# Origami geometristen konstruktioiden ja yhtälönratkaisun välineenä

Stina Palomäki

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2023

**Tiivistelmä:** Stina Palomäki, *Origami geometristen konstruktioiden ja yhtälönratkaisun välineenä* (engl. *Origami as a tool for geometric constructions and solving polynomials*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 41 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2023.

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä lukijalle paperintaittelu tasogeometrian konstruktioiden työkaluna. Tutkielmassa esitellään ensin kaikki mahdolliset tavat taittaa paperi annettujen pisteiden ja suorien perusteella. Paperin taittamista tarkastellaan tason peilauksena jonkin suoran suhteen, ja mahdolliset taitokset määräytyvät sen mukaan, miten peilaus kuvaa annetut pisteet ja suorat. Mahdollisia taitoksia kutsutaan origamiaksioomiksi, vaikka ne eivät muodosta varsinaista aksioomajärjestelmää. Kaikkien origamiaksioomien olemassaolo tason antamassa mallissa todistetaan ja jotkin niistä johdetaan toisista origamiaksioomista. Näytetään, että yhden taitoksen origamiaksioomia ei ole enempää kuin tässä tutkielmassa esitellyt seitsemän.

Tämän jälkeen tarkastellaan, millaisia lukualueita eri origamiaksioomia käyttämällä saadaan aikaan kompleksitasossa. Käsitellään neljä lukualuetta, jotka muodostuvat lisäämällä edellisiin origamiaksioomiin jokin lisää. Suppein käsiteltävä joukko on Thaleen joukko, joka muodostuu origamiaksioomien O1 ja O2 pohjalta. Origamiaksiooman O1 mukaan kahden pisteen kautta voidaan tehdä taitos, ja origamiaksiooman O2 mukaan voidaan tehdä taitos, joka kuvaa annetun pisteen toiseksi annetuksi pisteeksi. Osoitetaan, että näillä origamiaksioomilla muodostuva Thaleen joukko on kunta.

Lisätään edellisiin origamiaksiooma O3, jonka mukaan suoran voi kuvata toiseksi suoraksi. Näin saadaan Pythagoraan kunta. Eukleideen kunta saadaan lisäämällä edellisiin origamiaksiooma O5, jonka mukaan voidaan taittaa piste suoralle taitoksella, joka kulkee toisen pisteen kautta.

Erityisen huomionarvoinen kunta on Vietan kunta. Se saadaan ottamalla käyttöön origamiaksiooma O6, jonka mukaan yhdellä taitoksella voidaan taittaa kaksi eri pistettä yhtäaikaisesti kahdelle eri suoralle. Origamiaksiooman O6 avulla voidaan konstruoida mielivaltaisen luvun kuutiojuuri ja jakaa mielivaltainen kulma kolmeen osaan. Näin Vietan kunta on suurempi kuin esimerkiksi harpin ja viivaimen avulla muodostettava. Origamiaksiooma O6 mahdollistaa kolmannen asteen yhtälön ratkaisemisen geometrisella menetelmällä.

Lopuksi tarkastellaan erityisesti kolmannen asteen yhtälön ratkaisemista taittelemalla. Esitellään Lill'n menetelmä, jolla ratkaistaan polynomiyhtälöitä geometrisesti. Menetelmässä piirretään yhtälöä kuvaava polku, joka muodostuu yhtälön kertoimien määräämistä janoista. Tämän jälkeen muodostetaan toinen janoista koostuva polku, joka noudattaa määrättyjä sääntöjä alkaen ja loppuen samoihin pisteisiin kuin ensimmäinen polku. Polkujen väliin muodostuu kulma $\theta$, jonka avulla saadaan yhtälön yksi juuri $x = -\tan\theta$.

Kun on käsitelty Lill'n menetelmä, selvitetään, miten sitä voi käytännössä hyödyntää origamitaittelussa kolmannen asteen yhtälöiden ratkaisemiseksi. Tämä on mahdollista origamiaksiooman O6 avulla ratkaisemalla Belochin neliöksi kutsuttu konstruointiongelma. Siinä taitellaan neliö, jonka kaksi vierekkäistä kulmaa ovat annetuilla suorilla ja kaksi sivua kulkee annettujen pisteiden kautta. Kun hyödynnetään

tätä konstruktiota, voidaan löytää Lill'n metodissa tarvittava polku kolmannen asteen yhtälölle. Tällä tavalla taittelemalla löydetään kaikki kolmannen asteen yhtälön reaaliset juuret.

# Sisältö

# Johdanto

Geometrisia konstruktioita voidaan tehdä harpin ja viivaimen lisäksi monilla muillakin keinoilla. George Martinin teoksessa [**16**] on käsitelty erilaisia geometrisen konstruoinnin välineitä. Eräs näistä on paperintaittelu eli origami [**16**, s. 145-159]. Tämän tutkielman tavoite on selvittää muun muassa millaisia taitoksia origameilla voi tehdä annettujen pisteiden ja suorien pohjalta, millaisia lukualueita näillä taitoksilla voidaan muodostaa ja lopulta miten kolmannen asteen yhtälö ratkaistaan origamin avulla.

Kun taittelua verrataan harppi-viivain-konstruktioihin, origamigeometriassa tarvitaan harpin ja viivaimen sijaan pelkkiä taitoksia. Euklidisen geometrian konstruktiot koostuvat kolmesta äärellisesti toistuvasta toiminnosta: voidaan piirtää suora kahden pisteen läpi ja ympyrä annetulla keskipisteellä ja säteellä, sekä paikantaa ympyröiden ja suorien muodostamia leikkauspisteitä. Kun origamigeometrian konstruktiot jaetaan samaan tapaan äärellisesti toistuviin toimintoihin, niitä on vain kaksi. Voidaan tehdä taitos yksi kerrallaan, tarkoittaen sitä, että edellinen taitos täytyy avata ennen uuden taittamista. Lisäksi voidaan paikantaa taitosten risteämiskohtia, jotka määrittelevät origamigeometrian pisteet. [**8**]

Taitoksia voidaan tehdä monipuolisemmin kuin harppi-viivain-konstruktioiden suoria, joissa jana voidaan piirtää vain kahden pisteen välille. Ensimmäisessä luvussa aloitetaan esittelemällä erilaiset mahdolliset taitokset. Näitä kutsutaan origamiaksioomiksi, vaikka ne eivät muodosta varsinaista aksioomajärjestelmää. Taitoksia on mahdollista tehdä vain yksi kerrallaan, eli edellinen avataan ennen kuin tehdään toinen taitos. Näin voidaan tehdä seitsemän erilaista taitosta annettujen pisteiden ja suorien pohjalta. Enempää ei ole, mikä perustellaan tarkastelemalla kohdistuksia, joista origamiaksioomien voidaan ajatella muodostuvan. Toisessa luvussa tutkitaan, millaisia lukualueita eri origamiaksioomien avulla voidaan tuottaa. Suppein tarkasteltava lukualue on Thaleen joukko, joka muodostetaan origamiaksioomilla O1-O2. Kun tähän lisätään O3, saadaan Pythagoraan kunta. Edelleen lisäämällä O5 saadaan Eukleideen kunta, joka on sama kuin harpilla ja viivaimella saatava kunta. Kun käytössä on vielä O6, saadaan Vietan kunta. Tällöin esimerkiksi kulman kolmijako ja kuutiojuuren konstruointi ovat mahdollisia.

Kolmannessa luvussa keskitytään erityisesti siihen, että origamiaksiooma O6 mahdollistaa kolmannen asteen yhtälön ratkaisemisen geometrisesti. Tämä perustuu Lill'n menetelmään, jossa piirretään yhtälöä kuvaava polku ja sen jälkeen tietyin ehdoin ratkaisupolku. Polkujen välinen kulma antaa yhtälölle ratkaisun. Beloch näytti, että Lill'n menetelmä voidaan toteuttaa taittelemalla. Näin löydetään kaikki kolmannen asteen polynomin reaaliset juuret.

Geometristen konstruktioiden mielessä paperintaittelua käsitteli ensimmäisenä T. Sundara Row vuonna 1893 Intiassa teoksessaan Geometric Exercises in Paper Folding, [**19**]. Siinä hän toteaa, että kaikki harppi ja viivain -konstruktiot voidaan selvästi toteuttaa paperintaittelulla. Muunlaisia konstruktioita kuten mielivaltaisen kulman kolmijakoa ei tässä kuitenkaan mainita. Ensimmäinen teos, joka käsittelee täsmällisesti paperintaittelua geometristen konstruktioiden näkökulmasta, on R. C. Yatesin Geometric Tools vuodelta 1949. Siinä esitellään 3 taitteluoperaatiota, joissa näkyy jo yhteys origamiaksioomiin. [**16**, s.145]

1980-luvulla Jacques Justin ja Humiaki Huzita esittelivät kumpikin tahoillaan origamiaksioomat, Justin seitsemän ja Huzita kuusi niistä [**2**, s.1-3]. Lisäksi Justin esitteli kulman kolmijaon ja kuutiojuuren ratkaisun. Myös Hisashi Abe kehitti tavan jakaa kulma kolmeen osaan. Tämä tapa esitellään tutkielmassa. Esimerkiksi Roger C. Alperin ja Robert J. Lang ovat tutkineet origamien geometriaa tästä eteenpäin 2000-luvulla, näyttäen teoksessaan [**2**] muun muassa, että yhden taitoksen origamiaksioomia ei ole enempää, ja laajentaen näkökulmaa useamman samanaikaisen taitoksen sallimiseen. Useampi yhtäaikainen taitos ja käyrät taitokset kuuluvat tämän tutkielman ulkopuolelle. Geometristen konstruktioiden ulkopuolella näkökulmia origamien matematiikkaan ovat muun muassa tesselaatioiden ja jäykkien materiaalien taittelun tarkastelu (rigid folding).

LUKU 1

# Origamiaksioomat

## 1.1. Seitsemän origamiaksioomaa

Origamigeometriassa paperi ajatellaan äärettömäksi samaan tapaan kuin euklidisessakin. Oletetaan euklidinen taso $\mathbb{R}^2$ olemassaolevaksi ja määritellään piste ja suora.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Piste on euklidisen tason piste.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Suora on euklidisen tason suora.

Suoria merkitään $(X, Y)$, mikä tarkoittaa niiden pisteiden $(x, y)$ joukkoa, joka toteuttaa yhtälön $Xx + Yy + 1 = 0$. Origon kautta kulkevia suoria ei pysty tähän tapaan ilmaisemaan, mutta niitä ei tarvitse erikseen käsitellä, sillä koordinaatiston voi tarvittaessa siirtää. Origamigeometriassa ainoastaan kahden suoran risteyskohdat ovat pisteitä, ja suoraan liittyy aina peilaus, joka määräytyy suoran parametrien $X$ ja $Y$ perusteella.

Kun paperintaittelussa tehdään taitos, määritellään taitoksen jälki, suora, ja lisäksi peilaus, kun osa paperista taitetaan toisen päälle. Matemaattinen peilaus kuvaa koko avaruuden koko avaruudeksi, kun taas paperia taitellessa paperi puolitetaan. Kuitenkin paperin taittamisen tulkinta peilauksena jonkin suoran suhteen on toimiva. Tässä tutkielmassa taitos tarkoittaa sekä suoraa että peilausta sen suhteen. Tämä on perusteltua, sillä suora ja taitos vastaavat yksikäsitteisesti toisiaan. Merkitään pisteiden $P$ ja $Q$ välistä janaa $\overline{PQ}$, ja määritellään peilaus.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Kun on annettuna suora $m$, peilaus $T_m$ on kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, niin että kaikille pisteille $P \in \mathbb{R}$

$$T_m(P) = \begin{cases} P, & \text{if } P \in m \\ Q, & \text{if } P \notin m \text{, ja } m \text{ on janan } \overline{PQ} \text{ kohtisuora puolittaja.} \end{cases}$$

Huomataan, että $T(P_1) = P_2$ joss $T(P_2) = P_1$, sillä janan $\overline{P_1P_2}$ kohtisuora puolittaja on myös janan $\overline{P_2P_1}$ kohtisuora puolittaja. Paperintaittelussa voi vastaavasti havaita, että ei ole merkitystä, kumpi puoli paperista taitetaan toisen päälle.

Kun suora $m$ on $Xx + Yy + 1 = 0$, peilaus suoran $m$ suhteen on affiinikuvaus $T_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T_m(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -2\cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) \end{bmatrix} \vec{x} + \frac{-2}{X^2 + Y^2} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

missä $\theta$ on suoran ja $x$-akselin välinen kulma (suorasta alkaen vastapäivään),

$$\theta = \pi - \arctan(-X/Y), \text{ kun } Y \neq 0.$$

Jos $Y = 0$, niin kulma $\theta$ ole siten määriteltävissä tällä tavalla, sillä kyseessä on pystysuora. Tällöin $\theta = \pi/2$. Huomataan, että $\cos(\theta) = Y/\sqrt{X^2 + Y^2}$ ja $\sin(\theta) =$

$X/\sqrt{X^2+Y^2}$. Sijoittamalla nämä matriisiin, saadaan pisteelle $(x,y)$ kuva

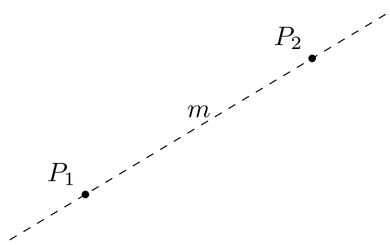
$$T(x,y) = \begin{bmatrix} x(Y^2-X^2) - 2XYy - 2X \\ y(X^2-Y^2) - 2XYx - 2Y \end{bmatrix} \frac{1}{X^2+Y^2}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi eri tapoja määritellä äärellinen määrä taitoksia erilaisten olemassaolevien pisteiden ja suorien pohjalta. Tapoja tunnetaan seitsemän ja niitä kutsutaan origamiaksioomiksi. Nimestään huolimatta ne eivät muodosta aksioomajärjestelmää, vaan vaativat pohjalle valmiin geometrian, jossa on määritelty esimerkiksi kohtisuoruus.

Tämä tutkielma soveltaa yleisimpiä tapoja muodostaa origamiaksioomat. Ne esitellään lähes samalla lailla monissa eri lähteissä, esimerkiksi [**4**], [**3**], [**2**], [**17**], [**8**] ja [**1**]. Osoitetaan, että origamiaksioomat ovat voimassa euklidisessa tasossa $\mathbb{R}^2$. Jokaisesta origamiaksioomasta on todistuksen yhteydessä kuva.

LAUSE 1.4 (O1). *Kun on annettu kaksi eri pistettä $P_1$ ja $P_2$, on olemassa yksiselitteinen taitos $m$, joka kulkee näiden kahden pisteen kautta.*

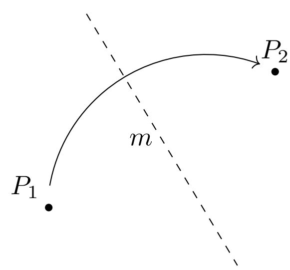
TODISTUS. Kaksi pistettä määräävät yksiselitteisesti suoran, ja siten myös peilauksen sen suhteen. □




KUVA 1.1. (O1) Kahden pisteen $P_1$ ja $P_2$ välinen taitos.

LAUSE 1.5 (O2). *Kun on annettu kaksi eri pistettä $P_1$ ja $P_2$, on olemassa yksiselitteinen taitos $m$, joka kuvaa pisteen $P_1$ pisteeksi $P_2$.*

TODISTUS. Janan $\overline{P_1P_2}$ kohtisuora puolittaja määrittelee halutun taitoksen. □

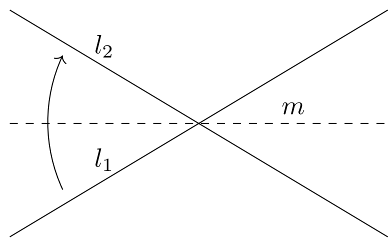



KUVA 1.2. (O2) Taitos, joka kuvaa pisteen $P_1$ pisteeksi $P_2$.

LAUSE 1.6 (O3). *Olkoot $l_1$ ja $l_2$ suoria. On olemassa yksi tai kaksi taitosta, jotka kuvaavat suoran $l_1$ suoraksi $l_2$.*

TODISTUS. Jos suorat $l_1$ ja $l_2$ ovat yhdensuuntaiset, taitos $m$ on yhdensuuntainen suoriin $l_1$ ja $l_2$ nähden ja kulkee niiden välistä, siten että sen etäisyys kumpaankin suoraan on yhtä suuri. Tällöin mikä tahansa suoran $m$ normaali leikkaa suorat $l_1$ ja $l_2$ pisteissä $A$ ja $B$, jotka ovat yhtä kaukana suorasta $m$. Siten suora $m$ on janan $\overline{AB}$ kohtisuora puolittaja ja kuvaus $T(m)$ kuvaa kaikki suoran $l_1$ pisteet suoralle $l_2$. Tällöin taitoksia on täsmälleen yksi.

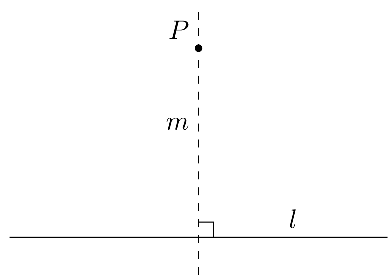
Jos suorat eivät ole yhdensuuntaiset, ne leikkaavat pisteessä, johon muodostuu kaksi suorien välistä kulmaa. Näiden kulmien puolittajat toteuttavat origamiaksiooman O3 ehdon, sillä puolittajien etäisyys kumpaankin suoraan on yhtä suuri. Tämä voidaan todistaa konstruoimalla kulmanpuolittajalle normaali, joka muodostaa taitoksen ja suorien kanssa kaksi KSK-säännön nojalla yhdenmuotoista kolmiota. Näin taitoksia on täsmälleen kaksi. □




KUVA 1.3. (O3) Taitos, joka kuvaa suoran $l_1$ suoraksi $l_2$.

LAUSE 1.7 (O4). *Kun on annettu piste $P$ ja suora $l$, on olemassa yksiselitteinen taitos $m$ siten, että se on kohtisuora suoraan $l$ nähden ja kulkee pisteen $P$ kautta.*

TODISTUS. Kohtisuoruus suoraan $l$ nähden ja piste $P$ jonka kautta taitos kulkee, määrittelevät taitoksen yksiselitteisesti. □

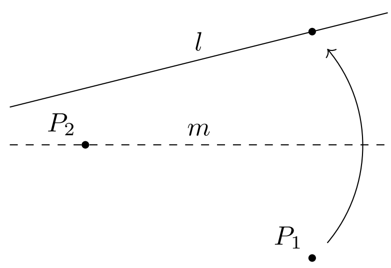



KUVA 1.4. (O4) Pisteen $P$ kautta kulkeva suoraan $l$ nähden kohtisuora taitos.

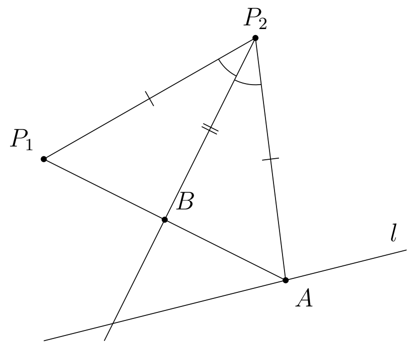
LAUSE 1.8 (O5). *Olkoot $P_1$ ja $P_2$ pisteitä ja $l$ suora siten, että pisteiden $P_1$ ja $P_2$ etäisyys toisistaan on vähintään yhtä suuri kuin suoran $l$ etäisyys pisteestä $P_2$. Tällöin on olemassa yksi tai kaksi taitosta $m$, jotka kulkevat pisteen $P_2$ kautta ja kuvaavat pisteen $P_1$ suoralle $l$.*

TODISTUS. Käytetään janan $\overline{PQ}$ pituudesta merkintää $\|\overline{PQ}\|$. Jos suora $l$ on yhtä kaukana pisteestä $P_2$ kuin piste $P_1$, niin suoralla $l$ on täsmälleen yksi piste $A$, siten että kuvan 1.6 mukaisesti $\|\overline{P_1P_2}\| = \|\overline{AP_2}\|$. Kulman $\angle P_1P_2A$ puolittaja leikkaa janan $\overline{P_1A}$ pisteessä $B$. Tällöin kolmiot $\triangle P_1P_2B$ ja $\triangle AP_2B$ ovat yhdenmuotoiset, koska niillä on yhteinen sivu $\overline{BP_2}$ ja $\angle P_1P_2B = \angle AP_2B$. Näin vieruskulmat $\angle P_1BP_2$ ja $\angle ABP_2$ ovat yhtä suuret, ja siten suorat, ja $\|\overline{P_1B}\| = \|\overline{AB}\|$. Kulman $\angle P_1P_2A$ puolittaja on siis janan $\overline{P_1A}$ kohtisuora puolittaja ja määrittelee halutun taitoksen.

Jos suora $l$ on lähempänä pistettä $P_2$ kuin piste $P_1$, suoralla $l$ on kaksi sellaista pistettä, jotka ovat yhtä kaukana pisteestä $P_2$ kuin piste $P_1$. Siten haluttuja taitoksia on täsmälleen kaksi. □



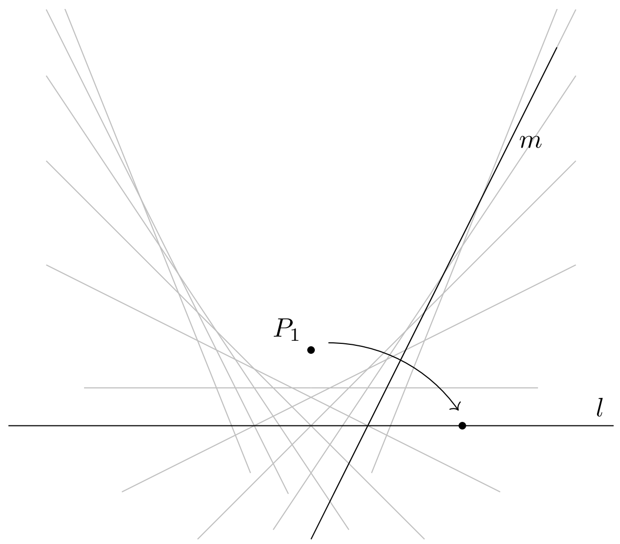

KUVA 1.5. (O5) Taitos, joka kulkee pisteen $P_2$ kautta ja kuvaa pisteen $P_1$ suoralle $l$.




KUVA 1.6. Origamiaksiooman O5 todistus.

Jos suora $l$ on kauempana pisteestä $P_2$ kuin piste $P_1$, suoralla ei ole pistettä, jonka etäisyys pisteestä $P_2$ olisi sama kuin pisteiden $P_1$ ja $P_2$ etäisyys. Siten haluttua suoraa ei ole olemassa.

Origamiaksioomalla O5 on yhteys paraabeliin. Merkitään pisteen $P$ ja suoran $m$ etäisyyttä $d(P, m)$. Paraabeli $S = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, m) = \|\overline{PQ}\|\}$ on joukko tason pisteitä, joiden etäisyys annetuista pisteestä $Q$ ja suorasta $m$ on yhtä suuri. Piste $Q$ on paraabelin polttopiste ja suora $m$ sen johtosuora. Origamiaksiooman O5 määrittelemä taitos on tangentti paraabelille, jonka polttopiste on $P_1$ ja johtosuora on $l$. Kun pistettä $P_2$ muutetaan, saadaan saman paraabelin useita tangentteja. Siten pisteen $P_1$ taittaminen jokaiselle suoran $l$ pisteelle antaa kokoelman suoria, joiden määräämä verhokäyrä on paraabeli. Tätä on havainnollistettu kuvassa 1.7. Paraabelin taittelu paperista on helppoa, kun valitaan suoraksi $l$ paperin reuna ja taitetaan se pisteelle $P_1$.

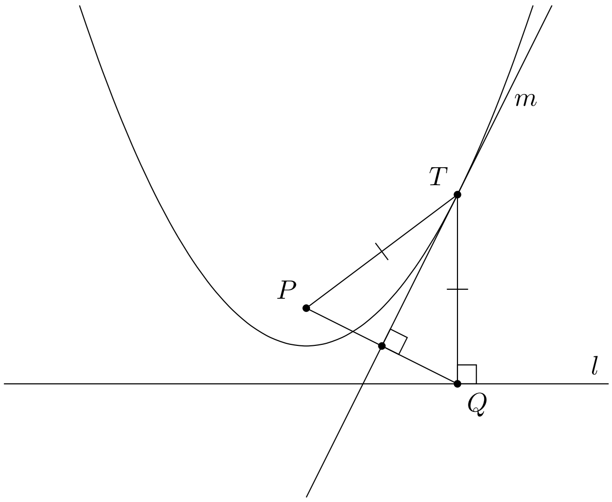



KUVA 1.7. O5:n taitokset eri pisteillä $P_2$ muodostavat verhokäyrän, joka on paraabeli.

LAUSE 1.9. ([**16**, Theorem 10.3]) *Jos piste $P$ on suoralla $l$, niin sen peilikuva suoran $m$ suhteen on suoralla $l$, jos ja vain jos taitos $m$ kulkee pisteen $P$ kautta tai on kohtisuorassa suoraan $l$ nähden. Jos piste $P$ ei ole suoralla $l$, niin sen peilikuva suoran $m$ suhteen on suoralla $l$ jos ja vain jos $m$ on tangentti paraabelille, jonka polttopiste on piste $P$ ja johtosuora on suora $l$.*

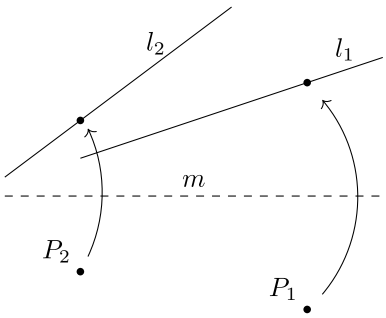
TODISTUS. Todistetaan väite lähteen [**16**] mukaan. Ensimmäinen osa seuraa peilauksen määritelmästä. Tarkastellaan toisen osan väitettä, että taitos, joka kuvaa pisteen $P$ suoralle $l$, on tangentti paraabelille, jonka polttopiste on $P$ ja johtosuora on $l$. Nyt $P$ ei ole suoralla $l$, ja origamiaksiooman O5 mukaan on olemassa suora $m$ siten, että $T_m(P) = Q \in l$. Tilanne näkyy kuvassa 1.8. Peilauksen määritelmän mukaan $m$ on tällöin janan $\overline{PQ}$ kohtisuora puolittaja. Koska $P$ ei ole suoralla $l$, $m$ ja $l$ eivät ole kohtisuorassa. Siten pisteen $Q$ kautta kulkeva suoran $l$ normaali leikkaa suoran $m$ jossakin pisteessä $T$. Tällöin $\|\overline{TP}\| = \|\overline{TQ}\|$. Koska $T$ on yhtä kaukana pisteestä $P$ ja suorasta $l$, se sijaitsee paraabelilla, jonka polttopiste on $P$ ja johtosuora on $l$. Siten suoralla $m$ on ainakin yksi piste, joka on tällä paraabelilla. Suora $m$ on paraabelin tangentti, jos pisteitä on vain yksi. Siispä oletetaan, että suoralla $m$ on olemassa toinenkin piste $S$, joka on myös paraabelin piste. Nyt suoran $l$ normaali pisteen $S$ kautta leikkaa suoraa $l$ pisteessä $F$. Tällöin $F \neq Q$. Koska $S$ on suoralla $m$, pätee $\|\overline{SP}\| = \|\overline{SQ}\|$. Myös, koska $S$ on paraabelilla, pätee $\|\overline{SP}\| = \|\overline{SF}\|$. Siten $\|\overline{SQ}\| = \|\overline{SF}\|$, joten muodostuu kolmio $\triangle FSQ$, joka on tasakylkinen ja kannan kulma on suorakulma. Tämä on mahdotonta, joten suoralla $m$ on vain yksi paraabelin piste ja siten se on paraabelin tangentti.

Tarkastellaan sitten väitettä, että kun on paraabeli jonka polttopiste on $P$ ja johtosuora on $l$, paraabelin mikä tahansa tangentti peilaa pisteen $P$ suoralle $l$. Oletetaan, että $t$ on kyseisen paraabelin tangentti, joka sivuaa paraabelia pisteessä $T$. Suoran $l$ normaali pisteen $T$ kautta leikkaa nyt suoraa $l$ pisteessä $Q$. Olkoon suora $n$ janan $\overline{PQ}$ kohtisuora puolittaja, jolloin siis $T_n(P) = Q$. Koska $T$ on paraabelin piste, on $\|\overline{TP}\| = \|\overline{TQ}\|$ ja tällöin $T$ on suoralla $n$. Siten $n$ on paraabelin tangentti. Kuitenkin yhden paraabelin pisteen kautta kulkee vain yksi paraabelin tangentti, joten täytyy olla $n = t$ ja $T_t(P) = Q$. □




Kuva 1.8. Pisteen $P$ taitos suoralle $l$ on määrätyn paraabelin tangentti.

Lause 1.10 (O6). *Olkoot $P_1$ ja $P_2$ pisteitä, sekä $l_1$ ja $l_2$ suoria, jotka eivät ole yhdensuuntaiset. Tällöin on olemassa 1-3 taitosta, joiden määrittelemät peilaukset kuvaavat pisteen $P_1$ suoralle $l_1$ ja pisteen $P_2$ suoralle $l_2$.*




Kuva 1.9. (O6) Kahden pisteen taittaminen yhtäaikaisesti kahdelle suoralle.

Todistus. Todistetaan lause lähteiden [**16**] ja [**14**] pohjalta. Tarkastellaan tilannetta, jossa $P_1$ on suoralla $l_1$ ja $P_2$ on suoralla $l_2$. Nyt on kolme taitosta, jotka toteuttavat ehdon: Taitos, joka kulkee pisteen $P_1$ kautta ja on kohtisuora suoraan $l_2$

nähden, taitos, joka kulkee pisteen $P_2$ kautta ja on kohtisuora suoraan $l_1$ nähden, sekä taitos, joka kulkee pisteiden $P_1$ ja $P_2$ kautta. Nämä ovat väistämättä olemassa, sillä ne vastaavat origamiaksioomien O1 ja O4 tilanteita.

Tarkastellaan sitten tapauksia joissa $P_1$ ei ole suoralla $l_1$. Voidaan valita koordinaatisto siten, että $P_1 = (0, 1)$ ja suoran $l_1$ yhtälö on $y + 1 = 0$ eli $y = -1$. Suoran $l_2$ yhtälö on $Ax + By + 1 = 0$. Olkoon piste $P_2 = (u, v)$. Olkoon suora $m$ taitos, joka kuvaa pisteen $P_1$ suoralle $l_1$. Tällöin pisteen $P_1$ kuva on $P_1' = (t, -1)$. Janan $\overline{P_1P_1'}$ keskipiste on piste $(t/2, 0)$ ja sen kulmakerroin on silloin $-2/t$. Siten taitoksen $m$ kulmakerroin on $t/2$. Taitoksen yhtälö on tämän perusteella

$$y = \frac{t}{2}(x - \frac{t}{2}),$$

jonka voi kirjoittaa muodossa

$$\frac{-2}{t}x + \frac{4}{t^2}y + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Tämän taitoksen täytyy kuvata myös piste $P_2$ suoralle $l_2$, joten tarkastellaan pisteitä $P_2$ ja $T_m(P_2) = (u', v') = P_2'$. Näiden muodostaman janan kulmakertoimesta

$$\frac{v - v'}{u - u'}$$

saadaan taitoksen kulmakerroin

$$-\frac{u - u'}{v - v'},$$

ja nyt voidaan merkitä tämä yhtä suureksi aiemmin päätellyn kulmakertoimen kanssa, jolloin saadaan yhtälö

$$\frac{t}{2} = -\frac{u - u'}{v - v'}. \tag{1.2}$$

Janan $\overline{P_2P_2'}$ keskipiste on

$$(\frac{u + u'}{2}, \frac{v + v'}{2}),$$

ja kun sijoitetaan tämä taitoksen $m$ yhtälöön 1.1, saadaan

$$\frac{-1}{t}(u - u') + \frac{2}{t^2}(v - v') + 1 = 0. \tag{1.3}$$

Nyt voidaan eliminoida $t$ yhdistämällä yhtälöt 1.2 ja 1.3. Saadaan yhtälö

$$-(u - u')^2(v - v') + (v - v')^2 + 2(u - u')^2 = 0. \tag{1.4}$$

Piste $P_2'$ on suoralla $l_2$, joten se toteuttaa yhtälön $Au' + Bv' + 1 = 0$. Koska $l_1 \nparallel l_2$, saadaan

$$v' = -\frac{1 + Au'}{B}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön 1.4, saadaan

$$-(u - u')^2(v + \frac{1 + Au'}{B}) + (v + \frac{1 + Au'}{B})^2 + 2(u - u')^2 = 0. \tag{1.5}$$

joka on kolmannen asteen yhtälö. Sillä on siten vähintään yksi reaalinen juuri ja enintään kolme. Näin luvulle $u'$ saadaan 1, 2 tai 3 ratkaisua, joiden avulla luvulle $v'$

saadaan myös yksiselitteiset ratkaisut ja jokainen näistä määrittelee yksiselitteisesti yhden taitoksen. Siten taitoksia on aina 1, 2 tai 3. □

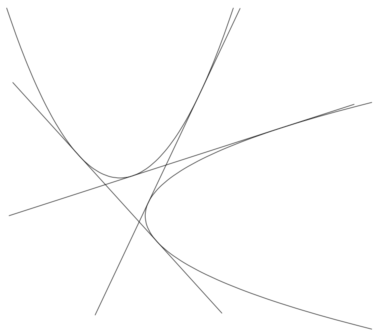
Tarkastellaan myös kahta mahdollista tilannetta, joissa suorat $l_1$ ja $l_2$ ovat yhdensuuntaiset. Tilanteessa, jossa $P_1$ ei ole suoralla $l_1$, Lauseen 1.10 todistuksen mukaisessa suoran $l_2$ yhtälössä on $A = 0$, ja siten $v' = -1/B$. Sijoittamalla tämä yhtälöön 1.4 saadaan

$$-(u-u')^2(v+1/B)+(v+1/B)^2+2(u-u')^2=0. \tag{1.6}$$

Tästä muodostuu toisen asteen yhtälö, josta voidaan ratkaista luku $u'$. Tällä voi olla nollasta kahteen ratkaisua. Yhtään ratkaisua ei ole silloin, jos pisteiden $P_1$ ja $P_2$ etäisyys toisistaan on pienempi kuin suorien $l_1$ ja $l_2$.

Toisessa tilanteessa piste $P_1$ on suoralla $l_1$ ja $P_2$ on suoralla $l_2$. Tällöin kaikki taitokset, jotka ovat kohtisuorassa suoriin $l_1$ ja $l_2$ nähden, kuvaavat pisteet $P_1$ ja $P_2$ suorille $l_1$ ja $l_2$. Siten taitoksia on ääretön määrä, mikä ei ole hyväksyttävää, koska aksioomat vaativat äärellisen määrän taitoksia, että ne olisivat mielekkäitä.

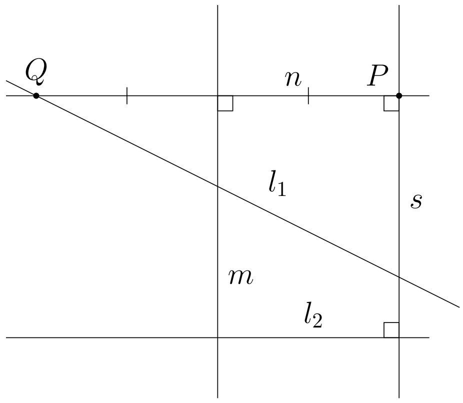
Lauseen 1.9 mukaan yhden pisteen taittaminen suoralle antaa tangentin paraabelille, joka määräytyy pisteen ja suoran mukaan. O6 kuvaa kaksi pistettä kahdelle suoralle ja antaa siten yhteiset tangentit kahdelle paraabelille, joiden polttopiste ja johtosuora määräytyvät annetuista kahdesta pisteestä ja suorasta. Paraabeleilla voi olla enintään kolme yhteistä tangenttia. Tällainen tilanne näkyy kuvassa 1.10.



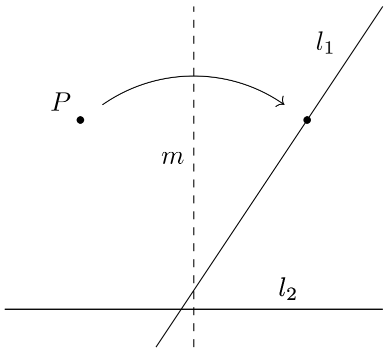
Kuva 1.10. O6 antaa kahden paraabelin yhteiset tangentit.

Lause 1.11 (O7). *Kun on annettu piste $P$ sekä suorat $l_1 \nparallel l_2$, on olemassa yksikäsitteinen taitos $m$, joka on kohtisuorassa suoraan $l_2$ nähden ja kuvaa pisteen $P$ suoralle $l_1$.*

Todistus. Origamiaksiooma O7 saadaan käyttämällä origamiaksioomia O2 ja O4 kuvan 1.11 mukaisesti. Origamiaksiooman O4 mukaan voidaan tehdä suoraan $l_2$ nähden kohtisuora taitos $s$, joka kulkee pisteen $P$ kautta. Tämän jälkeen voidaan käyttää uudelleen origamiaksioomaa O4 ja tehdä pisteen $P$ kautta kulkeva taitos $n$, joka on kohtisuora taitokseen $s$ nähden. Koska $l_1 \nparallel l_2$, ja $n \parallel l_2$, suorat $n$ ja $l_1$ leikkaavat toisensa jossakin pisteessä $Q \in l_1$. Origamiaksiooman O2 mukaan pisteille $Q$ ja $P$ voidaan taittaa kohtisuora puolittaja $m$. Nyt tämä taitos $m$ kuvaa pisteen $P$ suoralle $l_1$ ja on kohtisuora suoraan $l_2$ nähden. □




Kuva 1.11. Origamiaksiooman O7 todistus.




Kuva 1.12. (O7) Suoraan $l_2$ nähden kohtisuora taitos, joka kuvaa pisteen $P$ suoralle $l_1$.

Origamiaksioomassa O7 taitetaan yksi piste annetulle suoralle, ja siten myös tämä origamiaksiooma tuottaa tangentin paraabelille, jonka polttopiste ja johtosuora tunnetaan. Piste $P$ on paraabelin polttopiste, suora $l_1$ on paraabelin johtosuora ja suora $l_2$ on yhdensuuntainen paraabelin tangentin kanssa. Kun tarkastellaan uudelleen kuvaa 1.7, havaitaan, että se pystytään muodostamaan myös origamiaksioomalla O7, muuttaen suoraa $l_2$, johon nähden taitos on kohtisuorassa. Huolimatta tästä samankaltaisuudesta origamiaksioomien O5 ja O7 välillä, O5 on näistä kahdesta vahvempi työkalu.

Origamiaksiooma O7 todistetaan konstruoimalla sen vaatima taitos origamiaksioomien O4 ja O2 avulla. Joitakin origamiaksioomia voidaan siis johtaa toisista origamiaksioomista. Erityisesti aksioomat O1-O5 voidaan johtaa origamiaksioomasta O6. Martin [**16**] osoittaa että supistettu versio aksioomasta O6 riittää muodostamaan saman lukualueen kuin O1-O7, kunhan piste määritellään taitosten leikkauspisteenä, siten että alkutilanteessa on olemassa toisiaan leikkaavia suoria. Myös esimerkiksi lähteessä [**8**] todetaan, että O6 on riittävä korvaamaan kaikki 7 origamiaksioomaa. Siten origamiaksioomien lista ei ole pienin mahdollinen, vaan itse asiassa suurin. Seuraavassa aliluvussa perustellaan, miksi origamiaksioomia ei ole enempää.

### 1.2. Kohdistukset

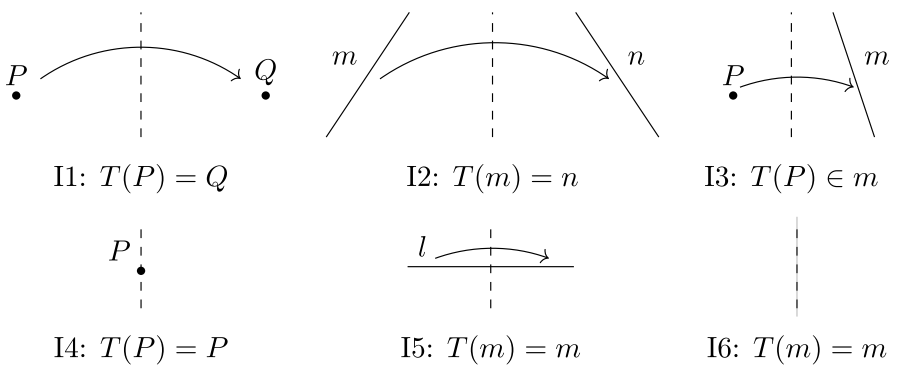
Tämä aliluku perustuu Jorge C. Luceron teokseen [**14**] sekä Alperinin ja Langin teokseen [**2**]. Origamiaksioomat ovat yhden taitoksen operaatioita, joilla saavutetaan pisteiden ja suorien välisiä kohdistuksia. Suora ja piste voidaan kohdistaa kolmella eri tavalla: pisteiden $P$ ja $Q$ kohdistus toteutuu kun $P = Q$, suorien $m$ ja $n$ kohdistus toteutuu kun $m = n$, ja pisteen $P$ ja suoran $n$ kohdistus toteutuu, kun $P \in n$.

Kun tarkastellaan pisteiden ja suorien peilauksia, ne voivat kohdistua kuudella eri tavalla jollekin pisteelle tai suoralle, kun otetaan huomioon, että osa peilauksista tarkoittaa käytännössä samaa tilannetta taitoksen kannalta. Tilanteet $T(P) = Q$ ja $T(Q) = P$ vastaavat toisiaan, tilanteet $T(P) \in m$ ja $P \in T(m)$ vastaavat toisiaan, ja $T(m) = n$ vastaa tilannetta $T(n) = m$.

Kun $P \neq Q$ ja $m \neq n$, voidaan luetella kaikki tavat kohdistaa pisteen $P$ peilattu kuva $T(P)$ ja suoran $m$ peilattu kuva $T(m)$ pisteisiin $P$ ja $Q$ sekä suoriin $m$ ja $n$. Merkitään kohdistuksia I-kirjaimella lähteessä [**14**] käytettyyn termiin incidence perustuen. Nämä kohdistukset ovat

I1 $T(P) = Q$,
I2 $T(m) = n$,
I3 $T(P) \in m$, kun $P \notin m$,
I4 $T(P) = P$,
I5 $T(m) = m$, ja on piste $A \in m$ siten, että $T(A) \neq A$ ja
I6 $T(m) = m$, ja kaikilla pisteillä $A \in m$ on $T(A) = A$.

Peilattujen pisteiden ja suorien kaikki kohdistukset on esitelty kuvassa 1.13.




Kuva 1.13. Kaikki mahdolliset kohdistukset.

Taitokset kohdistavat pisteiden ja suorien kuvia pisteille ja suorille. Jotkin kohdistukset voidaan saavuttaa äärettömän monella eri taitoksella. Jos kuitenkin näitä kohdistuksia valitaan useampi ja vaaditaan, että yksi taitos toteuttaa ne kaikki, tällaisia taitoksia voidaan määritellä äärellinen määrä. Muodostetaan kaikki mahdolliset kohdistusten yhdistelmät siten, että yhdessä yhdistelmässä on mahdollisimman vähän kohdistuksia, mutta tarpeeksi, jotta se määrittelee äärellisen määrän taitoksia. Näin saadaan kohdistusten ja kohdistusparien joukko. Nämä kohdistukset ja niiden parit vastaavat origamiaksioomia ja niitä voidaan muodostaa täsmälleen seitsemän. Origamiaksiooma voitaisiinkin määritellä minimimääränä kohdistuksia, joka määrittelee

| | I5: $F(m) = m$ | I3: $F(P) \in m$ | I4: $F(P) = P$ |
|---|---|---|---|
| I5: $F(n) = n$ | - | O7 | O4 |
| I3: $F(Q) \in n$ | O7 | O6 | O5 |
| I4:$F(Q) = Q$ | O4 | O5 | O1 |

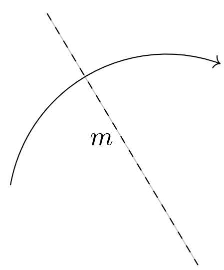
Taulukko 1. Mahdolliset kohdistusparit ja niiden muodostamat origamiaksioomat, kun $O \neq P$ ja $m \neq n$.

yhden taitoksen äärellisellä euklidisen tason alueella ja äärellisellä määrällä ratkaisuja [**2**, Def.8].

Suora $l = (X, Y)$ on määritelty kahdella parametrilla ja siten sillä on kaksi vapausastetta. Siten kohdistuksista muodostetun yhdistelmän pitää antaa täsmälleen kaksi yhtälöä, jotta se määrittelisi yhden suoran ja muodostaisi siten origamiaksiooman. Kohdistukset I1 ja I2 antavat kumpikin kaksi toteutettavaa yhtälöä, joten ne muodostavat itsenäisesti origamiaksioomat O2 ja O3. Kohdistukset I3, I4 ja I5 määräävät puolestaan vain yhden toteutettavan yhtälön ja antavat siksi äärettömästi suoria, jotka toteuttavat halutun kohdistuksen. Siten niitä tarvitaan kaksi, jotta voidaan määritellä äärellinen määrä taitoksia. Taulukossa 1 esitellään kohdistuksista I3, I4 ja I5 muodostuvat mahdolliset parit ja näytetään, mitä origamiaksioomaa kyseinen kohdistuspari kuvaa.

Ainoastaan I5-I5-pari ei voi muodostaa origamiaksioomaa. Se vaatii taitoksen $l$, joka on kohtisuora kahteen suoraan $m$ ja $n$ nähden. Jos suorat $m$ ja $n$ ovat yhdensuuntaiset, tällaisia taitoksia on äärettömästi, ja jos suorat eivät ole yhdensuuntaiset, ratkaisuja ei ole lainkaan.

Kohdistus I6 muodostaa itsenäisesti kaksi yhtälöä ja lähteen [**14**] mukaan siitä seuraa origamiaksiooma O8, joka on esitelty kuvassa 1.14. I6 ei kuitenkaan luo uutta taitosta, kuten muut kohdistukset: koska suora ja taitos samaistetaan, täsmälleen suoran kohdalla kulkeva taitos on jo olemassa. Siten tapaus O8 voidaan jättää huomiotta ja origamiaksioomia on täsmälleen seitsemän.




Kuva 1.14. (O8) Taitos annettua suoraa pitkin.

LUKU 2

# Lukualueet

Taittelemalla voidaan muodostaa erilaisia pistejoukkoja tasoon riippuen siitä, mitkä origamiaksioomat ovat käytettävissä. Tässä luvussa aloitetaan origamiaksioomilla O1 ja O2, ja tarkastellaan millaisia tason pisteitä niillä voidaan muodostaa, sekä millaisia lukuja koordinaatiston akseleille muodostuu. Lisäämällä näihin aksioomia yksi kerrallaan käsitellään yhteensä neljä erilaista tason pisteiden joukkoa. Tarkasteltavat joukot osoittautuvat kunniksi, kun kompleksilukujen tulo $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_2y_1 + x_1y_2)$ osoittautuu mahdolliseksi konstruoida. Tämän vuoksi on syytä käsitellä tasoa kompleksitasona ja määritellä kunta.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Kunta $\mathbf{K}(+, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas, joka sisältää kaikkien alkioidensa $a \neq 0$ käänteisalkiot [**12**].

Kunta on siis joukko, jossa on määritelty kaksi funktiota, summa ja tulo, jotka kuvaavat kaksi joukon alkiota yhdeksi joukon alkioksi. Kunta toteuttaa summan ja tulon liitäntälain ja vaihdantalain, vasta-alkioiden ja käänteisalkioiden olemassaolon, summan ja tulon neutraalialkion olemassaolon, sekä lisäksi osittelulain.

Tässä tekstissä käsitellään vain kompleksitasoa ja reaalilukuja, joten on hyvä todeta, mikä on riittävää reaalilukujen alikunnan muodostamiseksi. Reaalilukujen osajoukko $\mathbb{F}$ on kunta, jos se sisältää luvut 0 ja 1 ja lisäksi

$$a + b,\ a - b,\ ab,\ a/c$$

kuuluvat joukkoon $\mathbb{F}$ aina kun $a, b, c \in \mathbb{F}$, ja $c \neq 0$ [**16**, s.34]. Samoin kompleksilukujen osajoukko on kunta, kun se sisältää summan ja tulon neutraalialkiot ja on suljettu kompleksilukujen summan, tulon, erotuksen ja osamäärän suhteen.

Kun valitaan kolme pistettä $A$, $B$ ja $C$ siten, että ne eivät ole samalla suoralla, ja rajoitetaan muut pisteet vain niihin, jotka muodostuvat taitosten leikkauspisteistä, voidaan tarkastella, millaisia lukuja erilaisilla origamiaksioomien valinnoilla pystytään konstruoimaan.

## 2.1. Thaleen joukko

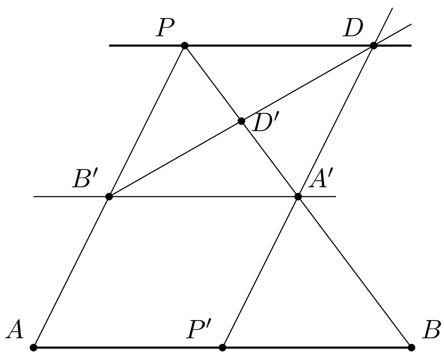
Alperin rakentaa artikkelissaan [**1**] Thaleen joukon, joka muodostuu ainoastaan origamiaksioomien O1 ja O2 avulla. Tämä aliluku perustuu täysin lähteeseen [**1**]. Määritellään Thaleen joukko.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoot pisteet $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ ja $C$, joka ei ole $x$-akselilla. Muut pisteet saadaan ainoastaan konstruoitavien taitosten leikkauspisteistä. Thaleen joukko on origamiaksioomien O1 ja O2 sisällä suljettu konstruoitavien pisteiden osajoukko kompleksitasossa, kun konstruktioita voidaan tehdä vain äärellinen määrä.

Käsitellään muutamia tärkeimmistä näillä origamiaksioomilla luotavista konstruktioista. Erityisesti myöhempiä lukualueita ajatellen on olennaista, että O4 on mahdollista johtaa näistä, ja pisteitä ja suoria pystytään peilaamaan annetun suoran suhteen. O1 ja O2 mahdollistavat myös origamiaksiooman O7 konstruoinnin.

Lause 2.3. ([**1**, Lemma 2.1.]) *Kun on annettu piste $P$ ja jana $\overline{AB}$, voidaan konstruoida jana, joka on yhdensuuntainen ja yhtä pitkä kuin jana $\overline{AB}$ ja jonka toinen päätepiste on $P$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että piste $P$ ei ole pisteiden $A$ ja $B$ muodostamalla suoralla. Puolitetaan janat $\overline{PA}$, $\overline{AB}$ ja $\overline{PB}$ kuvan 2.1 mukaisesti origamiaksiooman O2 avulla. Olkoot janojen keskipisteet $P'$, $A'$ ja $B'$, siten että $P'$ on pisteiden $A$ ja $B$ välissä, $A'$ pisteiden $P$ ja $B$ välissä ja $B'$ pisteiden $A$ ja $P$ välissä.




Kuva 2.1. Konstruoidaan pisteeseen $P$ jana, joka on yhtä pitkä ja yhdensuuntainen annettuun janaan nähden.

Jana $\overline{B'A'}$ on yhdensuuntainen janan $\overline{AB}$ kanssa. Konstruoidaan origamiaksiooman O1 avulla suora $P'A'$, ja puolitetaan jana $\overline{PA'}$, merkiten keskipistettä $D'$. Konstruoidaan suora $B'D'$. Nyt suorat $B'D'$ ja $P'A'$ leikkaavat pisteessä $D$. Jana $\overline{PD}$ on yhdensuuntainen janan $\overline{AB}$ kanssa ja pituudeltaan puolet sen pituudesta. Muodostetaan samalla konstruktiolla janalle $\overline{A'P'}$ yhdensuuntainen jana, jonka toinen kärkipiste on $B$. Tällöin muodostettu jana leikkaa suoran $PD$ pisteessä $E$, ja jana $\overline{PE}$ on yhtä pitkä ja yhdensuuntainen janan $\overline{AB}$ kanssa. Jos jana halutaan konstruoida toiseen suuntaan pisteestä $P$, se tehdään samalla tavalla, mutta suoran $A'P'$ sijaan konstruoidaan ja käytetään suoraa $B'P'$, ja tälle suoralle yhdensuuntainen suora konstruoidaan pisteestä $A$.

Jos $P$ on pisteiden $A$ ja $B$ muodostamalla suoralla, voimme konstruoida janan alkamaan pisteestä $Q$, joka ei ole suoralla, ja sen jälkeen tämän janan alkamaan pisteestä $P$. □

Lause 2.4. ([**1**, Cor. 2.2.]) *O4 seuraa aksioomista O1 ja O2.*

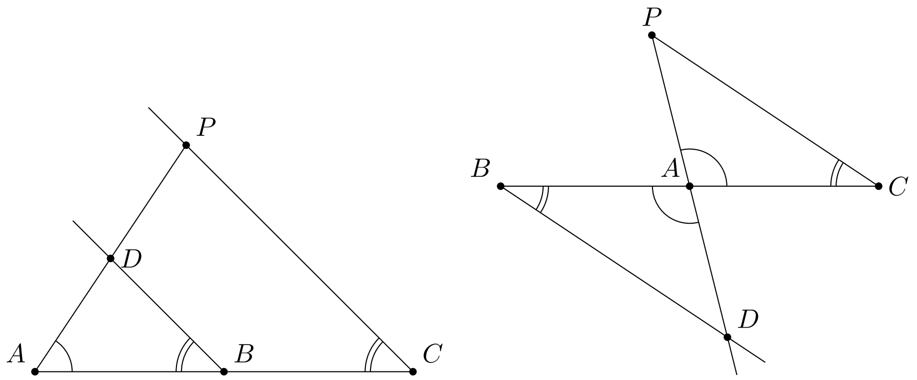
Todistus. Valitaan kaksi pistettä suoralta $m$. Nämä ovat olemassa, sillä ne voidaan muodostaa origamiaksioomien O1 ja O2 ja kolmen aloituspisteen avulla. Konstruoidaan origamiaksioomaa O2 käyttäen niiden muodostamalle janalle keskinormaali. Lauseen 2.3 perusteella tälle normaalille voidaan muodostaa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen $P$ kautta. □

SEURAUS 2.5. *O7 seuraa aksioomista O1 ja O2.*

TODISTUS. O7 konstruoitiin edellisessä luvussa origamiaksioomien O2 ja O4 avulla, ja Lauseen 2.4 mukaan O4 seuraa origamiaksioomista O1 ja O2. Siten O7 seuraa origamiaksioomista O1 ja O2. □

LAUSE 2.6. ([**1**, Cor. 2.3.]) *Kun on annettu suoran $l$ pisteet $A$, $B$ ja $C$, ja jokin piste $P$, voidaan konstruoida piste $D$ janalle $\overline{AP}$ siten, että janojen $\overline{AD}$ ja $\overline{AP}$ pituuksien suhde on sama kuin janojen $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.*

TODISTUS. Konstruktiosta kaksi erilaista tapausta on nähtävissä kuvassa 2.2. Oletetaan ensin, että $P$ ei ole muiden pisteiden kanssa samalla suoralla. Konstruoidaan Lauseen 2.3 avulla pisteeseen $B$ suora, joka on janan $\overline{PC}$ kanssa yhdensuuntainen. Se leikkaa janaa $\overline{AP}$ pisteessä $D$, ja yhdensuuntaisuuden perusteella $\angle ACP$ ja $\angle ABD$ ovat yhtä suuret. Lisäksi kulmat $\angle PAC$ ja $\angle DAB$ ovat yhtä suuret, koska ne ovat joko samat tai, jos $A$ on pisteiden $B$ ja $C$ välissä, toistensa ristikulmat. Siten kolmioissa $\triangle ABD$ ja $\triangle ACP$ on kaksi samankokoista kulmaa joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Tällöin niiden vastaavien sivujen $\overline{AD}$ ja $\overline{AP}$ suhde toisiinsa on sama kuin sivujen $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.




KUVA 2.2. Konstruointeja erilaisissa alkutilanteissa. Tilanne $A*C*B$ on samankaltainen kuin $A*B*C$.

Jos piste $P$ on suoralla $l$, valitaan jokin piste $Q$ suoran ulkopuolelta siten, että voidaan konstruoida janalle $\overline{AQ}$ piste $E$, ja saadaan kolmiot $\triangle ABE$ ja $\triangle ACQ$ jotka ovat yhdenmuotoiset. Nyt voidaan löytää piste $D$ suoralta $l$, siten että kolmiot $\triangle ADE$ ja $\triangle APQ$ ovat yhdenmuotoiset. Näin piste $D$ leikkaa janaa $\overline{AP}$ samassa suhteessa kuin $B$ leikkaa janaa $\overline{AC}$. □

Käsitellään sitten pisteiden ja suorien peilaus. Jokainen taitos määrittelee peilauksen, mutta taitoksen peilaamat pisteiden kuvat eivät ole suorien leikkauspisteitä eivätkä siten konstruoitavia pisteitä. Samoin suorat, jotka taitos peilaa, ovat vain olemassaolevien suorien kuvia eivätkä uusia taitoksia. Siten peilatut suorat ja pisteet täytyy konstruoida annettujen origamiaksioomien avulla.

LAUSE 2.7. ([**1**, Cor. 2.4.]) *Kun on annettu piste $P$ ja suora $l$, piste $P$ voidaan peilata suoran $l$ suhteen. Jos on annettu suorat $l$ ja $m$, suora $m$ voidaan peilata suoran $l$ suhteen.*

TODISTUS. Ensimmäinen väite sisältyy jälkimmäiseen. Valitaan kaksi pistettä $A$ ja $B$ suoralta $l$. Konstruoidaan suoran $l$ normaali pisteen $A$ kautta (O4). Tämän normaalin ja suoran $m$ leikkauspiste olkoon $A'$. Tehdään samoin pisteelle $B$ ja saadaan piste $B'$. Siirretään jana $\overline{AA'}$ pisteelle $A$ Lauseen 2.3 mukaisesti ja saadaan tämän janan loppupiste $C$. Samoin tehdään pisteelle $B$ ja saadaan piste $D$. Koska $\|\overline{AA'}\| = \|\overline{AC}\|$, ja $\|\overline{BB'}\| = \|\overline{BD}\|$, ja nämä janat ovat kohtisuorassa suoraan $l$ nähden, suora $l$ on janojen $\overline{A'C}$ ja $\overline{B'D}$ kohtisuora puolittaja. Siten Pisteet $C$ ja $D$ ovat pisteiden $A'$ ja $B'$ peilaukset suoran $l$ suhteen, ja niiden kautta kulkeva suora on suoran $m$ peilaus suoran $l$ suhteen. □

Lauseen 2.3 seurauksena janoja voidaan laskea yhteen, eli kopioida siten, että kopioidun janan alkupiste on toisen janan loppupiste. Thaleen joukko on siten suljettu yhteenlaskun suhteen, ja kun yksi aloituspisteistä on $A = (0, 0)$, se on Abelin ryhmä eli kommutatiivinen ryhmä. Thaleen joukko varustettuna yhteenlaskulla toteuttaa Abelin ryhmän ehdot liitännäisyyden, neutraalialkion olemassaolon ja käänteisalkioiden olemassaolon. Lisäksi yhteenlasku on kommutatiivinen.

Osoitetaan kohta, että Thaleen joukko on myös $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus, sillä se toteuttaa tarvittavat ehdot vektorin ja skalaariluvun kertolaskulle. Kun $a, b$ ovat rationaalilukuja ja $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ Thaleen joukon vektoreita, tämän kertolaskun täytyy toteuttaa ehdot

$$(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v},$$

$$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

$$a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{v} \ \text{ ja}$$

$$a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (a \cdot \mathbf{v}) + (a \cdot \mathbf{w}).$$

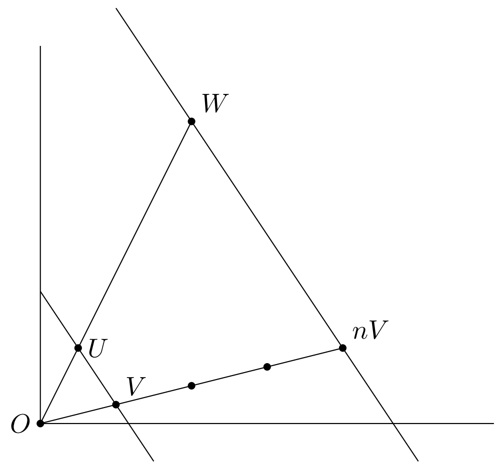
Näiden toteutumiseksi tarvitsee konstruoida vektorin ja rationaaliluvun tulo. Vektoria voi selvästi kertoa kokonaisluvulla Lauseen 2.3 perusteella. Rationaaliluvulla kertominen vaatii kuitenkin, että vektoreita voidaan myös jakaa kokonaisluvulla.

LAUSE 2.8. ([**1**, Cor. 2.6.]) *Thaleen joukko on $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus.*

TODISTUS. Olkoon $W$ tason piste ja $n$ positiivinen kokonaisluku. Tällöin on olemassa $U$ siten, että $nU = W$. Konstruoidaan kuvan 2.3 mukaisesti ensin $nV$ jollekin pisteelle $V$, joka ei ole samalla suoralla kuin $W$. Tämä on mahdollista, sillä Lauseen 2.3 perusteella janaa $\overline{OV}$ voidaan kopioida $n$ kappaletta. Sitten konstruoidaan O1:ta käyttäen suora pisteiden $nV$ ja $W$ kautta. Lauseen 2.6 perusteella tälle voidaan konstruoida pisteen $V$ kautta yhdensuuntainen suora, joka leikkaa janaa $\overline{OW}$ pisteessä $U$. □

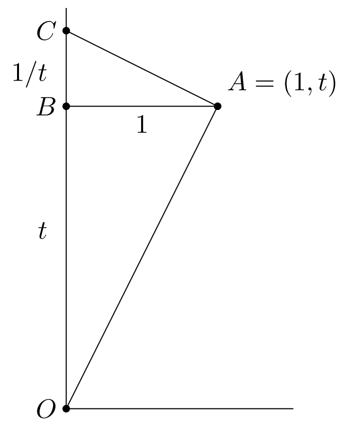
Tutkitaan, millaisia lukuja voidaan muodostaa $x$- ja $y$-akseleille ja tasoon. Pisteiden $y$-koordinaatit muodostavat reaalilukujen osajoukon $Y$ ja $x$-koordinaatit muodostavat reaalilukujen osajoukon $X$. Origamiaksiooman O4 seurauksena $y$-akselille muodostuu pisteiden $(0, Y)$ joukko ja $x$-akselille pisteiden $(X, 0)$ joukko. Muodostuvat lukualueet riippuvat suoraan pisteen $C$ valinnasta. Pisteestä $C$ riippuen joukko $Y$ ei ole välttämättä sama kuin joukko $X$. Thaleen joukko osoittautuu myöhemmin kunnaksi.

LEMMA 2.9. ([**1**, Lemma 2.7.]) *Jos $0 \neq t \in Y$, niin $1/t \in Y$.*




Kuva 2.3. Konstruoidaan $U$ siten, että $nU = W$.

Todistus. Olkoot pisteet $O = (0,0), P = (1,0)$ ja $B = (0,t)$. Konstruoidaan suorakulmainen kolmio $\triangle OAB$. Kuvan 2.4 mukaisesti kateetti $\overline{OB}$ on $y$-akselilla ja pituudeltaan $t$. Tämä on olemassa, koska $t \in Y$. Toinen kateetti $\overline{AB}$ on pituudeltaan 1, ja yhdensuuntainen $x$-akselin kanssa. Tämä saadaan Lauseen 2.3 avulla kopioimalla jana $\overline{OP}$. Siten on $A = (1,t)$. Hypotenuusa $\overline{OA}$ konstruoidaan origamiaksioomalla O1. Konstruoidaan toinen suorakulmainen kolmio $\triangle ACB$. Sen hypotenuusa $\overline{AC}$ on pisteestä $(1,t)$ $y$-akselille kulkeva jana, joka on kohtisuora aiemman kolmion hypotenuusaan nähden. Tämän voi konstruoida origamiaksioomalla O4. Kolmiot $\triangle OAB$ ja $\triangle ACB$ ovat yhdenmuotoiset yhdenmuotoisuuslauseen $KK$ nojalla, ja siten $y$-akselilla kulkevan kateetin $\overline{BC}$ pituus on $1/t$.




Kuva 2.4. Konstruoidaan $y$-akselille luku $1/t$.

□

Lemma 2.10. *Kun $x, u \in X$ ja $y \in Y$, niin $uy/x \in Y$*

Todistus. Olkoon origo $O$, sekä $x, u \in X$ ja $y \in Y$. Siten on olemassa pisteet $A = (x,0)$, $B = (u,0)$ ja $C = (0,y)$. Tällöin voidaan konstruoida piste $P = (x,y)$

ja suora $l = OP$, Lauseen 2.3 perusteella ja origamiaksioomalla O1. Konstruoidaan pisteen $B$ kautta kulkeva $x$-akselin normaali $m$. Suorat $l$ ja $m$ leikkaavat pisteessä $Q = (u, v)$, ja Lauseen 2.6 perusteella

$$\frac{\|\overline{OP}\|}{\|\overline{OQ}\|} = \frac{\|\overline{OA}\|}{\|\overline{OB}\|}.$$

Janan $\overline{OP}$ pituus on $\sqrt{x^2+y^2}$ ja janan $\overline{OQ}$ pituus on $\sqrt{u^2+v^2}$, joten saadaan

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{x}{u}.$$

Tästä ratkaistaan $v$ ja saadaan

$$v = \frac{uy}{x}.$$

□

Nyt siis $uy/x \in Y$. Koska $1 \in X$, voidaan määrätä $u = 1$, joten $y/x \in Y$. Samoin voi olla $x = 1$, joten $uy \in Y$.

Samaan tapaan, jos tiedetään, että $v, y \in Y$ ja $x \in X$, voidaan konstruoida piste $(x, y)$ ja saadaan $vx/y \in X$. Tällöin myös $v/y \in X$. Tämän voi ajatella reaalilukujen $X$ kertomisena imaginaariluvuilla $iY$, sillä kompleksilukujen kertolasku antaa myös saman tuloksen

$$\frac{u \cdot yi}{x} \in iY \text{ ja} \frac{x \cdot vi}{yi} \in X.$$

LEMMA 2.11. ([**1**, Cor. 2.8.]) *Kun $x \in X$ ja $t, v, y, \in Y \neq \{0\}$, niin*

(1) *$vy \in X$, $xy \in Y$ ja siten $tvy \in Y$.*
(2) *$x^2 \in X$ ja siten $X$ on suljettu kertolaskun suhteen.*
(3) *Luvulle $x \in X$, $x \neq 0$, pätee $1/x \in X$ ja siten $X$ on kunta.*

TODISTUS. (1) Koska $y \in Y$, lemman 2.9 mukaan $1/y \in Y$, lemman 2.10 mukaan $1/(xy) \in Y$, ja edelleen lemman 2.9 mukaan $xy \in Y$. Tästä ja lemmasta 2.10 seuraa, että kun $v, y \in Y$ ja $x \in X$, niin $vx/(xy) \in X$.

(2) Kun $x \in X$, merkitään pistettä $(x, 0) = A$. Konstruoidaan jokin piste $B = (x, y), y \neq 0$. Kohdan 1 mukaan $xy \in Y$, joten O4 antaa $x$-akselin suuntaisen suoran $l$, joka kulkee pisteen $C = (0, xy)$ kautta. Suora $OB$ leikkaa suoraa $l$ pisteessä $P$. Nyt kolmiot $\triangle OCP$ ja $\triangle BAO$ ovat yhdenmuotoiset ja siten

$$\frac{\|\overline{BA}\|}{\|\overline{CO}\|} = \frac{\|\overline{OA}\|}{\|\overline{CP}\|}, \text{ eli } \frac{y}{xy} = \frac{x}{\|\overline{CP}\|} \text{ ja tästä edelleen } \|\overline{CP}\| = x^2.$$

Siten $x^2 \in X$. Kun tiedetään, että $\mathbb{Q} \in X$ ja $2uv = (u+v)^2 - u^2 - v^2$, tästä seuraa, että $X$ on suljettu kertolaskun suhteen.

(3) Olkoon $y \in Y$, $y \neq 0$ ja $x \in X$, $x \neq 0$. Kohdasta 1 ja lemmasta 2.9 seuraa, että $1/yx \in Y$. Koska myös $y \in Y$, kohdan 1 perusteella tiedetään että $y/xy \in X$. Siten $1/x \in X$. Siten kohdasta 2 seuraa, että $X$ on kunta.

□

LAUSE 2.12. *Origamiaksioomilla O1 ja O2 muodostuva Thaleen joukko on kunta.*

TODISTUS. Lauseesta 2.3 seuraa, että Thaleen joukko on suljettu kompleksilukujen summan ja erotuksen suhteen. Lisäksi jos luvut $C = x + yi$ ja $D = u + vi$ ovat konstruoitavissa, niin niiden tulo

$$(x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (uy + xv)i$$

on konstruoitavissa: lemman 2.11 mukaan $xu, yv \in X$ ja lemman 2.10 mukaan $uy, xv \in Y$. Myös luvun $C = x + yi$ käänteisalkio

$$C^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2}) + (\frac{-y}{x^2 + y^2})i$$

on konstruoitavissa lemmojen 2.10 ja 2.11 perusteella. Lisäksi aloituspisteet $A = (0, 0)$ ja $B = (1, 0)$ ovat summan ja tulon neutraalialkiot. □

Konstruoitavat luvut riippuvat aloituspisteestä $C = (a, b)$. Kutsutaan lukua $C = a + bi$ thaleen luvuksi, jos sen avulla muodostettu Thaleen joukko $\Pi[C]$ sisältää luvun $i$, eli $C$ mahdollistaa pisteen $(0, 1)$ konstruoinnin origamiaksioomien O1 ja O2 avulla. Tällöin pisteiden $x$-koordinaatit muodostavat rationaalilukujen kuntalaajennoksen $X = \mathbb{Q}(a, b)$ eli kunnan $\{x + ya + zb : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$. Jos $C$ ei ole thaleen luku, on $X = \mathbb{Q}(a, b^2)$. Kaikilla ei-reaalisilla kompleksiluvuilla $C$ on $Y = Xb$, ja Thaleen joukko $\Pi[C]$ on suljettu kompleksikonjugaatin suhteen . Se myös sisältyy kuntaan $\mathbb{Q}(a, b, i)$, koska voidaan näyttää induktiivisesti, että kaikki luvun $C$ pohjalta muodostuvat janojen puolittajat kuuluvat kuntaan $\mathbb{Q}(a, b, i)$ ja kaikkien konstruoitavien suorien kulmakerroin kuuluu joukkoon $\mathbb{Q}(a, b)$.

LAUSE 2.13. ([**1**, Theorem 2.11]) *Jos $C$ ei ole thaleen luku, $\Pi[C]$ on kunta $\mathbb{Q}(C, \overline{C})$. Jos $C$ on thaleen luku, $\Pi[C]$ on kunta $\mathbb{Q}(C, \overline{C}, i)$.*

TODISTUS. Todistus esitetään lähteessä [**1**, s.125]. □

Alperinin artikkelissa [**1**] tarkastellaan tarkemmin erityisesti Thaleen kunnan riippuvuutta luvusta $C$, sekä ehtoja, joilla luku $C$ on Thaleen luku. Teoksessa käsitellään myös kolmea muuta origamiaksioomilla muodostettavaa kuntaa.

## 2.2. Pythagoraan kunta

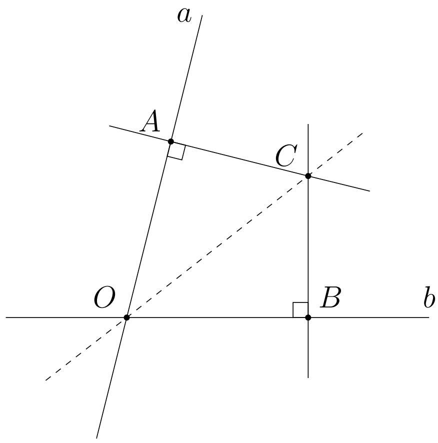
Lisätään edellisiin origamiaksioomiin origamiaksiooma O3.

LAUSE 2.14. ([**1**, Theorem 3.1.]) *Kun on annettu aksioomat O1 ja O2, seuraavat ovat yhtäpitävät:*

(1) *yksikköjana voidaan merkitä mille tahansa konstruoidulle suoralle,*
(2) *Mille tahansa kahdelle suoralle voidaan konstruoida kulmanpuolittaja (O3) ja*
(3) *konstruoidun janan pituus voidaan merkitä mille tahansa suoralle.*

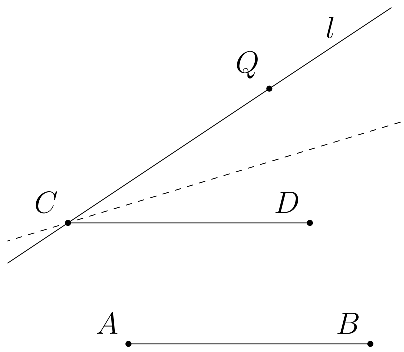
TODISTUS. Lauseen todistus perustuu lähteeseen [**1**].
(3) ⇒ (1) on selvä.
(1) ⇒ (2): Tämä tilanne on kuvassa 2.5. Merkitään suorien $a$ ja $b$ leikkauspistettä origona $O$ ja merkitään yksikköpituudet kummallekin suoralle saaden pisteet $A \in a$ ja $B \in b$. Tämän jälkeen voidaan konstruoida origamiaksiooman O4 avulla suoran $a$ normaali pisteen $A$ kautta ja samoin suoran $b$ normaali pisteen $B$ kautta. Nämä leikkaavat pisteessä $C$. Nyt saadaan kolmiot $\triangle OAC$ ja $\triangle OBC$, jotka ovat yhtenevät

SSK-yhtenevyyssäännön perusteella. Siten $\|\overline{AC}\| = \|\overline{BC}\|$ ja janan $\overline{OC}$ muodostama suora puolittaa suorien $a$ ja $b$ välisen kulman.




Kuva 2.5. Kulman puolitus yksikköjanojen avulla.

(2) $\Rightarrow$ (3): Tämä tilanne on kuvassa 2.6. Kun kaikki kulmat voidaan puolittaa, voidaan siirtää janan pituus halutulle suoralle. On annettu jana $\overline{AB}$, ja puolisuora $l$ pisteestä $C$. Nyt Lauseen 2.3 mukaan voidaan siirtää jana $\overline{AB}$ alkamaan pisteestä $C$ ja saadaan jana $\overline{CD}$. Voidaan puolittaa janan $\overline{CD}$ ja puolisuoran $l$ välinen kulma ja Lauseen 2.7 mukaan peilata piste $D$ kulmanpuolittajan suhteen puolisuoralle $l$. Näin saadaan piste $Q$ halutulla puolisuoralla, siten että $\|\overline{CQ}\| = \|\overline{AB}\|$. $\square$




Kuva 2.6. Janan siirto kulmanpuolituksen avulla.

Ilman origamiaksioomaa O3, kolmen aloituspisteen avulla voidaan muodostaa kohtisuorat ja siten $x$- ja $y$-akseli, mutta kolmannesta pisteestä $C$ riippuen pisteet $y$-akselilla eivät välttämättä ole samat kuin pisteet $x$-akselilla. Kun $A = (0, 0)$ ja $B = (1, 0)$, niin origamiaksiooman O3 myötä Lause 2.14 mahdollistaa pisteen $(0, 1)$ konstruoinnin. Myös pisteen $C$ koordinaatit voidaan konstruoida kummallekin akselille. Siten lukujoukot $X$ ja $Y$ ovat samat, edellyttäen, kuten tähänkin asti, että kolmas piste $C$ ei ole samalla suoralla kuin pisteet $A$ ja $B$. Koska piste $(0, 1)$ voidaan konstruoida, valitaan selkeyden vuoksi piste $C = (0, 1)$. Tarkastellaan, millaiset joukot muodostuvat $x$- ja $y$- akseleille sekä tasoon origamiaksiooman O3 myötä.

MÄÄRITELMÄ 2.15. Pythagoraan kunta $\mathbb{P}$ on kunta, jossa jokaisen neliön summa on neliö [**3**].

Thaleen joukon yhteydessä todettiin, että $X$ on kunta, ja koska nyt $Y = X$, myös $Y$ on kunta. Määritelmän perusteella kunta on Pythagoraan kunta, jos $\sqrt{a^2+b^2}$ kuuluu siihen silloin kun $a$ ja $b$ kuuluvat siihen.

LAUSE 2.16. *$X$ ja $Y$ ovat Pythagoraan kuntia.*

TODISTUS. Kun on annettu luvut $a, b \in X$, origamiaksiooman O3 avulla voidaan konstruoida kolmio, jonka kateettien pituudet ovat $a$ ja $b$, jolloin $\sqrt{a^2+b^2} \in X$. Samoin joukolle $Y$. □

Origamiaksioomat O1-O3 antavat siis kunnan $\mathbb{P} \times i\mathbb{P}$. Sama lukualue saadaan viivaimen ja merikartan harpin avulla. Merikartan harppi toimii siten, että sillä voi merkitä janan pituuden annetulle suoralle, mutta ei esimerkiksi valita suoralta pistettä, joka on annetulla etäisyydellä sellaisesta pisteestä, joka ei ole suoralla. O3 mahdollistaa Lauseen 2.14 perusteella saman konstruktion. Merikartan harppia ja viivainta käsitellään Martinin teoksessa [**16**, s.83-96].

## 2.3. Eukleideen kunta

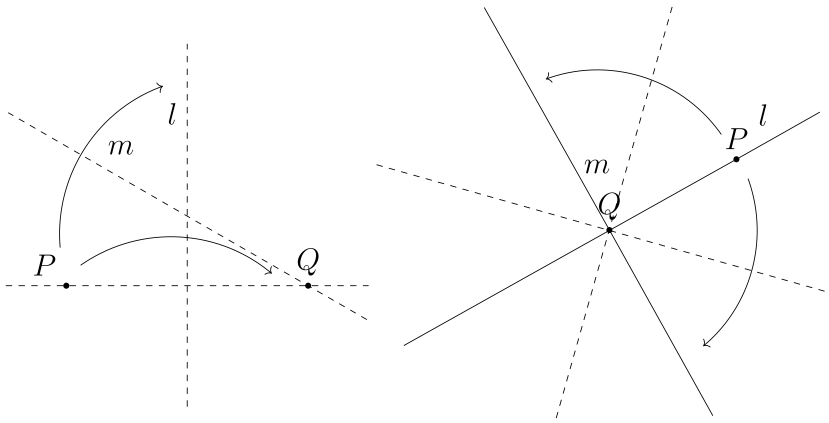
Lisätään edellisiin origamiaksioomiin O5. O1 ja O3 voidaan lähteen [**1**, s.128] mukaan korvata muilla käytössä olevilla aksioomilla, kun O5 otetaan mukaan. Kun O4 ja O7 seuraavat origamiaksioomista O1 ja O2, ainoastaan origamiaksioomaa O6 ei voi muodostaa origamiaksioomilla O2 ja O5. Voidaan valita myös vain O1 ja O5, ja konstruoida näiden avulla kaikki origamiaksioomat paitsi kuudennen. Näytetään, miten O1 ja O3 voidaan konstruoida origamiaksioomien O2 ja O5 avulla.

LAUSE 2.17. *O1 ja O3 seuraavat origamiaksioomista O2 ja O5.*

TODISTUS. Konstruoidaan O1. Tämä näytetään kuvassa 2.7a. Olkoot $Q$ ja $P$ kaksi annettua pistettä. O2:n avulla voidaan taittaa janan $QP$ kohtisuora puolittaja $l$. O5:n avulla voidaan konstruoida pisteen $Q$ kautta kulkeva suora $m$, joka asettaa pisteen $P$ suoralle $l$. Sitten O5:n avulla voidaan konstruoida pisteen $P$ kautta kulkeva suora, joka asettaa pisteen $Q$ suoralle $m$. Koska $Q$ on jo suoralla $m$, tämä suora kulkee pisteiden $P$ ja $Q$ kautta, ja on siten O1:ta vastaava haluttu suora.

O3 voidaan konstruoida kuvan 2.7b mukaisesti. Oletetaan, että suorat $l$ ja $m$ ovat olemassa ja niillä on leikkauspiste $Q$. Nyt suoralla $l$ on vähintään yksi piste, koska pisteen $Q$ lisäksi on olemassa jokin toinen piste, ja origamiaksioomalla O2 voidaan tuottaa suora, joka leikkaa ainakin toista suorista $l$ ja $m$. Olkoon tämä leikkauspiste $P$ suoralla $l$. O5:n avulla voidaan taittaa suorat, jotka kulkevat pisteen $Q$ kautta ja asettavat pisteen $P$ suoralle $m$. Nämä suorat puolittavat pisteessä $Q$ olevat kulmat.

Jos suorat $l$ ja $m$ ovat yhdensuuntaiset, jälleen origamiaksiooman O2 perusteella kummallekin suoralle voidaan konstruoida jokin piste ja O5 varmistaa, että toisella suorista on ainakin kaksi pistettä. Olkoot siis $Q$ ja $P$ suoran $l$ pisteitä. Niile voidaan toteuttaa O2, saaden suoriin $l$ ja $m$ nähden kohtisuora $s$, joka leikkaa suorat pisteissä $A$ ja $B$. Toteutetaan uudelleen O2 pisteille $A$ ja $B$ ja saadaan suorien $l$ ja $m$ keskellä kulkeva taitos, joka kuvaa suoran $l$ suoralle $m$. □




(a) O1:n konstruointi (b) O3:n konstruointi

KUVA 2.7. Origamiaksioomien O3 ja O1 konstruointi origamiaksioomilla O5 ja O2.

Origamiaksiooman O1 konstruoinnista kuvasta 2.7a huomataan, että kun on aloituspisteet $P$ ja $Q$, saadaan tuotettua kolmas piste, joka ei ole näiden kanssa samalla suoralla. Siten, kun käytössä on O5, konstruoitavien tason pisteiden muodostamiseen ei tarvita kolmea aloituspistettä, vaan pisteet $A = (0, 0)$ ja $B = (1, 0)$ riittävät. Tarkastellaan, millainen lukualue origamiaksioomien O1-O5 avulla saadaan aikaan.

MÄÄRITELMÄ 2.18. Eukleideen kunta on kunta, jossa jokainen alkio on joko neliö tai sen vastaluku [**3**].

Määritelmä merkitsee siis, että Eukleideen kunta on suljettu neliöjuuren suhteen. Näytetään, että O5 mahdollistaa neliöjuuren konstruoinnin. Tästä seuraa, että origamiaksioomat O1-O5 mahdollistavat Eukleideen kunnan muodostamisen kompleksitasoon.

LAUSE 2.19. *Kun on käytössä origamiaksioomat O1-O5, luvulle $r$ voidaan konstruoida neliöjuuri $\sqrt{r}$.*

TODISTUS. Käydään läpi neliöjuuren konstruointi lähteen [**1**] mukaan. Tätä on havainnollistettu kuvassa 2.8, jossa on valittu $r = 10$. Tiedetään, että O5 antaa tietyn paraabelin tangentin. Olkoon piste $P = (0, 1)$, ja suora $l$ olkoon $y = -1$. Tällöin paraabelin yhtälö on

$$y = \frac{1}{4}x^2.$$

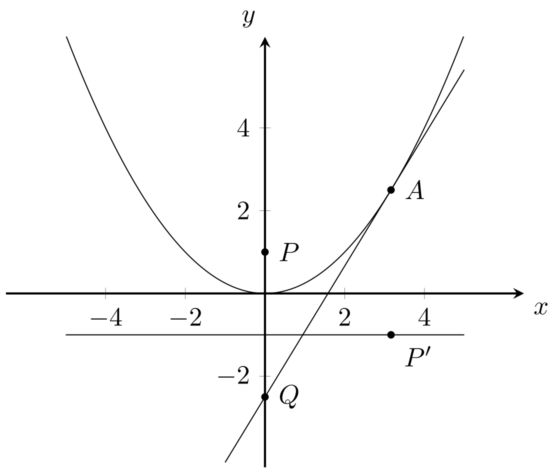
Paraabelin pisteessä $(x_0, \frac{1}{4}x_0^2)$ sen tangentin kulmakerroin on $\frac{1}{2}x_0$. Tangentin yhtälö on siten

$$y - \frac{1}{4}x_0^2 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0).$$

Tämä suora leikkaa $y$-akselin pisteessä $Q = (0, -\frac{1}{4}x_0^2)$.

Kun käytetään aksioomaa O5 pisteillä $P = (0, 1)$ ja $Q = (0, -\frac{1}{4}r)$, sekä suoralla $y = -1$, voidaan taittaa piste $P$ suoralle $l$ pisteen $Q$ kautta kulkevalla taitoksella. Näin saadaan konstruoitua paraabelin tangentti, joka sivuaa paraabelia pisteessä, jonka $x$-koordinaatti on $\sqrt{r}$. Kuvassa tämä piste on $A$. Pisteen $P$ peilaus tämän tangentin suhteen on $P' = (\sqrt{r}, -1)$, sillä se on pisteen $A$ projektio suoralle $y = -1$. Lauseen 2.7 mukaan piste $P'$ voidaan konstruoida ja siten myös $x$-akselille voidaan konstruoida luku $\sqrt{r}$.

□




KUVA 2.8. Neliöjuuren $\sqrt{r}$ konstruointi, kun $r = 10$.

LAUSE 2.20. *Origamiaksioomilla O1-O5 konstruoitavat kompleksitason pisteet muodostavat Eukleideen kunnan.*

TODISTUS. Näytetään, että kompleksitason pisteelle voidaan konstruoida neliöjuuri. Olkoon kompleksiluku $C = re^{i\theta}$. Sen neliöjuuri $\sqrt{C} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ voidaan konstruoida puolittamalla kulma $\theta$ ja muodostamalla luku $\sqrt{r}$. Kulma voidaan puolittaa origamiaksioomalla O3, ja O5 antaa Lauseen 2.19 mukaan luvun $\sqrt{r}$. □

Harpilla ja viivaimella konstruoitavat luvut muodostavat samat tason pisteet kuin O1-O5 [**16**, s.34-35].

## 2.4. Vietan kunta

Lisätään edellisiin origamiaksioomiin vielä O6. Luvun 1.1 lopussa todettiin, että O6 on tunnetusti ainoa tarvittava origamiaksiooma, koska muut seuraavat siitä. O6 tarvitsee kuitenkin kaksi suoraa ja pistettä. Siten tilanteessa, jossa alkutilanne on määritelty ainoastaan pisteiden avulla, O6 ei ole yksin riittävä, vaan alkutilanteen muodostamiseksi tarvitaan O1 tai O2 yhdessä jonkin muun sellaisen origamiaksiooman kanssa, joka ei vaadi kahden suoran olemassaoloa. Tarkastellaan origamiaksioomien O1-O7 avulla muodostuvaa lukualuetta. Taittelulla viitataan jatkossa konstruktioihin, joissa kaikki origamiaksioomat ovat käytössä.

MÄÄRITELMÄ 2.21. Vietan kunta on Eukleideen kunta, jossa jokainen alkio on kuutio [**3**].

O6 mahdollistaa Vietan kunnan konstruoinnin kompleksitasoon. Samaan tapaan kuin Lauseen 2.20 todistuksessa. tämäkin voidaan näyttää siten, että ilmaistaan tason piste $C$ kompleksilukuna muodossa $C = re^{i\theta}$. Tällöin sen kuutiojuuri on $\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}$. Sen muodostamiseksi tarvitaan reaaliluvun kuutiojuuri $\sqrt[3]{r}$ ja kolmasosa kulmasta $\theta$. Reaaliluvun kuutiojuuren muodostus käsitellään seuraavassa luvussa, joten toteutetaan vain kulman kolmijako. Jaetaan kulma Hisashi Aben menetelmällä lähteiden [**21**] ja [**9**] pohjalta.

Kulman $\angle XOA$ kolmijako tapahtuu kuvan 2.9 mukaisesti seuraavaan tapaan:

(1) Taitetaan origamiaksiooman O4 avulla suora $CC''$ vapaasti valitulle korkeudelle siten, että se on suoran $OY$ normaali, suorien $OY$ ja $OX$ ollessa kohtisuorassa toisiinsa nähden. Tämän jälkeen O3 mahdollistaa yhdensuuntaisten suorien $OX$ ja $CC''$ keskellä kulkevan suoran $BB'$ taittelun. Näin $\|\overline{OB}\| = \|\overline{BC}\|$.

(2) Taitetaan origamiaksiooman O6 avulla piste $C$ suoralle $OA$ ja samalla taitoksella piste $O$ suoralle $BB'$. Konstruoidaan Lauseen 2.7 mukaisesti pisteen $O$ peilikuva $O'$ tämän taitoksen suhteen suoralle $BB'$.

(3) Nyt suora $OO'$ antaa kulman$\angle XOO'$, joka on kolmasosa kulmasta $\angle XOA$.

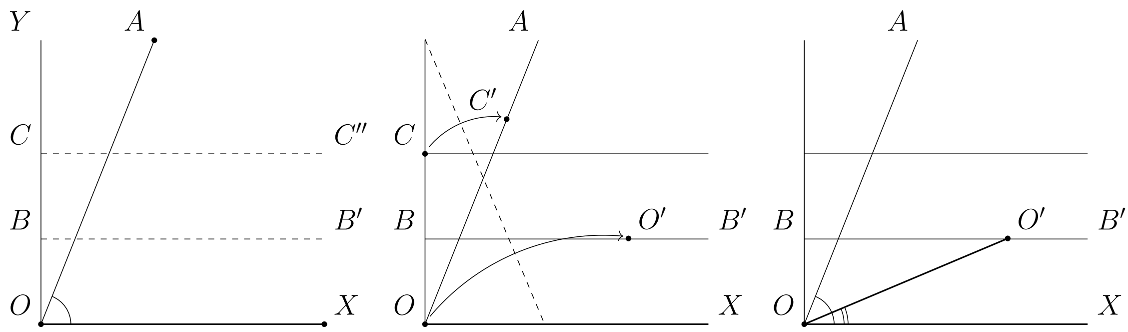
Robert Langin teoksessa [**13**, s. 33-34] on saman konstruktion yksityiskohtainen taitteluohje ja lisäksi ohje Jacques Justinin tylpän kulman kolmijakoon. Aben menetelmää voi tosin soveltaa myös tylpälle kulmalle. Näiden ohjeiden pohjalta kulman kolmijako on helppo taitella paperilla, kun valitaan origoksi paperin kulma.

LAUSE 2.22. *Aben konstruktio jakaa kulman $\angle XOA$ kolmeen osaan.*

TODISTUS. Todistus perustuu lähteeseen [**6**] ja on esitetty kuvassa 2.10. Olkoon kulma $\angle XOA = \theta$ ja kulma $\angle XOO' = \varphi$. Konstruoinnista seuraa, että $OO'C'C$ on tasakylkinen puolisuunnikas. Siten kolmio $\triangle OO'M$ on tasakylkinen. Koska suorat $OX$ ja $BB'$ ovat yhdensuuntaiset, on $\angle O'OM = \angle MO'O = \angle XOO' = \varphi$.

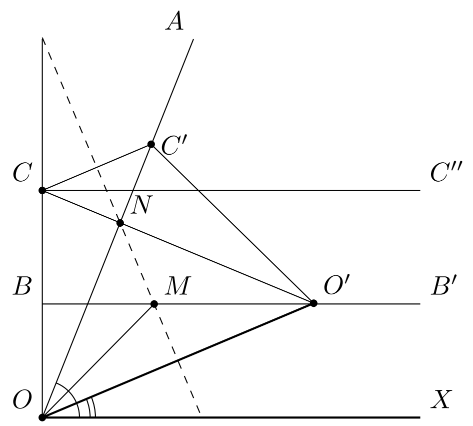
Toisaalta kolmio $\triangle CO'O$ on tasakylkinen, joten kulma $\angle CO'B = \angle MO'O = \varphi$.

Myös kolmio $\triangle OO'N$ on tasakylkinen, joten $\angle MON = \angle CO'B = \varphi$. Näin saadaan $\theta = 3\varphi$. □




(1) O4 ja O3 (2) O6 ja pisteen $O$ peilaus (3) O1

KUVA 2.9. Kulman kolmijako taitoksilla O4, O3, O6 ja O1, sekä pisteen peilauksella Lauseen 2.7 mukaisesti.




KUVA 2.10. Aben konstruktion todistus perustuu konstruktiossa syntyviin tasakylkisiin kolmioihin.

LAUSE 2.23. *Origamiaksioomilla O1-O6 konstruoitavat kompleksitason pisteet muodostavat Vietan kunnan.*

TODISTUS. Eukleideen kunta on Vietan kunta, jos $\sqrt[3]{x}$ kuuluu kuntaan, kun $x$ kuuluu kuntaan. Kompeksiluvulla on kuutiojuuri, jos kulma voidaan jakaa kolmeen osaan ja reaaliluvusta voidaan ottaa kuutiojuuri. Kumpikin on mahdollista toteuttaa origamiaksiooman O6 avulla. Kulman kolmijako on mahdollinen Lauseen 2.22 mukaan, ja luku $\sqrt[3]{r}$ konstruoidaan seuraavassa luvussa. □

Origamiakisooman O6 avulla konstruoitavalle lukualueelle ei ole vakiintunutta nimitystä. Nimitys Vietan kunta perustuu matemaatikko François Vièteen (1540-1603), joka tunnetaan myös nimellä Franciscus Vieta. Hän konstruoi esimerkiksi säännöllisen seitsenkulmion ja kulman kolmijaon, käyttäen antiikin Kreikassa tunnettua menetelmää nimeltä neusis. Vieta oli ensimmäinen, joka näytti, että kulman kolmijako ja kuutiojuuren konstruointi mahdollistavat ratkaisun kaikkiin ongelmiin, jotka riippuvat enintään neljännen asteen yhtälöistä.[**18**],[**16**, s.126]

Neusis on kiinteällä yksikköpituudella merkitty viivain. Tämän avulla voidaan esimerkiksi piirtää yksikköjana suoralta toiselle siten, että se kulkee annetun pisteen $P$ kautta, eikä piste ole kummallakaan suoralla. Tämä onnistuu luonnollisesti vain, jos suorat ovat tarpeeksi lähellä toisiaan. Kreikan kielen sana neusis tarkoittaa juuri tällaista yksikköjanan sovittamista. Neusiksen avulla syntyvä lukualue vastaa kuudennen origamiaksiooman avulla konstruoitavaa Vietan kuntaa.[**16**, s.123].

Vietan kunnan saa myös käyttäen miraa [**5**]. Se muistuttaa läpinäkyvää peiliä, jota pidetään pystyasennossa paperilla. Mira heijastaa paperilla olevien merkintöjen peilikuvan miran alaosan muodostaman suoran suhteen, ja koska se näkyy läpi, peilikuvan voi asettaa miran takana olevan paperin merkintöjen mukaisesti. Sekä miran käyttö että taittelu perustuvat peilauksen käyttöön, ja lähteen [**5**] mukaan mira mahdollistaakin suoraan aksioomia O1, O2, O3, O5 ja O6 vastaavat operaatiot.

LUKU 3

# Yhtälönratkaisu

## 3.1. Lill'n menetelmä polynomiyhtälön ratkaisemiseksi

Origamiaksioomat O1-O6 mahdollistavat kuutiojuuren konstruoinnin ja jopa mielivaltaisen kolmannen asteen yhtälön ratkaisun taittelemalla. Tämän osoittamiseksi esitellään ensin Lill'n menetelmä, jolla on mahdollista ratkaista polynomiyhtälöiden reaalijuuret geometrisesti. Eduard Lill $(1830-1900)$ kehitti tämän ratkaisukeinon vuonna 1867 [**10**]. Menetelmä esitellään M. Riazin vuonna 1962 julkaistussa artikkelissa [**20**], sekä tähän pohjautuen uudemmissa Thomas C. Hullin [**10**] sekä Roger C. Alperinin ja Robert J. Langin [**2**, s. 7-8] teksteissä. Tämä luku perustuu lähteisiin [**20**] ja [**10**].

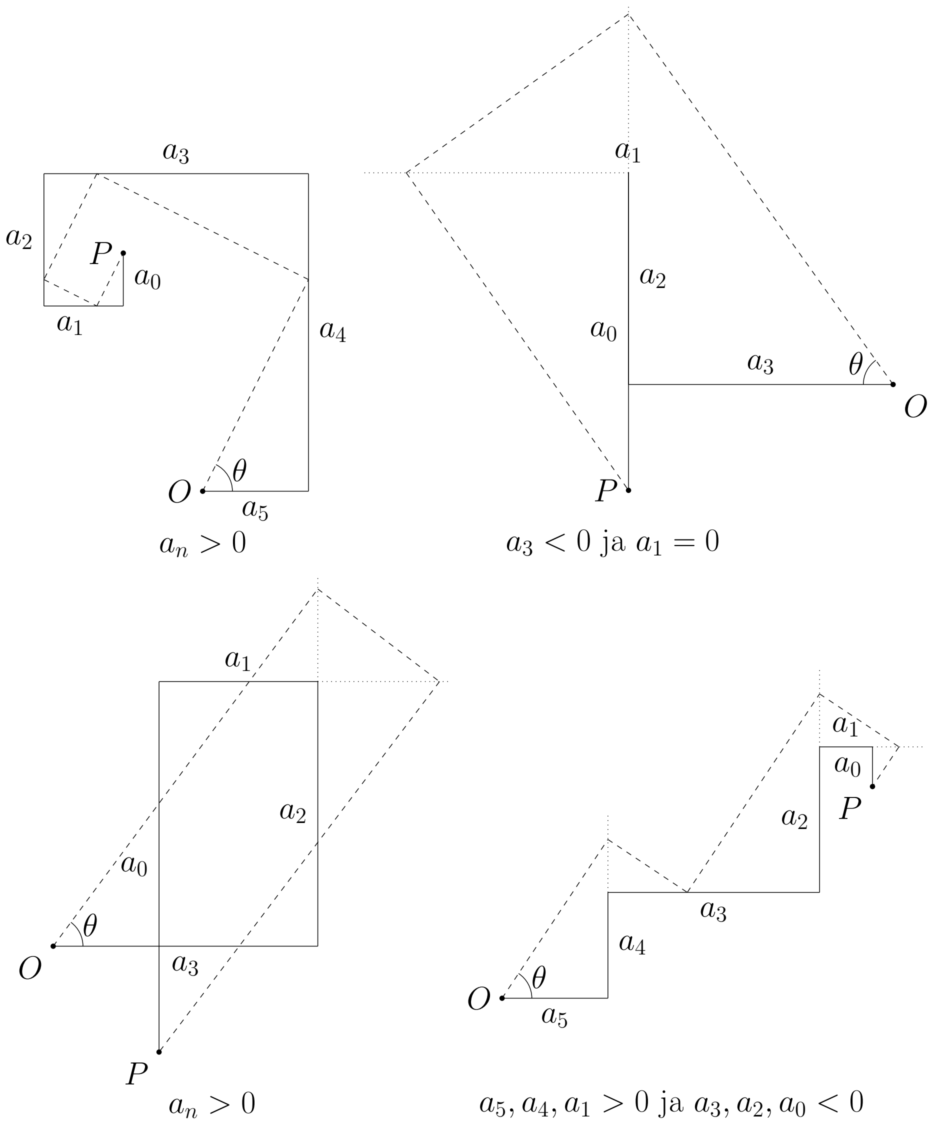
Olkoon ratkaistava yhtälö muodossa

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_0 = 0, a_n > 0. \tag{3.1}$$

Tällöin termien kertoimet voidaan esittää geometrisesti janoina, joilla on määrätty alkupiste, suunta ja pituus. Kutsutaan näitä janoja vastaavan kertoimen nimellä, eli kerrointa $a_m$ vastaava jana on jana $a_m$. Muodostetaan polku, joka alkaa janan $a_n$ alusta ja päättyy janan $a_0$ loppupisteeseen. Tällaisia polkuja on esitetty kuvissa 3.1 ja 3.2. Jokaisen janan pituus määräytyy suoraan kertoimen suuruudesta, eli janan $a_m$ pituus on $|a_m|$. Suunta määräytyy siten, että jana kulkee kulkusuuntaan nähden 90° astetta vastapäivään alkaen pisteestä, johon edeltävä jana päättyy. Jos kerroin on negatiivinen, jana piirretään päinvastaiseen suuntaan kuin muuten piirrettäisiin. Tämä ei vaikuta siihen, mihin suuntaan seuraava jana piirretään. Myös, jos kerroin on nolla, sitä vastaava jana ajatellaan annettuun suuntaan kulkevaksi janaksi, jonka pituus on nolla, ja seuraava jana piirretään tästä 90 astetta vastapäivään täsmälleen samoin kuin jos janalla olisi pituus. Janan $a_k$ pituus ja suunta saadaan kaavalla $a_ke^{i(n-k)\pi/2}$, jossa $e^{i(n-k)\pi/2}$ kuvaa yhtä käännöstä siten, että kulma on janan $a_k$ ja ensimmäisen janan $a_n$ välinen. Tällä tavoin muodostetaan polku, jossa on jokaista kerrointa vastaava jana järjestyksessä alkaen janasta $a_n$.

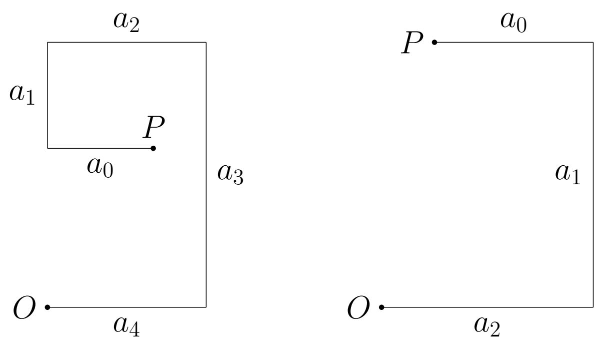
Annetulle yhtälölle löydetään nyt ratkaisu muodostamalla toinen polku edellisen pohjalta. Nämä polut on piirretty katkoviivoilla kuvassa 3.1. Ratkaisupolulla täytyy olla sama alku- ja loppupiste kuin alkuperäisellä. Ensimmäinen jana aloitetaan janan $a_n$ kanssa samasta pisteestä, mutta se on kulmassa $\theta$ janaan $a_n$ nähden. Katkaistaan jana pisteessä, jossa se leikkaa janaa $a_{n-1}$ vastaavan suoran. Seuraava jana aloitetaan tästä pisteestä siten, että sen suunta on 90° myötä- tai vastapäivään edellisen janan suunnasta. Samoin tämä seuraava katkaistaan pisteessä, jossa se leikkaa janan $a_{n-2}$ määräämän suoran. Valinta, onko jana myötä- vai vastapäivään edellisestä, tehdään sen perusteella, kumpi valinnoista saa janan leikkaamaan haluttua suoraa.

Näin jatketaan, kunnes viimeinen suora kulkee loppupisteen kautta ja tämä jana päättyy siihen. Näin syntyy $n-1$ yhdenmuotoista suorakulmaista kolmiota, joiden




KUVA 3.1. Esimerkkejä Lill'n menetelmällä muodostetuista poluista. Kiinteä polku kuvaa yhtälöä $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, ja katkoviivalla muodostettu ratkaisupolku antaa yhtälön ratkaisun kulman $\theta$ avulla.

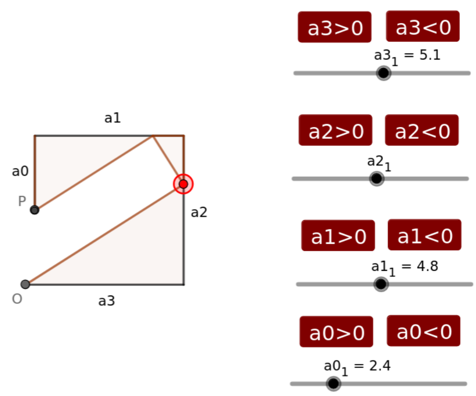
yksi kulma on $\theta$, joka kertoo ensimmäisen janan kulkusuunnan. Tulkitaan $\theta$ positiiviseksi silloin, kun uuden janan piirtäminen aloitetaan vastapäivään alkuperäisestä, ja negatiiviseksi kun janan piirtäminen aloitetaan myötäpäivään. Ratkaisupolku loppuu samaan pisteeseen kuin alkuperäinen ainoastaan, jos kulma $\theta$ on sopiva. Tämän kulman löytämistä käsitellään myöhemmin, sillä se voidaan tehdä paperintaittelua hyödyntäen. Kaikilla polynomiyhtälöillä ei ole reaalisia juuria, joten niitä vastaaville poluille ei myöskään löydy ratkaisupolkua ja siten kulmaa $\theta$. Kuvan 3.2 polut ovat tällaisia.




$3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ $\qquad$ $4x^2 + 5x + 3$

KUVA 3.2. Esimerkkejä yhtälöistä ja niiden Lill'n poluista, joille ei löydy reaalista ratkaisua.

Jos kulma $\theta$ on olemassa, sen avulla löydetään yhtälölle yksi ratkaisu $x$, sillä $x = -\tan\theta$ ratkaisee yhtälön. Tämä on totta kaikille polynomiyhtälöille, mutta koska taittelu mahdollistaa Lill'n menetelmän käytön korkeintaan kolmannen asteen yhtälöille, väitteen todistus kolmannen asteen yhtälölle on riittävä. Kuvassa 3.3 esitellään GeoGebralla tehty työkalu, jossa pystytään etsimään Lill'n menetelmän ratkaisupolkua erilaisille kolmannen asteen yhtälöille.




KUVA 3.3. Sivulla `https://www.geogebra.org/m/p3hm32fj` on GeoGebra-työkalu, jolla voi etsiä Lill'n menetelmän ratkaisupolkuja kolmannen asteen yhtälölle muuttaen sen kertoimia.

LAUSE 3.1. *Lill'n menetelmällä muodostettu kulma $\theta$ antaa kolmannen asteen polynomiyhtälön ratkaisun $x = -\tan\theta$.*

TODISTUS. $n$. asteen polynomiyhtälöä ja sen ratkaisua vastaavat polut muodostavat $n$ kappaletta suorakulmaisia kolmioita, siten että jokaisen kolmion hypotenuusa on ratkaisupolun yksi jana ja kolmion yksi kulma on $\theta$. Tämä näkyy kuvissa 3.1 ja 3.4. Kun kolmioiden kulman $\theta$ viereinen sivu on janaa $a_n$ vastaavalla suoralla, kulman $\theta$

vastainen sivu on janaa $a_{n-1}$ vastaavalla suoralla. Ratkaistaan kolmannen asteen yhtälölle jokaisesta syntyneestä suorakulmaisesta kolmiosta kulman $\theta$ vastainen sivu ja sen avulla seuraavan kolmion kulman $\theta$ vastainen sivu ja näin myös kolmannen kolmion vastaava sivu, jonka pituus on $a_0$. Tästä muodostuu alkuperäinen kolmannen asteen yhtälö, jossa yhtälön toteuttaa $-\tan\theta$.

Käsitellään ensin tilanne, jossa kaikki polynomin kertoimet ovat positiivisia. Ensimmäisen kolmion kulman $\theta$ vastainen kateetti on $a_3\tan\theta$. Tämä sivu on joko janalla $a_2$ tai osittain suoralla sen ulkopuolella. Nämä kaksi tapausta näytetään kuvassa 3.4.

Oletetaan, että kolmion sivu on janalla $a_2$. Tällöin kuvan 3.4a mukaiset sivujen pituudet ovat

$$\begin{aligned} s_3 &= a_3\tan\theta, \\ s_2 &= a_2 - a_3\tan\theta \text{ ja} \\ s_1 &= (a_2 - a_3\tan\theta)\tan\theta. \end{aligned}$$

Kun ratkaisupolun ensimmäinen jana päättyy janalle $a_2$, seuraava jana päättyy väistämättä janalle $a_1$, joten

$$s_0 = a_1 - ((a_2 - a_3\tan\theta)\tan\theta) = a_1 - a_2\tan\theta + a_3\tan^2\theta.$$

Oletetaan sitten, että ratkaisupolun ensimmäinen jana ei leikkaa janaa $a_2$, vaan suoraa janan ulkopuolella. Tällöin tilanne on kuvan 3.4b mukainen ja sivujen pituudet ovat

$$\begin{aligned} s_3 &= a_3\tan\theta, \\ s_2 &= a_3\tan\theta - a_2 \text{ ja} \\ s_1 &= (a_3\tan\theta - a_2)\tan\theta. \end{aligned}$$

Kun ratkaisupolun ensimmäinen jana päättyy janan $a_2$ ulkopuolelle, toinen jana ei myöskään leikkaa janaa $a_2$, ja siten

$$s_0 = a_1 + (a_3\tan\theta - a_2)\tan\theta = a_1 - a_2\tan\theta + a_3\tan^2\theta.$$

Näissä kummassakin tapauksessa sivun $a_0$ pituudeksi saadaan siis

$$\tan\theta(a_1 - a_2\tan\theta + a_3\tan^2\theta) = a_1\tan\theta + a_3\tan^3\theta - a_2\tan^2\theta = a_0.$$

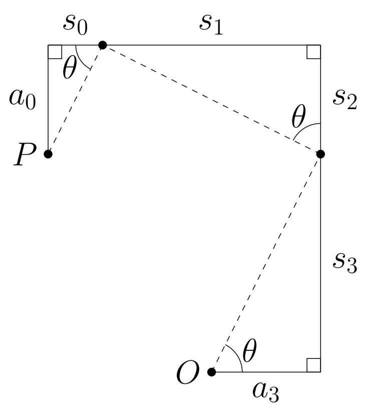
Kun tämä kirjoitetaan muodossa

$$a_3(-\tan\theta)^3 + a_2(-\tan\theta)^2 + a_1(-\tan\theta) + a_0 = 0,$$

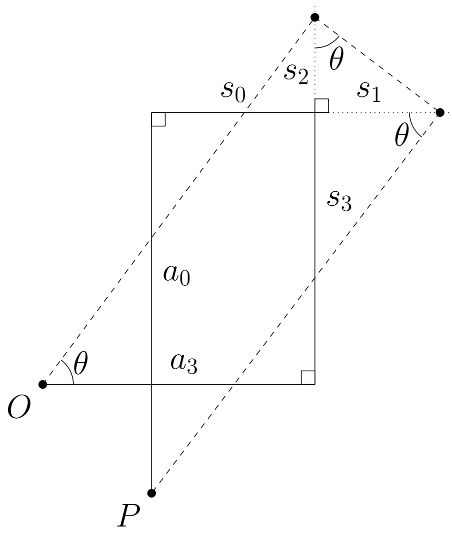
havaitaan, että kyseessä on alkuperäinen yhtälö, jossa yhtälön toteuttaa $x = -\tan\theta$.

Jos jotkin janojen $a_2$, $a_1$ tai $a_0$ pituuksista ovat 0, kolmiot muodostuvat edelleen janoista yllä kuvatuilla yhtälöillä. Tilanteissa, joissa kertoimet ovat myös negatiivisia tai nollia, janan $a_0$ pituus voidaan ratkaista syntyvien kolmioiden sivujen avulla samoin kuin positiivisten kertoimien tapauksessa. Osa tapauksista muodostaa yhdenmuotoiset kuviot. Tilanteet $a_0 \le 0 \le a_1, a_2, a_3$; $a_1, a_2, a_3 \le 0 \le a_0$; $a_2 \le 0 \le a_0, a_1, a_3$ ja $a_2 \le 0 \le a_0, a_1, a_3$ vastaavat toisiaan. Näissä esiintyvä kulma $\theta$ on siis sama, mutta sen tulkinta negatiivisena tai positiivisena vaihtelee.

Käsitellään näistä tapauksista se, jossa $a_0 \le 0 \le a_1, a_2, a_3$. Ratkaisupolku kulkee väistämättä alkuperäisen polun ulkopuolella kertoimien suuruudesta riippumatta. Kulma $\theta$ tulkitaan negatiivisena, joten kolmiot muodostavat kulman $-\theta$. Tällöin




(a) Ratkaisupolku leikkaa janaa $a_2$




(b) Ratkaisupolku leikkaa suoraa janan $a_2$ ulkopuolella

KUVA 3.4. Ratkaisupolku voi muodostua kahdella tavalla, kun kaikki kertoimet $a_n$ ovat positiivisia.

yhdenmuotoiset kolmiot muodostuvat siten, että kolmioiden kulman $\theta$ vastaiset kateetit ovat

$$a_3 \tan(-\theta),$$
$$(a_2 + a_3 \tan(+\theta)) \tan(-\theta) \text{ ja}$$
$$-a_0 = (a_1 + (a_2 + a_3 \tan(+\theta)) \tan(-\theta)) \tan(-\theta),$$

kun huomioidaan että $a_0$ on negatiivinen ja vastaavan janan pituus siten $-a_0$. Koska $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$, saadaan yhtälö muotoon

$$a_3(-\tan\theta)^3 + a_2(-\tan\theta)^2 + a_1(-\tan\theta) + a_0 = 0,$$

joka on jälleen alkuperäinen yhtälö, kun $x = -\tan\theta$.

Muut tapaukset todistetaan täsmälleen samaan tapaan.

Tapaukset $a_0, a_2 \leq 0 \leq a_1, a_3$; $a_1, a_3 \leq 0 \leq a_0, a_2$; $a_0, a_1, a_2, a_3 \leq 0$ ja $0 \leq a_0, a_1, a_2, a_3$ muodostavat yhdenmuotoiset kuviot. Positiivisten kertoimien suhteen lause on jo todistettu.

Sivuutetaan yhdenmuotoiset tapaukset $a_1 \leq 0 \leq a_0, a_2, a_3$; $a_0, a_2, a_3 \leq 0 \leq a_1$; $a_3 \leq 0 \leq a_1, a_2, a_0$ ja $a_1, a_2, a_0 \leq 0 \leq a_3$, sekä yhdenmuotoiset tapaukset $a_0, a_1 \leq 0 \leq a_2, a_3$; $a_2, a_3 \leq 0 \leq a_0, a_1$; $a_1, a_2 \leq 0 a_0, a_3$ ja $a_0, a_3 \leq 0 \leq a_1, a_2$. Nämä todistetaan täsmälleen samalla tavalla, mutta kolmioiden sivut muodostuvat hieman eri tavalla. Lisäksi janojen ja kulmien etumerkkeihin on kiinnitettävä huomiota.

$\square$

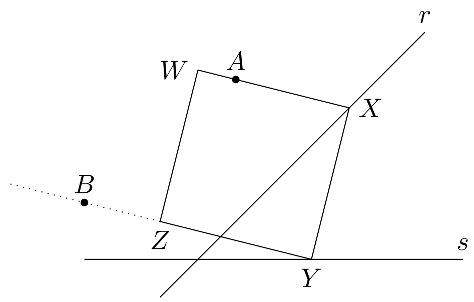
Oletetaan, että jollekin $n$. asteen polynomiyhtälölle on löydetty ratkaisu $x_1$ Lill'n menetelmällä. Kun jaetaan yhtälö tekijällään $x - x_1$, saadaan jokin $(n-1)$. asteen yhtälö. Tällöin $n$. asteen yhtälön ratkaisupolku on yhdenmuotoinen kyseisen $(n-1)$.

asteen yhtälön Lill'n polun kanssa. Näin polynomiyhtälön kaikki reaaliset juuret ovat löydettävissä rekursiivisesti Lill'n menetelmällä. Toisaalta $n$. asteen yhtälölle voidaan löytää myös suoraan useampia ratkaisuja kulman $\theta$ arvoksi [**20**].

## 3.2. Belochin neliö

Jotta Lill'n menetelmän toteuttamisessa voitaisiin hyödyntää taittelua, esitellään seuraavaksi Belochin neliö lähteen [**10**] pohjalta. Italialainen matemaatikko Margherita Piazzolla Beloch (1879-1976) esitteli tämän konstruktion 1930-luvulla ja osoitti että sen avulla voidaan ratkaista kolmannen asteen yhtälön reaaliset juuret. Näin se ratkaisee myös esimerkiksi kuution kahdentamisen ongelman.

Kun on annettu pisteet $A$ ja $B$, sekä suorat $r$ ja $s$, tehtävänä on konstruoida neliö $WXYZ$ siten, että sen kaksi vierekkäistä kulmaa $X$ ja $Y$ ovat suorilla $r$ ja $s$ tässä järjestyksessä, ja sivut $WX$ ja $YZ$ tai niiden jatkeet kulkevat pisteiden $A$ ja $B$ kautta, tässä järjestyksessä. Tilanne on esitetty kuvassa 3.5.

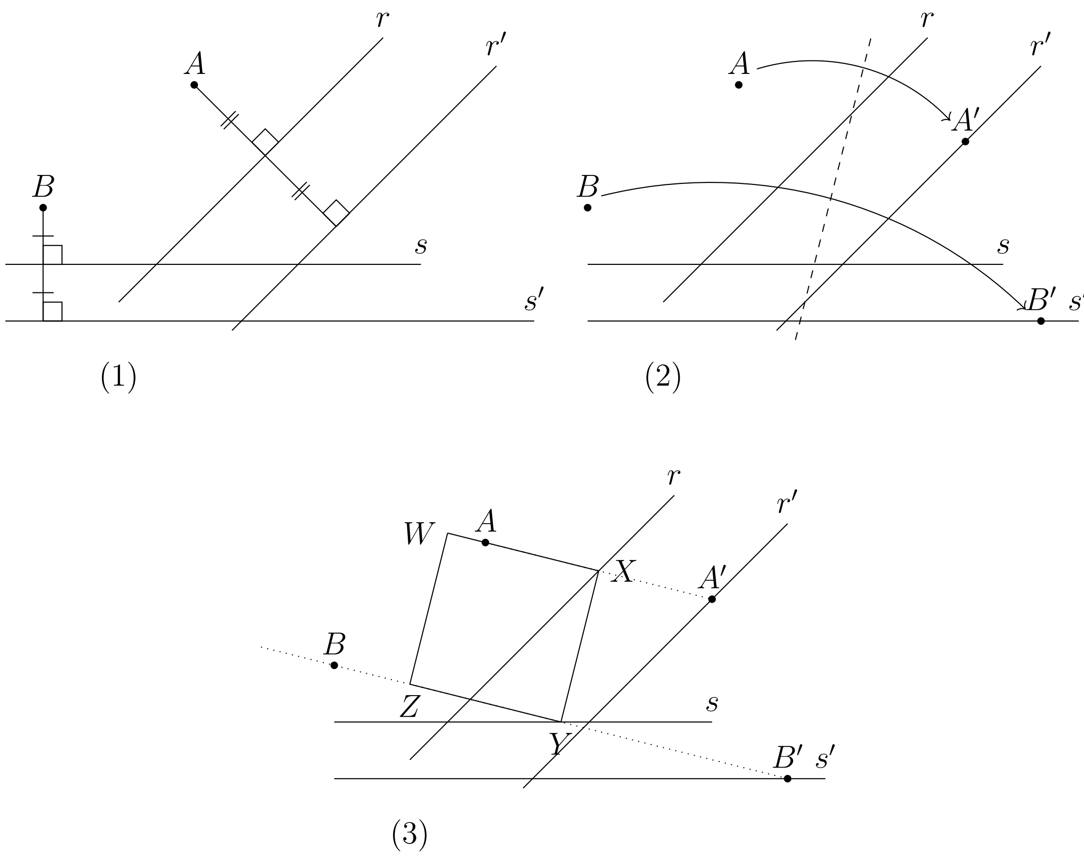



Kuva 3.5. Belochin neliö.

Ratkaisun vaiheet näkyvät kuvassa 3.6. Ensin luodaan suora $r'$ siten, että se on yhdensuuntainen suoran $r$ kanssa ja samalla etäisyydellä siitä kuin piste $A$, mutta vastakkaisella puolella. Tämä on mahdollista peilaamalla piste $A$ suoran $r$ suhteen Lauseen 2.7 mukaisesti, taittamalla suora pisteen $A$ ja sen peilauksen läpi (O1), ja tämän jälkeen luomalla taitokselle kohtisuora pisteen $A$ peilauksen kautta (O4). Konstruoidaan samalla tavalla suora $s'$, joka on suoran $s$ suuntainen ja yhtä kaukana siitä kuin piste $B$.

Tämän jälkeen voidaan taittaa pisteet $A$ ja $B$ yhtäaikaisesti suorille $r'$ ja $s'$, tässä järjestyksessä, ja saadaan taitos, joka leikkaa suorat $r$ ja $s$. Nämä leikkauspisteet ovat Belochin neliön kulmat $X$ ja $Y$, sillä $\overline{XY}$ on nyt kohtisuorassa suoriin $AX$ ja $BY$ nähden, ja näille suorille voidaan muodostaa kaksi janan $\overline{XY}$ pituista janaa origamiaksiooman O3 avulla.

Konstruoidaan luku $\sqrt[3]{2}$ Belochin neliön avulla. Tilanne esitetään kuvassa 3.7. Valitaan $y$-akseli suoraksi $r$ ja $x$-akseli suoraksi $s$. Olkoon $A = (-1, 0)$ ja $B = (0, 2)$. Tällöin, kun konstruoidaan Belochin neliö kuten aiemmin, $r'$ on suora $x = 1$ ja $s'$ on suora $y = -2$. Kun taitetaan piste $A$ suoralle $r'$ ja samalla taitoksella piste $B$ suoralle $s'$, saadaan taitos, joka leikkaa $y$-akselin pisteessä $X$ ja $x$-akselin pisteessä $Y$. Nyt $\overline{XY}$ on kohtisuorassa janoihin $\overline{AX}$ ja $\overline{BY}$ nähden. Tästä seuraa, että suorakulmaiset kolmiot $\triangle OAX$, $\triangle OXY$ ja $\triangle OBY$ ovat yhdenmuotoiset, kun piste $O$ on kuvan 3.7




Kuva 3.6. Belochin neliön konstruointi.

mukaisesti origo. Yhdenmuotoisten kolmioiden sivuista saadaan

$$\frac{\|\overline{OX}\|}{\|\overline{OA}\|} = \frac{\|\overline{OY}\|}{\|\overline{OX}\|} = \frac{\|\overline{OB}\|}{\|\overline{OY}\|},$$

ja kun huomataan, että $\|\overline{OA}\| = 1$ ja $\|\overline{OB}\| = 2$, saadaan

$$\|\overline{OX}\| = \frac{\|\overline{OY}\|}{\|\overline{OX}\|} = \frac{2}{\|\overline{OY}\|}.$$

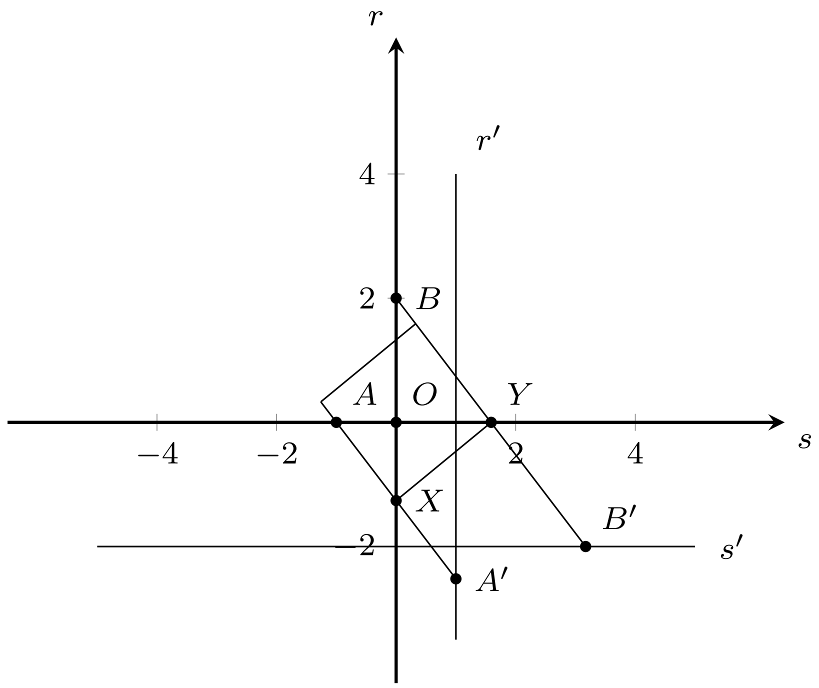
Edelleen,

$$\|\overline{OX}\|^3 = \|\overline{OX}\|\frac{\|\overline{OY}\|}{\|\overline{OX}\|}\frac{2}{\|\overline{OY}\|} = 2,$$

joten $X = (0, -\sqrt[3]{2})$.

## 3.3. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisu taittelun avulla

Luvun $\sqrt[3]{2}$ konstruointi Belochin neliön avulla vastaa täsmälleen yhtälön $x^3-2=0$ ratkaisua Lill'n menetelmällä. Tämä havaitaan kuvasta 3.8, kun sitä verrataan kuvaan 3.7. Yhtälöä $x^3-2=0$ vastaava Lill'n polku konstruoidaan tässä tapauksessa siten, että alkupiste on piste $(-1, 0)$. Tällöin $a_3 = 1$ ja jana $a_3$ päättyy origoon. $a_2$ ja




KUVA 3.7. Luvun $\sqrt[3]{2}$ konstruointi Belochin neliön avulla.

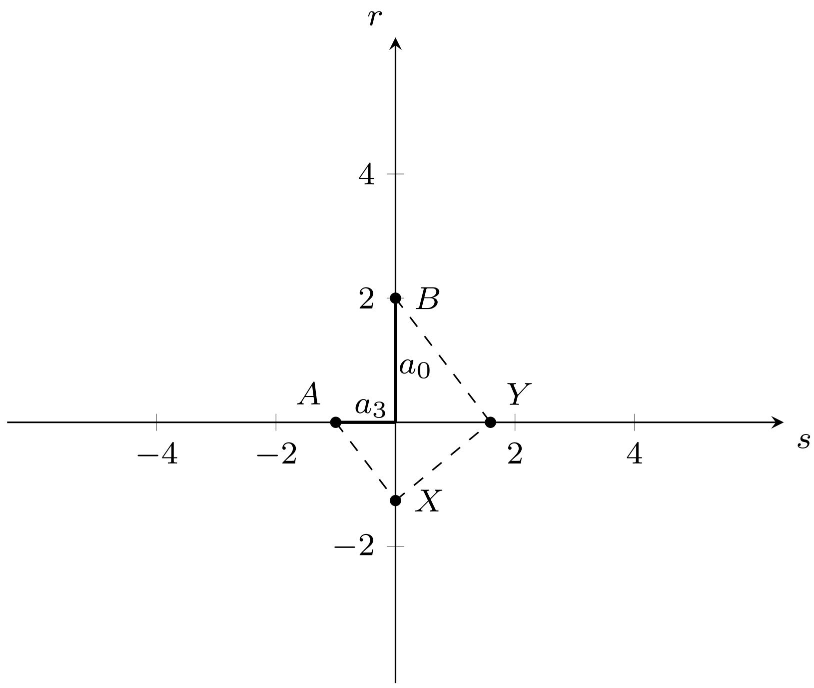
$a_1$ ovat nollia, joten kuvassa niillä ei ole pituutta. Kuitenkin seuraavan piirrettävän janan suuntaa käännetään 90 astetta vastapäivään. Jana $a_0$ on pituudeltaan 2, ja se piirretään ylöspäin origosta, sillä on käännytty kolme kertaa vastapäivään ja $a_0$ on negatiivinen. Tällöin sen loppupiste on piste $(0, 2)$. Nyt voidaan muodostaa Belochin neliö siten, että polun alkupiste on piste $A$, loppupiste on piste $B$ ja koordinaatiston akselit ovat suorat $r$ ja $s$. Tällöin, kun piste $X = (0, -\sqrt[3]{2})$, niin $\|\overline{OX}\| = a_3 \tan\theta = \tan\theta = \sqrt[3]{2}$. Lill'n menetelmässä kulma tulkitaan negatiiviseksi, joten yhtälön ratkaisu Lill'n menetelmän mukaan todella on $x = -\tan(-\theta) = \tan\theta$ [**10**, s.312]. Käsitellään vielä yleisen kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen Belochin taitoksella.

LAUSE 3.2. *Kaikille kolmannen asteen yhtälöille voidaan muodostaa Belochin neliöllä vähintään yksi Lill'n menetelmän ratkaisupolku.*

TODISTUS. Olkoon Lill'n polun alkupiste Belochin neliön piste $A$ ja loppupiste piste $B$. Suora, jota pitkin jana $a_2$ kulkee, olkoon suora $r$, ja suora jota pitkin $a_1$ kulkee, olkoon suora $s$. Tämä on esitetty kuvassa 3.9.

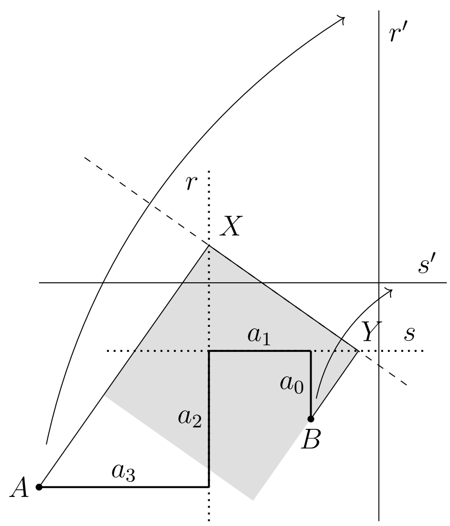
Belochin neliö on aina mahdollista konstruoida näillä valinnoilla, sillä suorille $r$ ja $s$ on olemassa yhdensuuntaiset suorat $r'$ ja $s'$, jotka voidaan konstruoida origamiaksioomien avulla. Lisäksi O6 antaa Lauseen 1.10 mukaan 1-3 ratkaisua, kun suorat $r$ ja $s$ eivät ole yhdensuuntaiset. Kolmannen asteen yhtälön Lill'n esitys ei kuitenkaan johda yhdensuuntaisiin suoriin, sillä valitut suorat $r$ ja $s$ ovat vierekkäisten kertoimien $a_2$ ja $a_1$ määräämiä, ja sen vuoksi toisiinsa nähden kohtisuorassa.

Kun Belochin neliö konstruoidaan näillä valinnoilla, sen kulmat $X$ ja $Y$ ovat janojen $a_2$ ja $a_1$ muodostamilla suorilla, ja sivut suorilla, jotka kulkevat alku- ja loppupisteen kautta. Pisteiden $A$, $X$, $Y$ ja $B$ muodostama polku alkaa yhtälöä kuvaavan




KUVA 3.8. Luvun $\sqrt[3]{2}$ konstruointi Belochin neliöllä vastaa yhtälön $x^3 - 2 = 0$ ratkaisua Lill'n menetelmällä.

polun aloituspisteestä $A$, kääntyy 90 astetta suoran $a_2$ pisteessä $X$ ja suoran $a_1$ pisteessä $Y$, sekä päättyy yhtälöä kuvaavan polun päätepisteeseen $B$. Näin se täyttää kaikki Lill'n menetelmän ratkaisupolun ehdot. □

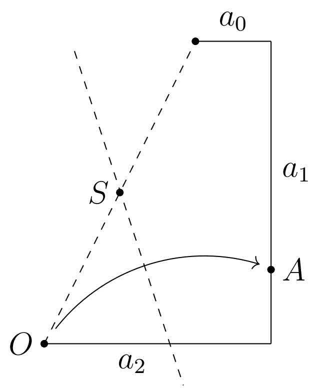



KUVA 3.9. Belochin neliön konstruointi antaa Lill'n ratkaisupolun kolmannen asteen yhtälölle.

Ratkaisupolku antaa ratkaisun $x = -\tan\theta$. Jos ratkaisu halutaan pisteenä $x$-akselilla, voidaan muodostaa suorakulmainen kolmio, jossa on kulma $\theta$, ja kulman viereinen kateetti on yksikköjana. Tällöin kulman $\theta$ vastainen sivu on pituudeltaan $x$. Tämä on mahdollista, koska origamiaksioomat mahdollistavat kulmien ja janojen siirtämisen.

Taittelemalla löydetään myös kaikki toisen asteen yhtälön reaalijuuret käyttäen Lill'n menetelmää. Tämä perustuu Thaleen lauseeseen, jonka mukaan puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora. Piirretään Lill'n polku, joka kuvaa annettua toisen asteen yhtälöä. Olkoot sen alku- ja loppupiste $O$ ja $P$. Olkoon janan $\overline{OP}$ puoliväli ympyrän keskipiste ja alku- ja loppupisteet ympyrän kehällä. Tällöin, jos janaa $a_1$ vastaava suora leikkaa tai sivuaa ympyrää pisteessä $A$, kulma $\angle OAP$ on puoliympyrän kehäkulma ja siten suora. Näin löydetään ratkaisupolku $OAP$ [**7**].

Tämä voidaan taitella kuvan 3.10 mukaisesti perustuen origamiaksioomaan O5. Ympyrän keskipiste $S$ löydetään soveltamalla origamiaksioomia O1 ja O2 alku- ja loppupisteeseen. Tämän jälkeen voidaan taittaa alku- tai loppupiste suoralle $a_1$ taitoksella $l$, joka kulkee keskipisteen $S$ kautta. Tämä onnistuu origamiaksiooman O5 avulla. Konstruoimalla pisteen peilikuva suoran $l$ suhteen saadaan piste $A$, joka sijaitsee suoralla $a_1$ ja jolle $\|\overline{OA}\| = \|\overline{SA}\|$, eli $A$ on ympyrän kehällä ja antaa näin kehäkulman.




KUVA 3.10. Ratkaisupolun piste $A$ voidaan konstruoida origamiaksioomilla O1, O2 ja O5, sekä Lauseen 2.7 perusteella.

LAUSE 3.3. *Taittelemalla löydetään kaikki toisen asteen yhtälön reaaliset juuret.*

TODISTUS. Yllä kuvatut ympyrän $S$ kehän pisteet suoralla $a_1$ voidaan konstruoida origamiaksioomaa O5 käyttäen, jos ne ovat olemassa. Osoitetaan siis, että jos yhtälöllä on reaalisia juuria, janan $a_1$ määräämä suora leikkaa tai sivuaa ympyrää $S$ ja siten suoralla olevat ympyrän kehän pisteet ovat olemassa. Jaetaan todistus kahteen osaan. Ensimmäisessä $a_2$ ja $a_0$ ovat erimerkkiset ja toisessa samanmerkkiset. Kertoimen $a_1$ etumerkillä ei ole polun muodon kannalta merkitystä.

Olkoon kertoimilla $a_2$ ja $a_0$ eri merkit. Tällöin polku on kuvan 3.11 mukainen, eli ensimmäinen 90 asteen käännös tehdään vastakkaiseen suuntaan kuin toinen. Tällöin toisen asteen yhtälön diskriminantti $a_1^2 - 4a_2a_0$ on aina positiivinen. Samoin ympyrä, jonka kehällä alku- ja loppupiste ovat, leikkaa aina janan $a_1$ määräämää suoraa, joten Lill'n menetelmällä löydetään aina kaksi ratkaisua.

Olkoot sitten $a_2$ ja $a_0$ samanmerkkisiä. Voidaan olettaa, että $a_2, a_1, a_0 > 0$, sillä polku on yhdenmuotoinen negatiivisilla kertoimien arvoilla. Kuvan 3.12 mukaisesti $S$ on ympyrä, jonka keskipisteen etäisyys suorasta $a_1$ on

$$\frac{a_2 + a_0}{2}$$

ja säde on

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2 + (a_2 - a_0)^2)}.$$

Ympyrä leikkaa $y$-akselia vähintään kerran, jos ja vain jos

$$r \geq \frac{a_2 + a_0}{2},$$

yhtäsuuruuden antaessa vain yhden sivuamispisteen. Korottamalla tämä toiseen potenssiin saadaan

$$r^2 \geq \frac{(a_2 + a_0)^2}{4},$$

ja tähän sijoittamalla säteen pituus saadaan

$$\frac{1}{4}\left(a_1^2 + (a_2 - a_0)^2\right) \geq \frac{1}{4}(a_2 + a_0)^2.$$

Kun tämä saatetaan muotoon

$$a_1^2 \geq (a_2 + c_0)^2 - (a_2 - a_0)^2 = 4a_2a_0,$$

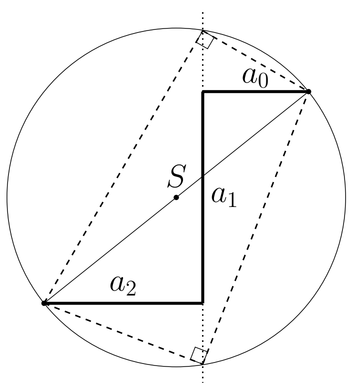
nähdään, että ympyrä ja jana $a_1$ leikkaavat kahdessa pisteessä antaen kaksi ratkaisupolkua jos ja vain jos

$$a_1^2 - 4a_2a_0 > 0,$$

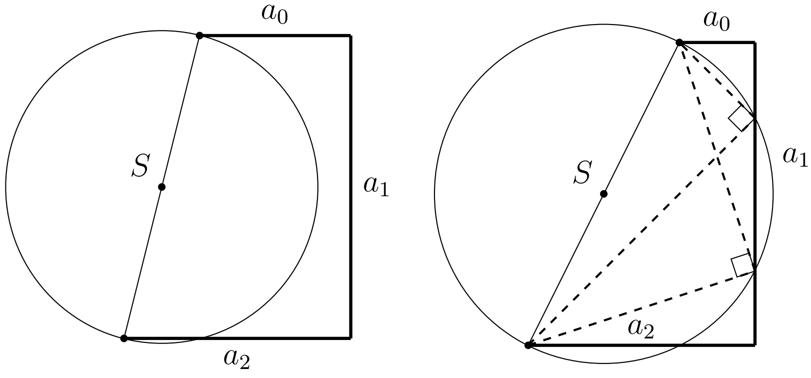
ja sivuavat toisiaan antaen yhden ratkaisupolun, jos ja vain jos

$$a_1^2 - 4a_2a_0 = 0.$$

□




KUVA 3.11. Kun kertoimilla $a_2$ ja $a_0$ on eri etumerkit, toisen asteen yhtälöllä on kaksi ratkaisua ja Lill'n menetelmä antaa kaksi ratkaisupolkua.




KUVA 3.12. Kun kertoimet $a_2$ ja $a_0$ ovat samanmerkkiset, ratkaisupolkujen olemassaolo riippuu kertoimien suuruudesta.

LAUSE 3.4. *Kaikki kolmannen asteen yhtälön reaaliset juuret löydetään taittelemalla Lill'n menetelmää käyttäen.*

TODISTUS. Kolmannen asteen yhtälölle löydetään aina vähintään yksi juuri $x_1$ Lill'n menetelmällä. Siten yhtälö voidaan jakaa tekijällään $(x - x_1)$. Näin saadaan toisen asteen yhtälö, jolle voidaan piirtää Lill'n polku. Lauseen 3.3 mukaan taittelemalla löydetään toisen asteen yhtälön kaikki reaaliset juuret. Siten kaikki kolmannen asteen reaaliset juuret löydetään. □

Jos kolmannen asteen yhtälöllä on useampia reaalisia juuria, ne ovat kaikki löydettävissä taittelemalla useampia Belochin neliöitä Lill'n polulle, sillä O6 antaa yhdestä kolmeen taitosta. Näin astetta ei tarvitse pudottaa. Toisaalta astetta voidaan pudottaa myös käyttämällä ratkaisupolkua toisen asteen yhtälön Lill'n polkuna. Näin voidaan taitella origamiaksioomalla O5 sen ratkaisupolut. Kaikilla näillä tavoilla löydetään jokainen kolmannen asteen yhtälön reaalinen juuri.

Tässä tutkielmassa on tarkasteltu ainoastaan yhden taitoksen origamiaksioomia, mutta tämä rajaus on tehty vain yksinkertaisuuden vuoksi. Paperilla on helppo tehdä useampia taitoksia kerralla, ja näiden mahdollisuuksia on selvitetty esimerkiksi Alperinin ja Langin [**2**], J. Luceron [**15**], sekä Königin ja Nedrencon [**11**] artikkeleissa. Kun sallitaan kaksi yhtäaikaista taitosta, artikkelin [**15**] mukaan voidaan ratkaista viidennen asteen yhtälöitä, ja artikkelin [**11**] mukaan voidaan ratkaista seitsemännen asteen yhtälöitä. Lähteen [**2**] mukaan viidennen asteen yhtälö voidaan ratkaista Lill'n metodilla, jos käytössä on kolme yhtäaikaista taitosta, ja lisäksi kaikkien $n$. asteen polynomiyhtälöiden reaalisten juurten ratkaisuun tarvitaan enintään $(n-2)$ yhtäaikaista taitosta.

# Kirjallisuutta


[1] Roger Alperin. A mathematical theory of origami numbers and constructions. *arXiv preprint math/9912039*, 1999.

[2] Roger C Alperin and Robert J Lang. One-, two-, and multi-fold origami axioms. *Origami*, 4:371–393, 2006.

[3] Lev Beklemishev, Anna Dmitrieva, and Johann A Makowsky. Axiomatizing origami planes. *arXiv preprint arXiv:2012.03250*, 2020.

[4] Moti Ben-Ari. The mathematics of origami, 2020.

[5] John W Emert, Kay I Meeks, and Roger B Nelson. Reflections on a mira. *The American Mathematical Monthly*, 101(6):544–549, 1994.

[6] Clemens Fuchs. Angle trisection with origami and related topics. *Elemente der Mathematik*, 66(3):121–131, 2011.

[7] Stefan Haesen. Understanding quadratic equations using rectangular paths. 2020.

[8] Koshiro Hatori. Origami versus straight edge and compass, 2002.

[9] Thomas Hull. A note on"impossible"paper folding. *American Mathematical Monthly*, 103(3):240–241, 1996.

[10] Thomas C Hull. Solving cubics with creases: the work of beloch and lill. *The American Mathematical Monthly*, 118(4):307–315, 2011.

[11] Joachim König and Dmitri Nedrenco. Septic equations are solvable by 2-fold origami. *arXiv preprint arXiv:1504.07090*, 2015.

[12] Tommi Kuusisto. Äärellisistä kunnista. Master's thesis, 2008.

[13] Robert J Lang. Origami and geometric constructions. *Self Published (1996 2003)*, 1996.

[14] Jorge C Lucero. On the elementary single-fold operations of origami: reflections and incidence constraints on the plane. *arXiv preprint arXiv:1610.09923*, 2016.

[15] Jorge C Lucero. Geometric solution of a quintic equation by two-fold origami. *arXiv preprint arXiv:1801.07460*, 2018.

[16] George E. Martin. *Geometric constructions.* Undergraduate texts in mathematics. Springer, New York, 1998.

[17] Liz Newton. The power of origami. *Simulation, December*, pages 231–231, 2011.

[18] Athanasios Paraskevopoulos. Francois viete and his contribution to mathematics. *arXiv preprint arXiv:2210.12545*, 2022.

[19] Tandalam Sundara Rao. *Geometric Exercises in Paper Folding.* Open Court Publishing Company, 1917.

[20] M Riaz. Geometric solutions of algebraic equations. *The American Mathematical Monthly*, 69(7):654–658, 1962.

[21] Hiroyuki Shima. Elementary algebra for origami: The trisection problem revisited. *American Journal of Applied Mathematics*, 1(4):39–43, 2013.