JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Harmoniset funktiot ja satunnaiskävely

Susanna Uusitalo

25. lokakuuta 2023

Tekijä
Susanna Uusitalo

Otsikko
Harmoniset funktiot ja satunnaiskävely (engl. Harmonic functions and random walk)

Tutkinto-ohjelma
Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä	**Sivumäärä**
25. lokakuuta 2023	48

Tiivistelmä

Tämän tutkielman ensimmäisessä kokonaisuudessa tarkoituksena on tutustua harmonisiin funktioihin ja niiden ominaisuuksiin. Niistä keskeinen on harmonisen funktion keskiarvoperiaate. Toisessa kokonaisuudessa tarkastellaan todennäköisyysteoriaa ja harmonisen funktion yhteyttä pallossa tapahtuvaan satunnaiskävelyyn.

Tutkielman alussa tutustutaan Laplacen yhtälöön, jonka avulla harmoniset funktiot määritellään. Erityisesti tarkastellaan sen fysikaalista tulkintaa ja johdetaan perusratkaisu.

Seuraavaksi esitellään kolme harmonisen funktion ominaisuutta. Näistä harmonisen funktion keskiarvoperiaate kertoo harmonisen funktion saavan pallon keskipisteessä yhtä suuren arvon sekä pallon pinnalla olevien arvojen keskiarvon että pallon sisällä olevien arvojen keskiarvon kanssa. Keskiarvoperiaatteesta seuraa, että harmoniset funktiot ovat säännöllisiä eli äärettömän monta kertaa jatkuvasti differentioituvia. Lisäksi todistetaan säännöllisyystuloksen paranneltu versio, joka kertoo harmonisen funktion olevan analyyttinen eli jonkin pisteen ympärillä esitettävissä suppenevana potenssisarjana.

Harmonisten funktioiden ominaisuuksien jälkeen tutkielmassa perehdytään todennäköisyysteoriaan ja erityisesti martingaaliteoriaan. Ensin tutustutaan stokastiikan esitietoihin ja määritellään martingaali ja pysäytysaika. Niiden jälkeen todistetaan optionaalisen pysäyttämisen lause, jonka mukaan martingaalin odotusarvot ovat yhtä suuret aloitus- ja pysäytyshetkellä.

Tutkielman lopuksi esitellään harmonisen funktion keskiarvoperiaatetta muistuttava dynaamisen ohjelmoinnin periaate, jolle etsitään ratkaisufunktio siten, että se saavuttaa annetun reuna-arvofunktion. Lisäksi näytetään löydetyn ratkaisufunktion olevan pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn odotusarvo.

Sisällys

Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan sopivan säännöllisiä funktioita, joille

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0,$$

missä $u_{x_i x_i}$ tarkoittaa funktion u toisen kertaluvun osittaisderivaattaa. Tämän Laplacen yhtälön toteuttavia kaksi kertaa jatkuvasti differentioituvia funktioita kutsutaan harmonisiksi funktioiksi. Niiden mielenkiintoisista ominaisuuksista keskiarvoperiaate on olennainen perusta tämän tutkielman päätulokselle. Siinä näytetään dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen ratkaisufunktion, joka noudattaa määritelmänsä mukaan keskiarvoperiaatetta joukossa Ω_ϵ, olevan pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn odotusarvo. Lisäksi tämä ratkaisufunktio on harmoninen funktio sopivilla oletuksilla.

Ensimmäisessä luvussa selvennetään lukijalle tutkielmassa käytettäviä merkintöjä. Lisäksi esitellään myöhemmissä todistuksissa tarvittavia aputuloksia.

Luvussa 2 tutustutaan Laplacen yhtälöön laskemalla esimerkki harmonisesta funktiosta, mikä johdattelee yleisen perusratkaisun etsimiseen. Lisäksi luvuissa 2.1 ja 2.2 perehdytään tarkemmin Laplacen yhtälöön. Ensin tarkastellaan sen fysikaalista tulkintaa, joka pohjautuu diffuusion tasapainotilaan. Esimerkiksi lämpötilasta puhuttaessa se tarkoittaa, että lähteettömässä tapauksessa tarkastelualueen reunasta virtaa ulos ja sisään yhtä paljon lämpöä. Tämän jälkeen johdetaan Laplacen yhtälölle perusratkaisu.

Seuraavaksi esitellään harmonisen funktion mielenkiintoisia ominaisuuksia. Luvussa 3.1 todistetaan harmonisen funktion keskiarvoperiaate

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) = \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy, \text{ missä } \fint \text{ on keskiarvointegraali.}$$

Tulos tarkoittaa sitä, että harmonisen funktion u arvo tarkasteltavan pallon keskipisteessä on yhtä suuri pallon sisällä olevien arvojen keskiarvon ja pallon reunalla eli pinnalla olevien arvojen keskiarvon kanssa. Tätä tulosta hyödynnetään muiden seuraavaksi mainittavien ominaisuuksien todistuksessa.

Luvussa 3.2 tarkastellaan harmonisen funktion säännöllisyyttä. Lisäksi määritellään standardisilottajafunktio ja jatkuvan funktion silotusfunktio. Näiden jälkeen havainnollistetaan esimerkillä, miten yksiulotteinen porrasfunktio, joka ei ole jatkuva, silotetaan jatkuvaksi. Esimerkissä muodostetaan vaiheittain standardisilottajafunktio ja silotusfunktio sekä esitetään havainnollistava kuva. Seuraavaksi tutustutaan yleisemmin jatkuvan funktion silotusfunktion ominaisuuksiin. Niistä eräs hyödyllinen kertoo jatkuvan funktion silotusfunktion olevan äärettömän monta kertaa jatkuvasti differentioituva. Tätä ominaisuutta käyttämällä todistetaan luvun lopuksi harmonisen funktion säännöllisyys, jonka mukaan keskiarvoperiaatteen toteuttava jatkuva funktio on sileä.

Luvussa 3.3 parannetaan harmonisen funktion säännöllisyystulosta niin, että jokaisen harmonisen funktion todistetaan olevan myös analyyttinen. Tällä tarkoitetaan sitä, että sileä funktio voidaan esittää suppenevana potenssisarjana jonkin pisteen lähistöllä. Tätä todistusta varten luvun alussa esitellään tulos, jossa näytetään keskiarvoperiaatteen avulla harmonisen funktion osittaisderivaatoille arviot. Luvun lopuksi käsitellään esimerkki ei-analyyttisestä funktiosta.

Luvussa 4 siirrytään tarkastelemaan satunnaiskävelyä pallossa. Se johdattelee lukijan todennäköisyysteoriaan, jota käsitellään luvussa 4.1. Luvun aluksi esitellään hyödyllisiä käsitteitä ja määritelmiä. Erityisesti määritellään martingaali, joka kertoo, että tulevan tapahtuman odotusarvo ei muutu nykyisestä, kun menneet tapahtumat tunnetaan, sekä pysäytysaika. Luvun lopuksi todistetaan esiteltyjen aputulosten avulla optionaalisen pysäyttämisen lause, jonka oleellinen sisältö on

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$$

eli martingaalin odotusarvot pysäytys- ja aloitushetkellä ovat yhtäsuuret.

Tutkielman lopuksi luvussa 4.2 tarkastellaan dynaamisen ohjelmoinnin periaatetta ja todistetaan ratkaisufunktion olemassaolo. Viimeisenä tutkielmassa todistetaan tämän löydetyn ratkaisufunktion olevan pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn odotusarvo optionaalisen pysäyttämisen lauseen avulla, ja lisäksi näytetään, että sopivilla oletuksilla se on myös harmoninen.

Pääasiallisena lähteenä tämän tutkielman harmonisia funktioita käsittelevissä luvuissa 2 ja 3 on käytetty Lawrence C. Evansin kirjaa Partial differential equations [2]. Tukena on käytetty myös Mikko Parviaisen luentomonistetta Partial differential equations [10] sekä Qing Hanin ja Fanghua Linin kirjaa Elliptic partial differential equations [5]. Näihin lähteisiin perustuu lisäksi luvun 1 merkinnät. Jo mainittujen lisäksi luvussa 3.2 lähteenä on käytetty Parviaisen luentomonistetta Partial differential equations 2 [11]. Luvun 4 pääasiallisina lähteinä on käytetty Marta Lewickan kirjaa A course on Tug-of-War games with random noise [8] ja Evansin kirjaa An introduction to stochastic differential equations [3]. Näiden lisäksi luvun 4.2 lähteenä on käytetty Parviaisen artikkelia Notes on tug-of-war games and the p-Laplace equation [13]. Läpi tutkielman on tarvittu tärkeitä pieniä aputuloksia, joiden lähteinä ovat Jyväskylän yliopiston luentomonisteet: Mitta- ja integraaliteoria 1 [7], JMA2 [9], JMA3 [6] ja JMA4 [12].

1 Merkintöjä ja esitietoja

Merkintöjen lähteinä on käytetty Evansin kirjaa [2] ja Parviaisen luentomonistetta [10].

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{R}^n$	n-ulotteinen Euklidinen avaruus
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	avoin osajoukko
$\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$	suljettu osajoukko
$\partial\Omega$	joukon Ω reuna
e_i	$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ standardi kantavektori
$\lvert x\rvert$	$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, kun piste $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$B(x, r)$	x-keskinen r-säteinen pallo
$u \colon \Omega \to \mathbb{R}$	reaaliarvoinen funktio
$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$	$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$ funktion u osittaisderivaatta suuntaan x_i olettaen, että raja-arvo on olemassa
u_{x_i}	$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatta
$u_{x_i x_j}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ toisen kertaluvun osittaisderivaatta
Du	$(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ gradientti
$\operatorname{div}(u)$	$\sum_{i=1}^n u^i_{x_i}$ divergenssi
Δu	$\operatorname{div}(Du)$ funktion u Laplacen operaattori
$\lvert\alpha\rvert$	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, kun $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on multi-indeksi
$D^\alpha u$	$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, kun $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
$C(\Omega)$	joukon Ω jatkuvien funktioiden avaruus
$C^k(\Omega)$	joukon Ω k kertaa jatkuvasti differentioituvien funktioiden avaruus
$C^\infty(\Omega)$	joukon Ω äärettömän monta kertaa jatkuvasti differentioituvien funktioiden avaruus, ts. sileiden funktioiden avaruus
$L^1(A)$	mitallisessa joukossa A integroituvien ja mitallisten funktioiden avaruus

Seuraavaksi tässä luvussa esitellään harmonisen funktion fysikaalisen tulkinnan ja erilaisten ominaisuuksien todistamiseen tarvittavia esitietoja. Suurin osa esitiedoista perustuu Jyväskylän yliopiston Johdatus matemaattiseen analyysiin -kursseihin 2-4, joista käytetään myöhemmin lyhennettyä nimitystä JMA. Nämä esitiedot pidetään tunnettuina, joten niitä ei varsinaisesti esitellä, vaan tuloksiin viitataan tapauskohtaisesti. Vektoricalculus 2 -kurssilla on esitelty kolmiulotteisessa tapauksessa divergenssilause. Tässä tutkielmassa hyödynnetään sen n-ulotteista tapausta, jonka muotoilussa tarvitaan merkintää $\partial\Omega \in C^1$, mikä tarkoittaa, että joukon Ω reuna voidaan esittää lokaalisti jatkuvasti differentioituvan funktion avulla. Lisäksi käytetään ulospäin suunnatulle yksikkönormaalivektorille merkintää $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$. joka esiintyy divergenssilauseessa ja myöhemmin luvussa 2.1. Divergenssilauseen todistus sivuutetaan, mutta se löytyy Hans Wilhelm Altin kirjasta Linear Functional Analysis [1, s. 270-272].

Lause 1.1 (Divergenssilause). *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja $\partial\Omega \in C^1$. Olkoon $u \in C^1$ avoimessa joukon $\overline{\Omega}$ ympäristössä. Tällöin jokaiselle $i \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\int_\Omega u_{x_i}\, dx_i = \int_{\partial\Omega} u\nu_i\, dS,$$

missä $\nu\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ on ulkopuolelle suunnattu yksikkönormaalivektori. Valitsemalla $u = F_i$ ja summaamalla indeksin i yli saadaan

$$\int_\Omega \operatorname{div} F\, dx = \int_{\partial\Omega} F\nu\, dS.$$

Palautetaan tämän luvun lopuksi mieleen muutamat hyödylliset tulokset, jotka on todistettu aiemmin Jyväskylän yliopiston kursseilla lukuunottamatta Lebesguen differentioituvuuslausetta. Ensimmäisenä esitellään JMA2-kurssin [9] sisältöön perustuva tasaisen jatkuvuuden tulos. Tämän jälkeen siirrytään Lehrbäckin luentomonisteeseen [7] perustuviin mittateorian tuloksiin, joita ovat kolmioepäyhtälö, Lebesguen differentioituvuuslause, joka esitetään Evansin kirjassa [2, s. 649], ja dominoidun konvergenssin lause. Siinä sekä myöhemmin tämän tutkielman tuloksissa törmätään Mitta- ja integraaliteoria 1 -kurssilta [7, s. 67] tuttuun käsitteeseen *melkein kaikkialla*, joka tarkoittaa, että jokin ominaisuus pätee muualla paitsi nollamittaisessa joukossa. Tämän luvun tuloksia hyödynnetään luvuissa 3.2 ja 3.3 esiintyvissä todistuksissa.

Lause 1.2. *Olkoot Ω rajoitettu joukko ja $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin f on tasaisesti jatkuva joukossa $\overline{\Omega}$.*

Todistus. Sivuutetaan, katso JMA2-kurssin luentomonisteesta [9, s. 96]. □

Lause 1.3 (Kolmioepäyhtälö). *Olkoon $f \in L^1(A)$, jolloin yllä olevien merkintöjen mukaan joukko A on mitallinen. Tällöin*

$$\left| \int_A f\, dx \right| \le \int_A |f|\, dx.$$

Todistus. Sivuutetaan, katso Mitta- ja integraaliteoria 1 -kurssin luentomonisteesta [7, s. 73]. □

Lause 1.4 (Lebesguen differentioituvuus lause)**.** *Olkoon* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *siten, että* $\int_{\mathbb{R}^n} |f|\ dx < \infty$*. Tällöin, kun* $r \to 0$*,*

$$\fint_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|\ dx \to 0 \quad \textit{melkein kaikkialla.}$$

Lause 1.5 (Dominoidun konvergenssin lause)**.** *Olkoot* $f, f_k\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ *mitallisia funktioita siten, että*

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \textit{melkein kaikkialla joukossa } A.$$

Oletetaan, että on olemassa funktio $g \in L^1(A)$ *siten, että kaikille* $k \in \mathbb{N}$ *pätee*

$$|f_k| \leq g \quad \textit{melkein kaikkialla joukossa } A.$$

Tällöin myös $f, f_k \in L^1(A)$ *kaikille* $k \in \mathbb{N}$*, ja*

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\ dx = \int_A f\ dx.$$

Todistus. Sivuutetaan, katso Mitta- ja integraaliteoria 1 -kurssin luentomonisteesta [7, s. 74-75]. □

2 Laplacen yhtälö

Tässä luvussa tutustutaan *Laplacen yhtälöön*, joka on yksi tärkeistä osittaisdifferentiaaliyhtälöistä. Lisäksi määritellään harmoniset funktiot ja lasketaan esimerkki. Tämän luvun tuloksissa on käytetty lähteenä Evansin kirjaa [2] ja Parviaisen luentomonistetta [10].

Tarkastellaan Laplacen yhtälöä

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0, \tag{2.1}$$

missä $u\colon \Omega \to \mathbb{R}, u = u(x)$ ja $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Huomioitavaa on se, että funktio u on reaaliarvoinen funktio.

Määritelmä 2.1. Funktio $u \in C^2(\Omega)$ on *harmoninen*, jos se toteuttaa Laplacen yhtälön $\Delta u = 0$.

Esimerkki 2.2. Näytetään, että kaksiulotteinen funktio

$$f(x) = 2 \log |x|$$

on harmoninen funktio, kun $x \neq 0$. Valittu esimerkkifunktio liittyy oleellisesti myöhemmin johdettavaan harmonisen funktion perusratkaisuun. Palautetaan mieleen luvusta 1, että kaksiulotteisessa tapauksessa

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Hyödynnetään edellä esitettyä määritelmää. Funktio f on logaritmifunktiona jatkuva määrittelyjoukossaan

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}.$$

Lasketaan ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat:

$$f_{x_1} = 2 \cdot \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_1 = 2x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1} = \frac{2x_1}{|x|^2}$$

ja

$$f_{x_2} = 2 \cdot \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_2 = 2x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1} = \frac{2x_2}{|x|^2}.$$

Lasketaan seuraavaksi toisen kertaluvun osittaisderivaatat:

$$f_{x_1 x_1} = 2(x_1^2 + x_2^2)^{-1} + 2x_1 \cdot (-1)(x_1^2 + x_2^2)^{-2} \cdot 2x_1 = \frac{2}{|x|^2} - \frac{4x_1^2}{|x|^4} = \frac{2|x|^2 - 4x_1^2}{|x|^4}$$

ja

$$f_{x_2x_2} = 2(x_1^2+x_2^2)^{-1} + 2x_2 \cdot (-1)(x_1^2+x_2^2)^{-2} \cdot 2x_2 = \frac{2}{|x|^2} - \frac{4x_2^2}{|x|^4} = \frac{2|x|^2 - 4x_2^2}{|x|^4}.$$

Funktio f on kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva eli $f \in C^2(\Omega)$. Nyt on laskettu tarvittavat osittaisderivaatat, jolloin Laplacen yhtälön (2.1) nojalla

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(Df) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \operatorname{div}(f_{x_1} + f_{x_2}) = f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} \\ &= \frac{2|x|^2 - 4x_1^2}{|x|^4} + \frac{2|x|^2 - 4x_2^2}{|x|^4} \\ &= \frac{2|x|^2 2|x|^2 - 4x_1^2 - 4x_2^2}{|x|^4} \\ &= \frac{4|x|^2 - 4(x_1^2 + x_2^2)}{|x|^4} \\ &= \frac{4|x|^2 - 4|x|^2}{|x|^4} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Näin ollen Määritelmän 2.1 nojalla $f(x) = 2\log|x|$ on harmoninen funktio.

2.1 Fysikaalinen tulkinta

Tarkastellaan tässä luvussa esimerkkiä Laplacen yhtälön fysikaalisesta tulkinnasta, joka perustuu diffuusion tasapainotilaan. Yleisesti ottaen ratkaisufunktio u kuvaa jonkin suureen, kuten kemikaalisen konsentraation, lämpötilan tai sähköstaattisen potentiaalin, suuruutta tasapainotilassa. Tällöin tiedetään, että lähteettömässä tapauksessa nettovirtaus läpi alueen reunan on nolla eli esimerkiksi lämpöä virtaa alueesta ulos yhtäpaljon kuin sitä virtaa alueeseen sisään.

Esimerkki 2.3. Olkoon $U \subset \Omega$ sileä. Tällöin funktion u nettovirtaus läpi joukon U reunan ∂U on tasapainotilassa nolla eli

$$\int_{\partial U} F \cdot \nu \, dS = 0,$$

missä ν on alueen ulkopuolelle suunnattu yksikkönormaalivektorikenttä ja F on virtauksen suuruus. Lauseen 1.1 nojalla saadaan edelleen

$$0 = \int_{\partial U} F \cdot \nu \, dS = \int_U \operatorname{div}(F) \, dx,$$

jolloin osajoukon $U \subset \Omega$ ollessa mielivaltainen ja virtauksen F ollessa sileä saadaan

$$\mathrm{div}(F) = 0.$$

Diffuusion tapauksessa, kun puhutaan esimerkiksi lämmön siirtymisestä, on fysikaalisesti perusteltua, että virtaus riippuu lämpötilaerosta. Lämpö virtaa kuumasta kylmään ja mitä nopeammin virtaus tapahtuu, sitä suurempi lämpötilaero on. Toisin sanoen virtauksen suuruus F on verrannollinen ratkaisufunktion gradientin Du eli suurimman muutosnopeuden vastalukuun. Siten, kun $a > 0$ on vakio, merkitään

$$F = -aDu$$

ja yhdistämällä edellä olevat tiedot saadaan

$$0 = \mathrm{div}(F) = \mathrm{div}(-aDu) = -a\ \mathrm{div}(Du) = -a\Delta u.$$

Tästä seuraa suoraan, että

$$\Delta u = 0.$$

2.2 Perusratkaisu

Johdetaan tässä luvussa Laplacen yhtälön perusratkaisu. Laplacen yhtälö on kierron suhteen invariantti eli muuttumaton, joten johdetaan säde-muotoiset ratkaisut, jotka ovat funktioita muuttujan r suhteen.

Olkoon Laplacen yhtälön ratkaisu u säteestä r riippuva funktio v siten, että

$$u(x) = v(r) = v(r(x)),$$

missä $r = r(x) = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.
Lasketaan ensin funktion $r(x)$ ensimmäinen osittaisderivaatta muuttujan x_i, missä $i \in \{1, \dots, n\}$ suhteen

$$\begin{aligned} r_{x_i}(x) &= \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i \\ &= \frac{x_i}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{x_i}{r}, \quad \text{missä } x \neq 0. \end{aligned}$$

Vastaavasti funktion $r(x)$ toinen osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen saadaan tulon derivointisäännön avulla

$$\begin{aligned} r_{x_ix_i}(x) &= -\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x_i\cdot x_i+(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 \\ &= -\frac{x_i^2}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{x_i^2}{r^3}+\frac{1}{r}, \quad \text{missä } x\neq 0. \end{aligned}$$

Täten saadaan ketjusäännön avulla funktion $u=v(r)$ ensimmäiseksi osittaisderivaataksi muuttujan x_i suhteen

$$u_{x_i}=v'(r)\cdot r_{x_i}=v'(r)\frac{x_i}{r}, \quad \text{missä } x\neq 0$$

ja vastaavasti toiseksi osittaisderivaataksi

$$\begin{aligned} u_{x_ix_i} &= v''(r)\cdot\frac{x_i}{r}\cdot\frac{x_i}{r}+v'(r)r_{x_ix_i} \\ &= v''(r)\cdot\frac{x_i^2}{r^2}+v'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right), \quad \text{missä } x\neq 0. \end{aligned}$$

Laplacen yhtälön (2.1) nojalla

$$\begin{aligned} 0=\Delta u &= \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} \\ &= \sum_{i=1}^n\left(v''(r)\cdot\frac{x_i^2}{r^2}+v'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)\right) \\ &= v''(r)\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^2}+v'(r)\left(\frac{\sum_{i=1}^n 1}{r}-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^3}\right) \\ &= v''(r)\frac{r^2}{r^2}+v'(r)\left(\frac{n}{r}-\frac{r^2}{r^3}\right) \\ &= v''(r)+v'(r)\left(\frac{n-1}{r}\right), \quad \text{missä } x\neq 0. \end{aligned}$$

Seuraavaksi merkitään $w(r)=v'(r)$, jolloin $w'(r)=v''(r)$. Tällöin saadaan ensimmäisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$w'(r)+w(r)\left(\frac{n-1}{r}\right)=0.$$

Oletetaan, että $w(r)\neq 0$, jolloin yllä oleva saadaan muotoon

$$-\frac{w'(r)}{w(r)}=\frac{n-1}{r}.$$

Tällaista muotoa oleva osittaisdifferentiaaliyhtälö ratkaistaan integroimalla puolittain

$$-\int_1^R \frac{w'(r)}{w(r)}\,dr = \int_1^R (n-1)\cdot\frac{1}{r}\,dr$$
$$\Rightarrow -\Big/_1^R \log\left(|w(r)|\right) = (n-1)\Big/_1^R \log\left(r\right).$$

Sijoittamalla integroimisrajat ja käyttämällä logaritmin laskusääntöjä saadaan

$$\Rightarrow \log(|w(R)|) - \log(|w(1)|) = -(n-1)(\log(R) - \log(1))$$
$$\Rightarrow \log(|w(R)|) - \log(|w(1)|) = \log\left(R^{-(n-1)}\right)$$
$$\Rightarrow \log(|v'(R)|) = \log(R^{1-n}) + \log(|w(1)|).$$

Tästä korottamalla puolittain luonnollisen logaritmin kantaluvun e potenssiin ja käyttämällä logaritmin laskusääntöjä saadaan

$$\Rightarrow |v'(R)| = e^{\log\left(R^{1-n}\right)+\log(|w(1)|)}$$
$$\Rightarrow |v'(R)| = e^{\log(|w(1)|)}\cdot e^{\log\left(R^{1-n}\right)}$$
$$\Rightarrow |v'(R)| = aR^{1-n}, \qquad \text{missä } a \text{ vakio.}$$

Tästä saadaan ratkaistua funktio $v(R)$ integroimalla, kun $R > 0$

$$v(r) = \begin{cases} b\cdot\log(R) + c, & \text{kun } n = 2 \\ b\cdot R^{2-n} + c, & \text{kun } n \geq 3 \end{cases}, \qquad \text{missä } b \text{ ja } c \text{ vakioita.}$$

Tämän päättelyketjun jälkeen voidaan määritellä Laplacen yhtälön perusratkaisu. Määritelmässä merkintä ω_n tarkoittaa yksikköpallon tilavuutta avaruudessa $\mathbb{R}^n$, mihin palataan tarkemmin huomautuksessa 3.2.

Määritelmä 2.4. Funktiota

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}} & (n\geq 3) \end{cases},$$

missä $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, sanotaan Laplacen yhtälön perusratkaisuksi.

3 Harmonisen funktion ominaisuudet

Tarkastellaan tässä luvussa harmonisen funktion erilaisia ominaisuuksia, joista osaa päästään hyödyntämään myöhemmin. Lisäksi luvussa 3.2 tutustutaan huolellisesti silotukseen ja konvoluutioon, sekä niiden avulla funktion tehokkaaseen approksimaatioon. Tämän luvun tulokset perustuvat pääasiallisesti Evansin kirjaan [2] ja Parviaisen luentomonisteeseen [10]. Lisäksi on hyödynnetty Hanin ja Linin kirjaa [5].

3.1 Keskiarvoperiaate

Harmonisella funktiolla on yksi merkittävä ominaisuus, jota kutsutaan *keskiarvoperiaatteeksi*. Tämän periaatteen mukaan harmonisen funktion u arvo $u(x)$ pallon keskipisteessä on yhtä suuri sekä pallon pinnalla olevien arvojen keskiarvon että pallon sisällä olevien arvojen keskiarvon kanssa. Todistetaan tämä sekä käänteinen keskiarvoperiaate tässä luvussa. Näitä ennen määritellään *keskiarvointegraali* sekä pallon pinnalla että pallon sisällä ja lasketaan esimerkki n-ulotteisesta muuttujanvaihdosta.

Määritelmä 3.1. Olkoon $B(x,r) \subset U$ pallo.

1. Pallon sisällä olevien funktion u arvojen *keskiarvointegraali* on

$$\fint_{B(x,r)} u\ dy = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u\ dy.$$

2. Pallon pinnalla olevien funktion u arvojen *keskiarvointegraali* on

$$\fint_{\partial B(x,r)} u\ dS = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u\ dS.$$

Huomautus 3.2. Merkitään $\omega_n :=$ *yksikköpallon* $B(0,1)$ *tilavuus avaruudessa* $\mathbb{R}^n$ ja $n\omega_n :=$ *yksikköpallon pinnan* $\partial B(0,1)$ *pinta-ala avaruudessa* $\mathbb{R}^n$. Tällöin, kun $B(0,r) \in \mathbb{R}^n$, saadaan

$$|B(0,r)| = \omega_n\, r^n \quad \text{ja} \quad |\partial B(0,r)| = n\omega_n\, r^{n-1}.$$

Perustellaan, miksi $n\omega_n$ on yksikköpallon pinnan $\partial B(0,1)$ pinta-ala avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Koska ω_n on yksikköpallon $B(0,1)$ tilavuus avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin voidaan kirjoittaa

$$r^n\omega_n = \int_0^r \int_{\partial B(0,\rho)} 1\ dS_\rho\ d\rho = \int_0^r |\partial B(0,\rho)|\ d\rho.$$

Koska yksikköpallon pinta on yhden dimension pienempi kuin yksikköpallo, merkitään yksikköpallon pinnan pinta-alaa vakiolla $\sigma_{n-1} := |\partial B(0,1)|$. Tällöin voidaan muotoilla

$$\int_0^r |\partial B(0,\rho)| \; d\rho = \int_0^r \sigma_{n-1}\rho^{n-1} \; d\rho,$$

josta integroimalla saadaan

$$\int_0^r \sigma_{n-1}\rho^{n-1} \; d\rho = \frac{\sigma_{n-1}}{n} \Big/_0^r \rho^n = \frac{\sigma_{n-1}}{n} r^n.$$

Näin ollen saadusta yhtälöstä

$$r^n \omega_n = \frac{\sigma_{n-1}}{n} r^n$$

voidaan supistaa puolittain termi r^n pois ja sen jälkeen kertoa yhtälö puolittain termillä n, jolloin saadaan

$$n\omega_n = \sigma_{n-1}.$$

Siispä $n\omega_n$ on yksikköpallon pinnan $\partial B(0,1)$ pinta-ala.

Esimerkki 3.3. Olkoon $\int_{x-r}^{x+r} u(y) \; dy$ yksiulotteinen integraali siten, että alue, jonka yli integroidaan, on yksiulotteinen pallo $B(x,r)$. Tehdään muuttujanvaihto

$$y = x + rz, \quad \text{jolloin} \quad z = \frac{y-x}{r}.$$

Tällöin derivaatalle pätee $dy = r\,dz$. Uusi alaraja muuttujan z suhteen on $z = \frac{(x-r)-x}{r} = -1$ ja vastaavasti yläraja on $z = 1$. Tällöin muuttujanvaihdon nojalla saadaan integraaliksi

$$\int_{x-r}^{x+r} u(y) \; dy = \int_{-1}^{1} u(x+rz)\, r \; dz.$$

Moniulotteisessa tilanteessa vastaavalla päättelyllä saadaan integraaliksi

$$\int_{\partial B(x,r)} u(y) \; dS(y) = \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, r^{n-1} \; dS(z).$$

Näiden aputulosten myötä voidaan seuraavaksi esitellä harmonisen funktion keskiarvoperiaate ja sen todistus. Tämän jälkeen todistetaan myös käänteinen keskiarvoperiaate käyttämällä apuna seuraavassa todistuksessa määriteltävän funktion ϕ derivaattaa.

Lause 3.4 (Harmonisen funktion keskiarvoperiaate)**.** *Jos $u \in C^2(\Omega)$ on harmoninen funktio, niin jokaiselle pallolle $B(x,r) \subset \Omega$ pätee*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ dS(y) = \fint_{B(x,r)} u(y)\ dy. \tag{3.1}$$

Todistus. Määritellään funktio

$$\phi(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ dS(y),$$

joka voidaan määritelmän 3.1 nojalla esittää muodossa

$$\phi(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\ dS(y).$$

Olkoon piste $z \in B(0,1)$. Tehdään muuttujanvaihto $y = rz + x$ siten, että $dS(y) = r^{n-1}\, dS(z)$. Kerroin r^{n-1} perustuu n-ulotteisen pallon pinta-alkioiden skaalaukseen. Tällöin määritelmän 3.1, edellä olevien esimerkin ja huomautuksen nojalla

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\ dS(y) \\
&= \frac{1}{|\partial B(x,r)|} |\partial B(0,1)| \frac{1}{|\partial B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1)} u(rz+x) r^{n-1}\ dS(z) \\
&= \frac{|\partial B(0,1)|}{|\partial B(x,r)|} r^{n-1} \fint_{\partial B(0,1)} u(rz+x)\ dS(z) \\
&= \fint_{\partial B(0,1)} u(rz+x)\ dS(z).
\end{aligned}$$

Hyödynnetään oletusta $u \in C^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$, jolloin erityisesti funktio u on jatkuvasti differentioituva. Palauttamalla muuttujanvaihto takaisin siten, että $dS(z) = r^{1-n}\, dS(y)$, saadaan funktion $\phi(r)$ derivaataksi yhdistetyn funktion derivointisäännöllä ja vastaavilla välivaiheilla kuin edellä

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \fint_{\partial B(0,1)} D_y u(rz+x) z\ dS(z) \\
&= \frac{1}{|\partial B(0,1)|} |\partial B(x,r)| \fint_{\partial B(x,r)} D_y u(y) \cdot \frac{y-x}{r} r^{1-n}\ dS(y) \\
&= \frac{|\partial B(x,r)|}{|\partial B(0,1)|} r^{1-n} \fint_{\partial B(x,r)} D_y u(y) \cdot \frac{y-x}{r}\ dS(y) \\
&= \fint_{\partial B(x,r)} D_y u(y) \cdot \frac{y-x}{r}\ dS(y).
\end{aligned}$$

Koska $\frac{y-x}{r}$ on ulkopuolinen yksikkönormaalivektori, jolle annetaan nimeksi ν, saadaan jatkettua ylläolevaa lauseen 1.1 ja määritelmän 2.1 nojalla

$$
\begin{aligned}
\phi'(r) &= \fint_{\partial B(x,r)} D_y u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS(y) \\
&= \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} D_y u(y) \cdot \nu \, dS(y) \\
&= \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \operatorname{div}(D_y u(y)) \, dy \\
&= \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \overbrace{\Delta u(y)}^{=0} \, dy = 0,
\end{aligned}
$$

koska funktio u on harmoninen oletuksen nojalla. Siispä on osoitettu, että $\phi'(r) = 0$. Tällöin tiedetään funktion $\phi(r)$ olevan vakiofunktio, jonka arvo saadaan ratkaistua raja-arvona

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 0} \fint_{\partial B(x,t)} u(y) \, dS(y) = u(x).$$

Täten on osoitettu haluttu yhtäsuuruus

$$u(x) = \phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y).$$

Todistetaan lisäksi väitteen jälkimmäinen yhtäsuuruus. Tässä osassa hyödynnetään napakoordinaatteja ja väitteen ensimmäistä yhtäsuuruutta, joka todistettiin aiemmin tässä todistuksessa. Lähdetään liikkeelle funktion u keskiarvointegraalista pallon sisällä. Määritelmän 3.1 ja napakoordinaattien avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
\fint_{B(x,r)} u(y) \, dy &= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) \, dy \\
&= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} u(y) \, dS \, ds \\
&= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_0^r |\partial B(x,s)| \frac{1}{|\partial B(x,s)|} \int_{\partial B(x,s)} u(y) \, dS \, ds \\
&= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_0^r |\partial B(x,s)| \fint_{\partial B(x,s)} u(y) \, dS \, ds.
\end{aligned}
$$

Tähän viimeiseen keskiarvointegraaliin voidaan käyttää tämän lauseen ensimmäistä yhtäsuuruutta, joka on todistettu tässä todistuksessa. Tällöin napakoordinaatteja hyödyntämällä saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
\fint_{B(x,r)} u(y)\ dy &= \frac{1}{|B(x,r)|}\int_0^r |\partial B(x,s)| \fint_{\partial B(x,s)} u(y)\ dS\, ds \\
&= \frac{1}{|B(x,r)|}\int_0^r |\partial B(x,s)| u(x)\ ds \\
&= \frac{1}{|B(x,r)|} u(x) \int_0^r |\partial B(x,s)|\ ds \\
&= \frac{1}{|B(x,r)|} u(x) |B(x,r)| = u(x).
\end{aligned}$$

Täten on osoitettu myös toinen haluttu yhtäsuuruus. □

Lause 3.5. *Jos $u \in C^2(\Omega)$ toteuttaa keskiarvoperiaatteen (3.1) jokaiselle pallolle $B(x,r) \subset \Omega$, niin u on harmoninen funktio.*

Todistus. Tehdään antiteesi: funktio u ei ole harmoninen. Tällöin määritelmän 2.1 nojalla u ei ole Laplacen yhtälön (2.1) ratkaisu, jolloin on olemassa $x_0 \in \Omega$ siten, että $\Delta u(x_0) > 0$ tai $\Delta u(x_0) < 0$. Oletuksen nojalla $u \in C^2(\Omega)$ eli erityisesti u on jatkuva, jolloin on olemassa avoin pallo $B(x_0, r)$ siten, että $\Delta u(x) > 0$ tai $\Delta u(x) < 0$ kaikille $x \in B(x_0, r)$. Näin ollen lauseen 3.4 todistuksen derivaattafunktiota $\phi'(r)$ hyödyntämällä saadaan

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\ dy > 0$$

tai

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\ dy < 0.$$

Näistä derivaatan positiivisuudesta ja negatiivisuudesta voidaan päätellä, että funktio $\phi(r)$, jolla merkittiin keskiarvoa, ei voi olla vakio. Tämä on ristiriidassa keskiarvoperiaatteen (3.1) kanssa, jolloin alkuperäinen väite on tosi eli funktion u täytyy olla harmoninen. □

3.2 Säännöllisyys

Säännöllisyydellä tarkoitetaan harmonisen funktion sileyttä. Toisin sanoen tässä kappaleessa tullaan osoittamaan, että kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva harmoninen funktio on välttämättä myös äärettömän monta kertaa jatkuvasti differentioituva eli sileä. Ennen tätä säännöllisyyslausetta ja sen todistusta tutustutaan *standardisilottajafunktioon*, *silotukseen* ja *konvoluutioon*. Lisäksi tuodaan esille näihin liittyviä aputuloksia, jotta voidaan muodostaa sileitä approksimaatioita annetuille funktioille. Tässä luvussa käytetään jo mainittujen lähteiden lisäksi Parviaisen luentomonistetta [11].

Tästä eteenpäin tarvitaan niiden pisteiden joukkoa, joiden etäisyys joukon reunasta on positiivinen. Merkitään

$$\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}, \tag{3.2}$$

jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja $\epsilon > 0$. Lisäksi seuraavassa määritelmässä esiintyy merkintä $\operatorname{spt}(\eta_\epsilon)$, millä tarkoitetaan funktion η_ϵ *kantajaa* jossain joukossa Ω eli joukkoa

$$\operatorname{spt}(\eta_\epsilon) := \{x \in \Omega : \eta_\epsilon(x) \neq 0\}.$$

Määritellään ensimmäisenä standardisilottajafunktio.

Määritelmä 3.6.

1. Olkoon $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ äärettömästi jatkuvasti differentioituva funktio siten, että

$$\eta(x) := \begin{cases} C \cdot e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{jos} \quad |x| < 1 \\ 0, & \text{jos} \quad |x| \geq 1 \end{cases},$$

missä $C > 0$ on vakio niin, että $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = 1$.

2. Kaikille $\epsilon > 0$ asetetaan

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Funktiota $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ kutsutaan *standardisilottajaksi.* Se toteuttaa ehdon $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)\, dx = 1$, kun $\operatorname{spt}(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$.

Tämän määritelmän kohdan (2) standardisilottajafunktiolla voidaan todeta olevan sama ominaisuus, kuin kohdan (1) funktiolla η. Näytetään seuraavassa esimerkissä, että myös standardisilottajafunktion integraali koko alueen yli on yksi. Tämän jälkeen määritellään konvoluution avulla silotus.

Esimerkki 3.7. Standardisilottajafunktion integraalin koko alueen yli voidaan näyttää olevan yksi n-ulotteisen muuttujanvaihdon $y = \frac{x}{\epsilon}$ avulla siten, että $dx = \epsilon^n\, dy$. Tässä siis $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)\ dx = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\ dx = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta(y)\epsilon^n\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(y)\ dy = 1.$$

Määritelmä 3.8. Olkoon funktio $u : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $u \in C(\Omega)$. Funktion u *silotus* joukossa Ω_ϵ on funktio $u_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}$, $u_\epsilon := \eta_\epsilon * u$. Tätä kutsutaan *konvoluutioksi*, joka on

$$u_\epsilon(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)u(y)\ dy$$

kaikille $x \in \Omega_\epsilon$.

Konvoluutio voidaan esittää yhtäpitävästi myös vastaavanlaisessa muodossa, jossa vain muuttujien paikkaa on vaihdettu. Näytetään seuraavassa esimerkissä, miten tämä konvoluution toinen esitystapa muodostuu.

Esimerkki 3.9. Olkoon $x \in \Omega_\epsilon$. Määritellään funktio $v(y) = x - y$. Tällöin $\frac{dv}{dy} = -1$ kaikille $y \in \mathbb{R}$. Lisäksi funktio $x-y$, missä y on muuttuja, on aidosti vähenevä ja bijektio. Näin ollen saadaan

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\frac{dv}{dy}} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Täten konvoluutio voidaan kirjoittaa muuttujanvaihdon $v(y) = x - y$ avulla muotoon

$$\begin{aligned}
u_\epsilon(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_\epsilon(x-y)u(y)\ dy \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} \eta_\epsilon(v(y))u(x-v(y))\frac{dy}{dv(y)}\ dv(y) \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} \eta_\epsilon(v(y))u(x-v(y))(-1)\ dv(y) \\
&= -\int_{\infty}^{-\infty} \eta_\epsilon(v(y))u(x-v(y))\ dv(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_\epsilon(v(y))u(x-v(y))\ dv(y).
\end{aligned}$$

Edelleen, kun merkitään $y = v(y)$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}$, saadaan konvoluutiolle haluttu muoto

$$u_\epsilon(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)u(y)\ dy = \int_\Omega \eta_\epsilon(y)u(x-y)\ dy.$$

Lasketaan seuraavaksi esimerkki, jossa silotetaan yksiulotteinen porrasfunktio. Esimerkin tarkoituksena on näyttää, miten silottajafunktion ja konvoluution avulla silotus muodostuu. Huomioitavaa on, että tässä esimerkissä silotettava porrasfunktio ei ole jatkuva. Tutustutaan tämän jälkeen silotuksen muutamiin perusominaisuuksiin.

Esimerkki 3.10. Olkoon yksiulotteinen porrasfunktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x > 0 \\ 0, & \text{kun } x \leq 0 \end{cases}.$$

Valitaan silottajafunktioksi

$$\eta(x) = C \cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} C, & \text{kun } x \in [-1,1] \\ 0, & \text{kun } x \notin [-1,1] \end{cases}.$$

Määritelmän 3.6 nojalla $\int_{\mathbb{R}} \eta(x)dx = 1$, joten

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \eta(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} C \cdot \chi_{[-1,1]}(x)\ dx = \int_{-1}^{1} C \cdot 1\ dx = C \cdot (1-(-1)) = 2C.$$

Tästä saadaan, että $C = \frac{1}{2}$, jolloin silottajafunktio on

$$\eta(x) = C \cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } x \in [-1,1] \\ 0, & \text{kun } x \notin [-1,1] \end{cases}.$$

Määritelmän 3.6 nojalla standardisilottajafunktio on näin ollen

$$\begin{aligned}
\eta_\epsilon(x) &= \frac{1}{\epsilon^1}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & \text{kun } \frac{x}{\epsilon} \in [-1,1] \\ 0, & \text{kun } \frac{x}{\epsilon} \notin [-1,1] \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & \text{kun } x \in [-\epsilon,\epsilon] \\ 0, & \text{kun } x \notin [-\epsilon,\epsilon] \end{cases}.
\end{aligned}$$

Täten määritelmän 3.8 ja edellä olevan esimerkin nojalla funktion f silotus konvoluution avulla on

$$f_\epsilon(x) = (\eta_\epsilon * f)(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)f(y)\ dy = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y)f(x-y)\ dy.$$

Lasketaan yleistä silotusta varten muutama esimerkkipiste muuttujan x eri arvoilla, jotta nähdään, miten silotus muodostuu.
Kun $x = \epsilon$, silotuksen arvo on

$$f_\epsilon(\epsilon) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y)f(\epsilon - y)\ dy = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 1\ dy = \frac{1}{2\epsilon}(\epsilon - (-\epsilon)) = \frac{2\epsilon}{2\epsilon} = 1.$$

Kun $x = 0$, silotuksen arvo on

$$\begin{aligned}
f_\epsilon(0) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y)f(0-y)\ dy \\
&= \int_{-\epsilon}^{0} \eta_\epsilon(y)f(-y)\ dy\ + \int_{0}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y)f(-y)\ dy \\
&= \int_{-\epsilon}^{0} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 1\ dy\ + \int_{0}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 0\ dy \\
&= \frac{1}{2\epsilon}(0-(-\epsilon)) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Kun $x = -\frac{\epsilon}{2}$, silotuksen arvo on

$$\begin{aligned}
f_\epsilon\left(-\frac{\epsilon}{2}\right) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y) f\left(-\frac{\epsilon}{2} - y\right)\, dy \\
&= \int_{-\epsilon}^{-\frac{\epsilon}{2}} \eta_\epsilon(y) f\left(-\frac{\epsilon}{2} - y\right)\, dy \; + \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y) f\left(-\tfrac{\epsilon}{2} - y\right)\, dy \\
&= \int_{-\epsilon}^{-\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 1\, dy \; + \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 0\, dy \\
&= \frac{1}{2\epsilon}\left(-\frac{\epsilon}{2} - (-\epsilon)\right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Näin ollen saadaan muodostettua yleinen lauseke silotukselle kolmessa eri tapauksessa. Ensimmäisessä tapauksessa $x \in \,]-\infty, -\epsilon\,]$, jolloin

$$f_\epsilon(x) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y) f(x - y)\, dy = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 0\, dy = 0.$$

Toisessa tapauksessa $x \in \,]-\epsilon, \epsilon\,[$, jolloin

$$\begin{aligned}
f_\epsilon(x) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y) f(x - y)\, dy \\
&= \int_{-\epsilon}^{x} \eta_\epsilon(y) f(x - y)\, dy \; + \int_{x}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y) f(x - y)\, dy \\
&= \int_{-\epsilon}^{x} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 1\, dy \; + \int_{x}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 0\, dy \\
&= \frac{1}{2\epsilon}(x - (-\epsilon)) = \frac{x + \epsilon}{2\epsilon}.
\end{aligned}$$

Kolmannessa ja viimeisessä tapauksessa $x \in [\,\epsilon, \infty[$, jolloin

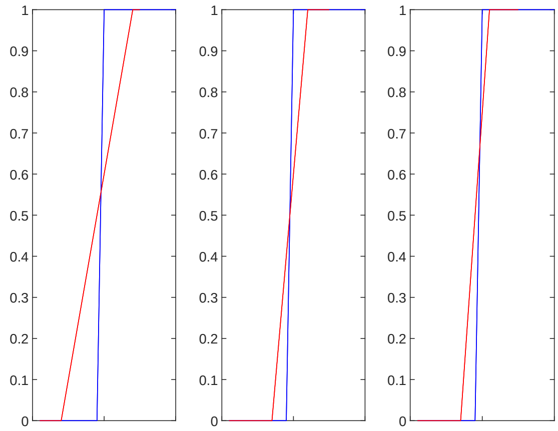
$$f_\epsilon(x) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y) f(x - y)\, dy = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 1\, dy = \frac{1}{2\epsilon}(\epsilon - (-\epsilon)) = 1.$$

Siispä silotus tämän esimerkin yksiulotteiselle porrasfunktiolle f on

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \,]-\infty, -\epsilon\,] \\ \frac{x+\epsilon}{2\epsilon}, & \text{kun } x \in \,]-\epsilon, \epsilon\,[\\ 1, & \text{kun } x \in [\,\epsilon, \infty[\end{cases},$$

jota on havainnollistettu kuvassa 3.1 kolmella eri parametrin ϵ arvolla.

Edellä olevassa esimerkissä näytettiin, miten silotus muodostuu yksinkertaisessa tapauksessa, jossa silotettava funktio ei ollut jatkuva. Tarkastellaan



Kuva 3.1: Sinisellä piirretty yksiulotteinen porrasfunktio ja sen punaisella piirretty silotusfunktio kolmella eri parametrin ϵ arvolla.

nyt jatkuvan funktion silotuksen mielenkiintoisia ominaisuuksia ja todistetaan ne. Yksi hyödyllinen ominaisuus näistä tässä tutkielmassa on ensimmäinen, joka kertoo jatkuvan funktion silotuksen olevan äärettömän monta kertaa jatkuvasti differentioituva. Tätä tulosta päästään käyttämään myöhemmin, kun todistetaan harmonisen funktion olevan säännöllinen. Näiden seuraavaksi esiteltävien ominaisuuksien todistamiseen tarvitaan merkintää $\Omega' \Subset \Omega$, joka tarkoittaa, että $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ ja $\overline{\Omega}'$ on kompakti eli suljettu ja rajoitettu.

Lause 3.11. *Olkoon funktio $u \in C(\Omega)$. Tällöin sen silotuksella on seuraavat ominaisuudet*

1. $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$.
2. $u_\epsilon \to u$ *joukossa* Ω, *kun* $\epsilon \to 0$.
3. $u_\epsilon \to u$ *tasaisesti joukon* Ω *kompaktissa osajoukossa.*

Todistus. 1. Olkoot $x \in \Omega_\epsilon$ ja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Olkoon $h > 0$ siten, että $x + he_i \in \Omega_\epsilon$. Ideana tässä on osoittaa, että

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_\epsilon(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\epsilon(x-y)u(y)\, dy.$$

Tämän osoittamiseksi hyödynnetään luvussa 1 esiteltyä dominoidun konvergenssin lausetta (lause 1.5), jossa on oleellisesti kaksi ehtoa. Osoitetaan ensin, että kun $h \to 0$, niin

$$\frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right) \to \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right). \tag{3.3}$$

Asetetaan $\psi(x) = \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)$. Tällöin erotusosamäärän raja-arvolle pätee

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\psi(x+he_i)-\psi(x)}{h}\\
&=\frac{\partial}{\partial x_i}\psi(x)\\
&=\frac{\partial}{\partial x_i}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right),
\end{aligned}$$

josta yhdistetyn funktion derivointisäännöllä saadaan

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)=\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right).$$

Osoitetaan seuraavaksi, että tällä samalla erotusosamäärän lausekkeella (3.3) on integroituva yläraja joukossa $\Omega' \Subset \Omega$. Lisäksi huomioitavaa on se, että $B(x+he_i,\epsilon)\cup B(x,\epsilon)\subset\Omega'$. Tarkastellaan erotusta $\psi(x+he_i)-\psi(x)$ ja sen itseisarvoa. Koska

$$\psi(x+he_i)-\psi(x)=\int_0^h\frac{\partial}{\partial t}\psi(x+te_i)\,dt=\int_0^h D\psi(x+te_i)\cdot e_i\,dt,$$

niin vastaavalle itseisarvolle saadaan arvioksi

$$|\psi(x+he_i)-\psi(x)|=\left|\int_0^h D\psi(x+te_i)\,e_i\,dt\right|\le h\cdot\max_{\Omega}|D\psi(x+te_i)|.$$

Tällöin, kun edelleen $\psi(x)=\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)$, saadaan erotusosamäärän (3.3) itseisarvon arvioksi

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right)u(y)\right|\\
&\overset{(h>0)}{=}\frac{1}{h}|(\psi(x+he_i)-\psi(x))u(y)|\\
&\le\frac{1}{h}h\cdot\max_{\Omega}|D\psi(x+te_i)|\cdot|u(y)|\\
&=\max_{\Omega}|D\psi(x+te_i)|\cdot|u(y)|\in L^1(\Omega'),
\end{aligned}$$

koska

$$\int_{\Omega'}\max_{\Omega}|D\psi(x+te_i)|\cdot|u(y)|\,dy<\infty.$$

Näin ollen on todistettu lauseen 1.5 kaksi ehtoa, jolloin kyseistä lausetta voidaan hyödyntää tämän todistuksen seuraavassa vaiheessa.

Aloitetaan nyt varsinainen todistus lähtemällä liikkeelle silotuksen osittaisderivaatasta muuttujan x_i suhteen. Hyödynnetään erotusosamäärän raja-arvoa sekä määritelmiä 3.6 ja 3.8, jolloin

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} u_\epsilon(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{u_\epsilon(x + he_i - y) - u_\epsilon(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\Omega'} \eta_\epsilon(x + he_i - y) u(y)\ dy - \int_{\Omega'} \eta_\epsilon(x - y) u(y)\ dy \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\epsilon^n} \int_{\Omega'} \eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) u(y)\ dy \right) \\
&\quad - \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\epsilon^n} \int_{\Omega'} \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) u(y)\ dy \right) \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\Omega'} \left(\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right) u(y)\ dy.
\end{aligned}$$

Tästä muodosta saadaan lauseen 1.5 nojalla viedä raja-arvo integraalin sisään, jolloin voidaan hyödyntää edellä todistettua raja-arvoa ja saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon^n} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\Omega'} \left(\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right) u(y)\ dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\Omega'} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right) u(y)\ dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\Omega'} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) u(y)\ dy.
\end{aligned}$$

Määritelmän 3.6 ja yhdistetyn funktion derivointisäännön nojalla pätee

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\epsilon(x - y) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\epsilon^n} \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) = \frac{1}{\epsilon^n} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right).$$

Hyödyntämällä tätä käänteisesti ja määritelmää 3.8 päästään haluttuun tulokseen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon^n} \int_{\Omega'} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) u(y)\ dy \\
&= \int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\epsilon(x - y) u(y)\ dy \\
&= \left(\frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i} \right) * u.
\end{aligned}$$

Vastaavalla menetelmällä voidaan osoittaa, että jokaiselle korkeamman kertaluvun derivaatalle pätee $D^\alpha u_\epsilon = (D^\alpha \eta_\epsilon) * u$. Koska konvoluutio on jatkuva, on täten osoitettu, että jokainen silotuksen u_ϵ derivaatta on vastaavan konvoluution derivaatta. Toisin sanoen jokainen silotus on äärettömästi jatkuvasti differentioituva ja siten $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$.

2. Olkoon $x \in \Omega' \Subset \Omega$ siten, että konvoluutio on hyvin määritelty tarpeeksi pienelle $\epsilon > 0$. Määritelmän 3.6 nojalla $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon \, dy = 1$, jolloin

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y) \, dy \cdot u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y) u(x) \, dy.$$

Hyödynnetään tätä ja määritelmää 3.8, kun tutkitaan funktion u ja sen silotuksen etäisyyttä

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) u(y) \, dy - u(x) \right| \\ &= \left| \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) u(y) \, dy - \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) u(x) \, dy \right| \\ &= \left| \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)(u(y) - u(x)) \, dy \right|. \end{aligned}$$

Tätä voidaan arvioida lauseen 1.3 kolmioepäyhtälön nojalla, kun lisäksi käytetään määritelmää 3.6

$$\begin{aligned} &\left| \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)(u(y) - u(x)) \, dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) |u(y) - u(x)| \, dy. \end{aligned}$$

Tiedetään, että $\int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \, dy$ on vakio, joten merkitään

$$C := |B(x,\epsilon)| \int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \, dy.$$

Tällöin edelleen voidaan arvioida, jolloin lauseen 1.4 nojalla saadaan raja-arvoksi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) |u(y) - u(x)| \, dy \\ &\leq C \fint_{B(x,\epsilon)} |u(y) - u(x)| \, dy \\ &\to 0, \quad \text{kun} \quad \epsilon \to 0. \end{aligned}$$

Täten on osoitettu, että silotusfunktio $u_\epsilon(x)$ suppenee JMA4-kurssin [12, s. 66] nojalla funktioon $u(x)$ kaikilla $x \in \Omega$, kun $\epsilon \to 0$.

3. Oletetaan, että funktio $u \in C(\Omega)$ ja olkoon $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$. Koska $\overline{\Omega}''$ on kompakti ja suljettu, niin funktio u on tasaisesti jatkuva joukossa $\overline{\Omega}''$ lauseen 1.2 nojalla.

   Olkoon $\epsilon > 0$ siten, että $B(x, \epsilon) \subset \Omega''$, kun $x \in \Omega'$. JMA2-kurssin [9, s. 93] tasaisen jatkuvuuden nojalla kaikille $\delta > 0$ on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että kaikille $x, y \in \overline{\Omega}''$

   $$|u(x) - u(y)| < \delta \quad \text{aina, kun} \quad |x - y| < \epsilon.$$

   Tällöin tutkimalla funktion u ja sen silotuksen erotusta vastaavasti kuin tämän lauseen kohdan (2) todistuksessa saadaan

   $$\begin{aligned} |u_\epsilon(x) - u(x)| &\leq K \fint_{B(x,\epsilon)} |u(y) - u(x)| \, dy \\ &\leq K \fint_{B(x,\epsilon)} \delta \, dy \\ &\leq K\delta \qquad \text{riippumatta luvusta } x \in \Omega'. \end{aligned}$$

   Täten, kun $\delta \to 0$, niin $|u_\epsilon(x) - u(x)| \to 0$ eli on osoitettu, että silotusfunktio u_ϵ suppenee tasaisesti JMA4-kurssin [12, s. 70] nojalla funktioon u kompaktissa joukossa $\Omega'' \subset \Omega$.

□

Hyödynnetään lopuksi tässä luvussa määriteltyjä käsitteitä ja todistettuja tuloksia, kun esitellään harmonisen funktion säännöllisyyslause. Usein puhutaan harmonisen funktion sileydestä eli funktion ominaisuudesta olla äärettömän monta kertaa jatkuvasti differentioituva, koska käsitteenä sileys on kuvainnollisempi. Tällä kuitenkin tarkoitetaan samaa kuin säännöllisyyslauseella, joka todistetaan alla.

Lause 3.12 (Säännöllisyys)**.** *Jos funktio $u \in C(\Omega)$ toteuttaa keskiarvoperiaatteen (3.1) jokaiselle pallolle $B(x, r) \subset \Omega$, niin*

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

Erityisesti harmoniset funktiot ovat siis sileitä.

Huomautus 3.13. Funktio u ei välttämättä ole sileä tai edes jatkuva reunalle $\partial\Omega$ asti.

Todistus lauseelle 3.12. Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoot $u_\epsilon = \eta_\epsilon * u$ silotus ja Ω_ϵ reunakaistale, kuten määriteltiin kaavassa (3.2). Kun $u \in C(\Omega)$, niin lauseen 3.11 nojalla myös $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$. Täten riittää osoittaa, että $u = u_\epsilon$, kun funktio u noudattaa keskiarvoperiaatetta (3.1).

Olkoon $x \in \Omega_\epsilon$. Tällöin silotukselle saadaan määritelmien 3.8 ja 3.6 nojalla

$$u_\epsilon(x) = (\eta_\epsilon * u)(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)u(y)\ dy = \int_{B(x,\epsilon)} \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) u(y)\ dy.$$

Tästä saadaan napakoordinaatteja ja määritelmää 3.1 käyttämällä edelleen

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &= \int_{B(x,\epsilon)} \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) u(y)\ dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)} u(y)\ dS(y)\right) dr \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) |\partial B(x,r)| \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ dS(y)\, dr. \end{aligned}$$

Koska funktio u noudattaa keskiarvoperiaatetta, saadaan lausetta 3.4, napakoordinaatteja ja määritelmää 3.6 käyttämällä

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) |\partial B(x,r)| \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ dS(y)\, dr \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} u(x)\int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) |\partial B(x,r)|\ dr \\ &= \frac{u(x)}{\epsilon^n}\int_{B(0,\epsilon)} \eta\left(\frac{y}{\epsilon}\right)\cdot 1\ dy \\ &= u(x)\int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)\ dy. \end{aligned}$$

Palautetaan mieleen, että esimerkissä 3.7 näytettiin standardisilottajafunktion integraalin koko tarkastelualueen yli olevan yksi. Tätä käyttämällä saadaan osoitettua, että

$$u_\epsilon(x) = u(x)\int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)\ dy = u(x)$$

kaikilla $x \in \Omega_\epsilon$. Näin ollen myös $u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$. □

3.3 Analyyttisyys

Luvussa 3.2 todistettiin harmonisen funktion olevan säännöllinen eli äärettömästi jatkuvasti differentioituva noudattaessaan keskiarvoperiaatetta. Tässä luvussa parannetaan säännöllisyystulosta ja todistetaan kaikkien harmonisten funktioiden olevan *analyyttisiä*. Ennen varsinaista analyyttisyyslausetta todistetaan olennainen aputulos, jossa johdetaan keskiarvoperiaatteen avulla arviot harmonisen funktion osittaisderivaatoille.

Määritellään ensin mitalliselle funktiolle kaksi eri normia, joita käytetään tämän luvun todistuksissa.

Määritelmä 3.14. Olkoon u mitallinen funktio. Tällöin

1. $||u||_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u| \; dx$.
2. $||u||_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u| \; dx$.

Kohdassa (2) merkinnällä $\operatorname{ess\,sup}_\Omega$ tarkoitetaan oleellista ylärajaa melkein kaikkialla joukossa Ω. Poikkeuksena tavalliseen tunnettuun ylärajaan, tässä nollamittaisessa joukossa yläraja voi olla oleellista ylärajaa suurempi.

Palautetaan mieleen luvusta 1 funktion eri osittaisderivaattojen merkintä

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{kun} \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Tällöin harmonisen funktion osittaisderivaattojen arviolle voidaan todistaa seuraava tulos.

Lause 3.15. *Oletetaan, että u on harmoninen funktio. Tällöin*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} ||u||_{L^1(B(x_0,r))}$$

jokaiselle pallolle $B(x_0, r) \subset \Omega$ ja jokaiselle kertoimelle α siten, että $|\alpha| = k$. Tässä $C_0 = \frac{1}{\omega_n}$, $C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n}$, kun $k = 1, 2, \ldots$.

Todistus. Käytetään induktiotodistusta. Todistetaan ensin väite tapauksessa $k = 0$, koska tätä arviota tarvitaan varsinaisen perusaskeleen eli tapauksen $k = 1$ todistuksessa. Lauseen 3.4 nojalla tiedetään, että harmoninen funktio noudattaa keskiarvoperiaatetta, joten hyödynnetään tätä ominaisuutta tässä todistuksessa.

Kun $k = 0$, saadaan funktion u itseisarvo esitettyä määritelmän 3.1 ja huomautuksen 3.2 nojalla muodossa

$$|u(x_0)| = \left| \fint_{B(x_0,r)} u \; dy \right| = \left| \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} u \; dy \right| = \left| \frac{1}{|\omega_n \cdot r^n|} \int_{B(x_0,r)} u \; dy \right|.$$

Tätä voidaan arvioida lauseen 1.3 kolmioepäyhtälöä käyttämällä, jolloin määritelmän 3.14 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} |u(x_0)| &= \left| \frac{1}{|\omega_n \cdot r^n|} \int_{B(x_0,r)} u \; dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n \cdot r^n} \int_{B(x_0,r)} |u| \; dy \\ &= \frac{C_0}{r^n} ||u||_{L^1(B(x_0,r))}. \end{aligned}$$

Toisaalta, kun valitaan pallon säteeksi $\frac{r}{2}$, saadaan vastaava arvio muodossa

$$|u(x_0)| \leq \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{r}\right)^n ||u||_{L^1(B(x_0,\frac{r}{2}))}.$$

Kun $k = 1$, Laplacen yhtälön (2.1) ratkaisufunktiota u derivoitaessa huomioitavaa on, että u_{x_i} on harmoninen funktio jokaisella indeksillä $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tämä on helppo nähdä, sillä kun u on Laplacen yhtälön ratkaisufunktio, niin $\Delta u = 0$, jolloin myös luvun 1 merkinnöillä

$$(\operatorname{div}(Du))_{x_i} = (\Delta u)_{x_i} = 0.$$

Tästä muodosta osittaisderivaatta voidaan viedä sulkujen sisään, jolloin saadaan

$$\operatorname{div}(Du_{x_i}) = \Delta u_{x_i} = 0.$$

Niinpä voidaan arvioida derivaattafunktiota u_{x_i} keskiarvoperiaatetta (3.1) hyödyntämällä ja käyttämällä vastaavia laskusääntöjä kuin lauseen 3.4 todistuksessa. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
|u_{x_i}(x_0)| &= \left| ⨍_{B(x_0,\frac{r}{2})} u_{x_i}\, dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{|B(x_0,\frac{r}{2})|} \int_{B(x_0,\frac{r}{2})} u_{x_i}\, dx \right| \\
&= \left| \frac{|\partial B(x_0,\frac{r}{2})|}{|B(x_0,\frac{r}{2})|} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u\nu_i\, dS \right| \\
&= \left| \frac{|n \cdot \omega_n \cdot (\frac{r}{2})^{n-1}|}{|\omega_n \cdot (\frac{r}{2})^n|} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u\nu_i\, dS \right| \\
&= \left| \frac{|2n|}{|r|} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u\nu_i\, dS \right| \\
&\leq \frac{2n}{r} \operatorname*{ess\ sup}_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} |u| \\
&= \frac{2n}{r} ||u||_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))}.
\end{aligned}$$

Lisäksi, jos $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{2})$, niin $B(x, \frac{r}{2}) \subset B(x_0, r) \subset \Omega$ ja tällöin

$$|u(x)| \overset{(k=0)}{\leq} \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{r}\right)^n ||u||_{L^1(B(x,\frac{r}{2}))} \leq \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{r}\right)^n ||u||_{L^1(B(x_0,r))}.$$

Yhdistämällä nämä kaksi yllä olevaa epäyhtälöä ja huomaamalla, että $\partial B(x_0, \frac{r}{2}) \subset B(x_0, r)$, saadaan osittaisderivaatan arvioksi

$$
\begin{aligned}
|u_{x_i}(x_0)| &\leq \frac{2n}{r}\frac{1}{\omega_n}\frac{2^n}{r^n}||u||_{L^1(B(x_0,r))} \cdot ||u||_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} \\
&\leq \frac{2^{n+1}n}{\omega_n} \cdot \frac{1}{r^{n+1}}||u||_{L^1(B(x_0,r))}, \quad \text{jos } |\alpha| = k = 1 \\
&= \frac{C_1}{r^{n+1}}||u||_{L^1(B(x_0,r))}.
\end{aligned}
$$

Näin ollen lause on todistettu tapauksessa $k = 1$, mikä vastaa induktiotodistuksen perusaskelta.

Siirrytään seuraavaksi todistuksen induktioaskeleeseen. Muotoillaan ensimmäiseksi induktio-oletus. Oletetaan, että $k \geq 2$. Tällöin väite pätee kaikille palloille $B(x_0, r) \subset \Omega$ ja jokaiselle kertoimelle $|\beta| = k - 1$ asti. Lisäksi, jos $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{k})$, niin $B(x, \frac{k-1}{k}r) \subset B(x_0, r) \subset \Omega$. Siten induktio-oletus on

$$
\begin{aligned}
|D^\beta u(x_0)| &\leq \frac{C_{k-1}}{r^{n+k-1}}||u||_{L^1(B(x_0,r))} \\
&= \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\omega_n}\frac{1}{\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}}||u||_{L^1(B(x_0,r))} \\
&= \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\omega_n\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}}||u||_{L^1(B(x_0,r))}.
\end{aligned}
$$

Todistetaan seuraavaksi väite indeksille k. Olkoot $B(x_0, r) \subset \Omega$ ja kerroin α siten, että $|\alpha| = k$. Tällöin jollekin $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $|\beta| = k - 1$ pätee

$$D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}.$$

Vastaavasti kuin tilanteessa $k = 1$, jossa säde on $\frac{r}{2}$, saadaan tässä tilanteessa kun säde on $\frac{r}{k}$, derivaatan arvioksi

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{kn}{r}||D^\beta u||_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{k}))}.$$

Yhdistämällä nämä kaksi yllä olevaa epäyhtälöä ja huomaamalla, että

$\partial B(x_0, \frac{r}{k}) \subset B(x_0, r)$, saadaan osittaisderivaatan arvioksi

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x_0)| &\leq \frac{kn}{r} \cdot \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\omega_n \left(\frac{k-1}{k} r\right)^{n+k-1}} ||u||_{L^1(B(x_0,r))} \\
&= \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\frac{(k-1)^{n+k-1}}{k^{n+k-1}} \cdot r^{n+k-1} \cdot r} \cdot \frac{kn}{\omega_n} ||u||_{L^1(B(x_0,r))} \\
&= \frac{(2^{n+1}n)^{k-1} \cdot \frac{k^{n+k-1}}{(k-1)^n}}{r^{n+k}} \cdot \frac{kn}{\omega_n} ||u||_{L^1(B(x_0,r))} \\
&= \frac{(2^{n+1}nk)^{k-1} \cdot \left(\frac{k}{k-1}\right)^n}{r^{n+k}} \cdot \frac{kn}{\omega_n} ||u||_{L^1(B(x_0,r))} \\
&= \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n r^{n+k}} \cdot \underbrace{\frac{\left(\frac{k}{k-1}\right)^n}{2^{n+1}}}_{<1} ||u||_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n r^{n+k}} ||u||_{L^1(B(x_0,r))} \\
&= \frac{C_k}{r^{n+k}} ||u||_{L^1(B(x_0,r))}.
\end{aligned}$$

Näin ollen kun $|\alpha| = k$, väite on todistettu induktiotodistuksen avulla. □

Todistetaan seuraavaksi edellä esitettyjen aputulosten avulla harmonisen funktion analyyttisyys. Analyyttisyydellä tarkoitetaan sitä, että sileä harmoninen funktio pystytään esittämään suppenevana potenssisarjana jonkin pisteen ympäristössä.

Lause 3.16 (Analyyttisyys)**.** *Olkoon u harmoninen funktio. Tällöin u on analyyttinen funktio joukossa Ω.*

Todistus. Kiinnitetään mikä tahansa piste $x_0 \in \Omega$. Halutaan osoittaa, että harmoninen funktio u voidaan esittää suppenevana potenssisarjana tämän mielivaltaisen pisteen x_0 lähistöllä.

Olkoon $r := \frac{1}{4} d(x_0, \partial\Omega)$. Tällöin

$$M := \frac{1}{\omega_n r^n} ||u||_{L^1(B(x_0,2r))} < \infty.$$

Koska $B(x,r) \subset B(x_0, 2r) \subset \Omega$ jokaiselle $x \in B(x_0, r)$, määritelmän 3.14 ja lauseen 3.15 nojalla

$$\begin{aligned}
||D^\alpha u||_{L^\infty(B(x_0,r))} &= \operatorname{ess}\sup_{B(x_0,r)} |D^\alpha u| \\
&\leq \operatorname{ess}\sup_{B(x_0,r)} \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n r^{n+k}} ||u||_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\overset{(|\alpha|=\mathrm{k})}{=} \operatorname{ess}\sup_{B(x_0,r)} \frac{(2^{n+1}n|\alpha|)^{|\alpha|}}{r^{|\alpha|}} \underbrace{\frac{1}{\omega_n r^n}||u||_{L^1(B(x_0,r))}}_{\leq M} \\
&\leq M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} \cdot |\alpha|^{|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi hyödynnetään Stirlingin kaavaa [3, s. 127]

$$k! = k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}, \quad \text{kun} \quad k \to \infty.$$

Tämä voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$k^k = k!e^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}, \quad \text{kun} \quad k \to \infty,$$

josta merkitsemällä $k = |\alpha|$ saadaan jollekin vakiolle C edelleen

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq Ce^{|\alpha|}|\alpha|!,$$

missä multi-indeksin α kertoma on $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \dots \alpha_n!$. Termiä $|\alpha|!$ voidaan edelleen arvioida multinomilauseen avulla, joka kertoo, että

$$n^k = (1 + \dots + 1)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}.$$

Täten $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha!$. Yhdistämällä nämä yllä saadut epäyhtälöt saadaan arvioksi

$$\begin{aligned}
||D^\alpha u||_{L^\infty(B(x_0,r))} &\leq M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} \cdot |\alpha|^{|\alpha|} \\
&\leq M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} Ce^{|\alpha|}|\alpha|! \\
&\leq CM\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} e^{|\alpha|}n^{|\alpha|}\alpha! \\
&= CM\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^{|\alpha|} \alpha!.
\end{aligned}$$

Muodostetaan seuraavaksi pisteessä x_0 funktion u Taylorin sarja. Lauseen 3.12 nojalla tiedetään, että harmonisella funktiolla u on kaikkien kertalukujen derivaatat. Tällöin vastaavasti kuin JMA4-kurssin [12, s. 129] yksiulotteisessa tapauksessa saadaan funktion u Taylorin sarja pisteen x_0 lähistöllä

$$u(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Todistetaan vielä lopuksi, että tämän potenssisarjan suppenemissäde on $R \geq \frac{r}{2^{n+2}n^3 e}$. Lasketaan tätä varten jokaiselle N:lle derivaatalle jäännöstermi

$$\begin{aligned} R_N(x) &:= u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \\ &= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \end{aligned}$$

jollekin $t \in [0, 1]$, joka riippuu muuttujasta x. Yhdistetään edellä saadut epäyhtälöt

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq \sum_{|\alpha|=N} \frac{CM\left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^N \alpha! |x - x_0|^\alpha}{\alpha!} \\ &\leq CM \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2}n^3 e}\right)^N \\ &\leq CM \sum_{|\alpha|=N} \frac{1^N}{(2n)^N} \\ &\leq CMn^N \cdot \frac{1}{(2n)^N} \\ &\leq \frac{CM}{2^N}. \end{aligned}$$

Näin ollen, kun derivaattojen määrä kasvaa rajatta, saadaan jäännöstermin raja-arvoksi

$$\lim_{N \to \infty} |R_N(x)| \leq \lim_{N \to \infty} \frac{CM}{2^N} = 0.$$

Siispä funktio u voidaan esittää pisteen x_0 lähistöllä suppenevana potenssisarjana

$$u(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha,$$

jonka suppenemissäde on $R = \frac{r}{2^{n+2}n^3 e}$ eli erityisesti funktio u on analyyttinen. □

Annetaan seuraavaksi esimerkki säännöllisestä eli sileästä funktiosta, joka ei ole analyyttinen. Toisin sanoen funktio on äärettömästi jatkuvasti differentioituva jossain tietyssä pisteessä, mutta sitä ei voida esittää suppenevana potenssisarjana tässä samassa pisteessä.

Esimerkki 3.17. Olkoon funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva siten, että

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}.$$

Lasketaan ensin funktion g muutama ensimmäinen derivaatta yhdistetyn funktion ja tulon derivointisäännöllä, kun $x \neq 0$:

$$g'(x) = \frac{2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$g''(x) = \frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} \cdot \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{ja}$$

$$g^{(3)}(x) = \left(\frac{24}{x^5} - \frac{24}{x^7}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{24}{x^5} - \frac{36}{x^7} + \frac{8}{x^9}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Lasketaan seuraavaksi erotusosamäärän raja-arvoja $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ kun $x \to 0$, missä f on funktio g tai sen jokin derivaattafunktio:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}} = 0,$$

sillä kun $x \to 0$, niin $\frac{1}{x^2} \to \infty$ ja eksponenttifunktion tiedetään kasvavan hyvin paljon nopeammin äärettömyyteen kuin mitä polynomi lähestyy nollaa. Vastaavin perusteluin

$$g''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4e^{\frac{1}{x^2}}} = 0,$$

$$\begin{aligned} g^{(3)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{g''(x) - g''(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-6}{x^5e^{\frac{1}{x^2}}} + \frac{4}{x^7e^{\frac{1}{x^2}}}\right) = 0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} g^{(4)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{g^{(3)}(x) - g^{(3)}(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{24}{x^5} - \frac{36}{x^7} + \frac{8}{x^9}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{24}{x^6 e^{\frac{1}{x^2}}} - \frac{36}{x^8 e^{\frac{1}{x^2}}} + \frac{8}{x^{10} e^{\frac{1}{x^2}}} \right) = 0. \end{aligned}$$

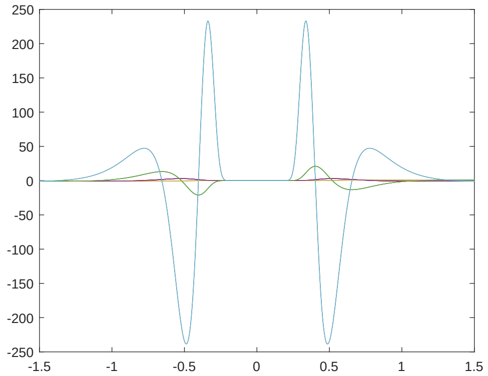
Näin voitaisiin jatkaa äärettömän monta kertaa. Koska kaikki nämä erotusosamäärän raja-arvot ovat nolla, kun tarkasteltiin tilannetta, jossa $x \to 0$, niin funktiolla g on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä $x_0 = 0$. Lisäksi jokaiselle derivaatalle pätee $D^k g(0) = 0$, kun $k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Näin ollen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k g(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{D^k g(0)}^{=0}}{k!} x^k = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Funktiota g ei siis voida esittää suppenevana potenssisarjana muodossa

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

millään välillä $]-r, r[$, missä $r > 0$, sillä jos näin voitaisiin, niin täytyisi olla $a_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ eli erityisesti $g(x) = 0$ koko välillä $]-r, r[$. Tämä ei kuitenkaan päde, sillä funktion g määrittelyn nojalla $g(x) = 0$ ainoastaan kun $x = 0$. Ei siis millään avoimella välillä. Kuvassa 3.2 on piirrettynä funktion g neljän ensimmäisen derivaatan kuvaajat. Niistä voidaan huomata, että jo neljännen derivaatan kuvaaja saavuttaa noin arvon 230, kun taas kolmas derivaatta saa korkeimmillaan noin arvon 50. Derivaattojen arvot kasvavat huimaa vauhtia jo alhaisilla kertaluvuilla, eivätkä siten ole rajoitettuja.



Kuva 3.2: Funktion g neljän ensimmäisen derivaatan kuvaajat siten, että $g'(x)$ on piirretty keltaisella, $g''(x)$ violetilla, $g^{(3)}(x)$ vihreällä ja $g^{(4)}(x)$ sinisellä.

4 Harmonisen funktion yhteys satunnaiskävelyyn

Tässä luvussa tarkastellaan satunnaiskävelyä pallossa. Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu tarkastelualue ja $x_0 \in \Omega$ valittu aloituspiste, seuraava piste valikoituu satunnaisesti x_0-keskisen ϵ-säteisen pallon $B(x_0, \epsilon)$ sisältä. Edelleen seuraavat pisteet valikoituvat satunnaisesti aina edelliseen pisteeseen piirretyn ϵ-säteisen pallon sisältä. Satunnaiskävely loppuu ensimmäiseen sellaiseen pisteeseen x_τ, joka on tarkastelualueen Ω ulkopuolella. Tästä prosessista määräytyy satunnaiskävelyn odotusarvo

$$\mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)],$$

kun reuna-arvofunktio F tunnetaan. Luvussa 4.2 tullaan näyttämään, että tälle pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn odotusarvolle löydetään mielenkiintoinen yhteys aiemmin tässä tutkielmassa esiintyneeseen harmoniseen funktioon, joka toteuttaa keskiarvoperiaatteen (3.1). Tämän luvun lähteinä on käytetty Lewickan kirjaa [8] ja Evansin kirjaa [3].

4.1 Stokastiikkaa ja todennäköisyysteoriaa

Satunnaiskävelyn tiedetään liittyvän oleellisesti matematiikan osa-alueeseen nimeltä stokastiikka ja sitä kautta todennäköisyysteoriaan, jossa hyödynnetään mittateorian tuttuja ominaisuuksia ja tuloksia todennäköisyysmitoille. Näihin tutustutaan Jyväskylän yliopiston Mitta- ja integraaliteoria 1 -kurssilla [7].

Palautetaan lukijalle mieleen, että Lebesguen mittateoriassa tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja Lebesguen mitan avulla. Puolestaan todennäköisyysteoriassa, jossa sopivia mitallisia osajoukkoja kutsutaan tapahtumiksi, on käytössä *todennäköisyysmitta* $\mathbb{P}$. Tällaisen tapahtumaa vastaavan osajoukon mittaa sanotaan tapahtuman todennäköisyydeksi. Tässä luvussa joukolla Ω tarkoitetaan aiemmasta poiketen epätyhjää alkeistapahtumien joukkoa. Kun lisäksi $\mathcal{F}$ on σ-algebra joukossa Ω ja $\mathbb{P}$ on edellä mainittu todennäköisyysmitta, niin kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kutsutaan *todennäköisyysavaruudeksi*. Todennäköisyysteorian käsitettä σ-algebra hyödynnetään tässä tutkielmassa lähinnä esiteltävien tuloksien oletuksena. Täsmällinen määritelmä löytyy Evansin kirjasta [3, s. 9].

Aikaisemmin käytettiin käsitettä *melkein kaikkialla*. Tässä luvussa esitellään tarvittavia aputuloksia stokastiikasta ja todennäköisyysteoriasta, jossa tarvitaan idealtaan vastaavaa käsitettä *melkein varmasti*. Sanotaan, että tapahtuma tapahtuu melkein varmasti, jos se tapahtuu todennäköisyydellä 1. Toisin sanoen mahdollisten poikkeustapahtumien joukko voi olla epätyhjä, mutta sen todennäköisyys on 0 eli se on nollamittainen, kun käytössä on todennäköisyysmitta.

Jyväskylän yliopiston Stokastiikan perusteet -kurssilla on käsitelty enimmäkseen diskreettejä satunnaismuuttujia. Määritellään heti alkuun tämän tutkielman kannalta oleelliset satunnaismuuttujan peruskäsitteet.

Määritelmä 4.1 (Satunnaismuuttuja)**.** Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. $\mathcal{F}$-mitallinen kuvaus $X \colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ on *satunnaismuuttuja*, jolle $\{X \leq r\} \in \mathcal{F}$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 4.2 (Odotusarvo)**.** Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Kaikkien $\mathbb{P}$-integroituvien satunnaismuuttujien $X \in \Omega$ lineaariavaruus on $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Määritellään satunnaismuuttujan $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *odotusarvo*

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X \, d\mathbb{P}.$$

Määritelmä 4.3 (Ehdollinen odotusarvo)**.** Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Olkoon lisäksi $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra. Satunnaismuuttujan X *ehdollinen odotusarvo* suhteessa ehtoon $\mathcal{G}$ on satunnaismuuttuja $Y = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$ siten, että $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja

$$\int_A \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}] \, d\mathbb{P} = \int_A Y \, d\mathbb{P} = \int_A X \, d\mathbb{P}$$

kaikille $A \in \mathcal{G}$.

Huomautus 4.4. Tästä ehdollisen odotusarvon määritelmästä saadaan suoraan määritelmän 4.2 avulla

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X],$$

jos X on satunnaismuuttuja siten, että sen odotusarvo $\mathbb{E}[X]$ on olemassa ja $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$ on satunnaismuuttuja samassa todennäköisyysavaruudessa kuin X.

Todistetaan seuraavaksi yksi hyödyllinen ehdollisen odotusarvon ominaisuus, jota tarvitaan myöhemmin martingaalien ominaisuuksien todistamisessa. Ehdolliselle odotusarvolle on myös muita mielenkiintoisia ominaisuuksia, mutta niitä ei hyödynnetä tässä tutkielmassa, joten ne sivuutetaan.

Lemma 4.5. *Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Olkoot $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-algebroja. Jos $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, niin*

$$\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_2] \,|\, \mathcal{F}_1] \quad \textit{melkein varmasti.}$$

Todistus. Olkoon $A \in \mathcal{F}_1$. Määritelmän 4.3 nojalla

$$\int_A \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_1] \; d\mathbb{P} = \int_A X \; d\mathbb{P}.$$

Tästä seuraa, että ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_1]$, joka on siis satunnaismuuttuja, on integroituva, koska oletuksen nojalla satunnaismuuttuja X on integroituva. Lisäksi, koska $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, saadaan edelleen määritelmän 4.3 nojalla

$$\int_A \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_2] \; d\mathbb{P} = \int_A X \; d\mathbb{P}.$$

Yhdistämällä nämä yhtäsuuruudet saadaan

$$\int_A \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_1] \; d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_2] \; d\mathbb{P}.$$

Koska $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_1]$ on integroituva, niin saatu yhtäsuuruus toteuttaa määritelmän 4.3. Täten

$$\int_A \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_2] \,|\, \mathcal{F}_1] \; d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_1] \; d\mathbb{P},$$

josta seuraa ehdollisen odotusarvon yksikäsitteisyyden ja määritelmän 4.2 nojalla, että

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_2] \,|\, \mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_1] \quad \text{melkein varmasti.} \qquad \square$$

Tutustutaan seuraavaksi uuteen käsitteeseen *filtraatioon*, jonka merkitys on tuttu hieman erilaisilla merkinnöillä. Filtraation määritteleminen yksinkertaistaa tässä luvussa esiteltävien stokastisten ominaisuuksien todistamista. Tässä tutkielmassa satunnaiskävelyn paikka x_k ja siitä otettu funktio $u(x_k)$ on tärkein esimerkki määritelmän 4.2 satunnaismuuttujasta. Erityisesti käytetään merkintää

$$\mathbb{E}[u(x_k)].$$

Ehdollisessa odotusarvossa ehtona puolestaan on pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn aikaisemmat tiedossa olevat paikat $x_0, \dots, x_{k-1}$, jotka nekin ovat satunnaismuuttujia. Tälle ehdolliselle odotusarvolle käytetään merkintää

$$\mathbb{E}[u(x_k)|(x_0, \dots, x_{k-1})]. \tag{4.1}$$

Vastaavasti tälle voidaan käyttää lyhyempää kirjoitusmuotoa

$$\mathbb{E}[u(x_k)|\mathcal{F}_{k-1}],$$

missä $\mathcal{F}_{k-1}$ on seuraavaksi määriteltävä filtraatio, joka sisältää tiedon tapahtuneista tapahtumista tarkasteluhetkellä eli tässä $\mathcal{F}_{k-1}$ on $x_0, \dots, x_{k-1}$ generoima filtraatio.

Määritelmä 4.6 (Filtraatio)**.** Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. *Filtraatio* $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$ on kasvava jono σ-algebroja

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}.$$

Filtraation avulla määritellään seuraavaksi uusi käsite *martingaali*, joka on hyödyllinen tarkasteltaessa reilua peliä. Nimittäin martingaalin keskeinen sisältö on tulevan odotusarvo, joka pysyy muuttumattomana, kun edelliset tapahtumat tunnetaan.

Määritelmä 4.7 (Martingaali)**.** Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. *Martingaali* suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$ on jono integroituvia satunnaismuuttujia $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ siten, että jokainen satunnaismuuttuja
$X_j : \Omega \to (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ on $\mathcal{F}_j$-mitallinen ja

$$X_j = \mathbb{E}[X_{j+1}|\mathcal{F}_j] \quad \text{melkein varmasti kaikille } j \geq 0.$$

Vastaavasti kyseessä on *alimartingaali*, jos

$$X_j \leq \mathbb{E}[X_{j+1}|\mathcal{F}_j] \quad \text{melkein varmasti kaikille } j \geq 0$$

ja *ylimartingaali*, jos

$$X_j \geq \mathbb{E}[X_{j+1}|\mathcal{F}_j] \quad \text{melkein varmasti kaikille } j \geq 0.$$

Todistetaan seuraavaksi martingaaleihin liittyvä lause, jossa on kaksi tärkeää tulosta myöhempiä todistuksia ajatellen. Martingaalien määritelmässä tarkastellaan kahta peräkkäistä satunnaismuuttujaa. Seuraavassa lauseessa näytetään, että vastaava tulos pätee mille tahansa kahdelle satunnaismuuttujalle. Lisäksi näytetään satunnaismuuttujan odotusarvon olevan vakio martingaalia pitkin. Tämä todistus perustuu Geissin luentomonisteeseen [4, s. 67].

Lause 4.8. *Olkoot* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *todennäköisyysavaruus ja* $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ *martingaali suhteessa filtraatioon* $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$*. Tällöin*

1. $X_j = \mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j]$ *melkein varmasti kaikille* $0 \le j < k$.
2. $\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}[X_0]$ *kaikille* $j \ge 0$.

Vastaavasti, jos $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ *on alimartingaali, tällöin ehdoissa 1 ja 2 yhtäsuuruuden tilalla on* $\le$ *-merkki. Jos taas* $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ *on ylimartingaali, tällöin ehdoissa 1 ja 2 yhtäsuuruuden tilalla on* $\ge$ *-merkki.*

Todistus.

1. Koska $0 \le j < k$, niin $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{k-1}$. Tällöin lemman 4.5 ja määritelmän 4.7 nojalla saadaan

$$\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]|\mathcal{F}_j] = \mathbb{E}[X_{k-1}|\mathcal{F}_j]$$

melkein varmasti kaikille $0 \le j < k$. Toistamalla vastaavaa prosessia niin kauan, kun $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{k-n}$, missä $n \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{k-1}|\mathcal{F}_j] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-2}]|\mathcal{F}_j] \\
&= \mathbb{E}[X_{k-2}|\mathcal{F}_j] \\
&\vdots \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{j+2}|\mathcal{F}_{j+1}]|\mathcal{F}_j] \\
&= \mathbb{E}[X_{j+1}|\mathcal{F}_j] \\
&= X_j \quad \text{melkein varmasti kaikille } 0 \le j < k.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j] = X_j$ melkein varmasti kaikille $0 \le j < k$.

2. Ensimmäisen kohdan nojalla tiedetään, että $X_0 = \mathbb{E}[X_j|\mathcal{F}_0]$ melkein varmasti kaikille $j \ge 0$. Lisäksi $\Omega \subset \mathcal{F}_0$ perusjoukkona, jolloin määritelmää 4.2 käyttäen saadaan

$$\mathbb{E}[X_j] = \int_\Omega X_j \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{E}[X_j|\mathcal{F}_0] \, d\mathbb{P} = \int_\Omega X_0 \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X_0]. \qquad \square$$

Yllä filtraatio määriteltiin kasvavaksi jonoksi σ-algebroja, jolloin tunnettua informaatiota saadaan lisää, kun aika, jossa tapahtumia tapahtuu, etenee. Koska martingaali määriteltiin jonoksi satunnaismuuttujia suhteessa filtraatioon, on mielenkiintoista pohtia, mitä tapahtuu, jos jonon pysäyttää satunnaisesti. Tätä varten määritellään *pysäytysaika* ja todistetaan aputulos, joka kertoo kahden pysäytysajan minimin olevan myös pysäytysaika.

Määritelmä 4.9 (Pysäytysaika)**.** Satunnaismuuttujaa $\tau \colon \Omega \to \{0, \ldots, \infty\}$ sanotaan *pysäytysajaksi* suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. $\{\tau \leq j\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq j\} \in \mathcal{F}_j$ kaikilla $j \geq 0$.
2. $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$.

Toinen ehto kertoo, että satunnaismuuttuja τ on ääretön ainoastaan nollamittaisessa joukossa. Siten pysäytysaika on äärellinen melkein varmasti.

Lemma 4.10. *Olkoot τ_1 ja τ_2 pysäytysaikoja suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. Tällöin ne määräävät pysäytysajan*

$$\tau_1 \wedge \tau_2 := \min\{\tau_1, \tau_2\}.$$

Todistus. Oletuksen nojalla τ_1 ja τ_2 ovat pysäytysaikoja, joten määritelmän nojalla $\{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ ja $\{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla $t \geq 0$. Tällöin

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} = \{\min\{\tau_1, \tau_2\} \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cup \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \qquad \square$$

Edeltävää lemmaa hyödynnetään seuraavan aputuloksen todistamiseen. Siinä näytetään jonon $\{X_{\tau\wedge j}\}_{j=0}^{\infty}$ olevan martingaali tietyin oletuksin. Tätä tulosta tarvitaan myöhemmin tärkeän martingaaliteorian ominaisuuden todistamiseen.

Lemma 4.11. *Olkoot $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ martingaali ja τ pysäytysaika suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. Tällöin $\{X_{\tau\wedge j}\}_{j=0}^{\infty}$ on martingaali suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. Vastaava tulos pätee myös ali- ja ylimartingaaleille.*

Todistus. Todistetaan tämä lemma alimartingaalin tapauksessa eli halutaan osoittaa, että $X_{\tau\wedge j} \leq \mathbb{E}[X_{\tau\wedge(j+1)}|\mathcal{F}_j]$. Jokainen satunnaismuuttuja $X_{\tau\wedge j}$ on $\mathcal{F}_{\tau\wedge j}$-mitallinen ja siten myös $\mathcal{F}_j$-mitallinen. Lisäksi $X_{\tau\wedge j}$ on $\mathbb{P}$-integroituva melkein varmasti. Olkoon $A \in \mathcal{F}_j$, jolloin määritelmän 4.3 nojalla

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{E}[X_{\tau\wedge(j+1)}|\mathcal{F}_j]\, d\mathbb{P} &= \int_A X_{\tau\wedge(j+1)}\, d\mathbb{P} \\
&= \int_{A\cap\{\tau\leq j\}} X_{\tau\wedge(j+1)}\, d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{\tau>j\}} X_{\tau\wedge(j+1)}\, d\mathbb{P} \\
&= \int_{A\cap\{\tau\leq j\}} X_{\tau\wedge j}\, d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{\tau>j\}} X_{j+1}\, d\mathbb{P},
\end{aligned}$$

koska $\tau \leq j$, niin $\min\{\tau, j+1\} = \min\{\tau, j\}$ ja toisaalta, koska $\tau > j$, niin $\min\{\tau, j+1\} = j+1$. Lisäksi oletettiin, että $A \in \mathcal{F}_j$, jolloin $A \cap \{\tau > j\} \in \mathcal{F}_j$. Tästä seuraa, että yläpuolella saatu oikeanpuoleinen integraali on alhaalta rajoitettu ja siten saadaan jatkettua arvioimalla

$$\begin{aligned}
&\int_{A\cap\{\tau\le j\}} X_{\tau\wedge j}\ d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{\tau> j\}} X_{j+1}\ d\mathbb{P} \\
\ge &\int_{A\cap\{\tau\le j\}} X_{\tau\wedge j}\ d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{\tau> j\}} X_{j}\ d\mathbb{P} \\
= &\int_{A\cap\{\tau\le j\}} X_{\tau\wedge j}\ d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{\tau> j\}} X_{\tau\wedge j}\ d\mathbb{P} \\
= &\int_{A} X_{\tau\wedge j}\ d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Näin ollen määritelmän 4.7 nojalla $\{X_{\tau\wedge j}\}_{j=0}^{\infty}$ on alimartingaali suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. □

Palautetaan mieleen luvusta 1 dominoidun konvergenssin lause. Muotoillaan lause uudestaan, kun käytössä on todennäköisyysmitta ja funktioiden tilalla ovat satunnaismuuttujat. Lauseen pääsisältö pysyy oleellisesti muuttumattomana.

Lause 4.12 (Dominoidun konvergenssin lause). *Olkoon $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ jono satunnaismuuttujia todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siten, että jono suppenee pisteittäin melkein varmasti satunnaismuuttujaan X. Oletetaan, että on olemassa integroituva satunnaismuuttuja $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siten, että $|X_j| \le Z$ melkein varmasti kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin $X, X_j \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega X_j\ d\mathbb{P} = \int_\Omega X\ d\mathbb{P}.$$

Tässä kohtaa lukua on esitelty riittävät aputulokset ja taustatiedot, jotta voidaan todistaa yksi tärkeistä martingaaliteorian ominaisuuksista, nimittäin *optionaalisen pysäyttämisen lause*. Sen mukaan martingaalin odotusarvo pysäytyshetkellä on yhtä suuri kuin martingaalin odotusarvo aloitushetkellä. Toisin sanoen mahdollisuus pysäyttää sopivaan aikaan ei anna hyötyä niin kauan kun tulevaisuutta ei voi ennustaa.

Lause 4.13 (Optionaalisen pysäyttämisen lause). *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Olkoot $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ martingaali ja τ pysäytysaika suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^{\infty}$. Oletetaan, että joko*

1. *pysäytysaika τ on rajoitettu, tai*
2. *on olemassa integroituva satunnaismuuttuja $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siten, että $|X_j| \le Z$ melkein varmasti kaikille $j \ge 0$.*

Tällöin $X_\tau \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ja*

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0].$$

Vastaavasti, jos $\{X_j\}_{j=0}^\infty$ *on alimartingaali, niin* $\mathbb{E}[X_\tau] \geq \mathbb{E}[X_0]$*. Jos taas* $\{X_j\}_{j=0}^\infty$ *on ylimartingaali, niin* $\mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_0]$*.*

Todistus. Oletetaan, että $\{X_j\}_{j=0}^\infty$ on martingaali ja τ pysäytysaika suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^\infty$. Tällöin lemman 4.11 nojalla myös $\{X_{\tau\wedge j}\}_{j=0}^\infty$ on martingaali suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^\infty$. Siten lauseen 4.8 kohdan (2) nojalla

$$\mathbb{E}[X_{\tau\wedge j}] = \mathbb{E}[X_0].$$

Pysäytysajan määritelmän nojalla pysäytysaika τ on äärellinen melkein varmasti, jolloin satunnaismuuttuja X_τ on hyvin määritelty melkein varmasti. Näin ollen $\lim_{j\to\infty}(\tau \wedge j) = \tau$ melkein varmasti ja siten

$$\lim_{j\to\infty} X_{\tau\wedge j} = X_\tau \quad \text{melkein varmasti.}$$

Jos oletus (1) on voimassa, niin pysäytysaika τ on rajoitettu. Tällöin on olemassa jokin $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\tau \wedge n = \tau$, kun $n \geq N$. Näin ollen $X_{\tau\wedge n} = X_\tau$, kun $n \geq N$. Koska $\{X_{\tau\wedge j}\}_{j=0}^\infty$ on martingaali suhteessa filtraatioon $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^\infty$, niin martingaalin määritelmän nojalla $X_{\tau\wedge j}$ on integroituva. Siispä, kun $n \geq N$, myös X_τ on integroituva ja näin ollen

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0].$$

Jos taas oletus (2) on voimassa, niin on olemassa integroituva satunnaismuuttuja $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siten, että $|X_j| \leq Z$ melkein varmasti kaikille $j \geq 0$. Koska pysäytysaika τ on määritelmän mukaan äärellinen melkein varmasti, niin myös kaikille $j \geq 0$ melkein varmasti

$$|X_{\tau\wedge j}| \leq Z.$$

Tällöin lauseen 4.12 nojalla X_τ on integroituva ja

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[X_{\tau\wedge j}] = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega X_{\tau\wedge j}\, d\mathbb{P} = \int_\Omega X_\tau\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X_\tau].$$

Siispä

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[X_{\tau\wedge j}] = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_0]. \qquad \square$$

4.2 Dynaamisen ohjelmoinnin periaate

Tässä tutkielmassa tarkastellaan harmonisia funktioita eli tarkemmin sanottuna 2-harmonisia funktioita. Yleisempi p-harmonisten funktioiden teoria, missä $p > 2$, sivuutetaan. Tämän vuoksi käsitellään vain häirityn köydenvetopelin erikoistapausta, *satunnaiskävelyä pallossa*. Tämän luvun lähteenä on käytetty Parviaisen artikkelia [13].

Tässä luvussa tarkastellaan *dynaamisen ohjelmoinnin periaatetta*, joka voidaan satunnaiskävelyn tapauksessa kirjoittaa muotoon

$$u_\epsilon(x) = \fint_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon(y)\; dy. \tag{4.2}$$

Tavoitteena on todistaa, että tällä yhtälöllä on olemassa ratkaisu. Toisin sanoen halutaan löytää funktio, joka toteuttaa harmonisen funktion keskiarvoperiaatteen.

Määritellään ensin *ϵ-säteinen reunakaistale* tarkastelualueelle, koska dynaamisen ohjelmoinnin periaatteessa (4.2) tarkastellaan ϵ-säteisiä palloja. Näin saadaan yhtälö hyvin määritellyksi myös tarkastelualueen reunalla.

Määritelmä 4.14. Olkoot $\epsilon > 0$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu tarkastelualue. Tällöin alueen Ω *ϵ-säteinen reunakaistale* on

$$\Gamma_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : d(x, \Omega) \leq \epsilon\}.$$

Seuraavaksi todistetaan, että dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen yhtälöllä (4.2) on olemassa ratkaisu. Erityisesti sellainen ratkaisu, joka noudattaa annettua reuna-arvofunktiota. Myöhemmin osoitetaan, että tämä löydetty ratkaisu on satunnaiskävelyn odotusarvo. Ennen näitä on oleellista määritellä eräs operaattori, jolle monotoninen iteraatio antaa kiintopisteen.

Määritelmä 4.15. Olkoon $F\colon \Gamma_\epsilon \to \mathbb{R}$ reuna-arvofunktio. Olkoon $\mathcal{F}_\epsilon$ joukko ei-negatiivisia jatkuvia ja rajoitettuja funktioita siten, että ne ovat määritelty $(\Omega \cup \Gamma_\epsilon) \to \mathbb{R}$. Määritellään $T\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$,

$$Tv(x) := \begin{cases} \fint_{B(x,\epsilon)} v(y)\; dy, & \text{kun} \quad x \in \Omega \\ F(x), & \text{kun} \quad x \in \Gamma_\epsilon \end{cases}.$$

Lause 4.16. *Olkoon annettuna jatkuva ja rajoitettu reuna-arvofunktio $F\colon \Gamma_\epsilon \to \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa jatkuva ja rajoitettu funktio u siten, että se toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen* (4.2) *reuna-arvoilla F.*

Todistus. Todistetaan ensin, että funktion u pisteittäinen raja-arvo löytyy. Olkoon $u_{j+1} = Tu_j$, kun $j = 0, 1, \ldots$, missä

$$u_0(x) = \begin{cases} \inf_{y \in \Gamma_\epsilon} F, & \text{kun } x \in \Omega \\ F(x), & \text{kun } x \in \Gamma_\epsilon \end{cases}.$$

Hyödynnetään induktiotodistusta osoittamaan, että jono u_j on kasvava.

Kun $x \in \Gamma_\epsilon$, niin edellä olevan T-operaattorin määritelmän nojalla

$$u_1(x) = Tu_0(x) = F(x) = u_0(x).$$

Toisaalta, kun $x \in \Omega$, saadaan vastaavasti T-operaattorin avulla

$$u_1(x) = Tu_0(x) = \fint_{B(x,\epsilon)} u_0(y)\, dy \geq \fint_{B(x,\epsilon)} \inf_{y \in \Gamma_\epsilon} F(y)\, dy = \inf_{y \in \Gamma_\epsilon} F(y) = u_0(x).$$

Näin ollen $u_1(x) \geq u_0(x)$ kaikilla $x \in (\Omega \cup \Gamma_\epsilon)$, joka vastaa induktiotodistuksen perusaskelta.

Siirrytään seuraavaksi induktioaskeleeseen ja muotoillaan ensin induktio-oletus. Oletetaan, että $u_j \geq u_{j-1}$ jollain $j = 2, 3, \ldots$. Todistetaan sitten väite indeksille $j+1$:

$$u_{j+1}(x) = Tu_j(x) = \fint_{B(x,\epsilon)} u_j(y)\, dy \geq \fint_{B(x,\epsilon)} u_{j-1}(y)\, dy = Tu_{j-1}(x) = u_j(x).$$

Täten $u_{j+1} \geq u_j$ kaikilla $j = 0, 1, \ldots$. Näin ollen induktiotodistuksen avulla on osoitettu, että jono u_j on kasvava.

Oletuksen nojalla reuna-arvofunktio F on rajoitettu, joten $\sup_{y \in \Gamma_\epsilon} F(y) < \infty$ rajoittaa jonoa u_j ylhäältä. Näin ollen voidaan määritellä rajoitettu jatkuva funktio u monotoniseksi pisteittäiseksi raja-arvoksi

$$u(x) := \lim_{j \to \infty} u_j(x) \quad \text{kaikilla } x \in (\Omega \cup \Gamma_\epsilon).$$

Koska edellä todettiin jonon u_j olevan ylhäältä rajoitettu ja $\lim_{j \to \infty} u_j(x) = u(x)$, lauseen 4.12 eli dominoidun konvergenssin nojalla pätee

$$u(x) = \lim_{j \to \infty} u_j(x) = \lim_{j \to \infty} \fint_{B(x,\epsilon)} u_{j-1}(y)\, dy = \fint_{B(x,\epsilon)} u(y)\, dy.$$

Täten raja-arvofunktio u toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen (4.2) ja funktiolla u on konstruktiosta johtuen oikeat reuna-arvot. $\square$

Nyt on löydetty dynaamisen ohjelmoinnin periaatteelle ratkaisufunktio u. Tämä ratkaisufunktio on harmoninen joukossa Ω_ϵ eli funktio u noudattaa harmonisen funktion keskiarvoperiaatetta samassa joukossa. Osoitetaan lopuksi, että tämä löydetty ratkaisufunktio u on pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn odotusarvo.

Lause 4.17. *Olkoon funktio u harmoninen joukossa Ω_ϵ. Olkoon u_ϵ dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen (4.2) toteuttava funktio funktion $F = u$ antamilla reuna-arvoilla. Tällöin mille tahansa $x_0 \in \Omega$ pätee*

$$u(x_0) = u_\epsilon(x_0) = \mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)],$$

missä x_τ on ensimmäinen piste tarkastelujoukon Ω ulkopuolella ja τ on pysäytysaika.

Todistus. Tarkastellaan satunnaiskävelyä pallossa, missä seuraava piste valitaan satunnaisesti joukon $B(x,\epsilon) \subset \Omega$ tasaisen todennäköisyysjakauman mukaan. Kun edelliset pisteet tiedetään, seuraava piste x_k satunnaiskävelyssä pallossa valitaan pallosta $B(x_{k-1},\epsilon)$. Oletuksen nojalla funktio u_ϵ toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen (4.2). Näin ollen pisteessä x_k saatavan arvon ehdolliseksi odotusarvoksi saadaan

$$\mathbb{E}^{x_0}[u_\epsilon(x_k)|x_0,\ldots,x_{k-1}] = \fint_{B(x_{k-1},\epsilon)} u_\epsilon(y)\, dy = u_\epsilon(x_{k-1}). \tag{4.3}$$

Tämä on määritelmä 4.7 kaavan (4.1) mukaisin merkinnöin, joten voidaan merkitä, että $M_j := u_\epsilon(x_j)$ on martingaali satunnaiskävelyssä. Koska vakion odotusarvo on vakio itse ja piste, jolloin satunnaiskävely päättyy, on tarkastelualueen ulkopuolella eli $x_\tau \in \Gamma_\epsilon$, niin lauseen 4.13 nojalla saadaan

$$u_\epsilon(x_0) = \mathbb{E}^{x_0}[u_\epsilon(x_0)] = \mathbb{E}^{x_0}[M_0] = \mathbb{E}^{x_0}[M_\tau] = \mathbb{E}^{x_0}[u_\epsilon(x_\tau)] = \mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)].$$

Sama todistus menee läpi myös funktiolle u, kun kaavassa (4.3) käytetään harmonisen funktion keskiarvoperiaatetta (3.1). Siten funktiot u ja u_ϵ ovat samat eli dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen ratkaisufunktio on yhtäpitävää pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn odotusarvon kanssa. □

Käsitellään lopuksi vielä edellisen lauseen erikoistapaukset, joissa funktio u on harmonisen funktion keskiarvoperiaatteen ali- tai superratkaisu. Jos $\Delta u \geq 0$ eli u on harmonisen funktion keskiarvoperiaatteen aliratkaisu, niin $M_j := u(x_j)$ on alimartingaali satunnaiskävelyssä, koska

$$\mathbb{E}^{x_0}[u(x_k)|x_0,\ldots,x_{k-1}] = \fint_{B(x_{k-1},\epsilon)} u(y)\, dy \geq u(x_{k-1}).$$

Tällöin lauseen 4.13 nojalla vastaavin perusteluin kuin edellä lauseen 4.17 todistuksessa martingaalin tapauksessa saadaan

$$u(x_0) = \mathbb{E}^{x_0}[M_0] \leq \mathbb{E}^{x_0}[M_\tau] = \mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)].$$

Vastaava tulos pätee myös funktiolle u_ϵ, kun se on dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen aliratkaisu. Siispä osoitettiin pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn odotusarvon olevan suurempi kuin dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen aliratkaisu.

Jos $\Delta u \leq 0$ eli u on harmonisen funktion keskiarvoperiaatteen superratkaisu, niin $M_j := u(x_j)$ on ylimartingaali satunnaiskävelyssä, koska

$$\mathbb{E}^{x_0}[u(x_k)|x_0, \dots, x_{k-1}] = \fint_{B(x_{k-1}, \epsilon)} u(y)\ dy \leq u(x_{k-1}).$$

Tällöin lauseen 4.13 nojalla puolestaan saadaan

$$u(x_0) = \mathbb{E}^{x_0}[M_0] \geq \mathbb{E}^{x_0}[M_\tau] = \mathbb{E}^{x_0}[F(x_\tau)].$$

Tässäkin tapauksessa tulos päteen myös funktiolle u_ϵ, kun se on dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen superratkaisu. Siispä osoitettiin pallossa tapahtuvan satunnaiskävelyn odotusarvon olevan pienempi kuin dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen superratkaisu.

Viitteet

[1] Hans Wilhelm Alt. Linear functional analysis. *An Application-oriented Introduction*, 2016.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 1998.

[3] Lawrence C. Evans. *An introduction to stochastic differential equations*, volume 82. American Mathematical Society, 2012.

[4] Stefan Geiss. Stochastic processes in discrete time. http://users.jyu.fi/~geiss/lectures/processes-discrete-time.pdf, 2020. Haettu: 4.5.2023.

[5] Qing Han ja Fanghua Lin. *Elliptic partial differential equations*, volume 1. American Mathematical Society, 2011.

[6] Päivi Lammi ja Juha Lehrbäck. Johdatus matemaattiseen analyysiin 3. https://tim.jyu.fi/files/209916/JMA3_2019.pdf, 2019. Haettu: 1.6.2023.

[7] Juha Lehrbäck. Mitta- ja integraaliteoria 1. https://tim.jyu.fi/files/338185/Mitta_Lehrback.pdf, 2018. Haettu: 12.4.2023.

[8] Marta Lewicka. *A course on Tug-of-War games with random noise*. Springer, 2020.

[9] Jani Onninen ja Tuomo Äkkinen. Johdatus matemaattiseen analyysiin 2. https://koppa.jyu.fi/kurssit/jy-CUR-4865/luentomateriaali/koko-moniste, 2019. Haettu: 27.3.2023.

[10] Mikko Parviainen. Partial differential equations. https://koppa.jyu.fi/kurssit/jy-CUR-7555/materiaalikansio/lecturenote/view, 2019. Haettu: 10.1.2023.

[11] Mikko Parviainen. Partial differential equations 2. https://koppa.jyu.fi/en/courses/231683/lecture-note, 2019. Haettu: 6.3.2023.

[12] Mikko Parviainen. Johdatus matemaattiseen analyysiin 4. https://koppa.jyu.fi/kurssit/jy-CUR-5601/luento-materiaali/jma4-2018.pdf, 2020. Haettu: 6.3.2023.

[13] Mikko Parviainen. Notes on tug-of-war games and the p-Laplace equation. *SpringerBriefs on PDEs and Data Science*, 2022.