JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu -tutkielma

Joukkojen piirrettävyys

Joonas Savolainen

29. toukokuuta 2024

Tekijä Joonas Savolainen	
Otsikko Joukkojen piirrettävyys (engl. Drawability of Sets)	
Tutkinto-ohjelma Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma	
Päivämäärä 29. toukokuuta 2024	**Sivumäärä** 28

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tutkitaan tasossa olevien joukkojen piirrettävyyttä. Piirrettävyys määritellään kahden työkalun eli kynän ja kumin yhteistyönä, jotka molemmat muodostavat 1-säteisen kiekon kokoisen jäljen tasoon. Näistä jäljistä kynän jättämä musta jälki muodostaa tutkittavat piirrettävät joukot ja kumin jättämä valkoinen jälki piirrettävien joukkojen komplementin tason koskemattoman valkoisen alueen kanssa. Työkalun jättämän kiekon muotoisen jäljen ollessa avoin puhutaan piirrettävyydestä, mutta jos kiekko määritellään suljetuksi, puhutaan SYK- eli suljetuin 1-säteisten kiekoin piirrettävyydestä.

Tutkielma koostuu kahdesta päätuloksesta, joista ensimmäinen on, ettei (2x2)-shakkiruudukko ole piirrettävä. Kuitenkin pyöristämällä (2x2)-shakkiruudukon sisäkulmia joukosta saadaan paikallisesti piirrettävä. Tutkittaessa (2x2)-shakkiruudukon piirrettävyyttä hyödynnetään lemmaa, jonka avulla saadaan muodostettua ei-piirrettäviä joukkoja sekä tutkittua myös muiden joukkojen piirrettävyyttä.

Tutkielman toisessa päälauseessa sanotaan, että kaikki piirrettävät joukot ovat Lebesgue-mitallisia. Toisaalta on olemassa tason mitallisia osajoukkoja, jotka eivät ole piirrettäviä. Lisäksi tutkitaan tason piirrettävien joukkojen kokoelman mahtavuutta verrattuna tason Lebesgue-mitallisten osajoukkojen kokoelmaan, tason konveksien joukkojen piirrettävyyttä sekä piirrettävien joukkojen kuuluvuutta Borel-joukkojen kokoelmaan.

Sisällys

1 Johdanto

Piirtäminen voidaan yksinkertaisimmillaan ajatella kahden eri työkalun yhteistyönä. Ensimmäisestä työkalusta jää musta pyöreä jälki ja toisesta työkalusta valkoinen pyöreä jälki. Tällöin piirtoalustan ollessa valkoinen työkaluista toinen toimii kumina, jolla musta jälki saadaan poistettua. Lisäksi kuten oikean kynän ja kumin, työkalut voi nostaa pois alustasta aina halutessaan.

Piirtoalusta on taso $\mathbb{R}^2$, kynä on mustan ympyrän tuottava työkalu ja kumi valkoisen ympyrän tuottava työkalu. Kynän ja kumin saa nostaa tasosta niin monta kertaa kuin haluaa, eli mallissa ei ole vaatimuksia jatkuvuuden suhteen, ja työkaluja saa vaihtaa niin monta kertaa kuin haluaa.

Määritellään työkalut siten, että kynän ja kumin tuottamat ympyrät ovat avoimia 1-säteisiä kiekkoja eli ympyröitä, joiden sisäjoukko on osa väriä, mutta reuna ei kuulu joukkoon. $N(A)$ tarkoittaa joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ 1-säteistä ympäristöä eli kaikkien avointen 1-säteisten kiekkojen yhdistettä joiden keskipiste kuuluu joukkoon A. Toisin sanottuna

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a| < 1 \text{ jollain } a \in A\}.$$

Tällöin tason osajoukko, joka voidaan piirtää pelkästään kynää käyttämällä on $N(A_1) = D_1$ jollain $A_1 \subset \mathbb{R}^2$. Jos tähän piirrokseen käytetään kumia, poistetaan joukosta $N(A_1)$ joukko $N(A_2)$ jollain $A_2 \subset \mathbb{R}^2$, jolloin saadaan joukko $D_2 = N(A_1) \setminus N(A_2)$. Tähän joukkoon kynää käyttämällä saadaan joukko $D_3 = (N(A_1) \setminus N(A_2)) \cup N(A_3)$ ja niin edelleen.

1-säteiset kiekot voidaan valita myös suljetuiksi joukoiksi, jolloin saadaan toinen malli piirrettäville joukoille. Tässä mallissa avoimet 1-säteiset kiekot on korvattu suljetuilla, eli

$$N_{\leq}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a| \leq 1 \text{ jollain } a \in A\}.$$

Kutsutaan tätä mallia suljetuin 1-säteisin kiekoin piirrettäviksi eli SYK-piirrettäviksi joukoiksi. Tulee huomata, ettei SYK-piirrettävä joukko ole välttämättä suljettu, sillä esimerkiksi avoin 1-säteinen kiekko on SYK-piirrettävä joukko.

Seuraavissa luvuissa määritellään piirrettävyys tarkasti ja tutkitaan kahta piirrettävyyteen liittyvää päälausetta. Piirrettävyys määritellään luvussa 2 ja teoksen päätulokset esitetään luvussa 3. Piirrettävien joukkojen ominaisuuksia käsitellään laajasti Florian Frickin ja Fei Pingin artikkelissa What Can You Draw? [2], joka on tämän tutkielman tärkein lähde.

2 Piirrettävät joukot

Tässä luvussa määritellään piirrettävät joukot.

Määritelmä 2.1. (Piirrettävät joukot) Piirrettävien joukkojen kokoelma $\mathcal{D}$ on

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n, \text{ missä}$$

$$\mathcal{D}_n = \{D \cup N(A_n) : D \in \mathcal{D}_{n-1}, A_n \subset \mathbb{R}^2\}, \text{ kun n on pariton ja}$$

$$\mathcal{D}_n = \{D \setminus N(A_n) : D \in \mathcal{D}_{n-1}, A_n \subset \mathbb{R}^2\}, \text{ kun n on parillinen.}$$

Määritelmässä

$$\mathcal{D}_0 = \{\emptyset\} \text{ ja}$$

$$N(A_n) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a| < 1 \text{ jollain } a \in A_n\}.$$

Suljetuin 1-säteisin kiekoin piirrettävät joukot määritellään samoin.

Määritelmä 2.2. (SYK-piirrettävät joukot) SYK-piirrettävien joukkojen kokoelma $\mathcal{D}_{\leq}$ on

$$\mathcal{D}_{\leq} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{\leq n}, \text{ jossa}$$

$$\mathcal{D}_{\leq n} = \{D \cup N_{\leq}(A_n) : D \in \mathcal{D}_{\leq(n-1)}, A_n \subset \mathbb{R}^2\}, \text{ kun n on pariton ja}$$

$$\mathcal{D}_{\leq n} = \{D \setminus N_{\leq}(A_n) : D \in \mathcal{D}_{\leq(n-1)}, A_n \subset \mathbb{R}^2\}, \text{ kun n on parillinen.}$$

Määritelmässä

$$\mathcal{D}_{\leq 0} = \{\emptyset\} \text{ ja}$$

$$N_{\leq}(A_n) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a| \leq 1 \text{ jollain } a \in A_n\}.$$

Seuraavassa kuvassa muutamia esimerkkejä piirrettävistä joukoista.

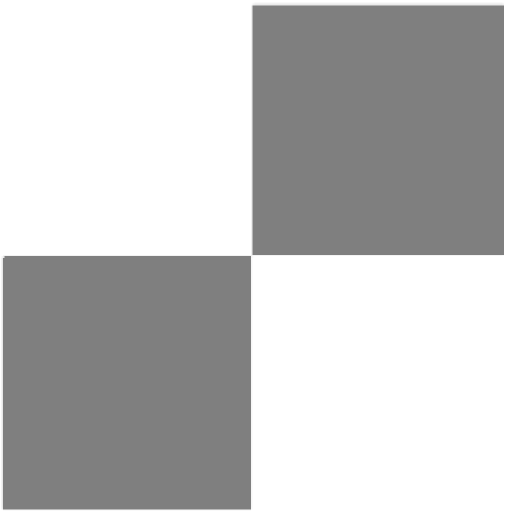
Kuva 1: Esimerkkejä piirrettävistä joukoista. Kahden ensimmäisen joukon piirrettävyys on helposti nähtävissä. Kolmas joukko saadaan, kun piirretään ensin mikä tahansa kuvio, joka peittää kuvassa olevan alueen. Tämän jälkeen kumitetaan kuvion reunoilta pois alueita saaden aikaan kulmikas ja ohut muoto.

3 Päätulokset

Esitellään seuraavaksi tutkielman päätulokset. Määritellään Lausessa 3.2 käytettävä (2x2)-shakkiruudukko.

Määritelmä 3.1. (2x2)-shakkiruudukko S on joukko

$$S = ([-1,0] \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times [0,1]) \subset \mathbb{R}^2.$$



Kuva 2: Määritelmän 3.1 mukainen (2x2)-shakkiruudukko.

Lause 3.2. *(2x2)-shakkiruudukko ei ole piirrettävä eikä SYK-piirrettävä.*

Määritelmän 3.1 mukaisen (2x2)-shakkiruudukon piirrettävyyden lisäksi tutkitaan piirrettävyyden ja mitallisuuden yhteyttä seuraavasti.

Lause 3.3. *Piirrettäville joukoille pätee seuraavat:*

(i) Kaikki piirrettävät ja SYK-piirrettävät joukot ovat Lebesgue-mitallisia.

(ii) Kaikki Lebesgue-mitalliset osajoukot tasossa $\mathbb{R}^2$ eivät ole SYK-piirrettäviä, mutta kokoelmalla $\mathcal{D}_{\leq}$ on sama mahtavuus kuin tason Lebesgue-mitallisten osajoukkojen kokoelmalla ja suurempi mahtavuus kuin kokoelmalla $\mathcal{D}$.

(iii) Jokainen piirrettävä joukko on Borel-joukko.

Lause 3.2 todistetaan luvussa 4 ja Lause 3.3 todistetaan luvussa 5. Joukkojen Lebesgue-mitallisuus ja mahtavuus määritellään luvussa 5.

4 Shakkiruudukon piirrettävyys

Tässä luvussa todistetaan Lause 3.2 eli ettei (2x2)-shakkiruudukko ole piirrettävä eikä SYK-piirrettävä. Luvussa muodostetaan paikallisesti piirrettävyyden määritelmä ja lemmoja todistuksen tueksi sekä käydään läpi miksi tietyt intuitiivisesti järkevät piirtotavat eivät ole mahdollisia.

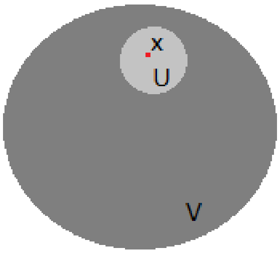
Todistusta varten määritellään avoimet joukot ja niiden avulla pisteen ympäristö. Enemmän avoimista joukoista sekä ympäristöistä luettavissa Jussi Väisälän teoksesta Topologia I [8].

Määritelmä 4.1. (Avoin joukko) Joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ on avoin, jos jokaisella pisteellä $x \in U$ on olemassa säde $r > 0$ siten, että kiekko $B(x, r) \subset U$.

Määritelmän 4.1 mukaan avoimen joukkoon U kuuluvien pisteiden ympärille pitää pystyä piirtämään r-säteinen kiekko, joka kuuluu kokonaisuudessaan joukkoon U. Ympyrän säde r voidaan valita niin läheltä nolla kuin halutaan, kunhan $r > 0$. Näin ollen Määritelmästä 4.1 seuraa, etteivät avoimen joukon U reunapisteet kuulu joukkoon U, sillä jos reunapisteiden ympärille asetettaisiin kiekko $B(x, r)$, siitä osa kuuluisi välttämättä joukon U komplementtiin. Määritelmän 4.1 avulla voidaan määritellä pisteen ympäristö.

Määritelmä 4.2. (Ympäristö) Joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ on pisteen $x \in \mathbb{R}^2$ ympäristö, jos joukko U on avoin ja $x \in U$.

Esimerkiksi Määritelmässä 4.1 käytetty kiekko $B(x, r)$ on pisteen $x \in U$ ympäristö. Ympäristön ei tarvitse olla pyöreä, vaikka pyöreää muotoa ympäristölle tässä työssä paljon käytetäänkin. Seuraavalla sivulla on havainnollistava kuva ympäristöstä.



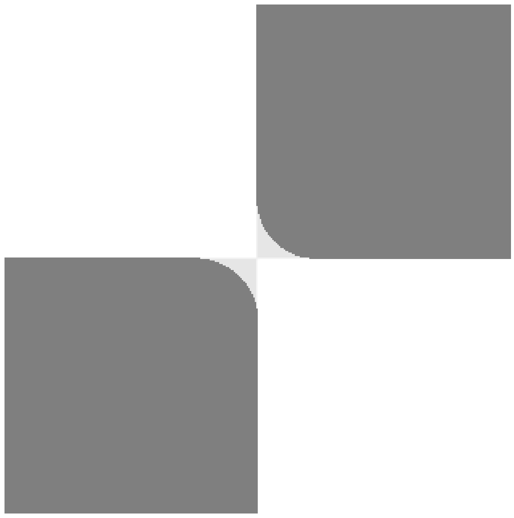
Kuva 3: Piste x joukossa V sekä pisteen x ympäristö U. Määritelmässä 4.2 joukko V on korvattu koko tasolla $\mathbb{R}^2$, joka on tulevaa todistusta katsoen hyödyllisempi muotoilu.

Piirrettävyydestä voidaan muodostaa heikompi versio, jota kutsutaan paikalliseksi piirrettävyydeksi.

Määritelmä 4.3. (Paikallinen piirrettävyys) Olkoon joukko $B \subset \mathbb{R}^2$. Jos jokaisella pisteellä $x \in \mathbb{R}^2$ on ympäristö U siten, että on olemassa piirrettävä joukko $D \in \mathcal{D}$, jolla $U \cap B = U \cap D$, sanotaan joukkoa B paikallisesti piirrettäväksi.

Toisin sanottuna, jos suurennamme kuvaa joukosta niin paljon, että otamme huomioon vain tietyn osan joukosta B, näkemämme joukon osa ei eroa piirrettävästä joukosta. Määritelmän 4.3 nojalla jokainen piirrettävä joukko on paikallisesti piirrettävä, sillä joukot B ja D voidaan valita samoiksi joukoiksi.

Joukko, joka vastaa (2x2)-shakkiruudukkoa, mutta jonka sisäkulmat on pyöristetty ja kokoa kasvatettu on paikallisesti piirrettävä, mutta ei piirrettävä, sillä reuna pyöristetystä sisäkulmasta jää avoimeksi eikä kumi mahdu kahden piirretyn joukon väliin. Tällöin kynällä tehdyn jäljen ollessa tarpeeksi pieni kuvioon nähden, voidaan piirtää keskellä olevat kulmat pyöreiksi. Kuvio ei ole piirrettävä myöskään siksi, että se ei noudata tämän luvun alaluvussa 4.2 esiintyvää Lemmaa 4.4. Tarkempi todistus sivuutetaan. (2x2)-shakkiruudukko, jonka sisäkulmat on pyöristetty on esitetty seuraavassa kuvassa.



Kuva 4: (2x2)-shakkiruudukko, jossa pyöristetyt sisäkulmat.

4.1 Piirtämisen yrittäminen

Käydään seuraavaksi läpi kaksi yritystä, joilla (2x2)-shakkiruudukkoa voi intuitiivisesti yrittää piirtää. Ensimmäisessä yritteessä käytetään kumia teroittamaan (2x2)-shakkiruudukon ruudut yhdistävä kulma, kuten Kuvan 1 kolmannen tapauksen ohuen suorakaiteen piirtämisessä. Kynällä piirretään haluttua joukkoa suurempi kuvio ja pyyhitään kumilla osa pois, jotta neliöön saa 90 asteen kulman. (2x2)-shakkiruudukon muodostavista kahdesta neliöstä ensimmäisen piirtäminen ei tuota ongelmaa, mutta kun halutaan piirtää toinen neliö täydentämään joukkoa tarvitsisi aina pyyhkiä osa ensimmäisestä neliöstä pois. Näin ollen jälkimmäistä neliötä ei voi piirtää.

Toisessa yritteessä työkalun kokoa lähdetään pienentämään neliöt yhdistävää kulmaa piirrettäessä. Työkalujen pienentäminen ei ole sallittua määritelmiä 2.1 ja 2.2 käytettäessä, mutta tilannetta voidaan verrata joukon suurentamiseen, jolloin työkalu muuttuu pienemmäksi joukkoon verrattuna. Tällä menetelmällä saadaan lähemmäksi Kuvan 2 mukainen (2x2)-shakkiruudukko, mutta neliöitä ei saa tällä tavoin yhdistettyä eikä kaarevuus häviä neliöt yhdistävästä kulmasta. Suoran kulman piirtäminen pyöreällä työkalulla on mahdotonta vaikka työkalua pienentäisi tai joukkoa suurentaisi kuinka paljon tahansa. Näin ollen kynän jäljen pienentäminen ei ole ratkaisu joukon (2x2)-shakkiruudukko piirrettävyyteen. Tilannetta voidaan verrata Määritelmän 4.3 mukaiseen paikallisesti piirrettävyyteen ja yrite toimii todistuksen ideana myös sille miksi (2x2)-shakkiruudukko ei ole paikallisesti piirrettävä.

Yritteiden nojalla voidaan todeta, että kahden suoran kulman piirtäminen vastakkain ei onnistu ainakaan näillä yritteillä, sillä kynällä ei saada piirrettyä tarkasti suoraa kulmaa ja kumin käyttö pyyhkii aina toisesta neliöstä kulman pois. Näin ollen (2x2)-shakkiruudukko ei ole piirrettävissä kummankaan yritteen mukaisesti. Seuraavaksi todistetaan, ettei (2x2)-shakkiruudukko ole piirrettävissä muillakaan tavoilla.

4.2 Piirtämättömyyden todistaminen

Jotta (2x2)-shakkiruudukon piirtämättömyys saadaan todistettua, muotoillaan Lemma 4.4, joka antaa yleissäännön ei-piirrettävien joukkojen muodostamiseksi. Jos löydetään joukko $X \subset S$ mustia eli kynällä tehtyjä pisteitä ja joukko $Y \subset \mathbb{R}^2 \setminus S$ valkoisia eli kumilla tehtyjä pisteitä siten, että on olemassa piste $x \in \mathbb{R}^2$, joka on niin lähellä sekä mustasta pisteestä että valkoisesta pisteestä, ettei kynä eikä kumi mahdu kokonsa puolesta joukkojen $N(X)$ ja $N(Y)$ väliin, S ei ole piirrettävä.

Työkalujen ja piirtämisen kannalta ajateltuna, aina kun piirrämme kynällä joukon mustia pisteitä ne yltävät joukon $N(Y)$ alueelle, jolloin ne joudutaan kumittamaan seuraavassa vaiheessa. Kuitenkin mustien pisteiden kumittaminen joukosta $N(Y)$ johtaa siihen, että kumitamme mustia pisteitä myös alueelta $N(X)$. Näin ollen syntyy loputon määrä piirrettävää ja kumitettavaa eikä joukkoa ole mahdollista piirtää.

Lemma 4.4. *Jos epätyhjille joukoille X, Y ja S pätee $N(X) = N(Y)$, $X \subset S$ ja $Y \cap S = \emptyset$, niin S ei ole piirrettävä.*

Todistus. Oletetaan, että S on piirrettävissä joukkojen $A_1, A_2, ..., A_n$ avulla (katso Määritelmä 2.1). Kutsutaan k askeleen jälkeen tuotettua joukkoa joukoksi S_k, eli $S_1 = N(A_1)$, $S_2 = N(A_1) \setminus N(A_2)$ ja niin edelleen askeleeseen k asti. Olkoon k viimeinen askel, jossa joko kynällä tai pyyhekumilla muokataan joukkoa $X \cup Y$, eli $N(A_k) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset$ ja $N(A_l) \cap (X \cup Y) = \emptyset$, kun $k < l \leq n$.

Koska $X \neq \emptyset$, jokin askel piirtää jonkin mustan alueen joukkoon X, joten k on hyvin määritelty ja positiivinen. Koska lopulta $X \subset S$ ja $Y \cap S = \emptyset$, sama pätee jo askeleella k: $X \subset S_k$ ja $Y \cap S_k = \emptyset$, koska askeleen k jälkeen emme poista joukossa X olevia pisteitä emmekä piirrä joukossa Y olevia pisteitä.

Ehto $N(X) = N(Y)$ tarkoittaa, että kynä tai pyyhekumi koskettaa joukkoa X, jos ja vain jos se koskettaa joukkoa Y. Niiden pisteiden joukot, joiden etäisyys on pienempi kuin yksi joko joukosta X tai joukosta Y, ovat samat. $N(A_k) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset$ tarkoittaa, että jokin piste joukossa A_k on pienemmällä etäisyydellä kuin yksi joukosta X tai joukosta Y. Siten joukko A_k on pienemmällä etäisyydellä molemmista joukoista X ja Y.

Näin ollen $N(A_k) \cap X \neq \emptyset$ ja $N(A_k) \cap Y \neq \emptyset$. Riippuen askeleen k parillisuudesta joko piirsimme joukon $N(A_k)$, eli $S_k = S_{k-1} \cup N(A_k)$, tai pyyhimme joukon $N(A_k)$, eli $S_k = S_{k-1} \setminus N(A_k)$. Ensimmäisessä tapauksessa

$$S_k \cap Y \supset N(A_k) \cap Y \neq \emptyset$$

ja jälkimmäisessä tapauksessa mikä tahansa

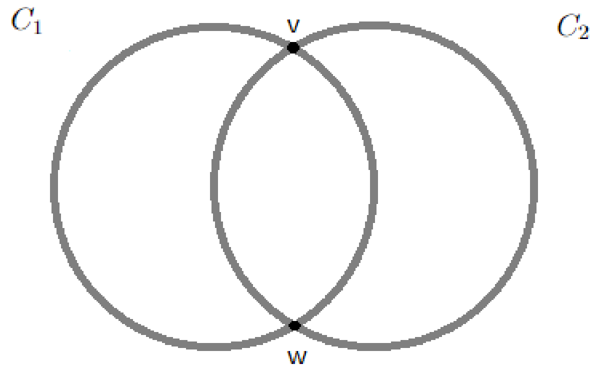
$$x \in N(A_k) \cap X \text{ ei kuulu joukkoon } S_k.$$

Molemmat tapaukset johtavat ristiriitaan, joten lemman mukainen joukko ei ole piirrettävä. □

Huomautus 4.5. Lemma 4.4 pätee myös $N_{\leq}(X) = N_{\leq}(Y)$ tilanteessa eli SYK-piirretyille joukoille.

Huomautus 4.5 pätee sillä suljetut 1-säteiset kiekot työkaluina eivät vaikuta tilanteeseen verrattuna avoimiin 1-säteisiin kiekkoihin. Lemman 4.4 lisäksi Lauseen 3.2 todistuksessa sovelletaan seuraavaa geometrista faktaa.

Lemma 4.6. *Jos kaksi tason saman kokoista ympyrää C_1 ja C_2 leikkaavat toisensa pisteissä v ja w, niin lyhyempi kaari joka yhdistää pisteet v ja w ympyrää C_1 pitkin kuuluu ympyrän C_2 muodostaman kiekon sisäpisteisiin, kun taas pidempi kaari ulkopisteisiin.*



Kuva 5: Saman säteiset ympyrät C_1 ja C_2 leikkaavat pisteissä v ja w.

Kuten Kuvasta 5 näkyy, Lemman 4.6 täytyy pitää paikkansa eli lyhyempi kaari, joka yhdistää pisteet v ja w ympyrää C_1 pitkin, kuuluu ympyrän C_2 muodostaman kiekon sisäpisteisiin, kun taas pidempi kaari ulkopisteisiin. Luonnollisesti sama pätee myös toisin päin eli jos ympyrät lemmassa vaihdetaan päikseen. Seuraavaksi todistetaan Lause 3.2 eli ettei (2x2)-shakkiruudukko ole piirrettävä.

Lauseen 3.2 todistus. Määritelmän 3.1 nojalla (2x2)-shakkiruudukko S on

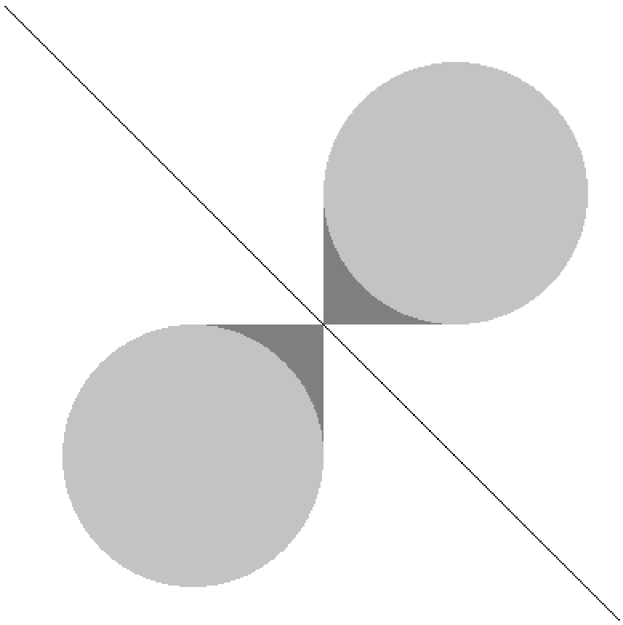
$$S = ([-1, 0] \times [-1, 0]) \cup ([0, 1] \times [0, 1]).$$

Tällöin joukon S sisäjoukko $int(S)$ on

$$int(S) = (]-1, 0[\times]-1, 0[) \cup (]0, 1[\times]0, 1[).$$

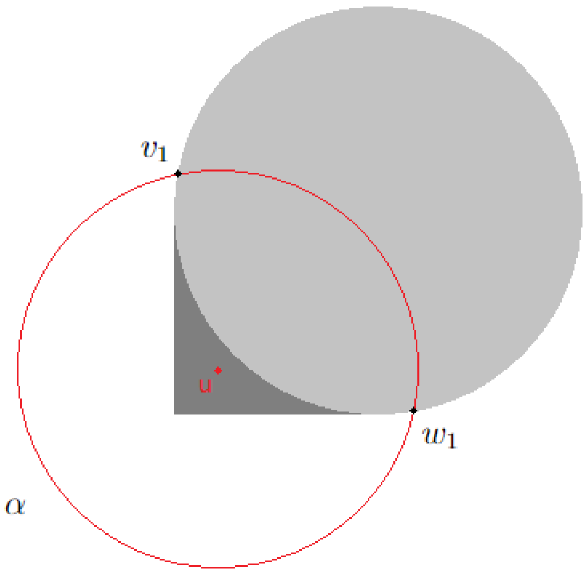
Käytetään Lemmaa 4.4 eli etsitään epätyhjät joukot $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ siten, että $N(X) = N(Y)$, $X \subset S$ ja $Y \cap S = \emptyset$.

Olkoon joukko $X = int(S) \setminus N(\{1, 1\}, \{-1, -1\})$ eli poistetaan 1-säteiset, (1,1)- ja (-1,-1)-keskeiset kiekot joukon S sisäpisteistä. Joukko Y on peilaus joukosta X y-akselin suhteen. Näin ollen $X \subset S$ ja $Y \subset \mathbb{R}^2 \setminus S$.



Kuva 6: Joukko $X = int(S) \setminus N(\{1,1\},\{-1,-1\})$. X merkitty tumman harmaalla, poistetut kiekot vaalean harmaalla ja symmetriaa varten oleva suora $y = -x$ mustalla.

Todistetaan seuraavaksi, että $N(X) = N(Y)$. Olkoon piste $u \in N(X)$. Tehdään antiteesi siten, että piste $u \notin N(Y)$. $N(\{u\})$ siis leikkaa joukkoa X mutta ei joukkoa Y. Koska $N(\{u\})$ on liian suuri mahtumaan kokonaan joukkoon X, niin sen täytyy leikata joukon X reunapisteitä useassa kohdassa. $N(\{u\}) \not\subset Y$, joten se leikkaa joukon $N(1,1)$ tai joukon $N(-1,-1)$ kanssa. Koska tilanne on symmetrinen Kuvassa 6 näkyvän suoran $y = -x$ suhteen, voidaan tarkasteltavaksi ottaa neliöistä ylempi ja olettaa, että joukko $N(\{u\})$ leikkaa joukon $N(1,1)$ kanssa. Ympyrä C_u, joka ympäröi joukkoa $N(\{u\})$, leikkaa sekä joukkoa X että joukkoa $N(1,1)$ ympyröivää ympyrää tasan kahdessa pisteessä, kuten Kuvassa 7.



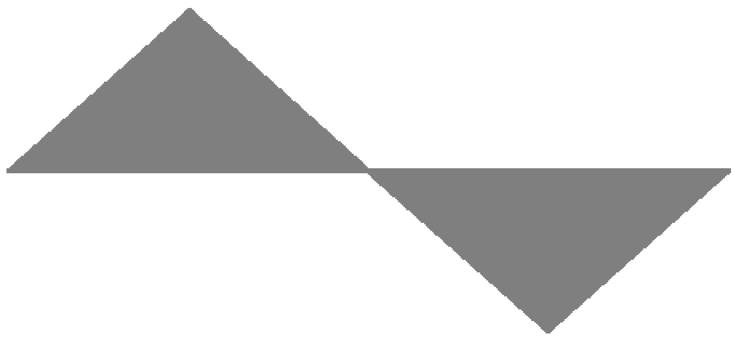
Kuva 7: Joukon X ylempi osa, josta valittu piste u. Yksikköympyrä C_u on merkitty punaisella ja 1-säteisen ympyrän C_u ja joukon $N(1,1)$ reunapisteiden leikkauspisteitä v_1 ja w_1 merkitty mustalla. Ympyrän C_u pidempi kaari on merkitty kirjaimella α.

Lemman 4.6 perusteella pidempi kaari α, joka yhdistää pisteet v_1 ja w_1 ympyrässä C_u, on joukon $N(1,1)$ ulkopuolella. Koska α on joukon $N(1,1)$ ulkopuolella eikä se voi antiteesin mukaan ylittää koordinaattiakseleita joukon Y puolelle, sen on oltava täysin joukon X sisäjoukossa. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä oletimme, että $N(\{u\}) \setminus X \neq \emptyset$.

Ristiriita syntyy, koska α on 1-säteisen ympyrän pidempi kaari, joten sen kauimmaiset pisteet ovat toisistaan etäisyydellä kaksi kyseisen ympyrän halkaisijan ollessa kaksi. Jos joukosta X haluttaisiin pistepari, joiden etäisyys toisistaan on kaksi, toinen täytyisi valita joukosta $(]-1,0[\times]-1,0[)$ ja toinen joukosta $(]0,1[\times]0,1[)$. Jos näitä pisteitä haluttaisiin yhdistää puoliympyröillä, ne eivät olisi kokonaan joukon X sisällä, vaan niitä yhdistävän kaaren on oltava osittain joukossa Y. Näin ollen $N(X) \subset N(Y)$. Symmetriasta johtuen joukkojen X ja Y paikkaa voidaan vaihtaa, jolloin saadaan $N(Y) \subset N(X)$. Nyt $N(X) = N(Y)$, $X \subset S$ ja $Y \cap S = \emptyset$, joten Lemman 4.4 nojalla joukko S ei ole piirrettävissä eli $S \notin \mathcal{D}$.

Joukon S SYK-piirtämättömyys voidaan todistaa samoin tavoin käyttämällä Lemman 4.4 sijaan Huomautusta 4.5. Tällöin valitaan epätyhjät joukot $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ siten, että $N_{\leq}(X) = N_{\leq}(Y)$, $X \subset S$ ja $Y \cap S = \emptyset$. $\square$

Näin todistettiin tutkielman päälauseista ensimmäinen, Lause 3.2, eli ettei (2x2)-shakkiruudukko ole piirrettävä eikä SYK-piirrettävä. Todistuksen periaatteella voidaan löytää myös muita ei-piirrettäviä joukkoja, kuten joukkoja joissa on toisiaan vastakkain olevat kulmat. Pääasiallisena työkaluna tähän toimii Lemma 4.4, jolla voidaan tutkia työkalujen sopivuutta erilaisiin tilanteisiin.



Kuva 8: Kuvassa oleva joukko ei ole piirrettävä, sillä siinä on kaksi kulmaa, jotka ovat vastakkain toisiinsa nähden. Tällöin Lemman 4.4 nojalla kuviota ei voida piirtää. Todistaminen onnistuu samaan tapaan kuin Lauseen 3.2 todistus.

5 Piirrettävän joukon mitallisuus

Tässä luvussa todistetaan Lause 3.3 eli kaikkien piirrettävien ja SYK-piirrettävien joukkojen Lebesgue-mitallisuus sekä piirrettävien joukkojen kuuluminen Borel-joukkoihin. Tätä ennen täytyy kuitenkin määritellä joukkojen mahtavuus, sillä Lauseessa 3.3 eli toisessa päälauseessa vertaillaan SYK-piirrettävien joukkojen $\mathcal{D}_{\leq}$, piirrettävien joukkojen $\mathcal{D}$ ja Lebesgue-mitallisten osajoukkojen mahtavuuksia. Lausetta varten täytyy määritellä myös joukon Lebesgue-mitallisuus. Aloitetaan määrittelemällä joukkojen mahtavuus.

Määritelmä 5.1. (Joukkojen mahtavuus) Jos on olemassa bijektio joukkojen A ja B välillä, niin sanotaan, että joukot ovat samankokoiset tai yhtä mahtavat eli $|A| = |B|$. Jos joukkojen A ja B välillä on injektio $A \to B$, niin $|A| \leq |B|$ ja sanotaan, että joukko A on pienempi tai yhtä suuri kuin B. Jos joukkojen A ja B välillä on surjektio $A \to B$, niin $|A| \geq |B|$ ja sanotaan, että joukko A on suurempi tai yhtä suuri kuin B.

Seuraavaksi määritellään joukon Lebesgue-mitallisuus. Lisää mitallisuudesta voi lukea Juha Lehrbäckin luentomonisteesta Mitta- ja integraaliteoria [3].

Määritelmä 5.2. (Lebesgue-mitallisuus) Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen eli $A \in \mathcal{M}$, jos kaikille joukoille $E \subset \mathbb{R}^n$ pätee, että

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c).$$

Tässä m^* on Lebesguen ulkomitta.

Tästä lähtien $\mathcal{M} = \{\text{avaruuden } \mathbb{R}^2 \text{ Lebesgue-mitalliset joukot}\}$.

Lause 5.3. *Kaikki SYK-piirrettävät joukot ovat Lebesgue-mitallisia. Kaikki Lebesgue-mitalliset tason $\mathbb{R}^2$ osajoukot eivät ole SYK-piirrettäviä, mutta kokoelmalla $\mathcal{D}_{\leq}$ on sama mahtavuus kuin kokoelmalla $\mathcal{M}$ ja aidosti suurempi mahtavuus kuin kokoelmalla $\mathcal{D}$.*

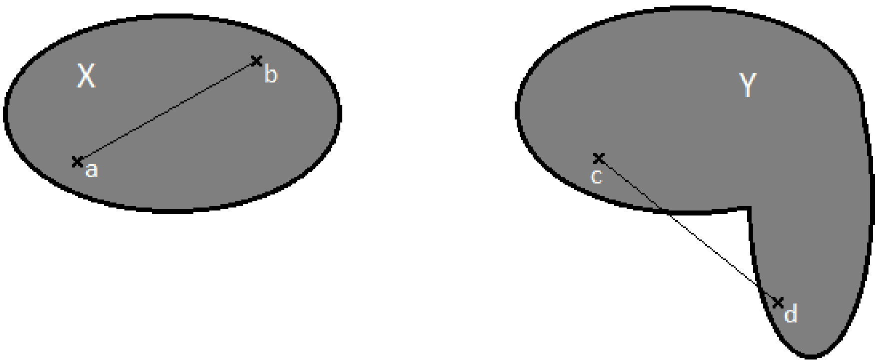
Lause 5.3 on typistetty versio tutkielman toisesta päälauseesta eli Lauseesta 3.3. Siinä ei käydä läpi piirrettävien joukkojen kuulumista Borel-joukkoihin eikä tarkastella suoraan piirrettävien eli avoimilla 1-säteisillä kiekoilla piirrettävien joukkojen Lebesgue-mitallisuutta. Lause 5.3 käsittelee Määritelmän 2.2 mukaisten suljetuin ympyräkiekoin piirrettävien joukkojen Lebesgue-mitallisuutta. Kaikki Lebesgue-mitalliset joukot eivät kuitenkaan ole SYK-piirrettäviä eli lause ei toimi toiseen suuntaan. Lisäksi SYK-piirrettävien joukkojen kokoelman mahtavuuden sanotaan olevan yhtä suurta kuin mitallisten joukkojen kokoelman ja aidosti suurempaa kuin avoimilla 1-säteisillä kiekoilla piirrettävien joukkojen kokoelman mahtavuuden.

Lause 5.3 käsitellään erikseen sen ollessa helpompaa kuin koko Lauseen 3.3 todistaminen. Todistuksessa käytetään hyödyksi suljettujen konveksien joukkojen piirrettävyyttä sekä sitä, että Lebesgue-mitallisten joukkojen kokoelma on σ-algebra.

Tässä luvussa käydään ensin läpi Lauseen 5.3 todistukseen tarvittavia määritelmiä ja lauseita. Lopuksi todistetaan, että kaikki SYK-piirrettävät joukot ovat Lebesgue-mitallisia, niiden mahtavuuteen liittyvät tulokset sekä piirrettävien joukkojen kuuluminen Borel-joukkojen kokoelmaan. Lopulta todistetaan myös Lause 3.3.

Muodostetaan seuraavaksi konveksin joukon määritelmä. Merkintä $\overline{\mathrm{a_1a_2}}$ tarkoittaa jatkossa pisteiden a_1 ja a_2 välistä janaa.

Määritelmä 5.4. (Konveksisuus) Joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on konveksi, jos $\overline{\mathrm{a_1a_2}} \subset A$ kaikilla $a_1, a_2 \in A$.



Kuva 9: Kuvassa joukko X on konveksi, sillä $\overline{\mathrm{ab}} \in X$ kaikilla $a, b \in X$, mutta joukko Y ei, sillä $\overline{\mathrm{cd}} \notin Y$ vaikka pisteet $c, d \in Y$.

Sovelletaan konveksien joukkojen määritelmää piirrettävyyteen muodostamalla seuraava lause.

Lause 5.5. *Kaikki tason $\mathbb{R}^2$ suljetut konveksit joukot ovat piirrettäviä.*

Lauseen 5.5 todistusta varten täytyy määritellä sisätulo, josta lisää voi lukea Jyväskylän yliopiston kurssin Lineaarinen algebra ja geometria 1 luentomonisteesta [4].

Määritelmä 5.6. (Sisätulo) Olkoon avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ ja $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Vektorien sisätulo on

$$\langle u \ , \ v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n.$$

Sisätulolle pätee seuraavat:
1, Jos $u = 0$ niin $\langle u \ , \ u \rangle = 0$ ja muuten $\langle u \ , \ u \rangle > 0$
2, $\langle u \ , \ v \rangle = \langle v \ , \ u \rangle$
3, $\langle u + v \ , \ w \rangle = \langle u \ , \ w \rangle + \langle v \ , \ w \rangle$
4, $\langle au \ , \ v \rangle = a \langle u \ , \ v \rangle$.
Nämä sisätulolle pätevät säännöt seuraavat suoraan sisätulon määritelmästä. Muodostetaan lemma Lauseen 5.5 todistusta varten.

Lemma 5.7. *Olkoon $C \subset \mathbb{R}^2$ suljettu konveksi joukko. Tällöin on suljettujen puolitasojen kokoelma $\{H_i | i \in I\}$ siten, että*

$$C = \bigcap_{i \in I} H_i.$$

Todistus. Olkoon $C \subset \mathbb{R}^2$ suljettu konveksi joukko.

Koska C on konveksi, niin mille tahansa pisteelle $p \notin C$ on olemassa suljettu puolitaso H_p, joka sisältää joukon C, mutta ei pistettä p. Tällöin

$$C = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^2 \setminus C} H_p.$$

□

Todistetaan seuraavaksi Lause 5.5.

Lauseen 5.5 todistus. Lemman 5.7 mukaan jokainen tason $\mathbb{R}^2$ suljettu konveksi joukko K voidaan muodostaa suljettujen puolitasojen $H_{i+}, i \in I$, leikkauksena. Mikä tahansa avoin puolitaso $H = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x \ , \ y \rangle > a\}$ jollain $y \in \mathbb{R}^2$ ja $a \in \mathbb{R}$ on avointen 1-säteisten kiekkojen yhdiste. Ensimmäisessä vaiheessa väritetään koko taso $\mathbb{R}^2$ mustaksi ja toisessa vaiheessa kumitetaan kaikki avoimet puolitasot $H_{i-} := \mathbb{R}^2 \setminus H_{i+}, i \in I$. Tällöin jäljelle jää täsmälleen haluttu joukko K. □

Sen lisäksi, että haluamme todistaa kaikkien piirrettävien joukkojen olevan Borel-joukkoja, tarvitsemme Borel-joukkoja ja niiden yhteyttä piirrettäviin joukkoihin piirrettävien joukkojen mitallisuuden todistamiseksi. Saamme siis osan Lauseesta 3.3 todistettua jo matkalla lauseen varsinaiseen todistukseen. Tätä ennen pitää määritellä σ-algebra helpottamaan Borel-joukkojen määrittelyä.

σ-algebran määrittelyyn tarvitsemme potenssijoukkojen määritelmää, joten määritellään ensin potenssijoukot Lehrbäckin Mitta- ja integraaliteoria luentomonisteen mukaisesti [3].

Määritelmä 5.8. (Potenssijoukko) Joukon A potenssijoukko $P(A)$ on joukon A osajoukkojen kokoelma eli $P(A) = \{E : E \subset A\}$.

Määritellään σ-algebra. Enemmän tietoa sekä σ-algebroista että Borel-joukoista löytyy potenssijoukkojen tapaan Lehrbäckin Mitta- ja integraaliteoria luentomonisteesta [3].

Määritelmä 5.9. (σ-algebra) Olkoon X joukko. Tällöin $\Gamma \subset P(X)$ on σ-algebra joukossa X, jos Γ toteuttaa seuraavat ominaisuudet:
(i) $\emptyset \in \Gamma$
(ii) jos $A \in \Gamma$, niin $A^C = X/A \in \Gamma$
(iii) jos $A_1, A_2, ... \in \Gamma$, niin $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Nyt voimme määritellä Borel-joukot σ-algebran avulla.

Määritelmä 5.10. (Borel-joukko) Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukkojen kokoelma $\mathcal{B}_n$ on pienin σ-algebra, joka sisältää kaikki avoimet joukot $A \subset \mathbb{R}^n$.

Huomautus 5.11. Borel-joukot ovat Lebesgue-mitallisia, joten $B_2 \subset \mathcal{M}$. Erityisesti tason $\mathbb{R}^2$ avoimet ja suljetut joukot ovat Lebesgue-mitallisia. Lisäksi on olemassa mitallisia joukkoja, jotka eivät ole Borel-joukkoja. Lisätietoja Juha Lehrbäckin Mitta- ja integraaliteorian luentomonisteessa [3].

Seuraavaksi voidaan muodostaa jo aiemmin mainittu osa Lauseesta 3.3.

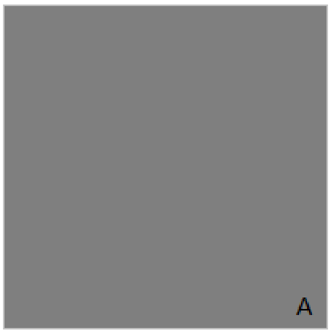
Lause 5.12. *Jokainen piirrettävä joukko on Borel-joukko.*

Todistus. Mikä tahansa joukko $N(A)$, jossa $A \subset \mathbb{R}^2$, on avoin ja piirrettävä, koska se on yhdiste avoimista 1-säteisistä kiekoista. Näin ollen jokainen joukko kokoelmassa $\mathcal{D}_1$ on Borel-joukko, sillä avoimet joukot kuuluvat Borel-joukkoihin. Induktiolla voidaan todistaa, että jokainen joukko yhdisteessä $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ on myös Borel-joukko, sillä jos $S \subset \mathcal{D}_n$, niin S on joko muotoa $S = S_{n-1} \cup B$ tai $S = S_{n-1} \setminus B$, missä B on avoin ja S_{n-1} on Borel-joukko induktio-oletuksen nojalla. $\square$

Näin saatiin todistettua viimeinen osa päätuloksestamme Lauseesta 3.3 eli Lause 5.12. Todistettavaksi jää Lauseen 5.3 osuus Lauseesta 3.3. Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan joukkojen mahtavuutta ja edetään kohti Lauseen 5.3 todistusta.

Lause 5.13. *Piirrettävien joukkojen mahtavuus on aidosti pienempi kuin konveksien joukkojen mahtavuus tasossa.*

Lauseesta seuraa, että suuri osa konvekseista joukoista ei ole piirrettäviä, mutta koska Lauseessa 5.5 todettiin kaikkien tason $\mathbb{R}^2$ suljettujen konveksien joukkojen olevan piirrettäviä, nämä joukot eivät voi olla suljettuja. Esimerkkinä tällaisesta joukosta toimii joukko $A = (]-1/2, 1/2[\times]-1/2, 1/2[)$, sillä kynä ei mahdu joukon sisälle, eikä joukkoa voida kumittaa pienemmäksi valkoisella avoimella 1-säteisellä kiekolla sillä joukosta A tulisi suljettu. Myöhemmin kuitenkin huomataan, että ongelma poistuu, kun siirrymme avoimista 1-säteisistä kiekoista suljettuihin 1-säteisiin kiekkoihin.



Kuva 10: Esimerkkinä käytetty avoin joukko $A = (]-1/2, 1/2[\times]-1/2, 1/2[)$, jonka reuna ei kuulu joukkoon A. Joukon A reunaa on kuvassa merkitty vaalean harmaalla ja joukko A ei ole piirrettävä.

Ennen Lauseen 5.13 todistusta muodostetaan erilliset lauseet vielä kahdesta todistuksessa ilmenevästä mielenkiintoisesta yksityiskohdasta.

Lause 5.14. *Reaalilukujen potenssijoukon mahtavuus on suurempi kuin reaalilukujen mahtavuus eli*

$$|P(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|.$$

Todistus. Tehdään antiteesi eli oletetaan joukkojen mahtavuudet yhtä suuriksi. Tällöin olisi olemassa bijektio $\theta : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ ja joukko

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x \notin \theta(x)\} \in P(\mathbb{R}).$$

Näin ollen on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $\theta(a) = A$. Nyt jos $a \in A$, niin $a \notin \theta(a) = A$, jolloin syntyy ristiriita joukon A määritelmän nojalla. Toisaalta, jos $a \notin A$, niin $a \in \theta(a) = A$, joka on myös ristiriita joukon A määritelmän nojalla. □

Lause 5.15. *Tason $\mathbb{R}^2$ konveksien osajoukkojen kokoelman mahtavuus on vähintään sama kuin reaalilukujen potenssijoukon eli*

$$|P(\mathbb{R})| \leq |\mathcal{K}_2|.$$

Todistus. Mikä tahansa joukko, joka mahtuu avoimen 1-säteisen kiekon ja suljetun 1-säteisen kiekon leikkaukseen on konveksi. Toisin sanoen, olkoon U mikä tahansa yksikköympyrän S^1 osajoukko. Tällöin

$$\{x \subset \mathbb{R}^2 : |x| < 1\} \cup U$$

on konveksi, joten

$$|P(S^1)| \leq |\mathcal{K}_2|.$$

Koska $|P(S^1)| = |P(\mathbb{R})|$, niin lause pätee. □

Nyt voimme todistaa Lauseen 5.13. Tästä lähtien $\beta_2 = \{$Tason $\mathbb{R}^2$ Borel-joukkojen kokoelma$\}$.

Lauseen 5.13 todistus. Lauseen 5.12 nojalla

$$|\mathcal{D}| \leq |\beta_2|.$$

Borel-joukkojen kokoelman mahtavuus on sama kuin reaalilukujen mahtavuus, kuten Srivastava teoksessaan A Course on Borel Sets [7] todistaa eli

$$|\beta_2| = |\mathbb{R}|.$$

Lauseen 5.14 nojalla

$$|\mathbb{R}| < |P(\mathbb{R})|$$

ja edelleen lauseen 5.15 nojalla

$$|P(\mathbb{R})| \leq |\mathcal{K}_2|,$$

missä $\mathcal{K}_2 = \{K \subset \mathbb{R}^2 \text{ konveksi}\}$. Näin ollen

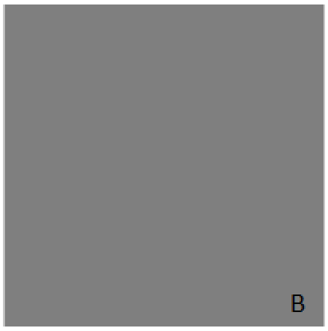
$$|\mathcal{D}| \leq |\beta_2| = |\mathbb{R}| < |P(\mathbb{R})| \leq |\mathcal{K}_2|,$$

josta pääteltynä $|\mathcal{D}| < |\mathcal{K}_2|$ eli piirrettävien joukkojen mahtavuus on aidosti pienempi kuin konveksien joukkojen mahtavuus tasossa $\mathbb{R}^2$. □

Koska piirrettävien joukkojen mahtavuus on aidosti pienempi kuin konveksien joukkojen mahtavuus tasossa $\mathbb{R}^2$, niin Lauseesta 5.13 ja Lauseesta 5.5 voidaan päätellä, ettei suurin osa konvekseista joukoista ole piirrettäviä. Jos kuitenkin tutkimme SYK-piirrettävyyttä, saamme muodostettua seuraavan lauseen.

Lause 5.16. *Jokainen konveksi joukko on SYK-piirrettävä.*

Esimerkkinä konveksista joukosta, joka ei ole piirrettävä on Kuvassa 10 esitetty joukko $A = (]-1/2, 1/2[\times]-1/2, 1/2[)$. Kuitenkin SYK-piirrettävyyden takia myös kumi on suljettu 1-säteinen kiekko ja kynällä tehdyn joukon kumittaminen johtaa avoimeen tai "puoliavoimeen" joukkoon eli piirretyn joukon A ja sen komplementin välinen reuna kuuluu kumittamisen jälkeen joukon A komplementtiin niiltä osin mihin kumi on koskenut.



Kuva 11: Joukko B on esimerkki "puoliavoimesta" joukosta, joka on kuten Kuvassa 10 esiintyvä joukko A, mutta joukon B ylä- ja alareuna kuuluvat joukkoon B. Tällöin kumi on koskenut vain joukon B vasempaan ja oikeaan reunaan, jotka on merkitty kuvaan vaalean harmaalla.

Todistetaan seuraavaksi Lause 5.16 eli, että SYK-piirrettävyyttä hyödyntämällä jokainen konveksi joukko saadaan piirrettyä.

Lauseen 5.16 todistus. Olkoon $C \subset \mathbb{R}^2$ konveksi joukko. Todetaan aluksi, että joukon C sulkeuma $\overline{C}$ on SYK-piirrettävä. Todistus on identtinen Lauseen 5.5 todistuksen kanssa, kun huomataan, että jokainen avoin puolitaso on suljettujen 1-säteisten ympyröiden yhdiste.

Olkoon seuraavaksi $p \in \overline{C} \setminus C$. Tällöin, koska C on konveksi, on olemassa suljettu kiekko $D_p \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$ siten, että p kuuluu kiekon D_p reunaan. Olettaen, että joukon C sulkeuma $\overline{C}$ on jo piirretty, C saadaan piirrettyä, koska

$$C = \overline{C} \setminus \bigcup_{p \in \overline{C} \setminus C} D_p.$$

□

Muodostetaan vielä ennen Lauseen 5.3 todistusta Lemma 5.19 ja sitä varten Lause 5.17 sekä Huomautus 5.18 joukon mitallisuuden osoittamiseen liittyen. Lisää mitallisuuteen liittyvistä ominaisuuksista löytyy Lehrbäckin Mitta- ja integraaliteoria luentomonisteesta [3].

Lause 5.17. *Lebesguen ulkomitalle m^* pätee, että jos $A_1, A_2, ... \subset \mathbb{R}^n$, niin*

$$m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j).$$

Näin ollen Lebesguen ulkomitta on subadditiivinen.

Todistus. Todistus löytyy Lehrbäckin Mitta- ja integraaliteoria luentomonisteesta [3] sivulta 21, joten tässä yhteydessä se sivuutetaan. $\square$

Huomautus 5.18. Koska $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$, Lebesguen ulkomitan subadditiivisuuden nojalla pätee aina

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*((E \cap A) \cup (E \cap A^c)) \\ &\leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c). \end{aligned}$$

Näin ollen joukon A Lebesgue-mitallisuutta osoittaessa riittää näyttää, että

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

kaikille joukoille $E \subset \mathbb{R}^2$.

Lemma 5.19. *Oletetaan, että $A, B \in \mathcal{M}$. Tällöin pätee, että*
- *(i) $A^c \in \mathcal{M}$*
- *(ii) $A \cup B \in \mathcal{M}$*
- *(iii) $A \cap B \in \mathcal{M}$*
- *(iv) $A \setminus B \in \mathcal{M}$*

Todistus. (i) Tämä seuraa suoraan Määritelmästä 5.2, sillä $(A^c)^c = A$.

(ii) Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Koska $A \in \mathcal{M}$, saadaan Määritelmästä 5.2, että

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c).$$

Koska $B \in \mathcal{M}$, voidaan termiä $m^*(E \cap A^c)$ arvioida edelleen Määritelmän 5.2 avulla käyttäen joukkoa $(E \cap A^c) \subset \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A^c) &= m^*((E \cap A^c) \cap B) + m^*((E \cap A^c) \cap B^c) \\ &= m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &= m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap (A^c \cap B^c)) \\ &= m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap (A \cap B)^c). \end{aligned}$$

Kun termille $m^*(E \cap A^c)$ saatu lauseke sijoitetaan Määritelmän 5.2 lausekkeeseen, saadaan Huomautuksen 5.18 ja yhtälön

$$(E \cap A) \cup (E \cap A^c \cap B) = E \cap (A \cup B)$$

avulla, että

$$\begin{aligned}m^*(E) &= m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap (A \cup B)^c)\\ &\geq m^*(E \cap A) \cup (E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap (A \cup B)^c)\\ &= m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c).\end{aligned}$$

Tällöin Huomautuksen 5.18 nojalla joukko $A \cup B \in \mathcal{M}$.

(iii) $A, B \in \mathcal{M}$, jolloin (i)-kohdan mukaan $A^c, B^c \in \mathcal{M}$. Tällöin (ii)-kohdan nojalla $A^c \cup B^c \in \mathcal{M}$ ja näin ollen

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{M}.$$

(iv) $B \in \mathcal{M}$, joten (i)-kohdan perusteella $B^c \in \mathcal{M}$ ja tällöin (iii)-kohdan nojalla

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{M}.$$

□

Huomautus 5.20. Lemman 5.19 avulla voidaan todistaa, että mitallisten joukkojen kokoelma muodostaa σ-algebran.

Nyt on koottu tarvittavat lauseet ja näiden lauseiden avulla voidaan todistaa Lause 5.3.

Lauseen 5.3 todistus. Lauseessa 5.3 sanotaan kaikkien SYK-piirrettävien joukkojen olevan Lebesgue-mitallisia sekä, että kaikki Lebesgue-mitalliset tason $\mathbb{R}^2$ osajoukot eivät ole SYK-piirrettäviä, mutta kokoelmalla $\mathcal{D}_{\leq}$ on sama mahtavuus kuin kokoelmalla $\mathcal{M}$ ja aidosti suurempi mahtavuus kuin kokoelmalla $\mathcal{D}$ eli

$$|\mathcal{D}| < |\mathcal{D}_{\leq}| = |\mathcal{M}|.$$

SYK-piirrettävien joukkojen Lebesgue-mitallisuus voidaan todistaa induktiolla. Kaikki suljettujen 1-säteisten kiekkojen ylinumeroituvatkin yhdisteet ovat Lebesgue-mitallisia artikkelin [1] mukaan. Nyt mikä tahansa joukko $N_{\leq}(A)$, jossa $A \subset \mathbb{R}^2$, on Lebesgue-mitallinen, koska se on yhdiste suljetuista 1-säteisistä kiekoista. Näin ollen jokainen joukko kokoelmassa $\mathcal{D}_{\leq 1}$ on Lebesgue-mitallinen. Induktiolla voidaan todistaa, että jokainen joukko yhdisteessä $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{\leq n}$ on myös Lebesgue-mitallinen, sillä jos $T \subset \mathcal{D}_{\leq n}$, niin T on joko muotoa $T = T_{n-1} \cup B$ tai $T = T_{n-1} \setminus B$, missä B on suljettu ja T_{n-1} sekä B ovat Lebesgue-mitallisia induktio-oletuksen nojalla. Tällöin T on Lebesgue-mitallinen Lemman 5.19 nojalla.

Kaikki Lebesgue-mitalliset tason $\mathbb{R}^2$ osajoukot eivät kuitenkaan ole SYK-piirrettäviä, sillä esimerkiksi Luvussa 4 käsitelty Määritelmän 3.1 mukainen joukko S eli (2x2)-shakkiruudukko ei ole SYK-piirrettävä Lauseen 3.2 nojalla. Toisaalta S on suljettu ja siten Huomautuksen 5.11 nojalla Lebesgue-mitallinen.

Todistetaan seuraavaksi, että

$$|\mathcal{D}_{\leq}| \leq |\mathcal{M}|.$$

Koska kaikki SYK-piirrettävät joukot ovat Lebesgue-mitallisia, kuten yllä todistettiin, täytyy Lebesgue-mitallisten joukkojen mahtavuuden olla suurempi tai yhtä suuri kuin SYK-piirrettävien joukkojen.

Sitten todistetaan, että

$$|\mathcal{D}_{\leq}| \geq |\mathcal{M}|,$$

eli SYK-piirrettävien joukkojen mahtavuuden täytyy olla suurempi tai yhtä suuri kuin Lebesgue-mitallisten joukkojen. Artikkelin [2] mukaan

$$|\mathcal{M}| = |P(\mathbb{R}^2)| = |\mathcal{K}_2|.$$

Koska kaikki edellä mainituista ovat SYK-piirrettäviä on väitteen pädettävä. Tällöin

$$|\mathcal{D}_{\leq}| = |\mathcal{M}|.$$

Kokoelmalla $\mathcal{D}_{\leq}$ on sen sijaan aidosti suurempi mahtavuus kuin kokoelmalla $\mathcal{D}$ sillä Lauseen 5.13 nojalla

$$|\mathcal{D}| < |\mathcal{K}_2|$$

ja Lauseen 5.16 nojalla jokainen konveksi joukko on SYK-piirrettävä, joten

$$|\mathcal{K}_2| \leq |\mathcal{D}_{\leq}|.$$

Tällöin

$$|\mathcal{D}| < |\mathcal{D}_{\leq}|.$$

$\square$

Kootaan vielä lopuksi yhteen tulokset, jotka todistavat Lauseen 3.3.

Lauseen 3.3 todistus. Lause 3.3 koostuu kolmesta kohdasta, joten todistetaan ne erikseen.

Lauseen ensimmäisessä kohdassa kaikkien piirrettävien ja SYK-piirrettävien joukkojen sanotaan olevan Lebesgue-mitallisia. SYK-piirrettävien joukkojen tapaus käsiteltiin Lauseen 5.3 yhteydessä. Koska piirrettävät joukot kuuluvat Borel-joukkojen kokoelmaan, ne ovat Lebesgue-mitallisia Huomautuksen 5.11 nojalla.

Lauseen toisessa kohdassa sanotaan, että kaikki Lebesgue-mitalliset osajoukot tasossa $\mathbb{R}^2$ eivät ole SYK-piirrettäviä, mutta kokoelmalla $\mathcal{D}_{\leq}$ on sama mahtavuus kuin tason Lebesgue-mitallisten osajoukkojen kokoelmalla $\mathcal{M}$ ja suurempi mahtavuus kuin kokoelmalla $\mathcal{D}$. Tämä osa lauseesta sisältyy myös Lauseeseen 5.3.

Lauseen kolmannessa kohta käsitellään piirrettävien joukkojen ja Borel-joukkojen yhteyttä eli sanotaan kaikkien piirrettävien joukkojen olevan Borel-joukkoja. Tämä todistettiin Lauseessa 5.12. □

Näin ollen Lause 3.3 eli toinen tutkielman päälauseista on todistettu.

Lähdeluettelo

[1] Marek Balcerzak, Alexander Kharazishvili: *On Uncountable Unions And Intersections Of Measurable Sets.* Georgian Mathematical Journal, 1999.

https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/GMJ.1999.201/html

[2] Florian Frick, Fei Ping: *What Can You Draw?* The American Mathematical Monthly, 2022.

https://doi.org/10.1080/00029890.2022.2128607

[3] Juha Lehrbäck: *Mitta- ja integraaliteoria (osat 1 ja 2).* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2018.

https://tim.jyu.fi/files/338185/Mitta_Lehrback.pdf

(Luettu 29.5.2024)

[4] Juha Lehrbäck: *Lineaarinen algebra ja geometria 1.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2019.

https://tim.jyu.fi/files/202738/Linkku1uusi.pdf

(Luettu 29.5.2024)

[5] Jouni Parkkonen: *Metriset avaruudet ja topologia.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2020.

http://users.jyu.fi/~parkkone/DG2023/MetTopo20.pdf

(Luettu 29.5.2024)

[6] Jouni Parkkonen: *Differentiaaligeometria.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2023.

http://users.jyu.fi/~parkkone/DG2023/DG2023.pdf

(Luettu 29.5.2024)

[7] Sashi Mohan Srivastava: *A Course on Borel Sets.* New York, Springer, 1998.

http://lib.ysu.am/disciplines_bk/21f58214a44e0f6efcbf6ec662b2087a.pdf

[8] Jussi Väisälä: *Topologia I.* Helsinki, Limes Ry, 2002.