$$\begin{aligned} ||z_1 - z_2|| &= \sqrt{(1 + 4i)(1 - 4i)} \\ &= \sqrt{1 - 4i + 4i - 16i^2} \\ &= \sqrt{1 + 16} \\ &= \sqrt{17}. \end{aligned}$$

Eli $d(z_1, z_2) = \sqrt{17}$.

Kun vektoreiden sisätulo ja normi osataan laskea niin voidaan määrittää kahden vektorin välinen kulma.

Määritelmä 4.45. [Kahden vektorin välinen kulma]

Kahden nollasta eroavan vektorin välinen kulma avaruudessa $\mathbb{R}^n$ saadaan kaavalla:

$$\cos(X, Y) = \frac{X \cdot Y}{||X||\ ||Y||}, \text{ kun kulma on välillä } [0, \pi].$$

Huomautus 4.46. Kaksi vektoria virittävät tason, joten kulma $\cos(X, Y)$ on tasossa olevien vektoreiden X ja Y välille muodostunut kulma [3].

Esimerkki 4.47. [Vektoreiden välinen kulma]

Lasketaan vektoreiden

$$Y = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ja } X = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

välinen kulma. Aloitetaan laskemalla vektoreiden sisätulo, joka on:

$$Y \cdot X = 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 5 = -8 - 2 + 15 = 6.$$

Lasketaan seuraavaksi vektoreiden V ja U normit:

$$||Y|| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26}$$

ja

$$||X|| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 4 + 25} = \sqrt{33}.$$

Nyt voidaan laskea vektoreiden välinen kulma:

$$\begin{aligned}
\cos(X, Y) &= \frac{X \cdot Y}{||X||\ ||Y||} \\
\cos(X, Y) &= \frac{6}{\sqrt{26}\sqrt{33}} \\
\cos(X, Y) &= \frac{6}{\sqrt{858}} \\
(X, Y) &= 78.2°.
\end{aligned}$$

Vektoreiden Y ja X väliseksi kulmaksi saatiin siis 78.2°.

5 Lineaarikuvaukset

Lineaarikuvaukset ovat erityinen tyyppi funktioita, jotka säilyttävät vektoreiden lineaariset ominaisuudet. Lineaarikuvauksia voidaan esittää matriisien avulla, missä jokainen lineaarikuvaus vastaa tiettyä matriisia. Lineaarialgebran oppikirjat *Matematiikan taito 15* [3] ja *Calculus 11* [4] ovat olleet tärkeitä lähteitä tämän luvun sisällön muodostamisessa.

5.1 Funktio

Funktion määritelmä joukosta A joukkoon B viittaa sääntöön, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon tarkasti yhden alkion joukosta B. Tätä sääntöä kuvataan lyhyesti merkinnällä $F : A \to B$. Funktion määrittely ei edellytä erityistä tietoa joukkojen A ja B alkioista, jotka voivat olla lukuja, mutta lineaarialgebrassa ne ovat vektoreita.

Tarkastellaan funktion määritelmää ennen kuin siirrytään tarkastelemaan tarkemmin lineaarikuvauksia. Funktion määritelmässä puhutaan tulojoukon osajoukosta, joka tarkoittaa joukkoa, joka koostuu joistakin tulojoukon alkioista, mutta ei välttämättä kaikista niistä. Esimerkiksi, jos meillä on vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ niin sen osajoukko on jotkin vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorit.

Määritelmä 5.1. [Funktio]

Olkoot A ja B joukkoja. Tällöin näiden tulojoukon osajoukko $F \subset A \times B$ on funktio, jos sille pätevät seuraavat ehdot:

1. Kaikille X, jotka kuuluvat joukkoon A on olemassa Y joukossa B siten, että pari (X, Y) kuuluu funktioon F.
2. Pari (X, Y) kuuluu funktioon F jos ja vain jos jokaiselle Z, joka on eri suurta kuin Y pätee, että pari (X, Z) ei kuulu joukkoon F.

5.2 Lineaarikuvaus

Määritelmä 5.2. [Lineaarikuvaus]

Olkoon W ja V vektoriavaruuksia. Funktiota $F : W \to V$ sanotaan lineaarikuvaukseksi, jos kaikilla vektoriavaruuden W vektoreilla X ja Y ja kaikilla skalaareilla c on voimassa:

1. $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$ ja
2. $F(cX) = cF(X)$.

Esimerkki 5.3. [Lineaarikuvauksen tutkiminen]

Tutkitaan määritelmän 5.2 avulla ovatko funktiot $F(X) = 3X$ ja $G(X) = 4X + 1$ lineaarikuvauksia, kun $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tarkastellaan ensin funktiota F ja ensimmäistä ehtoa:

$$F(X+Y) = 3(X+Y) = 3X + 3Y = F(X) + F(Y),$$

joten ensimmäinen ehto pätee. Tarkastellaan sitten täyttääkö funktio F myös toisen ehdon vaatimukset:

$$F(cX) = 3cX = c \cdot 3X = cF(X).$$

Funktio F täyttää myös toisen ehdon vaatimukset, joten funktio $F = 3X$ on lineaarikuvaus.

Tehdään samat tarkastelut funktiolle $G = 4X + 1$:

$$G(X+Y) = 4(X+Y) + 1 = 4X + 4Y + 1 \neq G(X) + G(Y) = 4X + 4Y + 2,$$

joten funktio G ei täytä ensimmäistä ehtoa eikä funktio $G = 4X+1$ siten ole myöskään lineaarikuvaus. Toista ehtoa ei tarvitse tarkastella, sillä molempien ehtojen tulee olla voimassa, jotta funktio on lineaarikuvaus.

Matriisit liittyvät luonnollisesti kuvauksiin, koska tiettyjä funktioita voidaan kätevästi esittää matriisien avulla. Matriisien kertominen vektorin kanssa muuttaa vektorin toiseksi vektoriksi. Lineaarikuvaukset noudattavat kaavaa $F(X) = AX$, missä X on vektori ja A on matriisi. Tämä seuraa seuraavasta lauseesta 5.4.

Lause 5.4. *[Lineaarikuvaus]*

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *kanta on*

$$\begin{aligned} B &= \{E_1, E_2, \ldots, E_n\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Olkoon nyt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineaarikuvaus, jossa*

$$T(E_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad T(E_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad T(E_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nyt $(m \times n)$-matriisia, jonka i. sarake vastaa matriisia $T(E_i)$, voidaan merkitä matriisina A. Tällöin matriisille

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

pätee $T(X) = AX$ kaikilla $X \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. [2, lause 6.10]. □

Esimerkki 5.5. [Matriisit ja lineaarikuvaus]

Tarkastellaan funktiota F, jolle pätee

$$F(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Eli $F(X) = AX$. Nyt jokaista vektoria $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vastaa vektori

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}.$$

Esimerkiksi, kun $x_1 = 2$ ja $x_2 = 3$ saadaan:

$$F(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Lisäksi määritelmän 5.2 ehtojen nojalla F on lineaarikuvaus, sillä:

$$F(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = F(X) + F(Y)$$

ja

$$F(cX) = A(cX) = cAX = cF(X).$$

5.3 Affiinikuvaukset

Affiinikuvauksia käytetään kuvankäsittelyn perustyökaluina. Tietokone laskee kuvan pisteille affiinikuvauksia, kun kuvaa halutaan esimerkiksi venyttää tai peilata. Tyydymme tarkastelemaan kuvauksien perustyyppejä tasossa.

Määritelmä 5.6. [Affiinikuvaus]

Affiinikuvaus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on muotoa

$$F(X) = AX + B,$$

missä matriisi A on kääntyvä (2×2)-matriisi ja $B \in \mathbb{R}^2$ [16].

Lause 5.7. *[Affiinikuvauksen ominaisuudet]*

Affiinikuvauksella on seuraavat ominaisuudet.

1. *Samalla suoralla olevat pisteet ovat samalla suoralla myös kuvauksen jälkeen.*
2. *Samalla suoralla olevien janojen pituuksien suhteet säilyvät kuvauksessa (ellei suora kuvaudu pisteeksi).*

Todistus. [9, sivu 41]. □

5.3.1 Venytys

Määritelmä 5.8. [Venytys]

Yhtälö $T(X) = aX$, $a \in \mathbb{R}$ määrittelee kuvauksen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka on venytys. Jos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, niin

$$T(X) = T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = AX.$$

Venytys on siis matriisin $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ välittämä lineaarikuvaus.

Venytystä kutsutaan myös homoteettiseksi kuvaukseksi eli **homotetiaksi**. Tällöin matriisin A välittämässä kuvauksessa origo on **homotetiakeskus**.

Esimerkki 5.9. [Kolmion venytys]

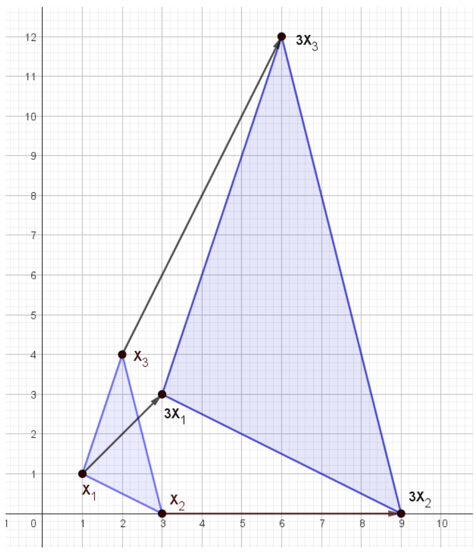
Olkoon meillä kolmio, jonka kärkipisteet ovat $X_1 = (1, 1)$, $X_2 = (3, 0)$ ja $X_3 = (2, 4)$. Havainnollistetaan lineaarikuvauksia $T(X) = 3X$ ja $T(X) = -3X$.

Vektorit $3X$ ja $-3X$ ovat kolme kertaa niin pitkiä kuin vektori X. Vektori $3X$ on vektorin X kanssa samansuuntainen, kun taas vektori $-3X$ on vastakkaissuuntainen vektorin X kanssa. Tästä syystä kolmioiden kärkipisteiden etäisyydet origosta tulevat kolminkertaisiksi ja kaikki muutkin etäisyydet kolminkertaistuvat.

Kuvauksen $T(X) = 3X$ välittää matriisi: $3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,

joten kuvausta $T(X) = 3X$ vastaavan kolmion kärkipisteet ovat

$$
\begin{aligned}
&(1 \cdot 3, 1 \cdot 3) = (3, 3), \\
&(3 \cdot 3, 0 \cdot 3) = (9, 0) \text{ ja} \\
&(2 \cdot 3, 4 \cdot 3) = (6, 12).
\end{aligned}
$$

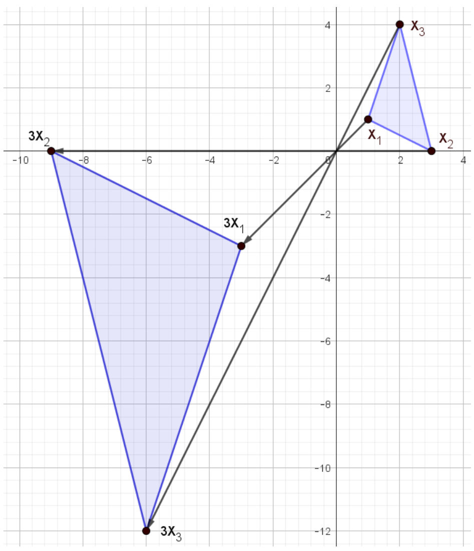


Kuva 5.1: Kuvaus $T(X) = 3X$.

Kuvauksen $T(X) = -3X$ välittää matriisi: $-3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$,

joten kuvausta $T(X) = -3X$ vastaavan kolmion kärkipisteet ovat

$$\begin{aligned} &(1 \cdot (-3), 1 \cdot (-3)) = (-3, -3), \\ &(3 \cdot (-3), 0 \cdot (-3)) = (-9, 0) \text{ ja} \\ &(2 \cdot (-3), 4 \cdot (-3)) = (-6, -12). \end{aligned}$$



Kuva 5.2: Kuvaus $T(X) = -3X$.

5.3.2 Peilaus

Pisteen (x, y) peilikuva

- x-akselin suhteen on $(x, -y)$,
- y-akselin suhteen on $(-x, y)$ ja
- origon suhteen on $(-x, -y)$.

Lause 5.10. *[Peilaus]*

Vektorin $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *peilaus origon suhteen on* $-X = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$. *Nyt matriisi* $-I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *välittää tason peilauksen origon suhteen.*

Todistus. Vektorille X pätee, että

$$-X = -I \cdot X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

□

Vastaavasti saadaan peilaukset x-akselin ja y-akselin suhteen.

Peilauksen

- x-akselin suhteen välittää matriisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,
- y-akselin suhteen välittää matriisi $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja
- origon suhteen välittää matriisi $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Esimerkki 5.11. [Kolmion peilaus]

Olkoon meillä kolmio, jonka kärkipisteet ovat: $(1, 1), (3, 0)$ ja $(2, 4)$. Peilataan kolmio x-akselin, y-akselin ja origon suhteen.

Peilauksen x**-akselin** suhteen välittää matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

joten x-akselin suhteen peilatun kolmion kärkipisteet ovat

$$(1 \cdot 1, 1 \cdot (-1)) = (1, -1),$$
$$(3 \cdot 1, 0 \cdot (-1)) = (3, 0) \text{ ja}$$
$$(2 \cdot 1, 4 \cdot (-1)) = (2, -4).$$

Peilauksen y**-akselin** suhteen välittää matriisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

joten y-akselin suhteen peilatun kolmion kärkipisteet ovat

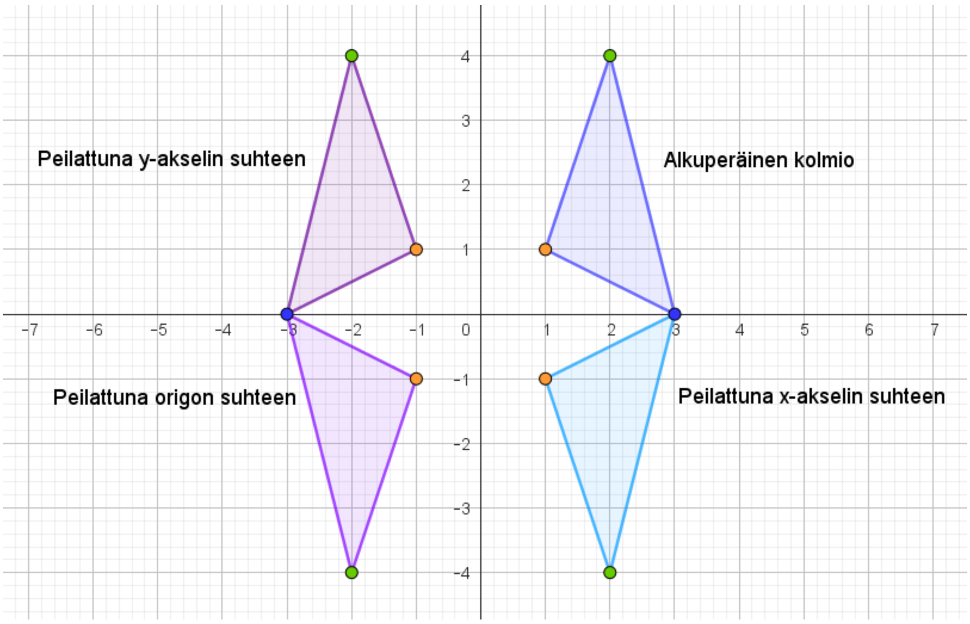
$$\begin{aligned} &(1 \cdot (-1), 1 \cdot 1) = (-1, 1), \\ &(3 \cdot (-1), 0 \cdot 1) = (-3, 0) \text{ ja} \\ &(2 \cdot (-1), 4 \cdot 1) = (-2, 4). \end{aligned}$$

Peilauksen **origon** suhteen välittää matriisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

joten origon suhteen peilatun kolmion kärkipisteet ovat

$$\begin{aligned} &(1 \cdot (-1), 1 \cdot (-1)) = (-1, -1), \\ &(3 \cdot (-1), 0 \cdot (-1)) = (-3, 0) \text{ ja} \\ &(2 \cdot (-1), 4 \cdot (-1)) = (-2, -4). \end{aligned}$$



Kuva 5.3: Peilaukset.

5.3.3 Projektio

Määritelmä 5.12. [Yksikkövektori]

Vektoria, jonka pituus on yksi sanotaan **yksikkövektoriksi**.

Määritelmä 5.13. [Projektio]

Olkoon X jokin avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori ja E jokin yksikkövektori avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Tällöin vektorin X projektio vektorin E virittämälle aliavaruudelle on

$$Y = X_E = (X \cdot E)E.$$

Skalaaritulon laskusääntöjen 1.7 nojalla

$$Y = (X \cdot E)E = E(X \cdot E) = E(E \cdot X).$$

Toisaalta $E \cdot X = E^T X$, koska E on yksikkövektori, joten

$$Y = E(E \cdot X) = E(E^T X) = (EE^T)X.$$

Siis projektiokuvaus on lineaarikuvaus, jonka määrittää matriisi $A = EE^T$.

Esimerkki 5.14. [Projektiokuvaus]

Muodosta projektiokuvauksen matriisi, kun yksikkövektori $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja kun yksikkövektori $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sekä laske vektorin $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ vektoriprojektio molemmissa tapauksissa.

Kun $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ saadaan projektiokuvauksen matriisiksi:

$$P = EE^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektorin X projektio on tällöin vektori:

$$Y = PX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

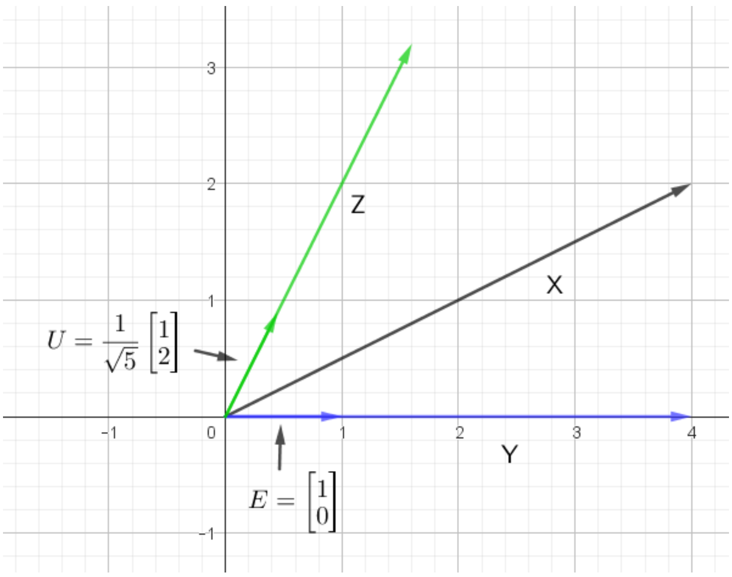
Kun $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ saadaan projektiokuvauksen matriisiksi:

$$R = UU^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vektorin X projektio on tällöin vektori:

$$Z = RX = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{bmatrix}.$$

Seuraavassa kuvassa on laskujen tueksi kuvallinen havainnollistus projisoinneista:



Kuva 5.4: Projektiot

5.3.4 Kierto

Kierroissa kuvion muoto ja koko säilyvät. Tasoissa kierto tarkoittaa sitä, että paikkavektori kiertyy alkupisteensä ympäri vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan, kun kierron kulma on positiivinen tai myötäpäivään eli negatiiviseen kiertosuuntaan, kun kierron kulma on negatiivinen. Silloin, kun tasokuvio kiertyy, niin kaikki kuvion pisteet kiertyvät saman kulman verran origon ympäri.

Lause 5.15. *[Kierto tasossa]*

Kierron tasossa välittää matriisi

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

jossa parametri α voi saada arvoja reaalilukujen joukossa tai kulmien suuruuksia.

Todistus. Olkoon T kierto origon ympäri vastapäivään kulman α verran. Sovelletaan kiertoa T vektoreihin $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nyt saadaan

$$T(E_1) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \text{ ja } T(E_2) = T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} T(X) &= T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= xT\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + yT\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.16. [Kolmion kierto]

Olkoon meillä kolmio, jonka kärkipisteet ovat: $(1,1), (3,0)$ ja $(2,4)$. Kierretään kolmiota 90°, 180° ja 270°.

Kolmio voidaan ilmaista kärkipisteidensä avulla matriisina

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Kiertoa **90°** välittää matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

joten 90° kierretyn kolmion kärkipisteet ovat

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

eli pisteet $(-1, 1)$, $(0, 3)$ ja $(-4, 2)$.

Kiertoa **180°** välittää matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

joten 180° kierretyn kolmion kärkipisteet ovat

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

eli pisteet $(-1, -1)$, $(-3, 0)$ ja $(-2, -4)$.

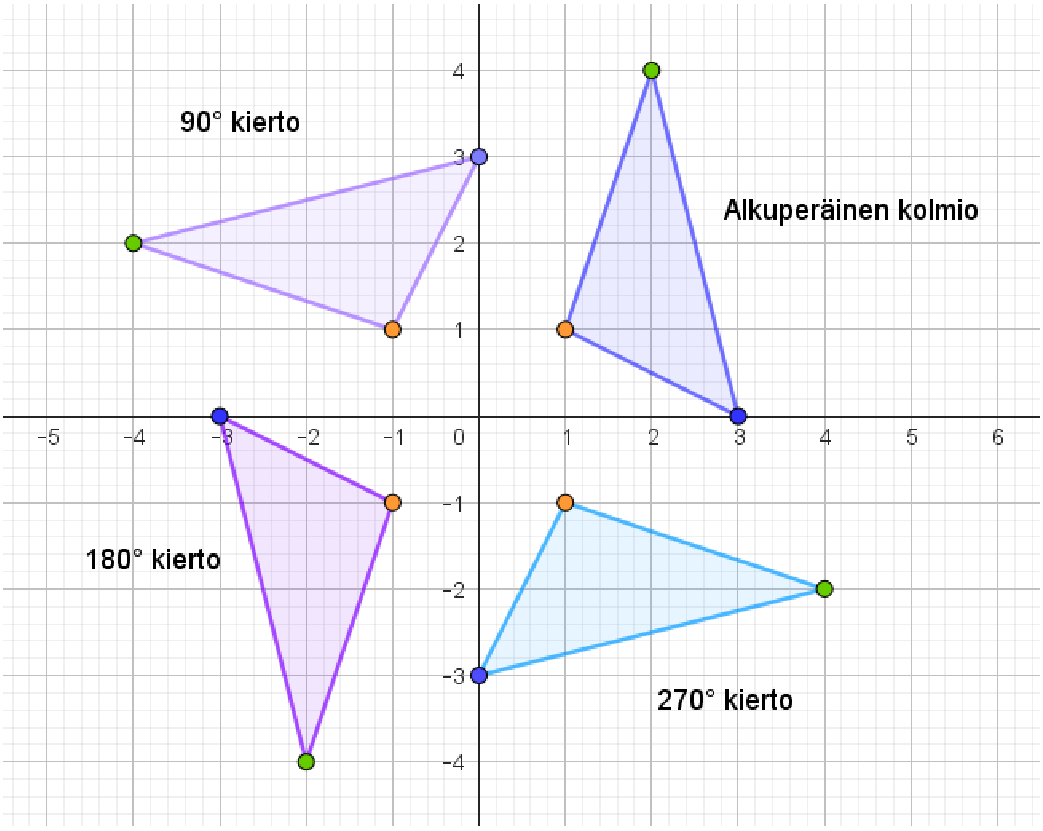
Kiertoa **270°** välittää matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

joten 270° kierretyn kolmion kärkipisteet ovat

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

eli pisteet $(1, -1)$, $(0, -3)$ ja $(4, -2)$.



Kuva 5.5: Kierrot.

6 Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Ominaisarvoja ja **ominaisvektoreita** voidaan laskea $(n \times n)$-matriiseille eli neliömatriiseille. Ne ovat hyvin keskeinen osa monia matemaattisia menetelmiä kuten differentiaaliyhtälöiden ratkaisua ja iteratiivisia menetelmiä. Tämän luvun määritelmät pohjautuvat kirjaan *Numerical Methods with Worked Examples: Matlab Edition*, jonka ovat kirjoittaneet Woodford, C. ja Phillips, C. [17].

6.1 Ominaisarvot ja -vektorit

Käsittelimme aiemmin vain reaaliarvoisia matriiseja. Matriisit voivat olla kuitenkin myös kompleksiarvoisia. Tässä luvussa tutustutaan myös kompleksisiin matriiseihin, sillä ominaisarvo λ voi saada myös kompleksisia ratkaisuja, kun laajennetaan reaalilukujen joukosta $\mathbb{R}$ kompleksilukujen joukkoon $\mathbb{C}$. Kompleksisille matriiseille pätee samat laskusäännöt kuin reaaliarvoisille matriiseille [18, luku 13.5]. Näitä käsiteltiin luvussa 1.

Määritelmä 6.1. [Ominaisarvo ja ominaisvektori]

Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Skalaaria λ kutsutaan matriisin A ominaisarvoksi, jos on olemassa nollasta eroava vektori X, jolle pätee

$$AX = \lambda X.$$

Vektoria X kutsutaan matriisin A ominaisvektoriksi ominaisarvolla λ.

Matriisin ominaisarvojen ja -vektoreiden määrittämiseen tarvitaan **karakteristista polynomia**.

Määritelmä 6.2. [Karakteristinen polynomi]

Matriisin A karakteristinen polynomi on lauseke:

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Kuvaus todella on polynomi, sillä:

$$\begin{aligned}|A - \lambda I_n| &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c_{n-k} \lambda^{n-k} \\ &= (-1)^n c_n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_{n-1} \lambda^{n-1} \\ &\quad + (-1)^{n-2} c_{n-2} \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^0 c_0,\end{aligned}$$

jossa n on matriisin A dimensio ja luvut c_i ovat kertoimia, jotka riippuvat matriisin A alkioista.

Yhtälöä $\det(A - \lambda I_n) = 0$ kutsutaan **karakteriseksi yhtälöksi**. Matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit saadaan selvitettyä seuraavilla kolmella vaiheella:

1. Muodosta karakteristinen polynomi $\det(A - \lambda I_n)$.
2. Ratkaise λ karakterisesta yhtälöstä $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
3. Ratkaise jokaiselle λ ominaisvektori yhtälöllä $(A - \lambda I_n)X = 0$.

Matriisilla voi olla reaalisia ominaisarvoja tai kompleksisia ominaisarvoja. Tarkastellaan seuraavaksi kolmea erilaista ominaisarvotilannetta (2×2)-matriiseille ja muodostetaan myös ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.

Huomautus 6.3. Ominaisarvo ja ominaisvektori esimerkeissä esiintyvä c voi olla eri arvoinen riippuen ominaisvektorista eli c kuvaa jotakin lukua joukossa $\mathbb{C}$ tietyssä ominaisvektorissa.

Esimerkki 6.4. [Yksi reaalinen ominaisarvo]

Olkoon meillä matriisi $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, jonka ominaisarvot ja ominaisvektorit halutaan selvittää.

Aloitetaan etsimällä matriisin A ominaisarvot muodostamalla karakteristinen polynomi ja laskemalla sen nollakohdat:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 0 \\ &= (2-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Kun $(2 - \lambda) = 0$, niin $\lambda = 2$.

Saatiin siis matriisin A ainoaksi ominaisarvoksi $\lambda = 2$.

Etsitään seuraavaksi sitä vastaava ominaisvektori V_1, yhtälön $(A - \lambda I_n)V_1 = 0$ avulla.

$\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 + v_2 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisiyhtälöstä nähdään, että v_1 voi olla mikä tahansa luku ja $v_2 = 0$, joten:

$$\begin{cases} v_1 \in \mathbb{C} \\ v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix},$$

missä c on mikä tahansa luku kompleksilukujen joukossa.

Matriisille A löydettiin siis ominaisarvo $\lambda = 2$, jota vastaava ominaisvektori on

$$V_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ kun } c \in \mathbb{C} \text{ ja } c \neq 0.$$

Eli esimerkiksi eräs ominaisvektori on $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, kun $c = 1$.

Esimerkki 6.5. [Kaksi reaalista ominaisarvoa]

Olkoon meillä matriisi $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, jonka ominaisarvot ja ominaisvektorit halutaan selvittää.

Aloitetaan etsimällä matriisin A ominaisarvot muodostamalla karakteristinen polynomi ja laskemalla sen nollakohdat:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) &= \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(3-\lambda) - 4 \cdot (-1) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2. \end{aligned}$$

Nyt meillä on karakteristinen yhtälö $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, jonka ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2, \end{cases}$$

käyttämällä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Matriisin A ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 2$.

Etsitään seuraavaksi näitä vastaavat ominaisvektorit V_1 ja V_2.

$\lambda_1 = -1$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -2-(-1) & 4 \\ -1 & 3-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -v_1+4v_2 \\ -v_1+4v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Matriisiyhtälöstä saadaan:

$$\begin{cases} v_1 = 4v_2 \\ v_2 \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 4c \\ c \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = 2$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -2-2 & 4 \\ -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -4v_1+4v_2 \\ -v_1+v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Matriisiyhtälöstä saadaan:

$$\begin{cases} v_1 \in \mathbb{C} \\ v_2 = v_1 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}.$$

Matriisille A löydettin siis ominaisarvot $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 2$, joita vastaavat ominaisvektorit ovat

$$V_1 = \begin{bmatrix} 4c \\ c \end{bmatrix} \text{ ja } V_2 = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} \text{, joissa } c \in \mathbb{C} \text{ ja } c \neq 0.$$

Esimerkki 6.6. [Kompleksiset ominaisarvot]

Olkoon meillä matriisi $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, jonka ominaisarvot ja ominaisvektorit halutaan selvittää.

Aloitetaan etsimällä matriisin A ominaisarvot muodostamalla karakteristinen polynomi ja laskemalla sen nollakohdat:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) &= \det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-\lambda)(-\lambda) - (-1)\cdot 1 \\ &= \lambda^2 + 1.\end{aligned}$$

Nyt meillä on karakteristinen yhtälö $\lambda^2 + 1 = 0$, jolla ei ole reaalisia ratkaisuja, siis

$$\lambda^2 + 1 \neq 0 \text{ kaikilla } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Matriisilla ei siis ole reaalisia ominaisarvoja, eikä sillä ole siten myöskään reaalisia ominaisvektoreita. Matriisilla on kuitenkin kompleksiset ominaisarvot, joille voidaan löytää niitä vastaavat ominaisvektorit. Ratkaistaan nyt saatu yhtälö kompleksilukujen avulla:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda^2 = -1 \iff \lambda = \pm\sqrt{-1} \iff \lambda = \pm i.$$

Matriisin A ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = i$ ja $\lambda_2 = -i$. Etsitään seuraavaksi näitä vastaavat ominaisvektorit V_1 ja V_2.

$\lambda_1 = i$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 - i & -1 \\ 1 & 0 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -iv_1 - v_2 \\ v_1 - iv_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisiyhtälöstä saadaan:

$$\begin{cases} v_1 = iv_2 \\ v_2 \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} ic \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = -i$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 - (-i) & -1 \\ 1 & 0 - (-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} iv_1 - v_2 \\ v_1 + iv_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisiyhtälöstä saadaan:

$$\begin{cases} v_1 = -iv_2 \\ v_2 \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} -ic \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisille A löydettiin siis ominaisarvot $\lambda = i$ ja $\lambda = -i$, joita vastaavat ominaisvektorit ovat

$$V_1 = \begin{bmatrix} ic \\ c \end{bmatrix} \text{ ja } V_2 = \begin{bmatrix} -ic \\ c \end{bmatrix}, \text{ kun } c \in \mathbb{C} \text{ ja } c \neq 0.$$

Huomautus 6.7. Matriisin ominaisarvojen tulo vastaa matriisin determinanttia [19, luvun 4.1 kohta; huomioita]. Katso esimerkiksi esimerkki 6.5, jossa ominaisarvojen $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 2$ tulo on -2, joka vastaa matriisin A determinanttia.

6.2 Erikoismatriisit

Tarkastellaan seuraavaksi diagonaalimatriisin 1.1.3 ja porrasmuotoisen matriisin 2.3.2 ominaisarvojen ja ominaisvektoreiden ratkaisemista.

Esimerkki 6.8. [Diagonaalimatriisin ominaisarvot ja -vektorit]

Olkoon meillä matriisi
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

jolla on nollasta poikkeavia arvoja vain sen päädiagonaalilla eli se on diagonaalimatriisi.

Diagonaalimatriisin ominaisarvot saadaan suoraan päädiagonaalilta eli matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ ja $\lambda_3 = -1$.

Ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit nähdään myös suoraan matriisista A:

ominaisarvoa $\lambda_1 = 4$ vastaava ominaisvektori on $\begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

ominaisarvoa $\lambda_2 = 2$ vastaava ominaisvektori on $\begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$

ja ominaisarvoa $\lambda_3 = -1$ vastaava ominaisvektori on $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$,

joissa $c \in \mathbb{C}$ ja $c \neq 0$.

Esimerkki 6.9. [Porrasmuotoisen matriisin ominaisarvot ja -vektorit]

Olkoon meillä porrasmuotoinen matriisi

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Porrasmuotoisen matriisin ominaisarvot saadaan suoraan päädiagonaalilta kuten diagonaalimatriisin, sillä porrasmuotoisen matriisin karakteristisen polynomin nollakohdat saadaan yhtälöstä:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0$$

[20, sivu 5]. Siis matriisin B ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = -3$. Näitä vastaavia ominaisvektoreita ei kuitenkaan saada yhtä helposti vaan ne tulee laskea:

$\lambda_1 = -2$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2-(-2) & 2 & 5 \\ 0 & 1-(-2) & 3 \\ 0 & 0 & -3-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 + 2v_2 + 5v_3 \\ 0 + 3v_2 + 3v_3 \\ 0 + 0 - v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisiyhtälöstä saadaan:

$$\begin{cases} v_1 \in \mathbb{C} \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2-1 & 2 & 5 \\ 0 & 1-1 & 3 \\ 0 & 0 & -3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3v_1 + 2v_2 + 5v_3 \\ 0 + 0 + 3v_3 \\ 0 + 0 - 4v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisiyhtälöstä saadaan:

$$\begin{cases} v_1 \in \mathbb{C} \\ v_2 = \frac{3}{2}v_1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} c \\ \frac{3}{2}c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_3 = -3$:

$$\begin{bmatrix} -2-(-3) & 2 & 5 \\ 0 & 1-(-3) & 3 \\ 0 & 0 & -3-(-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 + 2v_2 + 5v_3 \\ 0 + 4v_2 + 3v_3 \\ 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisiyhtälöstä saadaan:

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{7}{2}v_3 \\ v_2 = -\frac{3}{4}v_3 \\ v_3 \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow V_3 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2}c \\ -\frac{3}{4}c \\ c \end{bmatrix}.$$

Ominaisarvoja $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = -3$ vastaaviksi ominaisvektoreiksi saatiin siis

$$V_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} c \\ \frac{3}{2}c \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ja } V_3 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2}c \\ -\frac{3}{4}c \\ c \end{bmatrix},$$

kun $c \in \mathbb{C}$ ja $c \neq 0$.

Eli esimerkiksi, kun $c = 4$ niin saadaan ominaisvektoreiksi

$$V_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ja } V_3 = \begin{bmatrix} -14 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

6.3 Käyttö ja sovellukset

Tarkastellaan esimerkkiä pöllöjen ja metsärottien populaatioiden kasvusta. Esimerkki pohjautuu lähteessä [12] esitettyyn vastaavaan esimerkkiin.

Esimerkki 6.10. [Populaation kasvu]

Olkoon meillä ajanhetki k, joka on aika kuukausissa. Merkitään pöllöjen ja metsärottien populaatiota

$$X_k = \begin{bmatrix} P_k \\ R_k \end{bmatrix},$$

jossa tutkitun alueen pöllöjen lukumäärä on P_k ja rottien lukumäärä on R_k (mitattuna tuhansissa). On tiedossa, että

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= (0{,}5)P_k + (0{,}4)R_k \text{ ja} \\ R_{k+1} &= -pP_k + (1{,}1)R_k \ , \end{aligned}$$

missä p on positiivinen parametri. Ensimmäisen yhtälön termi $(0{,}5)P_k$ kertoo meille, että vain puolet pöllöistä selviävät, jos niillä ei ole metsärottia ravintona. Toisen yhtälön termi $(1{,}1)R_k$ taas kertoo meille, että metsärottien populaatio kasvaa 10% joka kuukausi, jos pöllöt eivät metsästä niitä. Jos rottia on runsaasti niin ensimmäisen yhtälön termi $(0{,}4)R_k$ saa pöllöjen populaation nousemaan, kun taas toisen yhtälön termi $-pP_k$ kertoo rottien kuolemista pöllöjen saalistuksen seurauksena.

Määritä tämän järjestelmän kehitys, kun saalistusparametri $p = 0{,}104$.

Kun $p = 0{,}104$ niin voidaan muodostaa seuraava kerroinmatriisi:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ -0{,}104 & 1{,}1 \end{bmatrix},$$

jolloin $X_{k+1} = AX_k$.

Ratkaistaan matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ -0{,}104 & 1{,}1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} 0{,}5-\lambda & 0{,}4 \\ -0{,}104 & 1{,}1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (0{,}5-\lambda)(1{,}1-\lambda) - 0{,}4 \cdot (-0{,}104) \\ &= 0{,}55 - 0{,}5\lambda - 1{,}1\lambda + \lambda^2 + 0{,}0416 \\ &= \lambda^2 - 1{,}6\lambda + 0{,}5916. \end{aligned}$$

Nyt meillä on karakteristinen yhtälö $\lambda^2 - 1{,}6\lambda + 0{,}5916 = 0$, jonka ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0{,}58 \\ \lambda_2 = 1{,}02, \end{cases}$$

käyttämällä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Matriisin A ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 0{,}58$ ja $\lambda_2 = 1{,}02$.

Etsitään seuraavaksi näitä vastaavat ominaisvektorit V_1 ja V_2.

$\lambda_1 = 0{,}58$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0{,}5-0{,}58 & 0{,}4 \\ -0{,}104 & 1{,}1-0{,}58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -0{,}08v_1 + 0{,}4v_2 \\ -0{,}104v_1 + 0{,}52v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla 12,5 ja saadaan sievennettyä matriisiyhtälö seuraavaan muotoon:

$$\begin{bmatrix} v_1 - 5v_2 \\ v_1 - 5v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisiyhtälöstä saadaan:

$$\begin{cases} v_1 = 5v_2 \\ v_2 \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 5c \\ c \end{bmatrix}.$$

Valitaan $c = 1$, jolloin saadaan $V_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 1{,}02$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0{,}5-1{,}02 & 0{,}4 \\ -0{,}104 & 1{,}1-1{,}02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -0{,}52v_1 + 0{,}4v_2 \\ -0{,}104v_1 + 0{,}08v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyt saadaan osamäärien $-\frac{0{,}4}{0{,}52} = -\frac{10}{13}$ ja $-\frac{0{,}08}{0{,}104} = -\frac{10}{13}$ avulla tietää, että ensimmäisen muuttujan arvot ovat $-\frac{10}{13}$ kertaisia verraten toisen muuttujan arvoihin, jolloin toisen muuttujan arvot ovat $-\frac{13}{10}$ kertaisia verraten ensimmäisen muuttujan arvoihin. Saadaan siis sievennettyä matriisiyhtälö seuraavaan muotoon ja jatkettua ominaisvektoreiden etsimistä:

$$\begin{bmatrix} v_1 + \frac{13}{10}v_2 \\ v_1 + \frac{13}{10}v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisiyhtälöstä saadaan:

$$\begin{cases} v_1 \in \mathbb{C} \\ v_2 = \frac{13}{10} v_1 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} c \\ \frac{13}{10} c \end{bmatrix}.$$

Valitaan $c = 10$, jolloin saadaan sievennetty ominaisvektori $V_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$.

Matriisille A löydettin siis ominaisarvot $\lambda_1 = 0{,}58$ ja $\lambda_2 = 1{,}02$, joita vastaavat ominaisvektorit ovat

$$V_1 = \begin{bmatrix} 5c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ kun } c = 1 \text{ ja}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} c \\ \frac{13}{10} c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}, \text{ kun } c = 10.$$

Koska V_1 ja V_2 ovat lineaarisesti riippumattomat, niin ne virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$. Niinpä alkuperäisen yhtälön X_0 voi kirjoittaa muodossa $X_0 = c_1V_1 + c_2V_2$.

Kun $k = 1$:

$$\begin{aligned} X_1 = AX_0 &= A(c_1V_1 + c_2V_2) \\ &= c_1AV_1 + c_2AV_2 \\ &= c_1(0{,}58)V_1 + c_2(1{,}02)V_2 \\ &= c_1(0{,}58) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2(1{,}02) \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oletetaan, että $X_k = c_1(0{,}58)^k V_1 + c_2(1{,}02)^k V_2$ joillain $k = 1, 2, 3, \ldots$. Tehdään induktioaskel, jossa osoitetaan, että vastaava yhtälö pätee askeleella $k + 1$:

$$\begin{aligned} X_{k+1} = AX_k &= A(c_1(0{,}58)^k V_1 + c_2(1{,}02)^k V_2) \\ &= A\left(c_1(0{,}58)^k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2(1{,}02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}\right) \\ &= (0{,}58)c_1(0{,}58)^k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + (1{,}02)c_2(1{,}02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \\ &= c_1(0{,}58)^{k+1} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2(1{,}02)^{k+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kun $k \to \infty$ niin $(0{,}58)^{k+1} \to 0$. Oletetaan, että $c_2 > 0$, jolloin kaikilla riittävän suurilla arvoilla k, X_{k+1} on likimain sama kuin $c_2(1{,}02)^{k+1}V_2$ ja saadaan:

$$X_{k+1} \approx c_2(1{,}02)^{k+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Väite pätee siis kaikille arvoille k.

Approksimaatio edellisessä yhtälössä paranee, kun k kasvaa ja siten isoilla arvoilla k saadaan:

$$X_{k+2} = AX_{k+1} \approx c_2(1{,}02)^{k+2} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = (1{,}02)c_2(1{,}02)^{k+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \approx 1{,}02X_{k+1}.$$

Edellisen yhtälön aproksimaation kertoo, että lopulta X_k eli pöllöjen ja rottien lukumäärät kasvavat lähes 1,02 kertaiseksi joka kuukausi eli kuukausittainen kasvuvauhti on 2%. Lisäksi havaitaan, että $\frac{P_k}{R_k}$ on suunnilleen $\frac{10}{13}$, joten jokaista 10 pöllöä kohden on noin 13 tuhatta rottaa.

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä, jossa kolmen alan välillä opiskelijat vaihtavat opiskelupaikkaansa. Esimerkki pohjautuu lähteessä [21] esitettyyn vastaavaan esimerkkiin.

Esimerkki 6.11. [Alojen työntekijät]

Oletetaan, että kaiken kaikkiaan 200000 henkilöä työskentelee aloilla IT, koulutus ja media yhdessä kaupungissa. Oletetaan myös, että näiden alojen yhteinen työllisyystilanne pysyy muuttumattomana vuosien varrella. Kyselyn mukaan 200000 henkilöstä 70000 työskentelee IT-alalla, 90000 koulutusalalla ja loput 40000 media-alalla. IT-alan työntekijöistä 2% siirtyy vuosittain koulutusalalle ja 1% media-alalle. Joka vuosi myös 2% koulutusalalla työskentelevistä siirtyy IT-alalle ja 1% media-alalle. Myös media-alalta siirtyy opiskelijoita joka vuosi 1% IT-alalle ja 1% koulutusalalle.

Yritä ennustaa alojen välistä työllisyystilannetta 10 vuoden kuluttua.

Koska joka vuosi henkilöt siirtyvät ammatista toiseen yhtä suurella prosenttiosuudella niin kolmea ammattia harjoittavien henkilöiden välisissä siirroissa on ilmeistä, että

$$X_1 = AX_0, \quad X_2 = AX_1, \quad \ldots, \quad X_n = AX_{n-1}, \text{ joten } X_n = A^nX_0,$$

jossa A on symmetrinen matriisi, jonka alkiot vastaavat siirtymismääriä. Lisäksi täytyy olla kääntyvä matriisi P, jolle pätee $P^{-1}AP = \Lambda$ [**?**, lause 4.7], jossa Λ on diagonaalimatriisi, jonka muodostavat matriisin A ominaisarvot. Matriisi P muodostuu matriisin A lineaarisesti riippumattomista ominaisvektoreista siten, että ominaisvektorit ovat matriisin P sarakkeet. Näin ollen $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ [6, sivu 264] eli näillä kolmella alalla työskentelevän henkilöstön tilanne vuonna n voidaan laskea kaavalla

$$X_n = P\Lambda^n P^{-1} X_0 = A^n X_0.$$

Olkoon X_0 lähtötilanne, jolloin IT-alalla on 70000 työntekijää, koulutusalalla 90000 ja media-alalla 40000. Tästä saadaan matriisi:

$$\begin{aligned} X_0 &= \begin{bmatrix} 70000 \\ 90000 \\ 40000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot 10000. \end{aligned}$$

Määritetään seuraavaksi matriisi A, joka kuvaa siirtymistä kolmen alan välillä:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}97 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}97 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}98 \end{bmatrix}.$$

Etsitään seuraavaksi matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit, jotta saadaan muodostettua matriisit Λ, P ja P^{-1}.

Aloitetaan etsimällä ominaisarvot matriisille A:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix}0{,}97 & 0{,}02 & 0{,}01\\ 0{,}02 & 0{,}97 & 0{,}01\\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}98\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)\\
&= \det\begin{bmatrix}0{,}97-\lambda & 0{,}02 & 0{,}01\\ 0{,}02 & 0{,}97-\lambda & 0{,}01\\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}98-\lambda\end{bmatrix}\\
&= (0{,}97-\lambda)\det\begin{bmatrix}0{,}97-\lambda & 0{,}01\\ 0{,}01 & 0{,}98-\lambda\end{bmatrix}\\
&\quad - 0{,}02\det\begin{bmatrix}0{,}02 & 0{,}01\\ 0{,}01 & 0{,}98-\lambda\end{bmatrix} + 0{,}01\det\begin{bmatrix}0{,}02 & 0{,}97-\lambda\\ 0{,}01 & 0{,}01\end{bmatrix}\\
&= (0{,}97-\lambda)((0{,}97-\lambda)(0{,}98-\lambda) - 0{,}01\cdot 0{,}01)\\
&\quad - 0{,}02(0{,}02(0{,}98-\lambda) - 0{,}01\cdot 0{,}01)\\
&\quad + 0{,}01(0{,}02\cdot 0{,}01 - (0{,}97-\lambda)0{,}01)\\
&= \cdots\\
&= -\lambda^3 + 2{,}92\lambda^2 - 2{,}8415\lambda + 0{,}9215.
\end{aligned}$$

Nyt meillä on karakteristinen yhtälö $-\lambda^3 + 2{,}92\lambda^2 - 2{,}8415\lambda + 0{,}9215 = 0$, jonka ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{cases}\lambda_1 = 0{,}95\\ \lambda_2 = 0{,}97\\ \lambda_3 = 1,\end{cases}$$

ratkaisemalla karakteristinen yhtälö käsin tai laskimella (tässä esimerkissä laskimella). Matriisin A ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 0{,}95$, $\lambda_2 = 0{,}97$ ja $\lambda_3 = 1$.

Etsitään seuraavaksi näitä vastaavat ominaisvektorit V_1, V_2 ja V_3.

$\lambda_1 = 0{,}95$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}0{,}97-0{,}95 & 0{,}02 & 0{,}01\\ 0{,}02 & 0{,}97-0{,}95 & 0{,}01\\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}98-0{,}95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix}0{,}02v_1 + 0{,}02v_2 + 0{,}01v_3\\ 0{,}02v_1 + 0{,}02v_2 + 0{,}01v_3\\ 0{,}01v_1 + 0{,}01v_2 + 0{,}03v_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Huomataan, että kun ensimmäisen ja toisen muuttujan arvot ovat toistensa vastalukuja ja, kun kolmas muuttuja on 0 niin täydennetylle kerroinmatriisille löydetään ratkaisuja:

$$\begin{cases} v_1 = -v_2 \\ v_2 \in \mathbb{C} \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Valitaan $c = 1$, jolloin saadaan $V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 0{,}97$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0{,}97 - 0{,}97 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}97 - 0{,}97 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}98 - 0{,}97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 + 0{,}02v_2 + 0{,}01v_3 \\ 0{,}02v_1 + 0 + 0{,}01v_3 \\ 0{,}01v_1 + 0{,}01v_2 + 0{,}01v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Huomataan, että kun ensimmäisen ja toisen muuttujan arvot ovat samat ja $-\frac{1}{2}$-kertaisia verraten kolmenteen muuttujaan niin täydennetylle kerroinmatriisille löydetään ratkaisuja:

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{1}{2}v_3 \\ v_2 = -\frac{1}{2}v_3 \\ v_3 \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}c \\ c \end{bmatrix}.$$

Valitaan $c = 1$, jolloin saadaan $V_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_3 = 1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0{,}97 - 1 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}97 - 1 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}98 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -0{,}03v_1 + 0{,}02v_2 + 0{,}01v_3 \\ 0{,}02v_1 - 0{,}03v_2 + 0{,}01v_3 \\ 0{,}01v_1 + 0{,}01v_2 - 0{,}02v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Huomataan, että ainut mahdollinen ratkaisu täydennetylle kerroinmatriisille saadaan, kun $v_1 = v_2 = v_3$, joten

$$\begin{cases} v_1 \in \mathbb{C} \\ v_2 = v_1 \\ v_3 = v_1 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix}.$$

Valitaan $c = 1$, jolloin saadaan $V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matriisille A löydettin siis ominaisarvot $\lambda_1 = 0{,}95$, $\lambda_2 = 0{,}97$ ja $\lambda_3 = 1$, joita vastaavat ominaisvektorit ovat:

$$V_1 = \begin{bmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ kun } c = 1 \text{ },$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ kun } c = 1 \text{ ja}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ kun } c = 1.$$

Nyt, kun matriisin A ominaisarvot ja -vektorit ovat tiedossa niin voimme muodostaa matriisit Λ, Λ^n, P ja P^{-1}.

Matriisi $\Lambda = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}97 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja $\Lambda^n = \begin{bmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}97^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{bmatrix}$.

Matriisi $P = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Lisäksi lasketaan P^{-1}:

$$P|I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot\frac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot\frac{1}{2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot 1 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow \cdot \tfrac{1}{3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot(-\tfrac{3}{2}) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot(-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] = I|P^{-1}.$$

Siis $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Nyt voimme laskea paljonko on A^{10} kaavalla $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$:

$$\begin{aligned} A^{10} &= P\Lambda^{10}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}95^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}97^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \cdot 0{,}95^{10} & -\frac{1}{2} \cdot 0{,}97^{10} & 1 \\ 1 \cdot 0{,}95^{10} & -\frac{1}{2} \cdot 0{,}97^{10} & 1 \\ 0 & 0{,}97^{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 0{,}755606 & 0{,}156869 & 0{,}0875253 \\ 0{,}156869 & 0{,}755606 & 0{,}0875253 \\ 0{,}0875253 & 0{,}0875253 & 0{,}824949 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

IT-, koulutus- ja media-alalla työskentelevän henkilöstön tilanne vuonna n saadaan seuraavalla kaavalla $X_n = A^n X_0$, joten käytetään sitä selvittämään tilanne 10 vuoden kuluttua:

$$
\begin{aligned}
X_{10} &= A^{10}X_0 \\
&= \begin{bmatrix} 0{,}755606 & 0{,}156869 & 0{,}0875253 \\ 0{,}156869 & 0{,}755606 & 0{,}0875253 \\ 0{,}0875253 & 0{,}0875253 & 0{,}824949 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot 10000 \\
&\approx \begin{bmatrix} 7{,}0512 \\ 8{,}2486 \\ 4{,}7002 \end{bmatrix} \cdot 10000 \\
&= \begin{bmatrix} 70512 \\ 82486 \\ 47002 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Eli 10 vuotta myöhemmin IT-alalla ennustetaan olevan 70512 työntekijää, koulutusalalla 82486 työntekijää ja media-alalla 47002 työntekijää.

7 Lineaarialgebran opetus

Seuraaviin lukuihin on muodostettu lineaarialgebran opetukseen liittyviä keskeisiä asioita tämän teoksen pohjalta.

Lineaarialgebran kurssi vaatii esitietoina pakolliset pitkän matematiikan kurssit 1 – 5, LOPS 2019 [22].

Tavoitteet:

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija oppii matriisilaskennan alkeet, syventää ymmärrystään vektorilaskennasta ja lineaarisista yhtälöryhmistä sekä tutustuu kompleksilukuihin ja vektoriavaruuksiin.

Keskeiset sisällöt:

1. Matriisien laskutoimitukset.
2. Lineaariset yhtälöryhmät ja matriisimuoto.
3. Eliminointimenetelmät.

4. Kompleksiluvut.

5. Vektoriavaruus ja aliavaruus.

6. Lineaarikuvaukset.

7. Ominaisarvot ja -vektorit.

7.1 Aikataulutus

Lukiossa on siirrytty opintopistesysteemiin, joten aikataulutus on laskettu opintopisteissä. Lineaarialgebran opintokokonaisuuden tämän teoksen pohjalta voi pitää joko yhtenä kolmen opintopisteen moduulina tai kahden opintopisteen moduulina, jolloin pois jätetään luku 3 *Kompleksiluvut* sekä luvuista 4 ja 6 kompleksilukuja koskevat määritelmät, lauseet ja esimerkit. Lukion moduulit ovat myös matematiikan osalta pääsääntöisesti 75 minuuttia pitkiä, joten yhtä opintopistettä kohtaan tulisi pitää noin 11,4 oppituntia [23].

Yhtenä 3 opintopisteen moduulina, luvut $1-6$ kannattaa käydä läpi juurikin siinä järjestyksessä, kuin ne ovat. Tässä on esitetty eräs mahdollinen tuntijakauma, kun käytössä on 34 kappaletta 75 minuutin mittaista oppituntia:

1. Luvun 1 *Matriisit* aloitus ja luku 1.1 *Peruskäsitteitä.*

2. Luku 1.2 *Matriisin peruslaskutoimitukset.*

3. Luku 1.3 *Matriisitulo.*

4. Luku 1.4 *Matriisin potenssi ja transpoosi.*

5. Luku 1.5.1 *Käänteismatriisi.*

6. Luvun 1.5.2 *Determinantti* aloitus.

7. Luvun 1.5.2 *Determinantti* jatkamista ja luku 1.5.3 *Käänteismatriisin ja determinantin yhteys.*

8. Luvun 2 *Lineaariset yhtälöryhmät* aloitus ja luvut 2.1 *Ratkaisuiden olemassaolo ja lukumäärä* sekä 2.2 *Yhtälöryhmien geometrinen tulkinta.*

9. Luku 2.3 *Matriisi- ja porrasmuoto.*

10. Luku 2.4 *Gaussin eliminointimenetelmä.*
11. Luku 2.5 *Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmä.*
12. Kertaus tunti lukujen 1 ja 2 asioista.
13. Luvun 3 *Kompleksiluvut* aloitus ja luku 3.1 *Imaginaariyksikkö i ja kompleksilukujen joukko.*
14. Luku 3.2 *Kompleksilukujen laskusäännöt.*
15. Luku 3.3 *Kompleksikonjugaatti ja itseisarvo.*
16. Luvun 4 *Vektoriavaruudet* aloitus ja luku 4.1.1 *Vektoriavaruus.*
17. Luku 4.1.2 *Aliavaruus*
18. Luku 4.1.3 *Lineaarikombinaatiot.*
19. Luku 4.2.1 *Lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus.*
20. Jatkoa edellisen tunnin aiheesta.
21. Luku 4.2.2 *Kanta* ja luku 4.2.3 *Dimensio.*
22. Luku 4.3.1 *Sisätulo* ja luku 4.3.2 *Normi.*
23. Luku 4.3.3 *Etäisyys ja kulma.*
24. Kertaustunti lukujen 3 ja 4 asioista.
25. Luvun 5 *Lineaarikuvaukset* sekä luvut 5.1 *Funktio* ja 5.2 *Lineaarikuvaus.*
26. Luvun 5.3 *Affiinikuvaukset* aloitus sekä luvut 5.3.1 *Venytys* ja 5.3.2 *Peilaus.*
27. Luku 5.3.3 *Projektio* ja luku 5.3.4 *Kierto.*
28. Luvun 6 *Ominaisarvot ja ominaisvektorit* aloitus ja luku 6.1 *Ominaisarvot ja -vektorit.*
29. Luvun 6.1 *Ominaisarvot ja -vektorit* kertausta ja luku 6.2 *Erikoismatriisit.*
30. Luku 6.3 *Käyttö ja sovellukset.*
31. Edellisen tunnin jatkamista.

32. Kertaustunti lukujen 5 ja 6 asioista.

33. Valmistelutunti.

34. Koetunti.

Kahden opintopisteen moduulissa pois jätettäisiin siis luku 3 *Kompleksiluvut* sekä kompleksilukuja koskevat lauseet, määritelmät ja esimerkit. Tässä on esitetty eräs mahdollinen tuntijakauma ilman kompleksilukuja.

Kahden opintopisteen moduulissa on 23 kappaletta 75 minuutin mittaista oppituntia:

1. Luvun 1 *Matriisit* aloitus ja luku 1.1 *Peruskäsitteitä.*

2. Luku 1.2 *Matriisin peruslaskutoimitukset.*

3. Luku 1.3 *Matriisitulo.*

4. Luku 1.4 *Matriisin potenssi ja transpoosi.*

5. Luku 1.5.1 *Käänteismatriisi.*

6. Luku 1.5.2 *Determinantti.*

7. Luvun 1.5.2 *Determinantti* jatkamista ja luku 1.5.3 *Käänteismatriisin ja determinantin yhteys.*

8. Luvun 2 *Lineaariset yhtälöryhmät* aloitus ja luvut 2.1 *Ratkaisuiden olemassaolo ja lukumäärä* sekä 2.2 *Yhtälöryhmien geometrinen tulkinta.*

9. Luku 2.3 *Matriisi- ja porrasmuoto.*

10. Luku 2.4 *Gaussin eliminointimenetelmä.*

11. Luku 2.5 *Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmä.*

12. Luvun 4 *Vektoriavaruudet* aloitus ja luku 4.1.1 *Vektoriavaruus.*

13. Luku 4.1.2 *Aliavaruus* ja luku 4.1.3 *Lineaarikombinaatiot.*

14. Luku 4.2.1 *Lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus*, poislukien matriisien käänteisominaisuuden todistaminen.

15. Luku 4.2.2 *Kanta* ja luku 4.2.3 *Dimensio.*

16. Luku 4.3.1 *Sisätulo*, luku 4.3.2 *Normi* sekä luku 4.3.3 *Etäisyys ja kulma*.
17. Luvun 5 *Lineaarikuvaukset* sekä luvut 5.1 *Funktio* ja 5.2 *Lineaarikuvaus*.
18. Luku 5.3 *Affiinikuvaukset*; luvut 5.3.1 *Venytys*, 5.3.2 *Peilaus*, 5.3.3 *Projektio* ja 5.3.4 *Kierto*.
19. Luvun 6 *Ominaisarvot ja ominaisvektorit* aloitus ja luku 6.1 *Ominaisarvot ja -vektorit*.
20. Luku 6.2 *Erikoismatriisit* ja luvun 6.3 *Käyttö ja sovellukset* aloitus.
21. Luku 6.3 *Käyttö ja sovellukset*.
22. Valmistelutunti.
23. Koetunti.

7.2 Tekniset apuvälineet

On olemassa monipuolisia teknisiä apuvälineitä, joita voidaan hyödyntää lineaarialgebran opetuksessa. Niillä voidaan suorittaa laskuja, visualisoida ja soveltaa. Teknisten apuvälineiden avulla opiskelijat pääsevät syventämään ymmärrystään lineaarialgebrasta ja soveltamaan osaamistaan. Tässä esiteltynä Wolfram Alpha, MATLAB ja Octave, mutta muitakin löytyy, kuten Python ja Desmos.

Wolfram Alpha

Wolfram Alpha on tietokoneavusteinen laskentaohjelma ja hakukone, joka tarjoaa monipuolisia työkaluja lineaarialgebran (sekä muidenkin matematiikan aihealueiden) laskemiseen. Se kykenee muun muassa ratkaisemaan matriisien kertolaskut, determinantin, käänteismatriisit, ominaisarvot ja ominaisvektorit sekä lineaariset yhtälöryhmät. Se on nopea ja tehokas apuväline sekä helppo käyttöinen. Se on myös pitkälti ilmainen, mutta lisäominaisuuksia saa maksua vastaan. Wolfram Alphan saa myös ladattua ilmaiseksi App Storesta ja Play kaupasta, joten se on helposti oppilaiden saatavilla.

Linkki sivustolle: https://www.wolframalpha.com/ .

Linkki lineaarialgebran ohjesivulle: https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/linear-algebra .

MATLAB

MATLAB on monipuolinen ja suosittu numeerisen laskennan ohjelmistopaketti. Se on tehokas työkalu lineaarialgebrassa, koska se sisältää laajan valikoiman sisäänrakennettuja ominaisuuksia ja työkaluja. MATLABilla onnistuu lähtökohtaisesti kaikki samat asiat kuin Wolfram Alphalla, mutta se vaatii enemmän ymmärrystä siitä, mitä on tekemässä, koska se vaatii koodaustaitoja. Sillä voi kuitenkin luoda kuvia ja kuvaajia oppimisen tueksi. MATLAB Online on tarjolla ilmaiseksi, mutta se ei tarjoa kaikkia ominaisuuksia. Itse MATLAB vaatii lisenssin käytön.

Linkki MATLAB Online sivustolle: https://se.mathworks.com/products/matlab-online.html .

Linkki lineaarialgebran ohjesivulle: https://se.mathworks.com/help/matlab/linear-algebra.html?searchHighlight=linear%20algebra&s_tid=srchtitle_support_results_5_linear%2520algebra .

Linkki Aalto yliopiston luomaan lineaarialgebran ohjesivustoon: https://math.aalto.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/LA.html .

GNU Octave

GNU Octave on avoimen lähdekoodin ohjemistopaketti, joka tarjoaa samankaltaisia ominaisuuksia kuin MATLAB. Avoin lähdekoodi tekee siitä helposti saatavilla olevan ja se on MATLABia hyödyllisempi opetuksessa, sillä se pyrkii tarjoamaan samanlaisia ominaisuuksia kuin MATLAB, mutta on ilmainen. Wolfram Alphaan verraten Octave täytyy ladata koneelle käyttöä varten, kun taas Wolfram Alpha on helpommin saatavilla laitteesta riippumatta.

Linkki GNU Octave sivulle: https://octave.org/ .

Linkki lineaarialgebran ohjesivulle: `https://docs.octave.org/v4.0.1/Linear-Algebra.html#Linear-Algebra` .

7.3 Opetusvinkkejä

Tässä koottuna muutamia vinkkejä lineaarialgebran opetukseen. Näiden lisäksi esimerkiksi interaktiiviset tehtävät, kuten ryhmätyöt tai tietokoneavusteiset harjoitukset, voivat parantaa oppimista ja osallistumista [24].

Taulukko

Matriisilaskennan selkeyttämisessä voi hyödyntää taulukoita, joita on ollut matematiikan opetuksessa käytössä jo ala-asteella. Taulukoista voidaan johtaa matriiseja, joissa on vain taulukoiden numeerinen informaatio. Esimerkiksi seuraavalla tavalla.

Olkoon meillä salibandyjoukkue, jossa on sekä miehiä että naisia. Joukkue koostuu hyökkääjistä, puolustajista ja maalivahdeista. Naisista 5 on hyökkääjiä, 2 puolustajia ja 1 maalivahti. Miehistä 4 on hyökkääjiä, 4 puolustajia ja 1 maalivahti. Voimme tiivistää nämä tiedot seuraavaan taulukkoon:

	Naiset	Miehet
Hyökkääjät	5	4
Puolustajat	2	4
Maalivahdit	1	1

Taulukon arvoista voidaan muodostaa matriisi A, johon tulee vain numeerinen informaatio:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehtävää voi tästä jatkaa eteenpäin matriisin tulkintaa opetellen luvun 1.1.1 tapaan.

Salakirjoitus

Salakirjoitus onnistuu matriisilaskennan avulla. Opiskelijat voivat itse luoda viestejä salakirjoituksella ja yrittää purkaa toistensa viestejä. Tämä on erinomainen tapa innostaa oppilaita hyödyntämään matriisilaskennan taitojaan. *Matematiikan taito 15* oppikirjassa [3] on esiteltynä salakirjoitusta matriisilaskennan avulla seuraavalla tavalla.

On olemassa Caesarin menetelmä, jossa eri kirjaimet koodataan numeroilla. Suomenkieliset aakkoset ja sanan "loppumerkki" $*$ voidaan koodata seuraavalla tavalla:

$$\text{A} = 00,\ \text{B} = 01,\ \text{C} = 02, \ldots,\ \text{Ä} = 27,\ \text{Ö} = 28, * = 29.$$

Viestille sovitaan avaimeksi jokin (2×2)-matriisi, jonka alkiot ja käänteismatriisin alkiot ovat kokonaislukuja. Viesti koodataan numeerisesti kahden luvun ryhmiin. Muodostuneet (2×1)-matriisit kerrotaan avainmatriisilla ja tulokset kirjataan peräkkäin. Koodin purkamiseksi viesti jaetaan taas kahden luvun ryhmiin ja kerrotaan muodostuneet (2×1)-matriisit avainmatriisin käänteismatriisilla. Tulokset kirjataan taas peräkkäin ja muutetaan kirjaimiksi. Loppumerkkiä $*$ hyödynnetään silloin, kun kirjaimia on pariton määrä.

Kirjoitetaan esimerkiksi viesti "Syö" salakirjoituksella, kun avainmatriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Numeerisesti viesti on "18 24 28 29". Suoritetaan kertolaskut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 84 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115 \\ 114 \end{bmatrix}.$$

Saatiin tulokseksi salattu viesti "90 84 115 114".

Tämän purkaminen onnistuisi samaan tyyliin, mutta käyttäen avainmatriisin käänteismatriisia ja saatua salattua viestiä.

Vaikeammin murrettavan version voisi muodostaa (3×3)-avainmatriisilla ja kolmen luvun ryhmillä.

Lineaariset yhtälöryhmät alkuun

Lineaarisiin yhtälöryhmiin tutustumisen voi aloittaa yksinkertaisilla ja jo muilta kursseilta tutuilla esimerkeillä, kuten

1. Määritä sellaiset luvut, joiden summa on 6 ja erotus on -4.
2. Määritä suorien $x + 2y = 1$ ja $-x - 3y = 2$ leikkauspiste.

Vektoriavaruuslaskentaa edistyneemmille

Edistyneemmille opiskelijoille voi antaa haastetta erilaisten tulosten osoittamisella. Tässä esimerkiksi kaksi tulosta, jotka voidaan osoittaa:

Osoita, että vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$ pätee

1. $|X \cdot Y| \leq ||X||\ ||Y||$ (Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö),
2. $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ (Kolmioepäyhtälö).

Opetusvideot

3Blue1Brown Suomi nimisellä YouTube–kanavalla `https://www.youtube.com/@3blue1brownsuomi53/featured` on lineaarialgebraan painottuvia videoita suomenkielellä.

Matematiikan Messi nimisellä YouTube–kanavalta `https://www.youtube.com/@matematiikanmessi/videos` löytyy paljon eri matematiikan aihealueisiin hyödyllisiä videoita, joista osa liittyy oleellisesti lineaarialgebran sisältöihin.

7.4 Tehtäviä

Tähän on koottu muutamia tehtäväesimerkkejä jokaisesta pääluvusta. Lisää tehtäviä löytyy valmiina esimerkiksi lähteistä [2], [3] ja [4].

7.4.1 Tehtäviä: Matriisit

1. Ilmoita matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
   (a) dimensio,
   (b) vaakavektorit,
   (c) pystyvektorit,
   (d) alkio a_{12},
   (e) alkio a_{23}.

2. Olkoon A matriisi $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ja olkoon B matriisi $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Määritä
   (a) $3A$,
   (b) $A + B$,
   (c) $3A - B$.

3. Ratkaise yhtälöstä matriisi X:
   (a) $X + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$,
   (b) $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

4. Olkoon A matriisi $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ja olkoon B matriisi $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Määritä
   (a) AB,
   (b) BA,
   (c) AI.

5. Ratkaise yhtälöstä $\begin{bmatrix} -3 & b \\ a & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -13 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$ luvut a ja b.

6. Olkoon $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Laske

   (a) B^0,

   (b) B^3.

7. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$. Määritä

   (a) A^T,

   (b) B^T,

   (c) $A^T + B^T$,

   (d) $(A+B)^T$.

8. Olkoon $C = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Muodosta

   (a) C^{-1},

   (b) CC^{-1},

   (c) $(C^{-1})^{-1}$.

9. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Määritä

   (a) $\det(A)$,

   (b) $\det(B)$,

   (c) $\det(A+B)$.

10. Ratkaise $\det(C)$, kun $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determinantin yleisen määritelmän avulla.

   (b) Alkioiden kopioinnilla.

11. Ratkaise $\det(A)$, kun $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

7.4.2 Tehtäviä: Lineaariset yhtälöryhmät

1. Ratkaise lineaariset yhtälöryhmät:

   (a) $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ -4x + y = 8, \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 1 \\ -x + 2y \qquad = 2 \\ \qquad y + 2z = 0. \end{cases}$

2. Esitä kohdan 1 yhtälöryhmät täydennettyinä kerroinmatriiseina.

3. Muunna lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4x + 2y - \ \ 2z = -8 \\ \qquad 6y + \ \ 2z = -30 \\ -8x - 2y + 10z = 3 \end{cases}$$

   (a) täydennetyksi kerroinmatriisiksi,

   (b) porrasmuotoiseksi täydennetyksi kerroinmatriisiksi.

4. Muodosta yhtälöryhmä täydennetystä kerroinmatriisista

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

5. Ratkaise Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmällä

   (a) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$,

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$.

6. Käännä matriisi $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ käyttäen Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmää.

7. Määritä sellainen matriisi X, että $AX = B$, kun

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

   (b) $A = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 36 & 18 \\ 32 & 16 \\ 28 & 14 \end{bmatrix}$.

7.4.3 Tehtäviä: Kompleksiluvut

1. Ratkaise seuraavat hyödyntäen imaginaariyksikköä i:

   (a) $\sqrt{-4}$,
   (b) $2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{-16}$,
   (c) $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-64}$,
   (d) $\sqrt{-8}$.

2. Laske kompleksilukujen $z_1 = 2 + 2i$ ja $z_2 = -1 - 5i$

   (a) summa,
   (b) erotus,
   (c) tulo.

3. Määritä kompleksiluvun $z = 6 + 7i$ kompleksikonjugaatti $\overline{z}$.

4. Laske edellisen kohdan kompleksiluvun z ja sen kompleksikonjugaatin $\overline{z}$ tulo.

5. Laske kompleksiluvun $z = 8 - 9i$ itseisarvo ja sen kompleksikonjugaatin $\overline{z}$ itseisarvo.

6. Sievennä lauseke $3 + 8i + 2 + i^2 - (-3i + 9) - 4i^2$.

7. Sievennä lauseke $-i + \sqrt{4} \cdot \sqrt{-49} + 5 \cdot 2i - (5i \cdot (2 + 3i))$.

7.4.4 Tehtäviä: Vektoriavaruudet

1. Osoita, että $\mathbb{R}^2$ on vektoriavaruus.

2. Onko joukko $W = \left(t \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right)$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus? Mikä on sen geometrinen merkitys?

3. Osoita, että suora $V = \left(\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right)$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

4. Onko joukko $U = \left(\begin{bmatrix} z \\ x \\ 1 \end{bmatrix}, x + z = 0 \right)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus?

5. Esitä vektori $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

   (a) vektoreiden $Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $Z = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ lineaarikombinaationa,

   (b) vektoreiden $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $Z = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ lineaarikombinaationa.

6. Tutki virittääkö joukko $S = \{V_1, V_2\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$, kun $V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

7. Ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippuvia vai riippumattomia:

(a) $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ja $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$,

(b) $Y_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ja $Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$?

8. Onko $\{V_1, V_2\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, kun

   (a) $V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $V_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$,

   (b) $V_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ ja $V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix}$?

9. Määritä vektoreiden $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{bmatrix}$ virittämän avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuden dimensio.

10. Laske vektoreiden $V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ ja $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ sisätulo.

11. Laske kompleksilukujen sisätulo, kun $z_1 = 4 + 2i$ ja $z_2 = 3 + 6i$.

12. Laske edellisen kohdan kompleksilukujen z_1 ja z_2 normit.

13. Laske normi, kun

    (a) $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

    (b) $Y_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

14. Laske vektoreiden $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ja $V_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ etäisyys.

15. Laske kompleksilukujen $z_1 = 3 + 3i$ ja $z_2 = 5 - 6i$ etäisyys.

16. Laske vektoreiden $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $Y = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ välinen kulma.

7.4.5 Tehtäviä: Lineaarikuvaukset

1. Ovatko seuraavat funktiot lineaarikuvauksia? Perustele.
   (a) $F(X) = 2X$, kun $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) $G(X) = X - 1$, kun $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (c) $H(X) = 5X + 3$, kun $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Mikä seuraavista on lineaarikuvauksen F matriisi A, kun F kuvaa vektorin $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektoriksi:
   (a) $F(X) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$,
   (b) $F(X) = \begin{bmatrix} -3x + y \\ y \end{bmatrix}$,
   (c) $F(X) = \begin{bmatrix} -2x - 1 \\ -x \\ 5x + 3y \end{bmatrix}$?

3. Olkoon meillä nelikulmio, jonka kärkipisteet ovat $(-2, -3)$, $(1, -1)$, $(0, 3)$ ja $(-3, 1)$.
   (a) Mikä matriisi välittää kuvauksen $T(X) = -2X$?
   (b) Mitkä ovat kuvausta $T(X) = -2X$ vastaavan nelikulmion kärkipisteet?
   (c) Havainnollista kuvausta $T(X) = -2X$ kuvalla, kuten esimerkissä 5.9.

4. Olkoon meillä sama nelikulmio kuin edellisessä kohdassa. Peilaa nelikulmio (anna vastauksena peilatun nelikulmion kärkipisteet)
   (a) x-akselin suhteen,
   (b) y-akselin suhteen,
   (c) origon suhteen.
   (d) Havainnollista kohtia a–c kuvilla.

5. Laske vektorin $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektoriprojektio, kun
   (a) yksikkövektori $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
   (b) yksikkövektori $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (c) Havainnollista kohtia a ja b kuvilla.

6. Olkoon meillä piste $(2, 1)$ eli matriisi $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mikä piste siitä saadaan seuraavilla kierroilla?
   (a) $\alpha = 30°$.
   (b) $\alpha = 120°$.
   (c) $\alpha = -45°$.
   (d) $\alpha = 360°$.
   (e) Havainnollista kohtia a–d kuvilla.

7. Osoita, että $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$, kun $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.

7.4.6 Tehtäviä: Ominaisarvot ja ominaisvektorit

1. Mikä seuraavista on matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ eräs ominaisarvo λ?

   (a) 0,

   (b) 1,

   (c) -1.

2. Mikä seuraavista on matriisin $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ eräs ominaisvektori:

   (a) $V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (b) $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (c) $V_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$?

3. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (a) ominaisarvot,

   (b) ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.

4. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (a) ominaisarvot,

   (b) ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.

5. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(a) ominaisarvot,

(b) ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.

6. Olkoon meillä matriisi $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

   (a) Osoita, että matriisien B ja B^T ominaisarvot ovat samat.

   (b) Ovatko matriisien ominaisvektorit samat? Perustele.

7. Muodosta sellainen (2×2)-matriisi A, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -2$ ja laske ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.

Viitteet

[1] SEATTLE PUBLIC SCHOOLS: *High School Math Progressions and Course Catalog*, verkkosivu, 2024. Viitattu 16.05.2024. URL: https://www.seattleschools.org/departments/mathematics/course-progressions/examples-of-math-pathways/.

[2] ROLAND E. LARSON ja BRUCE H. EDWARDS: *Elementary Linear Algebra*. D. C. Heath and Company, Lexington Massachusetts Toronto, 1988.

[3] JORMA MERIKOSKI, KEIJO VÄÄNÄNEN, TEUVO LAURINOLLI ja TIMO SANKILAMPI: *Matematiikan taito 15, Lineaarialgebra*. WSOY-yhtymä, 1998.

[4] PAAVO JÄPPINEN, ALPO KUPIAINEN ja MATTI RÄSÄNEN: *Calculus 11, lineaarialgebra*, Otava, 1999.

[5] TAMPEREEN KORKEAKOULUYHTEISÖ: *Insinöörimatematiikkaa 123*, verkkosivu, 2019. Viitattu 16.05.2024. URL: https://plus.tuni.fi/graderM/static/mat04601-a2019/index_fi.html.

[6] GÉZA SCHAY: *A Concise Introduction to Linear Algebra*, University of Massachusetts, Birkhäuser Boston 2012.

[7] SOUMIK MONDAL: *Transpose of a matrix*, verkkosivu; GeeksforGeeks, 2024. Viitattu 16.05.2024. URL: https://www.geeksforgeeks.org/transpose-of-a-matrix/#transpose-of-a-matrix-properties.

[8] DARDAN HAJRIZAJ: *New method to compute the determinant of a* 3×3 *matrix*, International Journal of Algebra, vol. 3, 2009.

[9] VILLE TILVIS ja ANNA KAIREMA: *Matriisilaskenta*, Kurssimoniste, Helsingin matematiikkalukio, 2017. Viitattu 16.05.2024. URL: https://www.mayk.fi/wp-content/uploads/2017/06/matriisilaskenta.pdf.

[10] JOHN M. GILLIS: *Everything You Need to Know About Complex Numbers*, BrainMass Inc., 2012.

[11] ROOPE HIETALA: *Vektoriavaruudet ja niiden representaatiot*, pro gradu-tutkielma, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen-laitos, kevät 2022.

[12] David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald: *Linear Algebra and its applications*, 6th edition, Boston: Pearson, 2021.

[13] Pietro Paparella: *A short and elementary proof of the two sidedness of the matrix inverse*, The College Mathematics Journal 48, no. 5 sivut 366-367, 2017.

[14] Peter Petersen: *Linear Algebra*, University of California, Springer Science+Business Media New Yorks, 2012.

[15] Tero Kilpeläinen: *Lineaarinen algebra ja geometria 1*, luentomoniste, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto, 2020. Viitattu 16.05.2024. URL: https://tim.jyu.fi/files/292068/Linkku1.pdf.

[16] Jussi Hyvönen: *Projektiivinen geometria*, pro gradu-tutkielma, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, talvi 2017.

[17] Woodford, C ja Phillips, C: *Numerical Methods with Worked Examples: Matlab Edition*, Newcastle University, Springer Science+Business Media B.V., 2012.

[18] Pekka Pankka: *Lineaari algebra ja matriisilaskenta I-III*, luentomoniste, Helsingin yliopisto, 2023. Viitattu 16.05.2024. URL: https://www.mv.helsinki.fi/home/pankka/Lineaarialgebra--2020-2021.pdf.

[19] Tuomas Sahlsten: *Matriisilaskenta/MS-A0004 Luentopruju*, luentomoniste, Matematiikan ja Systeemianalyysin laitos, Aalto Yliopisto, 2021. Viitattu 16.05.2024. URL: https://mycourses.aalto.fi/pluginfile.php/1821781/mod_resource/content/17/MS-A0004_luennot.pdf.

[20] Petri Juutinen: *Lineaarinen algebra ja geometria 2*, luentomoniste, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto, 2020. Viitattu 16.05.2024. URL: https://tim.jyu.fi/files/292055/lag2_luentomoniste.pdf.

[21] Yinshan Jiang: *Study on eigenvalue and eigenvector introduction*, Journal of Physics: Conference Series, Volume 2282, International Conference on Applied Mathematics and Physics, 2022.

[22] Opetushallitus: *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*, verkkosivu, 2019. Viitattu 16.05.2024. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf.

[23] Opetushallitus: *Opetushallitus*, verkkosivu, 2024. Viitattu 16.05.2024. URL: https://www.oph.fi/fi/usein-kysyttya/mita-ovat-opintopisteet-opintojaksot-ja-moduulit-ja-mika-niiden-suhde-nykyisiin.

[24] Päivikki Jääskeläinen, Ulla Klemola, et al.: *Yhdessä parempaa pedagogiikkaa : interaktiivisuus opetuksessa ja oppimisessa*, Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitos, 2016.