ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

DISSERTATIONES

16

RANDWERTAUFGABEN ZUR PLATTENGLEICHUNG

PEKKA NEITTAANMÄKI

ABHANDLUNG ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER PHILOSOPHIE

WIRD MIT GENEHMIGUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT JYVÄSKYLÄ AM 6. MAI 1978 UM 12.15 IN DER ALTEN AULA DER UNIVERSITÄT (AUDITORIUM S-212) ZUR ÖFFENTLICHEN VERTEIDIGUNG VORGELEGT

SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA
* 1908 *

HELSINKI 1978
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

Editor: OLLI LEHTO
Department of Mathematics
University of Helsinki
Hallituskatu 15
SF-00100 Helsinki 10

ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

DISSERTATIONES

16

RANDWERTAUFGABEN ZUR PLATTENGLEICHUNG

PEKKA NEITTAANMÄKI

ABHANDLUNG ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER PHILOSOPHIE

WIRD MIT GENEHMIGUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT JYVÄSKYLÄ AM 6. MAI 1978 UM 12.15 IN DER ALTEN AULA DER UNIVERSITÄT (AUDITORIUM S-212) ZUR ÖFFENTLICHEN VERTEIDIGUNG VORGELEGT

HELSINKI 1978
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

ISSN 0355-0087
ISBN 951-41-0327-0

Eingegangen am 21. März 1978

HELSINGIN KESKUSKIRJAPAINO OY
HELSINKI 1978

**Verkkoversio julkaistu tekijän ja
Suomalaisen Tiedeakatemian luvalla.**

**URN:ISBN:978-952-86-0104-3
ISBN 978-952-86-0104-3 (PDF)**

Jyväskylän yliopisto, 2024

Vorwort

Für das Zustandekommen dieser Abhandlung ist die Hilfe, die mir mein Lehrer, Herr Professor Dr. Ilppo Simo Louhivaara erteilt hat, von unschätzbarem Wert gewesen, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen tiefempfundenen Dank aussprechen möchte. Durch sein reges Interesse und seine unermüdliche Hilfsbereitschaft hat er mich ermutigt, meine Studien fortzusetzen und diese Arbeit zu verfassen. Auch zahlreiche Verbesserungen bei der Ausgestaltung der Abhandlung sind durch seine wertvollen Ratschläge veranlaßt worden.

Meinen ergebenen Dank möchte ich an Herrn Professor Dr. Rolf Leis und Herrn Dr. Karl Josef Witsch richten. Ihre anspornenden Vorlesungen und ihr persönlicher Unterricht während meines Studiums im Sommer 1976 an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität zu Bonn haben die Anregung zu vorliegender Untersuchung gegeben. Herrn Dr. Witsch danke ich aufrichtig auch für sein stetes Interesse und für seine wertvollen konstruktiven Hinweise bei verschiedenen Stadien dieser Abhandlung.

Desgleichen spreche ich meinen besten Dank Herrn Professor Dr. Martti Mikkola für seine Vorschläge beim Durchlesen des Manuskriptes aus. Den Herren Ari Lehtonen und Jukka Saranen bin ich für viele Diskussionen über den Themenkreis dieser Arbeit zum Dank verbunden. Frau Eira Henriksson danke ich für die sorgfältige und saubere Reinschrift des Manuskriptes.

Dem Institut für Angewandte Mathematik der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität zu Bonn spreche ich meinen Dank für die Möglichkeit aus, während des Sommersemesters 1976 meine Studien zu vertiefen. Mein Aufenthalt in Bonn wurde durch Stipendien des Deutschen Akademischen Austauschdienstes (DAAD) und der Emil Aaltonen -Stiftung ermöglicht. Während meiner früheren Studien hatte ich Stipendien von der Alfred Kordelin -Stiftung und von der Universität Jyväskylä erhalten. Allen diesen Organisationen bin ich für ihre Unterstützung zur Dankbarkeit verpflichtet. Schließlich danke ich der Finnischen Akademie der Wissenschaften für die Aufnahme dieser Arbeit in die mathematische Dissertationenreihe ihrer Annalen.

Jyväskylä, im Dezember 1977

Pekka Neittaanmäki

Inhalt

I. Einleitung. Bezeichnungen

1.1. In dieser Abhandlung werden wir einige Randwertaufgaben behandeln, mit denen wir den Biegungsvorgang der durch äußere Kräfte verformten Platten zu schildern versuchen. Unsere Arbeit schließt sich eng an die Untersuchungen von R. Leis sowie von seinen Schülern R. Polis, W. Wickel und K. J. Witsch an.

In unserer Problemstellung liegt die Platte in einem (n+1)-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geqq 2$) mit den Koordinaten $(x_1,\ldots,x_n,y)$. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß die Ebene $y = 0$ mit der Mittelebene (mit der "neutralen Schicht") der nichtdeformierten Platte zusammenfällt.

Wir betrachten einen Fall, der in den Rahmen der linearen Elastizitätstheorie paßt und der physikalisch durch folgende vereinfachenden Voraussetzungen charakterisiert werden kann: Die Platte soll dünn sein, ihre Dicke klein gegenüber den übrigen Dimensionen, die auftretende Durchbiegung sei klein gegenüber der Dicke der Platte. Es sollen nur Kräfte in Richtung der y-Achse wirken, so daß die Verschiebung der Platte in Richtung der Ebene $y = 0$ vernachlässigt werden kann.

Wir werden unsere Betrachtung auf die Projektion der Platte in den n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $x_1,\ldots,x_n$ beschränken. Diese Projektion sei mit G bezeichnet und deren Rand mit ∂G . Es sei $y = w(x_1,\ldots,x_n,t)$ die Durchbiegung der Platte im Zeitpunkt t , dann genügt die Funktion w der allgemeinen zeitabhängigen linearen Plattengleichung von der Gestalt

$$a \frac{\partial^2}{\partial t^2} w + b \frac{\partial}{\partial t} w + L_0 w = F . \tag{1.1}$$

Dabei ist L_0 ein linearer gleichmäßig stark elliptischer Differentialoperator vierter Ordnung mit genügend regulären reellwertigen Koeffizienten, a (Massendichte) und b (Dämpfung) sind reellwertige Funktionen mit $a(x) > 0$, $b(x) \geqq 0$ sowie F die Intensität der Normalbelastung (vgl. die Voraussetzungen II.1.7, III.1.1 und III.1.2).

Wir wollen hier nur den zeitharmonischen Fall behandeln (bezüglich des zeitabhängigen Falles verweisen wir auf Bröhl [3]) und nehmen an, daß F und w zu $e^{-i\omega t}$ (ω eine nichtnegative Konstante) proportional sind, also

$$F(x,t) = e^{-i\omega t} f(x) \quad \text{und} \quad w(x,t) = e^{-i\omega t} u(x) .$$

Dann erhalten wir aus Gleichung (1.1) die Plattengleichung

$$(1.2) \qquad (L_0 - \omega^2 a - i\,\omega\, b)\, u = f .$$

Zu dieser Gleichung werden wir sowohl für beschränkte als auch für unbeschränkte Gebiete G die üblichen Randwertaufgaben stellen (vgl. II.1.4, III.1.1 und III.1.4). Die verschiedenen Randbedingungen entsprechen verschiedenen Arten der Einspannung des Plattenrandes, z. B. entspricht die Dirichletsche Randbedingung dem Fall, in dem der Plattenrand fest eingespannt ist, die Neumannsche Randbedingung dem Fall, in dem der Plattenrand vollständig frei beweglich ist (vgl. II.1.1).

Wegen der Herleitung der Plattengleichung, wegen der dafür üblichen Voraussetzungen sowie wegen verschiedener Eigenschaften der zu betrachtenden Platte (z. B. homogen-inhomogen, isotrop-anisotrop) sei auf Courant - Hilbert [6], Girkmann [15], Landau - Lifshitz [19], Mansfield [24], Timoshenko [37], Leis [23], Polis [28] und Duvaut - Lions [8] verwiesen. Hier sei noch erwähnt, daß $\omega = 0$ dem statischen Fall entspricht und daß die Lösung u der Gleichung (1.2) in diesem Fall die Durchbiegung der Platte in Querrichtung in der Gleichgewichtssituation bedeutet sowie daß für $\omega > 0$ die Lösung u die zeitharmonische Transversalschwingung der Platte beschreibt.

In unserer Behandlung der Randwertprobleme kommen vier wesentlich verschiedene Typen von Gebieten G vor:

1) Beschränkte Gebiete,

2) Außengebiete, d. h. Gebiete, deren Komplemente kompakt und nicht leer sind, folglich sind auch deren Ränder kompakt,

3) unbeschränkte Gebiete, deren Ränder nicht kompakt sind und deren Komplemente innere Punkte haben,

4) das Gebiet G fällt mit dem ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ zusammen.

Weitere Voraussetzungen über G und ∂G werden bei der jeweiligen Problemstellung gegeben.

1.2. In Teil II werden wir verschiedene Randwertprobleme mit homogenen Randdaten im statischen Fall, d. h. Probleme zur Gleichung

$$(1.3) \qquad L_0 u = f$$

untersuchen, und zwar das Dirichletproblem in den Gebietstypen 1)-3) und andere Randwertaufgaben (u. a. das Neumannsche Problem und das gemischte Problem vom Dirichlet-Neumannschen Typ) in den Gebietstypen 1)-2) sowie die Differentialgleichung (1.3) ohne Randbedingungen in ganz $\mathbb{R}^n$.

In Teil III werden wir das homogene Dirichletsche Problem zu Gleichung (1.2) mit $\omega > 0$ in den Gebietstypen 2)-3) untersuchen.

Verschiedene Randwertaufgaben werden auf gewisse Probleme in geeignet erklärten Sobolevräumen zurückgeführt. Dadurch werden sog. schwache Lösungen der zu betrachtenden Randwertaufgaben erzielt.

Falls man für das zu betrachtende Gebiet und für die Koeffizienten des Operators $L := L_0 - \omega^2 a - i\omega b$ sowie für f genügend starke Regularitätsvoraussetzungen stellt, werden die Lösungen der von uns behandelten Randwertaufgaben die üblichen Regularitätseigenschaften besitzen (man siehe etwa Agmon [1], §9-10, Fichera [11], §8-10 und §13, und [12], §3-4 und §11, und Nečas [27], §4-5).

1.3. Wir werden uns jetzt mit unseren Problemen auseinandersetzen. Bei der Behandlung der Randwertaufgaben zu Gleichung (1.3) werden die für funktionalanalytische Lösungsmethoden üblichen Schlüsse (die Koerzitivitätsungleichung, die Poincaré̓sche Ungleichung, der Auswahlsatz von Rellich, der Satz von Lax und Milgram) angewandt (vgl. II.2). Wegen ähnlicher Betrachtungen sei auf Duvaut - Lions [8], Fichera [11]-[12], Michlin [25] und Nečas [27] verwiesen. In diesem Zusammenhang seien auch Courant - Hilbert [6]-[7], Vekua [39], Velte [40] und der Übersichtsartikel [9] erwähnt.

1.4. Die Untersuchung der Randwertprobleme zu Gleichung (1.3) in den Gebietstypen 2)-4) stößt auf Schwierigkeiten, die im Falle beschränkter Gebiete nicht auftreten. Es ergibt sich (Beispiel II.1.3), daß schon das Dirichletsche Problem nicht eindeutig lösbar ist. Dafür müssen wir das Verhalten der Lösungen "im Unendlichen" genauer charakterisieren. Eine weitere Schwierigkeit entsteht dadurch, daß einige für beschränkte Gebiete gültige Resultate der üblichen L^2-Theorie (die Poincarésche Ungleichung und der Auswahlsatz von Rellich) sich nicht allgemein auf unbeschränkte Gebiete übertragen lassen. Wegen dieses Sachverhalts sind wir auf eine gewichtete L^2-Theorie angewiesen. Unsere Betrachtungen sind durch persönliche Diskussionen mit Herrn K. J. Witsch und durch seine Arbeit [48] angeregt worden.

Die Behandlung der Gleichung (1.3) mit verschiedenen Randbedingungen in unbeschränkten Gebieten benötigt eine Modifikation der Poincaréschen Ungleichung, die wir in II.3.2 beweisen werden. Mit Hilfe der so erzielten Ungleichung können wir in den Fällen des Dirichletschen Problems und des gemischten Problems sowie für genügend große Dimensionen auch im Falle des Neumannschen Problems und im Falle des ganzen Raumes $\mathbb{R}^n$ unter Anwendung des Satzes von Lax und Milgram die Existenz einer eindeutigen Lösung nachweisen (Satz II.3.8). Andererseits folgt aus derselben Ungleichung ohne Dimensionseinschränkungen immer die Gültigkeit einer gewichteten Gårdingschen Ungleichung (vgl. II.3.5), die gemäß einigen Stabilitätseigenschaften von Fredholmoperatoren das Bestehen einer Fredholmschen Alternative für den Operator L_0 garantiert (Satz II.3.15).

<u>1.5.</u> Bei dem Eindeutigkeits- und Existenzbeweis der Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe zu Gleichung (1.2) im gedämpften Fall ($b > 0$) lassen sich die üblichen funktionalanalytischen Methoden (die Gårdingsche Ungleichung und der Satz von Lax und Milgram) unabhängig von Gebietstyp mit Erfolg verwenden (Satz III.2.1).

<u>1.6.</u> Angeregt durch die Arbeiten [23] von Leis und [28] von Polis wird schließlich das homogene Dirichletsche Problem zur Gleichung

$$(1.4) \qquad (L_0 - m - k^4)\, u \;=\; f$$

behandelt. Diese Gleichung entspricht dem nichtgedämpften Fall ($b = 0$) in Gleichung (1.2), wenn der Koeffizient $\omega^2 a$ in die Summe

$$\omega^2 a(x) \;=\; m(x) + k^4$$

ausgespalten wird, wobei $k^4 > 0$ sein soll.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Frage: Unter welchen Voraussetzungen an das asymptotische Verhalten des Randes (für Gebietstyp 3)), der Koeffizienten des Operators $L_0 - m$ und der Funktion u "im Unendlichen" das Dirichletsche Problem zu Gleichung (1.4) eindeutig lösbar ist?

Wie im Falle der Schwingungsgleichung muß man zwischen den ein- und ausstrahlenden Lösungen von (1.4) unterscheiden, und wir wollen uns auf die ausstrahlenden beschränken. Von der "Ausstrahlungslösung" wird außer dem Erfüllen der Differentialgleichung und der Randbedingungen das Bestehen einer "Ausstrahlungsbedingung" verlangt.

Bei der Betrachtung des Ausstrahlungsproblems treten folgende besondere Schwierigkeiten auf: Die Lösungen sind nicht quadratintegrierbar (doch sind sie mit geeigneten Gewichten quadratintegrierbar, vgl. Beispiel III.1.3), und im Gegensatz zur Schwingungsgleichung schließt die Ausstrahlungsbedingung das Vorkommen der Eigenwerte des Operators nicht aus (vgl. Bemerkung III.1.5). Eine weitere Schwierigkeit entsteht dadurch, daß die oben erwähnte allgemeine funktionalanalytische Lösungsmethoden sich nicht auf Behandlung der Gleichung (1.4) in den Gebietstypen 2)–4) übertragen lassen. (Wegen der Randwertaufgaben zu Gleichung (1.4) in beschränkten Gebieten sei auf Leis [23] und Polis [28] verwiesen.)

Außenraumaufgaben (d. h. Ausstrahlungsprobleme für Außengebiete) zu Plattengleichungen und zu einigen anderen elliptischen linearen Differentialoperatoren vierter Ordnung sind von Leis [21], [23] und Polis [28] sowie von Saranen [32], Teschke [36], Wickel [45] und Witsch [49] behandelt worden.

In diesen Untersuchungen wird die Behandlung wesentlich auf die von Rellich [30], Leis [20] und Jäger [16] entwickelte Hilbertraumtheorie der Schwingungsgleichung zurückgeführt. Dabei kann man eine sachgemäße Ausstrahlungsbedingung wie bei der Schwingungsgleichung aus der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung herleiten. Für allgemeinere Plattengleichungen (des anisotropen Falles) ist dies nicht mehr möglich, und man leitet dann eine Ausstrahlungsbedingung auf andere Weise her (vgl. Polis [28]).

Ausstrahlungsprobleme zu allgemeineren Gleichungen höherer Ordnung sind in den Gebietstypen 2) oder 4) u. a. von Eidus [10], Finozenok

[14], Vainberg [38] und Witsch [50] und in Gebietstyp 3) von Vogelsang [41]-[42] behandelt worden. Die Vogelsangschen Ergebnisse gelten (sogar vereinfacht) auch in Außengebieten und in ganz $\mathbb{R}^n$.

Hier suchen wir in den Gebietstypen 2)-3) (ähnliche Ergebnisse würden doch in ganz $\mathbb{R}^n$ gelten) nach sachgemäß gewichtet quadratintegrierbare Funktionen u (vgl. III.1.4), die die Ausstrahlungsbedingung

$$\text{(1.5)} \qquad \operatorname{grad}\,(e^{-ikr}\,u) \in L^2(G)$$

und die Gleichung (1.4) mit Dirichletschen Randwerten im schwachen Sinne erfüllen. Dabei werden anstelle der Kompaktheitsvoraussetzungen von Leis [23] und Polis [28] auch bis ins Unendliche reichende Inhomogenitäten und Anisotropien zugelassen (vgl. Voraussetzung III.1.2). Als Grundlage der Beweismethode bei der Behandlung dieses Problems benutzen wir hauptsächlich die Arbeiten [41]-[42] von Vogelsang. Die Voraussetzungen über die Operatoren sowie die Ausstrahlungsbedingung unterscheiden sich aber von denjenigen von Vogelsang (vgl. die Sätze III.3.1, III.5.3 und III.5.4).

Die Abschnitte III.3 und III.5.1 befassen sich mit der Eindeutigkeitsfragen des Ausstrahlungsproblems. In Satz III.3.1 werden hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß k^4 kein Eigenwert des Operators $L_0 - m$ auf einer später zu definierenden Definitionsmenge in $L^2(G)$ (wobei keine Gewichte nötig sind) ist. Die Voraussetzungen enthalten z. B. die Bedingung (über die geometrische Natur des Randes), daß auf dem Rand von G

$$\text{(1.6)} \qquad x \cdot \nu(x) \leqq 0$$

gilt, wobei ν die äußere Normale des Randes bezeichnet. Im Falle eines Außengebietes besagt (1.6) die Sternförmigkeit des Randes. Man kann Bedingung (1.6) auch noch durch eine schwächere ersetzen (vgl. Vogelsang [41] und Saranen [31]).

Anschließend zeigen wir (Satz III.5.3), daß jede Ausstrahlungslösung u der homogenen Plattengleichung $(L_0 - m - k^4)\,u = 0$ in $L^2(G)$ liegt. Unter der Annahme, daß k^4 kein Eigenwert des Operators $L_0 - m$ ist, folgt dann, daß das Ausstrahlungsproblem höchstens eine Lösung haben kann.

Die Existenz einer Lösung des Ausstrahlungsproblems wird mit der

Methode der Grenzabsorption (vgl. Leis [23], Vainberg [38] und Vogelsang [42]) unter der Annahme bewiesen, daß k^4 kein Eigenwert des Operators $L_0 - m$ ist (Satz III.5.4). Die für diesen Beweis nötigen A-priori-Abschätzungen werden in Abschnitt III.4 hergeleitet.

1.7. Es sei bemerkt, daß man eigentlich an reellwertigen Lösungen der Randwertaufgaben zu den Gleichungen (1.2)-(1.4) interessiert ist. Im gedämpften Fall sowie im Falle des Ausstrahlungsproblems sind die Lösungen komplexwertig (die Ausstrahlungsbedingung ist nur für komplexwertige Funktionen vernünftig). Physikalisch interessant ist dann der Realteil der Lösung.

1.8. Hier sei erwähnt, daß Leis [23], Polis [28] und Wickel [45] auch Neumannsche Außenraumaufgaben zu Plattengleichungen behandelt haben. Leis hat gezeigt, daß das Neumannsche Ausstrahlungsproblem bei Operatoren mit konstanten Koeffizienten außerhalb einer Kugel eine eindeutig bestimmte Lösung hat. Leis und Polis haben auch gezeigt, daß für die Neumannsche Außenraumaufgabe in allgemeineren Gebieten eine Fredholmsche Alternative gilt.

Im Falle konstanter Koeffizienten kann man Außenraumaufgaben zu Plattengleichungen auch nach dem Vorbild der klassischen Potentialtheorie mit Integralgleichungsmethoden lösen. Eine solche Theorie wird von Wickel [46] dargestellt. Wegen der Entwicklung der Integralgleichungsmethoden für das Ausstrahlungsproblem zur Schwingungsgleichung sei auf Sommerfeld [35], Rellich [30], Vekua [39], Appendix II, Weyl [44], Müller [26] und Leis [20] verwiesen.

1.9. Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{N}$ die Menge der nichtnegativen bzw. positiven ganzen Zahlen, mit $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ den n-dimensionalen ($n \in \mathbb{N}$) reellen bzw. komplexen euklidischen Raum sowie mit $\cdot$ bzw. $|.|$ das Skalarprodukt bzw. die Norm in $\mathbb{R}^n$. Ferner schreiben wir $\mathbb{R}^+ := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$.

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$; mit ∂G bezeichnen wir den Rand von G . Wir benutzen durchgehend die Bezeichnungen

$$G(R) := \{ x \in G \mid |x| < R \} ,$$

$$\partial G(R) := \{ x \in \partial G \mid |x| < R \} ,$$

$$G(R_1,R_2) := \{x \in G \mid R_1 < |x| < R_2\}\,,$$
$$S(R) := \{x \in G \mid |x| = R\}\,,$$
$$K(R) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}\,,$$
$$K(R_1,R_2) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid R_1 < |x| < R_2\}\,,$$
$$B(R) := \{x \in G \mid x > R\}\,,$$
$$r := |x|\,, \qquad \hat{x} := x/|x|\,,$$

und $\nu(x) := (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ ist die äußere Normale von ∂G im Punkt $x \in \partial G$.

Es seien $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Wir schreiben $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $|x| \to \infty$, falls $R > 0$ und $C \geqq 0$ so existieren, daß $|f(x)|/|g(x)| \leqq C$ für $|x| > R$ gilt.

Die Ordnung eines Multiindexes $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, wird durch $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ erklärt.

<u>1.10.</u> Wir benutzen die Bezeichnungen $D := D_x := (D_1, \ldots, D_n)$ mit $D_j := D_{x_j} := \partial/\partial x_j$. Weiter schreiben wir grad $:= \nabla := D^T$, wobei der Index T die Transposition eines Vektors oder einer Matrix bezeichnet. Wir setzen

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{N}_0^n\,.$$

Ferner ist $\Delta := D_1^2 + \ldots + D_n^2$ der Laplacesche Differentialoperator und $\Delta^2 = \Delta\Delta$ der Bipotentialoperator.

Die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen ν ist $D_\nu := \nu\nabla$. Für Felder $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird die Bezeichnung $\operatorname{div} F := \nabla \cdot F$ verwendet.

<u>1.11.</u> Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Die Klasse der in G erklärten stetigen komplexwertigen Funktionen bezeichnen wir mit $C^0(G)$ und die Klasse der t-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit $C^t(G)$, $t \in \mathbb{N}$. Die Menge der Funktionen aus $C^t(G)$ bzw. aus

$$C^\infty(G) := \bigcap_{t=0}^{\infty} C^t(G)\,,$$

die je einen kompakten Träger in G haben, sei mit $C_0^t(G)$ bzw. $C_0^\infty(G)$ bezeichnet. Der Träger von u, Trg u, ist die Abschließung der Menge

$\{x \in G \mid u(x) \neq 0\}$. Weiter bezeichnen wir mit $C^t(\bar{G})$, $t \in \mathbb{N}_0$, die Menge der Funktionen, die mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung t gleichmäßig stetig in G sind.

Wir bezeichnen wie üblich den Hilbertraum (der Äquivalenzklassen) aller in G im Lebesgueschen Sinne meßbaren und quadratintegrierbaren Funktionen mit $L^2(G)$, das Skalarprodukt in $L^2(G)$ mit

$$(u\,,v)_{0,G} := \int_G u\,\bar{v}\,dx$$

und die zugehörige Norm mit

$$\|u\|_{0,G} := (u\,,u)_{0,G}^{1/2} .$$

Wir erklären für $u \in C^t(G)$ $(t \in \mathbb{N})$ die Normen

$$\|u\|_{t,G} := \Big(\sum_{|\alpha| \leqq t} \|D^\alpha u\|_{0,G}^2\Big)^{1/2} ,$$

$$\|u\|_{C^t(G)} := \sup \{ |D^\alpha u(x)| \mid x \in G\,, |\alpha| \leqq t \}$$

und die Halbnormen

$$|u|_{t,G} := \Big(\sum_{|\alpha| = t} \|D^\alpha u\|_{0,G}^2\Big)^{1/2} ,$$

$$|u|_{C^t(G)} := \sup \{ |D^\alpha u(x)| \mid x \in G\,, 0 < |\alpha| \leqq t \} .$$

Wir setzen

$$C_*^t(G) := \{ u \in C^t(G) \mid \|u\|_{t,G} < \infty \} ,$$

$$C_{**}^t(\bar{G}) := \{ u \in C^t(\bar{G}) \mid \|u\|_{C^t(G)} < \infty \} .$$

Für $u\,,v \in C_*^t(G)$ erklärt man das Skalarprodukt

$$(u\,,v)_{t,G} := \sum_{|\alpha| \leqq t} \int_G D^\alpha u\,\overline{D^\alpha v}\,dx .$$

Den Sobolevschen Funktionenraum $H^t(G)$ erhält man wie üblich als Vervollständigung der Funktionenklasse $C_*^t(G)$ in bezug auf das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{t,G}$. Die Abschließung der Menge $C_0^t(G)$ im Raum $H^t(G)$ sei $H_0^t(G)$.

Die Menge derjenigen Funktionen u , die für jede offene Menge $U \subset G$ mit kompaktem $\bar{U} \subset G$ in $H^t(U)$ liegen, wird mit $H_{loc}^t(G)$ bezeichnet (vgl. Agmon [1], S. 8-9). Es sei

$$H_*^t(G) := \{u \in H_{loc}^t(G) \mid \phi u \in H^t(G) \text{ für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

und entsprechend

$$H_{*0}^t(G) := \{u \in H_{loc}^t(G) \mid \phi u \in H_0^t(G) \text{ für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\} .$$

1.12. Bei der Betrachtung des Neumannschen Problems sowie des gemischten Problems zu Gleichung (1.3) setzen wir voraus, daß G die Segmenteigenschaft hat (vgl. Agmon [1], S.11):

Definition 1.1. Man sagt, daß das Gebiet G die Segmenteigenschaft hat, falls ∂G eine lokal endliche offene Überdeckung $\{Q_j\}$ hat und zu jedem Q_j ein Element $y^j \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ derart existiert, daß das Segment $\{y \mid y = y_0 + t y^j , 0 < t < 1\} \subset G$ für alle $y_0 \in \bar{G} \cap Q_j$.

Bei der Behandlung des Ausstrahlungsproblems setzen wir voraus, daß $G \in C^4$, falls ∂G kompakt ist, und $G \in C^4$ gleichmäßig, falls ∂G nicht kompakt ist (vgl. Definitionen 1.2 und 1.3 unten). Die Forderung, daß das Gebiet $G \in C^t$, $t \in \mathbb{N}$, gleichmäßig ist, garantiert die Existenz einer gleichmäßigen Zerlegung der Eins (Browder [4], §1, und Vogelsang [41], §2), und somit lassen sich einige allgemeine, für Gebiete mit kompaktem Rand bewiesene Eigenschaften elliptischer Differentialgleichungen auf Gebiete mit unbeschränktem Rand übertragen (vgl. Vogelsang [41], §2).

Definition 1.2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man sagt, daß $G \in C^t$ (oder auch $\partial G \in C^t$), $t \in \mathbb{N}$, gilt, wenn zu jedem $x \in \partial G$ eine offene Umgebung $U(x)$ und ein C^t-Diffeomorphismus $T : U(x) \to K(1)$ mit

(i) $T(\bar{G} \cap U(x)) = \Sigma(1)$,

(ii) $T(\partial G \cap U(x)) = \partial_0 \Sigma(1)$

existieren, wobei für $R > 0$

$$\Sigma(R) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < R , y_n \geqq 0\} ,$$

$$\partial_0 \Sigma(R) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < R , y_n = 0\}$$

sind.

Definition 1.3. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man sagt, daß $G \in C^t$, $t \in \mathbb{N}$, gleichmäßig gilt, falls die folgenden Bedingungen (i)-(iv) erfüllt sind:

(i) Es gibt zwei Systeme offener Mengen

$$\{Q_j' \mid j \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad \{Q_j \mid j \in \mathbb{N}\},$$

die beide $\bar{G}$ überdecken und zwischen denen $Q_j' \subset Q_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß jedes $x \in \bar{G}$ höchstens in n_0 Mengen von $\{Q_j\}$ enthalten ist.

(iii) Zu jedem j existiert ein C^t-Diffeomorphismus $T_j : Q_j \to K(1)$ derart, daß für $\partial G \cap Q_j = \emptyset$ (die leere Menge) die Relation

$$T_j(Q_j') = K(1/2)$$

und für $\partial G \cap Q_j \neq \emptyset$ die Relationen

$$T_j(\bar{G} \cap Q_j) = \Sigma(1) ,$$
$$T_j(\bar{G} \cap Q_j') = \Sigma(1/2) ,$$
$$T_j(\partial G \cap Q_j) = \partial_0 \Sigma(1)$$

gelten.

(iv) Es existiert eine Konstante $C > 0$ so, daß für die durch $T_j x =: y = (y_1,\dots,y_n)$, $y_k = T_{j_k} x$ und $T_j^{-1} y =: x = (x_1,\dots,x_n)$ (T_j^{-1} ist die inverse Abbildung von T_j), $x_k = (T_j^{-1})_k y$ erklärten Komponenten T_{j_k} bzw. $(T_j)_k^{-1}$ von T_j bzw. T_j^{-1}

$$|T_{j_k}|_{C^t(Q_j)} < C \quad \text{und} \quad |(T_j)_k^{-1}|_{C^t(F^j(1))} < C$$

gilt, wobei $F^j(1) := K(1)$ für $\partial G \cap Q_j = \emptyset$ und $F^j(1) := \Sigma(1)$ für $\partial G \cap Q_j \neq \emptyset$ ist.

Zu Definition 1.3 siehe Browder [4], S.28, und Vogelsang [41], S.383.

Bemerkung 1.4. Wenn $G \in C^t$ und ∂G kompakt ist, ist $G \in C^t$ gleichmäßig.

II. Der statische Fall

1. Formulierung von Randwertaufgaben

1.1. Jetzt werden wir verschiedene Randwertaufgaben zu Gleichung (I.1.3) in variationeller Form stellen.

Wenn man ein Randwertproblem mit Hilbertraummethoden behandeln will, soll zuerst eine Bilinearform (eine Dirichletsche Form) gewählt werden. Dem Differentialoperator entsprechen verschiedene Bilinearformen. Insbesondere für das Neumannsche Problem ist die Wahl der Bilinearform entscheidend. Aus jeder Bilinearform kommen gewisse Randbedingungen als "natürliche Randbedingungen" hervor (vgl. Wickel [45], §III, und Leis [23], §2). Um ein physikalisch vernünftiges Neumannsches Problem stellen zu können, müssen wir als Bilinearform einen Energieausdruck der Platte einführen. Auch bei anderen Randwertproblemen werden wir in der Wahl der Bilinearform den Energieausdruck der Platte benutzen.

Durch eine Reihe von Postulaten, die physikalisch motiviert sind (vgl. Duvaut - Lions [8], §4, Landau - Lifshitz [19], §11, Leis [23], §1, und Polis [28], §1), kann man den Ausdruck

$$(1.1) \qquad V(u) := \frac{1}{2} (\mathcal{D} \operatorname{grad} u \,,\, S\, \mathcal{D} \operatorname{grad} u)_{0,G}$$

für die Verzerrungsenergie der verformten (isotropen oder anisotropen) Platte herleiten, wobei u die Durchbiegung der Platte in Querrichtung ist. In (1.1) ist S eine $(n+\binom{n}{2}) \times (n+\binom{n}{2})$ -Matrix von Elastizitätskoeffizienten. Die Elemente s_{ij} der Matrix S sind variabel (falls die Platte inhomogen ist). Wegen verschiedener Typen elastischer Medien sei auf Sommerfeld [34], Landau - Lifshitz [19], Leis [22] und Polis [28] verwiesen. In (1.1) hat der Differentialoperator $\mathcal{D}$ die Gestalt

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}(D) := \underbrace{\left(\begin{array}{l} \left.\begin{matrix} D_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & D_n \end{matrix}\right\} n \text{ Zeilen} \\ \left.\begin{matrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & D_n & D_{n-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & D_n & 0 & D_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & D_1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & D_{n-1} & D_{n-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n-1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & D_1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_2 & D_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{matrix}\right\} \binom{n}{2} \text{ Zeilen} \end{array}\right)}_{n \text{ Spalten}}$$

Mit $\mathcal{D}(x)$ bezeichnen wir die Matrix, die man von $\mathcal{D} = \mathcal{D}(D)$ erhält, wenn anstelle $D = (D_1,\ldots,D_n)$ der Vektor $x = (x_1,\ldots,x_n)$ geschrieben wird.

Es sei f die Intensität der Normalenbelastung. Die potentielle Energie der verformten Platte hat dann den Ausdruck

$$\pi(u) := V(u) - (f\,,u)_{0,G}\,.$$

Aus dem Minimalprinzip folgt (vgl. Duvaut - Lions [7], §4, und Landau - Lifshitz [19], §11-12), daß die Gleichgewichtsbedingung einer durch äußere Kräfte verformten Platte

$$(1.2) \qquad L_0 u = f$$

lautet, wobei

$$(1.3) \qquad L_0 := \operatorname{div} \mathcal{D}^T S \,\mathcal{D} \operatorname{grad}$$

ist. Hinzu treten gewisse Randbedingungen, die jetzt hergeleitet werden.

Man wähle die sesquilineare Form $B_0 := 2V$. Vorläufig seien $\partial G \in C^4$ und $s_{ij} \in C^2(\bar{G})$. Für $u \in C^4(G) \cap C^2(\bar{G})$ und $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ erhält man durch zweimalige partielle Integration

$$B_0(u , \phi)$$
$$= (L_0 u , \phi)_{0,G} - (\nu \mathcal{D}^T S \mathcal{D} \operatorname{grad} u , \phi)_{0,\partial G} + (\mathcal{D}^T(\nu) S \mathcal{D} \operatorname{grad} u , \operatorname{grad} \phi)_{0,\partial G} ,$$

wobei

$$(u , \phi)_{0,\partial G} := \int_{\partial G} u \bar{\phi} \, do$$

ist.

Unter Verwendung der Darstellung $\operatorname{grad} \phi = \nu^T D_\nu \phi + \nabla_0 \phi$ in einem Tangenten-Normalen-System kann man die Randintegrale so umformen (Leis [23], §1, und Polis [28] , §3), daß als Faktoren nur ϕ und $\partial\phi/\partial\nu$ auftreten

$$(1.4) \quad B_0(u , \phi) = (L_0 u , \phi)_{0,G} - (\delta_0 u , \gamma_0 \phi)_{0,\partial G} + (\delta_1 u , \gamma_1 \phi)_{0,\partial G} ,$$

wobei

$$(1.5) \quad \begin{cases} \delta_0 u := (\nu \mathcal{D}^T + \nabla_0^T \mathcal{D}^T(\nu) - (\nabla_0 \nu) \nu \mathcal{D}^T(\nu)) S \mathcal{D} \operatorname{grad} u , \\ \delta_1 u := \nu \mathcal{D}^T(\nu) S \mathcal{D} \operatorname{grad} u , \end{cases}$$

($\delta_0 u$ die Querkraft und $\delta_1 u$ das Biegemoment)

$$(1.6) \quad \begin{cases} \gamma_0 \phi := \phi , \\ \gamma_1 \phi := \mathcal{D}_\nu \phi \end{cases}$$

sind.

In dieser Arbeit werden wir die folgenden verschiedenen homogenen Randbedingungen untersuchen:

1) Die homogenen Dirichletschen Randbedingungen

$$(1.7) \quad \gamma_0 u = \gamma_1 u = 0 \quad \text{auf } \partial G ,$$

2) die homogenen Neumannschen (natürlichen) Randbedingungen

$$(1.8) \quad \delta_0 u = \delta_1 u = 0 \quad \text{auf } \partial G ,$$

3) die homogenen Randbedingungen für die frei drehbar gelagerte (gestützte) Platte

(1.9) $\quad \gamma_0 u = \delta_1 u = 0 \quad$ auf ∂G ,

4) gemischte Randbedingungen von Dirichlet-Neumannschen Typ, wobei auf einem Teil Γ_1 des Randes ∂G homogene Dirichletsche und auf dem komplementären Teil $\Gamma_2 := \partial G - \overline{\Gamma}_1$ homogene Neumannsche Randbedingungen gestellt sind, d. h.

$$(1.10) \qquad \begin{cases} \gamma_0 u = \gamma_1 u = 0 & \text{auf } \Gamma_1 , \\ \delta_0 u = \delta_1 u = 0 & \text{auf } \Gamma_2 . \end{cases}$$

Diese mathematischen Randbedingungen entsprechen verschiedenen Arten der Einspannung des Plattenrandes (vgl. z. B. Girkmann [15], §66): Bedingung (1.7) besagt, daß der Plattenrand fest eingespannt ist (die eingebaute Platte). Bedingung (1.8) bedeutet, daß der Plattenrand vollständig frei beweglich ist. Bedingung (1.9) stellt einen Plattenrand dar, der frei drehbar gelagert ist (die mit einem Scharnier gelagerte Platte).

Beispiel 1.1. Im Falle des Differentialoperators Δ^2 hat die oben erklärte sesquilineare Form in $\mathbb{R}^2$ die Gestalt

$$B_0(u, \phi) = \int_G \Big(D_1^2 u\, \overline{D_1^2 \phi} + D_2^2 u\, \overline{D_2^2 \phi} + \mu \left(D_1^2 u\, \overline{D_2^2 \phi} + D_2^2 u\, \overline{D_1^2 \phi}\right) + 2\,(1-\mu)\, D_1 D_2 u\, \overline{D_1 D_2 \phi}\Big)\, dx ,$$

wobei $-1 < \mu < 1$ ist, d. h. in (1.1) gelten für die Elemente der Matrix S : $s_{11} = s_{22} = 1$, $s_{12} = s_{21} = \mu$, $s_{33} = \frac{1}{2}(1-\mu)$ und $s_{13} = s_{31} = s_{23} = s_{32} = 0$.

Wegen $\operatorname{grad}^T \phi = (\nu_1 , \nu_2)\, D_\nu \phi + (\nu_2 , -\nu_1)\, D_t \phi$, wobei $\nu = (\nu_1 , \nu_2)$ die äußere Normale und D_t die Ableitung in Richtung der Tangente des Randes bezeichnen, lauten die homogenen natürlichen Randbedingungen

$$\begin{cases} \delta_0 u = D_\nu \Delta u + (1-\mu)\, D_t \left(\nu_1 \nu_2 (D_2^2 u - D_1^2 u) + (\nu_1^2 - \nu_2^2)\, D_1 D_2 u\right) = 0 \\ \delta_1 u = \Delta u + (1-\mu)\,(2 \nu_1 \nu_2 D_1 D_2 - \nu_2^2 D_1^2 u - \nu_1^2 D_2^2 u) = 0 . \end{cases}$$

1.2. Die Randwertaufgaben zu Gleichung (1.2) mit den oben erwähnten verschiedenen Randbedingungen werden jetzt je auf ein Problem in einem geeignet erklärten Sobolevraum zurückgeführt.

Wenn das Gebiet G beschränkt ist, bezeichnen wir die in Frage kommenden der homogenen Randbedingung (1.7), (1.8), (1.9) bzw. (1.10) entsprechenden Sobolevräume mit $V_1(G)$, $V_2(G)$, $V_3(G)$ bzw. mit $V_4(G,\Gamma_1)$ und geben

Definition 1.2. Wir erklären

$$V_1(G) := H_0^2(G) ,$$
$$V_2(G) := H^2(G) ,$$
$$V_3(G) := H^2(G) \cap H_0^1(G) .$$

Ferner wird $V_4(G,\Gamma_1) := H^2(G,\Gamma_1)$ (oder kurz $V_4(G)$) als Vervollständigung der Funktionenklasse

$$C_*^2(G,\Gamma_1) := \{ u \in C_*^2(G) \mid \operatorname{Trg} u \subset \bar{G} - \Gamma_1 \}$$

in bezug auf das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{2,G}$ definiert.

Diese Räume sind Hilberträume mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{2,G}$.

1.3. Falls das Gebiet nicht beschränkt ist, ergeben sich neue Erscheinungen. Außer Randwertaufgaben in unbeschränkten Gebieten wollen wir hier auch die Differentialgleichung $L_0 u = f$ mit einer gegebenen passend gewichtet quadratintegrierbaren Funktion f (ohne Randbedingungen) in ganz $\mathbb{R}^n$ behandeln. Dabei treten für die Lösung der Differentialgleichung anstelle der Randbedingungen doch eine Forderung an das asymptotische Verhalten im Unendlichen. Gleichfalls stellen wir für die Lösung der zu betrachtenden Randwertaufgaben in unbeschränkten Gebieten G außer den Randbedingungen auch eine asymptotische Forderung im Unendlichen. Nur durch eine solche Forderung wird die Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung bzw. der Randwertaufgaben erreicht.

Beispiel 1.3. Es seien $G = \mathbb{R}^n - \overline{K(0,1)}$ und

$$u_n(x) := \begin{cases} |x|^2 \ln |x| - \frac{1}{2} |x|^2 + \frac{1}{2} & \text{für } n = 2 \\ \ln |x| + \frac{1}{2} |x|^{-2} - \frac{1}{2} & \text{für } n = 4 \\ \frac{n-2}{4-n} |x|^{4-n} + |x|^{2-n} - (\frac{n-2}{4-n} + 1) & \text{für } n = 3,5,6,\ldots \end{cases}$$

Dann sind sowohl $v(x) = 0$ als auch $u_n(x)$ Lösungen der Dirichletschen Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } G, \\ u = D_\nu u = 0 & \text{auf } \partial G. \end{cases}$$

Damit wir das Verhalten der Lösung "im Unendlichen" sachgemäß charakterisieren können, sind wir auf gewisse gewichtete Sobolevräume angewiesen.

Wir führen zuerst folgende Gewichtsfunktionen ein (von der Dimension n des Raumes $\mathbb{R}^n$ abhängend)

$$p_{0,n}(x) := \begin{cases} 1/(1+|x|^2) & \text{für } n = 3,5,6,\dots \\ 1/((1+|x|^2)\ln(e+|x|^2)) & \text{für } n = 2,4 \end{cases},$$

$$p_{1,n}(x) := \begin{cases} 1/(1+|x|) & \text{für } n \geqq 3 \\ 1/((1+|x|)\ln(e+|x|)) & \text{für } n = 2 \end{cases},$$

$$p_{2,n}(x) := 1 \qquad \text{für } n \geqq 2 .$$

Wir definieren die gewichteten L^2-Räume

$$L^2_p(F) := \{u \mid p_{0,n} u \in L^2(F)\}$$

und

$$L^2_{1/p}(F) := \{u \mid (p_{0,n})^{-1} u \in L^2(F)\}$$

mit den Skalarprodukten

$$< u, v >_{0,p,F} := \int_F (p_{0,n})^2 u \bar{v} \, dx, \qquad u, v \in L^2_p(F)$$

bzw.

$$< u, v >_{0,1/p,F} := \int_F (p_{0,n})^{-2} u \bar{v} \, dx, \qquad u, v \in L^2_{1/p}(F).$$

Wir schreiben wie oben oft F anstelle G oder $\mathbb{R}^n$ in solchen Definitionen und Resultaten, die sowohl für G als auch für $\mathbb{R}^n$ bestehen.

Für die Funktionen $u \in C^t(F)$ $(t = 0,1,2)$ können wir den Ausdruck

$$|||u|||^2_{t,p,F} := \sum_{|\alpha| \leqq t} \int_F (p_{|\alpha|,n})^2 |D^\alpha u|^2 \, dx$$

bilden. Es sei

$$C^t_{p_*}(F) := \{u \in C^t(F) \mid |||u|||_{t,p,F} < \infty\}.$$

Für $u, v \in C^t_{p_*}(G)$ erklärt man das Skalarprodukt

$$< u, v >_{t,p,F} := \sum_{|\alpha| \leqq t} \int_F (p_{|\alpha|,n})^2 D^\alpha u \overline{D^\alpha v} \, dx .$$

Für die Behandlung der Randwertaufgaben 1)-4) zur Differentialgleichung $L_0 u = f$ in unbeschränkten Gebieten bzw. dieser Differentialgleichung in $\mathbb{R}^n$ führen wir gewichtete Sobolevräume $V_{1p}(G)$, $V_{2p}(G)$, $V_{3p}(G)$, $V_{4p}(G,\Gamma_1)$ bzw. $V_{0p}(\mathbb{R}^n)$ ein:

Definition 1.4. <u>Der Raum</u> $H^t_p(F)$, $t = 0,1,2$, <u>wird als Vervollständigung der Funktionenklasse</u> $C^t_{p_*}(F)$ <u>in bezug auf das Skalarprodukt</u> $< \cdot,\cdot >_{t,p,F}$ <u>definiert. Die Abschließung der Menge</u> $C^t_0(G)$ <u>im Raum</u> $H^t_p(G)$ <u>wird mit</u> $H^t_{p0}(G)$ <u>bezeichnet. Wir erklären</u>

$$V_{0p}(\mathbb{R}^n) := H^2_p(\mathbb{R}^n) ,$$

$$V_{1p}(G) := H^2_{p0}(G) ,$$

$$V_{2p}(G) := H^2_p(G) ,$$

$$V_{3p}(G) := H^2_p(G) \cap H^1_{p0}(G) .$$

<u>Ferner wird</u> $V_{4p}(G,\Gamma_1) := H^2_p(G,\Gamma_1)$ <u>(oder kurz</u> $V_{4p}(G)$ <u>) als Vervollständigung der Funktionenklasse</u>

$$C^2_{p_*}(G,\Gamma_1) := \{ u \in C^2_{p_*}(G) \mid \operatorname{Trg} u \subset \bar{G} - \Gamma_1 \}$$

<u>in bezug auf das Skalarprodukt</u> $< \cdot,\cdot >_{2,p,G}$ <u>definiert.</u>

Die so definierten Räume V_{jp} sind Hilberträume mit dem Skalarprodukt $< \cdot,\cdot >_{2,p,\mathbb{R}^n}$ bzw. $< \cdot,\cdot >_{2,p,G}$.

Einige Eigenschaften der oben erklärten gewichteten L^2-Räume und Sobolevräume werden in den zwei folgenden Hilfssätzen zusammengefaßt:

Lemma 1.5. A. <u>Es gilt</u> $L^2_{1/p}(F) \subset L^2(F) \subset L^2_p(F)$.

B. <u>Die Funktionenmenge</u> $C^\infty_0(F)$ <u>liegt dicht in</u> $L^2_p(F)$.

Beweis. A. Die Behauptung folgt sofort aus der Tatsache, daß $p_{0,n}(x) \leqq 1$ für alle $x \in F$ und $n \geqq 2$ ist.

B. Für $u \in L^2_p(F)$ ist $v := p_{0,n} u \in L^2(F)$. Da $C^\infty_0(F)$ dicht in $L^2(F)$ liegt, gibt es eine Folge $\{v_j\} \subset C^\infty_0(F)$ mit

$$(1.11) \qquad \|v_j - v\|_{0,F} \to 0 \qquad \text{für } j \to \infty .$$

Wegen $p_{0,n}(x) > 0$ für alle $x \in F$ und wegen $p_{0,n} \in C^{\bullet\bullet}(F)$ ist

$u_j := v_j/p_{0,n} \in C_0^\infty(F)$. Dann hat man nach (1.11)

$$\begin{aligned} |||u_j - u|||_{0,p,F} &= \|p_{0,n}\,(u_j - u)\|_{0,F} \\ &= \|v_j - v\|_{0,F} \to 0 \qquad \text{für } j \to \infty . \end{aligned}$$

Somit liegt $C_0^\infty(F)$ dicht in $L_p^2(F)$. □

Lemma 1.6. A. <u>Es gilt</u> $H_0^2(G) \subset H_{p0}^2(G)$ <u>und</u> $H^2(F) \subset H_p^2(F)$.

B. <u>Der Raum</u> $H_p^2(F)$ <u>läßt sich mit dem Raum</u>

$$\mathcal{H}_p^2(F) := \{u \in H_{loc}^2(F) \mid p_{|\alpha|,n}\, D^\alpha u \in L^2(F)\ ,\ |\alpha| \leqq 2\}$$

<u>identifizieren (versehen mit dem Skalarprodukt</u> $<\cdot,\cdot>_{2,p,F}$).

Beweis. A. Die Behauptung folgt aus $p_{|\alpha|,n}(x) \leqq 1$.

B. (Vgl. Witsch [48], S.34-35.) Weil $H_p^2(F) \subset \mathcal{H}_p^2(F)$ gilt, soll nur gezeigt werden, daß $C_{p_*}^2(F)$ bezüglich der $|||\cdot|||_{2,p,F}$ -Norm dicht in $\mathcal{H}_p^2(F)$ liegt.

Für $u \in \mathcal{H}_p^2(F)$, dessen Träger, Trg u , kompakt ist, gilt

$$\|u\|_{2,F} = \|u\|_{2,F\cap \mathrm{Trg}\,u} \leqq C\, |||u|||_{2,p,F} < \infty .$$

Somit gilt $u \in H^2(F)$, und nach A ist $u \in H_p^2(F)$. Gemäß der Definition des Raumes $H_p^2(F)$ kann jedes Element $u \in H_p^2(F)$ im Sinne der $|||\cdot|||_{2,p,F}$ -Norm durch Elemente aus $C_{p_*}^2(F)$ approximiert werden.

Folglich genügt es zu zeigen, daß die Funktionen $u \in \mathcal{H}_p^2(F)$ mit kompaktem Träger dicht in $\mathcal{H}_p^2(F)$ liegen.

Es seien u ein beliebiges Element aus $\mathcal{H}_p^2(F)$ und $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ mit $\phi(r) = 1$ für $r \leqq 1$, $0 \leqq \phi(r) \leqq 1$ für $1 < r < 2$ und $\phi(r) = 0$ für $r \geqq 2$. Für genügend große $j \in \mathbb{N}$ ($j > e^e$) erklären wir je eine Funktion $\phi_{n,j} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Raumdimension

$$\phi_{n,j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqq e^e \text{ und } n \geqq 2 \\ \phi(\ln|x| / \ln j) & \text{für } |x| > e^e \text{ und } n = 3,5,6,\dots \\ \phi(\ln\ln|x| / \ln\ln j) & \text{für } |x| > e^e \text{ und } n = 2,4 \end{cases} .$$

Es gibt eine positive Konstante C derart, daß

$$|D^\alpha \phi_{n,j}(x)| \leqq C\, p_{2-|\alpha|,n}(x) \qquad (\,|\alpha| = 1,2\,) \tag{1.12}$$

gilt.

Für $u \in \mathcal{H}_p^2(F)$ gilt $u_j := \phi_{n,j} u \in \mathcal{H}_p^2(F)$ ($j \in \mathbb{N}$, $j > e^e$, vgl. Agmon [1], Theorem 1.13 (die Leibnizsche Regel)), und u_j besitzt einen kompakten Träger. Ferner gilt nach (1.12) mit einer positiven Konstanten C

$$
\begin{aligned}
(1.13)\qquad |||u-u_j|||_{2,p,F} &= |||u-u_j|||_{2,p,B(j)} \\
&\leqq C\,\Big(|||u|||_{2,p,B(j)} + \|(p_{1,n}\,\nabla\phi_{n,j})\,u\|_{0,B(j)} \\
&\quad + \sum_{\substack{1\leqq|\alpha|\leqq 2\\ |\beta|=2}} \|D^{\alpha}\phi_{n,j}\,D^{\beta-\alpha}u\|_{0,B(j)}\Big) \\
&\leqq C\,|||u|||_{2,p,B(j)}\,.
\end{aligned}
$$

Wegen $u \in H^2_p(F)$ konvergiert die rechte Seite der Abschätzung (1.13) gegen Null für $j \to \infty$, und daher folgt die Behauptung. □

1.4. Jetzt stellen wir die Probleme zur Gleichung $L_0 u = f$. Es gelte

Voraussetzung 1.7. Die Elemente s_{ij} der Matrix S sind reellwertige, beschränkte und meßbare Funktionen auf $\bar{G}$, und die Matrix S ist symmetrisch und gleichmäßig positiv definit, d. h. $s_{ij} = s_{ji}$ und es gibt eine positive Konstante μ_1 derart, daß

$$(1.14)\qquad \xi\,S(x)\,\xi^T \geqq \mu_1\,|\xi|^2$$

für alle $x \in G$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^{n+\binom{n}{2}}$ gilt.

Die folgenden "variationellen" Probleme 1-4 entsprechen den "klassischen" Randwertproblemen mit homogenen Randbedingungen 1)-4).

Problem 1. (Das Dirichletsche Problem.) A. Seien ein beschränktes Gebiet G und $f \in L^2(G)$ gegeben. Gesucht wird $u \in V_1(G)$ derart, daß

$$(1.15)\qquad B_0(u\,,v) = (f\,,v)_{0,G} \quad \text{für alle } v \in V_1(G)$$

gilt.

B. Seien ein solches unbeschränktes Gebiet G, daß $\mathbb{R}^n - \bar{G}$ nicht leer ist, und $f \in L^2_{1/p}(G)$ gegeben. Gesucht wird $u \in V_{1p}(G)$ derart, daß (1.15) für alle $v \in V_{1p}(G)$ gilt.

Problem 2. (Das Neumannsche Problem.) A. Seien ein beschränktes Gebiet G mit der Segmenteigenschaft sowie $f \in L^2(G)$ gegeben.

Gesucht wird $u \in V_2(G)$ derart, daß (1.15) für alle $v \in V_2(G)$ gilt.

B. Seien ein Außengebiet G mit der Segmenteigenschaft sowie $f \in L^2_{1/p}(G)$ gegeben. Gesucht wird $u \in V_{2p}(G)$ derart, daß (1.15) für alle $v \in V_{2p}(G)$ gilt.

Problem 3. (Das Randwertproblem für die frei drehbar gelagerte Platte.) A. Seien ein beschränktes Gebiet G mit der Segmenteigenschaft sowie $f \in L^2(G)$ gegeben. Gesucht wird $u \in V_3(G)$ derart, daß (1.15) für alle $v \in V_3(G)$ gilt.

B. Seien ein Außengebiet G mit der Segmenteigenschaft sowie $f \in L^2_{1/p}(G)$ gegeben. Gesucht wird $u \in V_{3p}(G)$ derart, daß (1.15) für alle $v \in V_{3p}(G)$ gilt.

Problem 4. (Das gemischte Problem.) Sei G ein Gebiet, das Segmenteigenschaft hat und dessen Rand ∂G sich schreiben läßt als $\partial G = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, wobei Γ_1 und Γ_2 relativ offen und von positivem $(n-1)$-dimensionalem Maß sind.

A. Das Gebiet G sei beschränkt. Sei $f \in L^2(G)$ gegeben. Gesucht wird $u \in V_4(G,\Gamma_1)$ derart, daß (1.15) für alle $v \in V_4(G,\Gamma_1)$ gilt.

B. Das Gebiet G sei ein Außengebiet. Sei $f \in L^2_{1/p}(G)$ gegeben. Gesucht wird $u \in V_{4p}(G,\Gamma_1)$ derart, daß (1.15) für alle $v \in V_{4p}(G,\Gamma_1)$ gilt.

Schließlich sollen noch die Lösungen der Differentialgleichung $L_0 u = f$ in ganz $\mathbb{R}^n$ gesucht werden:

Problem 5. Sei $f \in L^2_{1/p}(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Gesucht wird $u \in V_{0p}(\mathbb{R}^n)$ derart, daß

$$(1.16) \qquad B_0(u\,,v) = (f\,,v)_{0,\mathbb{R}^n} \quad \text{für alle } v \in V_{0p}(\mathbb{R}^n)$$

gilt.

Bemerkung 1.8. A. Teils die Eigenschaft "$u \in \ldots$", teils die Forderung des Bestehens der Gleichung (1.15) "für alle $v \in \ldots$" verallgemeinern die Randbedingungen.

B. In einer klassischen Theorie für $L_0 u = f$ mit inhomogenen Randdaten stellt man eine Bedingung der Form

$$u(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(|x|^{2-n/2}\,(\ln |x|)^{-1/2-\varepsilon}) & \text{für } n = 3,5,6,\ldots \\ \mathcal{O}(|x|^{2-n/2}\,(\ln |x|)^{1/2-\varepsilon}) & \text{für } n = 2,4 \end{cases}$$

mit $\varepsilon > 0$ an das Verhalten der Lösung im Unendlichen. Durch Einführung gewichteter Räume wird diese Bedingung ersetzt.

2. Über die Lösbarkeit der Randwertaufgaben in beschränkten Gebieten

2.1. Wir werden zeigen, daß die Probleme 1.A, 3.A und 4.A eindeutige Lösungen haben und daß Problem 2.A eine Lösung hat, die bis auf ein beliebiges additives Element aus P_1 eindeutig bestimmt ist. Hier bezeichnen wir mit P_t den linearen Raum der Polynome vom Grade $\leqq t$ $(\in \mathbb{N}_0)$.

Gemäß Voraussetzung 1.7 und gemäß der Definition der Norm $\|\cdot\|_{2,G}$ gibt es zwei Konstanten $\mu_1 > 0$ und $\mu_2 > 0$ derart, daß die Ungleichungen

$$(2.1) \qquad |B_0(u,v)| \leqq \mu_2 \, |u|_{2,G} \, |v|_{2,G} \leqq \mu_2 \, \|u\|_{2,G} \, \|v\|_{2,G}$$

und

$$(2.2) \qquad |B_0(u,u)| \geqq \mu_1 \left(\int_G \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i^2 u|^2 + 4 \sum_{i \neq j} |D_i D_j u|^2 \right) \right) \geqq \mu_1 \, |u|_{2,G}^2$$

für alle $u, v \in V_j(G)$ $(j = 1,\dots,4)$ gelten.

Für $V_1(G)$ folgt mittels (2.2) aus der Poincaréschen Ungleichung (Agmon [1], S.73), daß B_0 in $V_1(G)$ streng koerzitiv ist: Es gibt eine positive Konstante C_1 so, daß

$$(2.3) \qquad |B_0(u,u)| \geqq C_1 \, \|u\|_{2,G}^2$$

für alle $u \in V_1(G)$ gilt.

Die eindeutige Lösbarkeit des Problems 1.A folgt mittels (2.1) und (2.3) aus dem Satz von Lax und Milgram (man siehe etwa Leis [20], Lemma 6.4.4).

2.2. Falls $j = 2, 3$ oder 4 ist, kann man beweisen, daß B_0 in $V_j(G)$ koerzitiv ist: Es gibt zwei von u unabhängige Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ derart, daß

$$(2.4) \qquad |B_0(u, u)| \geqq c_1 \|u\|^2_{2,G} - c_2 \|u\|^2_{0,G}$$

für alle $u \in V_j(G)$ gilt.

Als Antithese nehmen wir an: Es gibt eine Folge $\{u_k\} \subset V_j(G)$ mit den Eigenschaften

$$(2.5) \qquad |B_0(u_k, u_k)| + \|u_k\|^2_{0,G} < \frac{1}{k}$$

und

$$(2.6) \qquad \|u_k\|_{2,G} = 1 .$$

Wenn G die Segmenteigenschaft hat, gibt es wegen (2.6) und nach dem Rellichschen Auswahlsatz (Agmon [1], Theorem 3.8) eine Teilfolge $\{u'_k\} \subset \{u_k\}$ derart, daß

$$(2.7) \qquad \|u'_k - u'_l\|_{1,G} \to 0 \quad \text{für } k, l \to \infty$$

gilt. Wegen (2.2) folgt aus (2.5) und (2.7), daß $\{u'_k\}$ eine Cauchyfolge in $V_j(G)$ ist. Nach (2.5) ist die Grenzelement u der Folge $\{u'_k\} \subset V_j(G)$ gleich 0. Dies steht im Widerspruch zu (2.6).

Aus der Koerzitivität (2.4) und aus (2.1) folgt (vgl. Leis [23], §5), daß für die Lösbarkeit der Randwertprobleme 2.A-4.A eine Fredholmsche Alternative gilt.

Wegen (2.2) ist

$$N_j(L_0) := \{ u \in V_j(G) \mid B_0(u, v) = 0 \text{ für alle } v \in V_j(G) \}$$

in $P_1 \cap V_j(G)$ ($j = 2,3,4$) enthalten. Weil $B_0(u, v) = 0$ für alle $u \in P_1$ und alle $v \in V_j(G)$ gilt, ist

$$N_j(L_0) = P_1 \cap V_j(G) .$$

Wenn $u \in P_1 \cap V_3(G)$ bzw. $u \in P_1 \cap V_4(G)$ ist, gilt $u\big|_{\partial G} = 0$ bzw. $u\big|_{\Gamma_1} = D_i u\big|_{\Gamma_1} = 0$ ($i = 1,\dots,n$) nach Agmon [1], Lemma 9.1. Folglich ist $u = 0$ in G, d.h. $N_3(L_0) = N_4(L_0) = \{0\}$.

Wir fassen die Resultate zusammen in

Satz 2.1. <u>Voraussetzung</u> 1.7 <u>sei erfüllt</u>. <u>Für</u> $f \in L^2(G)$ <u>haben die Probleme</u> 1.A, 3.A, 4.A <u>je eine eindeutige Lösung.</u>

<u>Für</u> $f \in L^2(G)$ <u>besitzt Problem</u> 2.A <u>genau dann eine Lösung, wenn</u>

die Bedingung

$$(f\,,v)_{0,G} \;=\; 0 \qquad \text{für alle} \quad v \in P_1$$

erfüllt ist. Die Lösung ist dann bis auf ein beliebiges additives Element aus P_1 eindeutig bestimmt.

3. Über die Lösbarkeit der Randwertaufgaben in unbeschränkten Gebieten

3.1. Nun sollen die in Abschnitt 1.4 gestellten Probleme 1.B-4.B und 5 untersucht werden. Wir zeigen, daß die Probleme 1.B, 3.B und 4.B eindeutige Lösungen haben. Die Probleme 2.B und 5 haben eindeutige Lösungen, wenn die Raumdimension genügend groß ($n \geqq 5$) ist (Satz 3.8 und Satz 3.15). In den Fällen $n = 2, 3, 4$ treten Eigenlösungen (Beispiel 3.5) auf, dann wird eine Fredholmsche Alternative gelten (Satz 3.15).

3.2. Unser Ziel ist zuerst, die Voraussetzungen des Satzes von Lax und Milgram in dem zu Problem 1.B-4.B bzw. 5 gehörenden Sobolevraum V_{jp} ($j = 0,\dots,4$) nachzuweisen.

Wegen Voraussetzung 1.7 und wegen der Definition der Norm $|||\cdot|||_{2,p,F}$ ist die Beschränktheit von B_0 klar: Es gilt

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} |B_0(u\,,v)| &\leqq \mu_2\,|u|_{2,F}\,|v|_{2,F} \\ &\leqq \mu_2\,|||u|||_{2,p,F}\,|||v|||_{2,p,F} \end{aligned}$$

für alle $u\,,v \in V_{jp}$ ($j = 0,\dots,4$), wobei $\mu_2 > 0$ ist.

Weil nach Voraussetzung 1.7 die Matrix S gleichmäßig positiv definit ist, gilt

$$(3.2)\qquad |B_0(u\,,u)| \;\geqq\; \mu_1\,|u|^2_{2,F}$$

für alle $u \in V_{jp}$ ($j = 0,\dots,4$). Um die strenge Koerzitivität von B_0 auf V_{jp} ($j = 0,\dots,4$) zu verifizieren müssen wir noch ergründen, unter welchen Voraussetzungen (über die Dimension n und über das Gebiet G) eine positive Konstante C derart existiert, daß

$$C\,|||u|||_{2,p,F} \;\leqq\; |u|_{2,F}$$

für alle $u \in V_{jp}$ $(j = 0,\dots,4)$ gilt.

Zuerst beweisen wir für V_{1p}

Satz 3.1. (Gewichtete Poincarésche Ungleichung.) Es seien $n \geqq 2$ und G ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ derart, daß $\mathbb{R}^n - \bar{G}$ nicht leer ist. Dann gibt es eine solche Konstante $C > 0$, daß

$$(3.3) \qquad C\,|||u|||_{2,p,G} \leqq |u|_{2,G}$$

für alle $u \in V_{1p}(G) = H^2_{p0}(G)$ gilt. Die Konstante C hängt nur von der Raumdimension n und von dem Gebiet G ab.

Bemerkung 3.2. Die gewöhnliche Poincarésche Ungleichung gilt nur für spezielle unbeschränkte Gebiete (vgl. z. B. Agmon [1], S.75, und Clark [5], §2). In der Literatur gibt es Beispiele von verschiedenen Möglichkeiten eine Ungleichung vom Typ

$$\gamma_k \left\| \frac{u(\cdot)}{|\cdot|^k} \right\|_{0,G} \leqq |u|_{k,G}$$

mit $\gamma_k > 0$ für alle $u \in C^k_0(G)$ zu beweisen. Für $k = 1$ siehe man Courant - Hilbert [6], S.388, Weidmann [43], §10.6, und Witsch [48], §7. Wegen anderer Betrachtungen verweisen wir auf den Übersichtsartikel [2], in dem speziell über die Resultate sowjetischer Autoren berichtet wird, und auch auf Kudrjavcev [18] und Sedov [33].

Als Ausgangspunkt des vorliegenden Beweises werden wir die Betrachtungen von Witsch [48], §7, verwenden.

Beweis von Satz 3.1. A. Ohne Einschränkung kann man $K(0,R_0) \subset \mathbb{R}^n - \bar{G}$ mit $R_0 \geqq e$ annehmen. Wir erklären in G Gewichtsfunktionen $p'_{j,n}$ $(j = 0,1,2)$ folgendermaßen

$$p'_{0,n}(x) := \begin{cases} 1/|x|^2 & \text{für } n = 3,5,6,\dots \\ 1/(|x|^2 \ln|x|) & \text{für } n = 2,4 \end{cases},$$

$$p'_{1,n}(x) := \begin{cases} 1/|x| & \text{für } n \geqq 3 \\ 1/(|x| \ln|x|) & \text{für } n = 2 \end{cases},$$

$$p'_{2,n}(x) := 1 \qquad \text{für } n \geqq 2 .$$

B. Jetzt werden wir für $u \in C^1_0(G)$ die Ungleichung

$$(3.4) \qquad \|p'_{1,n}u\|_{0,G} \leqq C_1 |u|_{1,G}$$

mit einer Konstanten $C_1 > 0$ verifizieren.

Für $u \in C_0^1(G)$ erklären wir einen positiven Ausdruck

$$I_{\sigma(n)}(u) := \|\nabla u + \sigma(n)\, p'_{1,n}\, \hat{x}\, u\|^2_{0,G} ,$$

wobei $\sigma(n) = -1$ für $n = 2$ und $\sigma(n) = 1$ für $n \geqq 3$ ist. Durch partielle Integration erhalten wir

$$(3.5) \quad I_{\sigma(n)}(u) = \|\nabla u\|^2_{0,G} - \sigma(n) \int_G |u|^2 \operatorname{div}(p'_{1,n}\hat{x})\, dx + \|p'_{1,n} u\|^2_{0,G} \leqq |u|^2_{1,G} .$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und (3.5) ergibt sich

$$\|p'_{1,n} u\|^2_{0,G} = \|\nabla u + \sigma(n)\, p'_{1,n}\, \hat{x}\, u - \nabla u\|^2_{0,G} \leqq 4\, |u|^2_{1,G}$$

und daher (3.4) mit $C_1 = 2$.

C. Durch Anwendung von (3.4) auf die Funktionen $D_i u \in C_0^1(G)$ ($i = 1,\ldots,n$) erhalten wir

$$(3.6) \qquad \|p'_{1,n} \nabla u\|_{0,G} \leqq C_2\, |u|_{2,G}$$

für alle $u \in C_0^2(G)$, wobei $C_2 = 2\,C_1$ ist.

Folglich brauchen wir noch zu zeigen, daß eine Konstante $C_3 > 0$ derart existiert, daß

$$(3.7) \qquad \|p'_{0,n} u\|_{0,G} \leqq C_3\, \|p'_{1,n} \nabla u\|_{0,G}$$

für alle $u \in C_0^2(G)$ gilt.

Wir erklären für $u \in C_0^2(G)$ einen positiven Ausdruck

$$I_n(u) := \begin{cases} \|p'_{1,n}\, \nabla u - p'_{0,n}\, \hat{x}\, u\|^2_{0,G} & \text{für } n = 2,4 \\ \|p'_{1,n}\, \nabla u + (n-4)\, p'_{0,n}\, \hat{x}\, u\|^2_{0,G} & \text{für } n = 3,5,6,\ldots \end{cases}$$

und erhalten mit den gleichen Überlegungen wie in B Behauptung (3.7) mit $C_3 = 2$.

D. Die Gewichtsfunktionen $p_{j,n}$ und $p'_{j,n}$ sind in G einander äquivalent: Es gilt nämlich

$$(3.8) \qquad p_{j,n}(x) \leqq p'_{j,n}(x) \leqq C_4\, p_{j,n}(x)$$

mit $C_4 = 8$. (Die einfachen Werte der Konstanten C_1 , C_3 , C_4 sind hier Folgerungen aus der Annahme $K(0,R_0) \subset \mathbb{R}^n - \bar{G}$ mit $R_0 \geqq e$; ohne diese Annahme würden die Konstanten von n und G abhängen; dann könnte man den Beweis auch nach Vorbild derjenigen von Satz 3.3 gestalten.) Aus (3.6) und (3.7) folgt, daß (3.3) für alle $u \in C_0^2(G)$ und also auch für alle $u \in V_{1p}(G)$ gilt. □

Durch Anwendung von geeigneten Glättungsfunktionen folgt aus Satz 3.1

S a t z 3.3. Sei $n \geqq 2$ und F der ganze Raum $\mathbb{R}^n$ oder ein Außengebiet G mit der Segmenteigenschaft. Im Falle $F = \mathbb{R}^n$ sei $R_0 = e$ und sonst $R_0 \geqq e$ so groß, daß $\mathbb{R}^n - \overline{K(R_0)} \subset G$. Dann existiert eine von u unabhängige Konstante $C > 0$ derart, daß

$$(3.9) \qquad |||u|||_{2,p,F} \leqq C\left(|u|_{2,F} + \|u\|_{1,K(2R_0,3R_0)}\right)$$

für alle $u \in H_p^2(F)$ gilt.

Beweis. Wir erklären eine Glättungsfunktion $\phi \in C_0^\infty(K(0,3R_0))$ derart, daß

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqq 2R_0 \\ 0 & \text{für } 2R_0 \leqq |x| \leqq 3R_0 \end{cases}$$

und $0 \leqq \phi(x) \leqq 1$ für $2R_0 < |x| < 3R_0$ ist.

Wegen $(1-\phi)u \in H_{p0}^2(B(R_0))$ erhalten wir nach Satz 3.1

$$(3.10) \qquad \begin{aligned} |||(1-\phi)u|||_{2,p,F} &= |||(1-\phi)u|||_{2,p,B(R_0)} \\ &\leqq C\left(|u|_{2,B(R_0)} + \|u\|_{1,K(2R_0,3R_0)}\right), \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ von u unabhängig ist.

Wir werden jetzt zeigen, daß mit einer von u unabhängigen Konstanten $C > 0$

$$(3.11) \qquad \|u\|_{2,F(3R_0)} \leqq C\left(|u|_{2,F(3R_0)} + \|u\|_{1,K(2R_0,3R_0)}\right)$$

für alle $u \in H_p^2(F)$ gilt, wobei $F(R) := F \cap K(R)$ ist.

Als Antithese nehmen wir an, daß es keine positive Konstante C mit Eigenschaft (3.11) gibt. Dann kann man eine Folge $\{u_j\} \subset H_p^2(F)$ mit

$$(3.12) \qquad \|u_j\|_{2,F(3R_0)} = 1$$

und

$$(3.13) \qquad |u_j|_{2,F(3R_0)} + \|u_j\|_{1,K(2R_0,3R_0)} < \frac{1}{j}$$

finden. Wegen (3.12) gibt es eine Teilfolge $\{u'_j\} \subset \{u_j\}$, die in $H^1(F(3R_0))$ konvergiert (Agmon [1], Theorem 3.8). Nach (3.13) konvergiert $\{u'_j\}$ in $H^2(F(3R_0))$, und das Grenzelement muß gleich 0 sein. Dies steht im Widerspruch zu (3.12).

Weil $p_{j,n}(x) \leqq 1$ ist, gilt nach (3.11) für alle $u \in H^2_p(F)$

$$|||\phi u|||_{2,p,F} \leqq C\,||u||_{2,F(3R_0)}$$
$$\leqq C\,(|u|_{2,F(3R_0)} + ||u||_{1,K(2R_0,3R_0)}) .$$

Mittels $u = \phi u + (1-\phi)u$ folgt aus (3.10) die Behauptung. □

Folgerung 3.4. <u>Sei</u> $n \geqq 2$ <u>und</u> G <u>wie in Problem</u> 4.B <u>bzw.</u> 3.B. <u>Dann gilt mit einer von</u> u <u>unabhängigen Konstanten</u> $C > 0$ <u>die Abschätzung</u>

$$C\,|||u|||_{2,p,G} \leqq |u|_{2,G}$$

<u>für alle</u> $u \in H^2_p(G, \Gamma_1)$ <u>bzw.</u> $u \in H^2_p(G) \cap H^1_{p0}(G)$.

Beweis. Für $u \in H^2_p(G, \Gamma_1)$ ist $u|_{G(3R_0)} \in H^2(G(3R_0), \Gamma_1)$ (R_0 wie oben) und für $u \in H^2_p(G) \cap H^1_{p0}(G)$ entsprechend $u|_{G(3R_0)} \in H^2(G(3R_0)) \cap H^1(G(3R_0), \partial G)$. Mit den gleichen Überlegungen wie im Beweis von (3.11) erhält man (vgl. Fichera [11], §13) für alle $u \in H^2_p(G, \Gamma_1)$ bzw. für alle $u \in H^2_p(G) \cap H^1_{p0}(G)$

$$||u||_{1,K(2R_0,3R_0)} \leqq ||u||_{1,G(3R_0)} \leqq C\,|u|_{2,G(3R_0)} , \tag{3.14}$$

wobei $C > 0$ von u unabhängig ist. Wegen (3.9) folgt aus (3.14) die Behauptung. □

<u>3.3.</u> Im Falle des Neumannschen Problems 2.B und im Falle des Problems 5 können wir die strenge Koerzitivität von B_0 nicht für alle Dimensionen n verifizieren, sondern nur für $n \geqq 5$. Aus der strengen Koerzitivität würde die Eindeutigkeit der Lösung folgen, was im Widerspruch mit dem folgenden Beispiel für $n = 2,3,4$ steht.

Beispiel 3.5. Weil $B_0(u, v) = 0$ für alle $u \in \mathcal{P}_1$ und alle $v \in H^2_p(F)$ gilt und weil $\mathcal{P}_1 \subset H^2_p(F)$ ($F = G \subset \mathbb{R}^2$ oder $F = \mathbb{R}^2$) ist, ist jedes $u \in \mathcal{P}_1$ eine Lösung der Probleme 2.B und 5 in $\mathbb{R}^2$ mit $f = 0$. Entsprechend, weil $\mathcal{P}_0 \subset H^2_p(F)$ für $3 \leqq n \leqq 4$ ist, ist jedes $u \in \mathcal{P}_0$ eine Lösung der Probleme 2.B und 5 in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$ mit $f = 0$.

Einer Anregung von Witsch folgend zeigen wir

Lemma 3.6. Es seien $n \geqq 2t+1$, $t \in \mathbb{N}$ und $R > 0$ fest. Dann gibt es eine von n, t und R abhängige Konstante $C > 0$ derart, daß die Ungleichung

$$\|u\|_{t,K(R,2R)} \leqq C\, |u|_{t,\Omega(R)} \tag{3.15}$$

für alle $u \in C_0^t(\mathbb{R}^n)$ gilt, wobei $\Omega(R) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > R\}$ ist.

Beweis. Wir benutzen anstelle $x = (x_1,\ldots,x_n)$ Polarkoordinaten (r,ω), wobei $\omega \in S^{n-1}$ (S^{n-1} die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel) und erhalten für $u \in C_0^t(\mathbb{R}^n)$ die Identität

$$u(r,\omega) = \frac{-1}{(t-1)!} \int_r^\infty (r-\rho)^{t-1} \frac{d^t}{d\rho^t} u(\rho,\omega)\, d\rho . \tag{3.16}$$

Durch die Ungleichung von Cauchy und Schwarz ergibt sich mittels (3.16) für $r \geqq R$

$$\begin{aligned} |u(r,\omega)|^2 &\leqq \frac{1}{((t-1)!)^2} \int_r^\infty (r-\rho)^{2t-2} \rho^{1-n}\, d\rho \int_r^\infty \rho^{n-1} \left|\frac{d^t u}{d\rho^t}\right|^2 d\rho \\ &\leqq C \sum_{|\alpha|=t} \int_R^\infty \rho^{n-1} |D_x^\alpha u|^2\, d\rho , \end{aligned} \tag{3.17}$$

wobei $C < \infty$ für $n \geqq 2t+1$ ist.

Mittels (3.17) erhalten wir mit $C' = C'(n,t,R) > 0$

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{0,K(R,2R)} &= \int_R^{2R} \int_{S^{n-1}} r^{n-1} |u(r,\omega)|^2\, dr\, d\omega \\ &\leqq C' \sum_{|\alpha|=t} \int_R^\infty \int_{S^{n-1}} \rho^{n-1} |D_x^\alpha u(\rho,\omega)|^2\, d\rho\, d\omega \\ &= C' |u|^2_{t,\Omega(R)} , \end{aligned}$$

woraus unsere Behauptung folgt. □

Aus Satz 3.3 und Lemma 3.6 ergibt sich

Folgerung 3.7. Sei $n \geqq 5$ und G wie in Problem 2.B. Dann gibt es eine von u unabhängige Konstante $C > 0$ derart, daß

$$C\, |||u|||_{2,p,F} \leqq |u|_{2,F}$$

für alle $u \in H_p^2(F)$ gilt (mit $F = G$ oder $F = \mathbb{R}^n$).

<u>3.4.</u> Jetzt können wir die eindeutige Lösbarkeit der Probleme 1.B-4.B und 5 verifizieren.

Satz 3.8. <u>Voraussetzung</u> 1.7 <u>sei erfüllt. Für</u> $f \in L^2_{1/p}(G)$ <u>haben die Probleme</u> 1.B, 3.B, 4.B <u>je eine eindeutige Lösung</u>.

<u>Sei ferner die Raumdimension</u> $n \geqq 5$. <u>Dann hat Problem</u> 2.B <u>für</u> $f \in L^2_{1/p}(G)$ <u>bzw. Problem</u> 5 <u>für</u> $f \in L^2_{1/p}(\mathbb{R}^n)$ <u>eine eindeutige Lösung.</u>

Beweis. Nach (3.1) ist B_0 in $V_{jp}(G)$ ($j = 1,\ldots,4$) bzw. in $V_{0p}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Einerseits wegen (3.2) und andererseits wegen Satz 3.1, Folgerung 3.4 bzw. Folgerung 3.7 ist B_0 in $V_{jp}(G)$ ($j = 1,\ldots,4$) bzw. in $V_{0p}(\mathbb{R}^n)$ streng koerzitiv.

Wegen

$$\begin{aligned} |(f\,,v)_{0,F}| &= |((p_{0,n})^{-1} f\,,\, p_{0,n} v)_{0,F}| \\ &\leqq |||f|||_{0,1/p,F}\; |||v|||_{2,p,F} \end{aligned}$$

ist das Funktional

$$\ell v \;:=\; (f\,,v)_{0,F}$$

mit $f \in L^2_{1/p}(F)$ in $V_{jp}(G)$ ($j = 1,\ldots,4$) bzw. in $V_{0p}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Daher folgt die Behauptung aus dem Satz von Lax und Milgram. □

<u>3.5.</u> Ziel dieses Abschnitts ist der Nachweis einer Fredholmschen Alternative für Problem 2.B und Problem 5.

Wir brauchen einige Stabilitätsergebnisse für Fredholmoperatoren und führen dafür einige Begriffe und Resultate aus dem Werk von Kato [17] ein.

Seien X und Y Hilberträume. Sei $T: X \to Y$ ein dicht definierter linearer Operator, also $T: D(T) \to Y$ mit $\overline{D(T)} = X$. Ferner setzen wir T als abgeschlossen voraus (konvergiert also $\{u_j\} \subset D(T)$ gegen $u \in X$ und $\{Tu_j\}$ gegen f , so ist $u \in D(T)$ und $Tu = f$). Die Menge dieser dicht definierten abgeschlossenen Operatoren sei mit $C(D(T)\,,Y)$ bezeichnet.

Definition 3.9. (Kato [17], S.230.) <u>Wir nennen</u> $T \in C(D(T)\,,Y)$ <u>einen Fredholmoperator, wenn die Wertemenge</u> $R(T)$ <u>von</u> T <u>abgeschloßen</u> (<u>in</u> Y) <u>ist und sowohl die Dimension des Nullraumes</u> $N(T)$ <u>von</u> T <u>als</u>

auch die Dimension des Nullraumes $N(T^*)$ des dem Operator T adjungierten Operators T^* endlich sind. Ferner wird der Index von T durch

$$\operatorname{ind} T := \dim N(T) - \dim N(T^*)$$

erklärt.

Definition 3.10. (Kato [17], S.194.) Seien X, Y, Z drei Hilberträume. Ferner sei $T \in C(D(T), Y)$ mit $D(T) \subset X$ und A eine lineare Abbildung $D(A) \to Z$ mit $D(A) \subset X$ sowie $D(T) \subset D(A)$. Der Operator A heißt T-kompakt, falls für jede solche Folge $\{u_j\} \subset D(T)$, für die sowohl $\{u_j\}$ als $\{T u_j\}$ beschränkt sind, die Folge $\{A u_j\}$ eine konvergente Teilfolge enthält.

Satz 3.11. (Kato [17], S.238.) Falls $T \in C(X,Y)$ ein Fredholmoperator und $A : X \to Y$ T-kompakt ist, so ist $S := T + A \in C(X,Y)$ auch ein Fredholmoperator mit $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$.

Es sei $F' := K(2R_0, 3R_0)$, wobei R_0 gemäß Satz 3.3 gewählt ist. Der Interpolationssatz (Agmon [1], Theorem 3.4) besagt für F', daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C_\varepsilon = C_\varepsilon(F') > 0$ so existiert, daß

$$\|u\|_{1,F'} \leqq \varepsilon\, |u|_{2,F'} + C_\varepsilon \|u\|_{0,F'}$$

für alle $u \in H^2(F')$ gilt. Dies angewandt auf die Aussage von Satz 3.3 gibt uns mittels Voraussetzung 1.7 eine gewichtete Gårdingsche Ungleichung: Es gibt zwei positive Konstanten k_0 und λ_0 derart, daß

$$B_0(u, u) \geqq k_0 \, |||u|||^2_{2,p,F} - \lambda_0 \|u\|^2_{0,F'} \tag{3.18}$$

für alle $u \in H^2_p(F)$ gilt.

Es sei $\chi_{F'}$ die charakteristische Funktion von F', also $\chi_{F'} = 1$ auf F' und $\chi_{F'} = 0$ auf $\mathbb{R}^n - F'$. Wir erklären eine sesquilineare Form $\hat{B} : H^2_p(F) \times H^2_p(F) \to \mathbb{C}$ mit

$$\hat{B}(u, v) := B_0(u, v) + \lambda_0 (\chi_{F'} u, v)_{0,F} \tag{3.19}$$

und führen einen Operator $\hat{L}$ durch diese Form ein.

Es sei $D(\hat{L})$ $(\subset L^2_p(F))$ die Menge derjenigen Elemente $u \in H^2_p(F)$, zu denen je ein $f \in L^2_{1/p}(F)$ mit

$$\hat{B}(u, v) = (f, v)_{0,F} \tag{3.21}$$

für alle $v \in H^2_p(F)$ existiert. Durch

$$(3.22) \qquad \hat{L} u := f \qquad \text{für } u \in D(\hat{L})$$

wird $\hat{L} : D(\hat{L}) \to L^2_{1/p}(F)$ erklärt.

Operator $\hat{L}$ hat in $L^2_p(F)$ einen dichten Definitionsbereich (vgl. etwa Weidmann [43], Satz 5.36) und es gilt

Satz 3.12. <u>Voraussetzung 1.7 sei erfüllt. Dann ist der durch (3.22) erklärte Operator</u> $\hat{L} \in C(D(\hat{L}), L^2_{1/p}(F))$ <u>ein Fredholmoperator mit dem Index</u> 0 <u>und</u> $R(\hat{L}) = L^2_{1/p}(F)$.

Beweis. Weil für alle $u, v \in H^2_p(F)$

$$\begin{aligned} |(\chi_{F'} u , v)_{0,F}| &\leqq \|u\|_{0,F'} \, \|v\|_{0,F'} \\ &\leqq C \, |||u|||_{0,p,F} \, |||v|||_{0,p,F} \end{aligned}$$

gilt, wobei die Konstante $C > 0$ nur von R_0 abhängt, ist wegen (3.1) $\hat{B}$ in $H^2_p(F)$ beschränkt. Nach (3.18) ist

$$(3.23) \qquad |\hat{B}(u, u)| \geqq k_0 \, |||u|||^2_{2,p,F}$$

für alle $u \in H^2_p(F)$. Daher folgt die Behauptung aus dem Satz von Lax und Milgram. □

Weil für alle $u \in L^2_p(F)$

$$(3.25) \qquad |||\lambda_0 \, \chi_{F'} u|||_{0,1/p,F} \leqq C \, \|u\|_{0,F'} \leqq C \, |||u|||_{0,p,F}$$

gilt, wobei die Konstante $C > 0$ von λ_0 und R_0 abhängt, können wir einen stetigen Operator $\Gamma : D(\Gamma) \to L^2_{1/p}(F)$ mit $D(\Gamma) := D(\hat{L})$ und

$$\Gamma u := \lambda_0 \, \chi_{F'} u \qquad \text{für } u \in D(\Gamma)$$

definieren. Man hat

Satz 3.13. <u>Der Operator</u> $\Gamma : D(\Gamma) \to L^2_{1/p}(F)$ <u>ist</u> <u>$\hat{L}$-kompakt.</u>

Beweis. Falls $\{\hat{L} u_j\}$ in $L^2_{1/p}(F)$ beschränkt ist, gilt nach (3.23) mit Konstanten $C' > 0$ und $C > 0$

$$(3.26) \qquad |||u_j|||_{2,p,F} \leqq C' \, |||\hat{L} u_j|||_{0,1/p,F} < C$$

für alle $\{u_j\} \subset D(\hat{L})$. Wegen

$$\|u_j\|_{1,F'} \leqq C \, |||u_j|||_{2,p,F}$$

ist nach (3.26) $\{u_j\} \subset H^1(F')$ eine beschränkte Folge. Aus dem Rellichschen Auswahlsatz (Agmon [1], Theorem 3.8) folgt, daß $\{u_j\}$ eine Teilfolge $\{u_j'\}$ enthält, die in $L^2(F')$ konvergiert. Wegen

$$|||\Gamma u_j' - \Gamma u|||_{0,1/p,F} \leqq C \, \|u_j' - u\|_{0,F'}$$

konvergiert $\{\Gamma u_j'\}$ sogar in $L^2_{1/p}(F)$. □

Weil wegen der Sätze 3.12 und 3.13 die Voraussetzungen von Satz 3.11 erfüllt sind, folgt aus der Stabilität $\operatorname{ind} \hat{L} = \operatorname{ind} (\hat{L} - \Gamma)$ der Fredholmoperatoren die Gültigkeit von

Satz 3.14. Voraussetzung 1.7 sei erfüllt. Dann ist $L_0 = \hat{L} - \Gamma \in C(D(L_0), L^2_{1/p}(F))$ mit $D(L_0) = D(\hat{L})$ ein Fredholmoperator mit dem Index 0 .

Nach (3.2) ist

$$N(L_0) \;:=\; \{u \in H^2_p(F) \mid B_0(u,v) = 0 \text{ für alle } v \in H^2_p(F)\}$$

in $P_1 \cap H^2_p(F)$ enthalten. Weil $B_0(u,v) = 0$ für alle $u \in P_1 \cap H^2_p(F)$ und alle $v \in H^2_p(F)$ gilt, ist

$$N(L_0) = P_1 \cap H^2_p(F) .$$

Gemäß Beispiel 3.5 ist $N(L_0) = P_1$ für $n = 2$ und $N(L_0) = P_0$ für $n = 3,4$. Wenn $n \geqq 5$ ist, gilt $P_1 \cap H^2_p(F) = \{0\}$ und folglich ist $N(L_0) = \{0\}$.

Weil

$$Q_n := \{v = (p_{0,n})^2 u \mid u \in P_1 \text{ für } n = 2 \text{ bzw. } u \in P_0 \text{ für } n = 3,4\}$$

in Nullraum $N(L_0^*)$ des adjungierten Operators L_0^* enthalten ist und weil wegen $\operatorname{ind} L_0 = 0$ die Relation $\dim Q_n = \dim N(L_0) = \dim N(L_0^*)$ gilt, ist $N(L_0^*) = Q_n$ für $n = 2,3,4$. Ferner gilt $N(L_0^*) = R(L_0)^{\perp}$ (Kato [17], Theorem 5.13, S.234).

Wir fassen die Resultate dieses Abschnitts zusammen in

Satz 3.15. Voraussetzung 1.7 sei erfüllt. Wenn die Raumdimension $n \geqq 5$ ist, hat Problem 2.B für $f \in L^2_{1/p}(G)$ bzw. Problem 5 für $f \in L^2_{1/p}(\mathbb{R}^n)$ eine eindeutige Lösung.

Wenn $n = 2$ bzw. $n = 3,4$ ist, besitzen die Probleme 2.B und 5 für $f \in L^2_{1/p}(F)$ genau dann je eine Lösung, falls die Bedingung

$$(f\,,v)_{0,F} = 0$$

<u>für alle</u> $v \in P_1$ <u>bzw. für alle</u> $v \in P_0$ <u>erfüllt ist. Diese Lösung ist dann bis auf ein beliebiges additives Element aus</u> P_1 <u>bzw. aus</u> P_0 <u>eindeutig bestimmt.</u>

<u>3.6.</u> Mit gleichen Methoden wie oben lassen sich auch Randwertaufgaben zu

$$(L_0 + E)\,u = f\;,$$

d.h. zu der Gleichung für Platte auf elastischer Unterlage, behandeln, wenn man $E(x) \geqq 0$ und $E(x) = \mathcal{O}((p_{0,n}(x))^2)$ für $|x| \to \infty$ voraussetzt.

III. Der schwingende Fall

1. Problemstellung

1.1. Wir kommen nun zur variationellen Formulierung der Dirichletprobleme zu den Gleichungen (I.1.2) und (I.1.4).

Falls man die Verzerrungsenergie (vgl. II.1.1), die kinetische Energie und die Dämpfung der Platte berücksichtigt, so erhält man (vgl. Leis [23]) für zeitharmonische Vorgänge der Biegung die Dirichletsche sesquilineare Form

$$(1.1)\quad B(u\,,\phi) \;:=\; (\mathcal{D}\text{ grad } u\;,\; S\,\mathcal{D}\text{ grad }\phi)_{0,G} - ((\omega^2 a + i\,\omega b)\,u\;,\;\phi)_{0,G}\;.$$

Dabei sind die Matrix S und der Differentialoperator $\mathcal{D}$ wie in II.1.1, $a > 0$ ist die Masse und $b \geqq 0$ die Dämpfung. Falls der Rand ∂G und die Koeffizienten s_{ij}, a und b genügend glatt sind, erhält man wie in II.1.1 für $u \in C^4(G) \cap C^2(\bar{G})$ und $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch partielle Integration

$$(1.2)\quad B(u\,,\phi)$$
$$= ((L_0 - \omega^2 a - i\,\omega b)\,u\;,\;\phi)_{0,G} - (\delta_0 u\;,\;\gamma_0\phi)_{0,\partial G} + (\delta_1 u\;,\;\gamma_1\phi)_{0,\partial G}\;.$$

Die Plattengleichung lautet also

$$(1.3)\qquad (L_0 - \omega^2 a - i\,\omega b)\,u \;=\; f\;.$$

Dazu kommen im Falle der Dirichletschen Randwertaufgabe die homogenen Randbedingungen (II.1.7).

1.2. Zuerst stellen wir das homogene Dirichletproblem zu Gleichung (1.3) im gedämpften Fall. Es gelte

Voraussetzung 1.1. Die Elemente s_{ij} der Matrix S sind reellwertige beschränkte Funktionen aus $C^0(\bar{G})$. Die Matrix S ist symmetrisch und gleichmäßig positiv definit.

Die Koeffizienten a und b sind reellwertige beschränkte und meßbare Funktionen auf $\bar{G}$ und ferner gilt $b(x) \geqq b_0 > 0$ für alle $x \in G$. Die Zahl ω ist reell und > 0.

Wir stellen

Problem 1.b. Seien ein beliebiges unbeschränktes Gebiet G und $f \in L^2(G)$ gegeben. Gesucht wird $u \in H_0^2(G)$ derart, daß

$$(1.4) \qquad B(u, \phi) = (f, \phi)_{0,G} \quad \text{für alle} \quad \phi \in C_0^\infty(G)$$

gilt.

1.3. Wir kommen nun zum nichtgedämpften Fall. In (1.3) wird $\omega^2 a(x)$ durch $m(x) + k^4$ mit einer reellen Konstanten $k \neq 0$ ersetzt, und somit hat Gleichung (1.3) im Falle $b = 0$ die Gestalt

$$(1.5) \qquad (L_0 - m - k^4)\, u = f .$$

Man setze voraus, daß der Operator $L_0 - m$ sich geeignet (vgl. Voraussetzung 1.2.C unten) einem Operator L_0^0 mit konstanten Koeffizienten asymptotisch nähert. Der Operator L_0^0 hat die Form

$$(1.6) \qquad L_0^0 := \operatorname{div} \mathcal{D}^T S^* \mathcal{D} \operatorname{grad} ,$$

wobei S^* eine $\left(n + \binom{n}{2}\right) \times \left(n + \binom{n}{2}\right)$-Matrix mit den Elementen

$$(1.7) \qquad s^*_{ij} = \begin{cases} A & \text{für } i = j \text{ und } 1 \leqq i, j \leqq n \\ \mu A & \text{für } i \neq j \text{ und } 1 \leqq i, j \leqq n \\ \frac{1}{2}(1 - \mu)\, A & \text{für } i = j \text{ und } n < i, j \leqq n + \binom{n}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Dabei sind A und μ Materialfaktoren der Platte mit $A > 0$ und $-1/(n-1) < \mu < 1$ (vgl. Duvaut – Lions [8], §4, oder Leis [23], §2). Ohne Einschränkung kann man $A = 1$ annehmen, und (1.7) führt L_0^0 auf die Gestalt $L_0^0 = \Delta^2$.

Voraussetzung (1.7) bedeutet, daß die Plattengleichung für homogene isotrope Medien "im Unendlichen" betrachtet wird. (Mit gleichen Methoden könnte man auch allgemeinere Fälle behandeln. Wesentlich ist nur, daß die Überlegungen des Abschnitts 4.2 durchführbar sind; insbesondere soll die Charakteristikenfunktion s existieren und Lemma 4.3 erfüllt sein.)

Für das Gebiet G und für die Koeffizienten des Operators $L_{m,k} := \operatorname{div} \mathcal{D}^T S \mathcal{D} \operatorname{grad} - m - k^4$ gelte

Voraussetzung 1.2. A. Es sei $G \in C^4$, falls ∂G kompakt ist, bzw. $G \in C^4$ gleichmäßig, falls ∂G nicht kompakt ist, und es gelte die Normalenbedingung

$$(1.8) \qquad x \cdot \nu(x) \leqq 0 \quad \text{für alle } x \in \partial G ,$$

wobei ν die äußere Normale des Randes bezeichnet.

B. Die Elemente s_{ij} der Matrix S und m sind reellwertig und genügen der Regularitätsbedingung $s_{ij} \in C^4_{**}(\bar{G})$ bzw. $m \in C^1_{**}(\bar{G})$. Ferner ist die Matrix S symmetrisch und gleichmäßig positiv definit. Die Zahl k ist reell und $\neq 0$.

C. Für $|x| \to \infty$ erfüllen s_{ij} und m folgende asymptotische Eigenschaften

$$(1.9) \qquad s_{ij} - s^*_{ij} = \mathcal{O}(|x|^{-1} (\ln |x|)^{-1-\delta}) ,$$

$$(1.10) \qquad D^\alpha s_{ij} = \mathcal{O}(|x|^{-3/2} (\ln |x|)^{-1/2-\delta}) \quad \text{mit } 1 \leqq |\alpha| \leqq 3 ,$$

$$(1.11) \qquad D_r s_{ij} = \mathcal{O}(|x|^{-2} (\ln |x|)^{-1-\delta}) ,$$

$$(1.12) \qquad m(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1} (\ln |x|)^{-1-\delta}) ,$$

$$(1.13) \qquad D_r m = \mathcal{O}(|x|^{-2} (\ln |x|)^{-1-\delta})$$

mit einem $\delta > 0$.

Bevor wir das Dirichletsche Ausstrahlungsproblem zu Gleichung (1.5) stellen, führen wir einige gewichtete Sobolevsche Funktionenräume ein. Unsere Wahl der Gewichtsfunktionen motivieren wir durch

Beispiel 1.3. Es sei $\phi \in C_0^\infty(K(0,3))$ mit $\phi(x) = 1$ für $|x| \leqq 2$. Ferner seien $v = e^{ikr}/r$ und $f_1 := -(\Delta^2 - k^4)\,\phi v$. Dann ist $u := (1-\phi)\,v$ die Lösung der Aufgabe

$$\begin{cases} (\Delta^2 - k^4)\,u = f_1 & \text{in } G := \mathbb{R}^3 - \overline{K(0,1)} \\ u = D_\nu u = 0 & \text{auf } \partial G . \end{cases}$$

Die Lösungsfunktion u liegt nicht in $L^2(G)$, aber es gilt $|x|^{-1/2}\,(\ln|x|)^{-1/2-\delta/2}\,u \in L^2(G)$ für $\delta > 0$.

Für ein festes $\delta \in \mathbb{R}^+$ erklären wir die Gewichtsfunktionen

$$g_\delta(x) := (1+|x|)^{-1/2}\,(\ln(e+|x|))^{-1/2-\delta/2}$$

und

$$\rho_\delta(x) := (1+|x|)\,(\ln(e+|x|))^{\delta/2}\ .$$

Wir definieren den gewichteten L^2-Raum

$$L^2_{\rho_\delta}(G) := \{u \mid \rho_\delta u \in L^2(G)\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{0,\rho_\delta,G} := \int_G \rho_\delta^2\, u\,\bar v\, dx\ , \qquad u,v \in L^2_{\rho_\delta}(G)\ .$$

Für die Funktionen $u \in C^t(G)$ $(t \in \mathbb{N}_0)$ können wir den Ausdruck

$$\|u\|^2_{t,g_\delta,G} := \sum_{|\alpha|\leqq t} \int_G g_\delta^2\, |D^\alpha u|^2\, dx$$

bilden. Es sei

$$C^t_{g_{\delta*}}(G) := \{u \in C^t(G) \mid \|u\|_{t,g_\delta,G} < \infty\}\ .$$

Für $u,v \in C^t_{g_{\delta*}}(G)$ erklärt man das Skalarprodukt

$$(u,v)_{t,g_\delta,G} := \sum_{|\alpha|\leqq t} \int_G g_\delta^2\, D^\alpha u\, \overline{D^\alpha v}\, dx\ .$$

Den gewichteten Sobolevschen Funktionenraum $H^t_{g_\delta}(G)$ erhält man durch Vervollständigung von $C^t_{g_{\delta*}}(G)$ in bezug auf $(\cdot,\cdot)_{t,g_\delta,G}$. Die Abschließung der Menge $C^t_0(G)$ im Raum $H^t_{g_\delta}(G)$ wird mit $H^t_{g_\delta 0}(G)$ bezeichnet. Entsprechend wird $H^t_{r^{1/2}}(G)$ erklärt.

Einige einfache Eigenschaften der oben erklärten Räume fassen wir zusammen in

Bemerkung 1.4. Für $\delta \in \mathbb{R}^+$ gelten $L^2_{\rho_\delta}(G) \subset L^2(G)$, $H^t_{r^{1/2}}(G) \subset H^t(G) \subset H^t_{g_\delta}(G)$ und $H^t_0(G) \subset H^t_{g_\delta 0}(G)$.

1.4. Nach (1.1) ist die dem Operator $L_{m,k}$ zugehörige sesquilineare Form

$$B_{m,k}(u\,,\phi) \;:=\; B_0(u\,,\phi) - ((m+k^4)\,u\,,\phi)_{0,G}\,.$$

Unser Ausstrahlungsproblem lautet (vgl. Vogelsang [42], §1):

Problem 1.m.k. Seien ein solches Gebiet G, das Voraussetzung 1.2.A erfüllt, und $f \in L^2_{\rho_\delta}(G)$ mit einem festen $\delta > 0$ gegeben.

Gesucht werden die Elemente u, die den Relationen

$$(1.14) \qquad u \in H^2_{g_\delta 0}(G) \cap H^4_{g_\delta}(G)\,,$$

$$(1.15) \qquad B_{m,k}(u\,,\phi) = (f\,,\phi)_{0,G} \quad \text{für alle} \quad \phi \in C_0^\infty(G)$$

und der Ausstrahlungsbedingung

$$(1.16) \qquad \operatorname{grad}\,(e^{-ikr}\,u) \in L^2(B(1))$$

genügen.

Jedes dieser Elemente u nennen wir eine der Zahl δ zugeordnete "Ausstrahlungslösung". Wir schreiben dann auch $u \in F_\delta$.

Die Außenraumaufgabe von Leis lautet (Leis [23], S.11, und Polis [28], S.19):

Problem L. Seien ein Außengebiet G und

$$f \in L^2_*(G(R_0)) := \{ g \in L^2(G) \mid \operatorname{Trg} g \subset K(0,R_0) \}$$

gegeben. Aus der Menge solcher Funktionen $u \in L^2_{loc}(G)$, zu denen je eine Folge $\{\phi_j\} \subset H^2_0(G)$ mit $\|\phi_j - u\|_{2,G(R)} \to 0$ für alle $R \geqq R_0$ existiert, werden die Elemente u gesucht, die (1.15) und der Ausstrahlungsbedingung

$$(1.17) \qquad D_r u - iku \in L^2((B(1))$$

genügen.

Bemerkung 1.5. A. Die beiden Problemstellungen führen zu gleicher Lösung: Wenn u_1 eine Lösung des Problems 1.m.k und u_2 eine Lösung des Problems L ist, ist $u_1 - u_2$ eine Lösung des Problems L mit $f = 0$ (weil auch u_1 die Ausstrahlungsbedingung (1.17) erfüllt). Aus den Eindeutigkeitsbetrachtungen von Leis ([23], §8) folgt dann $u_1 = u_2$.

B. Die in Beispiel 1.3 eingeführte Funktion u ist eine Lösung des Problems 1.m.k und des Problems L (zum Gebiet $\mathbb{R}^3 - \overline{K(0,1)}$ und zu der Funktion f_1).

C. Die in dem Gegenbeispiel von Vogelsang [41], S.385, eingeführte Eigenlösung des Operators $\Delta^2 - m$ (für ein bestimmtes m) erfüllt Ausstrahlungsbedingung (1.16) bzw. (1.17) und ist folglich auch eine Eigenlösung für Problem 1.m.k bzw. für Problem L. Dadurch kann man nicht erwarten, daß ein allgemeines Eindeutigkeitsresultat für das Problem 1.m.k bzw. für das Problem L gelten würde.

2. Der gedämpfte Fall

In diesem Abschnitt beweisen wir die eindeutige Lösbarkeit des homogenen Dirichletproblems zu der Gleichung $(L_0 - \omega^2 - i\,\omega\, b)\, u = f$. Vom mathematischen Standpunkt ist dieser Fall einfach, er ist jedoch für die Behandlung des Ausstrahlungsproblems interessant, weil der Grenzübergang zum Fall der verschwindenden Dämpfung durchgeführt werden kann. Dazu beweisen wir eine A-priori-Abschätzung, die wir beim Beweis der Existenz des Ausstrahlungsproblems benutzen werden.

Satz 2.1. A. Voraussetzung 1.1 sei erfüllt. Dann hat Problem 1.b für $f \in L^2(G)$ eine eindeutige Lösung.

B. Es sei $G \in C^4$, falls ∂G kompakt ist, und $G \in C^4$ gleichmäßig, falls ∂G nicht kompakt ist, und es gelte $s_{ij} \in C^2_{**}(\bar{G})$. Dann ist die Lösung des Problems 1.b mit $f \in L^2(G)$ in $H^4(G)$, mit $f \in L^2_{\rho_\delta}(G)$ ($\delta \geqq 0$) in $H^4_{r^{1/2}}(G)$, und mit einer von u , ω und b_0 unabhängigen Konstanten C gelten die Abschätzungen

$$\omega\, b_0\, \|u\|_{4,G} \leqq C\, \|f\|_{0,G}\,, \tag{2.1}$$

$$\omega^2\, b_0^2\, \|u\|_{4,r^{1/2},G} \leqq C\, \|f\|_{0,\rho_\delta,G}\,. \tag{2.2}$$

Beweis. A. Nach Voraussetzung 1.1 ist die Sesquilinearform B gleichmäßig stark elliptisch. Wegen der Gårdingschen Ungleichung (Agmon [1], Theorem 7.6) und wegen

$$\mathrm{Im}\, B(u\,,u) \geqq \omega\, b_0\, \|u\|^2_{0,G}$$

gilt mit einer von u und ω unabhängigen positiven Konstanten C_1 (vgl. Leis [23], §4)

$$(2.3) \qquad |B(u,u)| \geqq \omega b_0 C_1 \|u\|^2_{2,G} .$$

Ferner ist nach Voraussetzung 1.1 die Form B in $H^2(G)$ beschränkt.

Nach dem Satz von Lax und Milgram existiert dann ein eindeutig bestimmte $u \in H^2_0(G)$ mit

$$B(u,\phi) = (f,\phi)_{0,G} \qquad \text{für alle } \phi \in H^2_0(G) ,$$

und es gilt

$$(2.4) \qquad \omega b_0 C_1 \|u\|_{2,G} \leqq \|f\|_{0,G} .$$

Weil $G \in C^4$ (bzw. $G \in C^4$ gleichmäßig), ist nach Agmon [1], Theorem 9.8, die Lösung des Problems 1.b in $H^2_0(G) \cap H^4_*(G)$. Folglich nach Vogelsang [41], Lemma 2.3 (man siehe auch Witsch [49], Lemma 2.3), ist $u \in H^4(G)$, und weiter gilt nach (2.4) (mit Konstanten $C_2, C > 0$)

$$(2.5) \qquad \omega b_0 \|u\|_{4,G} \leqq \omega b_0 C_2 (\|f\|_{0,G} + \|u\|_{2,G}) \leqq C \|f\|_{0,G} .$$

C. (Vgl. Vogelsang [41], §5.) Es sei eine Glättungsfunktion $\phi_j \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ wie $\phi_{3,j}$ im Beweis von Lemma II.1.6 gewählt und sei $d(x) := (1+|x|^2)^{1/2}$. Dann gilt mit $|\alpha| \geqq 1$

$$(2.6) \qquad D^\alpha(d(x)\,\phi_j(x)) = \mathcal{O}(1) \qquad \text{für } |x| \to \infty .$$

Wenden wir (2.1) auf $d\phi_j u \in H^4(G)$ an, so erhalten wir nach (2.6) mit einer von u und j unabhängigen Konstanten $C > 0$

$$\begin{aligned} \omega^2 b_0^2 \|d u\|_{4,G(j)} &\leqq \omega^2 b_0^2 \|d\phi_j u\|_{4,G} \\ &\leqq \omega b_0 C \|(L_0 - \omega^2 a - i\omega b)\, d\phi_j u\|_{0,G} \\ &\leqq \omega b_0 C \|f\|_{0,\rho_\delta,G} + \omega b_0 C \|u\|_{3,G} . \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $j \to \infty$ und (2.1) liefern

$$(2.7) \qquad \omega^2 b_0^2 \|d u\|_{4,G} \leqq C \|f\|_{0,\rho_\delta,G} .$$

Nach (2.7) gilt

$$(2.8) \qquad \omega^2 b_0^2 \|u\|_{4,d,G} \leqq C (\|f\|_{0,\rho_\delta,G} + \omega^2 b_0^2 \|u\|_{3,G}) .$$

Die Behauptung folgt jetzt aus (2.8), wenn wir noch (2.1) beachten. □

3. Über die Eigenwerte des Operators $L_0 - m$

3.1. Die Dirichletschen Randwertaufgaben zur Plattengleichung sind im Gegensatz zur Schwingungsgleichung im allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Es gibt nämlich Beispiele dafür, daß Eigenlösungen wirklich auftreten können (Eidus [10], S.137, für $G = \mathbb{R}^3$ und Vogelsang [41], S.385, für ein Außengebiet G).

In diesem Abschnitt geben wir hinreichende Bedingungen dafür an, daß der Operator $L_0 - m$ auf seiner Definitionsmenge $D(L_0 - m) := H_0^2(G) \cap H^4(G)$ keine positiven Eigenwerte hat.

Rellich [29] hat als erster diese Betrachtung für den Operator $\Delta + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, durchgeführt. Seine Methoden sind später für Operatoren zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten von Wienholtz [47] und für Operatoren höherer Ordnung von Finozenok [13] und von Vogelsang [41] verallgemeinert worden. Die in dem vorliegenden (spezielleren) Fall benötigten Voraussetzungen über die Koeffizienten weichen von Voraussetzungen bei Finozenok, [13], S.383-384, bei Vogelsang, [41], S.383-384, und bei Polis [28], S.55 ab.

Satz 3.1. Voraussetzung 1.2.A-B sei erfüllt, und es gebe eine Konstante $M > 0$ derart, daß

$$M\,|\xi|^2 \leqq \xi\left(S(x) - \frac{1}{2}\, r\, D_r\, S(x)\right)\xi^T \tag{3.1}$$

für alle $x \in G$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^{n+\binom{n}{2}}$ gilt.

Die reelle Zahl k^4 ist sicher dann kein Eigenwert von $L_0 - m$ auf $D(L_0 - m) := H_0^2(G) \cap H^4(G)$, wenn

$$m(x) + k^4 + \frac{1}{2}\, r\, D_r\, m(x) \geqq 0 \tag{3.2}$$

in G gilt.

Bemerkung 3.2. Später werden wir zeigen (Satz 5.3): Wenn Voraussetzung 1.2.A-C erfüllt ist und wenn $u \in F_\delta$ eine Lösung der Gleichung

$$(L_0 - m - k^4)\, u = 0$$

ist, liegt u in $H_0^2(G) \cap H^4(G)$.

Bemerkung 3.3. A. Im isotropen Fall hat die Matrix $S(x)$

die Gestalt (1.7) (jedoch sind A und μ dann keine Konstanten, $A(x) > 0$ und $-1/(n-1) < \mu(x) < 1$ in G). Weil die Matrix $S - \frac{1}{2} r D_r S$ reellwertig und symmetrisch ist, kann Bedingung (3.1) in der Form

$$\lambda_j(x) \geqq M > 0 \quad \text{in } G$$

für $j = 1, \ldots, n + \binom{n}{2}$ gegeben werden, wobei

$$\begin{cases} \lambda_1 = A\,(1 + (n-1)\mu) - \frac{1}{2} r D_r (A\,(1 + (n-1)\mu)) \\ \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = A\,(1-\mu) - \frac{1}{2} r D_r (A\,(1-\mu)) \\ \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+\binom{n}{2}} = \frac{1}{2} A\,(1-\mu) - \frac{1}{4} r D_r (A\,(1-\mu)) \end{cases}$$

die Eigenwerte der Matrix $S - \frac{1}{2} r D_r S$ sind.

B. Es sei erwähnt, daß in physikalischen Systemen gewöhnlich $m(x) + k^4 > 0$ (die Massen sind positiv) gilt.

Beweis von Satz 3.1. A. In den Beweisteilen B-C werden wir die Ausdrücke $\mathrm{Re}\,((L_0 - m - k^4)\,u\,,\,r D_r u)_{0,G(R)}$ und $\mathrm{Re}\,((L_0 - m - k^4)\,u\,,\,u)_{0,G(R)}$ umformen und dabei den Überlegungen von Polis [28], §16, folgen.

Es ist möglich R so zu wählen, daß auf $G(R)$ der Spursatz (Nečas [27], Théorème 1.2) und dann auch die Greensche Umformung für Funktionen $u \in H_0^2(G) \cap H^4(G)$ anwendbar sind.

B. Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir wegen $\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,(r D_r u) = 2\,\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u + r D_r \mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u$

$$\begin{aligned} (3.3)\quad & \mathrm{Re}\,(L_0 u\,,\,r D_r u)_{0,G(R)} \\ & = 2\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u\,,\,S\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u)_{0,G(R)} + \mathrm{Re}\,(\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u\,,\,S\,r D_r (\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u))_{0,G(R)} \\ & \qquad + \Gamma_R^1(u) + K_R(u)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$(3.4) \qquad \Gamma_R^1(u) := -\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{D}^T(\nu)\,S\,\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u\,,\,\mathrm{grad}\,(r D_r u))_{0,\partial G(R)}$$

ist und für die Größe $K_R(u)$ die Abschätzung

$$(3.5) \qquad |K_R(u)| \leqq C \sum_{|\alpha| \leqq 3} R\,\|D^\alpha u\|^2_{0,S(R)}$$

mit einer von u und R unabhängigen Konstanten $C > 0$ gilt.

Ferner ergibt sich durch partielle Integration

$$(3.6)\qquad \mathrm{Re}\,(\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u\ ,\ S\,r\,D_r\,(\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u))_{0,G(R)}$$
$$= -\frac{n}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u\ ,\ S\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u)_{0,G(R)}$$
$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u\ ,\ r\,D_r\,S\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u)_{0,G(R)} + \Gamma_R^2(u) + K_R(u)$$

mit

$$(3.7)\qquad \Gamma_R^2(u) := \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,((x\cdot\nu)\,\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u\ ,\ S\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u)_{0,\partial G(R)}\ .$$

Für $u \in H_0^2(G)$ gilt auf dem Rand ∂G $D^\alpha u = 0$, $|\alpha| \leqq 1$, sowie

$$(3.8)\qquad r\,D_r\,\mathrm{grad}\,u = (x\cdot\nu)\ \nu^T D_\nu^2 u$$

und

$$(3.9)\qquad \mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u = \mathcal{D}(\nu)\ \nu^T D_\nu^2 u\ .$$

Mittels (3.8)-(3.9) gilt

$$(3.10)\qquad \Gamma_R(u) := \Gamma_R^1(u) + \Gamma_R^2(u)$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\partial G(R)} (x\cdot\nu)\ \nu\ \mathcal{D}^T(\nu)\ S\ \mathcal{D}(\nu)\ \nu^T\ |D_\nu^2 u|^2\ do\ .$$

Wegen

$$\mathrm{Re}\,(-(m+k^4)\,u\ ,\ r\,D_r\,u)_{0,G(R)}$$
$$= \frac{n}{2}\,\mathrm{Re}\,((m+k^4)\,u\ ,\ u)_{0,G(R)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(r\,D_r\,m\,u\ ,\ u)_{0,G(R)} + K_R(u)$$

erhalten wir aus (3.3), (3.6) und aus (3.10)

$$(3.11)\qquad \mathrm{Re}\,((L_0 - m - k^4)\,u\ ,\ r\,D_r\,u)_{0,G(R)}$$
$$= (2-\frac{n}{2})\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u\ ,\ S\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u)_{0,G(R)}$$
$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u\ ,\ r\,D_r\,S\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,u)_{0,G(R)}$$
$$+\frac{n}{2}\,\mathrm{Re}\,((m+k^4)\,u\ ,\ u)_{0,G(R)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(r\,D_r\,m\,u\ ,\ u)_{0,G(R)}$$
$$+\Gamma_R(u) + K_R(u)\ .$$

C. Mit gleichen Überlegungen wie oben ergibt sich durch partielle Integration

$$\text{(3.12)} \qquad \operatorname{Re}\,((L_0 - m - k^4)\, u\,,\, u)_{0,G(R)}$$
$$= \operatorname{Re}\,(\mathcal{D}\operatorname{grad} u\,,\, S\mathcal{D}\operatorname{grad} u)_{0,G(R)}$$
$$- \operatorname{Re}\,((m+k^4)\, u\,,\, u)_{0,G(R)} + K_R(u)\;.$$

D. Nach (3.11)-(3.12) gilt

$$\text{(3.13)} \qquad \operatorname{Re}\,((L_0 - m - k^4)\, u\,,\, r D_r u + \tfrac{n}{2} u)_{0,G(R)}$$
$$= \operatorname{Re}\,(\mathcal{D}\operatorname{grad} u\,,\, (2S - \tfrac{1}{2} r D_r S)\, \mathcal{D}\operatorname{grad} u)_{0,G(R)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\,(r D_r m\, u\,,\, u)_{0,G(R)} + \Gamma_R(u) + K_R(u)\;.$$

Aus den Gleichungen (3.12)-(3.13) schließen wir

$$\text{(3.14)} \qquad \operatorname{Re}\,(\mathcal{D}\operatorname{grad} u\,,\, (S - \tfrac{1}{2} r D_r S)\, \mathcal{D}\operatorname{grad} u)_{0,G(R)}$$
$$+ \operatorname{Re}\,((m + k^4 + \tfrac{1}{2} r D_r m)\, u\,,\, u)_{0,G(R)}$$
$$= \operatorname{Re}\,((L_0 - m - k^4)\, u\,,\, r D_r u + (\tfrac{n}{2} - 1)\, u)_{0,G(R)}$$
$$- \Gamma_R(u) + K_R(u)\;.$$

Wegen $-\Gamma_R(u) \leqq 0$ gilt dann nach (3.1)-(3.2)

$$\text{(3.15)} \qquad M\, |u|^2_{2,G(R)} \leqq K_R(u)$$

für alle $u \in H^2_0(G) \cap H^4(G)$ mit $(L_0 - m - k^4)\, u = 0$.

Durch die Wahl einer Folge $R_j \to \infty$ mit $K_{R_j}(u) \to 0$ erhalten wir für $j \to \infty$ aus (3.15) die Behauptung. □

4. A-priori-Abschätzung für die Ausstrahlungslösung

4.1. Wir beschäftigen uns nun mit der A-priori-Abschätzung, die für die Methode der Grenzabsorption und damit für den Beweis der Existenzaussage (Satz 5.4) erforderlich ist (vgl. Vogelsang [42], Satz 2).

Satz 4.1. Voraussetzung 1.2 sei mit einer Zahl δ, $0 < \delta \leqq 1$, erfüllt, und sei $0 < \lambda \leqq 1$.

Für alle $u \in H^2_{g_\delta 0}(G) \cap H^4_{g_\delta}(G)$ mit

$$\text{(4.1)} \qquad D^\alpha\,(e^{-ikr} u) \in L^2(B(1)) \qquad \text{für } |\alpha| = 1,2,3\;,$$

(4.2) $$\lambda u \in H^4_{r^{1/2}}(G)$$

und für alle genügend großen $R_2 \geqq R_2'(\delta)$ gilt dann mit einer von u und λ unabhängigen (und von δ abhängigen) Konstanten $C > 0$ die Ungleichung

(4.3) $$\sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 2} (\|D^\alpha (e^{-ikr} u)\|_{0,B(1)} + \lambda^{1/2} \|r^{1/2} D^\alpha (e^{-ikr} u)\|_{0,B(1)}) + \|u\|_{4,g_\delta,G} + \lambda^{1/2} \|(\ln (e+r))^{-\delta/2} u\|_{0,G}$$
$$\leqq C (\|(L_0 - m - k^4 - i\lambda) u\|_{0,\rho_\delta,G} + \|u\|_{2,G(R_2)}) .$$

Den Beweis werden wir in 4.4 nach einigen Hilfsbetrachtungen durchführen. Als Grundlage der Beweismethoden werden wir die Arbeit [42] von Vogelsang benutzen.

4.2. Unser erstes Ziel ist der Beweis der Vertauschungsrelation

$$e^{-ikr} (L_0 - m - k^4) = (B+T) e^{-ikr}$$

mit geeigneten Differentialoperatoren B und T, wobei T den Charakter eines Restoperators hat. Dabei folgen wir den Überlegungen von Vogelsang [42], §2, und führen dafür einige Begriffe und Bezeichnungen ein.

Es sei $s = s(x)$ die Charakteristikenfunktion der reellen Nullstellenfläche

$$N_k(P^*) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid P^*(\xi) - k^4 = 0 , \ k \neq 0\}$$

des Polynoms

(4.4) $$P^*(\xi) := \xi D^T(\xi) S^* D(\xi) \xi^T .$$

Vogelsang definiert s durch

$$s(x) := x \cdot \sigma(\hat{x}) , \qquad \hat{x} = x / |x| \in S^{n-1} ,$$

wobei $\sigma : S^{n-1} \to N_k(P^*)$ die bijektive Umkehrabbildung der Gaußschen Abbildung $\nu : N_k(P^*) \to S^{n-1}$ mit $\sigma \cdot \nu(\sigma) > 0$, $\sigma \in N_k(P^*)$, ist.

Wegen (1.7) mit $A = 1$ ergeben sich in unserem Fall

$$\sigma(\hat{x}) = k \hat{x}$$

und

$$s(x) = kr .$$

Wir ersetzen $u \in C_0^\infty(B(1))$ durch θw mit $\theta = e^{ikr}$ und $w = e^{-ikr} u$. Unsere Absicht ist dann, den Ausdruck

$$(L_0 - m - k^4)(\theta w)$$

umzuformen.

Das Polynom

$$P(x,\xi) := \xi\, \mathcal{D}(\xi)^T S(x)\, \mathcal{D}(\xi)\, \xi^T$$

der Veränderlichen ξ läßt sich darstellen als

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=4} S_\alpha(x)\, \xi^\alpha \tag{4.5}$$

mit geeigneten Koeffizienten S_α. Nach (4.5) und nach Voraussetzung 1.2 können wir den Operator L_0 in der Form

$$L_0 = L_0' + T_1 := \sum_{|\alpha|=4} S_\alpha(x)\, D^\alpha + \sum_{2\leqq|\alpha|\leqq 3} t_\alpha(x)\, D^\alpha$$

darstellen, wobei nach (1.10) $t_\alpha(x) = \mathcal{O}(|x|^{-3/2}\,(\ln|x|)^{-1/2-\delta})$ für $|x| \to \infty$ gilt.

Wir bilden den Ausdruck $L_0'\theta w$, verwenden dabei die Leibnizsche Regel und berücksichtigen (4.5). Die Glieder mit Koeffizienten vom Typ $\mathcal{O}(|x|^{-3/2}\,(\ln|x|)^{-1/2-\delta})$ werden im folgenden zu einem Restoperator T gesammelt; dann erhält man (vgl. Vogelsang [42], Beweis von Satz 3)

$$\begin{aligned} L_0' u &= L_0'(\theta w) = \sum_{|\alpha|=4} S_\alpha D^\alpha (\theta w) \\ &= \theta \Bigg\{ \sum_{0\leqq|\gamma|\leqq 4} i^{-|\gamma|} \frac{1}{\gamma!} D_\xi^\gamma P(x,\sigma)\, D^\gamma w \\ &\quad + \sum_{0\leqq|\gamma|\leqq 3} \Bigg(i^{-|\gamma|-1} \frac{1}{2\gamma!} \sum_{|\varepsilon|=1} D_x^\varepsilon \,(D_\xi^{\varepsilon+\gamma} P(x,\sigma))\, D^\gamma w \Bigg) + T w \Bigg\} \\ &=: \theta\, (A_1 w + A_2 w + T w) , \end{aligned} \tag{4.6}$$

wobei T ein Restoperator vom Typ

$$T = \sum_{|\alpha|\leqq 3} t_\alpha D^\alpha \tag{4.7}$$

mit

$$(4.8) \qquad t_\alpha(x) = O(|x|^{-3/2} (\ln |x|)^{-1/2-\delta}) \qquad \text{für } |x| \to \infty$$

ist. Mit Hilfe der Leibnizschen Regel ergibt sich

$$(4.9) \qquad T_1 u = T_1(\theta w) = \theta T w$$

mit einem Restoperator T vom Typ (4.7).

Wir werden jedoch die Operatoren A_1 und A_2 in einer praktischeren Form darstellen. Dafür erklären wir auf $B(1)$ die Koeffizienten

$$(4.10) \qquad b_{\alpha\beta}(x) := 2^{-||\alpha|-|\beta||} \frac{1}{(|\alpha|+|\beta|)!} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{|\beta|!}{\beta!} D_\xi^{\alpha+\beta} P(x,\sigma)\, i^{|\alpha|-|\beta|}$$

für $||\alpha|-|\beta|| \leqq 1$ und $b_{\alpha\beta}(x) \equiv 0$ sonst, sowie entsprechend $b^*_{\alpha\beta}(x)$ mit $P^*(\sigma)$ anstelle $P(x,\sigma)$.

Durch direkte Rechnung ergibt sich wegen (4.10) und wegen Voraussetzung 1.2 aus (4.6) (vgl. Vogelsang [42], Lemma 2.3)

$$(4.11) \qquad (A_1 + A_2 + T)\, w = (B_1 + B_2 + P + T_2)\, w$$

wobei

$$(4.12) \qquad B_1 := \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq 2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta} D^\beta) ,$$

$$(4.13) \qquad B_2 := \sum_{|\alpha|+|\beta|=1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta} D^\beta)$$

und T_2 ein Restoperator vom Typ (4.7) sind. Wegen (4.6)-(4.10) folgt aus (4.11)

$$(4.14) \qquad \begin{aligned} \theta^{-1} (L_0 - m - k^4)\, u &= \theta^{-1} (L_0' + T_1 - m - k^4)\, \theta w \\ &= (B_1 + B_2 + h + T)\, w =: (B + T)\, w \end{aligned}$$

mit

$$(4.15) \qquad h(x) := P(x,\sigma) - m(x) - k^4 .$$

Nach Voraussetzung 1.2 hat Operator B_2 auch eine andere Darstellung (vgl. Vogelsang [42], Lemma 2.3):

$$(4.16)\quad B_2 = -i\left(\frac{1}{K} D_r + \sum_{|\varepsilon|=1} h_\varepsilon D^\varepsilon + \frac{(n-1)}{2Kr}\right) + O(|x|^{-3/2} (\ln |x|)^{-1/2-\delta}),$$

wobei $K := 1/4k^3$ und

$$h_i(x) := D_{\xi_i} P(x,\sigma) - D_{\xi_i} P^*(\sigma), \quad \sigma \in N_k(P^*), \quad i = 1,\dots,n,$$

ist.

Für die Koeffizienten $b_{\alpha\beta}$ mit $|\alpha+\beta| \geqq 1$ gilt $b_{\alpha\beta} = \overline{b}_{\beta\alpha}$ und wegen Voraussetzung 1.2 gelten für $|x| \to \infty$

$$(4.17)\quad \begin{cases} b_{\alpha\beta} - b^*_{\alpha\beta} = O(|x|^{-1} (\ln |x|)^{-1-\delta}), \\ D_r b_{\alpha\beta} = O(|x|^{-2} (\ln |x|)^{-1-\delta}), \end{cases}$$

$$(4.18)\quad \begin{cases} h = O(|x|^{-1} (\ln |x|)^{-1-\delta}), \\ D_{x_j} h = O(|x|^{-3/2} (\ln |x|)^{-1/2-\delta}), \quad j = 1,\dots,n, \\ D_r h = O(|x|^{-2} (\ln |x|)^{-1-\delta}) \end{cases}$$

und

$$(4.19)\quad \begin{cases} h_i = O(|x|^{-1} (\ln |x|)^{-1-\delta}), \\ D_{x_j} h_i = O(|x|^{-3/2} (\ln |x|)^{-1/2-\delta}), \quad i,j = 1,\dots,n, \\ D_r h_i = O(|x|^{-2} (\ln |x|)^{-1-\delta}). \end{cases}$$

Wir fassen die Resultate zusammen in

Lemma 4.2. <u>Voraussetzung 1.2 sei erfüllt. Dann existieren ein Operator $B := B_1 + B_2 + h$, wobei B_1, B_2 und h in (4.12), (4.13) bzw. (4.15) erklärt sind, und ein Restoperator T vom Typ (4.7) derart, daß auf $B(1)$ die Vertauschungsrelation</u>

$$(4.20)\quad e^{-ikr} (L_0 - m - k^4) = (B + T)\, e^{-ikr}$$

<u>gilt. Für die Koeffizienten der Operatoren B und T gelten die asymptotischen Eigenschaften (4.17)-(4.19) bzw. (4.8).</u>

Für den Operator B wird die von Vogelsang eingeführte "verschärfte" Elliptizität bewiesen:

Lemma 4.3. <u>Es sei für $\sigma \in N_k(P^*)$ (mit $k \neq 0$) und $\xi \in \mathbb{R}^n$</u>

$$\Phi(\sigma,\xi) \quad := \quad P^*(\sigma+\xi) - D_\sigma P^*(\sigma) \cdot \xi - P^*(\sigma) \; .$$

<u>Dann gelten die Darstellungen</u>

$$(4.21) \qquad \Phi(\sigma,\xi) \quad = \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq 2} \xi^\alpha \, b^*_{\alpha\beta}(x) \, i^{|\beta|-|\alpha|} \, \xi^\beta \; ,$$

$$(4.22) \qquad |\xi| \, D_{|\xi|} \, \Phi(\sigma,\xi) - \Phi(\sigma,\xi)$$

$$= \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq 2} (2\,|\alpha| - 1) \, \xi^\alpha \, b^*_{\alpha\beta}(x) \, i^{|\beta|-|\alpha|} \, \xi^\beta \; ,$$

<u>und es gibt eine von</u> σ <u>und</u> ξ <u>unabhängige Konstante</u> $e_1 > 0$ <u>derart, daß</u>

$$(4.23) \qquad \Phi(\sigma,\xi) \quad \geqq \quad e_1 \, (|\xi|^2 + |\xi|^4)$$

<u>und</u>

$$(4.24) \qquad |\xi| \, D_{|\xi|} \, \Phi(\sigma,\xi) - \Phi(\sigma,\xi) \quad \geqq \quad e_1 \, (|\xi|^2 + |\xi|^4)$$

<u>für alle</u> $\sigma \in N_k(P^*)$ <u>und alle</u> $\xi \in \mathbb{R}^n$ <u>gelten</u>.

Beweis. A. Wegen des Beweises der Darstellungen (4.21)-(4.22) siehe man Vogelsang [42], Lemma 4.1.

B. Durch direkte Rechnung ergibt sich aus (4.4) mittels (1.7) eine Darstellung

$$(4.25) \qquad \Phi(\sigma,\xi) \quad = \quad |\xi|^4 + 2\,|\sigma|^2\,|\xi|^2 + 4\,|\xi|^2\,(\sigma\cdot\xi) + 4\,(\sigma\cdot\xi)^2$$

$$= \quad |\xi|^2 \, (|\xi|^2 + 2\,|\sigma|^2 + 4\,|\sigma|\,|\xi| \cos\theta + 4\,|\sigma|^2 \cos^2\theta)$$

wobei θ den Winkel zwischen σ und ξ bezeichnet. Für $\cos\theta \neq 0$ (der Fall $\cos\theta = 0$ ist trivial) erhalten wir aus (4.25) unter Verwendung der Relation

$$(4.26) \qquad 2ab \quad \leqq \quad \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2 \qquad (a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; , \quad \varepsilon > 0)$$

an die Terme $4\,|\sigma|\,|\xi| \cos\theta$ mit $\varepsilon = 5/2$

$$\Phi(\sigma,\xi) \quad \geqq \quad |\xi|^2 \, (\tfrac{1}{5}|\xi|^2 + |\sigma|^2) \; .$$

Für alle $\sigma \in N_k(P^*)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt wegen $|\sigma|^2 = k^2$

$$\Phi(\sigma,\xi) \quad \geqq \quad e_1 \, (|\xi|^2 + |\xi|^4) \; ,$$

wobei $e_1 = \min\{1/5, k^2\} > 0$ ist.

C. Für $|\xi|\, D_{|\xi|}\,\Phi = \xi\,\nabla_\xi\,\Phi$ erhalten wir die Darstellung

$$|\xi|\, D_{|\xi|}\,\Phi(\sigma,\xi) = 4\,|\xi|^4 + 4\,|\sigma|^2\,|\xi|^2 + 12\,|\xi|^2\,(\sigma\cdot\xi) + 8\,(\sigma\cdot\xi)^2 ,$$

und folglich ist

$$\begin{aligned} &|\xi|\, D_{|\xi|}\,\Phi(\sigma,\xi) - \Phi(\sigma,\xi) \\ &= |\xi|^2\,(3\,|\xi|^2 + 2\,|\sigma|^2 + 8\,|\sigma|\,|\xi|\cos\theta + 4\,|\sigma|^2\cos^2\theta) . \end{aligned}$$

Mit ähnlichen Überlegungen wie oben erhalten wir für alle $\sigma \in N_k(P^*)$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\xi|\, D_{|\xi|}\,\Phi(\sigma,\xi) - \Phi(\sigma,\xi) \geqq e_1\,(|\xi|^2 + |\xi|^4) ,$$

wobei $e_1 = \min\{1/5, 2k^2/7\}$ (mit $\varepsilon = 10/7$ in (4.26)) ist. □

<u>4.3.</u> Wir vereinbaren für diesen Abschnitt die folgende

Voraussetzung 4.4. <u>Voraussetzung</u> 1.2 <u>sei mit einer Zahl</u> δ, $0 < \delta \leqq 1$, <u>erfüllt, und sei</u> $0 < \lambda \leqq 1$.

<u>Mit</u> $f \in L^2_{\rho_\delta}(G)$ <u>sei die Funktion</u> $u \in H^2_{g_\delta 0}(G) \cap G^4_{g_\delta}(G)$ <u>eine schwache Lösung der Gleichung</u>

$$(L_0 - m - k^4 - i\lambda)\, u = f$$

<u>mit</u>

$$D^\alpha\,(e^{-ikr}\,u) \in L^2(B(1)) \qquad \underline{\text{für}}\ |\alpha| = 1,2,3$$

<u>und mit</u>

$$\lambda u \in H^4_{r^{1/2}}(G) .$$

Sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine vom Parameter R_0 ($R_0 \geqq e$, hinreichend groß) abhängige Glättungsfunktion mit

$$\phi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leqq R_0 \\ 1 & \text{für } |x| \geqq 2R_0 \end{cases} \tag{4.27}$$

und mit $0 \leqq \phi(x) \leqq 1$ für $R_0 < |x| < 2R_0$. Man schreibt

$$w := \phi\, e^{-ikr}\, u , \qquad f_1 := (L_0 - m - k^4)\,\phi u . \tag{4.28}$$

In den folgenden Betrachtungen seien C und C_1 von u, R, R_0, λ und δ unabhängige positive Konstanten und $K_R(w)$ bzw. $J_R(w)$ Restglieder mit der Abschätzung

$$(4.29)\quad |K_R(w)| \leqq C\Big(R\sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 3}\|D^\alpha w\|^2_{0,S(R)} + \lambda\sum_{|\alpha|\leqq 3}\|r^{1/2}D^\alpha w\|^2_{0,S(R)} + (\ln R)^{-1}\|w\|^2_{0,S(R)}\Big)$$

bzw.

$$(4.30)\quad |J_R(w)| \leqq C\Big(\sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 2}(R_0^{-1/2}\|D^\alpha w\|^2_{0,G} + R_0^{-1/4}\lambda\|r^{1/2}D^\alpha w\|^2_{0,G}) + R_0^{1/2}\|w\|^2_{4,g_\delta,G} + (\ln R_0)^{-1}\lambda\|w\|^2_{0,q_\delta,G}\Big),$$

wobei $q_\delta(x) := (\ln(e+|x|))^{-\delta/2}$ ist.

Im Beweis der folgenden drei Lemmata benutzen wir wiederholt die Abschätzungen

$$(4.31)\qquad \frac{1}{2}(\ln|x|)^{-\delta} \leqq q_\delta^2(x) \leqq (\ln|x|)^{-\delta},$$

$$(4.32)\qquad \frac{1}{8}|x|^{-1}(\ln|x|)^{-1-\delta} \leqq g_\delta^2(x) \leqq |x|^{-1}(\ln|x|)^{-1-\delta},$$

die für alle $|x| \geqq e$ und $0 < \delta \leqq 1$ gelten.

Im ersten Lemma werden wir zeigen, wie man die zwei ersten Glieder in Ungleichung (4.3) majorisieren kann:

Lemma 4.5. Voraussetzung 4.4 sei erfüllt. Dann gilt die Abschätzung

$$(4.33)\quad C_1\sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 2}(\|D^\alpha w\|^2_{0,G} + \lambda\|r^{1/2}D^\alpha w\|^2_{0,G})$$
$$\leqq \mathrm{Re}\sum_{1\leqq|\alpha|,|\beta|\leqq 2}(((2|\alpha|-1)+2\lambda r K)\,b_{\alpha\beta}D^\beta w, D^\alpha w)_{0,G}$$
$$+ C R_0^{-1/4}\Big(\sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 2}(\|D^\alpha w\|^2_{0,G} + \lambda\|r^{1/2}D^\alpha w\|^2_{0,G}) + \|w\|^2_{0,g_\delta,G} + \lambda\|w\|^2_{0,q_\delta,G}\Big).$$

Beweis. Die Behauptung folgt mittels Lemma 4.3, wenn man ähnliche Überlegungen wie Vogelsang [42], Beweis von Lemma 4.2, auf die Formen

$$a[w] \;:=\; \mathrm{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq 2} ((2|\alpha| - 1)\, b^*_{\alpha\beta}\, D^\beta w \,,\, D^\alpha w)_{0,G} \,,$$

$$b[w] \;:=\; \mathrm{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq 2} 2\,(b^*_{\alpha\beta}\, D^\beta\, ((rK)^{1/2} w) \,,\, D^\alpha\, ((rK)^{1/2} w))_{0,G}$$

anwendet und wenn man (4.17) sowie die Abschätzungen (4.31)-(4.32) berücksichtigt. □

Wir werden jetzt das erste Glied auf der rechten Seite von Ungleichung (4.33) folgenderweise abschätzen:

Lemma 4.6. <u>Voraussetzung</u> 4.4 <u>sei erfüllt. Dann gilt die Abschätzung</u>

$$(4.34)\quad \mathrm{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq 2} (b_{\alpha\beta}\, D^\beta w \,,\, ((2|\alpha| - 1) + 2\lambda r K)\, D^\alpha w)_{0,G}$$
$$\leqq C \Big(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq 2} (R_0^{-1/2}\, \|D^\alpha w\|^2_{0,G} + R_0^{-1/4}\, \lambda\, \|r^{1/2} D^\alpha w\|^2_{0,G})$$
$$+ R_0^{1/2}\, \|w\|^2_{0,g_\delta,G} + (\ln R_0)^{-1}\, \lambda\, \|w\|^2_{0,q_\delta,G} + R_0^{1/2}\, \|f_1\|^2_{0,\rho_\delta,G} \Big) .$$

Beweis. A. Zuerst werden wir die Ausdrücke

$$\mathrm{Re}\; ((B + T - i\lambda)\, w \,,\, w)_{0,G(R)} \,,$$
$$\mathrm{Re}\; ((B + T - i\lambda)\, w \,,\, rKw)_{0,G(R)} \,,$$
$$\mathrm{Re}\; ((B + T - i\lambda)\, w \,,\, r D_r w)_{0,G(R)}$$

umformen. Für die Herleitung der gewünschten Abschätzung berücksichtigen wir dann die Relationen (4.20) und (4.28).

Durch partielle Integration (vgl. Beweisteil A von Satz 3.1) erhalten wir nach (4.16)-(4.19) und (4.8) für $R \geqq R_0$ (vgl. Vogelsang [42], Lemma 3.1)

$$(4.35)\quad \mathrm{Re}\; ((B + T - i\lambda)\, w \,,\, w)_{0,G(R)}$$
$$= \mathrm{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq 2} (b_{\alpha\beta}\, D^\beta w \,,\, D^\alpha w)_{0,G(R)} + \mathrm{Re}\; (B_2 w \,,\, w)_{0,G(R)}$$
$$+ J_R(w) + K_R(w) \,,$$

$$(4.36)\quad \lambda\, \mathrm{Re}\; ((B + T - i\lambda)\, w \,,\, rKw)_{0,G(R)}$$
$$= \lambda\, \mathrm{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq 2} (b_{\alpha\beta}\, D^\beta w \,,\, rKD^\alpha w)_{0,G(R)} + \lambda\, \mathrm{Im}\; (w \,,\, r D_r w)_{0,G(R)}$$
$$+ J_R(w) + K_R(w) \,.$$

Ähnlich wie im Beweis von Satz 3.1 und wie Vogelsang [42], Lemma 3.2-Lemma 3.3, erhalten wir nach (4.16)-(4.19) und (4.8) für $R \geqq R_0$

$$(4.37)\quad \mathrm{Re}\,((B+T-i\lambda)\,w\,,\,r\,D_r w)_{0,G(R)}$$
$$= \mathrm{Re} \sum_{1\leqq|\alpha|,|\beta|\leqq 2} \left(b_{\alpha\beta}\, D^\beta w\,,\,\left(|\alpha|-\tfrac{n}{2}\right) D^\alpha w\right)_{0,G(R)}$$
$$-\frac{1}{2}(n-1)\,\mathrm{Re}\,(B_2 w\,,\,w)_{0,G(R)} - \lambda\,\mathrm{Im}\,(w\,,\,r\,D_r w)_{0,G(R)}$$
$$-\frac{1}{2}\Gamma_R(w) + J_R(w) + K_R(w)\,,$$

wobei

$$\Gamma_R(w) := \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} \int_{\partial G(R)} (x\cdot\nu)\,\nu^\alpha\, b_{\alpha\beta}\,\nu^\beta\, |D_\nu^2 w|^2\, do$$

ist.

B. Weil nach Lemma 4.2 und (4.28)

$$(B+T-i\lambda)\,w = e^{-ikr} f_1$$

gilt, schließen wir aus den Gleichungen (4.35)-(4.37)

$$(4.38)\quad \mathrm{Re} \sum_{1\leqq|\alpha|,|\beta|\leqq 2} (b_{\alpha\beta}\, D^\beta w\,,\,((2|\alpha|-1)+2\lambda r K)\, D^\alpha w)_{0,G(R)}$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\,\left(e^{-ikr} f_1\,,\,r\,D_r w + \left(\tfrac{1}{2}(n-1)+\lambda r K\right) w\right)_{0,G(R)}$$
$$+\Gamma_R(w) + J_R(w) + K_R(w)\,.$$

Nach (4.31)-(4.32) gilt

$$(4.39)\quad \left|\left(e^{-ikr} f_1\,,\,r\,D_r w + \left(\tfrac{1}{2}(n-1)+\lambda r K\right) w\right)_{0,G}\right|$$
$$\leqq C\,\left(R_0^{1/2}\,\|f_1\|^2_{0,\rho_\delta,G} + R_0^{-1/2}\,(\|\nabla w\|^2_{0,G} + \|w\|^2_{0,g_\delta,G} + \lambda\,\|w\|^2_{0,q_\delta,G})\right)\,.$$

Mit gleichen Überlegungen wie Vogelsang [41], Lemma 2.3, kann man die Gültigkeit der Ungleichung

$$(4.40)\quad \|w\|^2_{4,g_\delta,G} \leqq C\,(\|f_1\|^2_{0,g_\delta,G} + \|w\|^2_{0,g_\delta,G})$$

verifizieren.

Durch die Wahl einer Folge $R_j \to \infty$ mit $K_{R_j}(w) \to 0$ erhalten wir für $j \to \infty$ aus (4.38) die Behauptung, wenn wir $\Gamma_{R_j}(w) \leqq 0$, (4.30) und (4.39)-(4.40) beachten. □

Nach den Lemmata 4.5 und 4.6 bleibt noch eine A-priori-Abschätzung für $\|w\|_{0,g_\delta,G}$ herzuleiten:

Lemma 4.7. Voraussetzung 4.4 sei erfüllt, und sei $R_0 \geqq e$ fest. Dann existiert zu jedem gegebenen δ, $0 < \delta \leqq 1$, eine von u und λ unabhängige Zahl $R_1(\delta,R_0) > R_0$ derart, daß die Abschätzung

$$(4.41)\quad \|w\|^2_{0,g_\delta,G} + \frac{\lambda}{\delta}\|w\|^2_{0,q_\delta,B(R_1)} \leqq C\left(R_0^{-3/4}\sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 2}\|D^\alpha w\|^2_{0,G} + \|f_1\|^2_{0,\rho_\delta,G} + R_0^{-3/4}\|w\|^2_{4,G(R_1)}\right)$$

gilt.

Beweis. Die Behauptung folgt ähnlich wie bei Vogelsang [42], Lemma 3.5 und Lemma 3.6. Das wesentliche Hilfsmittel des Beweises der Behauptung ist die Integrationformel

$$\frac{1}{\delta}\int_{R_1}^{R_2}(\ln R)^{-\delta}\,\omega(R)\,dR = \int_{R_1}^{R_2} R^{-1}(\ln R)^{-1-\delta}\left(\int_{R_1}^{R}\omega(r)\,dr\right)dR + \frac{1}{\delta}(\ln R_2)^{-\delta}\int_{R_1}^{R_2}\omega(R)\,dR\,,$$

die für alle auf $[R_1,R_2]$ ($R_1 \geqq e$) stetigen Funktionen ω und für alle reellen Zahlen $\delta > 0$ gültig ist. Dabei werden auch die Abschätzungen (4.31)-(4.32) wiederholt benutzt. □

4.4. Nun sind wir in der Lage, die gewünschte A-priori-Abschätzung für die Ausstrahlungslösungen zu beweisen.

Beweis von Satz 4.1. Aus den Lemmata 4.5, 4.6 und 4.7 ergibt sich

$$(4.42)\quad C_1\left(\sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 2}(\|D^\alpha w\|^2_{0,G} + \lambda\,\|r^{1/2}D^\alpha w\|^2_{0,G}) + R_0^{1/2}\|w\|^2_{0,g_\delta,G} + \frac{\lambda}{\delta}\|w\|^2_{0,q_\delta,G}\right)$$
$$\leqq C\left(R_0^{-1/4}\sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 2}(\|D^\alpha w\|^2_{0,G} + \lambda\,\|r^{1/2}D^\alpha w\|^2_{0,G}) + R_0^{1/2}\|(L_0 - m - k^4 - i\lambda)\,\phi u\|^2_{0,\rho_\delta,G} + \|w\|^2_{4,G(R_1)} + \frac{\lambda}{\delta}\|w\|^2_{0,q_\delta,G(R_1)}\right),$$

wobei die Zahl $R_1(\delta,R_0) > R_0$ zu den gegebenen δ und R_0 gemäß Lemma 4.7 gewählt sei.

Nach Vogelsang [41], Lemma 2.3, kann man die Gültigkeit der Ungleichung

$$(4.43) \qquad \|u\|_{4,g_\delta,G} \leqq C\,(\|(L_0 - m - k^4 - i\lambda)\,u\|_{0,g_\delta,G} + \|u\|_{0,g_\delta,G})$$

verifizieren.

Die Ungleichung (4.3) folgt nun mit $R_2 = 2R_1$ aus (4.42)-(4.43), wenn wir die Definitionen (4.27)-(4.28) berücksichtigen, R_0 genügend groß wählen, auf die beiden Seiten der erhaltenen Ungleichung die Normen über die fehlenden beschränkten Teilgebiete addieren, und die Abschätzung (Vogelsang [41], Lemma 2.3)

$$\|u\|_{4,G(R_1)} \leqq C\,(\|(L_0 - m - k^4 - i\lambda)\,u\|_{0,G(2R_1)} + \|u\|_{2,G(2R_1)})$$

beachten. □

5. Eindeutigkeit und Existenz der Ausstrahlungslösung

5.1. Eindeutigkeit. In Abschnitt 3 (Satz 3.1) haben wir hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß k^4 kein Eigenwert des Operators $L_0 - m$ auf seiner Definitionsmenge $D(L_0 - m) = H_0^2(G) \cap H^4(G)$ ist. Anschließend zeigen wir jetzt, daß jede Ausstrahlungslösung u der Gleichung

$$(5.1) \qquad (L_0 - m - k^4)\,u = 0$$

in $D(L_0 - m)$ liegt.

Zuerst beweisen wir zwei Hilfssätze:

Lemma 5.1. *Voraussetzung* 1.2 *sei mit einem* δ, $0 < \delta \leqq 1$, *erfüllt. Sei* $u \in F_\delta$ *eine Lösung des Problems* 1.m.k *zu Gleichung* (5.1). *Dann gilt* $D^\alpha\,(e^{-ikr}u) \in L^2(B(1))$ *für* $1 \leqq |\alpha| \leqq 4$.

Beweis. A. Folgend einer Anregung von Witsch führen wir den Beweis in zwei Teilen durch. Im ersten Teil B zeigen wir, daß in einem Randstreifen Q' von G $e^{-ikr}u \in H^4(Q')$ gilt. Wenn G ein Außengebiet ist, kann Teil B weggelassen werden. Mit ähnlichen Methoden wie Witsch [49], Lemma 2.3, zeigen wir in Beweisteil C, daß

$D^{\alpha}(e^{-ikr}u) \in L^2(G-\overline{Q'})$ für $1 \leqq |\alpha| \leqq 4$ gilt.

B. Wir benutzen die gleichmäßigen Überdeckungen $\{Q_j'\}$ und $\{Q_j\}$ von $\bar{G}$ gemäß Definition I.1.3. Man schreibe

$$I_1 := \{ j \in \mathbb{N} \mid Q_j \cap \partial G \neq \emptyset \} ,$$
$$I_2 := \{ j \in \mathbb{N} \mid Q_j \cap \partial G = \emptyset \}$$

und $w := e^{-ikr}u$. In den folgenden Zeilen bezeichnen wir mit C verschiedene von j, w und η unabhängige positive Konstanten.

Wegen $u \in F_\delta$ gilt $w \in H^2_{g_\delta 0}(G) \cap H^4_{g_\delta}(G)$ (man kann $0 \in \mathbb{R}^n - \bar{G}$ annehmen). Mittels Lemma 4.2 erhalten wir aus (5.1)

(5.2) $$((B+T)\,w\,,\,\eta)_{0,G} = 0$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(G)$. Folglich gilt nach Agmon [1], Theorem 9.5

(5.3) $$\|w\|_{4,G\cap Q_j'} \leqq C\,\|w\|_{2,G\cap Q_j''} ,$$

wobei Q_j'' eine offene Menge mit $\overline{Q_j'} \subset Q_j''$, $\overline{Q_j''} \subset Q_j$, $j \in I_1$, ist (vgl. Definition I.1.3). Sei $\phi_j \in C_0^4(Q_j)$ mit $\phi_j|_{Q_j''} \equiv 1$. Mittels (5.2) erhalten wir aus der Koerzitivität

(5.4) $$\|w\|_{2,G\cap Q_j''} \leqq \|\phi_j w\|_{2,G\cap Q_j} \leqq C\,\|w\|_{1,G\cap Q_j} .$$

Für die Funktionen $w \in H^2_{g_\delta 0}(G)$ gilt in $G \cap Q_j$ mit $j \in I_1$ die Poincarésche Ungleichung

(5.5) $$\|w\|_{1,G\cap Q_j} \leqq C\,\|\nabla w\|_{0,G\cap Q_j}$$

(vgl. Definition I.1.3 und Agmon [1], Beweis der Poincaréschen Ungleichung, S.74).

Wegen $\nabla w \in L^2(G)$ ergibt sich aus (5.3)-(5.5) nach Summation über $j \in I_1$ (vgl. Definition I.1.3) $w \in H^4(Q')$, wobei $Q' := \bigcup_{j\in I_1} G \cap Q_j'$ ist.

C. Nach (5.2) erhalten wir durch partielle Integration für alle $\eta \in C_0^\infty(Q_j)$, $j \in I_2$, und für alle $i = 1,\dots,n$

(5.6) $$\begin{aligned} 0 &= ((B+T)\,w\,,\,D_i\eta)_{0,Q_j} \\ &= -((B+T)\,D_i w\,,\,\eta)_{0,Q_j} - ((D_i(B+T))\,w\,,\,\eta)_{0,Q_j} . \end{aligned}$$

Weil $D_i b_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(g_\delta)$, $D_i h = \mathcal{O}(g_\delta)$ und $D_i t_\alpha = \mathcal{O}(g_\delta)$ für $|x| \to \infty$ gelten (vgl. Voraussetzung 1.2 und Abschnitt 4.2), besteht für alle $\eta \in C_0^\infty(Q_j)$ mit $j \in I_2$ die Abschätzung

$$(5.7) \qquad |(\nabla w\ ,\ (B+T)'\ \eta)_{0,Q_j}| \leqq C\ \|w\|_{4,g_\delta,Q_j}\ \|\eta\|_{0,Q_j}\ ,$$

wobei $(B+T)'$ der dem Operator $B+T$ (formal) adjungierte Operator ist.

Aus Agmon [1], Lemma 6.3, folgt jetzt

$$(5.8) \qquad \sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 4} \|D^\alpha w\|_{0,Q_j'} \leqq C\ (\|w\|_{4,g_\delta,Q_j} + \|\nabla w\|_{0,Q_j})\ .$$

Summation über $j \in I_2$ ergibt $D^\alpha w \in L^2(G-\overline{Q'})$ für $1 \leqq |\alpha| \leqq 4$. Folglich nach Teil B (oder im Falle eines Außengebietes nach $w \in H^4(G(R)-\{0\})$ für jedes $R < \infty$) gilt dann $D^\alpha\ (e^{-ikr}\ u) \in L^2(B(1))$ für $1 \leqq |\alpha| \leqq 4$. □

Lemma 5.2. <u>Voraussetzung</u> 1.2 <u>sei mit einer Zahl</u> δ , $0 < \delta \leqq 1$, <u>erfüllt</u>. <u>Sei</u> $u \in H^2_{g_\delta 0}(G) \cap H^4_{g_\delta}(G)$, $u \in L^2(G)$ <u>und</u> $(L_0 - m - k^4)\ u \in L^2(G)$. <u>Dann gilt</u> $u \in H^4(G)$.

Beweis. (Vgl. Vogelsang [41], Lemma 2.4, bezüglich Außengebiete ohne Regularitätsvoraussetzungen siehe man Witsch [49], Lemma 2.3.) Es sei eine Glättungsfunktion $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wie $\phi_{3,j}$ im Beweis von Lemma II.1.6 gewählt. Dann gibt es eine positive Konstante C derart, daß

$$(5.9) \qquad |D^\alpha\ \phi_j(x)|^2 \leqq C\ (g_\delta(x))^2$$

für $|\alpha| > 0$ gilt. Wenden wir nun Lemma 2.3 von Vogelsang [41] und (5.9) auf die Funktion $\phi_j u \in H_0^2(G) \cap H^4(G)$ an, so erhalten wir mit einer von u und j unabhängigen Konstanten C die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u\|_{4,G(j)} &\leqq C\ (\|(L_0-m-k^4)\ (\phi_j\ u)\|_{0,G} + \|\phi_j\ u\|_{0,G}) \\ &\leqq C\ (\|(L_0-m-k^4)\ u\|_{0,G} + \|u\|_{3,g_\delta,G} + \|u\|_{0,G}) < \infty\ , \end{aligned}$$

und der Grenzübergang $j \to \infty$ liefert die Behauptung. □

Satz 5.3. <u>Voraussetzung</u> 1.2 <u>sei mit einer Zahl</u> δ , $0 < \delta \leqq 1$, <u>erfüllt, und sei</u> k^4 <u>kein Eigenwert von</u> $L_0 - m$ <u>auf der Definitionsmenge</u> $D(L_0 - m)$. <u>Dann ist die zur Klasse</u> F_δ <u>gehörende Ausstrahlungslösung eindeutig.</u>

Beweis. A. (Vgl. Vogelsang [42], §5.) Es seien $u_1, u_2 \in F_\delta$

zwei Lösungen und $u := u_1 - u_2$. Dann folgt aus Lemma 5.1, daß u eine schwache Lösung der Gleichung (5.1) mit den Eigenschaften

$$u \in H^2_{g_\delta 0}(G) \cap H^4_{g_\delta}(G) ,$$
$$D^\alpha (e^{-ikr} u) \in L^2(B(1)) , \qquad |\alpha| = 1,2$$

ist. Wir werden zeigen, daß dann auch

$$(5.10) \qquad \|u\|_{0,G} \leqq C \Big(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq 2} \|D^\alpha (e^{-ikr} u)\|_{0,B(1)} + \|u\|_{4,g_\delta,G} \Big)$$

gilt.

Nach Voraussetzung 1.2 folgt aus (5.1) durch partielle Integration für $R \geqq e$ (vgl. Beweisteil A von Satz 3.1)

$$(5.11) \qquad 0 = ((L_0 - m - k^4)\, u , u)_{0,G(R)} - (u , (L_0 - m - k^4)\, u)_{0,G(R)}$$
$$= 2i \,\mathrm{Im} \big[(\hat{x}\, \mathcal{D}^T S\, \mathcal{D} \,\mathrm{grad}\, u , u)_{0,S(R)} - (\mathcal{D}^T(\hat{x})\, S\, \mathcal{D}\, \mathrm{grad}\, u , \mathrm{grad}\, u)_{0,S(R)} \big]$$
$$= 2i \,\mathrm{Im} \big[(\hat{x}\, \mathcal{D}^T S^* \mathcal{D} \,\mathrm{grad}\, u , u)_{0,S(R)} - (\mathcal{D}^T(\hat{x})\, S^* \mathcal{D}\, \mathrm{grad}\, u , \mathrm{grad}\, u)_{0,S(R)} \big] + J_R(u) ,$$

wobei für die Größe $J_R(u)$ die Abschätzung

$$(5.12) \qquad |J_R(u)| \leqq C \,\|u\|^2_{3,g_\delta,S(R)}$$

mit einer von u und R unabhängigen Konstanten $C > 0$ gilt.

Es sei $w = e^{-ikr} u$. Wir ersetzen u in (5.11) durch $e^{ikr} w$. Wegen $\hat{x}\, \mathcal{D}^T(\sigma)\, S^* \mathcal{D}(\sigma)\, \sigma^T = \mathcal{D}^T(\hat{x})\, S^* \mathcal{D}(\sigma)\, \sigma^T \cdot \sigma^T = k^3$ mit $\sigma = k\hat{x}$ erhalten wir aus (5.11) mit geeigneten Koeffizienten $a_{\alpha\beta} \in C^4_{**}(\overline{B(e)})$

$$(5.13) \qquad 2\,k^3 \,\|u\|^2_{0,S(R)}$$
$$= \mathrm{Re} \sum_{\substack{0 \leqq |\alpha| \leqq 1 \\ 1 \leqq |\beta| \leqq 3}} (a_{\alpha\beta} D^\beta w , D^\alpha w)_{0,S(R)} + J_R(u) + \mathrm{Re}\, (\mathcal{O}(r^{-1})\, u , u)_{0,S(R)} .$$

Wir integrieren (5.13) über das Intervall (R_1,R_2) , wobei R_1 genügend groß gewählt werden soll. Auf der rechten Seite wird ferner die Integration partiell so durchgeführt, daß in beiden Faktoren in den vorkommenden Skalarprodukten höchstens Ableitungen $D^\alpha w$ mit $|\alpha| \leqq 2$ auftreten. Mittels (5.12) erhalten wir mit einer von u, w, R_1 und R_2 unabhängigen Konstanten C

$$(5.14) \quad \|u\|^2_{0,G(R_1,R_2)}$$

$$\leqq C \Big\{ \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq 2} (\|D^\alpha w\|^2_{0,G(R_1,R_2)} + \|D^\alpha w\|_{0,G(R_1,R_2)} \|u\|_{0,G(R_1,R_2)})$$

$$+ \|u\|^2_{3,g_\delta,G(R_1,R_2)} + \sum_{|\alpha| \leqq 2} \|D^\alpha w\|^2_{0,S(R_1)}$$

$$+ \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq 2} R_2 \|D^\alpha w\|^2_{0,S(R_2)} + R_2^{-1} \|w\|^2_{0,S(R_2)} \Big\} + \frac{1}{3} \|u\|^2_{0,G(R_1,R_2)} .$$

Die Abschätzung (5.10) folgt unmittelbar aus (5.14), wenn wir der Grenzübergang $R_2 \to \infty$ für eine geeignete Teilfolge durchführen.

B. Aus (5.10) folgt $u \in L^2(G)$, und wegen $u \in F_\delta$ gilt $u \in H^2_{g_\delta 0}(G) \cap H^4_{g_\delta}(G) \cap H^4(G)$ nach Lemma 5.2. Folglich ist $u \in D(L_0 - m)$ eine schwache Lösung der Gleichung (5.1).

Da nach der Voraussetzung k^4 kein Eigenwert des Operators $L_0 - m$ auf $D(L_0 - m)$ ist, gilt $u = 0$, woraus die Eindeutigkeit folgt. □

5.2. Existenz. Die Existenz des Problems 1.m.k wird mit der Methode der Grenzabsorption nachgewiesen (vgl. Vogelsang [42], §5):

Satz 5.4. Sei Voraussetzung 1.2 mit einer Zahl δ, $0 < \delta \leqq 1$, erfüllt, und sei k^4 kein Eigenwert von $L_0 - m$ auf $D(L_0 - m)$. Dann hat Problem 1.m.k zu jedem f mit $f \in L^2_{\rho_\delta}(G)$ eine (eindeutige) Ausstrahlungslösung aus der Klasse F_δ.

Beweis. A. Wir wählen eine Folge $\{f_{\lambda_\nu}\} \subset L^2_{\rho_\delta}(G)$ mit $1 \geqq \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots \to 0$ für $\nu \to \infty$, die in $L^2_{\rho_\delta}(G)$ für $\lambda_\nu \to 0$ gegen f konvergiert. Nach Satz 2.1 existiert zu jedem $f_{\lambda_\nu} \in L^2_{\rho_\delta}(G)$ genau eine Lösung $u_{\lambda_\nu} \in H^2_0(G) \cap H^4(G)$ der Gleichung

$$(5.15) \qquad (L_0 - m - k^4 - i\lambda_\nu)\, u_{\lambda_\nu} = f_{\lambda_\nu}$$

mit $u_{\lambda_\nu} \in H^4_{r^{1/2}}(G)$. Nach Bemerkung 1.4 sind die Voraussetzungen von

Satz 4.1 erfüllt, und mit von u_{λ_ν} und λ_ν unabhängigen Konstanten C_1 und R_1 gilt die Abschätzung

$$(5.16)\qquad \sum_{1\leq|\alpha|\leq 2} \|D^\alpha (e^{-ikr} u_{\lambda_\nu})\|_{0,B(1)} + \|u_{\lambda_\nu}\|_{4,g_\delta,G} \leq C_1 \left(\|f_{\lambda_\nu}\|_{0,\rho_\delta,G} + \|u_{\lambda_\nu}\|_{2,G(R_1)}\right) .$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

B. Erstens nehmen wir an, daß eine Konstante $C > 0$ derart existiert, daß

$$(5.17)\qquad \sup_{\{\lambda_\nu\}} \|u_{\lambda_\nu}\|_{2,G(R_1)} < C$$

gilt. Dann ergibt sich nach (5.16)

$$\sup_{\{\lambda_\nu\}} \|u_{\lambda_\nu}\|_{4,g_\delta,G} < C < \infty ,$$

und folglich ist

$$(5.18)\qquad \sup_{\{\lambda_\nu\}} \|u_{\lambda_\nu}\|_{2,G(N)} < C(N)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$.

Wir beweisen zuerst, daß für die Folge $\{u_{\lambda_\nu}\} \subset H_0^2(G)$ mit (5.18) eine Teilfolge $\{u_{\lambda'_\nu}\} \subset \{u_{\lambda_\nu}\}$ und ein $u \in H_0^2(G)$ derart gibt, daß für die Restriktionen die Konvergenz

$$(5.19)\qquad u_{\lambda'_\nu}\big|_{G(N)} \to u\big|_{G(N)} \qquad \text{in } H^1(G(N))$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.

Für $u_{\lambda_\nu} \in H_0^2(G)$ gilt $u_{\lambda_\nu}\big|_{G(N)} \in H^2(G(N),\partial G(N))$, und wegen (5.18) gibt es eine Teilfolge $\{u_{\lambda'_\nu}\} \subset \{u_{\lambda_\nu}\}$, die schwach gegen ein Element $u \in H^2(G(N),\partial G(N))$ in $H^2(G(N))$ für alle $N \in \mathbb{N}$ konvergiert: $u_{\lambda'_\nu} \rightharpoonup u$. Es seien $N_1 > N$ und $\phi \in C_0^\infty(K(N_1))$ mit $\phi\big|_{G(N)} \equiv 1$. Dann ist $\phi u_{\lambda'_\nu} \in H_0^2(G(N_1))$ und $\phi u_{\lambda'_\nu} \rightharpoonup \phi u$ in $H^2(G(N_1))$, wobei $\phi u \in H_0^2(G(N_1))$ ist. Wegen Beschränktheit von $G(N_1)$ ist die Einbettung von $H_0^2(G(N_1))$ in $H_0^1(G(N_1))$ nach dem Rellichschen Auswahlsatz (Agmon [1], Theorem 8.3) kompakt. Also gilt $\phi u_{\lambda'_\nu} \to \phi u$ in

$H_0^1(G(N_1))$. Wegen $\phi|_{G(N)} \equiv 1$ folgt (5.19).

Wenden wir Lemma 2.3 von Vogelsang [41] und Lemma 6 von Leis [21] auf die Funktionenfolge $\{u_{\lambda'_\nu}\} \subset H_0^2(G) \cap H^4(G)$ an, so erhalten wir über (5.15) mit positiven Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$, $N, N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ $(N < N_1 < N_2)$

$$\begin{aligned}
&\|u_{\lambda'_\nu} - u_{\lambda'_\mu}\|_{4,G(N)} \\
&\leqq C \left(\|f_{\lambda'_\nu} - f_{\lambda'_\mu}\|_{0,G(N_1)} + \lambda'_\nu \|u_{\lambda'_\nu}\|_{0,G(N_1)} + \lambda'_\mu \|u_{\lambda'_\mu}\|_{0,G(N_1)} \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \|u_{\lambda'_\nu} - u_{\lambda'_\mu}\|_{2,G(N_1)}\right) \\
&\leqq C \left(\|f_{\lambda'_\nu} - f_{\lambda'_\mu}\|_{0,G(N_2)} + \lambda'_\nu \|u_{\lambda'_\nu}\|_{0,G(N_2)} + \lambda'_\mu \|u_{\lambda'_\mu}\|_{0,G(N_2)} \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \|u_{\lambda'_\nu} - u_{\lambda'_\mu}\|_{1,G(N_2)}\right) .
\end{aligned}$$

Folglich konvergiert wegen (5.19) die Folge $\{u_{\lambda'_\nu}\}$ in $H_*^4(G)$ gegen $u \in H_{*0}^2(G) \cap H_*^4(G)$. Aus (5.15) und (5.16) folgt dann, daß die Grenzfunktion u in F_δ liegt.

C. Der zweite Fall $\sup_{\{\lambda_\nu\}} \|u_{\lambda_\nu}\|_{2,G(R_1)} = \infty$ führt zu einem Widerspruch. Man nehme an, daß eine Teilfolge $\{u_{\lambda'_\nu}\}$ mit $\|u_{\lambda'_\nu}\|_{2,G(R_1)} \to \infty$ für $\lambda'_\nu \to 0$ existiert. Es sei

$$v_{\lambda'_\nu} := u_{\lambda'_\nu} \left(\|u_{\lambda'_\nu}\|_{2,G(R_1)}\right)^{-1} .$$

Dann ist

$$(L_0 - m - k^4 - i\lambda'_\nu)\, v_{\lambda'_\nu} = g_{\lambda'_\nu} ,$$

wobei

$$g_{\lambda'_\nu} := f_{\lambda'_\nu} \left(\|u_{\lambda'_\nu}\|_{2,G(R_1)}\right)^{-1} \to 0$$

in $L^2_{\rho_\delta}(G)$ für $\lambda'_\nu \to 0$ gilt.

Wenden wir das oben angegebene Verfahren auf die Folge $\{v_{\lambda'_\nu}, g_{\lambda'_\nu}\}$ an, so folgt die Existenz einer in $H_*^4(G)$ gegen eine Ausstrahlungslösung $v \in F_\delta$ der Gleichung $(L_0 - m - k^4)\, v = 0$ konvergenten Teilfolge $\{v_{\lambda''_\nu}\}$. Satz 5.3 liefert dann notwendigerweise $v = 0$, was im Widerspruch zu $\|v_{\lambda''_\nu}\|_{2,G(R_1)} = 1$ steht. □

Literatur

[1] Agmon, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. - Van Nostrand Mathematical Studies 2. D. Van Nostrand Company, Inc., New York - Toronto - London - Melbourne, 1965.

[2] Besov, O. V., V. P. Il'in, L. D. Kudrjavcev, P. I. Lizorkin und S. M. Nikol'skiĭ: Imbedding theory for classes of differentiable functions of several variables. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 105, 1976, S. 57-94.

[3] Bröhl, A.: Über die Energie der zeitabhängigen Plattengleichung. - Bonn. Math. Schr. (Erscheint demnächst.)

[4] Browder, F. E.: On spectral theory of elliptic differential operators. - Math. Ann. 142, 1961, S. 22-130.

[5] Clark, C.: Inequalities of Poincaré type and applications to singular elliptic operators. - Math. Ann. 176, 1968, S. 305-316.

[6] Courant, R., und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. I. - [2. Auflage.] Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften XII. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1931. [3. Auflage: Heidelberger Taschenbücher 30. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1968.]

[7] -"- -"- Methoden der mathematischen Physik. II. - Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften XLVIII. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1937. [2. Auflage: Heidelberger Taschenbücher 31. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1968.]

[8] Duvaut, G., und J. L. Lions: Inequalities in mechanics and physics. - Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 219. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1976.

[9] Džanilidze, G. Yu.: Survey of the work published in the USSR on the theory of the bending of thick and thin plates. - Amer. Math. Soc. Transl. (1) 11, 1962, S. 231-257.

[10] Eidus, D. M.: The principle of limit amplitude. - Russian Math. Surveys 24, 1969, S. 97-168.

[11] Fichera, G.: Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. - Lecture Notes in Mathematics 8. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1965.

[12] -"- Existence theorems in elasticity. - Handbuch der Physik VI a/2. Festkörpermechanik II. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972, S. 347-389.

[13] Finozenok, G. N.: Nature of the spectrum of the first boundary value problem for higher order equations in infinite domains. - Math. Notes 1, 1967, S. 381-385.

[14] -"- On boundary problems for equations of higher orders in infinite domains. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 89, 1970, S. 251-273.

[15] Girkmann, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. - [4. Auflage.] Springer-Verlag, Wien, 1956.

[16] Jäger, W.: Zur Theorie der Schwingungsgleichung mit variablen Koeffizienten in Außengebieten. - Math. Z. 102, 1967, S. 62-88.

[17] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. - Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 132. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1966.

[18] Kudrjavcev, L. D.: Imbedding theorems for a class of functions defined on entire space or on a half space II. - Amer. Math. Soc. Transl. (2), 74, 1968, S. 227-260.

[19] Landau, L. D., und E. M. Lifshitz: Course of theoretical physics 7: Theory of elasticity. - Pergamon Press, London - New York - Paris - Los Angeles, 1959.

[20] Leis, R.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. - B·I-Hochschultaschenbücher 165/165a. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

[21] -"- Außenraumaufgaben zur Plattengleichung. - Arch. Rational Mech. Anal. 35, 1969, S. 226-233.

[22] Leis, R.: Zur Theorie elastischer Schwingungen. - Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Bonn 72, St. Augustin, 1973.

[23] -"- Zur Theorie der Plattengleichung. - Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Bonn 101, St. Augustin, 1975.

[24] Mansfield, E. H.: The bending and stretching of plates. - International Series of Monographs on Aeronautics and Astronautics I:6. Pergamon Press, Oxford - London - New York, 1964.

[25] Michlin, S. G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik. - Akademie-Verlag, Berlin, 1962.

[26] Müller, Cl.: Zur Methode der Strahlungskapasität von H. Weyl. - Math. Z. 56, 1952, S. 80-83.

[27] Nečas, J.: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. - Masson et Cie, Éditeurs, Paris / Academia, Éditeurs, Prague, 1967.

[28] Polis, R.: Außenraumaufgaben in der Theorie der Plattengleichung. - Bonn. Math. Schr. 93, 1977.

[29] Rellich, F.: Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = 0$ durch ein Randintegral. - Math. Z. 46, 1940, S. 635-636.

[30] -"- Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ in unendlichen Gebieten. - Jber. Deutsch. Math.-Verein. 53, 1943, S. 57-65.

[31] Saranen, J.: Ausstrahlungsproblem des Laplace-Operators für eine Klasse der Gebiete mit unbeschränktem Rand. - Manuscripta Math. 20, 1977, S. 355-376.

[32] -"- A generalized plate equation with an exterior boundary value problem. - Ber. Univ. Jyväskylä Math. Inst. 17, 1977.

[33] Sedov, V. N.: Nonregular differential operators. Elliptic equations. - Differential Equations 8, 1972, S. 1588-1597.

[34] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über theoretische Physik. II. Mechanik der deformierbaren Medien. - [6. Auflage.] Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1970.

[35] -"- Vorlesungen über theoretische Physik. VI. Partielle Differentialgleichungen der Physik. - [6. Auflage.] Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1966.

[36] Teschke, H.: Die Dirichletsche Außenraumaufgabe zu elliptischen Differentialgleichungen vierter Ordnung und das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit. - Bonn. Math. Schr. 62, 1973.

[37] Timoshenko, S.: Theory of plates and shells. - Engineering Societies Monographs. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York - London, 1940.

[38] Vainberg, B. R.: Principles of radiation, limit absorption and limit amplitude in the general theory of partial differential equations. - Russian Math. Surveys 21, 1966, S. 115-163.

[39] Vekua, I. N.: New methods in solving elliptic boundary value problems. - North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics 1. North-Holland Publishing Company, Amsterdam / John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

[40] Velte, W.: Direkte Methoden der Variationsrechnung. - Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik 26. B. G. Teubner, Stuttgart, 1976.

[41] Vogelsang, V.: Elliptische Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten in Gebieten mit unbeschränktem Rand. - Manuscripta Math. 14, 1975, S. 379-401.

[42] -"- Das Ausstrahlungsproblem für elliptische Differentialgleichungen in Gebieten mit unbeschränktem Rand. - Math. Z. 144, 1975, S. 101-124.

[43] Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen. - Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1976.

[44] Weyl, H.: Kapazität von Strahlungsfeldern. - Math. Z. 55, 1952, S. 187-198.

[45] Wickel, W.: Außenraumaufgaben zur Plattengleichung mit Hilbertraummethoden. - Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Bonn 67, St. Augustin, 1973.

[46] -"- Zur Theorie der Dirichletschen Randwertaufgabe zum Operator $\Delta^2 - k^4$ im Innen- und Außenraum mit der Integralgleichungsmethode. - Bonn. Math. Schr. 68, 1973.

[47] Wienholtz, E.: Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. - Math. Ann. 135, 1958, S. 50-80.

[48] Witsch, K. J.: Schiefe Außenraumaufgaben zu elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. - Bonn. Math. Schr. 64, 1973.

[49] -"- The exterior Dirichlet problem for a class of fourth order elliptic equations. - J. Math. Anal. Appl. 49, 1975, S. 734-747.

[50] -"- Radiation conditions and the exterior Dirichlet problem for a class of higher order elliptic equations. - J. Math. Anal. Appl. 54, 1976, S. 820-839.

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
Sammonkatu 6
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland