dupl.

917

Jyväskylän Yliopisto
Taloustieteiden tiedekunta

OPTIOIDEN HINNOITTELU VOLATILITEETIN OLLESSA STOKASTINEN

Laskentatoimen Pro gradu –tutkielma

Laatija : Tarja Myyryläinen

Ohjaajat: Salme Näsi
Juhani Raatikainen

OPTIOIDEN HINNOITTELU VOLATILITEETIN OLLESSA STOKASTINEN

SISÄLLYSLUETTELO

"...option pricing theory is relevant to almost every area of finance. For example, virtually all corporate securities can be interpreted as portfolios of puts and calls on the firm." (Cox et al., 1979, 230)

1 JOHDANTO

Eräs rahoitusmarkkinoiden tärkeimpiä tehtäviä on riskintasaajana toimiminen osapuolten välillä[1]. Rahoitusteorian mukaan sijoittaja pyrkii jatkuvasti varmistamaan korkeimman mahdollisen tuoton mahdollisimman alhaisella riskillä. Riskinkarttajana sijoittaja vaatii korvauksen eli suuremman odotetun tuoton kantamastaan riskistä. Sijoittamisen päämääränä on Kolbin (1995, 4-5) mukaan

- tietyllä riskitasolla varmistaa korkein mahdollinen tuotto tai
- tietyllä vaaditulla tuottotasolla varmistaa tuotto mahdollisimman alhaisella riskillä.

Osakeoptioiden ja -termiinien päätarkoitus on jakaa uudelleen osakemarkkinoilla ilmenevää kokonaisriskiä. Ne eivät lisää tai poista riskiä, vaan siirtävät riskiä osapuolelta toiselle. Optio on sopimus tulevaisuudessa tehtävästä kaupasta. Sopimushetkellä päätetään kaupan toteutushinta ja -päivämäärä. Option ostaja saa oikeuden päättää, toteutetaanko kauppa tulevaisuudessa. Option myyjä on velvollinen toteuttamaan kaupan ostajan niin vaatiessa. Korvaukseksi oikeudestaan päättää, tehdäänkö kauppa vai ei, osta maksaa myyjälle option hinnan eli preemion.

Tärkeä tekijä optiosopimuksessa on hinta. Option teoreettisen arvon laskemiseksi on useita vaihtoehtoja. Yleisimmin optioiden hinnoitteluun käytettyä mallia kutsutaan kehittäjiensä mukaan Black & Scholes -malliksi (1973). Malli on ollut jo vuosikymmenien ajan tutkijoiden yleisesti hyväksymä ja markkinoilla eniten käytetty optioiden hinnoittelumalli. Sen suosio perustuu yksinkertaisuuteen ja helppokäyttöisyyteen, sillä se ei edellytä välttämättä taskulaskinta vaativampaa työvälinettä. Toimiakseen malli on kuitenkin vaatinut useita yksinkertaistuksia reaalimaailmasta. Sen perustana olevat oletukset ovat saaneet tutkijoilta arvostelua osakseen, niin

[1] Muut tehtävät ovat pienten säästöjen yhdistäminen, tiedon ja osaamisen hyödyntäminen, sijoitusten likvisyyden parantaminen ja kulutusluoton mahdollisuus (Tarkka 1993, 93-95).

teoreettisesta kuin empiirisestäkin näkökulmasta.

Eräs keskeisistä oletuksista on, että osaketuottojen noudattama stokastinen prosessi[2] on geometrinen Brownin liike (esitelty tarkemmin liitteessä 1). Tästä johtuen osakkeiden tuottojen oletetaan olevan jakautuneet lognormaalisti sekä niiden varianssi (volatiliteetti [3]) oletetaan vakiosuuruiseksi. Lognormaali jakauma tarkoittaa, että kohde-etuuden hintojen luonnollinen logaritmi noudattaa normaalijakaumaa. Useasta osakesarjasta muodostuneeseen indeksiin kohdistuvat indeksioptiot eivät kuitenkaan sovi edelliseen oletukseen, sillä indeksin muodostavien osakkeiden tuottoprosessien summa ei ole enää sama stokastinen prosessi eli geometrinen Brownin liike. Seurauksena hinnoittelutulokset vääristyvät. Tosiasiassa empiiriset tutkimukset eivät anna tukea lognormaalille jakaumalle edes yksittäisten osakkeiden ollessa kyseessä. Onkin käytännössä todettua, että hinnoittelumallin käyttö Blackin ja Scholesin alkuperäisen artikkelin mukaisesti tuottaa epätarkkoja tuloksia. Hinnoitteluvirheen aiheuttajaksi paljastunut tekijä on toinen geometrisen Brownin liikkeen aiheuttama oletus, eli mallissa käytettävän volatiliteetin olettaminen ajassa vakioksi. Empiiriset tutkimukset ovat osoittaneet, ettei tämä pidä paikkaansa, vaan volatiliteetti on ajassa vaihteleva eli stokastinen. (Saez 1997, 379) Tässä työssä on keskitytty juuri volatiliteettiongelman käsittelyyn hinnoiteltaessa indeksioptioita.

Volatiliteettiin liittyvä problematiikka on noussut merkittävimmäksi optioihin liittyväksi tutkimuskohteeksi. Tämä on luonnollista, sillä Black & Scholes -mallin mukaisesti volatiliteetti on ainoa hinnoitteluparametri, joka on estimoitava itse ja näin ollen ainoa tekijä, jonka avulla voidaan "spekuloida option arvoa". Lisäksi volatiliteetilla on voimakas vaikutus option hintaan. Näin ollen teoreettiseen option arvoon liittyvät ongelmat kääntyvät lähinnä oikean volatiliteetin ennustamiseen. Tulevaisuuden volatiliteettia ei ole helppo määrittää. Historiallisen volatiliteetin käyttö tulevaisuuden arvojen ennustamiseen ei ole osoittautunut toimivaksi menetelmäksi. Black & Scholes -mallissa volatiliteetin oletetaan olevan vakaa, mutta nykyään sen vaihtelevuus ajassa on yleisesti hyväksytty. Lisäksi volatiliteetin vaihtelu on yleensä satunnaista. Satunnaisuuden seurauksena tulevaisuuden volatiliteettia ei voi ennustaa suoraan menneistä tiedoista. (Abken & Nandi 1996, 22)

---

[2]Stokastinen prosessi on matemaattinen kuvaus muuttujan vaihtelulle, eli tässä tapauksessa se on tuottojen muutos- tai satunnaisprosessi (Bhat 1972,7).

[3] Volatiliteetti mittaa osakkeen hinnan hajontaa sen keskimääräisestä tasosta tietyssä ajassa.

Eräs tapa mallittaa ajassa vaihtelevaa volatiliteettia on nk. GARCH[4]-prosessien käyttö. Tässä hyvin suositussa ja käyttökelpoiseksi osoittautuneessa menetelmässä tulevaisuuden volatiliteettia kuvaa regressioyhtälö, jossa huomisen volatiliteetti selittyy tämän päivän volatiliteetilla sekä tämän päivän tuottojen poikkeamalla keskiarvostaan. Historiallisista aikasarjoista saadaan selville, miten suuret painoarvot näillä tekijöillä on yhtälössä. Optioiden hinnoittelua GARCH-ympäristössä on tutkittu vasta viime vuosina.

Optioiden hinnan ratkaisemisella ja optioteorialla on merkitystä myös johdanaismarkkinoiden ulkopuolella. Monet muutkin arvopaperit, kuten osakkeet, vakuutukset ja velkakirjat voidaan nähdä optioina. Yrityksen toimintaan sisältyvät reaalioptiot ovat yksi mielenkiintoisimmista optioteorian soveltamiskohteista. Optio-ominaisuus muodostuu tällöin yrityksen mahdollisuudesta tehdä jotain tulevaisuudessa, kuten esimerkiksi laajentaa tai keskeyttää toimintansa. Tarkasteltaessa tällaisten tulevaisuuden mahdollisuuksien arvoa on optioteoriasta suurta hyötyä. Samoin kuin osakemarkkinoilla, ei yrityksen tapauksessakaan voida ennustaa tulevaisuutta varmuudella. Tilanteet muuttuvat jatkuvasti eikä reaalioptioihinkaan kohdistuvaa volatiliteettia voida pitää vakiosuuruisena. Näin myös reaalioptioihin soveltuu stokastisen volatiliteetin huomioiva optioiden hinnoittelumalli.

Edellä esitetyistä optioiden hinnoissa systemaattista virhettä aiheuttavista tekijöistä huolimatta markkinoilla käytetään optioiden arvon määrittämisessä Black & Scholes -hinnoittelumallia. Syynä tähän lienee, että vaikka hinnoitteluvirheitä huomattiin jo pian 70-luvulla, ei tietokonekapasiteetti mahdollistanut monimutkaisempien mallien käyttöä. Markkinoilla käytännöksi on muodostunut Black & Scholes -kaavan tuottaman hinnoitteluvirheen korjaaminen intuitiiviselta pohjalta ad hoc periaatteella. Nykyiset tietokoneet ovat kuitenkin kehittyneet niin paljon, ettei tekniikka enää aseta rajoituksia monimutkaisillekaan malleille, joita useat tutkijat ovat kehitelleet vuosien varrella.

[4] Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, ARCH-mallin esitteli alunperin Engle (1982), josta Bollerslev (1986) yleisti tunnetumman GARCH muodon.

1.1 Tutkimusongelma

Useat empiiriset tutkimukset sekä vallitseva markkinakäytäntö osoittavat, ettei Black & Scholes -malli ole virheetön mentelmä optioiden hinnoitteluun. Suurin ongelma liittyy mallin tekemään oletukseen tuottojen noudattamasta stokastisesta prosessista. Alkuperäisessä Black & Scholes -mallissa tuottojen oletetaan noudattavan geometristä Brownin liikettä, jolloin volatiliteetti on vakiosuuruinen suhteessa aikaan. On kuitenkin havaittu, ettei tämä vastaa todellisuutta[5]. Tällöin totuudenmukaisempaa olisi antaa osakkeen hinnan tavoin myös volatiliteetin arvon vaihdella vapaasti. Kun osakkeen hinta ja volatiliteetti ovat molemmat stokastisia muuttujia, ei Black & Scholes -kaavaa voida enää soveltaa suoraan. Viime aikoina tutkijat ovat kiinnittäneet ongelmaan runsaati huomiota ja kehitelleet uusia optioiden hinnoittelumalleja, joissa stokastinen volatiliteetti on huomioitu.

Tässä tutkielmassa käsitellään volatiliteettiin liittyvää problematiikkaa optioiden hinnoittelussa. Tarkoitus on soveltaa stokastisen volatiliteetin hinnoittelumallia suomalaiseen aineistoon eli FOX-osakeindeksioptioiden hintoihin. Sovellettavaksi malliksi on valittu Duanin, Simonaton ja Gauthierin (1998) kehittelemä GARCH-prosessiin perustuva hinnoittelumalli.Duan on pioneereja GARCH:iin perustuvien optioiden hinnoittelumallien tutkimisessa[6]. Tähän työhön valittu malli on hänen tuoreimpia julkaisujaan. Lisäksi mallin valintaa puolsivat tutkimuksen simuloimalla suoritetut empiiriset testit, joiden tulokset olivat onnistuneita.

Tutkimusongelma on selvittää, toimiiko tämä GARCH-prosessin avulla stokastisen volatiliteetin huomioiva hinnoittelumalli Black & Scholes -mallia paremmin käytetyllä todellisella aineistolla[7]. Toimivuus saadaan selville vertaamalla mallien tuottamia teoreettisia optioiden arvoja vastaaviin markkinoilla toteutuneisiin hintoihin. Tutkielman aineistona käytetään markkinadataa neljästä FOX-indeksiin kohdistuvasta optiosarjasta välillä 2.1.1996 - 27.12.1997.

---

[5] Volatiliteetin ei-vakioisuuden on tutkimuksissaan osoittanut mm. Bollerslev et al . (1992)

[6] Duan julkaisi ensimmäisenä GARCH:iin perustuvan optioiden hinnoittelumallin (1995)

[7] Duanin et al. testiaineisto oli keinotekoinen, optioihinnoittelumallin taustalla olleiden oletusten mukaisesti simuloimalla tuotettu. Tässä tutkimuksessa käytetään sen sijaan todellisia toteutuneita optiohintoja ja oikeaa markkinadataa.

Koska Duanin et al. julkaisema artikkeli on varsin tuore, ei sen pohjalta ole tehty julkaistuissa tutkimuksissa empiirisiä testauksia. He itse testasivat mallinsa toimivuuttaa laskemalla optioiden arvoja simuloidussa ympäristössä, mutta eivät soveltaneet mallia käytännön markkinoihin. Näin ollen tämä tutkielma lienee ensimmäinen, joka testaa mallin toimivuutta oikealla aineistolla ja vertailee mallin tuottamia arvoja markkinoilla esiintyneisiin hintoihin.

1.2 Tutkimusmetodi ja tutkimusmenetelmät

Tutkielman tarkoitus on testata tiettyjen optioiden hinnoittelumallien toimivuutta käyttäen aineistona oikeaa markkinadataa. Tämä saadaan selville ratkaisemalla valittujen optioiden teoreettiset arvot käyttäen Black & Scholes ja Duan et al. -kaavoja ja vertaamalla saatuja tuloksia FOX-indeksioptioiden toteutuneisiin markkinahintoihin.[8] Lisäksi myös Black & Scholes ja Duan et al. teoreettisia arvoja vertaillaan keskenään.

Tavoite on saavuttaa subjektiivinen tulos, josta voidaan olla yksimielisiä. Eli tutkielman tuloksena tulisi saavuttaa tietoa, joka ei sisällä tutkijan omia tulkintoja. Siten lähestymistapa tutkielmaan on koetteleva tutkimus. Mukana työssä on myös tulkintaa, jolla tulokset liitetään reaalimaailmaan. (Tamminen 19, 120-131)

Kirjallisuuteen ja etenkin alan viimeaikaisiin artikkeleihin perehtymällä luodaan teoreettinen pohja optioiden hinnoittelulle ja siihen liittyvään problematiikkaan. Empiirisessä osassa tutkielmaa lasketaan optioiden teoreettisia arvoja valituilla hinnoittelumalleilla. Testattavana aineistona työssä on Suomen osakemarkkinoiden 25 suurimpaan osakesarjaan perustuvaan FOX-indeksiin kohdistuvat optiot. Teoreettiset option arvot lasketaan sekä Duan et al. -mallilla että Black & Scholes -mallilla valituille neljälle eri optiosarjalle, joissa jokaisessa on useita eri toteutushintoja. Saatuja arvoja verrataan kyseisten sarjojen toteutuneisiin markkinahintoihin. Vertailun perusteella voidaan tehdä johtopäätöksiä mallien toimivuudesta ja paremmuudesta.

[8] Vertailu toteutuneisiin hintoihin sen sijaan, että vertailtaisiin vain eri mallien eroja tuo mukaan markkinoiden näkemyksen optioiden arvosta, vertailu teoreettisen ja markkinahinnan välillä on mielekkäintä.

1.3 Aiempia tutkimuksia

1.3.1 Tutkimuksia volatiliteetin estimoinnista

Jo Black & Scholes -mallin alkuajoista alkaen huomattiin sen sopivan melko huonosti optioille, joiden toteutushinta oli kaukana kohde-etuuden arvosta. Koska volatiliteetin vaikutus option hintaan on hyvin suuri ja siihen liittyvät oletukset ovat hyvin kyseenalaisia, optiotutkimuksissa on kiinnitetty paljon huomiota volatiliteettiin.

Jo ennen mallinsa varsinaista julkaisemista vuonna 1973 Black ja Scholes (1972) näyttivät artikkelissaan, että arvioitaessa kohde-etuutena olevan osakkeen tuoton keskihajontaa, parempi tulos saavutettaisiin, jos käytettäisiin option voimassaoloaikana ilmenevää hajontaa ennemmin kuin historiallista arvoa. Heidän mukaan mallin hyödyllisyys riippuu suuresti sijoittajan kyvystä arvioida tuottojen hajonnan suuruutta. Ongelma kuitenkin oli, miten hajonta saataisiin selville etukäteen. Ratkaisun tähän löysivät vuonna 1976 Latané ja Rendleman esittelemällä käsitteen implisiittinen keskihajonta (implied weighted standard deviation ISD). Se perustuu ajatukseen, että markkinoilla olevat sijoittajat käyttävät Black & Scholes -mallia määritellessään optioiden hintoja. Käänteisesti laskemalla eli iteroimalla saadaan selville, millä volatiliteetilla markkinahinta on laskettu[9]. Tämä on tehtävä numeerisesti, sillä volatiliteettia ei voida ratkaista suoraan Black & Scholes -yhtälöstä. Latané ja Rendleman testasivat empiirisesti implisiittistä volatiliteettia 24 yhdysvaltalaisen osakkeen osto-optioihin. Vertailu historialliseen volatiliteettiin osoitti, että keskimääräisesti implisiittinen volatiliteetti on selvästi korkeampi kuin todelliset keskihajonnat. Suurin korrelaatio implisiittisen volatiliteetin kanssa oli keskihajonnalla, joka on laskettu otosajasta eteenpäin. Matalin korrelaatio oli keskihajonnan kanssa, joka on suoraan otosajalta. (Latané & Rendleman 1976, 375-377)

Brockman ja Chowdhury (1997) puolestaan tutkivat, onko implisiittinen volatiliteetti deterministinen eli määrätty vaiko stokastinen. He tutkivat 62 906 amerikkalaisen S&P 100 -osakeindeksiin kohdistuvan osto-option päivittäistä implisiittistä volatiliteettia ajalla 06/1985 - 12/1986. Heidän kaaos-metologiaan perustuva tutkimuksensa ei tue oletusta deterministisestä

[9] Implisiittinen volatiliteetti on siis markkinoiden ennuste tulevasta kohde-etuuden hintaepävarmuudesta kalibroituna Black & Scholes -mallissa sovellettavaksi.

volatiliteetista vaan osoittaa, että Black & Scholes on määritetty väärin volatiliteetin suhteen ja että implisiittinen volatiliteetti noudattaa stokastista prosessia. Heidän mukaansa tutkimusten tulisi keskittyä kehittämään hinnoittelumalleja, joiden volatiliteetti on stokastinen.

1.3.2 Stokastisen volatiliteetin malleja

Eräs stokastisen volatiliteetin pioneereja oli Cox (1975), joka osoitti julkaisemattomissa luentomuistioissaan kuinka optiot tulisi hinnoitella, kun volatiliteetti ei ole vakio, vaan kasvaa osakkeen hinnan laskiessa. Malli ei juurikaan ole käytössä nykyaikana, mutta se oli ensimmäinen yritys sisällyttää vaihteleva volatiliteetti hinnoittelumalleihin. (Chance 1999, 39)

Stokastisen volatiliteetin vaikutusta option hintaan on tutkittu jonkun verran. Kuuluisimpia tutkimuksia ovat tehneet Hull ja White (1987) sekä Amin ja Ng (1993). Niin nämä kuin muutkin tutkimukset näyttävät Black & Scholes -mallin ylihinnoittelevan osto-optiot. Lisäksi ylihinnoittelu kasvaa voimassaoloajan pidentyessä (Hull & White 1987, 281). Tätä hinnoitteluvirhettä on pyritty korjaamaan muuttamalla Black & Scholes -mallin alkuperäistä ajatusta niin, että se huomioi volatiliteetin stokastisuuden. Tällaisia stokastisen volatiliteetin hinnoittelumalleja ovat tehneet Hullin ja Whiten sekä Aminin ja Ng'in lisäksi myös muut tutkijat kuten Heston (1993), Melino jaTurnbull (1990, 1995), Scott (1987) ja Wiggins (1987)[10]. Mallit eroavat toisistaan volatiliteetin estimointitavan osalta; esimerkiksi Hull ja White käyttävät geometristä Brownin liikettä[11], Scott keskiarvoon palutuvaa prosessia ('mean reverting') ja Wiggins yleistettyä Wiener prosessia (Chang & Chang 1996, 976). Yhteistä malleille ovat tulokset; kaikkien tutkimukset osoittavat, että huomioimalla stokastinen volatiliteetti hinnoittelumallissa sijoittuvat teoreettiset arvot lähemmäksi todellisia optioiden hintoja.

Yleisesti esitettyjen mallien ongelmana on ollut se, etteivät ne ole suljetussa muodossa, vaan vaativat joko Monte Carlo -simulointia tai muuta numeerista ratkaisua. Tämä johtaa mm. siihen,

---

[10] Bakshi et al 1997, 2003

[11] Geometrinen Brownin liike kuvaa tässä volatiliteetin käyttäytymistä, eikä tuoton, kuten Black-Scholes mallissa.

että optiokaupankäynnissä tärkeän suojausasteen ('hedge-ratio', enemmän kappaleessa 2.3) laskeminen on hyvin vaikeaa. Lisäksi osa malleista hyvin kyseenalaisesti olettaa, ettei kohde-etuuden tuotoilla ja volatiliteetilla ole korrelaatiota (Nandi 1996, 2).

Heston (1993) on harvoja stokastisen volatiliteetti mallien kehittelijöitä, jonka malli on suljetussa muodossa[12]. Hänen mallinsa on tarkoitettu valuuttaoptioille ja perustuu ajatukseen, että kurssimuutokset noudattavat tiettyä hyppyprosessin ja stokastisen volatiliteetin yhdistelmää. Hestonin malli huomioi myös korrelaation tuottojen ja volatiliteetin välillä. Nandi (1996) on tutkinut Hestonin mallin soveltuvuutta indeksioptioihin. Tutkimusaineistona hänellä oli S&P 500 -indeksiin perustuvia osto-optiota 7 853 ja 14 281 myyntioptiota ajalta 01/1991-04/1992. Nandin tutkimustuloksissa selvisi, että stokastisen volatiliteetin mallin hinnoitteluvirhe oli Black & Scholes -mallia pienempi, mutta kumpikin malli alihinnoitteli huomattavasti myyntioptiot, joiden toteutushinta oli indeksin arvoa alemmalla ja ylihinnoitteli osto-optiot, joiden toteutushinta oli indeksin arvoa korkeammalla. Stokastisen volatiliteetin mallin hinnoitteluvirhe oli kuitenkin paljon Black & Scholes -mallia alhaisempi. Yhteenvetona Nandi toteaa, ettei stokastinen volatiliteettimalli hinnoittele kaikilla toteutushinnoilla ja maturiteeteilla Black & Scholes -mallia paremmin, mutta useimmissa tapauksissa kylläkin.

1.3.3 GARCH-prosesseihin perustuvat hinnoittelumallit

Vaihtelevaa volatiliteettia voidaan mallittaa käyttämällä GARCH-prosesseja, joita on viime aikoina hyödynnetty myös optioiden hinnoittelussa. GARCH-prosessien on todettu mallittavan osakkeen tuoton varianssia suhteellisen hyvin, mutta niiden soveltaminen optioiden hinnoittelumalleihin ei ole ollut kovin yksinkertaisesta. Mikäli tuottojen volatiliteetin uskotaan noudattavan jotain GARCH-prosessia, Black & Scholes -mallin soveltaminen on teoreettisesti ristiriitaista.[13] Black & Scholes -mallin sijaan option hinta on ratkaistava jollain toisella tavoin, kuten esimerkiksi

[12]Suljetussa muodossa olevassa ratkaisussa yhtälö on kirjoitettu niin, että haluttu laskettava arvo on erillään yhtälön toisella puolella tai voidaan muulla tavoin ratkaista helposti. Teknisesti suljetussa muodossa oleva ratkaisu voi olla erittäin monimutkaisessa muodossa, jolloin sen ratkaisu voi olla ongelmallinen. Optioiden hinnoitteluun liittyvässä kirjallisuudessa suljetussa muodossa olevat ratkaisut ovat kuitenkin yleensä helpohkosti ratkeavia yhtälöitä. (Chance 1999, 49)

[13] Black-Scholes mallin johtaminen perustuu oletukseen vakiosuuruisesta volatiliteetista eli ettei volatiliteetti seuraa mitään prosessia, mutta GARCH perusteinen volatiliteetti on ajassa vaihteleva.

simuloimalla tuotot ja volatiliteetti. Ensimäisen GARCH:iin perustuvan optioiden hinnoittelumalin kehitti Duan (1990). Tämän mallin puutteita korjasivat mallissaan Amin & Ng (1993) sekä Duan (1995). Lisäksi Duanin mallista riippumattomasti GARCH-hinnoittelumallin kehittivät myös Satchell & Timmermann (1992). Näiden mallien ratkaisu perustuu simulointiin.

Viime aikoina on kehitetty myös GARCH:iin perustuvia malleja, joiden ratkaisuun ei tarvita simulointia. Duan, Gauthier ja Simonato (1998) ovat kehittäneet sarjakehitelmään perustuvan approksimaation option hinnalle. Heidän mallinsa on esitelty tarkemmin luvussa 5. Duanin et al. lisäksi myös Heston ja Nandi (1997) ovat esittäneet vaihtoehdon option arvon määrittämiselle GARCH-ympäristössä ilman simulointia. Toisin kuin Duan et al., Heston ja Nandi testasivat mallinsa toimivuutta S&P 500 -indeksioptioilla. Heidän mallinsa tuotti pienempiä hinnoitteluvireitä kuin Black & Scholes -malli, vaikka Black & Scholes -mallissa käytettyä implisiittistä volatiliteettia päivitettiin jatkuvasti ja GARCH-prosessin kertoimet pidettiin vakioina. Hinnoitteluvirheet olivat GARCH-mallia käyttäen pienemmät. Suurin ero oli myyntioptioilla, joiden toteutushinta oli kaukana indeksin nykyarvosta; Black & Scholes -mallin hinnoitteluvirheen ollessa 62.8% GARCH-mallilla saatiin laskettua luku 15.9%:iin. Hestonin ja Nandin mukaan suurin syy mallin paremmuuteen johtui GARCH-mallin kyvystä kuvata volatiliteetin ja tuottojen korrelaatiota.

Vaikka GARCH-volatiliteetin sijoittaminen Black & Scholes -yhtälöön ei ole teoreettisesti perusteltua, on tätä silti tutkittu ja testattu. Engle et al. (1994) sijoittivat Black & Scholes -kaavaan GARCH-prosessiin perustuvan odotetun keskimääräisen varianssin. He testasivat tällaisen vaihtoehdon toimivuutta vertailemalla tuottoja kahden kaupankäyntistrategian välillä, joista toinen perustui GARCH-varianssiennusteeseen ja toinen edellisen päivän implisiittisen volatiliteettiin. Käyttämällä aineistonaan S&P 500 -indeksioptioita Englen et al. tutkimuksen tulos oli, että GARCH-volatiliteetti estimaattiin perustuva kaupankäyntistrategia tuotti suurempia voittoja kuin implisiittiseen volatiliteettiin perustuva strategia.

Engle tutki GARCH:iin perustuvia optioiden hinnoittelumalleja myös aikaisemmin Mustafan kanssa (1992), jolloin tulokset eivät olleet yhtä rohkaisevia. Heidän S&P 500 -indeksioptioilla tehty tutkimuksensa osoitti, ettei GARCH-mallikaan pystynyt korjaamaan kaikkia optiomarkkinoilla havaittuja hinnoitteluvirheitä. (Abken & Nandi 1996, 28)

1.3.4 Bakshin et al. hinnoittelumalleja vertaileva tutkimus

Bakshi et al. (1997) vertailevat artikkelissaan vaihtoehtoisia optionhinnoittelumalleja. He ovat jakaneet eri mallit seitsemään ryhmään riippuen siitä, miten mallit poikkeavat Black & Scholes -mallista: 1) stokastinen korko 2) hyppy-prosessi 3) jatkuva ja joustava varianssi 4) Markovilainen 5) stokastinen volatiliteetti 6) stokastinen volatiliteetti ja stokastinen korko sekä 7) stokastinen volatiliteetti ja hyppyprosessi. Heidän mukaansa täydellistä hinnoittelumallia ei ole, koska se olisi liian monimutkainen sovellettavaksi. Jo kehiteltyjä malleja voidaan asettaa paremmuusjärjestykseen sen perusteella, millä niistä

a. on vähiten määrittelyvirheitä,
b. on vähiten hinnoitteluvirheitä, tai
c. saavutetaan paras suojaustoiminto.

Bakshin et al. vertailussa olivat Black & Scholes -mallin lisäksi mallit numero 1, 5, 6 ja 7 sekä heidän itse kehittelemänsä malli (jossa yhdistyy stokastinen volatiliteetti, stokastinen korko ja satunnaishyppy), aineistonaan 380 749 S&P 500 –indeksin osto-optiota ajalta 06/1988 - 05/1991. Tuloksista ilmeni, ettei Bakshin et al. kehittämä malli eikä stokastinen korkomalli paranna juurikaan Black & Scholes -mallin tuloksia. Yleisesti ottaen kaikki testatut mallit olivat väärin spesifioituja, stokastinen volatiliteetti/hyppyprosessi vähiten ja Black & Scholes eniten. Hinnoitteluvirheet olivat suurimmat Black & Scholes -mallilla, seuraavaksi suurimmat stokastinen volatiliteetti -mallilla ja pienimmät stokastinen volatiliteetti/hyppyprosessi -mallilla. Huomioitavaa on, että stokastinen volatiliteetti vähensi Black & Scholes -mallin virheitä 25% - 60%. Stokastisen volatiliteetin tuloksia voitiin vielä parantaa lisäämällä satunnaishyppy -näkökulma tarkentamaan lyhytaikaisten optioiden osuvuutta ja stokastinen korko parantamaan pitkäaikaisten optioiden tarkkuutta. Lisäksi suojaustehokkuutta mitattaessa stokastinen volatiliteetti oli selvästi muita malleja parempi. Delta-neutraalia suojausta (lisää aiheesta kappaleessa 2.3) rakennettaessa kaikkien stokastisen volatiliteetin mallien suojausvirheet olivat 50%-65% Black & Scholes -mallia alempia.

1.3.5 Tutkimukset Suomessa

Suomessa stokastisen volatiliteetin vaikutus option hintaan on jäänyt tutkimuksissa melko vähälle huomiolle. Stokastisten korkojen vaikutusta on kylläkin tutkittu (mm. Rindell 1993). Jokivuolteen

(1990) Suomen Pankille tekemässä tutkimuksessa Monte Carlo -simuloinnin avulla on pyritty pääsemään lähemmäksi oikeaa jakaumaa ja tarkempia hintoja. Työssä on käytetty GARCH-menetelmää volatiliteetin ratkaisemiseksi. Empiirisessä osassa Jokivuolle vertasi eri menetelmillä laskettuja optioiden hintoja ajalla 5/1988-6/1996 toteutuneisiin FOX-indeksioptioiden hintoihin. Tulokset näyttivät, että simulointi ja GARCH-menetelmä paransivat huomattavasti Black & Scholes ja Black-76 -mallien hinnoitteluvirhettä, vaikkakin parhaiten markkinahintoja vastasi malli, jossa volatiliteettina oli edellisen päivän implisiittinen volatiliteetti. Optioiden hinnoittelua ja sen tehokkuutta on Suomessa tutkittu enemmänkin, mutta tavoitteena ei ole ollut etsiä vaihtoehtoa hinnoitteluvirhettä aiheuttaviin tekijöihin.

Berglund, Hedvall ja Liljeblom (1990) tutkivat osakeindeksin volatiliteetin ennustamista optioiden hinnoittelussa jo ennen kuin FOX-indeksi oli olemassa. He muodostivat aineistonsa 12sta vaihdetuimmasta osakkeesta ajalla 1970-1987. He testasivat kolmen eri volatiliteetti menetelmän toimivuutta suhteessa optioiden hinnoitteluun. Heidän kaupankäyntiin perustuva testinsä osoitti, että normmali keskihajonta tuotti liian alhaisia arvoja oikeasta volatiliteetista. Toinen heidän testaamansa menetelmä, CHMSW[14] tuotti samankaltaisia tuloksia. Parhaan tuloksen Berglund et al. saivat käyttämällä GARCH-mallilla tuotettuja volatiliteettiennusteita optioiden hinnoitteluun.

Myös Kahra (1992) on tutkinut FOX-indeksioptioiden hinnoittelua tuottojen noudattaessa GARCH-prosesseja. Kahran mukaan FOX-indeksin tuotot ovat muiden tuottosarjojen tapaan jakautuneet epänormaalisti; tuottojakauma on huipukas ja vino, eikä Black & Scholes -mallin oletukset pidä. Lisäksi Kahran tutkimukset osoittivat, että GARCH soveltui mallittamaan aineistoa melko hyvin.

ETLA (Elinkeinoelämän tutkimuslaitos) on julkaissut Parkkisen (1999) työn, jonka aiheena on regressiopohjainen lähestymistapa stokastisen volatiliteetin estimointiin ja Black & Scholes -malli. Parkkinen on estimoinut volatiliteettia toteutushinnan ja voimassaoloajan funktiona perustuen Ncuben (1996) artikkeliin. Sekä Parkkinen että Ncube testaavat ideaa melko suppeaan aineistoon,

[14] Malli on nimetty tekijöidensä mukaan (Cohen, Hawawini, Maier, Schwarz ja Withcomb (1983)), siinä keskihajontaa korjataan perättäiseten havaintojen korrelaatiolla

jolloin tulosten tilastollinen merkitsevyys ei ole kovinkaan korkea.[15] Ncuben tutkimustulos oli, että hänen volatiliteetti-estimointinsa toimi historiallista volatiliteettia paremmin 21 päivänä osto-optioiden kohdalla. Myyntioptioiden kanssa malli ei toiminut kovin hyvin, vain 14 päivänä malli oli historiallista volatiliteettia parempi ennustaja. Parkkisen testaus osoitti, että uusi menetelmä toimi 13 päivänä osto-optioille ja 17 päivänä myyntioptioille.

1.4 Tutkimuksen rakenne ja rajaukset

Optiot ovat rahoitusinstrumentteina melko monimutkaisia ja niiden hinnoitteluun liittyvä problematiikka saattaa olla hyvinkin vaikeaselkoista. Jotta tutkimusongelma ja optioiden hinnoittelun teoria olisivat ymmärrettävissä, tässä työssä on haluttu lähteä liikkeelle optioiden perusteista.

Luvussa kaksi luodaan pohja työlle esittelemällä lyhyesti optioihin liittyvät perustermit. Optioiden hinnoittelun ymmärtämiseksi on välttämätöntä tuntea eri tekijöiden vaikutus option arvoon. Täten työssä on esitelty sekä option arvon komponentit että arvoon vaikuttavat tekijät. Option hintaan olennaisesti liittyvä delta -kerroin käydään läpi lyhyesti. Esittelylukuun on haluttu ottaa mukaan myös käytännön näkökulma, joten siinä tarkastellaan myös optiokauppaa; sen osapuolia ja käytäntöä Suomessa. Lopussa tarkastellaan optioiden erilaisia käyttömahdollisuuksia sekä optioteorian merkitystä yrityksen näkökulmasta.

Kolmas luku käsittelee optioiden hinnoittelua. Ensin esitellään option hinnan teoreettiset rajaehdot, joiden puitteissa hinnan tulisi määräytyä hinnoittelumallista riippumatta. Painopiste kappaleessa on Black & Scholes -hinnoittelumallissa, mutta myös muutama vaihtoehtoinen malli on esitetty. Tarkasteluun on valittu hinnoittelumalleja, joilla on yhteys tutkimusongelmaan. Black & Scholes -mallia koskeva kritiikki on myös huomioitu. Lopuksi on todistettu yhteys osto- ja myyntioptioiden hintojen välillä sekä esitelty tilanne, jossa optiomarkkinoiden hinnoitteluvirheistä olisi mahdollista hyötyä.

[15] Parkkisella on 288 havaintoa 24 päivältä ja Ncubella 672 havaintoa 25 päivältä.

Luku neljä keskittyy volatiliteettiin. Volatiliteetin estimointi on optioiden hinnoittelun kannalta ratkaisevin ja vaikein osa-alue. Tässä luvussa on haluttu esitellä siten niin volatiliteetin ominaisuuksia kuin eri estimointitapoja, sekä näihin liittyviä ongelmia ja etuja. Painopiste on GARCH-volatiliteettimalleissa. Lisäksi luvussa on mukana tuottojakaumaan oleellisesti liittyvät tunnusluvut eli momentit, joista volatiliteetti on järjestyksessä toinen.

Viidennestä luvusta alkaa työn empiirinen osa, jolle aiemmissa luvuissa on luotu teoreettinen pohja. Aluksi käydään läpi optioiden hinnoitteluun ja sen testaamiseen liityviä ongelmia. Luvussa esitellään myös empiirisessä testauksessa käytetty aineisto. Luvussa perustellaan perinteisen Black & Scholes -mallin käyttö vertailuhinnoittelumallina (benchmark) ja siinä käytetyn volatiliteetin estimointi. Stokastisen volatiliteetin huomioivaksi malliksi valittua Duan et al. -mallia on esitelty tarkemmin, samoin kuin mallin ratkaisun laskentavaiheita. Koska Duan et al. -hinnoittelukaavan käyttö on huomattavasti Black & Scholes -mallia monimutkaisempaa, työssä on haluttu esittää laskentavaiheet melko yksityiskohtaisesti.

Luvussa kuusi esitellään empiirisen testin tulokset. Ensin kootaan yhteen laskelmista saadut teoreettiset arvot Black & Scholes ja Duan et al. -kaavoja käyttäen. Testauksen tulokset ja vertailut on esitetty optiosarjoittain. Luvussa pohditaan testauksen tuloksia ja syitä eroihin ja mallien toimivuutta, sekä yleisesti tutkimuksen luotettavuutta ja merkitsevyyttä.

Viimeisessä luvussa esitetään tutkielman johtopäätökset sekä mahdolliset jatkotutkimuksen kohteet.

2 OPTIOT

2.1 Optioiden peruskäsitteitä

Johdannaiskauppa eroaa käteiskaupasta siinä, että varsinainen transaktio tapahtuu tulevaisuudessa, mutta sen ehdot sovitaan etukäteen[16]. Johdannaiset voidaan jakaa puolestaan termiineihin (futuurit) ja optioihin. Termiinikaupan molemmat osapuolet ovat velvollisia suorittamaan kaupan sovittuun hintaan sovitulla hetkellä. Optiokaupassa myyjä (eli asettajalla) on velvollinen suorittamaan kaupan, mutta ostajalla on mahdollisuus päättää, tekeekö hän kaupat erääntymispäivänä vai ei. Tästä oikeudestaan option ostaja maksaa myyjälle option hinnan eli preemion. Option myyjältä vaaditaan velvollisuuden noudattamisen varmistamiseksi (ainakin pörssikaupassa) vakuudet. Optioita on kahdenlaisia; osto-optio, eli oikeus ostaa alla oleva instrumentti sovittuna aikana sovittuun hintaan ja myynti-optio eli oikeus myydä instrumentti. Taulukossa 1 on yhteenveto optiokaupan osapuolten oikeuksista ja velvollisuuksista :

TAULUKKO 1.
Option ostajan ja myyjän väliset oikeudet ja velvollisuudet

	OSTAJA	MYYJÄ
OSTO-OPTIO	1. Oikeus ostaa kohde-etuus	3.Velvollisuus myydä kohde-etuus
MYYNTIOPTIO	2. Oikeus myydä kohde-etuus	4.Velvollisuus ostaa kohde-etuus

(lähde: Puttonen&Valtonen 1996, 40)

[16] Usein markkinat jaetaan käteis- ja johdannaismarkkinoihin. Johdannaiskaupassa varsinainen lopullinen transaktio tapahtuu tulevaisuudessa, kun taas käteiskaupassa kaupan kohde ja maksu vaihtavat omistajaa periaatteessa välittömästi.

Optiosopimuksen kohteena voi olla eri sijoituskohteita, kuten osakkeet, korot, valuutat tai hyödykkeet[17]. Optioilla voidaan käydä kauppaa optiopörsseissä, jolloin sopimukset ovat vakioituja, tai OTC-markkinoilla, jolloin kaupan osapuolet voivat räätälöidä sopimukset itse. Tässä työssä keskitytään osakkeisiin sekä osakeindeksiin kohdistuviin optioihin, joiden sopimusehdot ovat vakioituja ja kaupankäynti tapahtuu optiopörssissä.

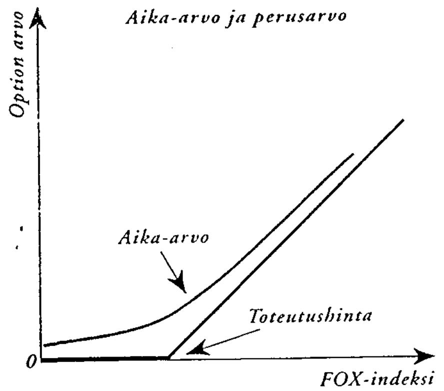
Jos option oikeus ostaa tai myydä voidaan toteuttaa milloin vain option voimassaoloaikana, kutsutaan optiota amerikkalaiseksi optioksi. Jos oikeutta voidaan käyttää ainoastaan option päättymispäivänä, on kyseessä eurooppalainen optio. Suomessa osakkeisiin kohdistuvassa optiokaupassa STOX-osakeoptiot eli yksittäisten osakkeiden optiot ovat tyypiltään amerikkalaisia ja FOX-osakeindeksioptiot eurooppalaisia. (Hull 1997, 138-140)

2.2 Option arvo

2.2.1 Option perus- ja aika-arvo

Sopimuksen tekohetkellä option arvo on option ostajan myyjälle maksama korvaus eli preemio. Option voimassaoloaikana option arvo on sen markkinoilla listattu hinta, eli markkina-arvo. Option arvo koostuu perusarvosta ja aika-arvosta. Indeksiosto-option perusarvo on sen toteutushinnan ja indeksin päiväarvon erotus; mitä suurempi ero, sitä suurempi on perusarvo. Koska optiota ei ole pakko toteuttaa, ei perusarvo voi olla negatiivinen. Se osa option hintaa, mikä ei selity perusarvolla on aika-arvoa. Mitä enemmän on voimassaoloaikaa jäljellä, sitä suurempi on aika-arvo, koska silloin on enemmän aikaa kohde-etuuden hinnan nousulle tai laskulle. Option toteutushetkellä sen hinnan muodostaa vain perusarvo eli aika-arvo on supistunut nollaan. Kuviossa 1. näkyy, miten aika-arvo vähenee option voimassaoloajan vähentyessä. (HEX 1998, 16)

[17] Hyödykkeitä, joilla käydään johdannaiskauppaa ovat mm. öljy, kulta, hopea ja raaka-aineet.



KUVIO 1.

Option perus ja aika-arvo voimassaoloajan suhteen

Optiot voidaan jakaa kolmeen luokkaan sen mukaan, onko niillä perusarvoa. Osto-optio, jolla on perusarvoa on nimeltään plusoptio (in-the-money). Sen toteutushinta (K) on alla olevan instrumentin (S) nykyarvoa alhaisempi eli S>K. Plusoptiot ovat suhteellisen kalliita, koska niiden voittomahdollisuus on suurin. Jos option hinta on pelkkää aika-arvoa, eli option toteutushinta on nykyarvon yläpuolella S<K, on kyseessä miinusoptio (out-of-the-money). Miinusoptiot ovat puolestaan halpoja, sillä jotta miinus osto-optio tuottaisi voittoa, on alla olevan instrumentin (osake, indeksi) arvon noustava huomattavasti. Jos optio oikeuttaa ostamaan kohde-etuuden samalla hinnalla kuin allaolevan instrumentin senhetkinen hinta on eli K=S, on kyseessä tasaoptio (at-the-money). Niin kuin taulukosta 2 nähdään, tilanne myyntioptioiden kohdalla on päinvastainen. (Hull 1997, 141)

TAULUKKO 2.
Option toteutushinnan suhde kohde-etuuden arvoon

	K<S	K=S	K>S
OSTO-OPTIO	plus (in-the-money)	tasa (at-the-money)	miinus (out-of-the-money)
MYYNTIOPTIO	miinus (out-of-the-money)	tasa (at-the-money)	plus (in-the-money)

2.2.2 Option arvoon vaikuttavat tekijät

Osakkeisiin tai osakeindeksiin kohdistuvan option hintaan vaikuttaa suoraan kuusi tekijää: kohde-etuuden arvo ja sen volatiliteetti, option toteutushinta, voimassaoloaika, riskitön korkotaso sekä osinkojenjako. Taulukossa 3 on esitetty tekijöiden vaikutus osto- sekä myyntioption hintoihin.

TAULUKKO 3
FOX osto- ja myyntioption hintaan vaikuttavat tekijät

Hintaan vaikuttava tekijä	***Osto-option hinta***	***Myynti-option hinta***
Osakkeiden kurssinousu	nousee	laskee
Toteutushinnan kasvu	laskee	nousee
Voimassaoloajan piteneminen	nousee	nousee
FOX-indeksin volatiliteetin kasvu	nousee	nousee
Korkotason nousu	nousee (laskee)	laskee (nousee)
Osingonjako voimassaoloaikana	laskee	nousee

(lähde: HEX 1998, 17)

Osakekorin muodostavien osakkeiden pörssikurssien nousu nostaa myös FOX-indeksin arvoa. Tämä on suotuisaa osto-option haltijalle, sillä indeksin arvon kasvaessa sekä option tuottaman voiton mahdollisuus että suuruus kasvavat. Tästä johtuen osto-option hintakin nousee. Vastaavasti indeksin nousu on myyntioption haltijan kannalta vahingollista, ja myyntioption hinta laskee.

Kun osto-option toteutushinta kohoaa, indeksin arvon täytyy nousta yhä enemmän, jotta osto-option haltijan kannattaa toteuttaa optionsa. Koska todennäköisyys tähän on pienempi, myös osto-option hinta laskee. Myynti-optiolla tilanne on päinvastainen, jolloin sen hinta nousee.

Voimassaoloajan pitenemisellä ja volatiliteetin kasvulla on samanlainen vaikutus sekä osto- että myyntioption hintaan. Kun optiolla on enemmän voimassaoloaikaa, on myös enemmän aikaa indeksin suotuisille muutoksille. Vastaavasti indeksin heilahdellessa suuremmalla välillä (volatiliteetti kohoaa) nousee myös mahdollisuus indeksin heilahtaminen niin paljon, että optio tuottaa ostajalleen voittoa. Näin ollen molempien optioiden hinnat nousevat voimassaoloajan ja volatiliteetin kasvaessa.

Korkotason nousulla on kaksitahoinen vaikutus option hintaan. Option arvoa toteutuspäivänä laskettaessa täytyy toteutushinta diskontata nykyarvoon. Koska korkea diskonttokorko laskee toteutushinnan nykyarvoa, se nostaa osto-option hintaa ja vastaavasti laskee myyntioption hintaa. Yleensä kuitenkin osakkeisiin kohdistuvien optioiden kohdalla korkojen nousun vaikutus suoraan preemioon on vähäinen. Suurempi vaikutus on sillä, että markkinakorkojen nousu laskee yleensä pörssikursseja ja siten myös osto-option hintaa. Kurssien lasku nostaa puolestaan myyntioption hintaa. (Hull 1997, 156-158)

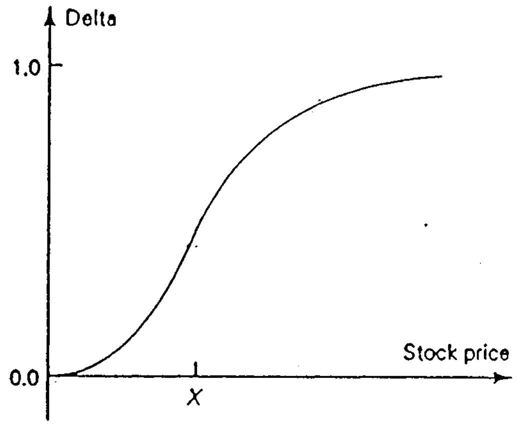
Osingonjako vaikuttaa option hintaan osakekurssien kautta. Tavallisesti kun yritys jakaa osinkoja, sen osakekurssi laskee. Tämä laskee FOX-indeksin arvoa, joka puolestaan laskee myös osto-option hintaa ja nostaa myyntioption hintaa. (HEX 1998, 18)

2.3 Delta-suojaus

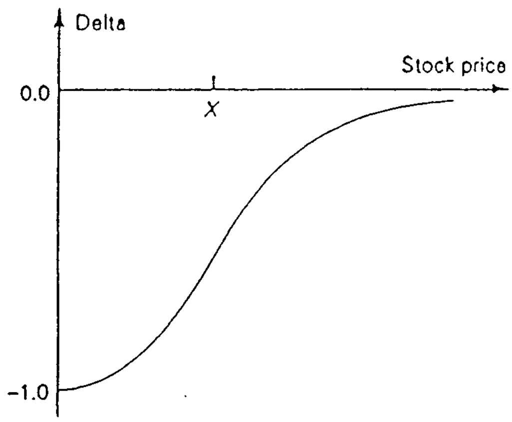
Option hinta muuttuu, kun joku option hintaan vaikuttavista tekijästä muuttuu. Option hinnan herkkyyttä näiden eri tekijöiden muutoksiin kuvataan herkkyysmittareilla, joiden symboleina ovat kreikkalaiset kirjaimet. Seuraavaksi on esitelty tärkein herkkyysmittari, option delta, sekä siihen perustuva delta -suojaus.

Tunnetuin option hinnan herkkyyttä muutoksiin kuvaava mitta on delta. Se kuvaa option arvon muutosta, kun kohde-etuuden arvo (osakekurssi, indeksin arvo) muuttuu yhden yksikön. Matemaattisesti tarkasteltuna se on option hinnan ja kohde-etuuden hinnan kuvaajan välinen kulmakerroin[18]. Osto-option delta on aina välillä $0<\Delta<+1$ ja myyntioption delta on välillä $-1<\Delta<0$. Delta ilmaistaan yleensä prosentteina. Jos delta on esimerkiksi 100%, option arvo muuttuu aina pisteen, kun kohde-etuus muuttuu yhden pisteen. Vastaavasti jos delta on 50%, on muutos option hinnassa puoli pistettä kohde-etuuden muuttuessa yhden pisteen. Myyntioption delta on negatiivinen, koska kohde-etuuden hinnan nousu laskee myyntioption arvoa.

Deltaa voi tarkastella myös sen suhteen, mikä on kohde-etuuden nykyarvon ja toteutushinnan suhde. Plusoption delta on erääntymispäivänä 1, sillä option hinta muuttuu kohde-etuuden kanssa samansuuntaisesti yhtä paljon. Miinusoption delta on erääntyessä puolestaan nolla, sillä miinusoptiot erääntyvät arvottomina joka tapauksessa. Ennen erääntymistä kaikki on kuitenkin mahdollista, joten deltan itseisarvo voi olla 0:n ja 1:n välillä. Tasaoption delta on itseisarvoltaan noin 0.5, joten plusoption deltan itseisarvo on 0.5:stä 1:een ja miinusoption 0:sta 0.5:een. (Hull 1997, 312) Delta-funktion kuvaajan muoto ennen erääntymishetkeä nähdään kuviosta 2a osto-optiolle ja kuviosta 2b myyntioptiolle.



Kuvio 2a. Delta osto-optiolle lähellä erääntymispäivää

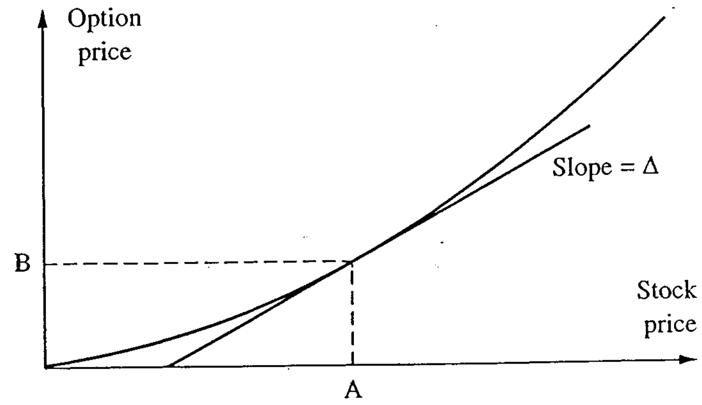


Kuvio 2b. Delta myyntioptiolle lähellä erääntymispäivää

Delta on vain lineaarinen approksimaatio kohde-etuuden ja option hinnan muutoksen suhteesta. Tästä johtuen sitä voidaan soveltaa yksinään option arvon muutoksen arviointiin vain tapauksissa, jossa kohde-etuuden hinnan muutos on pieni. Suurille muutoksille lineaarinen approksimaatio on epätarkka. Tätä on havainnollistettu kuviossa 3, jossa käyrä kuvaa option hinnan ja kohde-etuuden hinnan todellista suhdetta ja suora delta -approksimaatiota (Δ) osakkeen hinnan ollessa pisteessä

[18] Toisin sanoen delta on osto-option osittaisderivaatta kohde-etuuden hinnan suhteen.

A. Jos muutos tästä pisteestä on suuri, huomataan kuinka ero todellisen muutoksen ja delta-approksimaation välillä kasvaa. Tälllöin deltan käyttö esim. position suojaussuhdetta määritettäessä on epätarkkaa. (Hull 1997, 314)



Kuvio 3. Delta verrattuna todelliseen hinnan muutokseen (Hull 1997, 312)

Delta-suojauksen ('delta hedging') tavoite on säilyttää kokonaissijoituksen (kohde-etuus ja siihen kohdistuva optio) arvo mahdollisimman muuttumattomana käymällä kauppaa optioiden lisäksi kohde-etuudella. Menettely toimii yksinkertaisimmillaan seuraavasti. Oletetaan, että osto-option delta on 0.6, jolloin kohde-etuuden arvon muuttuessa option arvo muuttuu 60 prosenttia kohde-etuuden muutoksesta. Sijoittaja on myynyt 20 kappaletta osto-optiota a' 10 mk eli oikeuden ostaa 2000 osaketta. Tällöin optiopositio voidaan suojata ostamalla 0.6*2000 eli 1200 osaketta. Kun positio on suojattu, ei markkinoiden muutoksen suunnalla tai voimakkuudella ole merkitystä; optioposition tappio (voitto) on likimain yhtä suuri kuin osakeposition voitto (tappio).

Option delta muuttuu markkinaliikkeiden seurauksena ja ajan kuluessa jatkuvasti. Jotta kohde-etuuden hinnanvaihtelut eivät pääsisi vaikuttamaan portfolion arvoon, tulisi suojausta muuttaa jatkuvasti[19]. Kaupankäyntikustannukset rajoittavat kuitenkin jatkuvan suojauksen kannattavuutta. (Hull 1997, 316-318)

Muita option herkkyysmittareita ovat gamma (deltan herkkyys kohde-etuuden muutoksille), vega (option herkkyys volatiliteetin muutoksille), rho (herkkyys koron muutoksille) ja theta (herkkyys

[19]Jatkuvaa suojausposition muokkausta kutsutaan dynaamiseksi suojaukseksi ('dynamic hedging') (Hull 1997, 317).

aika-arvon muutoksiin). Näitä sinänsä erittäin hyödyllisiä herkkyysmittareita ei tässä työssä käsitellä.

2.4 Optiokaupan osapuolet

Helsingin arvopaperipörssissä tapahtuvassa optiokaupassa eivät ostaja ja myyjä ole toistensa kanssa tekemisissä, vaan jokaisessa kaupassa HEX Oy (Helsingin johdannais- ja arvopaperipörssi ja selvitysyhtiö) asettuu vastapuoleksi molemmille osapuolille. HEX on puolueeton selvitys- ja kauppapaikka, joten se ostaa ja myy aina yhtä monta identtistä optiota. Kuviossa 4 on esitetty kaupankäyntijärjestelmä Suomessa.

		HEX			----	ASIAKAS
		KAUPPAPAIKKA				
		· tarjoukset	----			
		· kaupat	----	VÄLITTÄJÄT		
MARKKINA-	---			· pankit	----	ASIAKAS
TAKAAJA		SELVITYS		· pankkiiriliikkeet		
		·vakuudet				
		· maksut	----			
		· toteutus			----	ASIAKAS

KUVIO 4.
Optioiden kaupankäyntijärjestelmän osapuolet
(lähde: HEX 1998, 13)

Käytännössä sijoittaja, joka haluaa ostaa tai myydä optioita, tekee toimeksiannon pankin tai pankkiiriliikkeen meklarille. Hän puolestaan tallettaa osto- tai myyntitarjouksen HEX:in kaupankäynnin tietokonejärjestelmään, jossa tarjoukset käsitellään välittömästi. Kun ostajan ja myyjän tarjoukset kohtaavat, syntyy optiokauppa. Tämän jälkeen ostajan ja myyjän vastapuoleksi tulee HEX:in selvitysosasto. Näin option ostaja ja myyjä eivät ole sidoksissa toisiinsa, vaan ainoastaan HEX:iin. Tästä johtuen kumpikin osapuoli voi pysyä anonyymina eikä kummankaan tarvitse huolehtia vastapuolen luottokelpoisuudesta. Option myyjältä vaaditaan laskennallinen vakuus siitä, että myyjä kykenee suoriutumaan velvollisuuksistaan. HEX vaatii tämän vakuuden eräänlaiseksi puskuriksi mahdollisia syntyviä tappioita vastaan. Jos myyjä ei pysty suoriutumaan velvoitteistaan, vakuudella voidaan kattaa tappiot kunnes tiliasema saadaan suljettua. Vakuuskelpoisia varoja ovat mm. rahatalletukset, joukkovelkakirjat, pörssinoteeratut osakkeet, sijoitusrahastojen osuudet sekä obligaatiot (HEX 1998, 13).

Välittäjä ja markkinatakaaja eroavat toisistaan siinä, että välittäjä voi tehdä kauppoja sekä omaan että asiakkaan lukuun, kun markkinatakaaja tekee puolestaan kauppaa vain omaan lukuunsa. Välittäjä ei yleensä toimi kaupassa itse vastapuolena, vaan välittää vain asiakkaiden osto- ja myyntitarjouksia eteenpäin kauppapaikalle, kun taas markkinatakaaja toimii usein kaupassa vastapuolena. Markkinatakaajat antavat lisäksi osto- ja myyntitarjoukset sovitun osto- ja myyntihinnan eron rajoissa. Korvaukseksi tästä velvollisuudesta markkinatakaaja saa huomattavan alennuksen kaupankäyntipalkkioista.(Jauri 1996, 127)

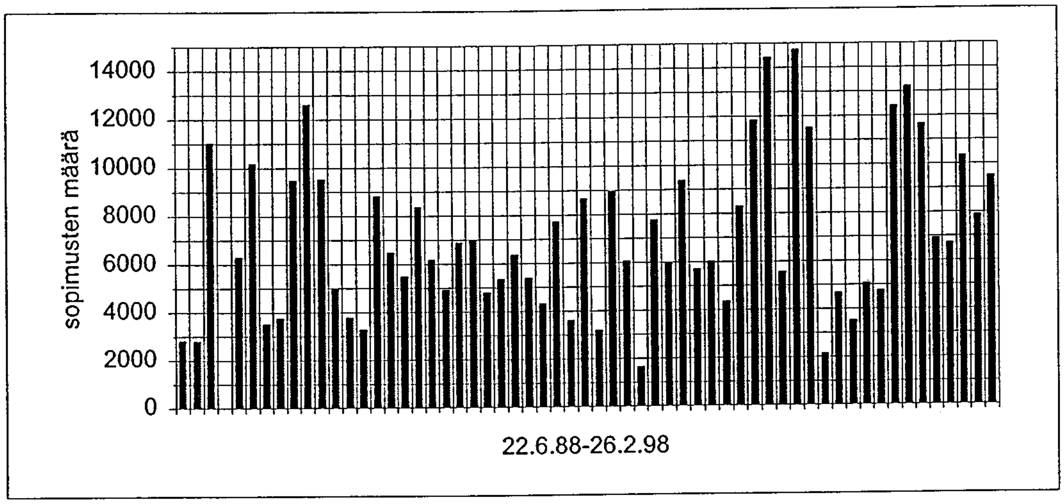
HEX:in toimiminen vastapuolena mahdollistaa toimivat jälkimarkkinat. Mikäli sopimus olisi tehty suoraan alkuperäisten osapuolten välille, sitoumuksen lopettaminen olisi mahdollista vain kummankin suostumuksella. Nyt toinen osapuoli voi sulkea tiliasemansa halutessaan kauppapaikalla vallitsevaan markkinahintaan.

Kun optiopositio on avattu, sijoittajalla on kaksi mahdollisuutta toimia; joko sulkea tiliasema tai odottaa option toteutusta. Option ostaja tai myyjä ei voi myydä edelleen tai ostaa takaisin optiota sen voimassaoloaikana. Samaan tulokseen päästään kuitenkin tiliaseman sulkemisella. Option ostaja myy silloin ostamansa option kanssa identtisen option vallitsevaan markkinahintaan. Vastaavasti option myyjä voi sulkea positionsa ostamalla identtisen option. Näin menetellessä optioiden oikeudet ja velvollisuudet raukeavat kuittaantuessaan toisiaan vastaan. Tiliaseman sulkeminen onnistuu milloin vain option voimassaoloaikana.

Jos tiliasemaa ei suljeta, optio toteutetaan. Koska FOX-indeksioptiot ovat eurooppalaisia, voi option toteutus tapahtua ainoastaan sen päättymispäivänä. Tällöin option ostaja saa automaattisena nettoarvon tilityksenä päättymisindeksin ja toteutushinnan välisen erotuksen, mikäli tämä on positiivinen. Myyntioption ostaja saa vastaavasti toteutushinnan ja indeksin erotuksen. Positiivinen nettoarvo veloitetaan option myyjältä. (HEX 1998, 19-23)

2.5 Optiokauppa Suomessa

Suomessa kaupankäynti osakeindeksiin kohdistuvilla johdannaisilla alkoi syksyllä 1987 Suomen Optiopörssissä (SOP) ja keväällä 1988 aloitti Suomen Optiomeklarit Oy kaupankäynnin nimenomaan indeksioptioilla. Molemmat tarjosivat osakemarkkinoiden nopean kehityksen seurauksena osakeindeksijohdannaisia. Yhdeksänkymmentäluvun alun laman ja osakeromahduksen vuoksi myös johdannaisten kysyntä laantui, jolloin johdannaismarkkinat jakautuivat niin, että osakejohdannaiset keskittyivät SOM:ille ja valuuttajohdannaiset SOP:ille. Vuonna 1990 SOM otti mukaan osaketermiinit, ja osakeoptioilla kauppa alkoi kolme vuotta myöhemmin. (Virolainen 1996, 35) Kuviossa 5 on kuvattu indeksioptiokaupan kehitystä vaihdon suhteen ajalla 6/88 - 2/98. Kukin pykälä kuvaa yhden optiosarjan kokonaisvaihdon määrää.



Kuvio 5.

FOX-indeksioptioiden vaihtomäärät optiosarjoittain

Suomessa optiokauppa on melko vähäistä ja FOX-indeksioptioiden kaupankäynnistä vain pieni osa muodostuu yksityishenkilöiden transaktioista, suurimpia ja aktiivisimpia kaupankävijöitä ovat vakuutus- ja eläkevakuutusyhtiöt sekä rahastot.

Joulukuussa 1999 HEX:in optioiden ja termiinien kappalemääräinen kokonaisvaihto oli seuraava:

TAULUKKO 4. HEX:in optioiden ja termiinien vaihto joulukuu 1999

	sopimuksia 12/99	sopimuksia 1/99-12/99	sopimuksia 1/98-12/98
FOX-optiot ja termiinit	44 676	494 779	504 491
STOX-optiot ja termiinit	245 509	2 152 030	1 518 606
YHT.	290 185	2 646 809	2 023 097

Kuten talukosta 4 voidaan nähdä, painottuu kaupankäynti johdannaisissa osakeoptioiden ja -termiinien puoleen. Kun otetaan mukaan osakelainaussopimukset, oli liikevaihto joulukuussa (ilman HEX:in palkkioita) 867.9 miljoonaa euroa.

Joulukuussa indeksioptioiden suurin välittäjä oli Alfred Berg, jonka osuus kaikista kaupoista oli 56,1% (suhteessa liikevaihtoon). Suurin markkinatakaaja indeksioptioissa oli Handelsbanken (44,3% liikevaihdosta). (HEX Optiotiedote 5/00)

Se, että markkinoilla on vähän osapuolia ja markkinatakaajia antaa aiheen hypoteesiin, jonka mukaan markkinat saattaisivat olla tehottomat. Koska markkinatakaus on vain muutaman yrityksen harteilla, on markkinoiden tehokkuus Suomessa varsin kyseenalaista. Markkinatakaajien osto-ja myyntitarjouksiin (bid ja ask hinnat) on syytä suhtautua varauksella, sillä markkinatakaajat haluavat yleensä pitää omat positionsa vakaina eli pitkät ja lyhyet sopimukset tasapainossa. Tällöin halukkuus ostaa ja myydä riippuu omista positioista ja näin ollen vaikuttaa myös markkinoille annettaviin hintoihin.

Tulevaisuudessa kaupankäynnin mahdollisuudet johdannaisinstrumenteilla kasvavat huomattavasti. HEX teki vuonna 1998 liittoutumissopimuksen Deutche Börse AG'n ja Swiss Exchangen yhteisjohdannaispörssin EUREX:in kanssa. EUREX on maailman toiseksi suurin johdannaispörssi, esimerkiksi vuonna 1998 johdannaissopimuksia tehtiin 160 miljoonaa kappaletta (HEX 6 miljoonaa) ja markkinoilla oli 260 välittäjää (HEX 30 välittäjää). Lokakuun 1999 alusta lähtien suomalaiset välittäjät ovat EUREX:in jäseniä ja kaikki HEX:in johdannaistuotteet ovat EUREX:in listalla. (Positio 4/98, 6-7) Suuremmilla markkinoilla on paremmat mahdollisuudet myös optioiden kannalta; markkinat ovat huomattavasti likvidimmät, tuotteita on paljon ja niiden hintojen muodostuminen täsmällisempää kuin Suomen nykyisillä varsin ohuilla markkinoilla.

2.6 Optiot yrityksen näkökulmasta

Johdannaismarkkinoilla kaupankävijät voidaan jakaa kolmeen luokkaan (Puttonen & Valtonen 1996, 81):

1) suojautujat, jotka käyttävät optioita hinta- ym. riskeiltä suojautumiseen,
2) spekuloijat, jotka pyrkivät hyötymään optioiden tarjoamasta vipuvaikutuksesta ja alhaisista kaupankäyntikustannuksista ja saamaan näin parempaa tuottoa näkemyksilleen, ja
3) arbitraattorit, jotka pyrkivät hyötymään markkinahintojen vääristymistä ilman varsinaista riskinottoa.

Optioiden merkitys yritykselle riippuu pitkälti yrityksen toiminnan luonteesta. Mikäli kyseessä on rahoitusmarkkinoilla aktiivisesti toimiva yritys, sijoitusrahasto tai vaikkapa markkinatakaaja, tarkka tuntemus optioista ja etenkin optioiden hinnoittelusta on tarpeen. Rahoitusalan yritys voi etsiä aktiivisesti yli- tai alihinnoiteltuja optioita. Kun markkinoilla esiintyy tällaisia, yrityksellä on mahdollisuus arbitraasivoittoihin, nk. "ilmaisiin lounaisiin" muodostamalla riskitön positio väärin hinnoitellusta optiosta ja vastakkaisesta optiosta. Vientiyritykset voivat puolestaan hyötyä valuuttaoptioista (tai -termiineistä) halutessaan suojautua valuuttakurssien vaihteluilta. Korkomarkkinoiden yllättäviltä muutoksilta yritykset pystyvät suojautumaan korkojohdannaisilla, ja mikäli yritys omistaa arvopaperisalkkuja, niitä voidaan myös suojata kurssilaskuilta. Aktiivisella riskien hallinnalla osana taloushallintoa ja johdannaisia käyttäen yritys pystyy muokkaamaan riskitasoaan halutunlaiseksi.

Optioiden hinnoittelukaavat ovat tärkeä työväline kaikille yrityksille, joilla on optiopositioita tai vaikkapa yritysjohdon optioita. Optioiden arvostusperiaatteiden tuntemuksesta on yritykselle myös muuta hyötyä, sillä hinnoitteluteoriaa voidaan hyvin soveltaa myös muihin rahoitusinstrumentteihin. Niiden avulla voidaan määrittää yrityksen instrumenteille arvo, riski ja odotettu tuotto. Mallien avulla saadaan myös selville, miten näihin arvoihin vaikuttaa muutos allaolevassa muuttujassa. (Cox & Rubinstein 1985, 375)

Esimerkiksi tavallinen osake on itse asiassa osto-optio, jonka kohde-etuus on velkarahoitetun yrityksen omaisuuden arvo. Samoin riskivelka, vakuutukset, warranttit sekä optio- ja vaihtovelkakirjalaina voidaan nähdä optioina. Optio- ja vaihtovelkakirjalainojen hinnoittelussa velkakirjaan liittyvät kassavirrat saadaan diskonttaamalla. Optiotodistusten ja vaihto-oikeuksien määritykseen käytetään optioiden hinnoittelumallia eli yleensä Black & Scholes -mallia. Kaavaa sovellettaessa on vain huomioitava laina-aikana maksettavat osingot ja osakkeiden määrän kasvamisen aiheuttama laimennusvaikutus. (Haavisto 1990, 285)

Optioiden hinnoitteluteorioaa on siis mahdollista hyödyntää niin yrityksen pääomarakenteeseen kuin sijoituspäätöksiin, sulautumisiin, hankintoihin ja osinkoihin (Copeland & Weston 1982, 275). Esimerkin tästä tarjoavat Banz ja Miller (1978), jotka ovat hyödyntäneet optioiden hinnoitteluteoriaa tutkimuksissaan pääoman budjetoinnista ja Hsia (1981), joka puolestaan on yhdistänyt optioiden hinnoittelumallin, CAPM:in (Capital Asset Pricing Model) ja Mogliani-Miller -teorian selvittääkseen riskilainan kustannusten ja pääomarakenteen muutosten suhteen toisiinsa.

Edellä mainittujen optioteorian hyödyntämismahdollisuuksien lisäksi Mertonin (Ross et al.. 1995, 17) mukaan myös eläkerahasto-ja sijoitusvakuutuksien hinnoitteluun pätee sama teoria. Hinnoittelumallia on käytetty myös työsopimusten bonusten arvioimisiin.

Eräs Mertonin korostama näkökulma optioista on yrityksen tuotantotoiminnan reaalioptioiden arvonmääritys budjetointipäätöksissä. Reaalioptio on yrityksen mahdollisuus valita ja tehdä jotain, mikä ei ilman alkuperäistä investointia olisi mahdollista. Esimerkiksi reaalioptio voi olla yrityksen optio laajentua tai keskeyttää. Yritys voi siis jo ennen investointihankkeen tai projektin loppua joko jatkaa ja laajentaa tai keskeyttää toimintansa. Optioanalyysi on erityisen sopiva mittari projektin joustaville osille. Juuri näiden projektin osien arvoja on perinteisillä menetelmillä vaikea arvioida. (Ross et al. 1996, 17) Leppiniemi ja Puttonen (1996, 99) määrittävät investoinnin todellisen arvon investoinnin nykyarvon ja reaalioptioiden arvojen summana.

Yhteenvetona voidaan todeta optioteorian merkityksen kasvaneen rahoituskysymyksissä. Kuten edellä todettiin, sitä voidaan soveltaa myös osakkeiden ja erilaisten velkainstrumenttien arvonmääritykseen. Tällä on vaikutuksensa yrityksen velkarakenteeseen, investointipolitiikkaan, osingonjakopolitiikkaan yms.. Salmen ja Yli-Ollin (1990, 25) mukaan optioteoria on kasvamassa tulevaisuudessa nykyaikaisen rahoitusteorian keskeisimmäksi osa-alueeksi.

3 OPTIODEN HINNOITTELU

3.1 Hinnoittelun taustaa

Optioiden hinnoittelun perusidea on, että optiopositioa vastaava tilanne voidaan muodostaa myös osakkeiden ja korkopaperin yhdistelmänä. Otetaan esimerkiksi tilanne, jossa halutaan ostaa osto-optio. Samaan lopputulokseen päästään kahdella tavalla seuraavasti (Puttonen & Valtonen 1996, 97-98) :

Alkutilanne, jolloin osakkeen hinta on 100 mk:

a. ostetaan viisi 116 mk:n toteutushintaista osto-optiota a'5 mk

□ kassavirta = 5*-5 mk = -25 mk

b. Ostetaan 1 100 mk:n osake, josta 75 mk lainoitetaan 6,67% korolla

□ kassavirta = -100 mk (osake) + 75 mk (laina) = -25 mk

Option päättymispäivänä yhden periodin kuluttua sijoitusten arvo riippuu vallitsevasta osakkeen hinnasta. Esimerkissä on laskettu positioiden arvot, jos osakekurssi nousee 25 mk (125 mk:aan) tai laskee 15 mk (85 mk:aan):

	Osakkeen hinta	
	125 mk	80 mk
a. viiden option arvo	5*(125 mk-116 mk) = 45 mk	5*0 mk = 0 mk
b. myydään osake ja maksetaan laina korkoineen	125 mk-1,0667*75 mk = 45 mk	80 mk-1,0667*75 mk = 0 mk

Molemmat positiot maksoivat yhtä paljon ja tuottivat saman tuloksen toteutuspäivänä riippumatta osakkeen hinnan kehityksestä. Optioiden hinnoittelussa on siten pääperiaatteessa kysymys siitä, että osataan ostaa osakkeita ja optiota sekä lainata tai tallettaa rahaa oikeassa suhteessa. (Puttonen & Valtonen 1996, 98)

Riskineutraalissa tilanteessa position tulos on oltava yhtä suuri kuin sijoitukselle maksettava riskitön korko. Jos näin ei ole, sijoittaja voi ostaa ja suojata alihinnoiteltuja optioita tai myydä ja suojata ylihinnoiteltuja optioita ja eliminoida näin markkinariskin ja ansaita riskitöntä voittoa. (Chance 1999, 35)

Tehokkailla markkinoilla ei kenelläkään tulisi olla mahdollisuutta riskittömiin voittoihin, toisin sanoen arbitraasisuhteiden tulisi pitää. Arvopaperimarkkinoilla kaupankäyntikustannusten jälkeen havaitut poikkeamat tästä ovat merkki markkinoiden tehottomuudesta. Arbitraasisuhteet antavat reunaehdot osto-optioiden hinnoitteluun seuraavasti (myyntioptioiden ehdot ovat päinvastaiset):

Osto-option hinta on aina suurempi kuin nolla tai osakekurssi vähennettynä toteutushinnan nykyarvolla. Option positiivinen arvo on helposti ymmärrettävissä. Toinen alaraja (S - K/(1+r)) estää riskittömän voiton mahdollisuuden. Jos osto-option hinta on tätä alempi, se kannattaa ostaa ja toteuttaa samantien, jolloin sijoittaja saa riskitöntä tuottoa (jos ero on riittävä kattamaan myös kaupankäyntikustannukset). Ylärajana osto-optiolla on osakkeen hinta, sillä sitä kalliimmalla voi osakkeen ostaa suoraan.

Esimerkiksi jos osake maksaa 100 mk ja osto-optio eli oikeus ostaa osake toteutushinnalla 95 mk maksaa 3 mk, kannattaa tämä optio ostaa. Ostaja maksaa tällöin myyjälle 3 mk oikeudestaan ostaa 100 mk:n osake 95 mk:lla ja tekee näin riskitöntä voittoa (100-3)mk-95mk eli 2mk.

Osto-option (ja myyntioption) hintaan liittyy myös muita arbitraasirajoituksia, jotka koskevat toteutushintaa ja voimassaoloaikaa lukuun ottamatta identtisiä optioita. Jos on kaksi osto-optiota ($C(K_1)$ ja $C(K_2)$), jotka ovat toteutushintaa (K_1 ja K_2) lukuunottamatta identtisiä, niin korkeamman toteutushinnan option arvo ei voi ylittää matalamman toteutushinnan option arvoa. Eli jos $K_2 > K_1$, niin $C(K_1) \geq C(K_2)$. Edellisten optioiden hinnan erotus ei ikinä ole suurempi kuin niiden toteutushintojen erotus on, eli $K_2 - K_1 \geq C(K_1) - C(K_2)$, jos $K_2 > K_1$.

Voimassaoloajan suhteen tilanne on päinvastainen. Otetaan kaksi identtistä optiota, joilla on vain eri voimassaoloaika. Enemmän voimassaoloaikaa omaava optio on aina kalliimpi kuin lyhyemmän voimassaoloajan optio, koska sillä on vielä enemmän aika-arvoa jäljellä. Toisin sanoen jos $t_2 > t_1$, niin $C(t_2) \geq C(t_1)$. (Cox & Rubinstein 1985, 133)

3.2 Black & Scholes -malli

3.2 1. Mallin alkuoletukset

Kehittäessään malliaan Black ja Scholes joutuivat luomaan yksinkertaistetumman kuvan todellisuudesta, jotta he pystyivät rakentamaan suljetussa muodossa olevan hinnoittelumallin. Tästä johtuen he asettivat alkuoletuksia, joiden täyttyminen on Black & Scholes -mallin toimivuuden edellytys. Nämä hinnoittelumallin alkuoletukset ovat yhtäpitävät myös tehokkaiden rahoitusmarkkinoiden hypoteesien kanssa. (Cox & Rubinstein 1985, 248)

1. Osake ei maksa osinkoja option voimassaoloaikana.
2. Optio voidaan toteuttaa vain sen päättymispäivänä.
3. Kaupan vakuuksia, kaupankäyntikuluja tai veroja ei ole.
4. Korkotaso on vakio.
5. Osake noudattaa geometristä Brownin liikettä, jolloin tuotot ovat jakautuneet lognormaalisti ja volatiliteetti on vakio.
6. Hyvin lyhyellä aikavälillä voi ilmetä vain pieniä muutoksia osakkeen hinnassa.

Näihin oletuksiin on syytä suhtautua kuitenkin kriittisesti. Luvussa 3.2.3 on esitetty kritiikkiä alkuoletusten ja reaalimaailman eroista.

3.2.2 Black & Scholes -hinnoittelumalli

Optioiden hinnoitteluun on olemassa useita malleja, mutta yksi niistä on ehdottomasti käytetyin. Vuonna 1973 johtivat Fisher Black ja Myron Scholes kaavan eurooppalaiselle option hinnalle käyttäen hyväkseen yhtälöitä, jotka ovat tunnettuja myös fysikaalisista lämmönjohtamiskaavoista. Heidän mallissaan on muuttujina option arvoon vaikuttavat perustekijät eli osakkeen hinta S, option toteutushinta K, voimassaoloaika T, volatiliteetti σ sekä riskitön korko r[20]. Lisäksi mallissa oleva N() funktio tarkoittaa normaalijakauman (jonka keskiarvo on nolla ja keskihajonta yksi) kertymäfunktiota.

Yleisesti tiedetään, että osto-option C hinta ostohetkellä on vähintään sama kuin osakkeen hinta

[20] Osinkojen vaikutus tulee osakkeen hinnan S kautta.

S vähennettynä lunastushinnan nykyarvolla:[21]

(1) $C = S - K / (1+r)$

Black ja Scholes muunsivat yhtälöä kohti totuudenmukaisempaa kuvaa lisäämällä siihen option päättymispäivän tilannetta kuvaavat todennäköisyyskertoimet N(dl) ja N(d2). Black & Scholes -mallissa N(dl) on todennäköisyys sille, että standardoitu normaalisti jakautuneen muuttujan z:n arvo on vähemmän tai yhtäsuuri kuin dl. N(d2) on todennäköisyys että arvo on vähemmän tai sama kuin d2. Tekijöiden dl ja d2 lausekkeet perustuvat Blackin ja Scholesin tutkimuksissaan stokastisista prosesseista johtamiin kaavoihin. Stokastisista prosesseista on kerrottu enemmän liitteessä 1.

Blackin ja Scholesin (1973) johtama hinnoittelukaava osto-optiolle on:

(2) $C = SxN(d_1) Ke^{rT} xN(d_2)$

missä $d_1 = \dfrac{\ln\frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})xT}{\sigma\sqrt{T}}$

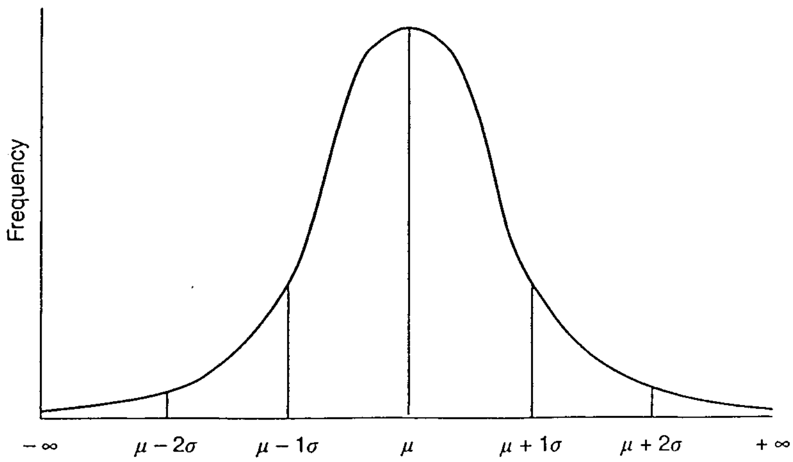
ja $d_2 = d_1\sigma\sqrt{T}$

Mallissa esiintyvät muuttujat ovat volatiliteettia lukuunottamatta melko yksiselitteisiä, ainoastaan volatiliteetin suuruus on arvioitava itse. Black & Scholes esityksen mukaan tuoton keskihajonta toimii tänä hintojen vaihtelevuuden mittarina. Markkinakäytäntö on kuitenkin toinen. Tähän estimointiin tuleekin kiinnittää erityisesti huomiota, sillä näkemykset siitä vaikuttavat koko hintaan. Arvioitaessa volatiliteettia ei tarvitse ennustaa osakkeen tulevia arvoja tai muiden sijoittajien näkemyksiä, ainoastaan kuinka paljon hintojen uskotaan heilahtelevan. (Bookstaber 1991, 126)

[21] Ross et al 1995, 31

Volatiliteettiä määritettäessä voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi historiallista, markkinoiden näkemystä tai samankaltaisten tuotteiden volatiliteettia. Katsomalla osakkeen historiallisia arvoja saadaan jonkinlaista kuvaa osakkeelle luonteenomaisesta vaihtelevuudesta[22]. Mukaan kannattaa ottaa arvoja niin pidemmältä kuin lyhyemmältä ajalta, esimerkiksi viimeisen vuoden, kuukauden ja viikon keskihajonnat. Tällöin muodostuu selkeämpi kuva, miten volatiliteetti on kehittymässä. Markkinoiden oletukset kohde-etuuden arvon vaihtelevaisuudesta saadaan selville laskemalla implisiittinen volatiliteetti: Black & Scholes -malliin option hinnaksi asetetaan sen markkina-arvo ja lasketaan volatiliteetti käänteisesti. Myös samankaltaisten tuotteiden keskihajontaa voidaan hyödyntää estimoinnissa, sillä niillä on taipumus liikkua samansuuntaisesti, vaikkakin niiden historialliset arvot eroaisivatkin. (Natenberg 1988, 93) Volatiliteetin merkityksestä ja käsittelystä enemmän kappaleessa 5.

Kun kaikki muuttujat ovat selvillä, lasketaan ensin arvot d_1:lle ja d_2:lle. Seuraavaksi ratkaistaan kumulatiiviset normaalijakauman todennäköisyydet näille arvoille d_1 ja d_2. Laskettaessa näitä arvoja määritetään yksinkertaisesti se jakaumakäyrän ala, joka on d_1:n ja d_2:n vasemmalla puolella (vrt. kuvio 6). Arvot saadaan esim. taulukosta tai Excelistä. Saadut todennäköisyyttä kuvaavat arvot sijoitetaan malliin ja tulokseksi saadaan option hinta.



Kuvio 6. Normaalijakauman tiheysfunktion kuvaaja

[22] Historiallinen volatiliteetti on tuottojen aikasarjasta laskettu keskihajonta.

3.2.3 Mallin kritiikkiä

Kun Black ja Scholes julkaisivat vuonna 1973 mallinsa, se oli käänteentekevä niin rahoitusteorian kuin johdannaismarkkinoiden kehityksen kannalta. Aiemmin markkinatakaajat olivat käyttäneet intuitiivisia menetelmiä, jolloin option osto- ja myyntihintojen välinen ero (bid-ask spreadi) oli laaja, jotta he pystyivät kattamaan mahdolliset virheet arvioimissaan hinnoissa. Mallin julkaisun jälkeen markkinatakaajat jakautuivat kahtia: osa optioilla kauppakäyvistä hinnoittelivat tuotteet vanhoillisesti, kun taas toiset hyödynsivät Black & Scholes -mallia. Jälkimmäiset pystyivät antamaan option hinnan ja kattamaan riskinsä ottamalla delta -kertoimen mukainen suojaus kohde-etuudella. "Bid-ask spreadin" ei tarvinnut enää olla niin leveä ja markkinat tehostuvat. Vanhoillisten oli väistyttävä ja optiokaupankäynti muuttui pysyvästi. (Petzel 1996, 89)

Black & Scholes -malli on yksinkertaisuutensa vuoksi pysynyt käytetyimpänä mallina nykyaikaan asti. Mallissa on paljon hyviä ominaisuuksia. Yksi tärkeimmistä on helposti estimoitavat muuttujat; viidestä malliin syötettävästä tiedosta ainoastaan volatiliteetti täytyy arvioida itse. Mallissa ei ole siten mitään vaikeasti havaittavia muuttujia, kuten odotuksia tulevaisuudesta tai riskiä. Oletukset, joihin Black & Scholes -malli perustuu, ovat kuitenkin joiltain osin kyseenalaisia. Tutkijat ovat vuosikymmenien ajan pyrkineet muokkaamaan alkuperäistä mallia niin, että rajoittavista oletuksista voitaisiin joustaa.

Yritykset jakavat yleisesti osinkoja osakkeilleen, mutta Black ja Scholes olettivat, ettei osinkoja jaeta option voimassaoloaikana. Osingonmaksu vaikuttaa option hintaan osakkeen hinnanlaskun kautta. Merton korjasi tämän puutteen jo heti vuonna 1973 muokkaamalla alkuperäistä mallia huomioimaan osingonmaksun.

Eniten kritiikkiä oletuksista aiaheuttaa geometrisen Brownin liikkeen valitseminen kohde-etuuden tuottoja kuvaavaksi prosessiksi. Tämä implikoi edelleen, että kohde-etuuden volatiliteetti on vakio, mikä on osoittautunut empiirisesti paikkansa pitämättömäksi. Tämän työn tarkoitus on esitellä juuri volatiliteettia koskevaa kritiikkiä ja sen korjaamista, josta enemmän kappaleessa 5. Lisäksi otto- ja antolainauskorot eivät ole todellisilla markkinoilla samat, ja myös riskittömän koron on osoitettu volatiliteetin tavoin olevan stokastisesti vaihteleva. Mertonin artikkelissa (1973) on myös tämä otettu huomioon osinkojen maksun ohella.

Toinen Brownin liikkeestä seuraava oletus on kohde-etuuden tuottojen jakautuminen normaalisti, joka myös on osoittautunut empiirisesti paikkansa pitämättömäksi. Etenkin indeksioptioilla vääristymä kasvaa, sillä vaikka yksittäisen osakkeen tuotot olisivatkin jakautuneet normaalisti, niiden summa ei ole enää normaalijakautunut ja oletus pettää indeksien kohdalla. Jarrow & Rudd (1982, 1983) koettivat korjata tätä estimoimalla oikeaa jakaumaa sen momenttien (ks kpl 3.5) avulla. Tämä ei kuitenkaan onnistunut kovinkaan hyvin eikä ole siten saanut paljoakaan kannatusta tai jatkotutkimuksia tutkijoiden parissa.

Kaikilla markkinoilla on kaupankäyntikustannuksia eikä verojakaan voida välttää, joten oletus niiden puuttumisesta on jo intuitiivisesti väärä. Tällä oletuksella on suuri vaikutus etenkin delta-suojauksen ylläpidossa. Sijoittajan tulisi muuttaa sijoitussalkkuaan jatkuvasti suojauskertoimen mukaan, mutta reaalimaailmassa tämä ei onnistu ilman kustannuksia, jolloin täydellinen suojaus on mahdoton. Tähän ongelmaan on puuttunut mm. Kamal & Derman (1999). Verojen vaikutuksen on tutkimuksissaan huomioinut Ingersoll (1976).

Kaikesta kritiikistään huolimatta Black & Scholes -malli on säilyttänyt asemansa 70-luvulta lähtien. Vaihtoehtoisia malleja on kehitelty lukuisia, mutta yksikään niistä ei ole saavuttanut Black & Scholes :in kaltaista maailmanlaajuista suosiota. Yksi syy tähän voi olla uusien mallien monimutkaisuus ja niiden vaatima tietokonekapasiteetti. Tämä tuskin on nykyaikana enää ongelma, vaan tietokoneisiin ohjelmoidut hinnoittelumallit ovat yhtä yksinkertaisia ja nopeita käyttää kuin Black & Scholes. Kuitenkaan yksikään vaihtoehtoinen malli ei ole saavuttanut kovin suurta suosiota. (Hoch 1997, 26) Seuraavaksi käydään lyhyesti läpi muita tämän tutkielman kannalta oleellisia hinnoittelumalleja.

3.3 Black -76 -malli

Jos Black & Scholes -mallin oletuksista huolimatta osakkeelle maksetaan osinkoja option voimassaoloaikana, osakkeen arvo laskee suunnilleen osingon verran. Tämä laskee myös osto-option arvoa ja option ostajan kannalta se on menetettyä tuloa. Jos tiedetään, että osakkeelle maksetaan voimassaoloaikana osinkoa ja sen suuruus voidaan arvioida, osinkojen vaikutus voidaan ottaa huomioon option arvoa määritettäessä. Black & Scholes -mallissa vähennetään osakkeen hinnasta arvioitu osinko (Jokivuolle 1990, 19).

Osakeindeksiin kohdistuvilla optiolla ei osinkokorjaus onnistu samalla tavalla. Ongelma ratkeaa käyttämällä option perustana indeksin arvon sijaan sitä vastaavaa termiiniä, jossa osingot on otettu huomioon. Termiinin ja option on oltava vain voimassaoloajaltaan yhtä pitkiä, jotta termiini heijastaisi juuri option voimassaoloajan osingonmaksuja.

Indeksioptioiden hinnoittelussa on yleisesti ollut käytössä Black -76 -malli, jonka Fisher Black (1976) kehitti alunperin futuurisopimusten hinnoitteluun. Malli soveltuu myös optioiden hinnoitteluun, kun termiini- ja optiosopimuksilla käydään kauppaa samasta kohde-etuudesta, kuten FOX-indeksistä. Black -76 -hinnoittelumalli muodostetaan termiinin hinnan perusteella, sillä Put call futures -pariteetin perusteella option hinta riippuu myös termiinin hinnasta. Malli johdetaan Black & Scholes -kaavasta sijoittamalla siihen osakkeen hinnan S kohdalle vastaava termiinin arvo. Osakkeen jatermiinin välinen arbitraasiehto voidaan kirjoittaa muotoon $F = Se^{rT}$ eli $S = Fe^{rT}$, jossa F kuvaa termiinin arvoa. Sijoittamalla tämä Black & Scholes:iin saadaan hinnoittelumalli Black -76[23]:

(3) $$C = e^{rT}\left[FxN(d_1^*)KxN(d_2^*)\right]$$

missä $$d_1^* = \frac{\ln\frac{F}{K} + (\frac{\sigma^2}{2})xT}{\sigma\sqrt{T}}$$

ja $$d_1^* = d_2^* \sigma\sqrt{T}$$

Termiinien käyttöä indeksin sijaan puoltaa myös se, että termiini edustaa indeksin rakennetta vastaavaa osakeportfoliota. Black & Scholes -mallin oletuksiin kuului sijoittajan mahdollisuus ostaa osakkeita kustannuksitta sekä osakkeiden lyhyeksimyynti. Vaikka kaupankäynti ei ole täysin ilmaista, termiinisopimuksen kustannukset ovat huomattavasti matalammat kuin jos jouduttaisiin ostamaan indeksiä vastaavat osakkeet suojausstrategiassa. Myös lyhyeksimyynti[24] on helpompaa

[23] Puttonen & Valtonen 1996, 131

[24] Lyhyeksimyynnillä tarkoitetaan tilannetta, kun kohde-etuus myydään ilman että sitä vielä omistetaan. Osakkeilla tämä onnistuu LEX-osakelainauksen avulla.

termiineillä kuin osakkeilla.

Koska Black-76 -hinta perustuu termiinin arvoon, option hinnan muutokset seuraavat vastaavan termiinihinnan muutoksia. Toisin sanoen indeksin nousu ei välttämättä nosta indeksioptioiden hintoja, jos vastaava termiinin hinta ei ole noussut.

3.4 Hull & White -malli

Erään tunnetuimmista stokastisen volatiliteetin sisältävistä optioiden hinnoittelumalleista kehittivät Hull ja White (1987). Heidän mallinsa on sarjakehitelmään perustuva approksimaatio tilanteessa, jossa volatiliteetti ja osakekurssit eivät korreloi keskenään. He esittävät myös numeerisen ratkaisun volatiliteetin ja osakekurssin korreloidessa keskenään.

Kun osakkeen tuotto ja volatiliteetti eivät korreloi, option hinta on Hullin ja Whiten mukaan Black & Scholes -hinta integroituna option voimassaolojan keskimääräisen varianssin jakaumalla. Toisin sanoen eurooppalaisen osto-option arvo on

$$\int c(V)g(V)d(V) \tag{4}$$

missä volatiliteetti V on keskiarvo varianssista σ^2, c on Black & Scholes -hinta volatiliteetti V:llä laskettuna ja g on V:n tiheysfunktio. Tämä voidaan kirjoittaa approksimaationa seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned} f(S,\sigma^2) &= C(\sigma^2) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{S\sqrt{T-t}\,N'(d_1)(d_1 d_2 - 1)}{4\sigma^3} * \left[\frac{2\sigma^4(e^k - k - 1)}{k^2} - \sigma^4\right] \\ &+ \frac{1}{6}\frac{S\sqrt{T-t}\,N'(d_1)[(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)]}{8\sigma^5} \\ &* \sigma^6\left[\frac{e^{3k} - (9+18k)e^k + (8 + 24k + 18k^2 + 6k^3)}{3k^3}\right] + \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

Mallissa olevan tunnukset ovat muutoin samat kuin Black & Scholes -mallissa, paitsi k:

$$k = \xi^2 (T - t)$$

jossa ξ on vakio volatiliteetin noudattamasta stokastisesta prosessista.

Kun osakkeen hinta ja volatiliteetti korreloivat hetkittäin, Hull ja White käyttävät optiohinnoittelussa Monte Carlo -simulointia[25]. Kun korrelaatio on positiivinen, osaketuottojen todellisen jakauman vasen häntä on ohuempi ja oikea häntä paksumpi kuin lognormaalissa jakaumassa. Tähän on luonnollinen selitys: Kun osakkeen hinta nousee, myös volatiliteetilla on tapana nousta. Tämä tarkoittaa, että hyvin korkeiden osakkeen hintojen muutoksen todennäköisyys on suurempi, kuin jos tuotot noudattaisivat geometristä brownin liikettä ja lognormaalia jakaumaa. Vastaavasti kun osakekurssit putoavat, volatiliteetti laskee myös ja hyvin alhaiset hinnanmuutokset ovat epätodennäköisempiä kuin mitä geometrisen Brownin liikkeen mukaan. (Hull & White 1987, 285-287)

3.5 Jarrow & Rudd -malli

Jarrow ja Rudd (1982) korjasivat hinnoittelumallissaan vääräksi osoittautunutta oletusta osakkeiden jakaumasta. Heidän mukaansa oikea option hintaa saadaan korjaamalla Black & Scholes -hintaa tuottojen todellisen jakauman ja lognormaalin jakauman tiheysfunktion avulla. Optioiden hinnoittelukaavaa varten tarvittava jakauma lasketaan käyttäen Taylor -kehitelmää[26]. Siinä käytetään hyväksi lognormaalin ja johdettavan jakauman muotoa kuvaavia tunnuslukuja eli momentteja. Korjaustermeissä tarvitaan neljää ensimmäistä momenttia: Ensimmäinen on odotusarvo, toinen varianssi, kolmas mittaa jakauman huipukkuutta ja neljäs momentti mittaa vinoutta[27]. Tarkoitus on korjata jakauman muotoa kertomalla lognormaalin jakauman

[25] Ensimmäinen optioiden hinnoittelussa Monte Carlo -simulointia käyttänyt oli Boyle (1977). Hinnoiteltaessa optioita Monte Carlo -simuloinnin avulla simuloidaan tuhansia satunnaisia osakkeen hintoja, joilla on sama suhteellinen esiintymistiheys kuin reaalimaailmassa. Jokaisen simuloidun tuloksen perusteella lasketaan option arvo ja lopullinen hinta saadaan ottamalla keskiarvo simuloiduista tuloksista ja diskonttaamalla se nykyarvoon. (Chance 1999, 43)

[26] Taylor-kehitelmästä kts Hull (1997,225).

[27] Jakauman momenteista tarkemmin luvussa 4.5.

tiheysfunktiota todellisen ja lognormaalin jakauman momenttien erotuksilla. Malli on muotoa:

$$
\begin{aligned}
C(F) &= C(A) + e^{rt} a(K)\left[k_2(F)\,k_2(A)\right]/2! \\
&\quad e^{rt} a'(K)\left[k_3(F)\,k_3(A)\right]/3! \\
&\quad + e^{rt} a''(K)\left[k_4(F)\,k_4(A)\right] + 3\left[k_2(F)\,k_2(A)\right]^2/4! \\
&\quad + \varepsilon(K)
\end{aligned} \tag{6}
$$

missä

C(F)	=	option korjattu hinta
C(A)	=	option Black & Scholes -kaavalla laskettu hinta
$k_2(F)$, $k_3(F)$ ja $k_4(F)$	=	todellisen jakauman 2., 3.ja 4. kumulantti (saadaan johdettua vastaavista momenteista)
$k_2(A)$, $k_3(A)$ ja $k_4(A)$	=	lognormaalin jakauman 2., 3. ja 4. kumulantti
a(K), a'(K) ja a''(K)	=	lognormaalin jakauman tiheysfunktio sekä sen 1. ja 2. derivaatta
ε(K)	=	virhetermi, oletetaan 0:ksi

Kaavassa jakauman momentit on muutettu kumulanttimuotoon. Malli sisältää siis Black & Scholes -arvon, jota on korjattu 3:lla momenteista johdetuilla korjaustermillä sekä virhetermin. Ensimmäinen korjaustermi korjaa jakaumien erilaiset varianssit. Jos oikealla jakaumalla on arvioitavaa lognormaalia suurempi varianssi, termi on positiivinen ja sen suuruus riippuu tiheysfunktion a(K) arvosta. Tämä riippuu puolestaan siitä, kuinka kaukana tai lähellä option hinta on kohde-etuuden nykyistä arvoa. Toinen termi korjaa eroavaisuuksia vinoudessa. Sen etumerkki riippuu siitä, kumpi jakauma on vinompi ja kumpaa merkkiä ensimmäinen derivaatta a'(K) on. Kolmannessa korjaustermissä näkyy erot sekä huipukkuuden että varianssin suhteen kerrottuna a(K):n toisella derivaatalla. Virhetermi sisältää 5:nnen ja siitä eteenpäin olevien momenttien korjaukset, mutta lähestymistavassa ne arvioidaan pieniksi ja virhetermi oletetaan nollaksi. (Jarrow & Rudd 1982, 355-358)

3.6 Duan-Gauthier-Simonato -malli

Duan, Gauthier ja Simonato (1998) esittävät option hinnan ratkaisemiseksi analyyttista mallia, jossa Black & Scholes -mallia vastaavaa hintaa muutetaan totuudenmukaisemmaksi kahden korjaustermin avulla. Idea on melko sama kuin Jarrow & Rudd (1982) käyttävät, mutta Duan et al. olettavat, ettei volatiliteetti ole ajassa vakio vaan stokastinen ja mallintavat sitä GARCH-mallin avulla (lisää GARCH:ista kappaleessa 4.4). Mallissa tarvittavat tuottojakauman muotoa kuvaavat tunnusluvut eli momentit saadaan GARCH-prosessin perusteella. Ensimmäinen korjaus koskee jakauman vinoutta ja toinen sen huipukkuutta .

(7) $$C_{app} = C + k_3 A_3 + (k_4 - 3) A_4$$

missä

(8) $$C = S_0 N(\bar{d}) - Ke^{-rT} N(\bar{d}\,\sigma_{\rho_T})$$

ja vakiot A_3 ja A_4

$$A_3 = \frac{1}{3!} S_0 \sigma_{\rho_T} [(2\sigma_{\rho_T} - \bar{d})n(\bar{d}) - \sigma^2_{\rho_T} N(\bar{d})],$$

$$A_4 = \frac{1}{4!} S_0 \sigma_{\rho_T} [(\bar{d}^2 - 1 - 3\sigma_{\rho_T}(\bar{d} - \sigma_{\rho_T}))n(\bar{d}) + \sigma^3_{\rho_T} N(\bar{d})],$$

$$\bar{d} = d + \delta$$

$$\delta = \frac{\mu_{\rho_T} - rT + \frac{\sigma^2_{\rho_T}}{2}}{\sigma_{\rho_T}}$$

$\rho_T = \ln(\frac{S_t}{S_0})$ edustaa kumulatiivista tuottoa

μ_{ρ_T} ja σ_{ρ_T} ovat tuoton keskiarvo ja keskihajonta

k_3 ja k_4 ovat kertoimia vinoudelle ja huipukkuudelle

Funktiot $n(\bar{d})$ ja $N(\bar{d})$ ovat standardin satunnaismuuttujan tiheys- ja kertymäfunktio.

Eli Jarrow'n ja Ruddin tapaan melko perinteisesti laskettua osto-option hintaa korjataan totuudenmukaisemmaksi perustuen Egdeworthin sarjakehitelmään[28] normaalin tiheysfunktion

[28] Edgeworthin sarjakehitelmästä ja sen käytöstä enemmän kappaleessa 5.4.

ympärillä. Hintaa on tällöin muutettu huomioimaan osakkeen tuottojakauman todellinen vinous ja huipukkuus, kun kyseessä on GARCH-prosessi. (Duan et al. 1998, 2-3) Korjaustermit ovat kuitenkin niin ulkonäöltään kuin lähtökohdiltaan hyvin erilaiset, sillä Duan et al. -mallissa volatiliteetti on vaihteleva, kun taas Jarrow ja Rudd olettavat ajassa vakion volatiliteetin.

3.7 Put call -pariteetti

Suurin osa hinnoittelumalleista on keskittynyt osto-optioiden arvon määritykseen. Näistä malleista voidaan kuitenkin johtaa arvo myös myyntioptioille. Tästä ominaisuudesta käytetään nimeä Put call -pariteetti. Jos osto- ja myyntioptiolla on sama kohde-etuus, toteutushinta ja päättymispäivä, ne muodostavat kiinteän kokonaisuuden yhdessä kohdeosakkeen kanssa. Tällöin yhdistämällä mitkä tahansa kaksi näistä saadaan kolmannen kaltainen instrumentti. Merkitään osto-optiota (call) C:llä myyntioptiota (put) P:llä, osakekurssia (stock) S:llä, toteutushintaa (striKe) K:lla, korkoa R:llä ja voimassaoloaikaa T:llä. Oletetaan, että sijoittajalla on salkku, jossa on yksi osake, yksi ostettu myyntioptio ja yksi myyty osto-optio. Molemmat optiot kohdistuvat osakkeeseen ja niillä on sama toteutushinta ja voimassaoloaika. Toteutushetkellä osakekurssi voi olla toteutushintaa alhaisempi $S<K$ tai sama tai korkeampi $S \geq K$. Sijoituksen tuotto näissä tapauksissa on:

jos $S<K$

a)	osakkeen arvo	S
b)	osto-optio on arvoton	0
c)	myynti-option arvo	K-S
d)	sijoituksen nettoarvo	K

jos $S \geq K$

a)	osakkeen arvo	S
b)	osto-option arvo	-(S-K)
c)	myyntioptio on arvoton	0
d)	sijoituksen nettoarvo	K

Näin ollen riippumatta siitä, mikä on osakekurssin arvo toteutushetkellä, sijoituksen nettoarvo on aina toteutushinnan suuruinen. Tästä johtuen sijoituksen tuotto on riskitön ja se voidaan diskontata jatkuva-aikaisesti lasketulla riskittömällä korolla R, jolloin saadaan put call -pariteetin yhtälö:

(9) $$C = P + S e^{-RT} K$$

Toisin sanoen osto-option arvo on yhtäsuuri kuin myyntioption ja osakkeen summa vähennettynä toteutushinnan diskontatulla nykyarvolla. (Copeland & Weston 1983, 238-239)

3.8 Hinnoitteluvirheistä hyötyminen[29]

Väärinhinnoitellut optiot mahdollistavat arbitraasivoittojen olemassaolon, ns. ilmaiset lounaat. Jos optio on sijoittajan mielestä ylihinnoiteltu, se kannattaa myydä ja alihinnoiteltu optio puolestaan ostaa. Mutta tämä ei riitä takaamaan voittoja. Jos markkinat muuttuvatkin optioposition kannalta väärään suuntaan, yli- tai alihinnoittelusta ei ole apua, vaan positio tuottaa tappiota. Tämä tappion riski voidaan eliminoida suojaamalla (hedging) positio.
Optioposition suojaukseen voidaan käyttää useita instrumentteja: allaolevaa instrumenttia (osake, indeksioptioilla futuuri) tai toista optiota. Ostetun osto-option suojaukseksi voidaan esimerkiksi myydä toinen osto-optio tai ostaa myyntioptio. Valittaessa suojausinstrumenttia on huomioitava kolme seikkaa:

i) Suojausinstrumentti vastaa väärinhinnoiteltua optiota voimassaoloajan ja toteutushinnan suhteen.
ii) Suojauksena käytettävä optio ei saa olla väärinhinnoiteltu samansuuntaisesti. Jos sekä alkuperäinen että suojaava optio on ylihinnoiteltu, saatu myyntivoitto menee toisen ostokuluihin. Jos hinnoitteluvirheet ovat vastakkaisia, voitto korostuu.
iii) Yleensä suojaus toisella optiolla on parempi kuin allaolevalla instrumentilla, paitsi jos kaikki optiot on hinnoiteltu väärin samansuuntaisesti, koska kaupankäyntikulut ovat yleensä optioilla pienemmät, ja virheet suojauksessa ('hedge-ratio') ovat pienemmät optioiden välillä.

[29] Bookstaber 1985, 180-189

Kun suojausinstrumentti on valittu, suojaus täytyy sovittaa muuttuviin markkinatilanteisiin. Delta-kerroin (ks. kpl 2.3) muuttuu voimassaoloajan vähentyessä sekä osakkeen hinnan (indeksin) muutosten mukana, joten sitä on tarkkailtava jatkuvasti. Ongelmana onkin päättää, milloin delta muuttuu tarpeeksi, ja on aika muuttaa suojaussalkun koostumusta. Toisaalta kaupankäyntikustannukset voivat nousta korkeaksi, mutta toisaalta, jos mitään ei tehdä, tappion riski kasvaa. Paras tapa suojata ylihinnoiteltu optio on ostaa lisää allaolevaa instrumenttia (osake, futuuri). Suojausta ei kannata muodostaa myymällä alihinnoiteltuja tai ostamalla ylihinnoiteltuja optioita. Jos optio pysyy väärinhinnoiteltuna koko sopimuksen kestoajan, sijoittaja saattaa olla kykenemätön realisoimaan täyttä mahdollista tuottoa ennen option päättymispäivää, sillä silloin option arvon muodostaa vain sen perusarvo eli toteutushinnan ja indeksin arvon erotus.

Kun optio on palannut takaisin korrektiin hintaansa, tiliasema kannattaa sulkea heti ja ottaa saatu tuotto pois, sillä suojautumisstrategialla ei saada enää arbitraasituottoa. Tuotto tämän jälkeen on normaalia tuottoa (korvausta) riskistä, jonka sijoittaja kantaa. Yleensä markkinat korjaavat hinnoitteluvirheet melko nopeasti eikä vääriä hintoja esiinny kauan.

Black ja Scholes testasivat ensimmäisessä artikkelissaan (1973), voiko hinnoitteluvirheistä hyötyä. He ostivat alihinnoiteltuja optioita (suhteessa teoreettiseen hintaan) ja myivät ylihinnoiteltuja. Samalla he pitivät position riskittömänä delta-suojauksen avulla. Tutkimus osoitti, että tällä tavoin oli saavutettavissa merkittäviä voittoja, mutta kun kaupankäyntikulut huomioidaan, voitot häviävät.

4 VOLATILITEETTI OPTIOIDEN HINNOITTELUSSA

Niin kuin edellä on useaan kertaan todettu, volatiliteetilla on ratkaiseva asema option hinnassa. Pienikin muutos Black & Scholes -malliin syötettävässä volatiliteettiarvossa saa aikaan eroja mallin vastaukseksi antamassa option arvossa. Tämän tiesivät myös mallin tekijät, jotka olivat jo heti mallinsa julkaisun aikoihin huolissaan oikeasta tavasta arvioida tulevaa volatiliteettia. Tässä kappaleessa käsitellään erilaisia tapoja määrittää volatiliteetti sekä esitellään volatiliteettiin läheisesti liittyvä tuottojakauma ja sen tunnusluvut eli momentit.

4.1 Volatiliteetin ominaisuuksia

Volatiliteetin estimoinnin ja ennustamisen välillä on selkeä ero; estimointi on historiallisesta aikasarjasta tilastollisin menetelmin tietojen määrittelyä, jota sitten voidaan hyödyntää ennustettaessa tulevaa. Tämä sotii tehokkaiden markkinoiden satunnaispolku ('random walk') ajatuksen kanssa, jonka mukaan historialla ei ole mitään merkitystä tulevaisuutta ennustettaessa. (Alexander 1995, 4) Voidaan kuitenkin olettaa, että historialla on oma osuus tulevaisuuden selittäjänä myös volatiliteetin kannalta. Tämän puolesta puhuu mm. markkinoilla hyvin yleinen autokorrelaatio[30]. Toinen satunnaiskulkua vastaan oleva havainto markkinoilta on volatiliteetin klusteroituminen. Markkinoilla on havaittu, että pieniä muutoksia seuraa yleensä pieni muutos, ja vastaavasti suuria heilahteluja seuraa todennäköisimmin suuri muutos. Toisin sanoen havaittavissa on erilaisia periodeja; korkean volatiliteetin epävarmoja kausia ja matalan volatiliteetin vakaampia kausia.

Rahoitusmarkkinoiden toiminnassa informaatiolla on suuri merkitys. Informaatio johtaa muutoksiin sijoittajien odotuksissa, ja tämä hintojen odottamattomiin muutoksiin. Volatiliteetti puolestaan määräytyy juuri näistä odottamattomista hintaliikkeistä ja on siten sidoksissa uuden tiedon saapumiseen markkinoille. Tällaista informaatiota ovat mm. rahoituslaitosten ilmoitukset, rahan tarjonta, bruttokansantuote ja ulkomaankaupan tunnusluvut. Tiedolla on Bookstaberin (1985, 122) mukaan kolme ominaisuutta :

[30]Autokorrelaatio tarkoittaa peräkkäisten havaintojen riippuvuutta toisistaan.

1) Informaatio saapuu markkinoille "pakkauksissa",
2) informaation eri osilla on eriasteinen vaikutus markkinoihin ja siten erilainen vaikutus myös volatiliteettiin, sekä
3) markkinoilla vie aikaa, ennen kuin saapunut informaatio on täysin sisäistetty, vaikutus volatiliteettiin on sitä pidempi, mitä suurempi vaikutus informaatiolla on ollut.

Toisin sanoen volatiliteetti voidaan nähdä saapuvan tiedon, sen laajuuden ja sen sisäistämisnopeuden funktio. Pitkällä aikavälillä nämä tekijät ovat suhteellisen vakaita, jolloin myös volatiliteettia voidaan pitää vakaana. Lyhyellä aikavälillä katsottuna uuden tiedon saapuminen markkinoille voi aiheuttaa suurenkin hypyn osakkeen volatiliteettiin, joka tämän jälkeen palaa hiljalleen takaisin normaaliarvoihin, samalla kun uutta tietoa "sulatellaan" markkinoilla. (Bookstaber 1985, 123)

Korkeiden tai matalien volatiliteettikausien jälkeen volatiliteetin on havaittu siis palaavan johonkin pitkän aikavälin keskiarvotasoon, eli volatiliteetin sanotaan olevan keskiarvoon palautuva ('mean reverting'). Tämän ominaisuuden seurauksena pidemmältä ajalta otettu volatiliteetti on matalampi kuin lyhyemmän ajan volatiliteetti. Lisäksi volatiliteetin on osoitettu olevan korkeampi kohde-etuuden hintojen laskun yhteydessä verrattuna hintojen nousuun. (Waltsham 1998, 154-155)

4.2 Historiallinen volatiliteetti

Perinteinen tapa määrittää volatiliteetti on laskea kohde-etuuden logaritmisten tuottojen keskihajonta historiallisesta aikasarja-aineistosta. Keskihajonta voidaan estimoida joko hyvin pitkältä aikasarjalta tai valita päivien lukumäärä, jolta se lasketaan. Historiallista volatiliteettia laskettaessa ainoa ongelma onkin valita sopiva aikajakso. Mitä enemmän havaintoja, sitä parempi on yleensä tarkkuus. Volatiliteetti vaihtelee kuitenkin ajan kuluessa, jolloin kovin pitkältä ajalta otettu data saattaa olla epäkelpoa ennustamaan tulevaisuutta. Hullin (1997, 215) mukaan suhteellisen hyvin toimiva kompromissi on käyttää päivittäistä dataa viimeisimmältä 90:stä 180:een päivältä. Jokivuolle (1991, 45) puolestaan on havainnut, että suomalaisissa optiotutkimuksissa volatiliteetti on yleensä laskettu 10, 40 tai 50 päivän liukuvana keskiarvona.

Erot estimoitujen historiallisten volatiliteettien välillä johtuvat ainoastaan siitä, miltä ajalta estimointi on tehty. (Alexander 1995, 4)

Matemaattisesti volatiliteetilla tarkoitetaan hinnan poikkeamia sen keskiarvosta tietyllä ajalla. Kohde-etuuden tuottoa mitataan logaritmisena muutoksena, jolloin kohde-etuuden arvolla ei ole merkitystä. Jos tuottojen keskiarvo on R ja hetken t tuotto on r_t sekä T kertoo ajan, on historiallinen volatiliteetti σ :

$$(10) \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(r_t - R)^2}{T-1}}$$

Joskus tuottojen heilahteluista puhuttaessa käytetään termiä varianssi. Varianssi eli σ^2 on keskihajonnan neliö.

Historiallista volatiliteettia laskettaessa ongelma on siis valita ajanjakson pituus, jolta havainnot otetaan. Toiseksi, volatiliteettia määriteltäessä on päätettävä, käytetäänkö muutettaessa volatiliteettia vuosiarvoksi kalenteripäiviä eli kaikkia vuoden päiviä (365) vaiko kaupankäyntipäiviä, joita on vuodessa noin 250. Tehokkaiden markkinoiden oletusten mukaan osaketuottojen volatiliteetti johtuu täysin osakkeen tulevia tuottoja koskevan uuden tiedon saapumisesta satunnaisesti markkinoille. Toisaalta väitetään, että volatiliteettiin vaikuttaa suuresti kaupankäynti. Kysymys onkin siten, onko volatiliteetti sama silloin, kun osakemarkkinat ovat auki tai kiinni. Jos volatiliteetti on saman suuruinen markkinoiden aukiolosta riippumatta, tulisi perjantain ja maanantain välinen osaketuottojen volatiliteetti olla kolme kertaa kahden viikonpäivän välisen volatiliteetin suuruinen. Aihetta tutkineet Fama (1965) ja French (1984) huomasivat, ettei tämä pitänyt paikkaansa. Heidän tulostensa mukaan volatiliteetti on huomattavasti suurempi silloin, kun markkinat ovat auki verrattuna tilanteeseen, kun markkinat ovat suljettu. Näin ollen laskettaessa vuositason volatiliteettia tulisi markkinoiden kiinniolopäivät ohittaa, jolloin volatiliteetti saadaan muutettua vuosittaiseksi arvoksi seuraavasti (Alexander 1995, 7-9):

$$vuositason\ volatiliteetti = 1\ pv\ volatiliteetti * \sqrt{kaupankäyntipäivienlkm}$$

Tätä laskusääntöä kutsutaan ajan neliöjuuri-säännöksi, ja se sisältää oletuksen vakiosuuruisesta volatiliteetista ja päivittäisten tuottojen korreloimattomuudesta.

Laskettaessa historiallista volatiliteettia liukuvan keskiarvon menetelmällä kaikkia havaintoja painotetaan yhtä paljon. Tämä saa aikaan ns. haamuilmiön ('ghost feature'); jo kauan sitten tapahtuneet, volatiliteettia suuresti nostaneet tapahtumat näkyvät yhä, vaikkei lähiaikoina mitään shokkeja ole ollutkaan. Kun kyseisen hyppäyksen aiheuttaja poistuu liukuvan aikajakson piiristä, volatiliteetti putoaa takaisin normaalille tasolle, mutta tällä hyppäykselle alaspäin ei ole markkinoilla mitään perustetta. Vastaavasti juuri äskettäin tapahtuneella shokilla on sama painoarvo volatiliteettia laskettaessa, kuin jos se olisi tapahtunut kuukausi sitten. (Alexander 1995, 9)

EWMA[31] eli eksponentaalisesti painotettu liukuva keskiarvo poistaa edellä mainitut ongelmat painottamalla viimeisimpiä havaintoja enemmän. Mitä uudempi havainto, sitä suurempi painokerroin jolloin vanhat havainnot vaimentuvat vähitellen olemattoman pieniksi, kuten EWMAn kaavasta nähdään:

(11) $$X_t = (1-\lambda)\Sigma_{j=0}^{\infty}\lambda^j X_{t-j}$$

Vaimennuskerroin λ ('decay factor') tulee valita väliltä 0-1 sen mukaan, mikä on aikasarjan keskiarvon muutosnopeus. Toisin sanoen vaimennuskerroin määrää sen, kuinka paljon pienempi vaikutus seuraavalla havainnolla on verrattuna aiempaan. JP Morganin Risk Metricsin arvo λ:lle on 0.97, jolloin ensimmäisen havainnon paino on 1, toisen havainnon 0.97, sitä seuraavan 0.97^2 jne. Sarja jatkuu periaatteessa äärettömyyksiin, mutta havaintojen kertoimilla painottaen saadaan laskettua keskiarvo, sarjan keski-ikä. Jos vaimennuskerroin on 0.97 tulee keski-iäksi noin 33 vuorokautta. (Jauri 1997, 189)

[31] Exponentially Weighted Moving Average.

4.3 Implisiittinen volatiliteetti ja smile-ilmiö

4.3.1 Implisiittinen volatiliteetti

Jos markkinoiden oletetaan toimivan tehokkaasti, option oikeana arvona voidaan pitää markkinahintaa. Syöttämällä tämä hinta Black & Scholes -kaavaan voidaan ratkaista markkinoiden näkemys volatiliteetista. Tämän implisiittisesti lasketun volatiliteetin idean kehittivät Latané ja Rendleman (1976). Implisiittistä volatiliteettia ei voida laskea Black & Scholes -mallista suoraan, vaan se täytyy ratkaista käänteisesti laskemalla eli iteroimalla[32]. Tutkijat ovat yrittäneet löytää suljetussa muodossa olevan ratkaisun, jolla implisiittinen volatiliteetti saataisiin laskettua ilman iterointia. Mallit ovat kuitenkin olleet yleensä epätarkkoja, kun volatiliteettia on laskettu miinus- tai plusoptioille. Corradon ja Millerin (1996) esittämä ratkaisu on suhteellisen tarkka myös muilla kuin tasaoptioilla.

Implisiittisestä volatiliteetista on muodostunut markkinoilla erittäin suosittu tapa ennustaa tulevaa volatiliteettia. Edellisen päivän toteutuneesta optiosta laskettu implisiittinen volatiliteetti antaa suhteellisen hyvän kuvan siitä, mikä on markkinoiden näkemys tulevasta volatiliteetista. Koska eri toteutushintaisilla optioilla on sama voimassaoloaika, niistä laskettujen implisiittisten volatiliteettien tulisi kuvata markkinoiden näkemystä jäljellä olevan ajan volatiliteetista eli olla sama kaikilla optiosopimuksilla. Näin ei kuitenkaan ole, niin kuin seuraavassa kappaleessa esitellään. Eri sopimuksista voidaan kuitenkin laskea painotettu keskiarvo koko markkinoiden volatiliteetin määrittämiseksi. Tutkijat ovat olleet hieman eri mieltä, mitä laskennassa tulisi käyttää painokertoimina. Eräs tällainen painotus voisi olla option herkkyysmittari vega eli option osittaisderivaatta volatiliteetiin suhteen. (Alexander 1995, 5)

4.3.2 Smile-ilmiö optioiden hinnoissa

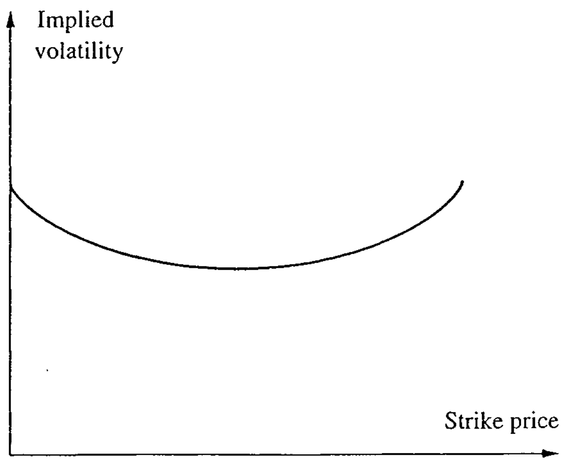
Jos volatiliteetti oletetaan ajassa vakioksi, tulisi kaikilla optioilla, jotka kohdistuvat samaan kohde-etuuteen ja erääntyvät yhtä aikaa olla sama volatiliteetti. Tällöin volatiliteettia määritettäessä toteutushinnalla ei ole vaikutusta, eli volatiliteetti on yhtä suuri kaikille toteutushinnoille, olivatpa ne kuinka kaukana tahansa senhetkisestä osakkeen tai indeksin arvosta. Markkinoilla olevat optioiden hinnat eivät kuitenkaan ole näin. Otetaan optio, jolla on yhtenä päivänä käyty kauppaa

---

[32] Iterointi tarkoittaa, että kokeillaan eri vaihtoehtoja niin kauan, että vastaus löytyy.

usealla toteutushinnalla ja lasketaan näistä toteutuneista hinnoista jokaiselle toteutushinnalle oma volatiliteetti. Kun nämä erisuuruiset implisiittiset volatiliteetit yhdistetään kuvioon, huomataan, että ne muodostavat käyrän, joka on muodoltaan ylöspäin kaartuva kaari. Tästä johtuu ilmiön nimi volatiliteetti-smile eli hymy. Smile-ilmiö on kansainvälisesti huomattu, ja sitä on tutkinut mm. Rubinstein (1994). Dumasin ja Flemmingin (1998, 2063) mukaan nämä erot implisiittisissä volatiliteeteissa ovat vaikutukseltaan taloudellisesti merkittäviä.

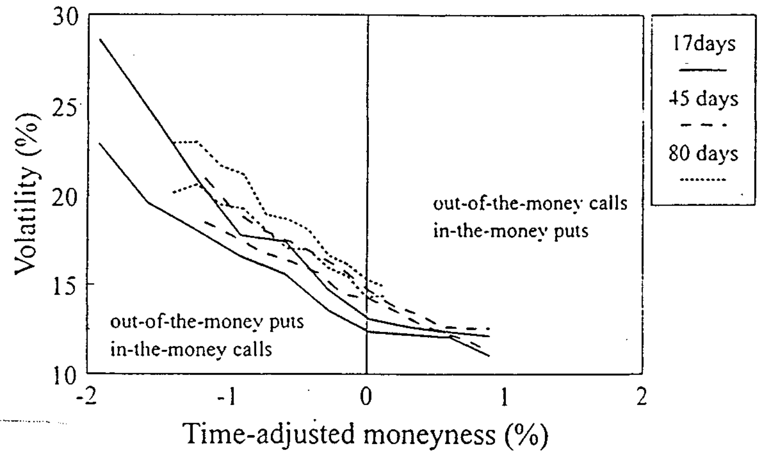
Yleensä kaaren alin kohta eli matalin volatiliteetin arvo on option ollessa tasaoptio, kuten kuviosta 7 nähdään. Volatiliteetin suuruus kasvaa mentäessä miinus- tai plusoption suuntaan eli option toteutushinnan ollessa eri suuri kuin kohde-etuuden arvo. Tämä johtuu Alexanderin (1995, 19) mukaan siitä, että tasaoptiot ovat herkimpiä volatiliteetille, jolloin pienikin muutos volatiliteetissa riittää samansuuruisiin tuotto- tai riskipreemioihin verrattuna plusoptioihin. Hull ja White (1987, 285) puolestaan uskovat smilen aiheutuvan vääristä oletuksista mallissa; hyvin suurten tai pienien tuottojen esiintyminen on yleisempää kuin normaalijakauman mukaan, jolloin miinus- ja plusoptioiden volatiliteetti kasvaa. Smile-ilmiö kuvaa siten heidän mukaansa virheellistä jakaumaoletusta.



Kuvio 7.
Smile-käyrä (lähde: Hull 1997, 503)

Smile-käyrän muoto ei ole symmetrinen. Dumasin ja Flemmingin (1998) empiirinen tutkimus näyttää, että implisiittisten volatiliteettien kuvio onkin pikemmin "sneer" (=virnistys) kuin "smile" (=hymy). Kuviossa 8 on esitetty tämä tilanne kolmen eri voimassaoloajan osto-optioille (S&P 500

-indeksioptioita 1.4.1992). Kunkin parin ylempi viiva perustuu ask-hintaan ja alempi bid-hintaan. Kuviosta 8 näkyy myös kuinka voimassaoloaika vaikuttaa kuvioon; 17 päivän optioiden implisiittinen volatiliteetti on yleensä alhaisempi kuin 45 päivän, mitkä puolestaan ovat 90 päivän optioiden volatiliteettia alhaisempia. Kuviossa 8 näkyvä kaartuminen vasempaan ylänurkkaan eli korkea volatiliteetti out-of-money optioilla[33] havaittiin myös FOX-indeksioptioista lasketuissa volatiliteeteissa. Liitteeseen 3 on koottu implisiittiset volatiliteetit kahdeksalta päivältä. Yksi syy vinoutumiseen vasemmalle Alexanderin (1995, 19) mukaan voi olla, että markkinalaskuja seuraa yleensä suurepi volatiliteetti kuin markkinoiden jyrkkiä nousuja.



Kuvio 8.

Sneer-ilmiö S&P 500 -indeksioptioiden implisiittisissä volatiliteeteissa 1.4.1992

Lähde: (Dumas et al. 1998, 2063)

Black & Scholes -mallissa tulisi alkuperäisoletuksien mukaan käyttää vakiosuuruista historiallista volatiliteettia, joka on todistettu olevan epäkorrekti arvo käytettäväksi malliin. Implisiittisen volatiliteetin paremmuuden historialliseen volatiliteettiin nähden on tutkimuksissaan osoittanut mm. Latané & Rendleman (1976). Implisiittinen volatiliteetti vaihtelee päivästä toiseen, mutta yhden päivän sisällä sen oletetaan olevan sama kaikille eri optioille. Implisiittinen volatiliteetti voi osua hyvinkin tarkkaan tasaoption tapauksessa, mutta sen olettaminen vakiosuuruiseksi kaikille toteutushinnoille voi johtaa suuriinkin hinnoitteluvirheisiin.

[33] Kaukana miinuksella olevilla (deep-out-of-the-money) optioilla on suurin vipuvaikutus, jolloin spekuloijat ovat valmiita maksamaan korkeamman hinnan näistä, sillä niillä on mahdollisuus muuttua ennen eräpäivää voitollisiksi.

Implisiittiseen volatiliteettiin liittyy myös ongelmia; miten se on estimoitu ja kuinka hyvin se voi ennustaa tulevaa. Aihetta testanneiden Beckersin (1981) sekä Caninan ja Figlewskin (1993) tulokset olivat ristiriitaisia. Ei ole siis täysin selvää, ennustaako implisiittinen volatiliteetti todellista tulevaa volatiliteettia kovinkaan hyvin. Empiiriset tutkimukset (esim. Brockman & Chowdhury (1997)) sekä smile -ilmiön olemassaolo puhuvat sen puolesta, ettei implisiittinenkaan volatiliteetti ole korrekti keino eri toteutushintaisia optioita hinnoiteltaessa.

4.4 STOKASTINEN VOLATILITEETTI

4.4.1 Stokastinen volatiliteetti

Sijoittajan kannalta volatiliteetin ennustaminen optioita hinnoiteltaessa on ensiarvoisen tärkeää. Historiallinen volatiliteetti on osoittautunut liian hitaaksi ja jäykäksi tavaksi arvioitaessa tulevaisuuden volatiliteettia. Suuret hyppäykset volatiliteetissa tulevat näkyviin myöhään, ja niiden vaikutus kestää pitkään. Implisiittinen volatiliteetti on suosittu metodi markkinoilla, mutta sekään ei pysty estimoimaan tulevaisuuden arvoja kovin hyvin, minkä puolesta smile-ilmiön olemassaolo puhuu. Tutkijat ovat pyrkineet kehittämään jonkin muun tavan, jolla tulevaa volatiliteettia voitaisiin ennustaa paremmin. Koska volatiliteetin tiedetään vaihtelevan jatkuvasti, yksinkertaisin vaihtoehto on antaa volatiliteetin olla riippuvainen sen omasta historiasta ja vaihdella "saman kaavan" mukaisesti.

Ensimmäisiä optioiden hinnoittelun teoriassa esiintyneitä vaihtelevaa volatiliteettia estimoivia malleja oli Coxin ja Rossin (1976) Constant Elasticity of Variance (eli CEV). Siinä volatiliteetti riippui osakkeen hinnasta korotettuna toiseen potensiin. Heidän malliaan tutkineet[34] kuitenkin huomasivat, ettei tämäkään ratkaisu poistanut Black & Scholes -mallin virhettä. Tuoreempi yritys mallittaa stokastista volatiliteettia on Rubinsteinin (1994) Implied binomial tree.

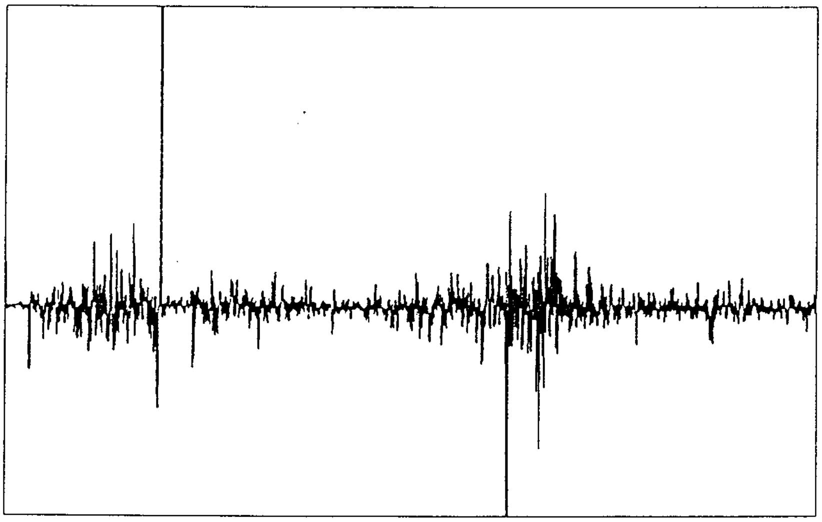
Tässä työssä ei ole käsitelty näitä stokastista volatiliteettia määritteleviä malleja, vaan huomio on kiinnittynyt ARCH- ja GARCH-malleihin.

---

[34] Aihetta tutkinut esim Bates (1994).

4.4.2 ARCH- ja GARCH-mallit

Eräs suosituimmista ja yksinkertaisimmasta tavoista mallittaa vaihtelevaa volatiliteettia on GARCH (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity)-menetelmä. Se on tilastotieteellinen menetelmä, jossa estimoidaan lineaarisen stokastisen volatiliteetin yhtälön kertoimet. Autoregressiivisyys tarkoittaa, että mallissa regressio kohdistuu siihen itseensä. Tämä viittaa varianssin ratkaisumenetelmään GARCH:issa. Heteroskedastisuus menetelmän nimessä puolestaan tarkoittaa muuttuvaa varianssia, joten GARCH:issa kyseessä on ehdollinen muuttuva varianssi. Aikasarjoissa ehdollinen heteroskedastisuus tarkoittaa sitä, että korkean volatiliteetin jaksot kasaantuvat erilleen matalan volatiliteetin kausista, kuten nähdään kuviosta 9. Kuvion 9 tuottojen aikasarjassa on kaksi merkittävää tapahtumaa. Ensin markkinoilla odotetaan uutisia, jotka osoittautuvat hyviksi: markkinat olivat yhä vaihtelevempia, mutta suuri positiivinen tuotto osoittaa, että uutiset olivat hyviä ja volatiliteetti putosi nopeasti alas. Toinen volatiliteetin kasaantuminen näkyy odottamattomien huonojen uutisten ja niitä seuranneen suuren negatiivisen tuoton jälkeen. (Alexander 1998, 133)



Kuvio 9. Ehdollisesti heteroskedastinen aikasarja ja volatiliteetin kasaantuminen
(lähde: Alexander 1998, 133)

Ensimmäisen ARCH-mallin esitti Engle (1982), josta eräs hänen oppilaistaan nimeltään Bollerslev (1986) yleisti mallin GARCH:iksi. ARCH-mallissa lasketaan kohde-etuuden tuotto samoin kuin edellä on jo esitetty, eli logaritmina tämän ja edellisen päivän osamäärästä. ARCH:issa tuottoa (y_t) selittää kaksi tekijää: vakio (α) sekä virhetermi ε_t. Virhetermi on toisin sanoen jokin poikkeus tai shokki vakiotasosta, jonka uuden tiedon saapuminen markkinoille aiheuttaa. Jos ε_t on positiivinen, markkinoille on saapunut hyviä uutisia ja hinnoissa on tapahtunut odottamaton nousu. Vastaavasti negatiivinen ε_t tarkoittaa huonoja uutisia ja hintojen odottamatonta laskua. Lisäksi ε_t:n suuruus kuvastaa uuden tiedon merkittävyyttä, sillä korkea ε_t:n arvo aiheuttaa suuren muutoksen hinnassa. (Engle&Ng 1993, 1751).

Virhetermi on normaalijakautunut odotusarvolla nolla ja varianssilla h_t. Virhetermin varianssia (h_t) puolestaan selittää vakio (β_0) sekä virhetermin viiveen neliö eli edellisen periodin virhetermi toiseen potenssiin. Toisin sanoen ennustettava volatiliteetti on riippuvainen menneisyyden tiedoista (virhetermistä). ARCH-malli kaavamuodossa on:

(12)
$$y_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$$
$$h_t = \beta_0 + \beta_1 * \varepsilon_{t-1}^2$$

Bollerslevin GARCH-mallissa tuotot on selitetty samoin kuin ARCH:issa, ero mallien välillä on virhetermin varianssin kaavassa. GARCH-mallissa tulevaan varianssiin vaikuttavat kaksi tekijää; stokastisessa prosessissa itsessään tapahtuneet yllätykset (ennustusvirheet) sekä edeltävä varianssi. GARCH(1,1)[35]-malli voidaan täten kirjoittaa muotoon:

(13)
$$y_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$$
$$h_t = \beta_0 + \beta_1 * \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 * h_{t-1}$$

Mallien vakiot α_0 ja β_0 sekä kertoimet β_1 ja β_2 voidaan estimoida historiasta suurimman uskottavuuden ('maximum likelihood') menetelmällä[36]. Kerroin β_1 ilmaisee, kuinka voimakkaasti edellinen ennustevirhe eli yllätyksen viive vaikuttaa seuraavaan varianssiin. Eli, jos β_1 on nolla, ennustevirheellä ei ole mitään vaikutusta. Kerroin β_2 määrittää puolestaan edellisen periodin varianssin vaikutuksen nykyhetkeen. Summa β_1 ja β_2 kuvaa puolestaan, kuinka kauan tapahtuneet häiriöt vaikuttavat tulevaan varianssiin. Käytännössä summa on arvoltaan lähellä yhtä. Jos summa

[35] GARCH(1,1) tarkoittaa, että mukana on vain 1 viive sekä virhetermin neliön että edellisen varianssin osalta. Tämän on katsottu olevan riittävä, vaikkakin mukana voisi olla viiveitä myös pidemmältä ajalta.

[36] Maximum likelihood estimoinnin (MLE) tarkoittaa, että valitaan estimaatit parametreista, jotka maksimoivat datan todennäköisyyden tietyn jakaumaoletuksen vallitessa.

on tasan yksi, volatiliteettiprosessissa ilmenee shokkien vastustusta enemmän kuin volatiliteetin taipumusta palata takaisin keskiarvoonsa ("mean reversion"). (Bookstaber 1985, 130)

Kerroin β_0 määrittää volatiliteetin pitkän aikavälin keskiarvotason. Toisin kuin kertoimilla β_1 ja β_2, β_0:n arvo on herkkä kertoimien estimoinnissa käytetyn aineiston pituuteen. Jos estimoinnissa käytetään pitkää ja harvinaisen suuria hyppäyksiä sisältävää aineistoa, on myös β_0:n arvo suuri.

GARCH-malleilla on myös joitain puutteita ja mallia kyseenalaistavia tekijöitä. Ehdollinen varianssi ei mallin perusmuodossa pysty reagoimaan epäsymmetrisesti tuottojen laskuihin ja nousuihin. Etenkin osakemarkkinoilla on havaittu kyseinen ominaisuus, jossa osakekurssien laskua seuraa yleensä korkeampi volatiliteetti kuin niiden samansuuruista nousua, eli huonot uutiset (negatiivinen ε_t) aiheuttavat suuremman volatiliteetin kuin hyvät uutiset (positiivinen ε_t)[37]. Lisäksi GARCH-mallin heikkous on, että mallin parametrien pakottaminen väkisin johonkin muotoon voi vääristää estimoituja kertoimia. (Harvey 1987, 280)

4.4.3 Erikoistapauksia GARCH-malleista

Bollerslevin GARCH-mallin on osoitettu olevan riittävän yleistetty menetelmä selvittämään suurimman osan ajassa muuttuvan varianssin käyttäytymisestä ja siitä on tullut suositumpi kuin alkuperäisestä ARCH-mallista. Viime vuosina aihetta on viety vielä eteenpäin kehittämällä erikoistapauksia GARCH:ista, joista muutama on esitelty tässä luvussa. Eroina niiden välillä on, miten virhetermin varianssi on määritelty ja mitä jakaumaa sen oletetaan noudattavan. (Alexander 1995, 6-8)

Edellä kerrottiin, että kertoimien β_1 ja β_2 summa on yleensä lähellä yhtä. Mikäli summa on tasan yksi, kyseessä on integroitunut GARCH. Tällöin kertoimet voidaan kirjoittaa yhden muuttujan mukaisesti ja varianssi saa muodon, joka on samankaltainen EWMA-volatiliteettimallin kanssa:

(14) $$h_t = \beta_0 + (1-\lambda)\,\varepsilon^2_{t-1} + \lambda h_{t-1}, \quad \text{missä } 0 < \lambda < 1$$

---

[37] Tämän vipuvaikutuksen ('leverage effect') eli epäsymmetrisyyden havaitsi Black (1976).

Normaali GARCH(1,1) ei aina pysty ottamaan täysin mukaan havaittuja tuottojen vinoutta ja huipukkuutta. Huipukkuusominaisuus saadaan mukaan käyttämällä virhetermin jakaumana normaalijakauman sijaan t-jakaumaa ja vinous puolestaan lisäämällä varianssin yhtälöön uusi muuttuja. Näin saadaan epäsymmetrinen GARCH-malli eli AGARCH (Engle & Ng , 1993):

(15) $$h_t = \beta_0 + \beta_1(\varepsilon_{t-1} - \zeta)^2 + \beta_2 h_{t-1}$$

AGARCH-mallissa negatiiviset shokit tuottoihin (eli kun $\varepsilon_{t-1} < 0$) aiheuttavat toiseen potenssiin korotettuna suuremman vaikutuksen varianssiin kuin positiiviset shokit. Tämä on yhtäpitävää markkinoilla havaitun ilmiön kanssa, jossa markkinalaskua seuraa korkeampi volatiliteetti kuin markkinoiden nousua. (Alexander 1995, 10)

Toinen tapa huomioida volatiliteetin epäsymmetrisyys on Nelsonin (1991) eksponentaalinen GARCH eli EGARCH. Eroina tavalliseen GARCH:iin on, että epäsymmetrisyys on huomioitu ja suurilla uutisilla on enemmän vaikutusta kuin mitä standardi GARCH-mallissa. EGARCH-malli on:

(16) $$\log(h_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(h_{t-1}) - \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \alpha\left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{2/\pi}\right]$$

Mallissa epäsymmetrisyys tulee esiin kolmannessa termissä. Kerroin γ on yleensä negatiivinen, jolloin positiiviset poikkeamat tuotoista (ε_{t-1}) aiheuttavat matalamman volatiliteetin kuin negatiiviset shokit.

Epälineaarinen ja epäsymmetrinen GARCH eli NGARCH on muotoa :

(17) $$h_t = \beta_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \gamma\sqrt{h_{t-1}})^2$$

4.4.4 GARCH-mallien testaus

GARCH-prosessin estimoinnin jälkeen on syytä testata mallin soveltuvuus aineistolle. Tähän tarvitaan standardoituja jäännöstermejä eli virhetermin ε_t ja sen keskihajonnan □ h_t osamäärää. Jos GARCH-malli on spesifioitu oikein, standardoidut jäännöstermit ovat toisistaan riippumattomia ja identtisesti jakautuneita[38]. Ljung-Box -testisuureen arvo voidaan mitata aineiston havaintojen neliöille ja standardoiduille jäännöstermeille. Ratkaistaessa parhaiten aineistoon istuvaa GARCH-mallia tai parhaiten sopivia GARCH-parametreja, ainoa tapa on kokeilla eri vaihtoehtoja ja tarkastella Ljung-Box -arvojen tilastollista merkitsevyyttä. (Waltsham 1998, 161)

GARCH-mallien sopivuutta volatiliteetti-estimaattoreiksi on tutkittu laajasti. Esimerkiksi Bollerslevin et al. tutkimuksessa (1992) viitattiin yli 200 GARCH-malleja koskevaan tutkimukseen. Mielenkiinnon kohteena on ollut myös vertailu implisiittiseen volatiliteettiin. Day ja Lewis (1992) sovelsivat implisiittistä sekä GARCH-volatiliteettia optioiden hinnoittelumallissa ja huomasivat, että molemmat metodit onnistuivat ennustamaan S&P100 -indeksin volatiliteettia; implisiittinen volatiliteetti ei pysty kuitenkaan taltioimaan ennustettavaa osaa tulevaisuuden volatiliteetista yhtä hyvin kuin GARCH-prosessit. Valuuttamarkkinoilla aihetta tutkinut Jorion (1995) sai tulokseksen, että implisiittinen volatiliteetti onnistui GARCH-mallia paremmin tulevaisuuden ennustamisessa.

GARCH-malleja ja niiden toimivuutta on vertailtu myös mallien eri versioiden kesken. Engle ja Ng (1993) testasivat eri GARCH-mallien volatiliteetin kykyä reagoida uutisiin eli ε_t:n vaikutukseen. Heidän tutkimuksensa osoitti, että parhaiten tässä onnistui GJR-malli (Glosten, Jagannathan ja Runkle 1998), joka on miltei identtinen GARCH(1,1)-mallin kanssa; erona on epäsymmetrisyys-kerroin γ, jolla painotetaan ε_{t-1}:tä ε_t:n ollessa negatiivinen. Alexander (1997) puolestaan toteaa vertaillessaan eri GARCH-versioita, että tutkittaessa valuuttamarkkinoiden liikkeitä, tähän sopii parhaiten yksinkertaisin GARCH(1,1)-malli. Korko ja osakemarkkinoita mallittaa hänen mukaansa parhaiten epäsymmetrinen AGARCH.

4.5 Momentit ja tuottojakauma

Yksi suurimmista virheen aiheuttajista Black & Scholes -mallissa on oletus osakkeiden tuottojen kuvauksesta. Oletettu geometrinen Brownin liikehän tarkoitti vakiosuuruista volatiliteettia ja lognormaalia hintojen jakaumaa, joita empiiriset tutkimukset eivät tue. Edellä on käsitelty

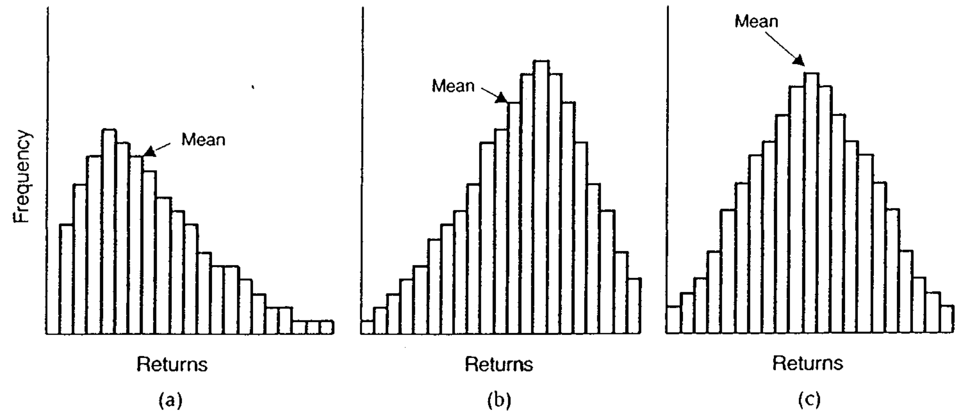
[38] Tämän yleinen merkintä on IID eli independent and identically distributed.

volatiliteettia ja tässä luvussa esitellään volatiliteettiin ja optioiden hinnoitteluun läheisesti liittyvät tuottojakauman momentit ja jakauman muoto.

4.5.1 Jakauman tunnusluvut eli momentit

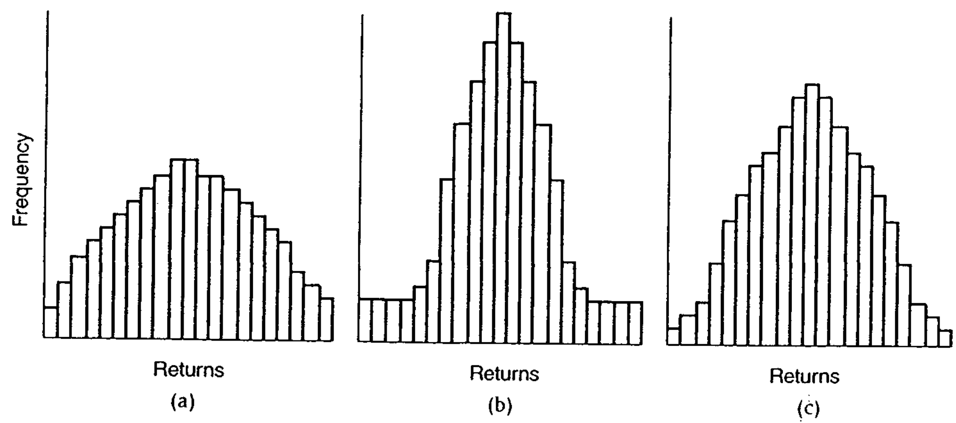
Osakkeen tuotot vaihtelevat paljon. Jos muuttujia (eri tuottoarvoja) on tarpeeksi, niitä voidaan luokitella sen mukaan, kuinka usein ne esiintyvät tietyillä arvoväleillä. Luokittelu esiintymistiheyksiin muodostaa todennäköisyysjakauman. Tunnetuin jakauma on normaalijakauma, jossa eniten arvoja on muuttujien keskiarvolla ja jakauman kuvaaja on kellonmuotoinen. Satunnaisilmiöiden luonnetta kuvaavat todennäköisyysjakaumat voivat saada kuitenkin millaisia muotoja tahansa, ja jotta jakaumia voidaan erottaa toisistaan, tarvitaan niiden tunnuslukuja eli momentteja. Momentit määrittävät siis jakauman muodon ja toimivat usein myös suoraan tiheysfunktion määrittävinä parametreina. (Jokivuolle 1990, 47-49)

Tuottojen todennäköisyysjakauman ensimmäinen momentti on odotusarvo eli havaittujen tuottojen keskiarvo. Se kertoo jakauman paikan X- eli tuottoakselilla. Toinen momentti on varianssi, joka ilmaisee miten paljon tuotot heilahtelevat ja kuvaa näin, kuinka laajalla alalla havainnot ovat keskiarvosta. Kolmas jakauman momentti kuvaa jakauman vinoutta eli kuinka symmetrisesti havainnot ovat jakautuneet. Normaalijakaumassa vinousarvo on nolla ja havainnot ovat jakautuneet tasaisesti molemmille puolille, ja tuottojen keskiarvo on jakauman huippukohdassa (kuvio 10c). Positiivisen vinouden tapauksessa jakauman oikeanpuolinen häntä on pitkä. Tällöin tuottojen keskiarvo jää jakauman huipun oikealle puolelle, koska oikean puolen muutamat hyvin korkeat havainnot nostavat keskiarvoa (kuvio 10a). Negatiivinen vinous aiheuttaa puolestaan pitkän vasemman hännän, jolloin suurin osa havainnoista on yli keskiarvon, mutta muutamat erittäin pienet havainnot laskevat keskiarvon paikan jakauman huipun vasemmalle puolelle (kuvio 10b). (Watsham 1998, 54-55)



Kuvio 10 a. Positiivisesti vino, b. negatiivisesti vino ja c. normaalijakautunut tuottojakauma (lähde: Watsham 1998, 55)

Neljäs jakauman momentti on huipukkuus, joka kuvaa, kuinka suuri osa havainnoista on keskiarvoa lähellä. Normaalijakaumaan (kuvio 11c) verrattuna huipukas jakauma on kapeampi, ja sillä on hyvin pieniä sekä suuria havaintoja enemmän eli paksummat hännät ("fat-tailed"), kuten kuviosta 11b nähdään. Huipukkuutta esiintyy sellaisilla tuottosarjoilla, joissa tuotoissa esiintyy ajoittaisia hyppäyksiä, joita aiheuttaa esimerkiksi epäjatkuva kaupankäynti, kun markkinat ovat suljettuina yöt ja viikonloput. Kun markkinoiden ollessa kiinni julkaistaan uutta hintoihin vaikuttavaa tietoa, se aiheuttaa markkinoiden auetessa hyppäyksen edellisen sulkemishinnan ja avaushinnan välille. Nämä hyppäykset puolestaan aiheuttavat suurten negatiivisten tai positiivisten tuottojen korkeampaa esiintymistiheyttä verrattuna jatkuvan kaupankäynnin tilanteeseen. Matalassa jakaumassa havainnot ovat jakautuneet tasaisemmin kuin normaalijakaumassa (kuvio 11a). (Watsham 1998, 56)



Kuvio 11a. Matala ('mesokurtic') b huipukas ('leptokurtic') ja c normaalijakautunut ('platykurtic') tuottojakauma (lähde: Watsham 1998, 56)

4.4.2 Empiiriset havainnot jakaumien todellisesta muodosta

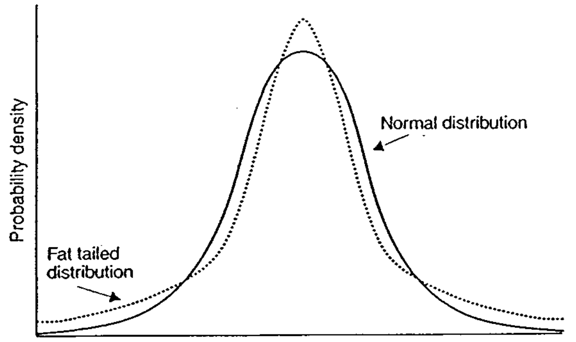
Monet rahoitusteoriat, kuten Capital Asset Pricing (CAPM) ja optioiden hinnoitteluteoria (Black & Scholes) perustuvat oletukseen, että osakkeiden tuotot olisi jakautunut normaalisti. Useat tutkimukset ovat paljastaneet, ettei tämä oletus ole reaalimaailmassa luotettava. Peiró (1994) tutki kuutta maailman suurinta osakemarkkinaa ja niiden tuottojen (logaritmimuutos edellisestä päivästä) jakaumia. Aineistona hänellä oli New Yorkin, Tokion, Lontoon, Frankfurtin, Pariisin ja Madridin osakemarkkinoita kuvaavat indeksit ajalta 28.12.87 - 31.12.1992. Taulukossa 5 on esitetty näiden kuuden tuottojen jakauman tunnusluvut.

TAULUKKO 5
Kuuden suurimman pörssin tuottojen jakaumien tunnusluvut

	New York	Tokio	Lontoo	Frankfurt	Pariisi	Madrid
havaintoja	1228	1180	1237	1206	1193	1186
keskiarvo(%)	0.037	-0.019	0.031	0.012	0.038	-0.012
keskihajonta	0.0093	0.0145	0.0100	0.0126	0.0104	0.0130
vinous	-0.805	0.549	-0.016	-1.1566	-0.272	-0.458
huipukkuus	7.153	7.371	4.093	20.855	4.456	10.379

lähde: Peiró 1994, 433

Jos osakeindeksien tuotot olisivat normaalijakautuneet, olisi niiden vinousarvo 0 ja huipukkuus noin 3. Kuten taulukon 6 todellisia tuottoja kuvaavista luvuista voidaan nähdä, eivät ne vastaa normaalijakauman tunnuslukuja. Tokiota lukuun ottamatta kaikkien pörssien osakkeiden tuotot asettuvat nollan positiiviselle puolelle ja ovat negatiivisesti vinoja, Tokion jakauma on päinvastainen. Kaikkien tuottojakauma on selvästi normaalijakaumaa huipukkaampi, eli neljännen momentin arvo on suurempi kuin kolme. Peirón tutkimuksen tulos oli, että kaikissa tapauksissa oletus normaalista jakaumasta hylätään ja vaihtoehtoisista jakaumista parhaiten markkinoihin sopi student's t -jakauma[39]. Tämä on yhtäpitävä myös Johnsonin ja Shannon kanssa, joiden yhteenveto jakaumien muodosta on, että niillä on " paksummat hännät" (fat-tailed) ja ne ovat vinoutuneita, eli toisin sanoen vinous ja huipukkuusarvot poikkeavat normaalijakauman tunnusluvuista. Kuviossa 12 on havainnollistettu normaalijakaman sekä huipukkaan ja paksuhäntäisen jakauman eroa.



Kuvio 12. Normaalijakauma sekä huipukas ja paksuhäntäinen jakauma
(lähde: Watsham 1998,)

Myös Suomen markkinoita on tutkittu (HEX 1999, 6). Vuoden 1997 aineiston perusteella saatiin tuottojen keskiarvoksi 0.108, keskihajonnaksi 0.0147, vinousarvoksi -0.67 sekä huipukkuusarvoksi 5.38. Osakkeiden tuottojen jakaumat näyttävät poikkeavan selvästi normaalijakauman tunnusluvuista ympäri maailmaa, eikä Suomenkaan aineisto tue oletusta normaalijakautuneista osaketuotoista. Tämä havainto toimii siten osaltaan perusteluna stokastisen volatiliteetin huomioon ottamiseen osaketuottoihin perustuvissa rahoitusmarkkinoiden laskentakaavoissa.

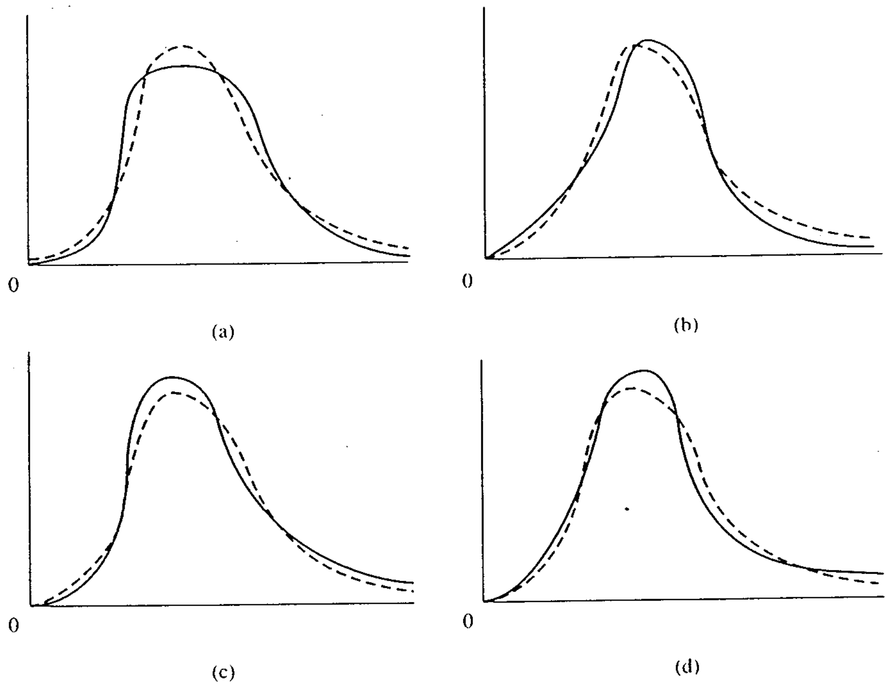
Tuottojakauman muodolla ja volatiliteetti -smilellä on osoitettu olevan selvä yhteys. Volatiliteetti-hymyn vallitessa markkinahinnoista johdetuista tuottojen todennäköisyysjakaumista voidaan havaita, että suurten muutosten esiintyminen tai paikallaan pysyminen on todennäköisempää kuin mitä normaalijakauma väittää. Tämä on yhdenmukainen esitettyjen tutkimusten kanssa, sillä sekä havaitut että implisiittisten volatiliteettien mukaiset jakaumat ovat paksuhäntäisiä ja huipukkaita. (Alexander 1998, 238)

[39] Student's t jakauma on normaalijakaumaan verrattuna huipukkaampi.

Vaikka tutkijoiden kesken ei ole erimielisyyttä siitä, etteikö todellinen jakauma poikkeaisi normaalijakaumasta, tämän syystä ei ole päästy yksimielisyyteen. Yksi mahdollinen selitys on, että havaitut tuotot tulevat useista normaalijakaumista eli havaittu data koostuu useista normaalijakautuneista tuotoista, joilla on eri varianssit. Näiden jakaumien yhdistäminen tuottaa siten paksuhäntäisemmän jakauman. (Watsham 1998, 215-216)

4.5.3 Tuottojakauma ja optioiden hinnat

Optioita hinnoiteltaessa jakauman muodolla on suuri vaikutus option arvoon. Kuviossa 13 on neljä erimuotoista osaketuottojen jakaumaa, joilla kaikilla on sama keskiarvo ja volatiliteetti. Normaalijakauman on kuvattu katkoviivalla ja poikkeavat jakaumat kiinteällä viivalla. Kuviossa 13a jakauman molemmat hännät (jakauman "päädyt") ovat ohuemmat kuin lognormaalissa jakaumassa. Kuviossa 13d tilanne on päinvastainen, eli todellisen jakauman hännät ovat paksumpia kuin lognormalin jakauman. Kuvioissa 13b ja 13c toinen häntä on ohuempi ja toinen paksumpi.



Kuviot 13 a-d Normaalijakaumasta poikkeavia jakaumia
(lähde: Hull 1997, 492)

Nyrkkisääntö on, että mitä paksumpi kohta, sitä suurempi on Black & Scholes -arvo optiolle. Olkoon esimerkiksi kyseessä osto-optio, joka on selvästi miinusoptio, on sillä positiivista arvoa vain jos alla oleva osakkeen hinta nousee riittävästi. Tällöin olemme kiinnostuneet jakauman oikeasta laidasta. Kun tämän option hinnoitteluun käytetään Black & Scholes -kaavaa ja sen olettamaa lognormaalia jakaumaa, on hinta liian alhainen kuvioiden 13c ja 13d mukaan (todellisen jakauman hännät paksumpia kuin normaalijakauman), ja liian korkea kuvioiden 13a ja 13b mukaan (todellisen jakauman hännät kapeammat kuin normaalijakauman). Vastaavasti plussalla oleva osto-optio on riippuvainen jakauman vasemmanpuolisen hännän muodosta. Taulukossa 6 on yhteenveto jakauman muodon vaikutuksesta Black & Scholes -mallin tekemiin hinnoitteluvirheisiin. (Hull 1997, 492-494)

TAULUKKO 6

Osaketuottojen todellisen jakauman vaikutus Black & Scholes -mallin tekemiin hinnoitteluvirheisiin

Jakauma	Ominaisuudet	Virheet
Kuvio 13a	Molemmat hännät ohuempia	Black & Scholes ylihinnoittelee miinus- ja plus osto- sekä myyntioptiot
Kuvio 13b	Vasen häntä paksumpi, oikea häntä ohuempi	Black & Scholes ylihinnoittelee osto-miinusoptiot ja myynti-plusoptiot sekä alihinnoittelee miinus-myyntioptiot ja plus-osto-optiot
Kuvio 13c	Vasen häntä ohuempi, oikea paksumpi	Black & Scholes ylihinnoittelee miinus-myyntioptiot ja plus-osto-optiot sekä alihinnoittelee plus-myyntioptiot ja miinus-osto-optiot
Kuvio 13d	Molemmat hännät paksumpia	Black & Scholes alihinnoittelee miinus ja plus osto- ja myyntioptiot

Lähde: Hull 1997, 494

5 HINNOITTELUMALLIEN TESTAUS

5.1 Optioiden hinnoittelumallien lähtökohdat

Hinnoittelumallien arvioinnissa lähdetään usein liikkeelle tehdyistä oletuksista ja rakenteen loogisuudesta. Toinen tapa arvioida mallia on verrata sen tuottamia hintoja markkinahintoihin. Tämä on ollut suosituin keino akateemisissa tutkimuksissa. Markkinahintoihin voi kuitenkin liittyä pari ongelmakohtaa. Ensiksi markkinahistoria voi olla vähäistä tai epäluotettavaa. Toiseksi, ei ole mitään varmaa syytä olettaa, että markkinoilla oleva hinta olisi täysin oikea. Ongelma on, ettei voida tietää, johtuuko hinnoitteluvirhe väärin arvioidusta volatiliteetista vai epätäydellisistä markkinoista (Engle et al. 1993, 14). Kuitenkin mallin teoreettisen hinnan ja markkinahinnan välinen ero voi mahdollistaa sijoittajalle arbitraasivoittoja. Jos mallin hinta on matalampi kuin hinta markkinoilla, hinnoittelumalli voi olla oikeassa, ja sijoittaja voi tehdä arbitraasivoittoa myymällä ylihinnoitellun option. Kolmas vaihtoehto optioiden hinnoittelumallien arviointiin saadaan optioteoriasta. Tässä lähestymistavassa nähdään option hinta suojausstrategian kustannuksena, jolloin tässä menetelmässä katsotaan, vastaako mallin hinta sitä kohdeoption tuottoa, joka saadaan dynaamisella suojauksella.[40] (Bookstaber 1985, 159-165)

Testattaessa Black & Scholes -mallia tai jotain toista mallia ilmenee Hullin (1997, 508) mukaan useita ongelmia. Ensinnäkin tilastollisen hypoteesin optioiden hinnoittelusta on oltava yhdistetty hypoteesi: 1□ optioiden hinnoittelumalli on korrekti ja 2□ markkinat ovat tehokkaat. Jos hypoteesi hylätään, se voi tarkoittaa, että hypoteesi 1□ ei pidä paikkansa, hypoteesi 2□ ei pidä paikkansa tai kumpikaan hypoteesi ei pidä paikkaansa. Ei ole mitään keinoa päätellä, mikä näistä kolmesta mahdollisesta asiantilasta on voimassa. Toinen ongelma muodostuu volatiliteetista ja sen estimoinnista. Volatiliteetti ei ole samalla tavalla havainnoitava parametri kuin esimerkiksi voimassaoloaika tai toteutushinta; volatiliteetti täytyy arvioida jollain tavoin. Tällöin mallin testauksen kulmakiveksi nousee volatiliteetin estimointi. Kolmas ongelmakohta on osakkeen hinnan ja option hinnan samanaikaisuus. Hinnoittelumalleja tutkittaessa tulisi varmistaa, että mallissa tarvittava markkinoilta otettava tieto olisi synkronista. Epäsynkronisuus on yleistä etenkin

[40] Dynaamisella suojauksella tarkoitetaan jatkuvasti option deltan perusteella mukautettua positiota.

silloin, kun optiomarkkinat ovat ohuet. Option closing-hinta voi olla huomattavasti aikaisemmin päivällä syntynyt kuin aktiivisesti kauppakäydyn osakkeen closing-hinta juuri päivän lopulta. (Watsham 1998, 213)

Rahoitusinstrumentteja hinnoiteltaessa käytetyllä hinnoittelukaavalla on suuri merkitys. Väärin käytettynä hinnoittelumalli muodostaa itsessään jo merkittävän riskin. Optioiden kohdalla malliriski voidaan määritellä mahdolliseksi tappioksi, joka johtuu tietyn hinnoittelumallin käytöstä. Tappion syy voi olla (Dehapiot & Murphy 1997, 108):

a. löydetään paremmin hintaa kuvaava hinnoittelumalli ja portfolion arvo joudutaan sopeuttamaan realistisemmalle tasolle,
b. mallin mukaan muodostettu suojauspositio ei tuota haluttua tulosta.

Edellä esitettyyn mallin korrektia muotoa koskevaan hypoteesiin liittyy myös malliriski. Hinnoittelumallien virheiden lähteet voidaan jakaa seuraaviin ryhmiin:

· mallin taustalla oleva teoria ja oletukset
· malliin syötettävä data
· mallin käyttötarkoitus

Virheet ylläolevissa tekijöissä johtavat mallin tulosten virheellisyyteen. Hinnoittelumallien teoria ja oletukset eivät välttämättä koskaan ole täysin oikein, sillä reaalimaailmaa on vaikea kuvata täsmällisesti matemaattisin lainalaisuuksin. Poikkeamat todellisuudet on kuitenkin tärkeä tiedostaa, jotta niihin ja niiden vaikutuksiin mallin tuloksissa osataan suhtautua oikein. Toinen virhemahdollisuus löytyy tietojen syötössä malliin. Vaikka käytettävä hinnoittelumalli olisikin korrekti, voi data olla epätarkkaa tai virheellistä. Myös datan syöttövaiheessa voi tapahtua "näpyttelyvirheitä", jolloin toteutuu "garbage in - garbage out" eli myös tulokset ovat virheellisiä. Kolmas virhelähde voi olla väärässä tarkoituksessa käytetty malli, eli käytetään instrumentille huonosti soveltuvaa mallia. Tämä virhe voidaan tehdä helposti, sillä optioille on kehitelty vuosien varrella lukuisia versioita hinnoittelumalleista.

Mahdolliset virhetekijät on huomioitava aina ja hinnoittelumallin antamia tuloksia on analysoitava kriittisesti mahdollisten virhetekijöiden sekä myös mallin tekemien oletusten varjossa.

Tähän työhön on hinnoittelumallien tutkimiseen valittu menetelmä, jossa markkinahintoihin verrataan kahdella eri hinnoittelumallilla tuotettuja teoreettisia hintoja. Menetelmä tuntuu mielekkäimmältä, koska se on intuitiivisesti houkuttelevin ja sen tulokset ovat helposti ymmärrettäviä sekä käytännönläheisempiä kuin esimerkiksi vain hinnoittelumallien rakennetta tutkittaessa.

5.2 Aineisto

5.2.1 FOX-osakeindeksi

Osakeindeksien tarkoitus on mitata osakemarkkinoiden kurssimuutoksia. Indeksin muodostavien osakkeiden hinnanmuutosten on siten kuvattava riittävän tarkasti koko osakemarkkinoiden hinnan vaihteluja. HEX:in kaupallinen osakeindeksi on FOX, jonka muodostavat pörssin 25 eniten vaihdettua osakesarjaa. Kunkin osakesarjan paino määräytyy sen pörssiarvon perusteella. Jotta yksittäisellä osakkeella ei olisi liian suurta vaikutusta indeksiin, on yhden yhtiön osuus indeksistä rajoitettu 20 prosenttiin. Osuudet tarkistetaan neljästi vuodessa, ja uudet osakekorit julkaistaan helmi- ja elokuun alussa.

Helsingin pörssin seuratuin indeksi on HEX-yleisindeksi. FOX-indeksi seurailee hyvin tarkkaan HEX:in kehitystä ja luo näin hyvän pohjan koko markkinoita kuvaavaksi johdannaistuotteiden kohteeksi. Indeksien hyvin samankaltaista kehitystä kuvaa niiden välinen korrelaatiokerroin, joka on ollut hyvin korkea, vuonna 1997 se oli 0.93.

FOX-indeksi on kohde-etuutena sekä indeksioptioille että indeksitermiineille. Indeksitermiiniä noteerataan Helsingin Arvopaperipörssissä sekä lyhyenä että pitkänä sopimuksen. Markkinoilla on jatkuvasti kaksi eripituista termiinisopimusta kaupan, joiden jäljellä olevien voimassaoloaikojen erotus on kaksi kuukautta. Myös indeksioptioita on tarjolla voimassaoloajaltaan kahden pituisia. Saman pituisia optioita on yleensä neljästä kuuteen kappaletta, niiden erona on option toteutushinta. Kun uusi optio avataan, asetetaan yksi optio toteutushinnaltaan mahdollisimman lähelle sen hetken FOX-indeksin arvoa ja vähintään kaksi optiota sen molemmin puolin. FOX-indeksin ollessa yli 300, on toteutushinnat porrastettu 20 pisteen välein ja indeksin olleessa yli 900 on porrastus 30 pisteen välein.

Sekä FOX-indeksioptiot että -termiinit erääntyvät aina erääntymiskuukautensa neljäntenä torstaina tai tämän ollessa muu kuin pörssipäivä, sopimus erääntyy edeltävänä pörssipäivänä. Uusien sarjojen noteeraus alkaa seuraavana pörssipäivänä. Koska kyseessä on eurooppalainen optiotyyppi, optioiden toteutus tapahtuu automaattisesti nettoarvon tilityksenä[41]. Indeksioptiot ja -termiinit eivät missään vaiheessa oikeuta indeksin muodostavien osakkeiden omistusoikeuteen. (HEX 1998, 14-15)

5.2.2 Käytetty aineisto

Testattavana aineistona tutkimuksessa oli Helsingin johdannais- ja arvopaperipörssi HEX:in keräämää informaatiota FOX-indeksin johdannaiskaupasta. Tämä markkinatieto on vapaasti kenen tahansa hankittavissa. Tässä työssä käytettiin volatiliteetti smile-esimerkkien laskemiseen tiettyjen optiosarjojen osto- ja myyntitarjoukset (bid ja ask) sekä päättymishinta (close). GARCH-mallinnuksessa tarvittiin sekä FOX-indeksin arvoja että korkodataa ajalta 1994-1998.

Testattavaksi aineistoksi valittiin 4 optiosarjaa: Huhtikuussa 1996 erääntynyt FOXD-sarja, helmikuussa 1997 erääntynyt FOXB-sarja, huhtikuussa 1997 erääntynyt FOXD-sarja sekä joulukuussa 1997 erääntynyt FOXL-sarja. Teoreettisten hintojen laskemiseen tarvittiin FOX-indeksin arvojen lisäksi riskitöntä korkoa edustava 3 kk Helibor-korko. Hinnoittelumalleissa tarkoitetaan korolla jatkuva-aikaista korkoa, jonka vuoksi aineiston Helibor-korko oli muutettava diskreetistä jatkuva-aikaiseksi. Tämä muutos tehtiin kaavalla

(18) $$\frac{365}{d} * \ln(1 + \frac{d}{365} * R)$$, kun R on d päivän korko (d<365).

Korkojen stokastisuudesta on ollut näyttöä myös tutkimuksissa (mm. Rindell 1993), mutta tähän ongelmaan ei haluttu puuttua. Tutkimusongelmaa rajatessa on hyvä valita selvityksen kohteeksi ainoastaan yksi vaikuttava tekijä, jolloin vältetään ongelmat yhteisvaikutusten tulkinnasta. Koska stokastisen volatiliteetin vaikutus optioiden hinnoittelussa on huomattavasti stokastisia korkoja

[41] Nettoarvon tilityksellä tarkoitetaan optioilla päättymispäivän indeksiarvon ja toteutushinnan erotusta ja termiineillä indeksin ja termiinin sopimushinnan välistä erotusta.

suurempi, tähän työhön valittiin tarkasteltavaksi nimenomaan ja ainoastaan volatiliteetti.

Lisäksi koron tulisi olla maturiteetiltaan sama kuin option voimassaoloajan, mutta myös tässä kohdin on työssä joustettu. Syynä on, että kolmen kuukauden (optiot voimassaoloajoiltaan n. 2 kuukautta) Heliborin katsottiin olevan riittävän tarkka, etenkin kun koronmuutokset ovat hyvin vähäisiä ja koron merkitys option hintaa laskettaessa on erittäin pieni.

Aineistossa pienenä ongelmana oli eräiden optiosarjojen kaupankäynnin vähyys. Toisaalta esimerkiksi Nandi (1996, 4) on todennut, ettei markkinoiden volyymillä näytä olevan taloudellista merkitystä hinnoittelumtalleja testattaessa. Myös Suomen optiomarkkinoiden rakenne aiheuttaa joitain ongelmakohtia aineistoon. Markkinoilla toimii vain vähän markkinatakaajia, jolloin osa bid- ja ask-hinnoista saattaa olla jossain tilanteissa vain yhden markkinatakaajan näkemys markkinahinnoista. Tällöin bid- ja ask-hinnat voivat olla asetettu niin, että ne tukevat markkinatakaajan omia positioita ja halukkuutta tai haluttomuutta käydä kauppa kyseisellä optiolla. Markkinoiden eivät siis ole aina tehokkaat.[42]

5.2.3 Tilastollista tietoa aineistosta

Työssä suoritettujen numeeristen laskujen suhteellisen monimutkaisen muodon vuoksi empiiriseksi testattavaksi aineistoksi valittiin neljä optiosarjaa. Tämän otoskoon katsottiin oleva riittävä selvittämään, toimiiko Duan et al. -hinnoittelumalli paremmin kuin Black & Scholes. Mukaan pyrittiin ottamaan optiosarjoja, joiden voimassaoloaikana osakemarkkinoiden suunta oli ollut sekä nouseva että laskeva. Lisäksi sarjat haluttiin valita sellaiselta ajalta, jolloin kaupankäynti optioilla oli ollut keskimääräistä runsaampaa. Valitut optiosarjat ovat seuraavat, suluissa sarjassa olleet toteutushinnat:

- FOXD(620-740) voimassaoloaika 2.1.1996 - 25.4.1996
- FOXB(780-900) voimassaoloaika 25.10.1996-27.2.1997

[42] Markkinatakaaja on aina velvollinen antamaan sitovat osto- ja myyntitarjoukset. Jos hän ei kuitenkaan halua tehdä kauppaa, voi hän levittää osto- ja myyntitarjouksen välistä "spreadia" siten, ettei kauppaa kannata toteuttaa.

- FOXD(880-1110) voimassaoloaika 2.1.1997-24.4.1997
- FOXL(1050-1410) voimassaoloaika 29.8.1997-28.12.1997

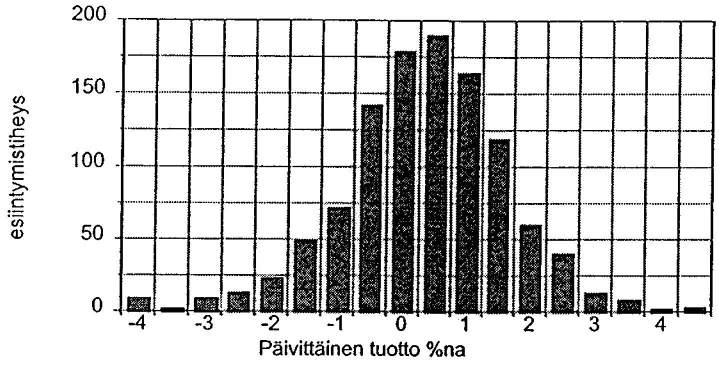
Taulukkoon 7 on koottu kunkin valitun optiosarjan ajalta FOX -indeksin logaritmituoton tilastollisia tunnuslukuja sekä vertailuksi tunnusluvut myös koko siltä ajalta, miltä GARCH-prosessin kertoimet on estimoitu.

TAULUKKO 7

FOX-indeksin tuottojen tilastoarvoja testattujen optiosarjojen voimassaoloajoilta sekä koko aineiston ajalta

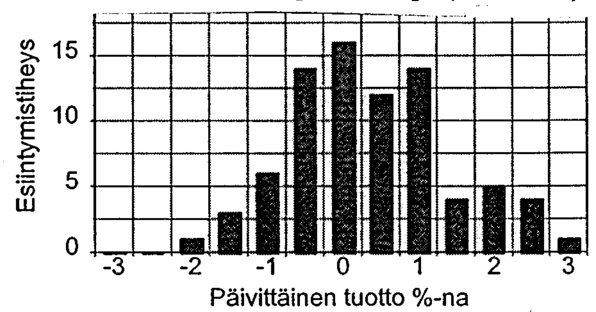
optiosarja	**kaikki**	**D96**	**B97**	**D97**	**L97**
ajanjakso	16.2.94-30.6.98	2.1.96-24.4.96	25.10.96-26.2.97	2.1.97-24.4.97	29.8.97-22.12.97
otoksen koko	1096	79	82	77	81
keskiarvo	0.0009	0.0013	0.0032	0.0002	-0.0007
keskihajonta	0.0133	0.0105	0.0106	0.0121	0.0195
vinous	-0.5861	0.1788	-0.4865	-0.0217	-0.9617
huipukkuus	3.6826	-0.2791	1.425	-0.7698	4.2092

Kun indeksin tuottojen muodostamaa jakaumaa ja sen tunnuslukuja tarkastellaan koko periodilta nähdään, että se on melko lähellä normaalijakauman tunnuslukuja. Jakauma on kuitenkin negatiivisesti vino ja huipukkaampi kuin normaalijakauma, jonka vastaavat arvot ovat 0 ja 3. Koko periodilta laskettu FOX-indeksin tuottojen jakauma on kuviossa 14.

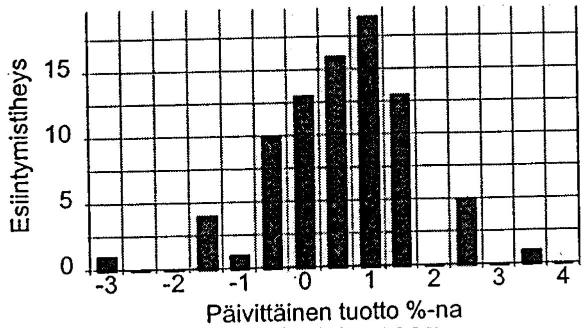


Kuvio 14. FOX-indeksin tuottojakauma ajalla 16.2.1994-30.6.1998

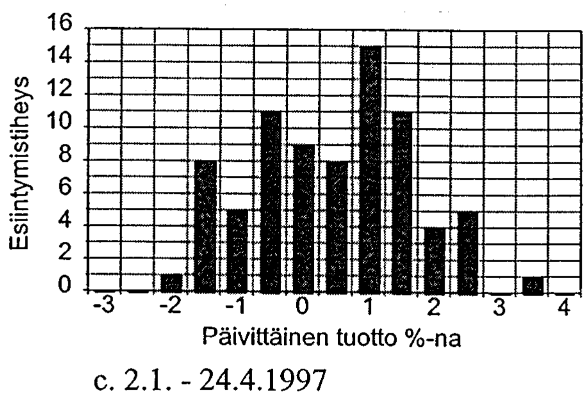
Tarkasteltaessa yksittäisiä optiosarjoja huomataan, etteivät tuottojen jakaumat ole lähellekään normaalijakaumaa (kuviot 15a-d). Ensimmäisessä tapauksessa eli optiosarjalla D96 tuotot ovat asettunet enemmän vasemmalle ja huomattavsti leveämmälle kuin normaalijakaumassa, kuten voidaan nähdä sekä tunnusluvuista (taulukko 7) että kuviosta 15a. B97-sarjassa jakauma on puolestaan negatiivisesti vino, mutta ei yhtä korkea kuin normaalijakauma. Tämä tuottojen painottuminen oikealle näkyy selvästi kuviossa 15b. D97 on D96-sarjan tuottojakauman tapaan leveä, mutta oikealle (negatiivisesti) vino (kuvio 15c). Optiosarja L97 on ainoa, jonka keskimääräinen tuotto on negatiivinen. Sen tuotot ovat jakautuneet enemmän oikealle ja se on normaalijakaumaa huipukkaampi (kuvio15d).



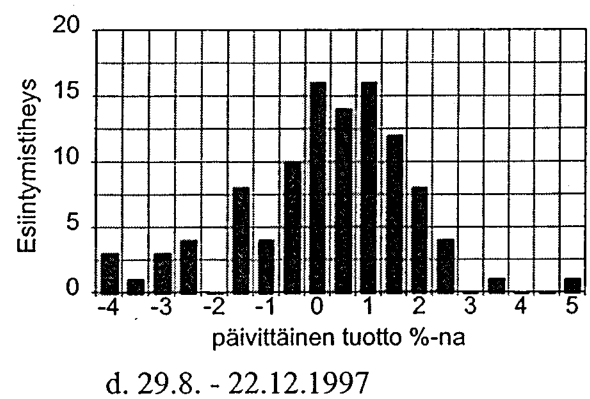
a. 2.1.-24.4.1996



b. 25.10.1996 - 26.2.1997



c. 2.1. - 24.4.1997



d. 29.8. - 22.12.1997

Kuvio 15a-d. FOX-indeksin tuottojakaumat neljän optiosarjan voimassaoloaikoina

5.3 Black & Scholes -hinnoittelumallin soveltaminen

Kappaleessa 3 esiteltiin erilaisia optioiden hinnoittelumalleja, joista selvästi käytetyimmät ovat Black & Scholes ja siitä johdettu Black -76. Black -76 -mallia on käytetty rahoitusmarkkinoilla yleisesti etenkin indeksioptioiden hinnoitteluun, jolloin tässä työssä tuntuisi luontevalta käyttää vertailevana hinnoittelumallina juuri Black -76:ta. Työssä on kuitenkin päädytty käyttämään Black & Scholes -mallia, johtuen eroista mallien käyttämissä kohde-etuuksissa. Black -76 -mallin kohde-etuutena on termiinisopimus, Black & Scholes -mallissa kohde-etuutena indeksioptioilla on indeksin pisteluku. Jos kohde-etuutena käytetään indeksitermiiniä, termiinimarkkinoiden tulisi olla tehokkaat ja termiinien arvot kohdallaan jotta tuloksia voitaisiin pitää luotettavina. Termiinin arvon tulisi olla "cost-of-carry -teorian" mukaan perustana oleva tuote (FOX-indeksi) lisättynä tuotteen pitokustannuksella eli korkotekijällä kerrottu indeksin arvo. Jos tämä ehto ei pidä, markkinoilla on mahdollisuus arbitraasituottoihin. Tutkimukset ovat osoittaneet, etteivät Suomen termiinimarkkinat ole aina kovinkaan tehokkaat[43]. Fox-indeksin arvoon ei vaikuta muiden markkinoiden tehokkuus tai tehottomuus, sillä se lasketaan mekaanisesti sen muodostavien osakkeiden arvoista. Black & Scholes -mallin kohde-etuutena on osake tai indeksi, jolloin mallia käytettäessä termiinimarkkinoiden tehottomuus ei ole ongelma.

Mallin valinnan lisäksi on pohdittava, millä tavoin vakiosuuruista volatiliteettia mitataan; eli käytetäänkö vertailussa historiallista vai implisiittistä volatiliteettia. Näitä volatiliteetin eri estimointitapoja on käsitelty tarkemmin kappaleessa 4.3. Markkinoilla yleinen käytäntö on soveltaa hinnoittelussa implisiittistä volatiliteettia, mutta tässä työssä valittiin Black & Scholes -malliin käytettäväksi historiallinen volatiliteetti. Näin haluttiin korostaa alkuperäisen mallin oletusten mukaan hinnoiteltujen optioiden ja oletuksista poiketen hinnoiteltujen optioiden hintojen eroja. Teoreettisesti katsoen tämä oli mielekkäintä, vaikkakin vertailu implisiittisellä volatiliteetilla tuotettuihin hintoihin olisi ehkä ollut käytännön hyödyn kannalta parempi. Tämän työn painopiste ei kuitenkaan ole markkinoilla toimiminen käytännössä, vaan tarkastella option arvoja teoreettisesta näkökulmasta. Niin kuin edellä historiallisen volatiliteetin estimointiin liittyvää problematiikkaa käsiteltäessä huomattiin, suurin ongelma on sopivan estimointiaikajakson

---

[43] Suomen FOX-indeksiin perustuvien termiinimarkkinoiden tehokkuutta on tutkinut mm. Puttonen (1993), jonka tuloksena oli, että suurimman osan ajasta termiinisopimusten arvot olivat liian matalalla ja markkinat olivat tehottomat.

valinnassa. Tässä työssä päädyttiin käyttämään 100 päivän liukuvaa keskiarvoa.

Tämän “perinteisen“ menetelmän lisäksi haluttiin testata, olisiko Englen et al (1993b) esittämä ajatus GARCH-volatiliteetin soveltaisesta Black & Scholes -malliin parempi. He testasivat Black & Scholes -mallin toimivuutta, kun volatiliteetiksi syötettiin GARCH-prosessilla laskettu volatiliteetti -ennuste. Heidän tuloksensa olivat varsin lupaavia, joten tässä työssä haluttiin testata Duan et al. -mallin rinnalla myös tätä GARCH:iin perustuvaa menetelmää. Lisäksi soveltaminen oli helppoa, koska Duan et al. -mallia varten lasketut GARCH-volatiliteetit voitiin syöttää Black & Scholes -malliin. Duan et al. käyttävät päivittäistä volatiliteetti ennustetta, kun taas Black & Scholes -mallissa olevat parametrit ovat jatkuva-aikaisia. Näin ollen Duan et al. -mallia varten lasketut arvot kerrottiin kaupankäyntipäivien neliöjuurella. Muutoin kaikki oli samoin kuin historiallisella volatiliteetilla lasketuissa Black & Scholes -hinnoissa.

5.4 Duan-Gauthier-Simonato -hinnoittelumallin soveltaminen

Viime vuosina tutkijoiden kiinnostus on kohdistunut stokastisen volatiliteetin hinnoittelumallien tutkimiseen ja kehittelemiseen, etenkin GARCH-ympäristössä.[44] Tähän työhön valittiin testattavaksi malliksi Duanin Simonaton ja Gauthierin (1998) kehittämä optioiden hinnoittelumalli, joka perustuu GARCH -prosessiin. Perusidea on estimoida volatiliteetti GARCH-mallilla ja tästä prosessista saatujen momenttien avulla muokataan Taylorin sarjakehitelmää käyttäen normaalijakuman tiheysfunktiota. Perusteluna juuri tämän mallin valinnalle on Duanin ansioituneisuus tieteellisen tutkimuksen alalla ja etenkin optioiden hinnoittelussa GARCH-ympäristössä sekä mallin suhteellisen yksinkertainen muoto ja laskennallinen nopeus. Lisäksi Duan et al. -mallin ratkaisua ei tarvitse etsiä numeerisesti simuloimalla, joka voi olla hidasta ja työlästä. Heidän mallinsa ratkaisutapa perustuu Jarrow’n & Ruddin (kappale 3.5) esittämään analyyttiseen approksimaatioon, jossa ratkaisu etsitään sarjakehitelmien ja jakauman momenttien avulla eikä simulointeja tarvita.

[44] Esim Heston & Nandi (1998); Duan et al.(1998)

Kappaleessa 3.6 esiteltiin Duan et al. -hinnoittelumallin lopullinen versio, jonka johtaminen ja välivaiheet on esitelty seuraavaksi. (Duan et al. 1998, 12-13).

5.4.1 GARCH-prosessin valinta ja laskenta

Duan, Gauthier ja Simonato aloittavat tutkimuksensa esittelemällä käyttämänsä GARCH-prosessin. Tässä tutkimuksessa haluttiin mallittaa FOX-indeksin tuottoja samalla tavalla kuin Duan et al., koska tavoite oli noudattaa täysin samaa menetelmää alusta loppuun Duanin et al. kanssa. Duanin et al. (1998, 4) käyttämä GARCH-prosessi on muotoa:

$$
\begin{aligned}
&\ln\frac{S_{t+1}}{S_t} = r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\,\varepsilon_{t+1},\\
(19)\quad &h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t(\varepsilon_t - \theta - \lambda)^2,\\
&\varepsilon_t \_ N(0,1)
\end{aligned}
$$

Tässä GARCH(1,1)-mallista poikkeavasti osaketuottoja selittää jatkuva-aikainen korko r, puolet varianssista sekä varianssin neliöjuurella kerrottu virhetermi. Varianssi selittyy puolestaan vakiotermillä sekä edellisen päivän varianssilla, jonka kertoimina on sekä vakiokerroin että virhetermi vähennettynä vipuvaikutusarvolla θ sekä vakiosuuruisella riskipreemiolla λ. Vipuvaikutus ("leverage effect") ottaa malliin mukaan etenkin osakemarkkinoilla hyvin yleisen ilmiön, jossa kurssilaskuja seuraa suurempi volatiliteetti kuin kurssinousuja (Alexander 1995, 10).

GARCH-prosessin kertoimien estimointiin käytettiin RATS-ohjelmaa. RATS on aineiston tilastolliseen analysointiin tarkoitettu ohjelma, jolla voidaan mm. estimoida regressioyhtälöitä, tehdä graafisia esityksiä aineistosta ja rakentaa ennustusmalleja. RATS:issa on valmiiksi ohjelmoituna yleisimpiä tilastollisia ratkaisumenetelmiä, kuten myös GARCH-menetelmä, jolloin sen käyttö on suhteellisen yksinkertaista. Estimoitava aineisto luettiin sisään ohjelmaan ja estimoitava yhtälö ohjelmoitiin RATS:iin.

Ensimmäinen estimointi ei sujunut hyvin. Duanin et al. esittämä muoto aineistoa mallittavalle GARCH-yhtälölle soveltui erittäin huonosti työn aineistoon. Estimoitujen kertoimien T-testin arvot olivat välillä 0.02-0.09, ja tulokset näyttivät olevan merkityksettömiä yli 90 prosentin tasolla kaikkien kertoimien kohdalla.

Huonosta istuvuudesta johtuen Duanin et al.. esitys tuottoja mallittavasta prosessista hylättiin, ja heidän esittämänsä NGARCH-mallin sijaan tässä työssä sovellettiin epäsymmetristä AGARCH-mallia. Tässä haluttiin säilyttää Duan et al. -mallin rakenne osittain, kuten vipuvaikutusta huomioiva parametri θ. Uusi estimoitu prosessi on muotoa:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = y_t = \alpha_0 + \alpha_1 * y_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \ \varepsilon_t \sim (N(0,h_t) \tag{20}$$

$$h_t = \beta_0 + \beta_1 h_{t-1} + \beta_2(\varepsilon_{t-1} - \theta)^2$$

Ehdollista varianssia kuvaavan h_t:n yhtälö säilyy ennallaan, mutta tuottojen prosessista on otettu pois korkotekijä. Nyt tuottoja selittää vakio alfa sekä edellisen päivän tuotto ja virhetermi. Näillä muutoksilla saatiin huomattavasti paremmat tulokset. Estimoidut kertoimet olivat hyvin pieniä, mutta sekä T-testin että merkitsevyysarvojen perusteella tulokset olivat merkitseviä. Taulukossa 8 on esitetty estimoidut parametrit, niiden keskivirhe, T-testiarvo sekä merkitsevyys. Ainoastaan tuottojen mallituksessa oleva vakio α sai hieman heikommat arvot, mutta myös sitä voitiin pitää merkitsevänä.

TAULUKKO 8
GARCH-prosessin (kaava (20)) estimoidut kertoimet

Muuttuja	Kerroin	Keskivirhe	T-arvo	Merkitsevyys
α	0.0009008375	0.0003645159	2.47133	0.01346132
β -	0.0929199208	0.0342787790	2.71071	0.00671388
β_0	0.0000229294	0.000043172	5.31113	0.00000011
β_1	0.665494218	0.0421006794	15.80638	0.00000000
β_2	0.1720157451	0.0313198966	5.49222	0.00000004
θ	0.0049738407	0.0015953305	3.11775	0.00182238

5.4.2 Duan et al. -mallin johtaminen ja laskenta

Kun GARCH-prosessin kertoimet on selvillä, voidaan laskea yhtälön generoima ennuste tulevaisuuden tuottojen käyttäytymisestä. Odotetun tuoton ennuste T:n päivän pituiselle periodille saadaan kaavalla (Raatikainen 1999):

$$E[Y_{t+T}] = \alpha_0 + \frac{1-\alpha_1^T}{1-\alpha_1} + \alpha_1^T Y_t \tag{21}$$

Vastaavasti tuoton varianssin ennuste T:n päivän pituiselle periodille on

$$\sigma_{t+T}^2 = (\beta_0 + \beta_2 * \beta_3^2)\frac{1-(\beta_1+\beta_2)^T}{1-(\beta_1+\beta_2} + (\beta_1+\beta_2)^T * \sigma_t^T \tag{22}$$

Option voimassaoloajan vähetessä voidaan tarkasteluperiodin eli ts. option jäljellä olevan voimassaoloajan odotettu tuotto ja sen varianssi laskettua kaavojen 21 ja 22 avulla.

Jarrow & Rudd -mallia (1982) seuraten Duan, Gauthier ja Simonato käyttävät Edgeworthin sarjakehitelmää approksimoidessaan todellisen jakauman tiheysfunktiota. Edgeworthin sarjakehitelmän mukaan tuntematon tiheysfunktio g(z) voidaan arvioida tunnetun tiheysfunktion a(z) avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} g(z) \approx a(z) &+ \frac{[k_2^g(z) - k_2{}^a(z)]}{2!}\frac{\delta^2 a(z)}{\delta z^2} \\ &- \frac{[k_3^g(z) - k_3^a(z)]}{3!}\frac{\delta^3 a(z)}{\delta z^3} \\ &+ \frac{[k_4^g(z) - k_4^a(z)]}{4!}\frac{\delta^4 a(z)}{\delta z^4} \end{aligned} \tag{23}$$

jos käytetään neljää ensimmäistä termiä. Kaavassa k_i^j (z) on funktion j (j=g, a) i:s kumulantti. Kumulanttien yhteys aiemmin esitettyihin jakauman momentteihin on seuraava:

$k_1 = \mu$

$k_2 = \sigma^2$

$k_3 = \mu_3 = E[[z-E(z)]^3]$

$k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 = E[[z-E(z)]^4]-3\sigma^4$

Duan et al. käyttävät approksimoivana jakaumana (a(z)) N(0,1) -jakaumaa ja muuttujana standardoitua kumulatiivista tuottoa. Kumulatiivista tuottoa merkitään $\rho_T = \ln(\frac{S_T}{S_0})$, jolloin standardoitu kumulatiivinen tuotto on

$$z_T = \frac{\rho_T - \mu_{\rho_T}}{\sigma_{\rho_T}}, \tag{24}$$

jossa ρ_T on tuotto T päivää eteenpäin, μ_T on edellä mainitun tuoton odotusarvo ja σ_T on tuoton keskihajonta.

Duan et al.. arvioivat T:n päivän pituisen normalisoidun tuoton z_T tiheysfunktiota käyttäen N(0,1) normaalijakaumaa seuraavasti:

$$g(z_T) \cong' \mathrm{g}(z_T) = n(z_T)[1 - k\frac{3}{3!}(z_T^3 - 3z_T) + \frac{k4-3}{4!}(z_T^4 - 6z_T^2 + 3)], \tag{25}$$

jossa $n(z_T)$ on N(0,1) -jakauman tiheysfunktio, k_3 ja k_4 ovat normalisoidun tuottomuuttujan z_T 3. ja 4. kumulantit[45] ja $g(z_T)$ on muuttuja -z_T:n tiheysfunktio.

Periaatteessa tuntemattomat kumulantit $E[\rho_T^3]$ ja $E[\rho_T^4]$ pitäisi johtaa matemaattisesti. Voidaan kuitenkin käyttää yksinkertaistavaa oletusta, jonka mukaan ajassa vaihteleva osuus tuottojakaumasta sisältyy GARCH-kuvaukseen. Tällöin z_T:n jakauma voi poiketa vinouden ja huipukkuuden osalta normaalijakaumassa, mutta nämä poikkeamat ovat oletuksen mukaisesti vakiot. Jos näin on, jokaiselle option elinaikaan sisältyvälle periodille voidaan estimoida empiirisesti ajassa vakiot kumulantit .

---

[45] Huomaa, että N(0,1) jakauman 3. kumulantti = 0 ja 4. kumulantti =3.

Nyt osto-option arvon approksimaatio Duanin, Gauthierin ja Simonaton mukaisesti voidaan esittää seuraavasti:

$$(26)\ C = e^{-rT} \int_{-\infty}^{K^*} (S_0 e^{\mu_T - \sigma_T z_T} - K)\, \hat{g}(z_T)\, dz_T ,$$

jossa r = riskitön korko

T = aika päivissä option erääntymiseen

S_0 = kohde-etuuden arvo option arvostamishetkellä

K = option toteutushinta

$\hat{g}(z_T)$ = kaavan 4 mukainen approksimaatio funktiolle $g(z_T)$

$$K^* = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu_T}{\sigma_T}$$

Kertomalla integraalilauseke auki saadaan approksimaatio, jonka ratkaisu on Duanin et al. esittelemä varsinainen hinnoitteluyhtälö (kaava (8) kappaleessa 3.6).

5.4.3 Mallissa tarvittavien muuttujien estimointi

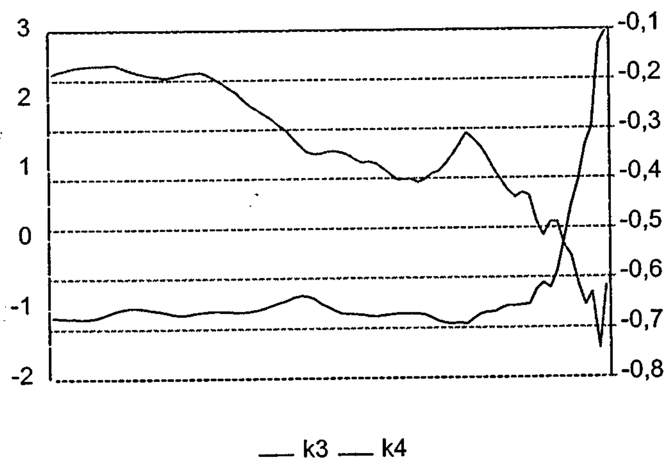
GARCH-prosessin kertoimien estimoimisen lisäksi oli selvitettävä myös Duan et al. -mallissa tarvittavat Black & Scholes -formuloinnista poikkeavat muuttujat ja niiden arvot. Tällaisia muuttujia ovat tuottojakaumaa kuvaavat momentit. GARCH mallittaa vain kaksi ensimmäistä momenttia eli keskiarvon ja varianssin, joten korkeammat momentit, kuten vinous ja huipukkuus, saadaan vain oletetun jakauman tiedoista. Duan et al. -mallissa huipukkuus- ja vinousarvoa tarvittiin korjaamaan normaalijakauman tiheysfunktiota. Tämä korjaus on esitetty edellä kaavassa (23) ja vastaavat tunnukset ovat k_3 vinoudelle ja k_4 huipukkuudelle. Ne laskettiin standardoidun tuottomuuttujan z_p suhteen. Tuottomuuttujan vinous saadaan laskettua kaavalla

$$(27)\qquad \frac{n}{(n-1)(n-2)} \Sigma\left(\frac{x_j - x}{s}\right)^3$$

missä n on havaittujen tuottomuuttuja z.ien määrä, x_j on j:s havainto, x on havaintojen keskiarvo ja s on otoksen keskihajonta. Vinouden kaava on valmiina funktiona taulukkolaskentaohjelmissa, samoin kuin huipukkuuden kaava, joka vastaavilla tunnuksilla on:

$$(28) \qquad \left[\frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\Sigma\left(\frac{x_j - x}{s}\right)^4\right] - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

Vinous- ja huipukkuusarvoja laskettiin 82 kappaletta eli jokaisena option jäljellä olevana voimassaolopäivänä on oma arvo sekä vinoudelle että huipukkuudelle. Toisin sanoen option voimassa ollessa jokaisena päivänä tuottojakauman muoto on erilainen. Nämä momenttien arvot suhteessa jäljellä oleviin päiviin on esitetty kuviossa 16. Mielenkiintoista on, kuinka epälineaarisesti etenkin huipukkuus käyttäytyy, kun voimassaoloaikaa on vain vähän jäljellä. Myös Duanin et al. tutkimuksessa havaittiin sama ilmiö. Heidän laskemien huipukkuuden ja vinouden arvojen kuvaajat ovat muodoltaan hyvin samankaltaisia tässä työssä laskettujen arvojen kanssa, vaikkakin saadut arvot eroavat toisistaan.



Kuvio 16. FOX-indeksin huipukkuus ja vinous ajan funktiona

6 TESTAUKSEN TULOKSET

6.1 Optioiden toteutuneet ja teoreettiset hinnat

6.1.1 Toteutuneet hinnat

Kuten työssä on jo aiemmin mainittu, Suomen optiomarkkinat ovat melko ohuet, ja kaupankäynti saattaa joskus olla hyvinkin hiljaista. Työssä valittiin testattaviksi optiosarjoiksi mahdollisimman vilkkaasti vaihdetut sarjat. Tästä huolimatta toteutuneista optioiden hinnoista ei voi muodostaa yhtenäistä aikasarjaa, sillä välillä on pitkiäkin aikoja, jolloin eri toteutushinnoilla ei käydä kauppaa lainkaan. Toteutuneisiin hintoihin olisi voitu saada enemmän havaintoja käyttämällä close-hinnan puuttuessa ask- ja bid-hinnan keskiarvoa, mutta tässä työssä ei haluttu menetellä näin. Syynä tähän on aiemmin mainittu markkinatakaajin suuri vaikutusvalta optioiden hintoihin, jolloin ask- ja bid-tarjousten puolessavälissä oleva hinta ei olisi välttämättä kuvannut markkinoiden näkemystä oikeasta hinnasta, vaan pikemminkin markkinatakaajan asennetta suhteessa markkinatakaajan omiin positioihin.

Kaikissa optiosarjoissa ilmeni, ettei juuri avatuilla sarjoilla käydä kauppaa juuri lainkaan, vaan kaupankäynti oli suurempaa voimassaoloajan loppupuolella. Kun uusi sarja avataan, on edellistä optiosarjaa jäljellä vielä puolet eli kaksi kuukautta, jolloin kaupankäynti keskittyy lähinnä vanhaan sarjaan.

6.1.2 Teoreettiset hinnat

Vaikka Black & Scholes -hinnoittelumalli on hyvin yksinkertainen, sen käyttö volatiliteetin suhteen ei ole niin yksiselitteistä. Volatiliteetin valinnalla on ratkaisevan suuri merkitys saatuun tulokseen eli option teoreettiseen arvoon; Black & Scholes -mallilla lasketut hinnat riippuvat täysin volatiliteettiestimaatista. Tässä työssä käytetty menetelmä (100 pv. liukuva keskiarvoa) on sekä esitelty että valinta perusteltu kappaleessa 5.3.

Tämän perinteisen volatiliteetti estimaatin lisäksi optioille on laskettu hinnat sijoittamalla Black & Scholes -kaavaan GARCH-volatiliteetti. Tämä menetelmä on teoreettisesti ristiriitainen, mutta esim Enlge et al.(1995) ovat saaneet lupaavia tuloksia tällä menetelmällä. Duan et al. -mallissa tarvitaan GARCH-prosessiin perustuvaa volatiliteettiennusteita, joita voidaan siten käyttää myös

Black & Scholes -kaavassa.

Duan et al. -hintojen laskemiseksi tarvittiin muuttujia, joiden estimointi ei ollut kovin yksinkertaista. Menneen perusteella määritettyjen GARCH tuotto- ja volatiliteettiennusteiden lisäksi kaavassa tarvittiin kertoimet tuottojakauman huipukkuudelle ja vinoudelle. Duanin et al. artikkelissa esitelty estimointimenettely oli teknisesti vaativa ja perustui ajatukseen ajassa muuttuvista 3.:sta ja 4.:stä kumulantista. Tässä työssä on lähdetty siitä oletuksesta, että niiden vaihtelun merkitys optiohinnoitteluun olisi merkitykseltään vähäistä ja huipukkuutta ja vinoutta kuvaavat arvot on estimoitu ajassa vakioiona.

Vaikka markkinahintoja ei tarkasteluajanjaksossa löydy eri toteutushinnoille läheskään joka päivälle, teoreettiset arvot voidaan luonnollisesti laskea kaikille päiville ja kaikille toteutushinnoille. Vertailussa arkkinoilta saatuihin arvoihin ei kuitenkaan tarvita kuin vastaavat Black & Scholes ja Duan et al. -kaavoilla lasketut teoreettiset arvot. Ainoastaan näitä hintoja vastaavien teoreettisten hintojen esittäminen on täten mielekästä. Kun joillain toteutushinnoilla ei kauppaa käyty lainkaan, olivat totutushinnat todennäköisesti hyvin kaukana FOX-indeksin sen hetken tasosta. Tällöin option hintaa on hyvin vaikea arvioida ja teoreettisten arvojen hinnoitteluvirheet kasvavat suhteettoman paljon. Tämä puolestaan saattaisi vääristää tuloksia hinnoittelumallien eroista liikaa.

6.2 Tulosten vertailu

Vertailu eri mallien ja toteutuneiden optioiden hintojen kesken tehtiin kaikille neljälle optiosarjalle erikseen. Myös tulokset on esitetty tässä muodossa. Toteutuneisiin markkinahintoihin (tot) on vertailtu Duan et al. -mallia (duan), Black & Scholes -mallia historiallisella volatiliteetilla (bs) sekä Black & Scholes -mallia GARCH-volatiliteetilla (bsg).

Tuloksia vertailtaessa on syytä muistaa, ettei markkinahintoja voida pitää täysin “oikeina“ arvoina. Markkinatakaajat pystyvät toimimaan, vaikka hinnat olisivatkin väärät, kunhan hinnat ovat linjassa muiden markkinatakaajien kanssa, ja markkinatakaajan oma osto- ja myyntihinnan välinen spredi on riittävän leveä. Voidaan kuitenkin olettaa, että toteutuneiden hintojen on oltava suhteellisen lähellä "oikeita" hintoja. Seuraavassa käydään läpi saadut tulokset optiosarjoittain. Kaikilla on tuloksia vertailtu kolmella tavalla;

1) mikä kolmesta mallista on lähimpänä toteutuneita hintoja

2) erot itseisarvoina (markkoina) eli | teoreettinen - toteutunut |

3) erot prosentteina eli (teoreettinen - toteutunut) / toteutunut

Yleisesti optioiden hinnoittelua tarkastelevissa tutkimuksissa vertaillaan tuloksia sen valossa, kuinka kaukana option toteutushinta on ollut kohde-etuuden nykyarvosta. Myös tässä työssä haluttiin ottaa tämä näkökohta mukaan ja tutkia, onko toteutus- ja spot-hinnan suhteella (moneyness) mitään vaikutusta eroihin sekä kuinka saadut tulokset ovat suhteessa aiemppiin tutkimuksiin. Saadut prosentuaaliset erot on siten jaettu kolmeen ryhmään:

1) miinusoptiot, joilla toteutushinta on spothintaa alempana eli niiden välinen suhde on alle 0.99

2) tasaoptioihin, joilla toteutushinta on suunnilleen sama kuin spot hinta eli suhde on välillä 0.99-1.01

3) plusoptioihin, joilla toteutushinta on korkeampi kuin spothinta eli suhde on suurempi kuin 1.01

6.2.1 Tulokset sarjassa FOXD(1996)

Ensimmäinen tutkittu sarja oli FOXD ajalla 2.1-24.4.1996. Tällöin FOX-indeksi nousi 9% 647 pisteestä 704 indeksipisteeseen. FOXD-sarjassa käytiin kauppaa 7 eri toteutushinnalla välillä 620-740.

Taulukossa 9 on koottu yhteen saadut tulokset. Sarjassa oli 233 havaintoa toteutuneista hinnoista, joista bsg pääsi lähimmäksi 86%:ssa, perinteinen bs 9%:ssa ja duan 5%:ssa tapauksista. Kun katsotaan itseisarvoista laskettuja markkamääräisiä eroja nähdään ,että sekä minimi, maksimi että keskiarvoinen ero osoittavat bsg:n olevan lähimpänä markkinahintoja. Myös erojen hajonta on kaikista matalin. Duan on puolestaan huomattavasti heikompi kuin bsg tai bs. Sama tulos nähdään myös prosentteina lasketuista eroista. Prosentteina laskettuna etenkin duanin huonot tulokset korostuvat; esim. maksimiero toteutuneisiin hintoihin oli yli 7000%. Vastaavasti Black & Scholes:in molemmissa versioissa ero oli pahimmillaan hieman yli 100%. Tämä vertailu toi myös selkeämpää eroa Black & Scholes -versioiden välille; bsg:n keskimääräinen hinnoitteluvirhe oli 2% kun bs:llä se oli yli 30%.

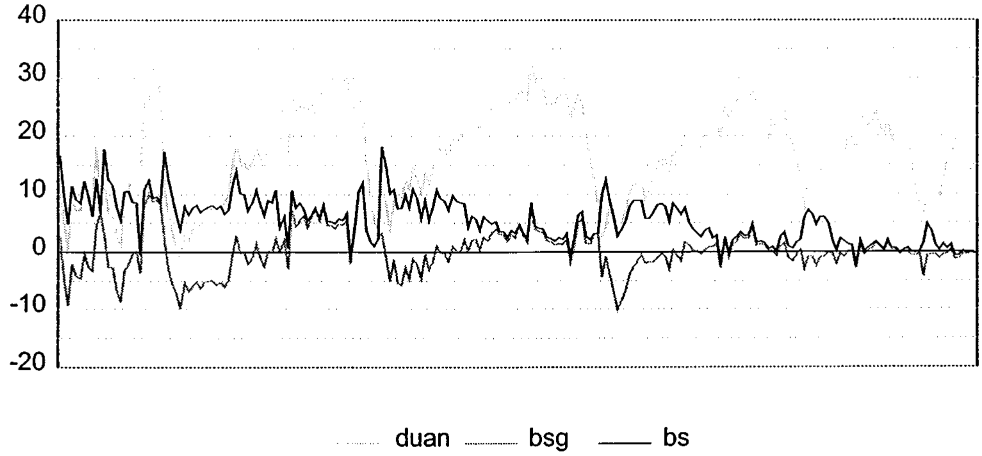
TAULUKKO 9. Saadut tulokset FOXD1996

	duan	bsg	bs
1) Lähimpänä toteutunutta			
% (yht 233 kpl)	5% (11kpl)	86% (200kpl)	9% (22kpl)
2) Ero itseisarvona (mk)			
minimi	0.42	0	0.03
maksimi	32.92	11.72	18.23
keskiarvo	17	2.72	5.63
keskihajonta	7.73	2.49	3.85
3) Ero prosentteina			
minimi	1.03	0.02	0.79
maksimi	7482.57	121.28	136.46
keskiarvo	40.93	-2.30	33.44
keskihajonta	665.62	31.27	30.67

Kuviossa 17 on tilanne esitetty graafisesti. Siinä erot ovat markkoina, muttei itseisarvoina. Sarjaan FOXD kuuluneet eri toteutushintaiset optiot on asetettu kuviossa peräkkäin. Duanin heikkous näkyy kuviosta selvästi; alussa kun voimassaoloaikaa on jäljellä, mallin tuottamat hinnat ovat melko lähellä Black & Scholes -mallin hintoja sekä toteutuneita. Mutta erääntymispäivän lähestyessä duan-hinnat karkaavat korkealle, päinvastoin kuin voisi olettaa. Tämä on osoitus mallin heikkoudesta, sillä mitä lähempänä erääntymistä ollaan, sitä suurempi osa option arvosta tulee suoraan sen toteutushinnan ja spothinnan välisestä erotuksesta, jolloin muilla tekijöillä kuten volatiliteetilla on yhä vähemmän merkitystä option arvoon. Esimerkiksi Black & Scholes -malli antaa option viimeisinä päivinä hyvin samankaltaisia vastauksia, riippumatta mallissa käytetystä volatiliteetista. Tämä näkyy myös kuviosta; kun duan on kaukana ylhäällä, ovat bs ja bsg hyvin lähellä toisiaan ja viimeisimpinä päivinä aivan samat ja kuviossa päällekkäin.

Verrattaessa bsg- ja bs-mallia keskenään nähdään kuviosta, että bsg on jatkuvasti alhaisemmalla tasolla kuin bs ja samalla useimmiten myös lähempänä toteutuneita hintoja (eli ero lähellä 0:aa) kuin bs. Mielenkiintoista on myös, että bs on nollatason yläpuolella, eli malli ylihinnoittelee optiot, kun bsg on huomattavan osan ajasta miinuksen puolella eli tuottaa toteutuneita hintoja alhaisempia arvoja.

Kun tarkasteluun otetaan duan ja bsg, huomataan, että vaikka niiden arvot ovatkin kaukana toisistaan, ne liikkuvat hyvin samansuuntaisesti. Tämä on loogista, sillä niillä on syötettynä malliin sama volatiliteetti. Vaikka tulokset liikkuvat samansuuntaisesti, niiden välinen ero ei ole vakio.



Kuvio 17. Ero toteutuneisiin hintoihin markkoina (FOXD1996)

6.2.2 Tulokset sarjassa FOXB(1997)

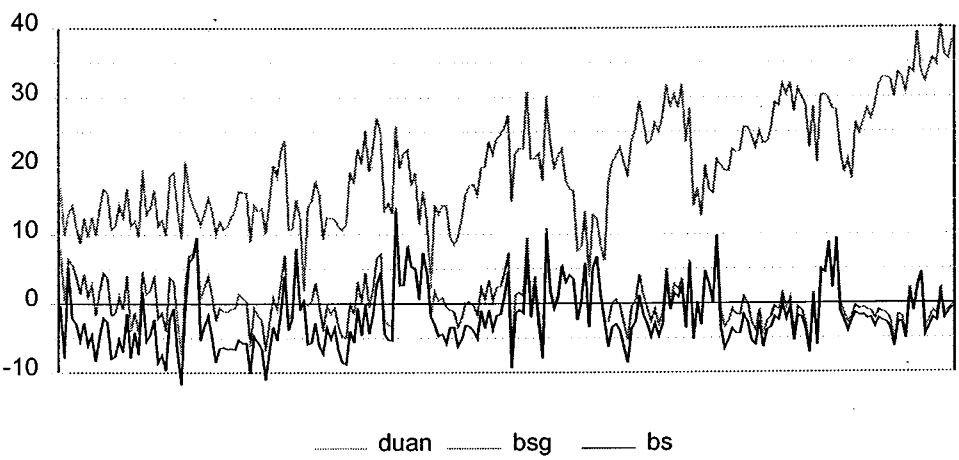
Toinen testattu sarja oli FOXB ajalla 26.10.1996-26.2.1997, jolloin FOX-indeksi nousi tasaisen vahvasti 787 pisteen tasolta yli 1000:een indeksipisteeseen kaikkiaan 31%. Tässä sarjassa löytyi markkinahintoja 13 eri toteutushinnalle (arvoltaan 780-1030).

FOXB -sarjan taulukosta 10 nähdään, että duan-mallin tulokset ovat varsin heikot, heikommat kuin edellisen optiosarjan aikana, eikä tällä menetelmällä päästy kertaakaan lähimmäksi toteutuneita hintoja. Myös tällä kertaa onnistui hintojen muodostumisessa parhaiten bsg (68%), mutta nyt myös bs oli useasti lähimpänä toteutuneita hintoja, 38% tapauksista se oli parempi. Markkamääräisesti mitattuna bsg onnistui parhaiten, mutta myös bs onnistui melko hyvin. Duan-mallin hinnat olivat aivan liian korkeat. Prosenttieroista nähdään että vaikka bsg:n minimi ja maksimi ero ovatkin suhteellisen isoja, se onnistuu keskimäärin erittäin hyvin; ero on alle 1%. Huomioitavaa on, että edellisessä jaksossa bs selvästi ylihinnoitteli (keskimäärin n.33%) optiot, kun taas tässä sarjassa tilanne on päinvastainen; mallin tuottamat hinnat ovat keskimäärin 16% toteutuneita alhaisempia. Tässä sarjassa bsg ja bs arvot olivat hyvin samansuuntaisia.

TAULUKKO 10. Saadut tulokset FOXB1997

	duan	bsg	bs
1) Lähimpänä toteutunutta			
% (yht 231 kpl)	0% (0kpl)	68% (156kpl)	32%(75kpl)
2) Ero itseisarvona (mk)			
minimi	1.83	0.03	0.02
maksimi	40.35	13.99	13.34
keskiarvo	19.86	2.79	4.15
keskihajonta	7.87	2.42	2.54
3) Ero prosentteina			
minimi	1.24	-45.20	-61.64
maksimi	1220.96	40.74	22.82
keskiarvo	119.22	-0.61	-16.49
keskihajonta	132.53	15.07	19.38

Kuvio 18. esittää sarjan FOXB eroja toteutuneisiin hintoihin verrattuna. Tässä kuviossa duan-mallin epäonnistuminen korostuu viimeisillä toteutushinnoilla, joissa edes voimassaoloaika ei riitä tuomaan duan hintoja lähelle oikeaa tasoa.



Kuvio 18. Ero toteutuneisiin hintoihin markkoina (FOXB1997)

6.2.3 Tulokset sarjassa FOXD(1997)

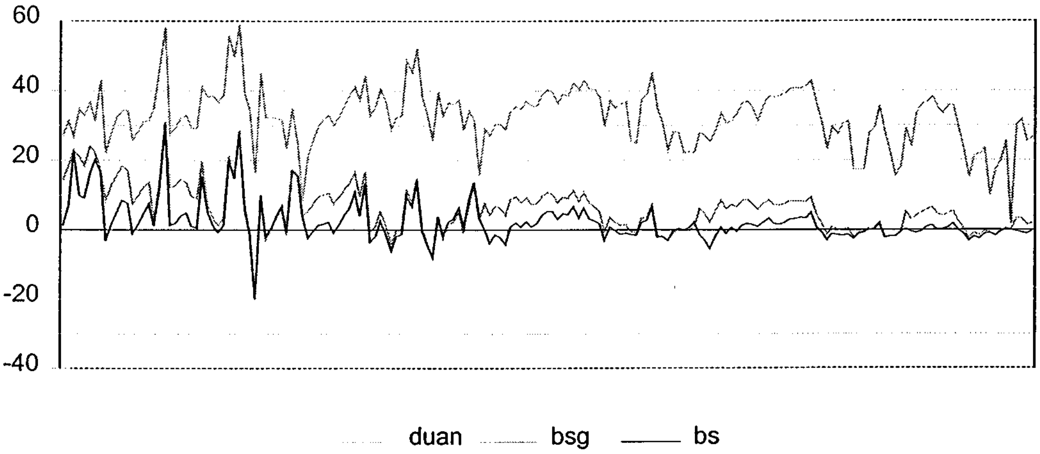
Kolmas optiosarja FOXD oli voimassa puolet ajastaan (2.1-26.2.1997) yhtä aikaa sarjan FOXB:n kanssa. Tämän sarjan aikana FOX-indeksi nousi ensin 857 pisteestä yli 1000 mutta laski sitten 996 pisteeseen, konaisnousuksi tuli kuitenkin 16%. FOXD-sarjassa käytiin kauppaa 9 eri toteutushinnalla välillä 880-1050.

Duanin hinnoittellumalli ei toiminut tässäkään tapauksessa. Se ei ollut kertaakaan lähimpänä toteutuneita hintoja, ja kuten taulukosta 11 nähdään, se ylihinnoitteli optioita huomattavasti. Pienimmillään ero oli lähes 20%, yleisesti duan-malli tuotti moninkertaisesti liian suuria arvoja. Black & Scholes -mallien kohdalla tilanne oli toisin kuin kahdessa edellisessä optiosarjassa; tässä optiosarjassa bs:llä saatiin paremmat tulokset kuin bsg-mallilla. 67%:ssa tapauksista historiallisella volatiliteetilla päästiin lähimmäksi toteutuneita hintoja. Bsg toimi nyt huomattavasti kehnommin kuin edellisissä kahdessa optiosarjassa.

TAULUKKO11. Saadut tulokset FOXD1997

	duan	**bsg**	**bs**
1) Lähimpänä toteutunutta			
% (yht 184 kpl)	0% (0kpl)	33% (60kpl)	67%(124kp
2) Ero itseisarvona (mk)			
minimi	1.68	0.01	0.01
maksimi	58.96	31.27	30.46
keskiarvo	32.46	6.90	3.93
keskihajonta	8.31	6.05	5.12
3) Ero prosentteina			
minimi	19.95	-100.00	-100.00
maksimi	16849.74	347.64	765.10
keskiarvo	586.51	33.94	14.21
keskihajonta	1459.50	58.79	80.82

Kuviossa 19 näkyy selvästi, kuinka duanin tulokset ovat hyvin kaukana oikeasta tasosta. Tässä optiosarjassa markkinoilla noteeratut hinnat jakautuivat usean toteutushinnan kesken, jonka takia kuviossa on useita "hyppäyksiä" uuden toteutushinnan jatkuessa suoraan matalamman tuloksista. Jälleen on nähtävissä selvä tasoero duanin ja bs:n sekä bsg:n välillä; vaikka duan-hinnat tuntuvat olevan kohtuuttomia, ne seurailevat bs-malllin liikkeitä. Vertailtaessa Black & Scholes -malleja keskenään bs-mallin paremmuus näkyy myös kuviosta. Suurimman osan se on lähimpänä nollatasoa, joskin bsg pysyy myös melko lähellä.



Kuvio 19. Ero toteutuneisiin hintoihin markkoina (FOXD1997)

6.2.4 Tulokset sarjassa FOXL(1997)

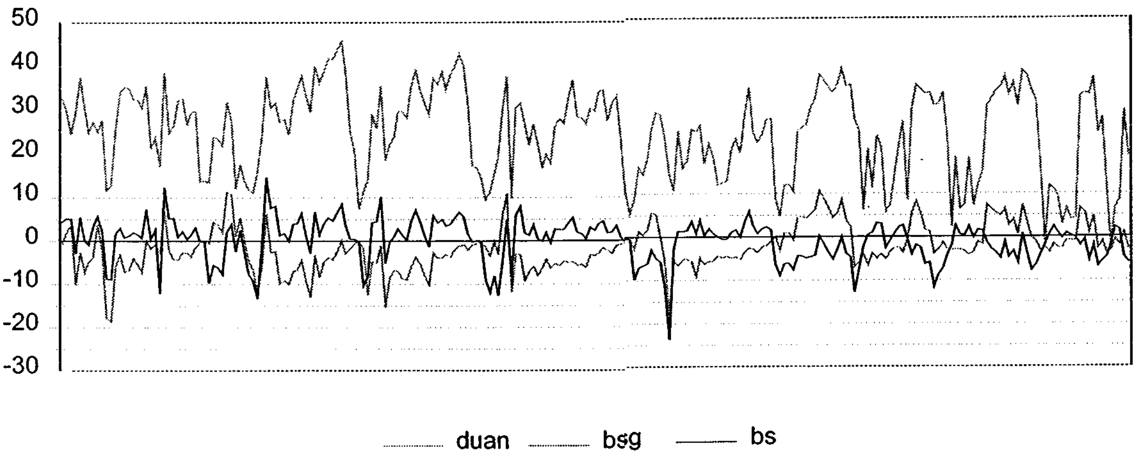
FOXL-sarja ajalla28.8-26.12.1997 erosi eniten optiosarjoista suhteessa FOX-indeksin kehittymiseen. Tämän sarjan voimassaollessa FOX-indeksi nousi ensin 1160:sta 1300:aan ja laski sitten nopeasti takaisin 1100:een. Kokonaislaskun suuruus oli sarjan voimassaoloaikana -4 %. Toteutushintoja oli välillä 1050 -1410, yhteensä 13 kappaletta.

Kuten edellisissäkin sarjoissa, oli tässäkin duan-mallin toimivuus varsin heikkoa. Tulokset ovat sarjan osalta taulukossa 12. Vain kerran se onnistui olemaan lähimpänä toteutuneita hintoja, kun Black & Scholes -mallit jakoivat loput melko tasan; bs onnistui 56%:ssa ja bsg 44%:ssa tapauksista. Kun eroja mallien välillä katsotaan prosentteina, huomataan eroja edellisiin sarjoihin verrattuna. Nyt myös duanin arvot ovat toteutuneita alhaisempia, vaikkakin keskiarvo on edelleen korkea. Mielenkiintoista on, että bsg on keskiarvoltaan negatiivinen, kun taas bs on keskiarvoltaan positiivinen.

TAULUKKO 12. Saadut tulokset FOXL1997

	duan	bsg	bs
1) Lähimpänä toteutunutta			
% (yht 242 kpl)	0% (1kpl)	44% (106kpl)	56%(135kpl
2) Ero itseisarvona (mk)			
minimi	1.17	0.03	0.01
maksimi	45.64	18.60	23.72
keskiarvo	24.60	4.39	3.79
keskihajonta	10.06	3.21	3.32
3) Ero prosentteina			
minimi	-47.15	-100.00	-98.74
maksimi	7261.46	48.73	257.40
keskiarvo	362.59	-29.58	6.56
keskihajonta	764.74	35.73	40.98

FOXL-sarjassa oli markkinadataa saatavilla 8:lla eri toteutushinnalla (välillä 1110-1320). Lisäksi markkinat olivat hyvin volatiilit, mikä näkyy myös markkamääräisten hinnoitteluerojen hyppäyksinä kuviossa 20. Duanin arvot ovat selvästi nollarajan yläpuolella, vain kerran ero on negatiivinen. Erot toteutuneisiin heilahtelevat suuresti, eikä tässä sarjassa ole niin selvää yhdenmukaisuutta Black & Scholes -mallien kanssa kuin aiemmissa sarjoissa on havaittu.



Kuvio 20. Ero toteutuneisiin hintoihin markkoina (FOXL1997)

6.2.5 Erot suhteessa spot -toteutushintasuhteeseen

Optioiden hinnoittelumalleja testattaessa on tutkijoilla ollut tapana verrata hintoja suhteessa niiden 'moneyness':iin eli spot-hinnan ja toteutushinnan suhteeseen (plus-, miinus- ja tasaoptio). Koska kaikki tässä työssä testatut optiot olivat osto-optioita, on kyseessä miinusoptio, kun suhde on alle 1 ja plusoptio suhteen ollessa yli1. Kun spot- ja toteutushinta on samansuuruiset on kyseessä aina tasaoptio. Työssä käytettiin jaotteluperusteena hieman löysempiä kriteereitä, eli miinusoption rajaksi asetettiin 0.98 ja vastaavasti plusoption rajaksi tuli 1.02, tasaoptioiden ollessa siten välillä 0.99-1.01. Näiden rajojen sisällä laskettiin keskiarvot sarjoittain kunkin mallin prosentuaalisille eroille[46]. Tulokset on koottu yhteen taulukossa 13.

Duan-mallissa ei ollut merkitystä, oliko kyseessä plus- vai miinusoptio; kaikissa tapauksissa ero oli huomattavan suuri ja positiivinen. Hinnoitteluvirhe näytti kasvavan huomattavasti, mitä korkeampi spotin ja striken suhde oli eli mitä enemmän plusoptioista oli kyse. Bs- ja bsg-malleissa riippuvuus moneyness-suhteeseen ei ollut yhtä suoraviivainen.

Ensimmäisessä sarjassa (D96) bsg näytti tuottavan keskimäärin markkinahintoja alhaisempia arvoja, kun kyse oli miinusoptioista. Tasaoptioilla bsg ylihinnoitteli selvästi, kun taas plusoptioilla ylihintaa oli keskimäärin vain vähän. Yllättävää oli, että bs hinnat olivat kaikissa luokissa selvästi yli toteutuneiden hintojen. Miinusoptioiden osalta duan -malli oli keskimäärin miltei yhtä tarkka kuin bs.

Toisessa sarjassa (B97) duan arvot olivat jälleen erittäin korkeat plusoptioilla. Bsg onnistui puolestaan miinus- ja tasaoptioilla olemaan keskimäärin vain vähän oikeiden hintojen yläpuolella, ja plusoptioissa se puolestaan alihinnoitteli optiot. Täysin päinvastoin kuin edellisessä sarjassa bs mallin hinnat olivat kaikissa luokissa keskimäärin alemmat kuin toteutuneet optioiden arvot.

Sarjassa D97 näkyy kaikissa moneyness-tasoissa selvästi suuremmat prosentuaaliset erot kuin muissa. Duan-mallin keskimääräiset erot ovat moninkertaisesti liian korkeat. Myös bs ja bs-malleilla on havaittavissa sama tilanne; miltei kaikissa tapauksissa mallit keskimäärin ylihinnoittelevat optiot, vain bs mallilla on plusoptioissa keskimäärin alemmat hinnat kuin toteutuneet.

---

[46] Prosentuaaliset erot laskettu kaavalla : (teoreettinen arvo-toteutunut arvo) / toteutunut arvo * 100%

Viimeisessä tutkitussa sarjassa (L97) duanin osalta tilanne on sama kuin aiemmin, eli spot-strike tasosta riipumatta malli ylihinnoittelee optiot selvästi. Bsg- ja bs-mallien välillä tilanne on mielenkiintoinen tässä sarjassa; bsg-mallin keskimääräiset prosentuaaliset erot ovat kaikissa tapauksissa negatiivisia eli keskimäärin se alihinnoittelee optiot. Bs-mallissa tilanne on päinvastainen; mallin hinnat olivat keskimäärin yli markina-arvojen. Molemmat mallit pysyvät keskimäärin melko lähellä toteutuneita hintoja, vain bsg-mallissa plusoptiot poikkeavat selvästi.

TAULUKKO 13. Prosentuaaliset erot spot ja toteutushinnan suhteen mukaan jaoteltuna

D96	duan	bsg	bs
<0.99	37.83	-6.76	33.86
0.99<x<1.01	121.54	15.64	36.20
>1.01	447.89	1.36	43.88
B97			
<0.99	64.35	2.93	-19.29
0.99<x<1.01	80.47	2.53	-12.39
>1.01	202.24	-6.37	-16.07
D97			
<0.99	134.51	46.57	37.89
0.99<x<1.01	391.23	47.65	40.58
>1.01	882.07	21.11	-10.20
L97			
<0.99	46.30	-2.17	1.45
0.99<x<1.01	206.27	-13.11	17.89
>1.01	443.50	-37.18	5.08
Kaikki yht.			
<0.99	70.39	8.90	5.37
0.99<x<1.01	191.24	13.19	21.98
>1.01	498.61	-9.80	8.96

Taulukon 13 viimeisenä kohtana on moneyness-jaottelu koko aineistolle. Duan-malli on tässä samassa linjassa kuin yksittäisissä tapauksissakin eli erot ovat merkittävästi positiivisia ja ero kasvaa spot-strike -suhteen kasvaessa. Vaikka bsg- ja bs-mallien välillä oli yksittäisiä optiosarjoja tarkasteltaessa huomattaviakin eroja, erot tasoittuvat kun tarkasteltaessa aineistoa kokonaisuutena. Mielenkiintoista on, että molemmissa malleissa suurimmat erot toteutuneisiin hintoihin ovat tasaoptioiden kohdalla. Jos näitä lukuja verrataan Hullin (1997, 494) kuvaukseen hinnoitteluerojen ja jakauman keskinäisestä riippuvuudesta, duanin ja bs-mallin on kohdalla periaatteessa sama tilanne, eli sekä miinus- että plusoptiot ovat ylihinnoiteltuja. Tämä kertoo Hullin mukaan siitä, että molemmat jakauman hännät ovat kapeampia. Tämä on ristiriidassa empiiristen havaintojen kanssa, joiden mukaan jakauman hännät (etenkin vasen häntä) ovat paksumpia. Bsg-mallin tilanne (miinusoptiot ylihinnoiteltu ja plusoptiot alihinnoiteltu) on Hullin peruusteella merkki paksummasta vasemmasta ja ohuemmasta oikeasta hännästä. Empiiriset tutkimukset jakauman muodosta tukevat tätä kuvausta.

6.3 Tulosten tulkinta

Kaikissa neljässä sarjassa kävi selvästi ilmi, että Duan et al. -malli jää kauas toteutuneesta hintatasosta. Kun voimassaoloaikaa oli vielä runsaasti jäljellä, oli Duan et al. -malli muutaman kerran parempi kuin kumpikaan Black & Scholes -versioista. Parhaiten onnistui kolmessa sarjassa Black & Scholes -malli, jossa volatiliteettina oli GARCH-kertoimien perusteella laskettu volatiliteetti. L97-sarjassa perinteinen 100 päivän historiallisen volatiliteetin sisältävä Black & Scholes onnistui olemaan useimmin lähimpänä toteutuneita hintoja.

Duan et al. -hinnoittelumalli toimii huomattavasti heikommin suhteessa niin toteutuneisiin kuin Black & Scholes -hintoihin. Sen antamat option arvot ovat huomattavasti korkeammalla kuin toteutuneet hinnat ja ero kasvaa maturiteetin vähentyessä. Tämä on epäloogista, sillä option lähestyessä maturiteettiaan aika-arvon osuus preemiosta laskee. Duan et al. -malli antaa kuitenkin tuloksia, joiden mukaan viimeisenäkin päivänä option arvo olisi huomattavasti suurempi kuin sen striken ja spotarvon erotus. Tämä on käytännössä mahdotonta; kukaan ei maksa optiosta erotusta enempää, sillä kohde-etuuden voi ostaa suoraan, eikä viimeisenä päivänä ole enää mahdollisuuksia hintojen muutoksille. Tämä selkeä epäjohdonmukaisuus mallissa viittaa siihen, että joku mallin parametri tai itse malli on väärin spesifioitu. Vaikka tulokset eivät ole lähelläkään toteutuneita, mallia ei voida sen takia hylätä. Mutta koska malli ei osaa huomioida ajan vähentymistä ja näin ei toteututa edes yksinkertaisia option hintaa koskevia rajoituksia, sen ei voida katsoa toimivan oikein. Duanin et al. artikkelissa esittämät empiiriset testit perustuivat simuloimalla luotuun ympäristöön, joka on täysin erilainen kuin todellinen markkinaympäristö. Tämän vuoksi Duanin et al. Esittämät empiiriset tulokset eivät ole vertailukelpoisia tämän tutkielman tulosten kanssa.

Mielenkiintoista tuloksissa Duan et al. -mallin kohdalla oli, että spot- ja toteutushinnan suhteen kasvaessa (enemmän plusoptio) myös ero markkinahintoi kasvoi. Tämä ilmiö esiintyi kaikissa sarjoissa johdonmukaisesti, Black & Scholes -mallin kummallakaan versiolla ei vastaavaa ilmiötä esiintynyt lainkaan. Tästä ominaisuudesta voi löytyä selitys mallin huonoon toimivuuteen.

6.4 Tulosten merkitsevyys ja luotettavuus

Duan et al. -hinnoittelukaavassa osoittautui työn edetessä ongelmia; kaavojen esityksissä ilmeni joitain virheiltä vaikuttavia seikkoja, eikä heidän määrittelemä GARCH-prosessi soveltunut sellaisenaan lainkaan tutkimuksen aineistolle. Duan et al. eivät olleet testanneet GARCH-mallinsa soveltuvuutta oikealla aineistolla, vaan mallin oli katsottu soveltuvan hyvin perustuen simuloimalla saatuihin tuloksiin. Koska kyseistä GARCH-versiota ei voitu käyttää sellaisenaan, jouduttiin sitä muokkaamaan aineistoon paremmin soveltuvaksi.

Tulosten luotettavuuteen liittyyy tilastollisesti ajatellen aineiston laajuus. Tutkittavana olleeet neljä optiosarjaa antavat melko hyvän kuvan tilanteesta, mutta eivät ole riittävän suuri otos antamaan tilastollisesti merkitseviä tuloksia. Yhteensä työssä käytettiin vertailussa 892 kappaletta optioiden toteutuneita markkinahintoja. Tällä testauskoolla saadaan tsuuntaa antavia, muttei tilastpllisesti merkitseviä tuloksia.

7 YHTEENVETO

Optioiden hinnoittelussa kiistaton ykkönen on vuosien ajan ollut Black & Scholes -malli. Se on ollut laajan käyttönsä lisäksi myös erittäin suosittu tutkimuksen kohde. Empiiriset tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, ettei malli ole virheetön; Black & Scholes -mallin on osoitettu alihinnoittelevan miinusoptioita (esim. Black 1975), ja U:n muotoinen implisiittisen volatiliteettikäyrä eri toteutushinnoilla eli smile-ilmiö on myös laajasti huomioitu ongelma (esim. Rubinstein 1985). Nämä virheet ovat saaneet tutkijat etsimään ratkaisua, joilla korjattaisiin mallin puutteita.

Option hintaan vaikuttaa suoraan vain kuusi perustekijää. Näistä volatiliteetti on ainoa, joka on arvioitava itse, muut tekijät ovat kiinteitä. Volatiliteetin merkitys optioiden hinnoittelussa on ratkaiseva myös sen suuren vaikutuksen takia; pieninkin muutos malliin syötettävässä volatiliteetissa aiheuttaa välittömästi eron mallin tuottamaan arvoon. Etsittäessä ratkaisua hinnoitteluongelmiin huomio kinnittyy volatiliteettiin, sillä Blackin ja Scholesin mallissaan tekemän volatiliteettioletuksen on osoitettu olevan väärä, jolloin volatiliteetti ei olekaan staattinen, vakiosuuruinen muuttuja. Näistä syistä johtuen tässä työssä haluttiin tutkia hinnoittelumallia, joka huomioi volatiliteetin stokastisuuden.

Monista kehitellyistä malleista testattavaksi valittiin Duanin, Gauthierin ja Simonaton (1998) kehittämä malli. Perusteluina olivat Duanin pioneeriasema GARCH:iin pohjautuvien optioiden hinnoittelumallien kehittelyssä, mallin analyyttinen ratkaisumuoto sekä Duanin et al. artikkelissaan esittämät lupaavat testaustulokset. Heidän testauksensa perustui kuitenkin simuloituun ympäristöön, jolloin sekä mallin parametrit että testattava ympäristö simuloidaan samalla tavoin ja tulokset voivat muodostua hyvinkin reaalimaailmasta poikkeaviksi. Tämän GARCH-perusteisen mallin lisäksi laskettiin teoreettiset arvot myös Black & Scholes -mallilla kahdella tavoin; käyttämällä volatiliteettiparametrinä 100 päivän liukuvaa historiallista volatiliteettia sekä samaa GARCH-ennustevolatiilisuutta kuin Duan et al. -mallissa.

Tutkimusongelmana oli selvittää, pääseekö Duan et al. -mallia käyttäen parempiin tuloksiin kuin Black & Scholes -mallilla. Ongelman ratkaisemiseksi tarvittiin molempien mallien antamat arvot ja vertailukohteeksi otettiin toteutuneet markkinahinnat. Toteutuneetkaan hinnat eivät välttämättä ole täysin oikeat arvot optioille, mutta voidaan kuitenkin olettaa niiden olevan ainakin hyvin lähellä oikeita arvoja. Tutkimusongelman ratkaisemiseksi teoreettisia option arvoja vertailtiin vastaaviin markkinoilta saatuihin arvoihin.

Testauksen tulokset olivat Duan et al. -mallin kohdalta huonot. Mallin arvot olivat aivan liian suuria toteutuneisiin hintoihin verrattuna. Ero ei pienenentynyt edes totetuspäivän lähestyessä, vaikka option viimeisinä voimassaolopäivinä sen arvo koostuu pääasiassa toteutushinnan ja kohde-etuuden nykyarvon erotuksesta, jolloin käytetyllä mallilla ei ole suurtakaan merkitystä. Koska tämä hyvin yksinkertainenkaan option arvoa koskeva rajaehto ei Duan et al. -mallin kohdalla täyttynyt, mallia ei voida pitää käyttökelpoisena. Syitä mallin huonoihin tuloksiin voi olla useita. Todennäköinen syy mallin huonoon toimivuuteen on sen perustana olevan GARCH-mallin heikkous, jolloin siitä johdettu hinnoittelukaavakaan ei toimi. Kaavassa itsessään ja sen spefioinnissa voi myös olla virheitä. Koska Duan et al. -mallia ei ole aiemmin testattu oikealla aineistolla, on vaikea sanoa, mistä mallin virheet johtuvat.

Vertailuksi lasketut Black & Scholes -mallin arvot olivat huomattavsti lähempänä markkinahintoja. Myös näiden arvojen ero Duan et al. -mallin arvoihin oli huomattava. Eri volatiliteetilla lasketut Black & Scholes -hinnat käyttäytyivät hyvinkin samansuuntaisesti, mutta niiden välillä oli myös eroja. Tämä on hyvä esimerkki, miten suuri vaikutus volatiliteetin valinnalla Black & Scholes -kaavassa on; mallithan olivat volatiliteetti-parametria lukuunottamtta täysin identtiset. Erot markkinahintoihin pysyttelivät molempien Black & Scholes -versioiden kohdalla melko tasaisena. Suuremmissa poikkeamissa on kuitenkin kyseenalaista, ovatko teoreettiset arvot tasoltaan vääriä, vai onko markkinoilla esiintynyt arbitraasiehdon rikkoavia optioita. Myös tämä vaihtoehto on mahdollinen, sillä Suomen optiomarkkinat eivät ole kovinkaan tehokkaat, ja "ilmaisia lounaita" esiintyy silloin tällöin.

Black & Scholes -mallien keskinäinen paremmuus ei ollut kovin selvä; kahdessa ensimmäisessä testatussa optiosarjassa GARCH-volatiliteetilla lasketut arvot olivat suurimmassa osassa tapauksia lähempänä markkinahintoja kuin historiallisen volatiliteetilla laskettuna. Kahdessa viimeisessä sarjassa tulos oli päinvastainen. Moneyness-suhteen perusteella GARCH-versio oli hieman parempi.

Verrattaessa Black & Scholes -mallien tuloksia aiemmissa tutkimuksissa havaittuun ilmiöön, jossa Black & Scholes -malli alihinnoittelee miinusoptiot, saadaan GARCH-volatiliteetilla sama tulos. Se oli ainoa malli, joka alihinnoitteli miinusoptiot; Duan et al.-malli ylihinnoitteli merkittävästi kaikissa moneyness- tapauksissa. Myös historiallisen volatiliteetin Black & Scholes -malli antoi keskimäärin aina toteutunutta korkeamman hinnan. Mitään lopullisia johtopäätöksiä tuloksista ei voida kuitenkaan vetää, sillä aineiston koko oli riittävä antamaan kuvaa miten mallit toimivat, mutta aineisto ei ollut riittävän laaja tilastollisten johtopäätösten tekoon.

Markkinoilla ei ole luovuttu Black & Scholes -mallin käytöstä, vaikka mallin puutteet ja smile-ilmiö ovat hyvin tunnettuja ja tutkittuja. Tarve tehokkaamman hinnoittelumallin kehittämiselle on silti olemassa. Duan et al. -malli ei ainakaan näin käytettynä ollut ratkaisu ongelmaan. Mielenkiintoista olisi kuitenkin jatkossa tutkia, päästäisiinkö parempiin tuloksiin kiinnittämällä enemmän huomiota GARCH-prosessin estimointiin ja siitä johdettuihin parametreihin. Lisäksi momenttien estimoinnissa voisi olla tarkennettavaa. Tässä työssä ei näihin seikkoihin kuitenkaan puututtu, ja ilman näitä tarkennuksia ei Duan et al. -mallia voida pitää kovinkaan käyttökelpoisena. Pohja sekä tarve aiheen kehittämiselle on kuitenkin luotu.

LÄHTEET:

Abken, P.A. & Nandi, S., 1996 *Options and volatility*, Federal Reserve Bank of Atlanta, Econimic Review December.

Alexander, C., 1995, *Volatility and correlation forecasting,* Working Paper, University of Sussex.

Alexander, C., 1998, *Volatility and correlation: Measurement, Models and Applications,* kirjassa Risk management and analyis - measuring and modelling financial risk, toim Alexander, C., John Wiley & Sons Ltd., England.

Alexander, C. & Chibumba, A., 1997, *Orthogonal GARCH: An empirical validation on equities, foreign exchange and interest rates*, NetExposure.

Amin, K. & Ng, V., 1993, *Option valuation with systematic stochastic volatility*, Journal of Finance 3, 881-910.

Bakshi, G., Cao, C. & Chen, Z., 1997, *Empirical performance of alternative option pricing models*, Journal of Finance 5, 2003-2049.

Banz, R.W. & Miller, M., 1978, *Prices for state-contingent claims : Some estimates and applications,* Journal of Business 7, 653-672.

Beckers, S., 1981, *Standard deviations implied in option prices as predictors of future stock variability,* Journal of Banking and Finance 5, 363-381.

Berglund,T., Hedvall,K. & Liljeblom,E., 1990, *Predicting volatility of stock indexes for option pricing on a small security market*, ETLA Discussion papers, 330.

Bhat, U.N., 1972, *Elements of applied stochastic processes*, John Wiley & Sons, Inc., Canada.

Black, F., 1976, *Studies in stock price volatility changes,* Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association 177-181.

Black, F. & Scholes, M., 1972, *The value of option contracts and a test of market efficiency*, Journal of Finance 5, 399-418.

Black, F. & Scholes, M., 1973, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy 81, 637-654.

Bollerslev, T., 1986, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics 31, 307-327.

Bollerslev, T., Chou, R.Y. & Kroner, K.F., 1992, *ARCH modelling in finance: A review of the theory and empirical evidence*, Journal of Econometrics 5, 5-59.

Bookstaber, R.M., 1991, *Option pricing and strategies in investing*, McGraw-Hill Book Company ltd, Berkshire England.

Boyle, P.P., 1977, *Options: A Monte Carlo Approach*, Jornal of Financial Economics 4, 323-338.

Brockman, P. & Chowdhury, M., 1997, *Deterministic versus stochastic volatility: implications for option pricing models*, Applied Financial Economics 7, 499-505.

Chance, D.M, *Research trends in derivatives and risk management since Black-Scholes,* Journal of Portfolio Management 5, 35-50.

Chang, C. & Chang, J., 1996, *Option pricing with stochastic volaltility: information-time vs. calendar-time*, Management Science 7, 974-991.

Cohen,K., Hawawini,G., Maier,S., Schwarz,R. & Withcomb,D., 1993, *Friction in the trading process and the estimation of systematic risk,* Journal of Financial Economics, 12, 263-278.

Copeland, T & Weston, F., 1983, *Financial theory and corporate policy*, 2nd edit., Addison Wesley.

Corrado, C.J. & Miller, T.W., 1997, *Simple formulas to compute accurate implied voaltilitites* kirjassa Volatlity in capital markets, toim. Nelken,, I., Glenlake Publishing company, Chicago.

Cox, J.C., 1975, *Notes on option pricing I: constant elasticity of variance diffusions*, Working paper, Stanford University.

Cox, J.C. & Rubinstein, M., 1985, *Option markets*, Prentence-Hall Inc., USA.

Dehapiot, T. & Murphy, D., 1997, *Model risk,* Proceedings of the 10th Risk Global Summit, Geneve.

Duan, J.C., 1990, *The GARCH Option pricing model,* McGill University.

Duan, J.C., 1995, *The GARCH option pricing model,* Mathematical Finance 2, 13-32.

Duan, J.C., Simonato, J.G. & Gauthier, G., 1998, *An analytical approach to GARCH option pricing,* Working Paper, Hong Kong University of Science and Technology.

Dumas, B., Fleming., J. & Whaley, R.E., 1998, *Implied volatility functions : Empirical tests,* Journal of Finance 6, 2061-2106.

Engle, R., 1982, *Autoregressive conditional heteroscedasicity with estimates of the variance of United Kingdom inflation,* Econometrica 50, 987-1007.

Engle, R.F., Hong, T., Kane, A. & Noh, J., 1993a, *Arbitrage valuation of variance forecasts,* Advanced Futures and Options Research 6, 393-415.

Engle, R.F., Kane, A. & Noh, J., 1993b, *Index option pricing with stochastic volatility and the value of accurate variance forecasts,* National Bureau of Economic Research Inc., Working Paper No. 4519, Massachusetts.

Engle, R.F. & Ng, V.K., 1993, *Measuring and testing the impact of news on volatility,* Journal of Finance 5, 1749-1778.

Engle, R.F. & Mustafa C., 1992, *Implied ARCH models from option prices,* Journal of Econometrics 52, 289-311.

Fama, E., 1965, *The behaviour of stock market prices.* Journal of Business 38, 34-105.

Finucane, T., 1989, *Black-Scholes approximations of call option prices with stochastic volatilities: a note,* Journal of Financial and Quantative Analysis 4, 527-532.

French, D.W., 1984, *The weekend effect on the distribution of stock prices:Iimplications for option pricing,* Journal of financial economics 13, 547-549.

Golsten, L., Jagannathan, R. & Runkle, D., 1989, *Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks,* Working Paper, Columbia University.

Haavisto, E., 1990, *Modernit rahoitusinstumentit yrityksen näkökulmasta,* kirjassa Rahoitusmarkkinat toim. Malkamäki, M. & Martikainen, T., Gummerus Jyväskylä.

Hamilton, J.D., 1994, *Time Series Analysis,* Princeton University Press, New Jersey.

Heston, S., 1993, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options,* Review of Financial Studies 6, 327-343.

Heston, S. & Nandi, 1997, S., *A closed-form GARCH option pricing model,* Working Paper 97-9, Federal Reserve Bank of Atlanta.

HEX, 1998, FOX-indeksioptiot ja -termiinit.

HEX, 1999, *Osakejohdannaiset,* 1.

HEX, 2000, Optiotiedote 05/00.

Hoch, D, 1997, *Alternatives to Black and Scholes pricing model and when to use them,* University of Washington research papers, Wsahington.

Hull, J., 1997, *Options, futures and other derivative securities,* Prentice-Hall International Inc, New Jersey USA.

Hull, J. & White, A., 1987, *The pricing of options on assets with stochastic volatilities,* Journal of Finance 2, 281-300.

Hull, J. & White, A., 1997, *Evaluating the impact of skewness and kurtosis on derivatives prices,* NetExposure 3, 81-90.

Ingersoll, J., 1976, *A theoretical and empirical investigation of the dual purpose funds: an application to contingent claims analyis,* journal of Financial Economics 1, 83-124.

Jarrow, R. & Rudd, A., 1982, *Approximate option valuation by arbitrary stochastic processes*, Journal of Financial Economics 10.

Jarrow, R. & Rudd, A., 1983, *Tests of an approximate option value formula*, kirjassa Option pricing theory and applications, lexington Books.

Jauri, O., 1990, *R* ,kirjassa Rahoitusmarkkinat toim. Malkamäki, M. & Martikainen, T., Gummerus, Jyväskylä.

Johnson, H. & Shanno, D., 1987, *Option pricing when the variance is changing*, Journal of Financial and Quantative Analysis 2, 143-151.

Jokivuolle, E., 1990, *Suomalaisten FOX-indeksioptioiden hinnoittelu Monte Carlo -simulointia käyttäen*, Suomen Pankin keskustelualoitteita 13.

Kahra, H., 1992, *Pricing FOX options under conditional heteroscedasticity in returns,* Tampere Economic Studies 1.

Kamal, M. & Derman, E., 1999, *Correcting Black-Scholes,* Risk Magazine 1, 82-85.

Latané, H.A. & Rendleman, R.J,Jr., 1976, *Standard deviations of stock price ratios implied in option prices*, The Journal of Finance 2, 369-382.

Leppiniemi, J. & Puttonen, V., 1996, *Yrityksen rahoitus*,

Lim, G., Lye, J., Martin, G. & Martin, V., 1998, *The distribution of expected rate of return and the pricing of currency options*, Journal of International Economics 45, 351-368.

Mahieu, R. & Schotman, P., 1998, *An empirical application of stochastic volatility models*, Journal of Applied Econometrics 13, 333-360.

Melino, A. & Turnbull, S., 1990, *The pricing of foreign currency options with stochastic volatility,* Journal of Econometrics 45, 239-265.

Merton, R.C., 1973, *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141-183.

Merton, R.C, 1976, *The impact on option pricing of specification error in the underlying stock price returns*, The Journal of Finance 2, 333-350.

Nandi, S., 1996, *Pricing and hedging index options under stochastic volaitlity: an empirical examination*, Working paper 96-9, Federal Reserve Bank of Atlanta.

Natenberg, S., 1988, *Option volatility and pricing strategies*, Trobus Publishing Company, Chicago Illinois.

Parkkinen, H., 1999, *Black-Scholes-malli ja regressiopohjainen lähestymistapa stokastisen volatiliteetin estimointiin-Katsaus suomalaisten FOX-indeksioptioiden hinnoitteluun,* Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos, Keskustelualoitteita No. 671.

Peiró, A., 1994, *The distribution of stock returns : international evidence,* Applied Financial Economics 6, 431-439.

Petzel, T.E., 1996, *Fisher Black and the derivatives revolution,* Journal of Portfolio Management 12, 87-91.

Puttonen, V., 1993, *The efficiency of the Finnish stock index derivatives markets,* Acta Wasaensia No. 31.

Puttonen,V. & Valtonen, E., 1996, *Johdannaismarkkinat,* WSOY, Porvoo.

Raatikainen, J., 1999, *Duan et al mallin soveltaminen additiiviselle GARCH-prosessille,* Muistio, Jyväskylän yliopisto, Taloustieteiden tiedekunta.

Rindell, K., 1993, *The pricing of index options when interest rates are stochastic:An empirical test,* Working Paper, Swedish School of economics and Buisness Administration, Helsinki.

Rubinstein, M., 1994, *Implied Binomial Trees,* Journal of Finance, 771-818.

Saez, M., 1997, *Option pricing under stochastic volatility and stochastic interest rate in the Spanish case,* Applied Financial Economics 7, 379-394.

Salmi, T. & Yli-Olli, P., 1990, *Moderni rahoitus- ja investointiteoria,* kirjassa Rahoitusmarkkinat toim. Malkamäki, M. & Martikainen, T., Gummerus, Jyväskylä.

Satchell, S. & Timmermann, A., 1992, *Option pricing with GARCH,* Birberk College, University of London.

Scott, L., 1987, *Option pricing when the variance changes randomly,* Journal of Financial and Quantative Analysis 4,419-437.

Ross, S.A., Westerfield, R.W. & Jordan, B.D., 1995, *Fundamentals of corporate finance,* 3rd edt. Irwin USA.

Virolainen, K., 1996, *The derivatives market,* kirjassa Financial markets in Finland, Bank of Finland Bulletin.

Stokastiset prosessit

Eniten option hintaan vaikuttaa allaolevan osakkeen hinta ja sen käyttäytyminen. Jotta voitaisiin ymmärtää miten option hinta muodostuu, on ensin ymmärrettävä osakkeen hinnan käyttäytyminen. Fisher Black ja Myron Scholes olettivat optioiden hinnoittelumallissaan, että osakkeen hinta noudattaa tiettyä polkua ajan kuluessa. Tämän polun matemaattinen kuvaus on nimeltään stokastinen prosessi. Osakkeen arvo voi stokastisessa prosessissa muuttua milloin vain ja mihin arvoon tahansa.

Yksi tietty tällainen prosessi on nimeltään Markovin prosessi. Siinä muuttujan aikaisemmat liikkeet ovat merkityksettömiä tulevaisuuden kannalta, vain senhetkisellä arvolla on väliä. Toisin sanoen menneet arvot eivät ennusta tulevaa. Tämä ominaisuus sopii hyvin yhteen Faman (1970) informatiivisen tehokkuuden heikkojen ehtojen kanssa. Osakkeiden hintoja kuvaavat mallit on usein ilmaistu Wiener prosessin termein, joka on puolestaan erikoistapaus Markovin stokastisista prosessseista. Wiener prosessin perusominaisuus on, että muuttujan arvot vaihtelevat jatkuvasti ja ne muutokset, mitkä se voi minkä tahansa aikavälin kuluessa ottaa, ovat normaalijakautuneet. Oletetaan muuttujan (esim. osakkeen hinnan) z noudattavan Wiener prosessia. Ajan kulumista kuvaa Δt ja Δz on puolestaan z:n muutos aikavälin Δt:n kuluessa. Jotta z noudattaisi Wiener prosessia, sillä täytyy olla seuraavat kaksi ominaisuutta.

1) Δz:n suhde Δt:hen on

   $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$

2) Δz:n arvot mille tahansa 2 lyhyelle ajanjaksolle Δt ovat riippumattomia toisistaan.

Ensimmäisestä ehdosta johtuen Δz on itse normaalijakautunut ja sen keskiarvo $(\Delta z) = 0$, keskihajonta $(\Delta z) = \sqrt{\Delta t}$ ja varianssi $(\Delta z) = \Delta t$. Toinen ehto puolestaan ilmaisee, että muuttuja z seuraa Markovin prosessia. Tavanomaisessa Wiener prosessissa muuttujan z oletettu tuleva arvo on sama kuin nykyarvo ja varianssi 1.0 (eli z:n muutos ajassa T on 1.0 x T). Yleistetty Wiener prosessi voidaan kirjoittaa dz:n termein muotoon

(1) $dx = a\,dt + bdz$

missä a ja b on vakioita. Termi a dt ilmaisee, että x: llä on a:n suuruinen odotettu muutosvauhti per aikayksikkö. Termi b dx voidaan puolestaan ajatella lisäävän häiriötä tai vaihtelua x:n noudattamaan polkuun. Tämän häiriön tai vaihtelun suuruus on b * Wiener prosessi. [1] Eräs yleistetty Wiener prosessi on nimeltään Ito prosessi. Siinä parametrit a ja b ovat alla olevien muuttujan x ja ajan t funktioita. Ito prosessin kaava on

(2) $dx = a\,(x,t)dt + b\,(x,t)dz$

Osakkeet noudattavat siis stokastisia prosesseja. Usein ajatellaan, että sijoittajilla on tietyt vaatimukset odotetusta voittoprosentista, joka ei riipu osakkeen hinnasta. Tämän seurauksena stokastinen prosessi formuloidaan siten, että osakkeen hinnan S odotettu muutosvauhti on :S jollekin vakioparametrille :. Täten lyhyessä ajassa Δt odotettu hinnannousu S:lle on :S Δt. Parametri : eli odotettu osakkeen tuottoaste on ilmaistu desimaalimuodossa. Jos varianssi on aina nolla, malli voidaan kirjoittaa

(3) $dS = \mu S dt$

ja

(4) $S = S_0 e^{\mu t}$

missä on osakkeen hinta hetkellä 0.

Käytännössä optioiden hinnoissa ilmenee volatiliteettia. Lyhyessä ajassa Δt tuottoprosentin varianssi ei riipu osakkeen hinnasta. Määritetään F² osakkeen hinnan suhteellisen muutoksen varianssiksi. Täten F²)t on ajan Δt suhteellisen muutoksen varianssi ja F²Δt S² on osakkeen hinnan S todellisen muutoksen varianssi ajassa)t. Tästä väitteestä johtuen S voidaan ilmaista Ito prosessina

(5) $dS = \mu S dt + \sigma S dz$

tai

(6) $\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$

missä ΔS on S:n muutos lyhyellä aikavälillä Δt ja ε on satunnainen luku stardardista normaalijakaumasta. Parametrit μ eli odotettu tuottoaste per aikayksikkö sekä σ eli volatiliteetti oletetaan vakioiksi. Yhtälöä (6) kutsutaan myös geometriseksi Brownin liikkeeksi.[2] Black ja Scholesin mallissaan käyttämä stokastinen prosessi on juuri geometrinen Brownin liike.

---

[1] Hull 1997, 211

[2] Hull 1997, 213-217

LIITE 2.

FOX-indeksioptioista lasketut implisiittiset volatiliteetit ja volatiliteetti-smilet.