JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Kuratowskin lause

Anna Pohjola

8. helmikuuta 2024

Tekijä
Anna Pohjola

Otsikko
Kuratowskin lause (engl. Kuratowski's Theorem)

Tutkinto-ohjelma
Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä	**Sivumäärä**
8. helmikuuta 2024	29

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa todistetaan Kuratowskin lause, joka on verkkoteorian keskeinen tulos. Tutkielma jakautuu kolmeen kappaleeseen, joista ensimmäisessä tutustutaan verkkoteorian perusteisiin ja yleisiin määritelmiin alkaen verkon kärkien sekä sivujen määrittelemisestä. Työssä keskitytään yksinkertaisiin suuntaamattomiin verkkoihin. Verkkoteorian peruskäsitteiden jälkeen määritellään tasoverkko sellaiseksi verkoksi, joka voidaan piirtää tasoon niin, että sen sivut eivät leikkaa toisiaan. Erilaisista tasoverkoista esitellään puut sekä sillat. Siltojen määritelmää sekä erityisesti kierrosten siltoja tarvitaan Kuratowskin lauseen todistamiseen.

Tutkielman kolmannessa osassa määritellään Kuratowskin lausetta varten ensin Kuratowskin verkot K_5 ja $K_{3,3}$. Näille verkoille osoitetaan, että ne eivät ole tasoverkkoja. Tarvittavien tietojen jälkeen esitellään Kuratowskin lause, jonka mukaan verkko on tasoverkko, jos ja vain jos se ei sisällä aliverkkonaan verkkoja K_5 tai $K_{3,3}$ eikä niiden alijaotuksia. Lisäksi esitellään Wagnerin lause, joka näytetään yhtäpitäväksi Kuratowskin lauseen kanssa. Wagnerin lauseen mukaan verkko on tasoverkko, jos ja vain jos sillä ei ole Kuratowskin minoria. Tätä lausetta varten määritellään verkon minori ja esitetään minoreihin liittyviä tuloksia. Tarvittavien aputulosten jälkeen esitetään Wagnerin lauseen todistus, jolloin myös yhtäpitävä Kuratowskin lause on todistettu. Lopuksi esitetään esimerkki, jossa osoitetaan Kuratowskin lauseen avulla, että Petersenin verkko ei ole tasoverkko.

Sisällys

Johdanto

Verkkoteorian ajatellaan saaneen alkunsa Königsbergin siltaongelmasta, jonka Leonhard Euler ratkaisi vuonna 1736. Königsbergissä joki kulki keskellä kaupunkia niin, että sen keskelle jäi kaksi saarta. Nämä saaret oli yhdistetty toisiinsa ja muuhun kaupunkiin seitsemällä sillalla. Siltaongelmassa haluttiin selvittää, onko mahdollista kulkea jokaista siltaa pitkin tasan kerran ja palata takaisin lähtöpaikkaan. Euler todisti tämän olevan mahdotonta havainnollistamalla tilannetta verkkona, jossa sillat ovat viivoja, jotka yhdistävät maata kuvaavia pisteitä. [4] Tätä todistusta pidetään verkkoteorian ensimmäisenä todistuksena. Verkkoteoriassa eli graafiteoriassa käsitellään siis erilaisia matemaattisia malleja eli verkkoja, jotka koostuvat pisteistä eli kärjistä sekä näitä yhdistävistä viivoista eli sivuista. Verkkoja voidaan soveltaa monessa eri yhteydessä, ja sovelluksia käytetään erityisesti tietotekniikassa. Lisäksi esimerkiksi sosiaalisia suhteita, kemiallisia malleja tai tie- ja viemäriverkostoja voidaan kuvata verkkojen avulla.

Yksi verkkoteorian keskeisistä kysymyksistä on, onko tarkastelun kohteena oleva verkko tasoverkko, eli voidaanko se piirtää tasoon niin, etteivät sen sivut leikkaa toisiaan. Tässä tutkielmassa todistetaan Kuratowskin lause, jonka avulla voidaan selvittää, onko kyseessä tasoverkko vai ei. Tämän Kazimir Kuratowskin vuonna 1930 todistaman lauseen mukaan verkko on tasoverkko, jos ja vain jos se ei sisällä aliverkkonaan verkkoja K_5 tai $K_{3,3}$ eikä niiden alijaotuksia. Verkot K_5 ja $K_{3,3}$ ovat Kuratowskin verkkoja, jotka eivät ole tasoverkkoja. Nämä verkot ovat tärkeässä roolissa tasoverkkoja tutkittaessa. Kuratowskin lause todistetaan osoittamalla ensin, että se on yhtäpitävä Wagnerin lauseen kanssa, jonka jälkeen voidaan todistaa Wagnerin lause. Tämän Klaus Wagnerin julkaiseman lauseen mukaan verkko on tasoverkko, jos ja vain jos sillä ei ole Kuratowskin minoria.

Lauseiden todistamiseksi ensimmäisessä luvussa määritellään verkkoteorian peruskäsitteitä ja merkintöjä verkon määritelmästä alkaen. Tämän jälkeen tutustutaan tarkemmin tasoverkkoihin ja siltoihin. Lisäksi olennaisena käsitteenä esitellään verkon minori, jota tarvitaan Kuratowsin lauseen todistamiseen.

Työ pohjautuu pääasiassa Bondyn ja Murtyn teokseen Graph Theory [1] ja sitä täydentäviin Brad Gardnerin luentomuistiinpanoihin [2]. Verkkoteorian perusteiden määrittelyssä lähteinä on käytetty luentomonisteita [3] ja [5].

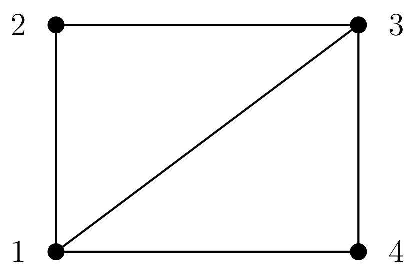
1 Verkkoteoria

Määritellään aluksi verkko ja siihen liittyvä sanasto sekä muita verkkoteorian käsitteitä ja niihin liittyviä merkintöjä. Näissä lähteenä on käytetty [1], [3] sekä [5].

Määritelmä 1.1 (Verkko)**.** Paria $G = (V, E)$, jossa joukko V on epätyhjä äärellinen joukko ja joukko E on kokoelma joukon V alkiopareja, kutsutaan verkoksi. Joukon V alkioita kutsutaan verkon *kärjiksi* (vertex) ja joukon E alkioita *sivuiksi* (edge). Verkon G kärkijoukkoa merkitään $V(G)$ ja sivujoukkoa $E(G)$. Kärkien u ja v välistä sivua voidaan merkitä $\{u, v\}$ tai uv. Verkkoa voidaan havainnollistaa piirtämällä se tasoon, jolloin kärjet ovat pisteitä ja sivut näitä pisteitä yhdistäviä janoja.

Verkko on *yksinkertainen*, jos se ei sisällä silmukoita eli sivua $\{v_i, v_i\}$ millään $v_i \in V$, ja jokainen sivu esiintyy verkossa vain kerran. Jos verkossa on silmukoita, tai sama sivu esiintyy verkossa useamman kerran, verkko on *multigraafi*. Lisäksi verkko voi olla *suunnattu*, jolloin sivujen kulkusuunnalla on merkitystä. Tällöin sivu kulkee vain lähtöpisteestä päätepisteeseen, mutta ei takaisin. Suunnatussa verkossa sivut kuvataan yleensä nuolilla, jotka näyttävät kulkusuunnan. Tässä työssä keskitytään kuitenkin yksinkertaisiin suuntaamattomiin verkkoihin.

Esimerkki 1.2. Olkoot $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 3\}\}$. Tällöin verkosta $G = (V, E)$ voidaan piirtää kuva, jossa joukon V alkiot ovat verkon kärkiä ja joukon E alkioparit ovat sivuja. Verkko on yksinkertainen, koska siinä ei ole silmukoita ja jokainen sivu esiintyy verkossa vain kerran.



Kuva 1.1: Esimerkki verkosta $G = (V, E)$

Määritelmä 1.3 (Kärjen aste)**.** Verkon $G = (V, E)$ kärjen v aste kertoo, kuinka monta sivua kärjestä lähtee. Merkitään kärjen v astetta $\delta(v)$. Esimerkiksi Kuvan 1.1 kärkien asteet ovat $\delta(1) = \delta(3) = 3$ ja $\delta(2) = \delta(4) = 2$.

Määritelmä 1.4 (Aliverkko)**.** Verkko $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ on verkon $G = (V, E)$ aliverkko, jos $\tilde{V} \subset V$ ja $\tilde{E} \subset E$.

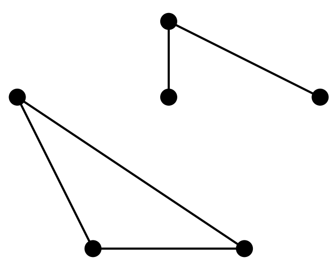
Määritelmä 1.5 (Kärjen poistaminen)**.** Kun verkosta $G = (V, E)$ poistetaan kärki v_i, myös kärjestä lähtevät sivut $e = \{v_i, v_j\}$, kaikilla $i \neq j$ poistetaan. Kärjen v poistamista verkosta G merkitään $G - v$.

Määritelmä 1.6 (Naapuri)**.** Verkon G kaksi kärkeä $v_i, v_j \in V(G)$ ovat naapureita, jos niitä yhdistää sivu $\{v_i, v_j\} \in E(G)$.

Sellainen jono kärkiä $v_i \in V(G)$, jossa peräkkäiset kärjet ovat naapureita, on verkon G *kävely*. Kävely on *suljettu*, jos sen ensimmäinen kärki ja viimeinen kärki ovat samoja. Jos kävelyn kaikki kärjet ovat eri kärkiä, kävely on silloin *polku*. Kahta kärkeä u ja v yhdistävää polkua merkitään uPv. Suljettu kävely, jossa ensimmäinen ja viimeinen kärki ovat samoja ja muut kärjet keskenään eri kärkiä, on *kierros*. Kierros on triviaali, jos siinä on korkeintaan kaksi kärkeä. Kierros voidaan piirtää tasoon ympyränä, jolloin siihen kuuluvat kärjet ovat ympyrän kehällä ja jokainen kärki on astetta 2.

Määritelmä 1.7 (Yhtenäisyys)**.** Verkko on yhtenäinen, jos sen jokaisesta kärjestä on kävely jokaiseen kärkeen. Toisin sanoen verkkoa piirrettäessä siinä on vain yksi osa, eikä yksikään kärki tai sivu ole irrallinen.

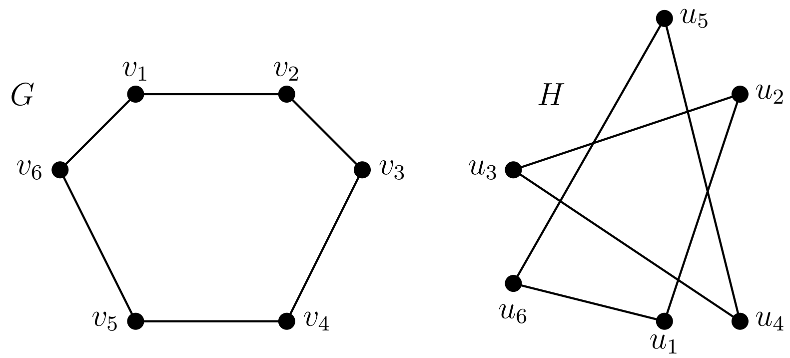
Määritelmä 1.8 (Verkon komponentti)**.** Verkon komponentti on verkon yhtenäinen osa. Komponentin jokaisen kärkiparin välillä on kävely. Verkon eri komponentit ovat erillisiä, eli niiden välillä ei ole kävelyitä. Jos verkossa on enemmän kuin yksi komponentti, sitä kutsutaan epäyhtenäiseksi.



Kuva 1.2: Epäyhtenäinen 2-komponenttinen verkko

Määritelmä 1.9 (Täydellinen verkko)**.** Verkko G on täydellinen, jos sen jokainen kärki $v_i \in V(G)$ on naapuri jokaisen kärjen $v_j \in V(G)$ kanssa, kun $i \neq j$. Täydellinen verkko pysyy aina täydellisenä, vaikka siitä poistaisi kärjen, koska jokaisesta kärjestä on aina sivu muihin kärkiin.

Määritelmä 1.10 (Isomorfisuus)**.** Yksinkertaiset verkot $G = (V, E)$ ja $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ ovat *isomorfiset*, jos on olemassa bijektio $f\colon V \to \tilde{V}$ siten, että kaikilla $v_1, v_2 \in V$ pätee $\{f(v_1), f(v_2)\} \in \tilde{E}$, jos ja vain jos $\{v_1, v_2\} \in E$. Tällöin kuvaus f on verkkojen G ja $\tilde{G}$ välinen isomorfismi.



Kuva 1.3: Isomorfiset verkot G ja H

Esimerkki 1.11. Verkkojen isomorfisuus on tärkeä ja hyvin keskeinen asia verkkoteoriassa, koska isomorfiset verkot ovat ominaisuuksiltaan samat. Verkkojen välistä isomorfisuutta voi olla hankalaa huomata tai osoittaa, jos käsitellään suuria monikärkisiä verkkoja, mutta yksinkertaisemmissa esimerkeissä se onnistuu helposti kuvan avulla. Isomorfisilla verkoilla on aina yhtä monta kärkeä ja sivua. Isomorfisilla verkoilla voidaan ajatella olevan vastinkärjet, jotka ovat keskenään samaa astetta. Olkoot verkot $G = (V_1, E_1)$ ja $H = (V_2, E_2)$, joissa

$$V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}, V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_6\},$$

$$E_1 = \Big\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_1\}\Big\},$$

$$E_2 = \Big\{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \{u_3, u_4\}, \{u_4, u_5\}, \{u_5, u_6\}, \{u_6, u_1\}\Big\}.$$

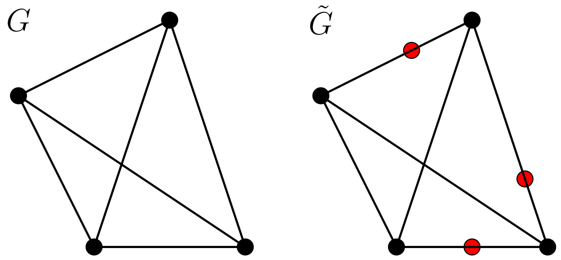
Tutkitaan, ovatko nämä Kuvan 1.3 verkot isomorfiset. Muodostetaan bijektio

$$f\colon V_1 \to V_2, \quad f(v_i) = u_i \quad \text{kaikilla } i = 1, 2, \dots, 6.$$

Tästä kuvauksesta huomataan, että jokaiselle verkon G kärjelle v_i löytyy vastinkärki u_i verkosta H. Nyt verkkojen sivuille pätee selvästi, että $\{f(v_i), f(v_j)\} \in E_2$, jos ja vain jos $\{v_i, v_j\} \in E_1$. Tämän voi huomata suoraan siitä, että $f(v_i) = u_i$, jolloin jokaiselle sivulle $\{v_i, v_j\} \in E_1$ on vastinsivu $\{f(v_i), f(v_j)\} = \{u_i, u_j\} \in E_2$.

Verkot G ja H ovat siis isomorfiset, mikä tarkoittaa sitä, että niiden voidaan ajatella olevan "samat". Isomorfiset verkot voivat näyttää tasoon piirrettynä eri verkoilta, mutta niillä on samat ominaisuudet. Esimerkiksi naapurit, kävelyt sekä kärkien asteet ovat samat.

Määritelmä 1.12 (Verkon alijaotus)**.** Verkko $\tilde{G}$, joka saadaan lisäämällä verkkoon G 2-asteisia kärkiä, on verkon G alijaotus. Tällaiset 2-asteiset kärjet jakavat siis jonkun verkon sivuista kahteen osaan. Alijaotus voidaan ajatella myös niin, että kahta kärkeä yhdistävä sivu jakautuu näitä kärkiä yhdistäväksi poluksi.



Kuva 1.4: Esimerkki verkon G alijaotuksesta $\tilde{G}$

Esimerkki 1.13. Kuvassa 1.4 verkon G eräs alijaotus $\tilde{G}$ on saatu verkosta G lisäämällä kolme uutta kärkeä. Nämä kärjet on merkitty kuvassa punaisella ja ne jakavat jokainen yhden sivuista kahteen osaan.

Määritelmä 1.14 (Kaksijakoinen verkko)**.** Verkko G on *kaksijakoinen*, jos sen kärjet voidaan jakaa kahteen erilliseen pareittain pistevieraaseen joukkoon $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ ja $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_j\}$, joissa $v_i, u_j \in V(G)$ kaikilla $i, j = 1, 2, 3 \dots$ siten, että verkon G jokainen sivu on muotoa $\{v_i, u_j\}$. Kaksijakoisen verkon sivujen päätepisteet ovat siis aina eri joukoista.

2 Tasoverkot

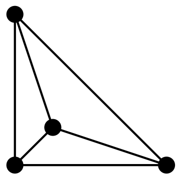
Seuraavaksi esitetään tasoverkon määritelmä sekä erilaisiin tasoverkkoihin liittyviä tuloksia, joita tarvitaan Kuratowskin lauseen todistamisessa.

Määritelmä 2.1 (Tasoverkko)**.** Verkko $G = (V, E)$ on tasoverkko, jos sen sivut leikkaavat tasossa vain verkon kärjissä. Toisin sanoen se voidaan piirtää tasoon niin, että sivut eivät leikkaa toisiaan. Esimerkiksi Kuvan 1.1 verkko G on tasoverkko.

Määritelmä 2.2 (Tasoesitys (planar embedding))**.** Verkon tasoesityksellä tarkoitetaan sitä esitystä tasoverkosta, jossa verkko on piirretty tasoon niin, että sen sivut eivät leikkaa toisiaan. Tasoesitys on sellainen esitys verkosta, joka jakaa tason yhtenäisiin osiin. Näitä osia kutsutaan verkon *tahkoiksi*.

Lause 2.3. *Yksinkertainen verkko G, jonka kärkien määrä $k \leq 4$, on tasoverkko.*

Todistus. Jos verkossa on vain yksi kärki, sillä ei ole sivuja, jotka leikkaisivat toisiaan. Jos kärkiä on kaksi, verkossa on vain yksi sivu. Jos kärkiä on kolme, verkossa on enintään kolme sivua, jolloin verkko voidaan selvästi aina piirtää tasoon kolmiona, jonka sivut eivät leikkaa toisiaan. Tapauksessa, jossa kärkiä on neljä, sivuja on enintään 6. Tässä tapauksessa se voidaan aina piirtää esimerkiksi Kuvan 2.1 mukaisesti. Tällöin 4-kärkinen verkko on aina tasoverkko. □

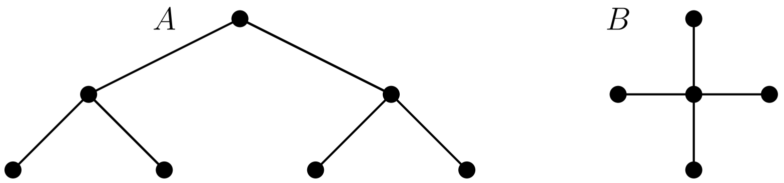


Kuva 2.1: Tasoesitys täydellisestä 4-kärkisestä verkosta

2.1 Puut

Tietynlaisia verkkoja kutsutaan puiksi. Tasoon piirrettynä puilla voidaan mallintaa esimerkiksi sukupuita tai molekyylejä. Puut ovat aina tasoverkkoja. Puihin liittyvissä määritelmissä lähteenä on [5].

Määritelmä 2.4 (Puu)**.** Yhtenäinen yksinkertainen verkko, jossa ei ole epätriviaaleja kierroksia on *puu*. Verkkoa, jonka komponentit ovat puita kutsutaan *metsäksi*.



Kuva 2.2: Esimerkkejä puista

Määritelmä 2.5 (Juurrutettu puu)**.** Puu, josta on valittu yksi kärki puun juureksi on *juurrutettu puu*. Juurrutetussa puussa kärjen *taso* on juuresta kyseiseen kärkeen johtavan polun pituus. Juureksi valitun kärjen aste on siis 0.

Juurrutetussa puussa kärjen korkeampitasoiset naapurit ovat sen *lapsia* ja matalampitasoiset naapurit ovat sen *vanhempia*. Jos kärjellä ei ole lapsia, se on *lehti*. Juurrutettu puu piirretään yleensä tasoon kuten Kuvan 2.2 puu A. Matalatasoisin kärki on ylinpänä ja sen naapurit ovat sen lapsia. Kuvan 2.2 esimerkissä puulla A on neljä lehteä, eli kärkeä, jolla ei ole lapsia.

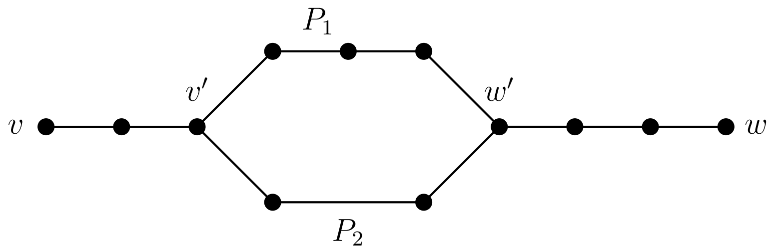
Määritelmä 2.6 (Virittävä puu (spanning tree))**.** Olkoon verkolla G aliverkko H. Jos aliverkko H on sellainen puu, joka sisältää kaikki verkon G kärjet, H on verkon G *virittävä puu*. Virittävään puuhun kuuluu verkon kaikki kärjet, mutta ei välttämättä kaikkia sen sivuja. Verkolla G voi olla useita eri virittäviä puita.

Lause 2.7. *Yhtenäisellä verkolla on aina virittävä puu.*

Todistus. Olkoon verkko G yhtenäinen. Jos verkossa G ei ole kierroksia, se on virittävä puu. Jos verkossa G on kierros C, poistetaan kierroksesta sivu $e \in C$. Nyt verkko $G - e$ on edelleen yhtenäinen. Jos verkossa $G - e$ ei ole kierroksia, se on virittävä puu. Jos verkossa $G - e$ on kierros, poistetaan siitä jälleen sivu. Tätä voidaan toistaa, kunnes verkossa ei ole enää kierroksia. Tällöin yhtenäiselle verkolle saadaan aina muodostettua virittävä puu poistamalla sivuja. □

Lause 2.8. *Puussa kahden kärjen välillä on täsmälleen yksi polku.*

Todistus. Todistuksessa lähteenä on [3]. Olkoon T puu, jossa on kärjet $v \neq w$. Koska T on puu, se on yhtenäinen, jolloin kahden kärjen v ja w välillä on ainakin yksi polku. Oletetaan, että kärkien v ja w välillä on kaksi eri polkua. Olkoot nämä polut $P_1 = (v_1 = v, \dots v_n = w)$ ja $P_2 = (w_1 = v, \dots, w_m = w)$. Olkoon v' se kärki, jossa polut P_1 ja P_2 ensimmäisen kerran erkanevat, eli $v' = v_k = w_k$ sellaisella k, jolle $v_{k+1} \neq w_{k+1}$. Nyt jatketaan kärjestä v' polkua P_1 siihen kärkeen, jossa polut jälleen yhdistyvät. Tämä kärki w' on siis ensimmäinen kärki, jolle $w' = v_i = w_j$ joillain $i, j > k$. Nyt voidaan palata kärjestä w' polkua P_2 takaisin kärkeen v'. Tällöin muodostuu polku $(v' = v_k, v_{k+1}, \dots, v_i = w' = w_j, w_{j-1}, \dots w_k = v')$, joka on epätriviaali kierros. Tämä on ristiriita, koska puussa ei voi olla epätriviaalia kierrosta. Tällöin puussa kahden kärjen välillä on täsmälleen yksi polku. □



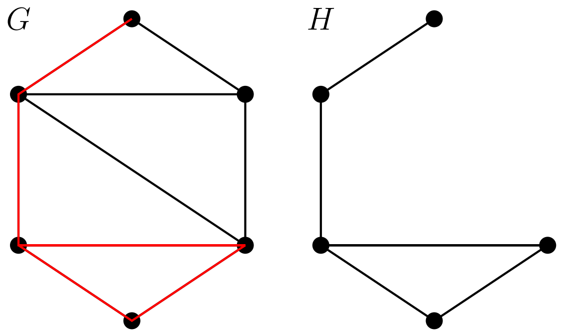
Kuva 2.3: Havainnollistus kahdesta eri polusta

2.2 Sillat

Tietynlaisia aliverkkoja kutsutaan silloiksi. Näihin siltoihin liittyviä tuloksia tarvitaan myöhemmin Wagnerin lauseen todistamisessa, joten määritellään nyt sillat. Lisäksi esitetään siltoihin liittyviä ominaisuuksia. Aloitetaan määrittelemällä sivuindusoidut aliverkot, joiden avulla sillan määritelmä on helpommin ymmärrettävissä. Silloista erityisesti kierrosten sillat ovat jatkossa hyödyllisiä. Siltoja käsitellään teoksessa [1, s. 263–267].

Määritelmä 2.9 (Sivuindusoitu aliverkko (edge-induced subgraph))**.** Verkon G aliverkko H on sivuindusoitu, jos se koostuu joistain verkon G sivuista ja kaikista näiden sivujen päätepisteistä.

Määritelmä 2.10 (Kärki-indusoitu aliverkko (vertex-induced subgraph))**.** Verkon G aliverkko H on kärki-indusoitu, jos se koostuu verkon G joistain kärjistä ja kaikista näitä kärkiä yhdistävistä sivuista.



Kuva 2.4: Verkon G sivuindusoitu aliverkko H

Esimerkki 2.11. Yllä olevassa kuvassa on esimerkki verkon G sivuindusoidusta aliverkosta H. Sivuindusoidussa aliverkossa H on osa verkon G sivuista ja kaikki näiden sivujen päätepisteet. Valitut sivut on merkitty kuvaan punaisella.

Määritelmä 2.12 (Silta (bridge))**.** Olkoon G yhtenäinen verkko ja olkoon H verkon G aito aliverkko. Joukoon $E(G) \setminus E(H)$ kuuluvat sivut muodostavat siltoja seuraavasti:

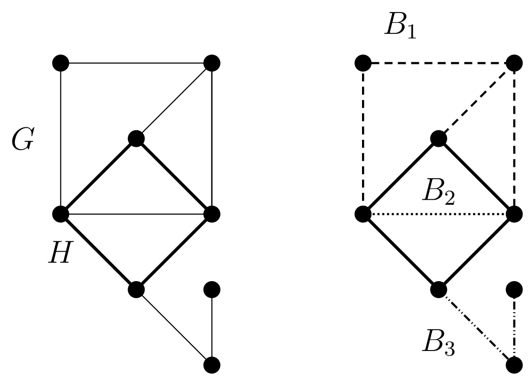
1. Olkoon F_i verkon $G - V(H)$ komponentti. Silta $B_i = (E(B_i), V(B_i))$, on sivuista $E(B_i) = E(F_i) \cup \{e \in E(G) : \{u, v\}, u \in V(F_i), v \in V(H)\}$ koostuva sivu-indusoitu aliverkko. Tällöin joukko $V(B_i)$ koostuu sivujen $E(B_i)$ päätepisteistä.

2. Jäljelle jäävät verkkoon H kuulumattomat sivut e, eli sellaiset sivut, joiden molemmat päätepisteet ovat joukossa $V(H)$. Nämä sivut muodostavat siltoja siten, että $B_i = (E(B_i), V(B_i))$, jossa $E(B_i) = \{e \in E(G) : \{u, v\}, u, v \in V(H)\}$ ja joukko $V(B_i)$ koostuu näiden sivujen $E(B_i)$ päätepisteistä.

Sillat saadaan siis muodostettua poistamalla ensin verkosta G aliverkon H kärjet. Kun kärjet poistetaan, myös niistä lähtevät sivut poistetaan. Nyt jäljelle jäävät komponentit F_i muodostavat jokainen oman sillan B_i. Silta B_i koostuu komponentin F_i sivuista ja niistä sivuista, jotka yhdistävät komponentin F_i aliverkkoon H. Näistä sivuista muodostettu sivuindusoitu aliverkko on silta B_i. Loput sillat muodostuvat niistä sivuista, joiden molemmat päätepisteet ovat aliverkossa H.

Tästä määritelmästä seuraa, että verkon H sillat leikkaavat vain verkon H kärjissä.

Määritelmä 2.13. Olkoon B jonkin yhtenäisen verkon aliverkon H silta. Nyt kärjet, jotka kuuluvat sekä verkkoon H että siltaan B, eli siis joukkoon $V(B) \cap V(H)$, ovat aliverkon H *kiinnityskärkiä* (vertices of attachment). Sillan B muut kärjet ovat *sisäisiä kärkiä* (internal vertices). Silta on triviaali, jos sillä ei ole lainkaan sisäisiä kärkiä.



Kuva 2.5: Aliverkon H sillat B_1, B_2 ja B_3

Esimerkki 2.14. Kuvassa 2.5 on esimerkki verkon G aliverkon H siltojen muodostumisesta. Aliverkko H on merkitty tummemmalla viivalla. Oikean puoleisessa kuvassa ovat verkon H sillat B_1, B_2 sekä B_3. Sillassa B_1 on kolme kiinnityskärkeä ja kaksi sisäistä kärkeä. Silta B_2 on triviaali, koska siinä ei ole sisäisiä kärkiä. Sillassa B_3 on yksi kiinnityskärki ja kaksi sisäistä kärkeä.

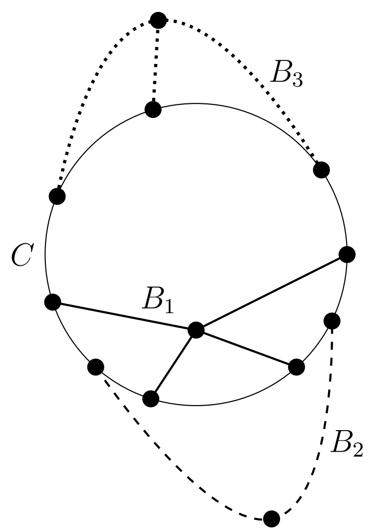
Määritelmä 2.15 (k-silta)**.** Silta, jolla on k kiinnityskärkeä on *k-silta.* Kaksi siltaa, joilla on samat kiinnityskärjet, ovat *ekvivalentteja siltoja.*

Keskitytään jatkossa kierrosten siltoihin. Silloista puhuttaessa puhutaan aina jonkun kierroksen silloista, jos muuta ei mainita.

Määritelmä 2.16. Olkoon G yhtenäinen verkko, jossa on kierros C. Olkoon kierroksessa C $k-$silta B, jossa $k \geq 2$. Sillan B kiinnityskärjet jakavat kierroksen C, k eri polkuun, joissa ei ole yhteisiä sivuja eli *segmenttiin.* Silta jakaa siis kierroksen yhtä moneen segmenttiin, kuin sillassa on kiinnityskärkiä.

Määritelmä 2.17. Sillat ovat joko *päällekkäisiä* tai *toisiaan välttäviä.* Jos sillan B kaikki kiinnityskärjet ovat sillan $\tilde{B}$ yhdessä segmentissä, sillat B ja $\tilde{B}$ ovat toisiaan välttäviä. Muissa tapauksissa sillat ovat päällekkäisiä.

Määritelmä 2.18. Kaksi siltaa B ja $\tilde{B}$ ovat *toisiinsa nähden vinot (skew)*, jos niissä on kiinnityskärjet $u, v \in V(B)$ sekä $\tilde{u}, \tilde{v} \in V(\tilde{B})$ siten, että ne ovat kierroksessa järjestyksessä $u, \tilde{u}, v, \tilde{v}$. Sillat ovat siis toisiinsa nähden vinot, jos niiden jotkut kiinnityskärjet "vuorottelevat" kierroksessa.



Kuva 2.6: Esimerkkejä kierroksen C silloista

Esimerkki 2.19. Kuvassa 2.6 kierroksen C sillat B_1 ja B_2 ovat päällekkäisiä, koska siltojen kiinnityskärjet ovat eri segmenteissä. Sillat B_1 ja B_2 ovat toisiinsa nähden vinot, sillä niistä voidaan valita kiinnityskärjet niin, että ne ovat kierroksessa vuorotellen. Sillat B_3 sekä B_2 ovat toisiaan välttäviä, koska kaikki sillan B_3 kiinnityskärjet ovat sillan B_2 samassa segmentissä.

Lause 2.20. *Olkoon G yhtenäinen verkko ja C kierros verkossa G. Päällekkäiset kierroksen C sillat ovat joko toisiinsa nähden vinot tai ekvivalentit 3-sillat.*

Todistus. Todistuksen lähteenä on [1, s. 264]. Lauseen todistamiseksi täytyy käsitellä mahdolliset tapaukset erikseen.

Olkoon C kierros yhtenäisessä verkossa G. Oletetaan, että B ja $\tilde{B}$ ovat päällekkäisiä siltoja kierroksessa C. Näillä silloilla on siis oltava vähintään kaksi kiinnityskärkeä. Jos toinen silloista on 2-silta, sillat ovat toisiinsa nähden vinot. Tämä seuraa siitä, että sillat B ja $\tilde{B}$ ovat päällekäisiä, joten kummankaan sillan kaikki kiinnityskärjet eivät ole samassa toisen sillan segmentissä. Tällöin 2-sillan toisen kiinnityskärjistä on oltava eri segmentissä kuin toinen, jolloin kiinnityskärjet ovat välttämättä vuorotellen kierroksessa C.

Käsitellään seuraavaksi tapaus, jossa silloilla B ja $\tilde{B}$ on vähintään kolme kiinnityskärkeä. Olkoot $u, v \in V(B)$ ja $\tilde{u}, \tilde{v} \in V(\tilde{B})$ kiinnityskärkiä. Jos silloilla B ja $\tilde{B}$ ei ole samat kiinnityskärjet, eli ne eivät ole ekvivalentit, sillalla $\tilde{B}$ on kiinityskärki $\tilde{u}$ sillan B peräkkäisten kiinnityskärkien u ja v välissä. Nyt koska B ja $\tilde{B}$ ovat päällekkäisiä, jokin sillan $\tilde{B}$ kiinnityskärjistä $\tilde{v}$ ei ole kärkien u ja v välisessä segmentissä. Tällöin sillat B ja $\tilde{B}$ ovat toisiinsa nähden vinot.

Jos sillat B ja $\tilde{B}$ ovat ekvivalentit k-sillat, on oltava $k \geq 3$. Jos $k = 2$, sillat B ja $\tilde{B}$ eivät ole päällekäisiä, koska niillä on samat kaksi segmenttiä, jolloin sillat ovat toisiaan välttäviä. Jos taas $k \geq 4$, sillat B ja $\tilde{B}$ ovat toisiinsa nähden vinot. Tämä seuraa siitä, että sillat ovat ekvivalentit, joten voidaan valita neljä peräkkäistä kiinnityskärkeä järjestyksessä niin, että ensimmäinen ja kolmas ovat sillan B kärkiä ja toinen ja neljäs ovat sillan $\tilde{B}$ kärkiä. Tällöin nämä kiinnityskärjet vuorottelevat ja sillat ovat toisiinsa nähden vinot.

Nyt siis jokaisessa tapauksessa sillat B ja $\tilde{B}$ ovat joko toisiinsa nähden vinot sillat tai ekvivalentit 3-sillat. □

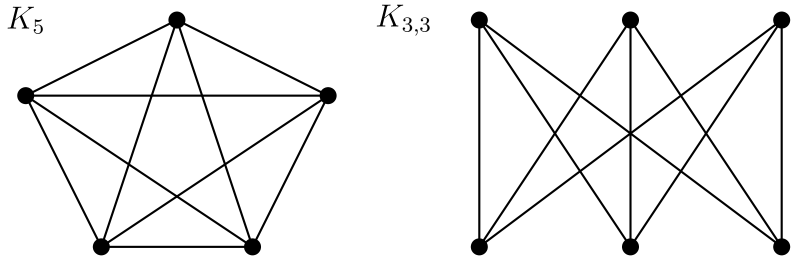
3 Kuratowskin lause

Tässä luvussa esitellään työn päätulos Kuratowskin lause. Tämän todistamiseksi käsitellään verkkojen minoreita ja todistetaan niihin liittyviä tuloksia.

Lisäksi esitellään ja todistetaan Wagnerin lause, jonka avulla myös Kuratowskin lause saadaan todistettua.

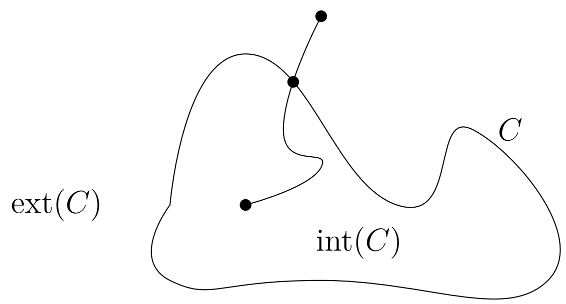
3.1 Kuratowskin verkot

Kuratowskin verkot K_5 ja $K_{3,3,}$ esitetään yleensä Kuvan 3.1 mukaisina. Verkko K_5 on viisi kärkinen täydellinen verkko ja verkko $K_{3,3}$ on kuusikärkinen kaksijakoinen verkko, jossa jokaisesta kärjestä lähtee kolme sivua. Kuratowskin verkkoja hyödynnetään tasoverkkoja tutkittaessa. Lisäksi niitä voidaan hyödyntää esimerkiksi pintojen topologisissa tarkasteluissa.



Kuva 3.1: Kuratowskin verkot K_5 sekä $K_{3,3}$

Kuratowskin verkkoja voidaan hyödyntää, kun tutkitaan tasoverkkoja. Ne eivät kuitenkaan ole tasoverkkoja ja sen todistamista varten esitetään seuraavaksi Jordanin käyrälause.



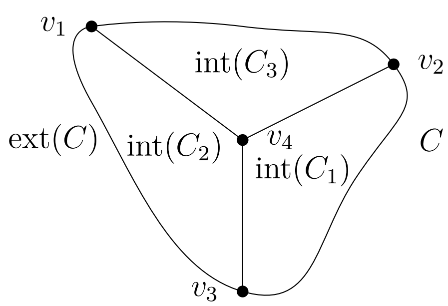
Kuva 3.2: Havainnollistus Jordanin käyrälauseesta

Lause 3.1 (Jordanin käyrälause)**.** *Jokainen yksinkertainen suljettu käyrä C eli Jordanin käyrä jakaa tason kahteen erilliseen polkuyhtenäiseen avoimeen joukkoon. Tällöin käyrän C sisäpuolelle jäävästä joukosta käytetään merkintää* $\mathrm{int}(C)$ *ja ulkopuolelle jäävästä joukosta merkintää* $\mathrm{ext}(C)$*. Jokainen polku, joka yhdistää pisteen joukosta* $\mathrm{int}(C)$ *pisteeseen* $\mathrm{ext}(C)$ *leikkaa käyrää C.*

Todistus. Todistus vaikuttaa intuitiivisesti selvältä, mutta on pitkä topologinen todistus, joten se sivuutetaan. Selkeä suomenkielinen todistus löytyy esimerkiksi pro gradu tutkielmasta [6]. Verkkoja käsiteltäessä käyrä voidaan ajatella monikulmioksi, joten todistus monikulmioiden tapauksessa on riittävä. □

Lause 3.2. *Kuratowskin verkko K_5 ei ole tasoverkko.*

Todistus. Todistuksessa on käytetty lähteenä [1, s. 245]. Oletetaan, että verkko K_5 on tasoverkko, jonka kärjet ovat v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Olkoon tämä verkko G. Nyt G on täydellinen verkko, eli jokaisesta kärjestä on sivu jokaiseen kärkeen. Olkoon kierros $C := v_1v_2v_3v_1$ yksinkertainen suljettu kierros. Tällöin käyrä C jakaa tason kahteen osaan eli joukkoihin $\text{int}(C)$ sekä $\text{ext}(C)$. Nyt kärki v_4 kuuluu välttämättä joko joukkoon $\text{int}(C)$ tai joukkoon $\text{ext}(C)$. Voidaan valita, että $v_4 \in \text{int}(C)$, jolloin myös sivut v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4 ovat kaikki käyrän C sisäpuolella eli kuuluvat joukkoon $\text{int}(C)$. Tätä on havainnollistettu Kuvassa 3.3. Merkitään nyt kärjistä koostuvia kierroksia seuraavasti: $C_1 := v_2v_3v_4v_2$, $C_2 := v_3v_1v_4v_3$ ja $C_3 := v_1v_2v_4v_1$. Tällöin on oltava $v_i \in \text{ext}(C_i)$, kun $i = 1, 2, 3$. Eli esimerkiksi $v_1 \in \text{ext}(C_1)$. Verkkoon G kuuluu myös kärki v_5 sekä sivut v_5v_i kaikilla $i = 1, 2, 3, 4$. Lisäksi verkko on tasoverkko, eli kärjen v_5 täytyy olla sellainen, etteivät sivut v_5v_i leikkaa muita sivuja, eli $v_5 \in \text{ext}(C_i)$ kaikilla $i = 1, 2, 3$. Tällöin kuitenkin Lauseen 3.1 eli Jordanin käyrälauseen nojalla sivu v_4v_5 leikkaa välttämättä käyrää C, koska $v_4 \in \text{int}(C)$ ja $v_5 \in \text{ext}(C)$, jolloin verkko G ei voi olla tasoverkko. Tämä on ristiriidassa oletuksen G on tasoverkko kanssa, joten verkko K_5 ei ole tasoverkko. □

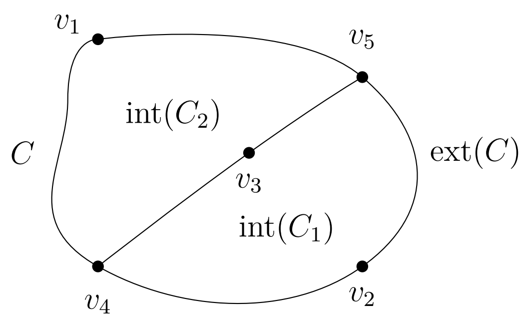


Kuva 3.3: Havainnollistus Lauseen 3.2 todistuksesta

Lause 3.3. *Kuratowskin verkko $K_{3,3}$ ei ole tasoverkko.*

Todistus. Verkolle $K_{3,3}$ todistus voidaan tehdä vastaavalla tavalla kuin verkolle K_5. Oletetaan, että verkko $K_{3,3}$ on tasoverkko, jonka kärjet ovat

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Olkoon tämä verkko G. Verkko $K_{3,3}$ on kaksijakoinen verkko, joten nimetään kärjet uudelleen niin, että ne kuuluvat kahteen joukkoon $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ sekä $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ niin, että jokaisesta joukon V_1 kärjestä on sivu jokaiseen joukon V_2 kärkeen. Verkossa G on yksinkertainen suljettu kierros $C := v_1v_4v_2v_5v_1$, joka jakaa tason kahteen osaan $\mathrm{int}(C)$ ja $\mathrm{ext}(C)$. Nyt kärki v_3 kuuluu näistä toiseen. Voidaan valita, että $v_3 \in \mathrm{int}(C)$. Tällöin myös sivut $v_3v_4, v_3v_5 \in \mathrm{int}(C)$. Merkitään nyt kierroksia $C_1 = v_4v_2v_5v_3v_4$ ja $C_2 = v_1v_4v_3v_5v_1$ kuten Kuvassa 3.4. Tällöin $v_1 \in \mathrm{ext}(C_1)$ ja $v_2 \in \mathrm{ext}(C_2)$. Verkossa on kuitenkin vielä kärki v_6 sekä sivut v_6v_1, v_6v_2, v_6v_3. Koska oletamme verkon G olevan tasoverkko, nämä sivut eivät saa leikata muita sivuja. Kärjellä v_6 on kolme mahdollista sijaintia. Jos kärki $v_6 \in \mathrm{int}(C_2)$, sivu v_6v_2 leikkaa Jordanin käyrälauseen nojalla kierrosta C_2, koska $v_2 \in \mathrm{ext}(C_2)$. Vastaavasti jos $v_6 \in \mathrm{int}(C_1)$, sivu v_6v_1 leikkaa kierrosta C_1. Jos $v_6 \in \mathrm{ext}(C)$, sivu v_6v_3 leikkaa kierrosta C. Kaikissa tapauksissa jokin sivu leikkaa toista sivua, mikä on ristiriidassa oletuksen G on tasoverkko kanssa, joten verkko $K_{3,3}$ ei ole tasoverkko. $\square$



Kuva 3.4: Havainnollistus Lauseen 3.3 todistuksesta

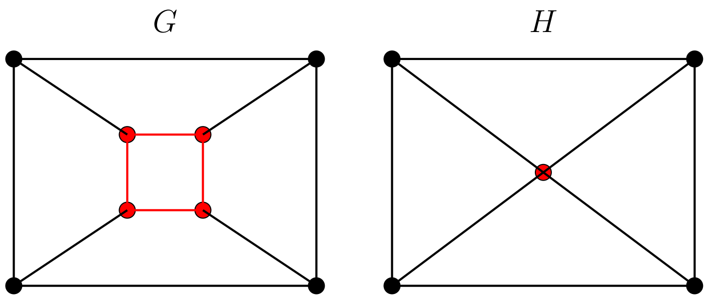
Seuraavaksi esitetään tutkielman päätulos Kuratowskin lause. Lause todistetaan myöhemmin. Esitetään ensin lisää todistukseen tarvittavia määritelmiä sekä aputuloksia.

Lause 3.4 (Kuratowskin lause)**.** *Verkko on tasoverkko, jos ja vain jos se ei sisällä aliverkkonaan verkkoja K_5 tai $K_{3,3}$ eikä niiden alijaotuksia. Näitä alijaotuksia ovat kaikki verkot, jotka saadaan verkoista K_5 tai $K_{3,3}$ lisäämällä niihin 2-asteisia kärkiä.*

3.2 Verkon minori

Määritelmä 3.5 (Verkon minori)**.** Verkko H on verkon G minori, jos se saadaan verkosta G vaiheittain poistamalla kärkiä, poistamalla sivuja tai yhdistämällä kärkiä, joiden väliset sivut poistetaan. Tätä kärkien yhdistämistä voidaan kutsua *sivun supistumiseksi (edge contraction)* ja sivun e supistamista verkossa G merkitään G/e. Verkon G F*-minoriksi* kutsutaan sellaista minoria, joka on isomorfinen verkon F kanssa.

Määritelmä 3.6 (Kuratowskin minori)**.** Minori, joka on isomorfinen verkojen K_5 tai $K_{3,3}$ kanssa on Kuratowskin minori.



Kuva 3.5: Esimerkki verkon G minorista H

Kuva 3.5 havainnollistaa minorin muodostumista, kun verkosta G supistetaan punaisella merkityt sivut ja punaisella merkityt kärjet yhdistyvät yhdeksi kärjeksi. Minorin voidaan muodostaa myös seuraavan Lauseen 3.7 mukaisesti.

Lause 3.7. *Verkon G minori H voidaan muodostaa jakamalla verkon G kärjet osajoukkoihin $V_0, V_1, \ldots, V_n$, missä n on minorin H kärkien lukumäärä siten, että näiden osajoukkojen kärki-indusoimat verkot $G[V_i]$ ovat yhtenäisiä, kun $1 \leq i \leq n$. Lisäksi näille osajoukoille pätee, että minori H saadaan muodostettua poistamalla joukon V_0 kärjet ja kutistamalla loput verkot $G[V_i]$ kärjiksi $v_i \in H$ sekä poistamalla sivut, jotka eivät kuulu minoriin H. Tässä kutistamisella tarkoitetaan, että kaikki verkon $G[V_i]$ sivut supistetaan ja kärjet yhdistetään yhdeksi kärjeksi v_i.*

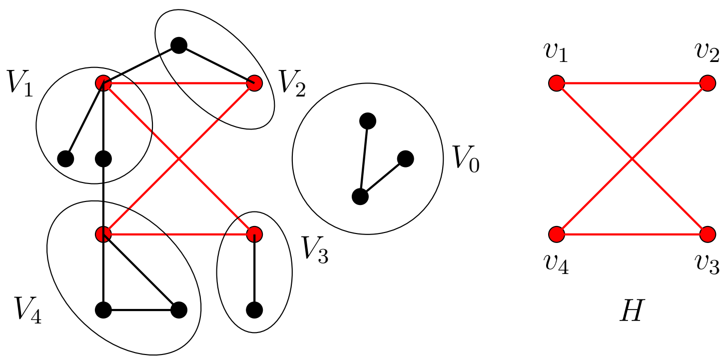
Todistus. Todistetaan lause induktiolla. Olkoon verkolla G minori H, jossa on n kärkeä. Minori H saadaan määritelmän mukaan verkosta G poistamalla sivuja, poistamalla kärkiä tai supistamalla sivuja. Olkoon k näiden tehtyjen operaatioiden lukumäärä.

Jos verkosta G saadaan minori H tekemättä yhtään operaatiota, eli kun $k = 0$, väite pätee.

Oletetaan, että väite pätee, kun minori H saadaan tekemällä l operaatiota eli, kun $k = l$. Osoitetaan nyt, että lause pätee, kun minori saadaan lisäämällä vielä yksi operaatio, eli kun $k = l + 1$. Jos lisättävä operaatio on kärjen poistaminen, joukko V_i, johon poistettava kärki kuuluu lisätään joukkoon V_0. Tällöin minori saadaan edelleen lauseen mukaisesti. Jos lisättävä operaatio on sivun poistaminen, sivu voidaan poistaa verkosta G, koska lauseen mukaan sivut, jotka eivät kuulu minoriin H poistetaan. Tällöin edelleen minorin muodostaminen onnistuu. Jos lisättävä operaatio on jonkin sivun $v_i v_j$ supistaminen, kärjet v_i sekä v_j yhdistyvät kärjeksi $v_h \in H$ ja kärkijoukot V_i sekä V_j yhdistetään yhdeksi kärkijoukoksi V_h. Tällöin verkko $G[V_h]$ on edelleen yhtenäinen, koska $G[V_i]$ ja $G[V_j]$ ovat yhtenäisiä. Lopuksi nimetään tarvittaessa joukot V_i uudelleen, jotta joukot $V_1, \dots V_n$ pysyvät loogisessa järjestyksessä.

Nyt koska lause pätee induktio-oletuksen nojalla, kun tehdään l operaatiota ja lause pätee edelleen, kun lisätään yksi operaatio eli, kun $k = l + 1$, induktion nojalla lause pätee. □

Esimerkki 3.8. Kuvassa 3.6 punaisella merkitty minori H muodostuu, kun kärkijoukot V_1, V_2, V_3 ja V_4 kutistuvat punaisella merkatuiksi kärjiksi v_1, v_2, v_3 ja v_4 ja joukko V_0 poistetaan. Tällöin jäljelle jäävien punaisten kärkien indusoima verkko on minori H.



Kuva 3.6: Esimerkki minorin H muodostamisesta Lauseen 3.7 mukaisesti

Lause 3.9. *Tasoverkkojen minorit ovat tasoverkkoja.*

Todistus. Olkoot verkko G tasoverkko ja H verkon G minori. Jos minori H saadaan poistamalla kärkiä, verkon H on oltava tasoverkko sillä, kun tasoverkosta poistetaan kärkiä, verkko pysyy välttämättä edelleen tasoverkkona. Samoin, jos H saadaan poistamalla sivuja, sen on oltava edelleen tasoverkko. Jos minori H saadaan sivun supistamisella, verkkoon ei tule uusia risteäviä sivuja. Tällöin minorin H on jälleen oltava tasoverkko. Koska minori saadaan vain näiden kolmen operaation avulla, minorin H on oltava tasoverkko. Tasoverkon minori on siis aina tasoverkko. □

Seuraavaksi esitetään kolme minoreihin liittyvää tulosta, joiden avulla voidaan osoittaa Kuratowskin lause ja Wagnerin lause yhtäpitäviksi.

Lause 3.10. *Verkolla, joka sisältää F-alijaotuksen on myös F-minori.*

Todistus. Oletetaan, että verkko G sisältää F-alijaotuksen. F-minori saadaan verkosta G poistamalla ensin ne kärjet ja sivut, jotka eivät ole F-alijaotuksessa. Sitten palautetaan alijaotuksessa kahteen osaan jaetut sivut takaisin yhdeksi sivuksi supistamalla sivuja, jolloin F-alijaotus palautuu takaisin verkon F kanssa isomorfiseksi verkoksi. Tämä on myös verkon G F-minori, koska se saadaan verkosta G poistamalla kärkiä ja sivuja sekä supistamalla sivuja. □

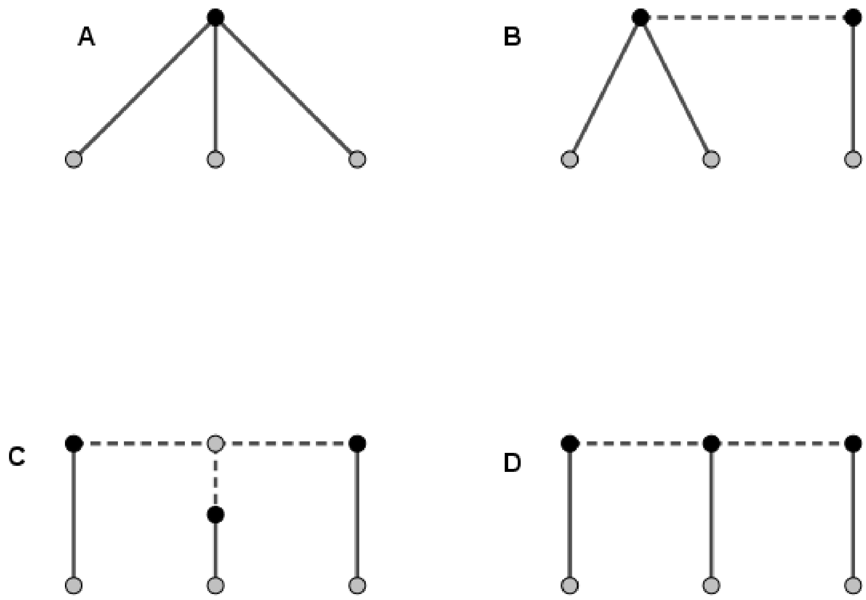
Lauseen 3.10 käänteinen suunta ei päde yleisesti kaikille verkoille. Esimerkiksi Kuvan 3.10 verkolla G_1 on K_5-minori, joka saadaan supistamalla sivu BC. Sillä ei kuitenkaan ole K_5-alijaotusta, koska siihen tarvittaisiin viisi kärkeä astetta 4 ja verkossa G_1 on vain neljä sellaista kärkeä. Voidaan kuitenkin osoittaa, että Lauseen 3.10 käänteinen suunta pätee, kun verkko F on enintään astetta 3.

Lause 3.11. *Olkoon verkko F enintään astetta 3. Tällöin verkolla G on F-minori, jos ja vain jos sillä on F-alijaotus.*

Todistus. Jos verkolla G on F-alijaotus, sillä on F-minori Lauseen 3.10 nojalla. Tämä suunta on siis jo todistettu. Todistetaan nyt lauseen toinen suunta. Olkoon F verkko, jossa on n kärkeä ja se on enintään astetta 3. Oletetaan, että verkolla G on F-minori. Se että verkolla G on F-minori, tarkoittaa, että verkko G saadaan isomorfiseksi verkon F kanssa poistamalla sivuja tai kärkiä tai supistamalla sivuja.

Verkon G kärjet voidaan Lauseen 3.7 mukaan jakaa joukkoihin $V_0, V_1, \dots V_n$ niin, että näistä joukoista kärki-indusoidut aliverkot ovat yhtenäisiä ja verkosta G saadaan verkko F poistamalla joukon V_0 kärjet ja kutistamalla joukot V_i kärjiksi v_i kaikilla $1 \leq i \leq n$. Verkko F on enintään astetta 3, joten jokaisella kärjellä $v_{i,j} \in V_i$ on verkossa G 1, 2 tai 3 naapuria $v_{j,i} \in V_j$, kun $i \neq j$, joille sivu $v_{i,j}v_{j,i}$ voi olla verkon F sivu. Kutsutaan näitä kärkiä merkkikärjiksi.

Tarkastellaan tapausta, jossa kärjet v_i ovat astetta 3. Tapaukset, joissa kärjet ovat astetta yksi tai kaksi saadaan vastaavasti. Joukkojen V_i indusoimat verkot ovat yhtenäisiä, joten niillä on virittävät puut. Tarkastellaan näitä virittäviä puita. Jos puussa on kaksi merkkikärkeä, niiden välillä on Lauseen 2.8 nojalla täsmälleen yksi polku. Jos merkkikärkiä on kolme, kolmas kärki voidaan yhdistää lyhyimmällä mahdollisella polulla kahteen muuhun kärjistä. Verkon F kärjet ovat enintään astetta 3, joten lisätään jokaiseen vaihtoehtoon kolme sivua. Nyt saadaan Kuvan 3.7 mukaiset vaihtoehdot. Kuvan tapaukset B, C ja D saadaan tapauksen A alijaotuksena.



Kuva 3.7: Havainnollistus Lauseen 3.11 todistuksesta

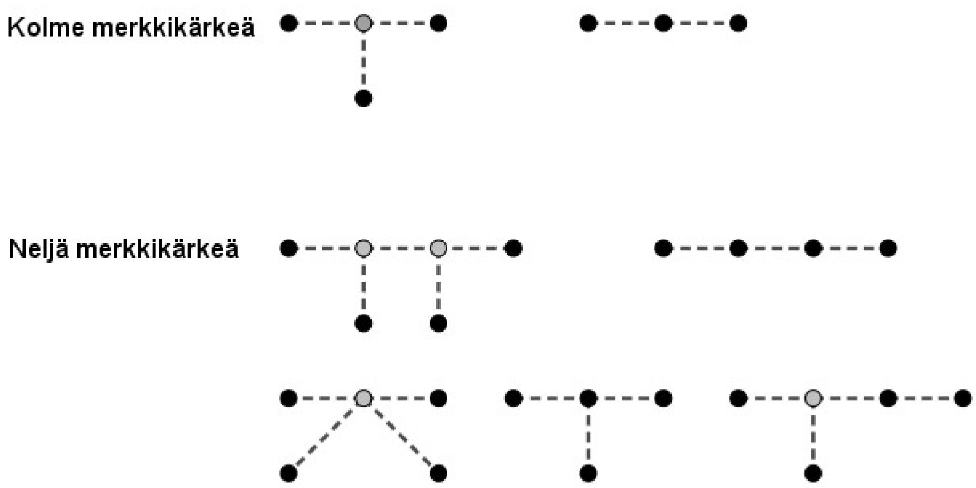
Nyt näiden puiden yhdiste saadaan verkon F alijaotuksena. Puiden yhdisteeseen kuuluu verkon G minorin F kaikki kärjet sekä näitä kärkiä yhdistävät sivut. Sivut on kuitenkin jaettu polkuihin, jolloin kyseessä on verkon F alijaotus. Alijaotus saadaan palautettua minoriksi F, supistamalla sivut, jotka eivät kuulu minoriin. Siispä, jos verkolla on F-minori, sillä on myös F-alijaotus, kun F on enintään astetta 3. $\square$

Lause 3.12. *Jokainen verkko, jolla on K_5-minori sisältää Kuratowskin alijaotuksen.*

Todistus. Todistus tehdään vastaavalla tavalla Lauseen 3.11 todistuksen kanssa ja sen lähteenä ovat [1] sekä sitä täydentävä [2, Exercise 10.5.3(b)]. Olkoon G verkko, jolla on K_5-minori. Merkitään minorin K_5 kärkiä v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Verkon G kärjet voidaan jakaa joukkoihin $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$ niin, että näistä joukoista kärki-indusoidut aliverkot ovat yhtenäisiä ja verkosta G saadaan verkko K_5 poistamalla joukon V_0 kärjet ja kutistamalla joukot V_i kärjiksi v_i kaikilla $1 \leq i \leq 5$. Kutistamisella tarkoitetaan, että kaikista joukon V_i kärjistä lähtevät sivut supistetaan ja kaikki kärjet yhdistyvät kärjeksi v_i. Verkko

K_5 on täydellinen verkko, joten kaikki sen kärjet ovat toistensa naapureita. Nyt kaikilla $i \neq j$ on kärjet $v_{i,j} \in V_i$ ja $v_{j,i} \in V_j$, jotka ovat naapureita verkossa G. Jokaisessa joukossa V_i on siis 1, 2, 3, tai 4 tällaista jatkossa merkkikärjeksi kutsuttua kärkeä.

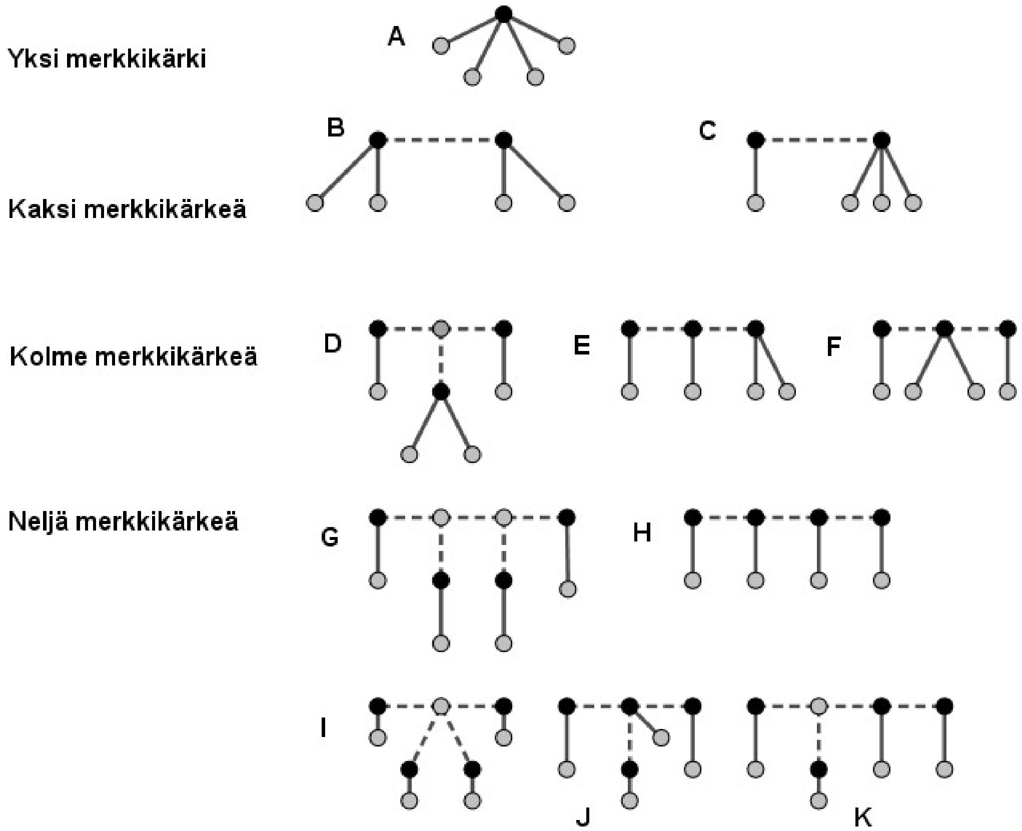
Tutkitaan nyt joukkojen V_i kärki-indusoimia aliverkkoja. Merkitään niitä $G[V_i]$. Nämä aliverkot ovat yhtenäisiä, joten niillä on virittävät puut. Jos virittävässä puussa on kaksi merkkikärkeä, niiden välillä on täsmälleen yksi polku Lauseen 2.8 nojalla. Jos merkkikärkiä on kolme, voidaan etsiä lyhyin mahdollinen polku, joka yhdistää kolmannen kärjen kahteen ensimmäiseen, joiden välillä on täsmälleen yksi polku. Liitetään siis kahden kärjen väliseen polkuun kolmas kärki mahdollisimman lyhyellä polulla. Tällöin kolmanteen kärkeen johtava polku liittyy kahden ensimmäisen kärjen "väliin" tai toiseen päätyyn. Kuvassa 3.8 havainnollistetaan tätä. Kuvassa mustat kärjet ovat merkkikärkiä ja katkoviivoilla merkityt sivut kuvaavat polkuja, eli merkkikärkien välillä voi olla muita kärkiä. Vastaavasti neljän merkkikärjen tapauksessa lisätään edellä havainnollistettujen kolmen kärjen tapauksiin mahdollisimman lyhyellä polulla neljäs kärki. Tällöin saadaan Kuvan 3.8 loput mahdolliset tapaukset.



Kuva 3.8: Polkujen muodostuminen Lauseen 3.12 todistuksessa

Verkossa K_5 jokaisesta kärjestä lähtee neljä sivua, joten seuraavaksi edellä saatuihin puihin lisätään neljä kärkeä. Lisätyt kärjet muodostavat yhdessä merkkikärkien kanssa nämä sivut. Yhden merkkikärjen tapauksessa kaikki sivut lähtevät samasta merkkikärjestä. Neljän merkkikärjen tapauksessa jokaisesta kärjestä lähtee yksi sivu. Kahden ja kolmen merkkikärjen tapauksissa on useampi vaihtoehto. Nämä on esitetty kuvassa 3.9.

Nyt edellä saadut puut ovat verkon $K_{1,4}$ tai verkon H_1 alijaotuksia. Verkko $K_{1,4}$ on sellainen verkko, jossa on yksi kärki astetta neljä ja neljä kärkeä astetta yksi, eli yhdestä kärjestä lähtee neljä sivua. Verkko H_1 on esitetty kuvassa 3.10. Verkon H_1 alijaotuksia ovat Kuvan 3.9 kohdat B, D, E, G, H ja K. Verkon $K_{1,4}$ alijaotuksia ovat siis kohdat A, C, F, I sekä J.

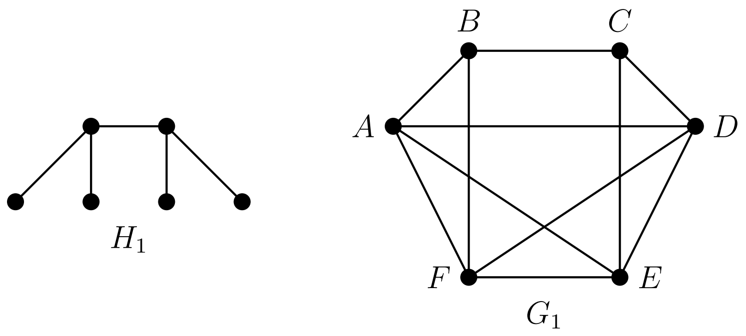


Kuva 3.9: Havainnollistus neljän sivun lisäämisestä eri vaihtoehtoihin Lauseen 3.12 todistuksessa

Tapauksessa, jossa kärkijoukoista V_i saadaan verkon H_1 alijaotuksia, näistä alijaotuksista muodostuu verkko, jonka minori on kuvan 3.10 verkko G_1.

Verkolla G_1 on $K_{3,3}$-minori, joka saadaan verkosta G_1 poistamalla sivut DE ja AF. Nyt koska alkuperäisellä verkolla G on $K_{3,3}$-minori, sillä on Lauseen 3.11 nojalla myös $K_{3,3}$-alijaotus.

Jos kaikki joukot $V_i, 1 \leq i \leq 5$ muodostavat verkon $K_{1,4}$-alijaotuksen, nämä viisi $K_{1,4}$-alijaotusta yhdessä muodostavat verkon K_5 alijaotuksen. Tämä seuraa suoraan siitä, että jokaisessa viidessä verkon $K_{1,4}$-alijaotuksessa on kärki astetta neljä. Tällöin saadaan viisi astetta neljä olevaa kärkeä niin, kuin on verkossa K_5. Nyt siis jokainen verkko, jolla on K_5-minori, sisältää Kuratowskin alijaotuksen. $\square$



Kuva 3.10: Lauseen 3.12 todistuksessa käytettävät verkot H_1 ja G_1

3.3 Wagnerin lause

Seuraavaksi esitellään Wagnerin lause, jonka avulla tullaan todistamaan myös Kuratowskin lause. Nämä lauseet osoitetaan ensin yhtäpitäviksi, jolloin Wagnerin lauseen todistus osoittaa myös Kuratowskin lauseen todeksi. Todistus esitetään myöhemmin, sillä siihen tarvitaan aputuloksia, jotka käydään ensin läpi.

Lause 3.13 (Wagnerin lause)**.** *Verkko on tasoverkko, jos ja vain jos sillä ei ole Kuratowskin minoria.*

Edellisen kappaleen lauseiden avulla huomataan, että Wagnerin ja Kuratowskin lauseet ovat yhtäpitäviä. Koska Lauseen 3.10 mukaan verkko, jolla on F-alijaotus sisältää myös F-minorin, Kuratowskin lause sisältää Wagnerin lauseen.

Koska verkon $K_{3,3}$ kärjet ovat enintään astetta kolme, Lauseen 3.11 mukaan jokainen verkko, jolla on $K_{3,3}$-minori, sisältää $K_{3,3}$-alijaotuksen. Samoin Lauseen 3.12 mukaan jokainen verkko, jolla on K_5-minori, sisältää Kuratowskin alijaotuksen. Tällöin Wagnerin lause sisältää Kuratowskin lauseen, joten lauseet ovat yhtäpitävät. Nyt voidaan todistaa Kuratowskin lause todistamalla Wagnerin lause. Määritellään ensin tarvittavia apuvälineitä lauseen todistukseen.

Määritelmä 3.14 (Kärkileikkaus (vertex cut))**.** Kärkileikkaus on sellainen osajoukko verkon kärkiä, joiden poistaminen tekee verkosta epäyhtenäisen. Kärkiä poistettaessa myös kärjistä lähtevät sivut poistetaan. Toisin sanoen, kun poistetaan verkosta kärkileikkauksen kärjet, verkko jakautuu kahteen tai useampaan komponenttiin. Kärkileikkaus, jossa on k kärkeä on *k-kärkileikkaus.*

Täydellisellä verkolla ei ole kärkileikkausta, sillä täydellinen verkko pysyy täydellisenä eli myös yhtenäisenä, vaikka siitä poistaisi minkä tahansa kokoelman kärkiä.

Määritelmä 3.15 (k-yhtenäisyys)**.** Verkon G yhtenäisyysaste $\kappa(G)$ on pienin mahdollinen kärkien määrä, joiden poistaminen tekee verkosta G epäyhtenäisen tai triviaalin. Verkko G on *k-yhtenäinen*, jos $\kappa(G) \geq k$. Toisin sanoen verkko G on k-yhtenäinen, jos se pysyy yhtenäisenä, kun siitä poistetaan mitkä tahansa $k - 1$ kärkeä.

Lause 3.16. *Kun k-yhtenäisestä verkosta G poistetaan kärki $v \in V(G)$, verkko $G - v$ on $(k-1)$-yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon G k-yhtenäinen verkko. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että verkko $G - v$ ei ole $(k-1)$-yhtenäinen. Nyt $\kappa(G - v) < k - 1$. Tällöin on olemassa kärjet $v_1, \ldots, v_l$ siten, että $l < k - 1$ ja verkko $G - v - \{v_1, \ldots, v_l\}$ on epäyhtenäinen.

Nyt $G - v - \{v_1, \ldots, v_l\} = G - \{v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}\}$, missä $v_{l+1} = v$. Verkko $G - \{v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}\}$ on epäyhtenäinen, joten $\kappa(G) \leq l + 1 < k$.

Tämä on ristiriita sen oletuksen kanssa, että G olisi k-yhtenäinen, joten verkko $G - v$ on $(k-1)$-yhtenäinen. □

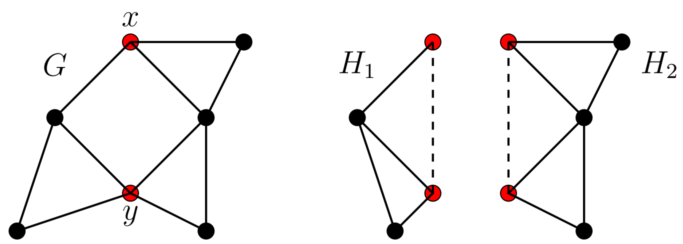
Lause 3.17. *3-yhtenäisen tasoverkon, jossa ei ole silmukoita, kärjen naapurit ovat samassa kierroksessa.*

Todistus. Todistuksessa lähteenä on [1, s. 252]. Olkoon G 3-yhtenäinen tasoverkko, jossa ei ole silmukoita ja olkoon $v \in V(G)$. Koska G on 3-yhtenäinen, $G - v$ on 2-yhtenäinen. Nyt jokaista verkon $G - v$ tahkoa rajaa kierros. Olkoon f se tahko, johon kärki v kuului. Nyt kärjen v naapurit kuuluvat siihen kierrokseen, joka rajaa tahkoa f verkossa $G - v$. Kärjen naapurit ovat siis aina samassa kierroksessa. □

Määritelmä 3.18 (S-komponentti)**.** Olkoon G yhtenäinen, mutta ei täydellinen verkko, jolla on kärkileikkaus S. Nyt $G - S$ jakaa verkon G komponentteihin. Merkitään syntyneiden komponenttien kärkijoukkoja X_i. Aliverkko H_i, joka on kärki-indusoitu joukon $S \cup X_i$ kärjistä, on verkon G *S-komponentti.*

Määritelmä 3.19 (Merkattu S-komponentti)**.** Jos verkko G on 2-yhtenäinen ja sillä on 2-kärkileikkaus $S = \{x, y\}$, voidaan jokaiseen S-komponenttiin lisätä *merkkisivu* $e = xy$. Tällöin näitä S-komponentteja, joihin on lisätty merkkisivu, kutsutaan *merkatuiksi S-komponenteiksi.*

Esimerkki 3.20. Kuvassa 3.11 verkolla G on 2-kärkileikkaus $S = \{x, y\}$. Kun verkosta G poistetaan kärjet x ja y, verkko jakautuu kahteen komponenttiin. Merkitään näiden komponenttien kärkijoukkoja X_1 ja X_2. Nyt joukon $X_1 \cup S$ kärjet indusoivat verkon G ensimmäisen S-komponentin ja kärjet $X_2 \cup S$ verkon G toisen S-komponentin. Kun näihin verkkoihin lisätään vielä merkkisivu, joka yhdistää kärjet x ja y (kuvassa katkoviivoilla), saadaan verkon G merkatut S-komponentit H_1 ja H_2.



Kuva 3.11: Verkon G merkatut S-komponentit

Edellä esitettyjen määritelmien ja tulosten avulla voidaan nyt todistaa seuraavat neljä lausetta. Näiden lauseiden avulla saadaan todistettua Lause 3.26 ja lopulta myös Wagnerin lause.

Lause 3.21. *Olkoon G 2-yhtenäinen verkko ja olkoon $S = \{x, y\}$ verkon G 2-kärkileikkaus. Tällöin myös verkon G merkatut S-komponentit ovat 2-yhtenäisiä.*

Todistus. Todistuksen lähteenä on [1, s. 221]. Olkoon H verkon G merkattu S-komponentti, jossa on kärkijoukko $S \cup X$. Nyt komponentin H kärkien määrä $|V(H)| = |S| + |X| \geq 3$, koska $|S| = 2$ ja joukossa X on vähintään yksi kärki. Nyt jos H on täydellinen, se on 2-yhtenäinen. Jos H ei ole täydellinen, kaikki komponentin H kärkileikkaukset ovat myös verkon G kärkileikkauksia. Tämä seuraa siitä, että verkko H on osa verkkoa G (lukuunottamatta lisättyä merkkisivua xy), joten jos H jakautuu erillisiin komponentteihin, myös välttämättä verkko G jakautuu. Koska G on 2-yhtenäinen, tässä kärkileikkauksessa on vähintään 2 kärkeä, joten myös H on silloin 2-yhtenäinen. □

Lause 3.22. *Olkoon verkko G verkko, jolla on 2-kärkileikkaus $\{x, y\}$. Tällöin jokainen verkon G merkattu $\{x, y\}$-komponentti on isomorfinen verkon G minorin kanssa.*

Todistus. Todistuksen lähteenä on [1, s. 270]. Olkoon H verkon G $\{x, y\}$-komponentti, jossa on merkkisivu $e = xy$. Olkoon xPy polku toisessa verkon G $\{x, y\}$-komponentissa. Nyt $H \cup P$ on verkon G aliverkko. Lisäksi $H \cup P$ on isomorfinen verkon $G + e$ alijaotuksen kanssa. Tämä seuraa siitä, että sivua $e = xy$ voidaan jakaa niin monta kertaa, että se on isomorfinen kärkiä x ja y yhdistävän polun P kanssa. Tällöin $G + e$ on isomorfinen verkon G minorin kanssa. □

Lause 3.23. *Olkoon G verkko, jolla on 2-kärkileikkaus $S = \{x, y\}$. Tällöin G on tasoverkko, jos ja vain jos sen jokainen merkattu S-komponentti on tasoverkko.*

Todistus. Todistuksen lähteenä ovat [1, s. 270] sekä [2, Proofs from Section 10.5.]. Oletetaan ensin, että verkko G on tasoverkko. Nyt Lauseen 3.22 mukaan jokainen verkon G merkattu S-komponentti on isomorfinen verkon G minorin kanssa. Tämä minori on tasoverkko, koska G on tasoverkko, joten myös verkon G merkatut S-komponentit ovat tasoverkkoja.

Todistetaan nyt lauseen toinen suunta. Oletetaan, että verkolla G on k kappaletta merkattuja S-komponentteja H_i, jotka ovat kaikki tasoverkkoja. Olkoon $e = xy$ näiden tasoverkkojen merkkisivu. Nyt kahdella S-komponentilla on aina yhteisenä vain kärjet x ja y sekä näiden välinen sivu e. (Yhdisteessä nämä yhteiset kärjet ja sivut ovat vain yhden kerran, eli verkossa ei ole päällekkäisiä sivuja.) Tämä yhteinen osa on selvästi myös tasoverkko, koska siinä on vain yksi sivu. Tällöin, kun kaksi tasoverkkoa yhdistetään sivun e kärkipisteistä, yhdisteeseen ei tule uusia risteäviä sivuja. Nyt siis verkon G merkatut S-komponentit voidaan yhdistää niin, että yhdiste pysyy koko ajan tasoverkkona. Näin saadaan yhdiste $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_k = G + e$, joka on tasoverkko. Verkko $G + e$ on siis tasoverkko, joten myös G on tasoverkko. □

Lause 3.24. *Olkoon G 3-yhtenäinen verkko, jolla on vähintään viisi kärkeä. Tällöin verkolla G on sivu e, jolle G/e on 3-yhtenäinen.*

Tätä todistusta varten todistetaan ensin tarvittava lemma. Seuraavissa todistuksissa lähteenä ovat [1, s. 222] sekä sitä täydentävä [2, Proofs from Section 9.4.].

Lemma 3.25. *Olkoon G 3-yhtenäinen verkko, jolla on vähintään viisi kärkeä. Olkoon $e = xy$ verkon G sivu niin, että G/e ei ole 3-yhtenäinen. Tällöin on olemassa kärki z, jolle $\{x, y, z\}$ on verkon G 3-kärkileikkaus.*

Todistus. Olkoon $\{z, w\}$ verkon G/e 2-kärkileikkaus. Nyt ainakaan toinen näistä kärjistä ei ole sivun e supistuessa syntynyt kärki. Olkoon se kärki z. Olkoon $F = G - z$. Verkko F on 2-yhtenäinen Lauseen 3.16 nojalla, koska G on 3-yhtenäinen ja siitä poistetaan yksi kärki. Nyt $F/e = (G - z)/e = (G/e) - z$, koska z ei ole sivun e päätepiste. Tällä on leikkauskärki w, koska

$\{z, w\}$ on verkon G/e 2-kärkileikkaus. Nyt kärki w on sivun e supistumisesta syntyvä kärki. Koska $e = xy$, $(G/e) - w = G - \{x, y\}$. Tästä saadaan

$$G - \{x, y, z\} = (G - \{x, y\}) - z = (G/e - w) - z = (G/e) - \{z, w\}.$$

Huomataan, että myös $G - \{x, y, z\}$ on epäyhtenäinen, koska $\{z, w\}$ on verkon G/e kärkileikkaus, joten $(G/e) - \{z, w\}$ on epäyhtenäinen. Nyt siis $\{x, y, z\}$ on verkon G 3-kärkileikkaus. □

Todistetaan nyt edellisen lemman avulla Lause 3.24.

Lauseen 3.24 todistus. Olkoon G 3-yhtenäinen verkko, jolla on vähintään 5 kärkeä. Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että ei ole olemassa sivua e, jolle G/e on 3-yhtenäinen. Tällöin millään sivulla $e = xy$ verkko G/e ei ole 3-yhtenäinen. Nyt Lemman 3.25 mukaan on olemassa kärki z siten, että $\{x, y, z\}$ on verkon G 3-kärkileikkaus. Tällöin verkolla $G - \{x, y, z\}$ on vähintään kaksi komponenttia. Valitaan sivu e ja kärki z niin, että verkon $G - \{x, y, z\}$ komponentissa F on mahdollisimman monta kärkeä. Tarkastellaan verkkoa $G - z$. Tämä verkko on 2-yhtenäinen, koska verkko G on 3-yhtenäinen. Verkolla $G - z$ on 2-kärkileikkaus $\{x, y\}$. Nyt $\{x, y\}$-komponentti $H = G[V(F) \cup \{x, y\}]$ on 2-yhtenäinen Lauseen 3.21 nojalla.

Olkoon seuraavaksi kärki u kärjen z naapuri jossain vekon $G - \{x, y, z\}$ muussa komponentissa kuin F. Sivu $f = zu$ on verkon G sivu, joten G/f ei ole 3-yhtenäinen vastaoletuksen nojalla. Tällöinkin Lemman 3.25 nojalla on olemassa kärki v, jolle $\{z, u, v\}$ on verkon G 3-kärkileikkaus.

Aiemmin määritelty komponentti H on 2-yhtenäinen, jolloin $H - v$ on 1-yhtenäinen. Nyt voi olla, että $v \notin V(H)$, jolloin $H - v = H$. Koska $H - v$ on yhtenäinen, se kuuluu johonkin verkon $G - \{z, u, v\}$ yhtenäiseen komponenttiin. Tällöin kuitenkin sillä komponentilla olisi enemmän kärkiä kuin komponentilla F, sillä komponentilla H on kaksi kärkeä enemmän, kuin komponentilla F. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että komponentissa F olisi mahdollisimman monta kärkeä. Oletus on siis väärin, joten verkolla G on olemassa sivu e, jolle G/e on 3-yhtenäinen. □

Seuraavaksi esitetään tulos, joka on merkittävässä osassa lopullisessa Wagnerin lauseen todistuksessa. Se on viimeinen lause, joka tarvitaan lopulliseen todistukseen.

Lause 3.26. *Jokaisella 3-yhtenäisellä verkolla, joka ei ole tasoverkko, on Kuratowskin minori.*

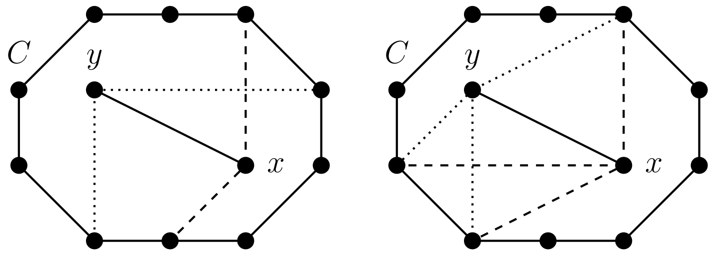
Todistus. Lähteenä todistuksessa ovat [1, s. 270] sekä sitä täydentävä [2, Proofs from Section 10.5.].

Olkoon G yksinkertainen 3-yhtenäinen verkko, joka ei ole tasoverkko. Kaikki verkot, joissa on vähemmän kuin viisi kärkeä ovat tasoverkkoja, joten voidaan olettaa, että kärkien määrä $n \geq 5$. Käytetään induktiotodistusta. Väite pätee, kun $n \leq 4$, koska silloin verkko on aina tasoverkko. Tehdään induktio-oletus. Oletetaan, että väite pätee, kun $n \leq k$. Osoitetaan nyt, että väite pätee, kun $n = k + 1$.

Olkoon G 3-yhtenäinen $k+1$ kärkinen verkko, joka ei ole tasoverkko. Nyt Lauseen 3.24 mukaan jokainen 3-yhtenäinen verkko, jolla on vähintään viisi kärkeä sisältää sivun e, jolle G/e on 3-yhtenäinen. Verkolla G on siis sivu $e = xy$, jolle pätee, että $H = G/e$ on 3-yhtenäinen. Jos H ei ole tasoverkko, sillä on Kuratowskin minori induktio-oletuksen nojalla. Nyt koska jokainen verkon H minori on myös verkon G minori, myös verkolla G on Kuratowskin minori.

Oletetaan nyt, että verkko H on tasoverkko. Olkoon $\tilde{H}$ tasoesitys verkosta H. Kun verkosta H supistetaan sivu e, yhdistyy sivun e päätepisteet yhdeksi kärjeksi. Olkoon tämä kärkin nyt z. Koska verkossa H ei ole silmukoita ja se on 3-yhtenäinen, Lauseen 3.17 nojalla kärjen z naapurit ovat samassa kierroksessa C. Kierros C rajaa siis verkon $\tilde{H} - z$ tahkoa f. Nyt verkko G/e sisältää kierroksen C. Verkossa G/e on kärjet x ja y, jotka eivät ole kierroksessa C. Olkoon B_x ja B_y verkon G/e kierroksen C kärjet x ja y sisältäviä siltoja. Kärkien x ja y naapurit ovat kierroksessa C ja kierros C rajaa verkon $\tilde{H} - z$ tahkoa f, joten tahkoon f kuuluu vain ne sivut, jotka yhdistävät kärjen x tai kärjen y kierrokseen C.

Oletetaan ensin, että B_x ja B_y ovat toisiaan välttäviä. Tässä tapauksessa B_x ja B_y voidaan upottaa verkon $\tilde{H} - z$ tahkoon f niin, että kärjet x ja y kuuluvat samaan tahkoon saadun tasoverkon $(\tilde{H} - z) \cup \tilde{B}_x \cup \tilde{B}_y$ kanssa. Sivu xy voidaan nyt piirtää tähän tahkoon, jolloin saadaan tasoesitys verkosta G. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että G ei ole tasoverkko. Sillat B_x ja B_y eivät siis ole toisiaan välttäviä.



Kuva 3.12: Kierroksen C sillat B_x katkoviivalla ja B_y pisteviivalla

Tällöin B_x ja B_y ovat päällekkäisiä, joten ne ovat Lauseen 2.20 mukaan toisiaan vastaan vinot tai ekvivalentit 3-sillat. Kuvasta 3.12 huomataan, että kun sillat ovat toisiaan vastaan vinot, verkolla G on $K_{3,3}$-minori ja kun sillat ovat ekvivalentit 3-sillat, verkolla G on K_5-minori. Nyt lause pätee, kun verkossa G on $k+1$ kärkeä, joten induktion nojalla jokaisella 3-yhtenäisellä verkolla, joka ei ole tasoverkko on Kuratowskin minori. □

Nyt voidaan todistaa Wagnerin lause 3.13, jonka mukaan verkko on tasoverkko, jos ja vain jos sillä ei ole Kuratowskin minoria.

Wagnerin lauseen 3.13 todistus. Lähteenä on [1, s. 270] sekä sitä täydentävä [2, Proofs from Section 10.5.].Todistetaan ensin lause vasemmalta oikealle, mikä on selvästi helpompi suunta.

Olkoon G yhtenäinen verkko. Oletetaan, että G on tasoverkko. Lauseen 3.9 mukaan tasoverkkojen minorit ovat myös tasoverkkoja, joten verkolla G ei voi olla Kuratowskin minoria.

Todistetaan nyt lauseen toinen suunta. Olkoon G edelleen yhtenäinen verkko. Oletetaan nyt, että verkko G ei ole tasoverkko. Jos G on k-yhtenäinen ja $k \geq 3$, verkko G on 3-yhtenäinen. Tällöin Lauseen 3.26 nojalla verkolla G on Kuratowskin minori.

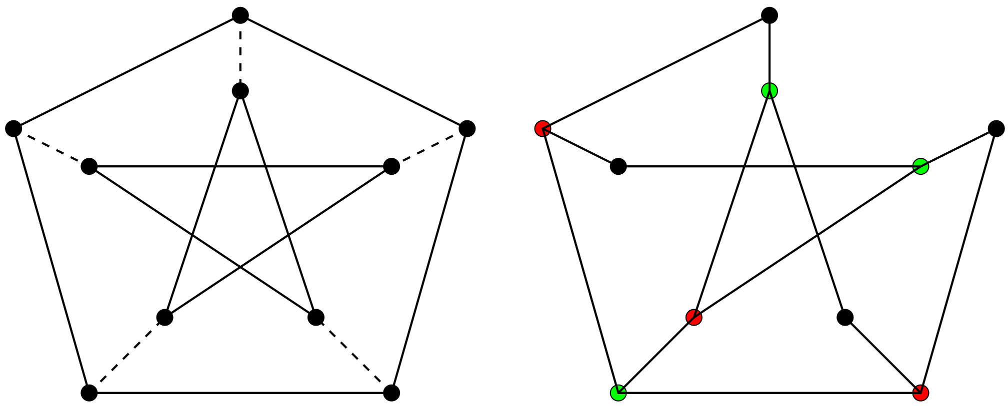
Jos G ei ole 3-yhtenäinen, sillä on 2-kärkileikkaus $\{x, y\}$. Nyt koska G ei ole tasoverkko, sillä on Lauseen 3.23 nojalla merkattu $\{x, y\}$-komponentti, joka ei ole tasoverkko. Tämä $\{x, y\}$-komponentti on Lauseen 3.22 nojalla isomorfinen verkon G minorin kanssa. Verkolla G on siis 3-yhtenäinen minori, joka ei ole tasoverkko.

Lauseen 3.26 mukaan jokaisella 3-yhtenäisellä verkolla, joka ei ole tasoverkko, on Kuratowskin minori, joten nyt tällä verkon G minorilla on Kuratowskin minori. Tästä seuraa, että myös verkolla G on Kuratowskin minori. Saadaan siis osoitettua, että verkolla, joka ei ole tasoverkko on aina Kuratowskin minori, eli jos verkolla ei ole Kuratowskin minoria, se on tasoverkko. □

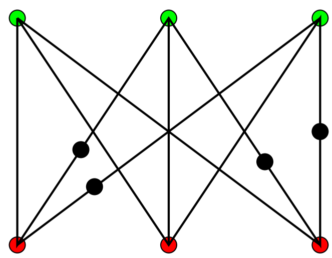
Wagnerin lause on saatu todistettua, joten yhtäpitävä Kuratowskin lause 3.4 on näin ollen myös todistettu. Esitetään lopuksi vielä esimerkki näiden lauseiden käytöstä.

Esimerkki 3.27. Tutkitaan Petersenin verkkoa ja osoitetaan, että se ei ole tasoverkko. Petersenin verkossa on 10 kärkeä ja 15 sivua ja se esitetään usein Kuvan 3.13 mukaisesti. Petersenin verkolla on selvästi K_5-minori, joka saadaan supistamalla katkoviivalla merkityt sivut. Verkko ei siis ole tasoverkko Wagnerin lauseen nojalla.

Tutkitaan vielä kuvan avulla, onko verkolla aliverkkona Kuratowskin alijaotusta. Koska verkossa $K_{3,3}$ on kuusi sellaista kärkeä, jotka ovat astetta 3, valitaan aliverkko niin, että siinä on kuusi kärkeä astetta 3 ja loput kärjet astetta 2. Väritetään aliverkon kärjet kuten Kuvan 3.13 oikean puoleisessa verkossa. Kaksi asteiset kärjet ovat mustia ja kolme asteiset kärjet on jaettu punaisiin ja vihreisiin. Nyt verkko voidaan järjestellä uudelleen Kuvan 3.14 mukaisesti, jolloin huomataan, että se on verkon $K_{3,3}$ alijaotus. Tämä alijaotus on saatu lisäämällä verkkoon $K_{3,3}$ neljä kärkeä, jotka jokainen jakavat yhden sivuista kahteen osaan. Petersonin verkolla on siis aliverkkona verkon $K_{3,3}$ alijaotus, joten se ei ole myöskään Kuratowskin lauseen nojalla tasoverkko.



Kuva 3.13: Petersenin verkko ja siitä valittu aliverkko



Kuva 3.14: Havainnollistus verkon $K_{3,3}$ alijaotuksesta Petersenin verkossa

Viitteet

[1] Bondy, J.A. & Murty, U.S.R.: *Graduate Texts in Mathematics: Graph Theory.* Springer, 2008.

[2] Gardner, Brad: *Graph Theory 2 - Class Notes.* https://faculty.etsu.edu/gardnerr/5340/notes2-Bondy-Murty-GT.htm. Luettu 27.11.2023

[3] Käenmäki, Antti: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan.* Jyväskylän yliopisto.

[4] Pesonen, Martti: *Verkkoteorian alkeita.* Itä-Suomen yliopisto, 2013. https://cs.uef.fi/matematiikka/kurssit/MathematicsVisualizationMedia/CourseMaterial/VerkkoteoriaaSciFestiin2013.pdf. Luettu 27.11.2023

[5] Tengvall, Ville: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan.* Jyväskylän yliopisto, 2022.

[6] Tuominen, Lauri: *Jordanin käyrälause.* Jyväskylän yliopisto, 2012. https://faculty.etsu.edu/gardnerr/5340/notes2-Bondy-Murty-GT.htm. Luettu 27.11.2023.