

Gravitaatiota Paloittain

Jukka Mäkinen

Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu
Jyväskylän Yliopisto

Huomattavaa

Yleistä

Lukijalla oletetaan olevan perustiedot tensorialgebrasta sekä jonkinlainen ymmärrys fysikaalisesta maailmankuvasta.

Yhtälöt ja kaavat

Kaavoissa käytetään ns. *luonnollisia yksiköitä* ellei toisin mainita. Näissä yksiköissä valon nopeus c sekä Diracin vakio \hbar on asetettu (dimensiottomaksi) ykköseksi. Tutkielman lopussa olevassa liitteessä käydään pikaisesti läpi eri yksikköjärjestelmien tarpeellisuus sekä niiden välisiä muunnoksia.

Valitettavasti tulostusteknisistä syistä osa kaavoista sisältää puutteita. Esimerkkinä tällaisesta puutteesta olkoon ∂ -merkki, missä oikeanpuoleinen kaari voi olla vajaa. Toivon kuitenkin tekstin olevan luettavaa.

Indeksit ja merkinnät

Indekseissä kreikkalaiset aakkoset $\alpha\beta\chi\delta\epsilon\phi\gamma\dots$ tarkoittavat avaruusajan komponentteja 0, 1, 2, 3; ja latinalaiset $abcde\dots$ tilaulottuvuuksien komponentteja 1, 2, 3 — ellei toisin mainita.

Vektoreita merkitään kaavoissa nuolella ja tekstissä **paksulla**. Mikäli nelivektoreita erotellaan komponenteiksi, erotellaan ne usein kahteen komponenttiin, missä ensimmäinen on nolla-komponentti ja toinen kolmikomponenttinen vektori.

Liitteet

Tutkielman lopussa olevissa liitteissä käydään pikaisesti läpi pääasioita yksikköjärjestelmistä ja variaatioperiaatteesta. Lisäksi viimeiseen liitteeseen on sijoitettu ne tekstin tuloksiin johtaneet laskut, joita ei ole laskettu tekstissä tai merkitty lähteisiin.

Lähteet

Jokaisen luvun lopussa on lista kyseisessä luvussa pääasiallisesti käytetyistä lähteistä. Täydellinen lähdeluettelo on tutkielman lopussa.

Kiitän ohjaajaani Markku Lehtoa lähes kaikkea hiponeista keskusteluista.

Edelleen kiitän itseäni tutkielman kirjoittamisesta.

Onnea vastasyntyneelle.



Sisällysluettelo

HUOMATTAVAA	3
SISÄLLYSLUETTELO.....	5
YHTEENVETO.....	9
A. JOHDANTO	A-1
B. LINEAARINEN APPROKSIMAATIO	
I: LINEAARISET KENTTÄYHTÄLÖT	B-1
B.1 LINEAARISUUS	B-1
B.2 KENTÄT JA KENTTÄYHTÄLÖT	B-2
B.3 LINEAARISET KENTTÄYHTÄLÖT SÄHKÖMAGNEETTISELLE VUOROVAIKUTUKSELLE JA GRAVITAATIOLLE	B-2
B.3.1 Lähde sähkömagneettiselle kentälle.....	B-3
B.3.2 Lähde gravitaatiokentälle	B-4
B.3.1.1 Energia-liikemäärä-jännitystensori	B-4
B.3.2.2 Energia-liikemäärä-jännitystensori 'pölypilvelle'	B-4
B.3.2.3 Suljetun systeemin energia-liikemäärä-jännitystensori säilyy	B-7
B.3.3 Lähteen ja kentän yhteys sähkömagneettiselle vuorovaikutukselle	B-8
B.3.4 Lähteen ja kentän yhteys gravitaatiolle.....	B-9
B.3.5 Kenttäyhtälön vakioiden määrittäminen sähkömagneettiselle vuorovaikutukselle	B-9
B.3.6 Kenttäyhtälön vakioiden määrittäminen gravitaatiolle.....	B-12
B.4 LÄHTEET	B-17
C. LINEAARINEN APPROKSIMAATIO	
II: EPÄLINEAARISUUDEN ESIINMARSSI.....	C-1
C.1 ENERGIA-LIIKEMÄÄRÄ-JÄNNITYSTENSORI GRAVITAATIOKENTÄLLE	C-1
C.2 LIIKEYHTÄLÖ	C-2
C.3 AVARUUSAIKA KAAREUTUU.....	C-6
C.3.1 Metrinen tensori $g_{\mu\nu}(x)$	C-7
C.3.2 Sisäinen kaarevuus.....	C-8
C.3.3 Ulkoinen kaarevuus.....	C-9
C.4 JOHTOPÄÄTÖKSET	C-9
C.5 LÄHTEET	C-10
D. REGGEN LASKENTA.....	D-1
D.1 REGGEN AVARUUSAJAN RAKENNUSOSASET	D-1

D.1.1	<i>Sileän kaarevan pinnan approksimoiminen euklidisilla palasilla — simplekseillä</i>	D-1
D.1.2	<i>Simpleksin reuna</i>	D-2
D.1.3	<i>Sarana</i>	D-2
D.1.4	<i>Linkki</i>	D-3
D.1.5	<i>Vajavuuskulma</i>	D-3
D.1.6	<i>Perusosasten rakenne</i>	D-3
D.2	KAAREVUUS	D-4
D.3	REGGEN KEHIKON RAKENNE	D-5
D.3.1	<i>Yhdestä kahteen ulottuvuuteen</i>	D-6
D.3.2	<i>Kahdesta kolmeen ulottuvuuteen</i>	D-7
D.3.2.1	<i>Laatikkomalli</i>	D-7
D.3.2.2	<i>Pallomalli</i>	D-8
D.3.3	<i>Kolmesta neljään ulottuvuuteen</i>	D-9
D.4	REUNAN PITUUKSISTA GEOMETRIAAN	D-9
D.4.1	<i>Metriikka ja reunanpituudet</i>	D-9
D.4.2	<i>Reunanpituuksien luonne</i>	D-11
D.5	REGGEN AVARUUSAJAN RAKENNUSOSASTEN YHTEENVETO	D-13
D.6	VARIAATIOPERIAATE REGGEN LASKENNASSA	D-13
D.6.1	<i>Reggen vaikutus</i>	D-13
D.6.2	<i>Vaikutuksen variointi</i>	D-13
D.7	REGGEN LASKENNAN KVANTISOINNISTA	D-14
D.8	JOHTOPÄÄTÖKSET	D-14
D.9	LÄHTEET	D-16
E.	MITTA	E-1
E.1	SÄILYMISLAIT	E-2
E.2	SYMMETRIAT	E-2
E.2.1	<i>Symmetrian käsite ja invarianssi</i>	E-2
E.2.2	<i>Lokaali ja globaali symmetria</i>	E-3
E.2.3	<i>Jatkuva ja epäjatkua symmetria</i>	E-4
E.3	MITTAMUUNNOS	E-4
E.3.1	<i>Mittamuunnos sähkömagneettisessa vuorovaikutuksessa</i>	E-4
E.3.2	<i>Mittamuunnos gravitaatiovuorovaikutuksessa</i>	E-6
E.4	MITTAEHDOT	E-6
E.5	MITTAKENTÄT	E-7
E.5.1	<i>Noetherin teoreema</i>	E-8
E.5.1.1	<i>Kvanttimekaanikan operaattoreista sekä niiden kommutatiivisuudesta</i>	E-8
E.5.1.2	<i>Säilymlain yhteys symmetrioihin (Noetherin teoreema)</i>	E-9
E.5.1.3	<i>Gravitaation tapaus</i>	E-10
E.5.2	<i>Lokaali symmetria</i>	E-12
E.5.2.1	<i>Sähkömagneettinen tapaus</i>	E-12
E.5.2.2	<i>Gravitaation tapaus</i>	E-14
E.6	MITTAPERIAATE	E-16
E.7	JOHTOPÄÄTÖKSET	E-18
E.8	LÄHTEET	E-20
F.	KVANTTIGRAVITAATIO	F-1
F.1	YKSIULOTTEINEN MAAILMANKAIKKEUS	F-2
F.1.1	<i>Jatkumotapaus</i>	F-2
F.1.2	<i>Yksiulotteinen hila-maailmankaikkeus</i>	F-4
F.2	YKSIULOTTEISEN MAAILMANKAIKKEUDEN KVANTISOINTI FEYNMANIN POLKUIINTEGRAALIMENETELMÄLLÄ	F-5
F.2.1	<i>Polkuintegraalit</i>	F-6
F.2.2	<i>Feynmanin propagaattori hilasysteemille</i>	F-6
F.2.3	<i>Kvantisoidaan hila-avaruus</i>	F-7
F.2.3.1	<i>Systeemi lämpökylvyssä</i>	F-8
F.2.3.2	<i>Yksiulotteisen hila-maailmankaikkeuden analogia systeemiin lämpökylvyssä</i>	F-8

F.2.3.3	Lämpökylvyssä olevan systeemin keskimääräinen energia	F-8
F.2.3.4	Hila-maailmankaikkeuden keskipituus	F-9
F.2.3.5	Flukтуаatiot lämpökylvyssä olevan systeemin energiassa	F-9
F.2.3.6	Kvanttiflukтуаatiot maailmankaikkeuden kokonaispituudessa	F-9
F.3	YHTENEVÄISYYKSIÄ JA ANALOGIOITA	F-10
F.4	JOHTOPÄÄTÖKSET	F-10
F.5	LÄHTEET	F-11

G. JOHTOPÄÄTÖKSET G-1

LIITE a. YKSIKÖISTÄ a-1

LIITE a.1	YKSIKÖT LUONNONTIETEISSÄ	a-1
LIITE a.2	LUONNOLLISET YKSIKÖT	a-1
LIITE a.3	LUONNOLLISISTA YKSIKÖISTÄ SI-YKSIKÖIHIN	a-2
LIITE a.4	LÄHTEET	a-4

LIITE b. VARIAATIOPERIAATE b-1

LIITE b.1	VARIAATIOPERIAATE KLASISSESSA MEKANIKASSA	b-1
<i>Liite b.1.1</i>	<i>Vaikutus</i>	<i>b-1</i>
<i>Liite b.1.2</i>	<i>Eulerin-Lagrangen yhtälöt ja Hamiltonin funktio</i>	<i>b-2</i>
<i>Liite b.1.3</i>	<i>Vapaa hiukkanen</i>	<i>b-3</i>
LIITE b.2	LAGRANGEN YHTÄLÖT KENTILLE	b-4
<i>Liite b.2.1</i>	<i>Skalaarikenttä</i>	<i>b-4</i>
LIITE b.3	LÄHTEET	b-7

LIITE c. LASKUT c-1

LIITE c.1	ENERGIA-LIIKEMÄÄRÄ-JÄNNITYSTENSORI $T^{\mu\nu}$	c-1
<i>Liite c.1.1</i>	<i>Gravitaatiokenttään liittyvä energia-liikemäärä-jännitystensori $t^{\mu\nu}$</i>	<i>c-1</i>
Liite c.1.1.1	Energia-liikemäärä-jännitystensori skalaarikentälle	c-1
Liite c.1.1.2	Esimerkki skalaarikentästä	c-3
<i>Liite c.1.2</i>	<i>Vektori- ja tensorikentät</i>	<i>c-4</i>
Liite c.1.2.1	Sähkömagneettisen kentän kenttäyhtälöt variaatiomenetelmällä	<i>c-5</i>
Liite c.1.2.2	Gravitaatiokentän kenttäyhtälöt variaatiomenetelmällä	<i>c-5</i>
Liite c.1.2.3	Kanoninen energia-liikemäärä-jännitystensori sähkökentälle	<i>c-6</i>
Liite c.1.2.4	Kanoninen energia-liikemäärä-jännitystensori gravitaatiokentälle	<i>c-8</i>
LIITE c.2	YKSIULOTTEISEN MAAILMANKAIKKEUDEN KVANTISOINTI FEYNMANIN POLKUIINTEGRAALIMENETELMÄLLÄ	c-9
<i>Liite c.2.1</i>	<i>$\langle L(\ell) \rangle$ ilman λ:aa</i>	<i>c-10</i>
<i>Liite c.2.2</i>	<i>$\langle L(\ell) \rangle$ λ:n kanssa</i>	<i>c-11</i>
<i>Liite c.2.3</i>	<i>Flukтуаatiot</i>	<i>c-13</i>

LÄHTEET 117

Yhteenveto

Tutkielmassa käsitellään kahta eri approksimaatiota yleiselle suhteellisuusteorialle: *lineaarista approksimaatiota* sekä *Reggen laskentaa*. Gravitaation lineaarista approksimaatiota käsittelevässä luvussa tarkastellaan gravitaatiovuorovaikutusta johtamalla teorian kenttäyhtälöt rinnan sähkömagneettisen vuorovaikutuksen kanssa. Samat kenttäyhtälöt johdetaan tutkielman lopussa olevassa liitteessä variaatioperiaatteen kautta. Luvun toisessa osassa huomioidaan gravitaatiovuorovaikutuksen epälineaarinen luonne ja edetään gravitaation geometriseen tulkintaan, missä massa kaareuttaa muutoin laakeata avaruusaikaa. Tällöin metriikan havaitaan massan vaikutuksesta poikkeavan laakean avaruusajan Minkowskin metriikasta $\eta_{\mu\nu}$ seuraavasti

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x)$$

kaava 1

Reggen laskentaa käsittelevässä luvussa käydään läpi simpleksisen avaruuden peruskäsitteet sekä tarkastellaan paloittain laakean avaruuden merkitystä yleiselle suhteellisuusteorialle. Luvun tarkoituksena on esitellä teoria ylimalkaisesti teorian perusajatusten käyttämiseksi diskreettiä hila-avaruutta käsittelevässä kvanttigravitaatioluvussa.

Mittaa käsittelevässä luvussa käydään läpi luonnon symmetrioita sekä niiden yhteyttä säilyviin suureisiin ja mittateorioihin. Invarianssi mittamuunnoksissa käsitellään sekä sähkömagnetismille että gravitaatiovuorovaikutukselle. Luvussa pyritään yhdistämään vuorovaikutuksen lähteenä olevat säilyvät suureet Noetherin teoreeman kautta symmetrioihin ja edelleen lokaalin symmetrian kautta mittakenttiin. Kuvattu prosessi suoritetaan sähkömagneettiselle vuorovaikutukselle ja jossain määrin myös gravitaatiolle. Erityisesti osoitetaan yleisen suhteellisuusteorian infinitesimaalisten koordinaattimuunnosten yhteys lineaarisen approksimaation mittamuunnoksiin ja käydään läpi Killingin vektoreiden avulla gravitaation lähteenä toimivan energia-liikemäärä-jännityksen yhteys avaruusajan symmetrioihin. Lisäksi keskustellaan yleisen suhteellisuusteorian ja mittateorioiden välisistä ongelmista.

Kvanttigravitaatiota käsittelevässä luvussa luodaan yksiulotteinen hilamaailman-kaikkeus, johon pyritään soveltamaan Feynmanin polkuintegraalikkvanttitusta. Statistista

fysiikkaa apuna käyttäen saadaan hila-avaruuden keskimääräinen linkinpituus eri hilapisteiden välillä seuraavassa muodossa

$$\frac{\langle L(l) \rangle}{N} = \frac{\sigma + 2}{\lambda}$$

kaava 2

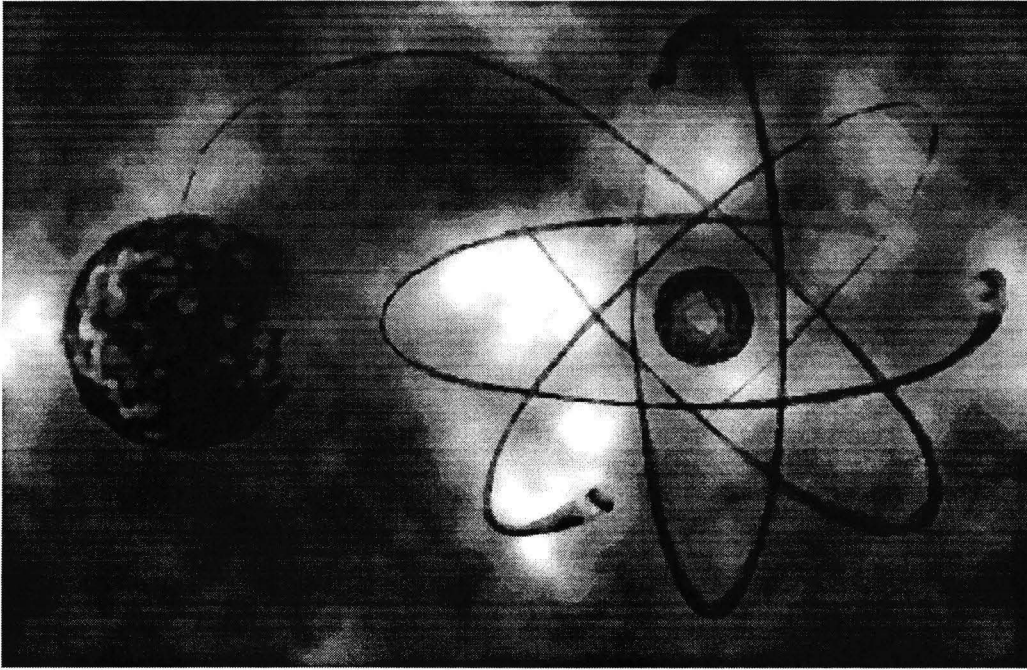
missä N on hilapisteiden lukumäärä, L on hila-avaruuden kokonaispituus, σ mielivaltainen vakio ja λ ns. 'kosmologinen vakio'. Edelleen määritetään yksilotteisen hila-maailman-kaikkeuden keskimääräisen kokonaispituuden kvanttifluktuaatioiden suhteellinen suuruus

$$\frac{\Delta L}{\langle L \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sigma}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

kaava 3

jonka siis havaitaan olevan käänteisesti verrannollinen hila-avaruuden suuruuden neliöjuureen.

Tutkielman loppuun sijoitetuissa liitteissä tarkastellaan hieman yksikköjärjestelmien välisiä muunnoksia, variaatioperiaatetta sekä käydään tarkemmin läpi tekstin tuloksiin johtaneita laskuja.



A. Johdanto

Ihmisen pyrki selittämään luonnon monimutkaisia rakenteita matemaattisilla malleilla. Näin tieteen edetessä fysikaaliset teoriat kehittyvät yhä monimutkaisemmiksi sopeutuessaan yhä tarkempiin vaatimuksiin maailmankaikkeuden toiminnan kuvauksessa. Usein teoriat osoittautuvat liian monimutkaisiksi sovellettavaksi sellaisenaan. Tällöin mukaan tulevat teorioiden approksimaatiot, jotka yksinkertaistavat alkujaan monimutkaista teoriaa joidenkin oletusten turvin. Yksinkertaistettua teoriaa voidaan nyt vapaasti käyttää oletusten sanelemassa ympäristössä. Tuloksena saatu mekanismi säästää aikaa ja resursseja asetettujen ongelmien ratkaisemisessa. Tämän vuoksi laskemme edelleen suuren osan mekaniikkaan liittyvistä ongelmista 1600-luvulla julkaistulla Newtonin teorialla. Teoria on vain approksimaatio luonnon todellisesta käyttäytymisestä, mutta kuvaa fysikaalisia tapahtumia riittäväällä tarkkuudella toimivuusalueellaan¹.

approksimaatioista

Tutkielmassa ensin käsiteltävä Albert Einsteinin yleisen suhteellisuusteorian lineaarinen approksimaatio vaihtaa alkuperäiset gravitaation epälineaariset kenttäyhtälöt lineaarisiksi toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiksi. Tämä luonnollisesti helpottaa kenttäyhtälöiden käsittelyä approksimaation toimivuusalueella — heikossa gravitaatiokentässä — sijaitsevista ongelmista. Edelleen approksimaatio ei tunne gravitaatiokentän vuorovaikutusta materiaan, jonka mukaantulo johtaakin teorian epälineaarisuuteen ja lopulta gravitaation geometriseen tulkintaan. Gravitaation lineaarinen approksimaatio on lähtökohtana mielekäs johto kaarevan avaruusaajan välttämättömyydelle. Tarkat epälineaariset kenttäyhtälöt voidaan puolestaan johtaa olettamalla avaruusaika kaarevaksi ja soveltamalla yleisen invarianssin periaatetta. Approksimaatioiden kautta voidaan siis saada sisältöä, tai jopa onnistua hakemaan perusta tarkalle teorialle.

*lineaarinen
approksimaatio*

¹Newtonin mekaniikka on hyvä approksimaatio makroskooppisten kappaleiden käyttäytymisestä pienillä nopeuksilla ($v \ll c$), heikoissa gravitaatiokentissä (Aurinkokunta).

Reggen laskenta

Gravitaation geometrisen tulkinnan mukaan massa kaareuttaa avaruusaikaa aiheuttaen siten näennäisen kaarevat radat massakappaleiden läheisyydessä. Kaarevan avaruusajan pohjalta johdettavat Einsteinin kenttäyhtälöt ovat monimutkaisuudessaan vaikeita ratkaista muille kuin yksinkertaistetuille systeemeille. Tämä monimutkaisuus voidaan jälleen väistää uudella approksimaatiolla — Reggen laskennalla. Reggen laskenta puolestaan supistaa avaruusajan kaarevuuden diskreeteille alueille avaruusajassa. Tällöin avaruusaika on paloittain laakea sisältäen *saranoita* ylläpitämässä kaarevuutta. Emme kuitenkaan voi olla varmoja siitä, ettei avaruusaika pienessä mittakaavassa muistuttaisikin paloittain laakeata avaruutta. Tämän mielessä pitäen voimme ajatella koko fysikaalisen teoriavarastomme sisältävän ainoastaan approksimaatioita, joita pakkomielteen omaisesti pyrimme muuntamaan kohti suurempaa tarkkuutta.

fysiikka jakaantuu

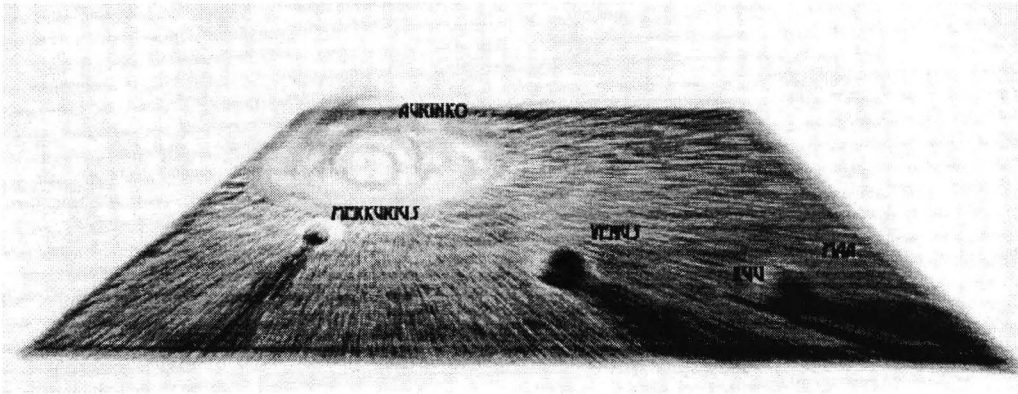
Fysiikka on kuin yksiulotteinen laajeneva organismi pyrkiessään kurottamaan tietämystään mittakaavan molempiin suuntiin. Ihmiskunnan tietämys ympäristöstään on alkanut edetä omasta mittakaavastamme yhä pienempiin ja vastaavasti yhä suurempiin ilmiöihin. Nämä kaksi eri kärkipäätä ovat kehittyneet eri fysiikan aloiksi — kvanttifysiikaksi ja yleiseksi suhteellisuusteoriaksi. Molemmat teoriat kuvaavat maailmankaikkeutta ällistyttävän tarkasti omassa ympäristössään. Kvanttimekaniikka teoriana selittää oivasti kokeellisia tuloksia molekyylylasoa pienemmässä mittakaavassa tapahtuvissa fysikaalisissa prosesseissa. Albert Einsteinin kehittämä yleinen suhteellisuusteoria vastaavasti kertoo kuinka avaruusaika käyttäytyy tähtien välisellä tasolla. Ihmiskunta kävelee sisukkaasti kahdella eri pituisella kainalosauvalla — sisukkaasti mutta ontuen.

kvanttimekaniikka vs. suhteellisuusteoria

Kvanttimekaniikan maailmankuva nojaa todennäköisyyksiin. Teorian mukaan tarkasteltava systeemi on jossakin tilassa tietyllä systeemin aaltofunktiosta saatavalla todennäköisyydellä. Edelleen systeemi siirtyy tilasta toiseen alku- ja lopputilan aaltofunktioiden kautta saatavan siirtymätodennäköisyyden turvin. Yleinen suhteellisuusteoria sitä vastoin tarkastelee systeemien tiloja ja siirtymiä klassisen fysiikan kautta, jolloin systeemin voidaan sanoa olevan juuri tietyssä tilassa. Samanaikaisuuksia ja informaation siirtonopeutta käsittelevää suppeampaa suhteellisuusteoriaa joudutaan käyttämään myös kvanttimekaanisessa mittakaavassa. Näin ollen yleisen suhteellisuusteorian ja kvanttimekaniikan yhdistäminen vaatii enemmänkin gravitaation kvantittamista kuin kvanttimekaniikan 'suhteellisuusteoretisoimista'. Gravitaatiota kvantitettaessa etsitäänkin keinoa esittää avaruusajan geometrisen tilan siirtymätodennäköisyyksiä geometrian siirtymiselle alkutilasta lopputilaan. Tämä voidaan saavuttaa summaamalla yli kaikkien mahdollisten tilojen todennäköisyydet alku- ja lopputilan välillä.

kvanttigravitaatio

Muiden perusvuorovaikutusten kvantisointiin nähden gravitaatio on osoittautunut ongelmalliseksi kvantisoida. Kolmen muun perusvuorovaikutusten kvantisoinnissa käytetään laakeaa tausta-avaruutta, jossa vuorovaikutuksen kvantit eli välittäjäbosonit toimivat. Gravitaatiota ei kuitenkaan voida kvantisoida suhteessa kiinteään taustaan gravitaation itse ollessa vastuussa taustageometrian muovaamisesta. Näin ollen on ehkä parempi lähestyä kvanttigravitaatiota geometrisemmilta lähtökohdilta eikä puhtaan hiukkasfysiikan kautta. Gravitaation luonne pienillä etäisyyksillä voi antaa automaattisen vastauksen myös muiden vuorovaikutusten syntyyn ja luonteeseen. Maailmankaikkeuden hurja monimutkaisuus voi kummuta yksinkertaisesta perusteoriasta — kvanttigravitaatiosta.



B. Lineaarinen approksimaatio

I: lineaariset kenttäyhtälöt

Lineaariseen gravitaatioteorian ja yleisen suhteellisuusteorian välillä on kaksisuuntainen tie. Yleisestä suhteellisuusteoriasta voidaan pudottaa lineaariseen teoriaan linearisoimalla yleisen suhteellisuusteorian yhtälöt laakeassa avaruudessa¹. Vastaavasti lineaarisesta gravitaatioteoriasta voidaan nousta gravitaation geometriseen tulkintaan ottamalla huomioon gravitaatiokentän vuorovaikutus itsensä kanssa, ja näin luopumalla lineaarisuudesta. Syitä lineaarisen gravitaatioteorian kehittämiseen on muitakin kuin käyttäminen ponnahduslautana kohti yleistä epälineaarista suhteellisuusteoriaa. Suuri osa suhteellisuusteoriaa todentavista kokeista on asetettu lineaarisen gravitaatioteorian lähtökohdista. Näihin kuuluvat gravitaatiosta johtuva aikadilataatio, gravitaatiohäiriö ja valon taipuminen gravitaatiokentässä.

Lineaaristen kenttäyhtälöiden hakemisessa voidaan käyttää apuna analogiaa sähkömagnetismin sähkömagneettisen vuorovaikutuksen ollessa luonnostaan lineaarinen teoria. Gravitaation tärkein eroavaisuus suhteessa sähkömagnetismin kanssa on gravitaatiokentän itseisvuorovaikutukset, joita sähkömagneettisella vuorovaikutuksella ei esiinny. Gravitaation itseisvuorovaikutukset tuottavat lopulta teorian epälineaarisen luonteen, mikä tullaan havaitsemaan toisessa lineaarisesta approksimaatiosta käsittelevässä luvussa. Samalla kuitenkin havaitaan gravitaation geometrinen luonne — massa kaareuttaa avaruusaikaa.

B.1 Linearisuus

Linearisuus tarkoittaa suoraviivaista. Lineaarinen n :n kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa

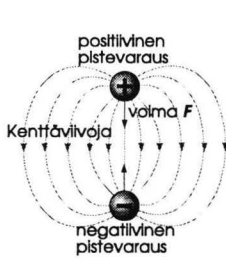
$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi(x) + f_{n-1}(x) \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \psi(x) + \dots + f_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + f_0(x) \psi(x) = f_n(x)$$

kaava 1

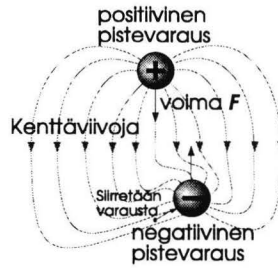
Gravitaation lineaarisessa approksimaatiossa pyrimme kuvaamaan syntyviä gravitaatiokenttiä juuri tämän kaltaisilla yhtälöillä. Ulkonäöllinen ero ylläolevaan yhtälöön tulee syntymään käytettävästä tensorimuodosta yhtälöiden kuvaamisessa.

¹Ks. esim. D'Inverno tai Misner & Thorne & Wheeler.

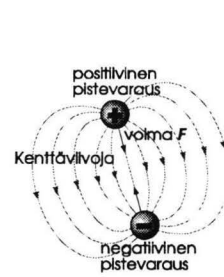
B.2 Kentät ja kenttäyhtälöt



Kuva 1. Kahden pistemäisen sähkövarauksen välillä vaikuttaa Coulombin voima (ks. kaava 2).



Kuva 2. Varausten keskinäistä sijaintia muutettaessa varausten väliset voimavektorit eivät muutu välittömästi. Paikallaan oleva varaus ei tiedä siirrosta ennenkuin siirtoinformaatio ehtii sen luo. Sähkömagneettisen vuorovaikutuksen tapauksessa informaatio liikkuu valon nopeudella.



Kuva 3. Informaatio negatiivisen varauksen siirtymästä on ehtinyt positiivisen varauksen luo. Tällöin voimavektorit ovat muuntuneet vastaamaan uutta tilannetta.

Kahden pistemäisen sähkövarauksen välillä vaikuttaa voima

$$F \stackrel{\text{SI-yksiköissä}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \hat{r}$$

kaava 2

missä \hat{r} on yksikkövektori varauksesta q' kohti varausta q . Negatiivista pistevarausta siirrettäessä täytyy positiivisen varauksen voimavektorin F muuttua. Positiivinen varaus ei kuitenkaan ole heti tietoinen negatiivisen varauksen liikkeistä johtuen informaation rajallisesta kulkunopeudesta. Näin ollen pistevarauksen siirtäminen aiheuttaa jonkinlaisen häiriön siirtymisen ensimmäiseltä varaukselta toiselle. Häiriön saavuttaessa paikallaan olevan varauksen, muuttuu varausten keskinäinen voimavektori F . Tätä häiriötä kutsutaan *kentäksi*.

Jotta liikemäärä säilyisi koko varausten siirtoon liittyvän prosessin ajan, on puuttuvan liikemäärän siirryttävä väliaikaisesti sähkömagneettiseen kenttään ja edelleen kentästä toiseen varaukseen. Näin ollen kentät sisältävät energiaa ja liikemäärää ollen siten olemassa rinnakkain materian kanssa. Kenttien voidaan ajatella olevan materian viides olomuoto kiinteiden, nestemäisten, kaasujen ja plasmojen lisäksi². Juuri kenttäyhtälöt antavat yhteyden kenttien ja lähteiden välille muodostaen kuvauksen kentän käyttäytymisestä lähteen ympärillä. Haemme seuraavaksi (lineaariset) kenttäyhtälöt vuorotellen sähkömagneettiselle vuorovaikutukselle ja gravitaatiolle.

B.3 Lineaariset kenttäyhtälöt sähkömagneettiselle vuorovaikutukselle ja GRAVITAATIOLLE

Einsteinin suppeamman suhteellisuusteorian (1905) mukaan kaikki inertiaalihavaintajat³ ovat ekvivalentteja. Kymmenen vuotta myöhemmin yleisessä suhteellisuusteoriassaan (1915) Albert Einstein esitti kaikkien havaintajien samanarvoisuutta. Tällöin fysiikan lakien havaitseminen on mahdollista niin inertiaalisille kuin epäinertiaalisillekin havaintajille. Toisaalta mikäli näin ei olisi, emme mekään voisi havaita maailmankaikkeudessa vallitsevia lainalaisuuksia johtuen Maan selvästi epäinertiaalisesta liikkeestä Auringon ympäri. Näin ollen voimme ajatella fysiikan lakien olevan invariantteja yleisessä koordinaatistomuunnoksessa, jolloin niiden täytyy olla muunnettavissa tensorimuotoon

²Ohanian, Physics, 2nd Ed.; luku 23.2.

³Inertiaalihavaintaja on havaintaja, johon mikään voima ei vaikuta. Tällaisen havaintajan silmin kappale on paikallaan tai jatkaa tasaisella nopeudella, mikäli mitkään voimat eivät kappaleeseen vaikuta.

$$A^{\mu\nu,\gamma} = 0$$

kaava 3

Etsimme aluksi muotoa sähkömagneettisen kentän lähteelle, jonka jälkeen pyrimme toistamaan päättelyketjun gravitaatiolle.

B.3.1 Lähde sähkömagneettiselle kentälle

Vaatus tensorimuodosta estää pelkän varaustiheyden käyttämisen lähteenä. Tämä lienee selvää, sillä varaustiheys liikkuvan junan sisällä näyttää varaustiheyden ja virtatiheyden yhdisteeltä asemalaiturilta katsottuna. Koska yhtälöidemme täytyy pitää paikkansa kaikissa mahdollisissa koordinaatistoissa, on niiden oltava tensorimuotoa (kaava 3). Voimme ilmaista varaustiheyden nelivektorina ($\mu = 0, 1, 2, 3$), jonka komponentit 1,2,3 ovat nollia seuraavasti:

$$j^\mu = (\rho, 0) = \rho$$

kaava 4

Lorentzin muunnoksessa tämä muuntuu kuten

$$j'^\mu = a^\mu_\nu j^\nu$$

kaava 5

missä a^μ_ν on Lorentz-muunnosmatriisi

$$a^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-V^2} & -V/\sqrt{1-V^2} & 0 & 0 \\ -V/\sqrt{1-V^2} & 1/\sqrt{1-V^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koordinaatistojen
välinen nopeus

kaava 6

Muunnetaan nyt 0-komponentti eli varaustiheys ρ :

$$j'^0 = a^0_0 j^0 + a^0_i \overbrace{j^i}^{=0} = a^0_0 j^0$$

kaava 7

Virtatiheyden muut komponentit muuntuvat kuten

$$j'^i = a^i_0 j^0 + a^i_k \overbrace{j^k}^{=0} = a^i_0 j^0$$

kaava 8

joka siis on nollasta eroava nollasta eroavalle varaustiheydelle. Muunnettaessa varaustiheyttä Lorentzin muunnoksella koordinaatistosta toiseen saamme objektin, joka sisältää sekä alkuperäisen varaustiheyden että virtatiheyden \vec{j} . Tämä objekti on *nelivirta*

$$j^\mu = (\rho, \vec{j})$$

nelivirta

kaava 9

joka säilyy⁴, ts.

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

kaava 10

⁴Säilymlain todistus löytyy useista sähkömagnetismia käsittelevistä kirjoista, emmekä toista sitä tässä.

B.3.2 Lähde gravitaatiokentälle

Newtonin ekvivalenssiperiaatteen mukaan systeemin (kokonais)inertiaalimassa luo ympärilleen gravitaatiokentän. Toisin sanoen systeemin (kokonais)energia luo ympärilleen gravitaatiokentän⁵. Mitä suurempi massa — tai vastaavasti mitä suurempi energia — sitä voimakkaampi on gravitaatiokenttä. Näin ollen energiatiheden täytyy toimia gravitaatiokentän lähteenä. Edellä havaittiin, ettei pelkkä varaustiheys riittänyt toimimaan sähkömagneettisen vuorovaikutuksen lähteenä johtuen Lorentz-invarianssin vaatimuksesta. Samoin ei pelkkä energiatiheys riitä toimimaan gravitaatiovuorovaikutuksen lähteenä. Mikä yhdessä koordinaatistossa on energiatiheys on jossakin toisessa koordinaatistossa yhdiste energiatihedestä, energiavuutiheydestä ja liikemäärävuutiheydestä. Gravitaatiovuorovaikutuksen lähteeksi tarvitsemme siis jotain, joka sisältää nämä kaikki tiheydet komponentteinaan. Tämä 'jotain' on energia-liikemäärä-jännitystensori, jonka kokoamisen aloitamme leppoisaa hulluutta hipovalla ajatusleikillä.

B.3.2.1 Energia-liikemäärä-jännitystensori

Olettakaamme omistavamme pullollisen pölyä sekä pakkomielteen pölyn energian tietämisestä kaikkina aikoina. Ensimmäiseksi rauhoitamme mieltämme mittaamalla omaisuutemme kokonaisenergian, jolloin saamme tietoomme sen energiatiheden eli energian määrän tilayksikössä. Pullon myynyt kauppias on vakuuttanut meille säilytysastian olevan suljettu systeemi⁶, joten voimme rauhallisin mielin jättää astian yksin ilman pelkoa energiatiheden muuttumisesta. Näin ollen jätämme astian kotiin matkustaessamme hyvin ansaitulle lomalle etelään. Lentokoneessa mieleemme hyökkää ajatus: lentokone liikkuu kotona olevaan pulloon nähden ja näin ollen pullon sisältö liikkuu lentokoneeseen nähden. Selvästikään energiatiheys ei riitä pitämään mieltämme rauhallisena vaan vaivamme papereiden ja laskukoneen kanssa penkin pohjalle miettimään uutta objektia: energia-liikemäärä-jännitystensoria.

Energia-liikemäärä-jännitystensorin täytyy energiatiheden lisäksi sisältää tietoa energian liikkeestä suhteessa tarkkailijaan, jolloin puhumme energiavirtatiheydestä eli liikemäärätiheydestä. Myös liikemäärä voi liikkua suhteessa tarkkailijaan, joten tarvitsemme liikemäärävirtatiheyden käsitteen täydentämään energian kuvaamista pölypilvessä.

B.3.2.2 Energia-liikemäärä-jännitystensori 'pölypilvelle'

Nopeudella v liikkuvan hiukkasen *relativistinen energia* on

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$$

kaava 11

Jos oletamme, että pullossa on n pölyhiukkasta kokonaisnopeudeltaan v , saamme *energiatiheydeksi*

energiatiheys

$$T^{00} = nE = n \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$$

kaava 12

Energiavirtatiheys suuntaan x on se energian määrä, joka kulkee läpi pinta-ala-yksikön jossakin ajassa, eli siis

energiavirtatiheys

$$T^{10} = T^{01} = \overbrace{nv_x}^{\text{hiukkasvirta } x\text{-suuntaan}} \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$$

kaava 13

mistä saadaan energiavirta suuntiin x , y ja z seuraavasti ($k = 1, 2, 3 = x, y, z$)

⁵Massa vastaa energiaa Einsteinin kuuluisan kaavan $E = mc^2$ mukaisesti, joka luonnollisissa yksiköissä ($c = 1$, ks. liite) muuttuu eksaktiksi $E = m$ vastaavuudeksi.

⁶Suljettu systeemi on systeemi, joka ei vaikuta systeemin ulkopuolisen maailman kanssa.

$$T^{k0} = T^{0k} = \overbrace{nv^k}^{\text{hiukkasvirta k-suuntaan}} \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$$

kaava 14

Energia liikkuu energiavirrassa saaden aikaan liikemäärän. Näin ollen energiavirtatiheys on samalla liikemäärätiheys, joka edelleen voi liikkua muodostaen liikemääravirran. Nyt siis x - y liikemäärävirtatiheys on x -liikemäärän virta y -suuntaan aika- ja pinta-alayksikköä kohden

$$T^{12} = \overbrace{\frac{nmv_x}{\sqrt{1-v^2}}}^{\text{liikemäärä x-suuntaan n:lle hiukkaselle}} v_y$$

liikemäärävirtatiheys

kaava 15

Näin yleinen k - l liikemäärävirtatiheys on ($k, l = 1, 2, 3 = x, y, z$)

$$T^{kl} = \overbrace{\frac{nmv^k}{\sqrt{1-v^2}}}^{\text{liikemäärä k-suuntaan n:lle hiukkaselle}} v^l$$

kaava 16

Kuvaamme pölyhiukkasten muodostamaa virtaa tarkkailijaan nähden nelinopeudella

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

kaava 17

missä τ on pölyhiukkasen ominaisaika eli pölyhiukkasen itsensä mittaama aika. Ominaisajan suhde pölyhiukkasten liikettä havainnoivan tarkkailijan aikaan on

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= ds^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= dt^2(1-v^2) \end{aligned}$$

kaava 18

Virran ominaistiheydellä tarkoitetaan virran mukana liikkuvan tarkkailijan mittaamaa hiukkas-
tiheyttä

$$n_0 = n\sqrt{1-v^2}$$

ominaistiheys

kaava 19

missä lausekkeen muoto on seurausta liikkuvan tilavuusalkion pienenemisestä laboratorio-koordinaatistosta mitattuna. Näin ollen tilavuuden supistuessa kasvaa tilavuuden sisällä olevien hiukkasten hiukkasitiheys laboratoriokoordinaatistosta katsottuna (kaava 19). Edelleen virran ominaismassatiheydellä tarkoitetaan virran mukana liikkuvan tarkkailijan mittaamaa massatiheyttä, joka saadaan ominaistiheydestä

$$\rho_0 = n_0 m$$

ominaismassa-
tiheys

kaava 20

Nyt voimme ilmaista energia-liikemäärä-jännitystensorin muodossa

energia-liikemäärä-
jännitystensori

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

kaava 21

joka sisältää komponentteinaan sekä *energiatiheyden*, *energiavirtatiheyden* että *liikemäärä-
virtatiheyden* seuraavasti:

energiatiheys

$$T^{00} = \rho_0 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = \overbrace{\left(\frac{d\tau^2}{dt^2} \right)}^{1-v^2} \frac{dt^2}{dt^2} \rho_0 = (1-v^2) \rho_0$$

kaava 22

energiavirtatiheys

$$\begin{aligned} T^{0k} &= \rho_0 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{\overbrace{n_0 m}^{\rho_0}}{\underbrace{(1-v^2)}_{=d\tau^2/dt^2}} \frac{dt}{dt} \frac{dx^k}{dt} \\ &= \frac{\overbrace{n_0}^{n_0} n \sqrt{1-v^2}}{(1-v^2)} m v^k = \frac{nmv^k}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}$$

kaava 23

liikemäärävirta-
tiheys

$$\begin{aligned} T^{kl} &= \rho_0 \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = \frac{\overbrace{n_0 m}^{\rho_0}}{\underbrace{(1-v^2)}_{=d\tau^2/dt^2}} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} \\ &= \frac{\overbrace{n_0}^{n_0} n \sqrt{1-v^2}}{(1-v^2)} m v^k v^l = \frac{nmv^k v^l}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}$$

kaava 24

Laboratoriokoordinaatiston mitaama *virtatiheys* liittyy ominaisvirtatiheyteen

virtatiheys

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1-v^2)}$$

kaava 25

jolloin energia-liikemäärä-jännitystensori saadaan muotoon

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu = \rho (1-v^2) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \rho \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = \rho v^\mu v^\nu$$

kaava 26

ja edelleen matriisimuotoon

$$T^{\mu\nu} = \rho \begin{bmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ u_x & u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y & u_x u_y & u_y^2 & u_y u_z \\ u_z & u_x u_z & u_y u_z & u_z^2 \end{bmatrix}$$

kaava 27

On huomattava, että *energia-liikemäärä-jännitystensori on symmetrinen*

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu = \rho_0 u^\nu u^\mu = T^{\nu\mu}$$

symmetrisyys

kaava 28

$T^{\mu\nu}$:n eri komponentit ovat siis

$$\begin{aligned} T^{00} &= \text{energiatiheys} \\ T^{0k} &= T^{k0} = \text{liikemäärätiheys } k\text{-suuntaan} = \text{energiavirtatiheys} \\ T^{kl} &= T^{lk} = k\text{-liikemäärävirtatiheys } l\text{-suuntaan} \end{aligned}$$

$T^{\mu\nu}$:n eri komponentit

kaava 29

Nyt kokonaisenergia saadaan integraalina

$$P^0 = \int T^{00} d^3x$$

Kokonaisenergia ja kokonaisliikemäärä

kaava 30

ja vastaavasti kokonaisliikemäärä

$$P^k = \int T^{k0} d^3x$$

kaava 31

B.3.2.3 Suljetun systeemin energia-liikemäärä-jännitystensori säilyy

Suljetun systeemin energia-liikemäärä säilyy, eli siis

$$\bar{\partial}_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

kaava 32

joka voidaan todistaa komponenteittain. Otamme nyt esimerkiksi komponentin $\mu = 1$, jolloin ylläolevasta kaavasta saadaan

$$\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}x^0} T^{10} + \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}x^k} T^{1k} = 0$$

kaava 33

Otamme pienen tilavuusalkion suljetusta systeemistämme, jonka sisällä x -liikemäärä on

$$\int T^{10} d^3x$$

kaava 34

Tämä x -liikemäärä pienen tilavuusalkion sisällä vähenee nopeudella

$$-\int \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}x^0} T^{10} d^3x$$

kaava 35

jolloin x -liikemäärän kokonaisvirta ulos tilavuusalkiosta on

$$\int T^{1k} dS_k$$

kaava 36

Nyt voimme käyttää Gaussin lausetta ylläolevaan pintaintegraaliin, jolloin saamme sen muotoon

$$\int \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}x^k} T^{1k} d^3x$$

kaava 37

jonka täytyy olla yhtäsuuri kuin x -liikemäärän vähenemisnopeus (kaava 35), sillä liikemäärän täytyy säilyä. Nyt mikäli tilavuusalkiomme on tarpeeksi pieni, ovat integrandit lähes vakioita,

jolloin voimme korvata integroinnin kertomalla integrandin tilavuusalkion tilavuudella seuraavasti

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x^0} T^{10}\right) \Delta x \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial}{\partial x^k} T^{1k}\right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

kaava 38

Nyt jakamalla tilavuusalkiot pois saadaan kaava 33. Muiden komponenttien $\mu = 0, 2, 3$ todistus on samankaltainen.

Nyt meillä on siis lähteet sekä gravitaatio- että sähkökentälle. Seuraavaksi pyrimme kiinnittämään nämä lähteet luomiinsa kentiin alkaen sähkömagneettisesta vuorovaikutuksesta.

B.3.3 Lähteen ja kentän yhteys sähkömagneettiselle vuorovaikutukselle

Liiketytalo yleistetylle koordinaatille q^k systeemiin vaikuttavan voiman Q^k alaisena on muotoa

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \underbrace{\dots}_{\substack{q^k \text{ :n ja muiden yleistettyjen} \\ \text{koordinaattien kytkentä a} \\ \text{ilmaisevia muita termejä}}} \propto Q^k$$

kaava 39

Sähkömagneettisen vuorovaikutuksen tapauksessa yleistetyn koordinaatin q^k rooli annetaan kentälle A ja voimaa Q^k näyttelee nelivirta j^μ . Lisäksi lähteen j^μ ollessa vektorimuotoa on myös kenttäosan oltava vektorikenttä, jotta kenttäyhtälöt olisivat Lorentz-invarianttia muotoa (kaava 3). Saamme siis

$$\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} + \dots \propto j^\mu$$

kaava 40

missä A^μ on Maxwellin kenttä eli nelipotentiali.

Vaatus Lorentz-invarianssista muuttaa yhtälöä edelleen, sillä $\partial^2/\partial t^2$ ei muunnu Lorentzin muunnoksessa $\partial^2/\partial t'^2$:ksi. $\partial^2/\partial t^2$ on kuitenkin vain yksi komponentti avaruusan ajan Laplacen operaattorista

Laplacen
operaattori

$$\partial_\nu \partial^\nu = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2}_{=\partial^2/\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2$$

kaava 41

joka on Lorentz-invariantti

$$\bar{\partial}'_\nu \bar{\partial}'^{\nu} = a_\nu^\mu \bar{\partial}_\mu a^\nu_\gamma \bar{\partial}^\gamma = \underbrace{a_\nu^\mu a^\nu_\gamma}_{=\delta_\gamma^\mu} \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}^\gamma = \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}^\mu$$

kaava 42

Vaihdamme $\partial^2/\partial t^2$:n $\bar{\partial}_\nu \bar{\partial}^\nu$:hyn, jolloin yhtälömme on jo muotoa

$$\bar{\partial}_\nu \bar{\partial}^\nu A^\mu + \dots \propto j^\mu$$

kaava 43

josta seuraavaksi poistamme '...' -osan epävarmuuden.

Koska sähkömagneettinen vuorovaikutus on lineaarinen luonteeltaan, etsimme ylläolevan kaltaista toisen kertaluvun *lineaarista* differentiaaliyhtälöä. Korkeintaan toista kertalukua $\bar{\partial}^\nu$:ssa ja lineaarisia A^μ :ssa olevia nelivektoreita ovat

$$\bar{o}_\mu \bar{o}^\mu A^\nu, \bar{o}^\nu \bar{o}_\mu A^\mu, A^\nu$$

kaava 44

Näistä komponenteista voidaan muodostaa yleinen lineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö nelivektoreista

$$c \bar{o}_\mu \bar{o}^\mu A^\nu + b \bar{o}^\nu \bar{o}_\mu A^\mu + a A^\nu = dj^\nu$$

kaava 45

missä a, b, c, d ovat määritettäviä vakioita.

B.3.4 Lähteen ja kentän yhteys gravitaatiolle

Kuten sähkömagneettisen kentän tapauksessa, on myös gravitaatiolle kenttäosan oltava samaa muotoa lähteen kanssa. Gravitaatiokentän lähteenä on toisen kertaluvun symmetrinen energia-liikemäärä-jännitystensori $T^{\mu\nu}$ ja näin ollen Lorentz-invarianssin saavuttamiseksi on myös kenttäosan oltava toista kertalukua oleva symmetrinen tensori. Merkitsemme tätä gravitaatiokenttätensoria⁷ $h^{\mu\nu}$:llä. Nyt siis etsimme $h^{\mu\nu}$:ssa lineaarista kenttäyhtälöä gravitaatiolle ja oletamme sen olevan korkeintaan toista kertalukua \bar{o}^ν :ssa.

Kaikki mahdolliset symmetriset toisen kertaluvun tensorit, jotka voidaan rakentaa $h^{\mu\nu}$:stä ja korkeintaan kahdesta \bar{o}^ν :sta ovat

$$\bar{o}_\lambda \bar{o}^\lambda h^{\mu\nu}, \bar{o}^\mu \bar{o}^\nu h_\sigma^\sigma, \bar{o}_\lambda \bar{o}^\nu h^{\mu\lambda} + \bar{o}_\lambda \bar{o}^\mu h^{\nu\lambda}, \\ \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h_\sigma^\sigma, \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma}, h^{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu} h_\sigma^\sigma$$

kaava 46

joista voidaan muodostaa kenttäyhtälö

$$d \partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} + a \partial^\mu \partial^\nu h_\sigma^\sigma - a' (\partial_\lambda \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda \partial^\mu h^{\nu\lambda}) \\ + b \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h_\sigma^\sigma + b' \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} + \underbrace{c h^{\mu\nu} + c' \eta^{\mu\nu} h_\sigma^\sigma}_{\text{aiheuttavat eksponentiaalisen heikkenemisen etä isyden kasvaessa}} \\ = -\kappa T^{\mu\nu}$$

kaava 47

B.3.5 Kenttäyhtälön vakioiden määrittäminen sähkömagneettiselle vuorovaikutukselle

Sähkömagneettisen vuorovaikutuksen tapauksessa jaimme yhtälöön

$$c \bar{o}_\mu \bar{o}^\mu A^\nu + b \bar{o}^\nu \bar{o}_\mu A^\mu + a A^\nu = dj^\nu$$

missä a, b, c, d ovat vakioita, jotka seuraavaksi määritämme.

Nelivirta on muotoa

$$j^\nu = (\rho, \vec{j}) = \begin{pmatrix} \overset{= \rho}{=} \\ \vec{qn}, \vec{qn}\vec{v} \end{pmatrix}$$

kaava 48

Nelivirta j^ν sisältää siis jo nyt yhden säädettävissä olevan vakion q , joten voimme aivan hyvin määrittellä nelivirran sisältämään myös mahdollisen vakion d . Edelleen voimme yhtäläisesti määrittellä vektorikentän A^μ sisältämään mahdollisen vakion c . Mikäli kenttäyhtälömme sisältäisi nämä vakiot c ja d , voisimme sisällyttää ne kentän ja lähteen määrittelyihin. Näin saamme yhtälön muotoon

⁷Parempi nimi 'gravitaatiokenttätensori' $h^{\mu\nu}$:lle olisi 'gravitaation tensoripotentiali' seuraamalla analogiaa sähkömagnetismin nelivektoripotentialille A^μ .

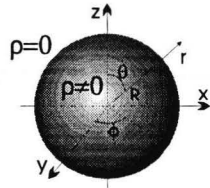
$$\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}^\mu A^\nu + b \bar{\partial}^\nu \bar{\partial}_\mu A^\mu + a A^\nu = j^\nu$$

kaava 49

Vakion a suuruuden voimme määrittää staattisen tyhjiöratkaisun avulla. Tällöin liikumme varausjakauman ulkopuolella, missä varaustiheys $\rho = 0$ (Kuva 4). Jos nyt tutkimme ainoastaan $\nu = 0$ komponenttia saamme tutkittavan yhtälön muotoon

$$\bar{\partial}_0 \bar{\partial}^0 A^0 + \bar{\partial}_k \bar{\partial}^k A^0 + b \bar{\partial}^0 \bar{\partial}_\mu A^\mu + a A^0 = j^0 = \rho \stackrel{\text{varausjakauman ulkopuolella}}{=} 0$$

kaava 50



Varausjakauman staattisuudesta seuraa aikaderivaattojen häviäminen

$$\underbrace{\bar{\partial}_0 \bar{\partial}^0 A^0}_{=0, \text{ staattisuuden seurauksena}} + \underbrace{\bar{\partial}_k \bar{\partial}^k A^0}_{=-\nabla^2}_{= -\partial_k} + b \underbrace{\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}^0 A^\mu}_{=0, \text{ staattisuuden seurauksena}} + a A^0 = 0$$

kaava 51

Kuva 4. Tarkastellaan säteeltään R olevaa staattista pallosymmetristä varausjakaumaa, jolle varaustiheys on $\rho > 0$, kun $r < R$ ja muulloin $\rho = 0$.

jolloin saamme yhtälön muotoon

$$-\nabla^2 A^0 + a A^0 = 0$$

kaava 52

Systeemin pallosymmetriasta johtuen ylläoleva differentiaaliyhtälö on helpoin ratkaista pallokoordinaateissa, joissa

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

kaava 53

Ratkaistavaksemme jää näin ollen

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2} A^0 - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} A^0 + a A^0 = 0$$

kaava 54

Sijoittamalla

$$A^0 = \frac{u(r)}{r}$$

kaava 55

saamme

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{u(r)}{r} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{u(r)}{r} + a \frac{u(r)}{r} = 0$$

kaava 56

Suoritetaan osamäärän derivointi, jolloin saadaan (ylläolevat termit alla hakasuluissa)

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} u(r) + \frac{2}{r^3} u(r) \right] - \left[\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} u(r) - \frac{2}{r^3} u(r) \right] + \left[a \frac{u(r)}{r} \right] = 0$$

kaava 57

ja edelleen sievennettynä

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) - a u(r) = 0$$

kaava 58

Tämän differentiaaliyhtälön karakteristinen yhtälö on

$$k^2 - a = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{a}$$

kaava 59

joten differentiaaliyhtälön ratkaisu on

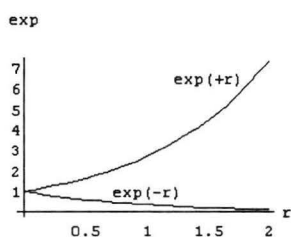
$$u(r) = Ce^{\pm\sqrt{a}r}$$

kaava 60

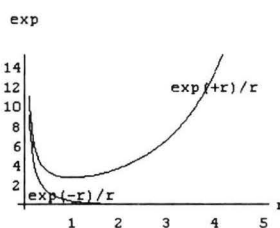
ja edelleen

$$A^0 = \frac{u(r)}{r} = C \frac{e^{\pm\sqrt{a}r}}{r}$$

kaava 61



Kuva 5. Eksponenttifunktion käyttäytyminen positiivisella ja negatiivisella argumentilla.



Kuva 6. $\frac{e^{\pm r}}{r}$:n käyttäytyminen positiivisella ja negatiivisella argumentilla.

Sähkömagneettisen vuorovaikutuksen tiedetään heikkenevän etäisyyden kasvaessa, ja näin ollen eksponenttifunktion käyttäytymisestä (Kuva 5 ja Kuva 6) päätellen voidaan ratkaisusta hyväksyä vain negatiivinen eksponentti. Suurilla r :n arvoilla sähkömagneettisen vuorovaikutuksen tiedetään olevan kääntäen verrannollinen etäisyyteen. Näin ollen ratkaisun eksponenttiosan $\exp(-\sqrt{a}r)$ täytyy olla yksi, joten $-\sqrt{a}r$:n on oltava nolla. Edelleen $-\sqrt{a}r$ voi olla nolla suurilla r :n arvoilla vain, kun

$$a = 0$$

kaava 62

Yhtälömme on nyt muotoa

$$\bar{o}_\mu \bar{o}^\mu A^\nu + b \bar{o}^\nu \bar{o}_\mu A^\mu = j^\nu$$

kaava 63

josta voidaan ratkaista b operoimalla yhtälöön \bar{o}_ν :llä

$$\partial_\nu (\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + b \partial^\nu \partial_\mu A^\mu) = \partial_\nu j^\nu$$

vakio b

kaava 64

josta edelleen

$$(1+b)\partial_\mu \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \partial_\nu j^\nu$$

kaava 65

Sähkövaraus on säilyvä suure, jonka ilmaisee nelivirran säilymlaki (kaava 10)

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

kaava 66

joka voidaan antaa muodossa

$$\bar{o}_k j^k + \bar{o}_0 \rho = 0$$

kaava 67

ja edelleen

$$\bar{\partial}_\nu j^\nu = 0$$

kaava 68

Säilymlakia käyttämällä yhtälömme saadaan muotoon

$$(1+b)\partial_\mu\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0$$

kaava 69

Tämä yhtälö on tosi mikäli

$$\partial_\mu\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0$$

kaava 70

tai

$$b = -1$$

kaava 71

Valitsemme eleganttiuden vuoksi jälkimmäisen vaihtoehdon vaatimalla yhtälön olevan identtisesti nolla⁸, jolloin saamme kenttäyhtälön

*kenttäyhtälö
sähkömagnetisille*

$$\bar{\partial}_\mu\bar{\partial}^\mu A^\nu - \bar{\partial}^\nu\bar{\partial}_\mu A^\mu = j^\nu$$

kaava 72

B.3.6 Kenttäyhtälön vakioiden määrittäminen gravitaatiolle

Gravitaation tapauksessa jäimme yhtälöön

$$\begin{aligned} & d\partial_\lambda\partial^\lambda h^{\mu\nu} + a\partial^\mu\partial^\nu h_\sigma{}^\sigma - a'(\partial_\lambda\partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda\partial^\mu h^{\nu\lambda}) \\ & + b\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda h_\sigma{}^\sigma + b'\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\sigma h^{\lambda\sigma} + \underbrace{ch^{\mu\nu} + c'\eta^{\mu\nu}h_\sigma{}^\sigma}_{\text{aiheuttavat eksponentiaalisen heikkenemisen etä isyden kasvaessa}} \\ & = -\kappa T^{\mu\nu} \end{aligned}$$

kaava 73

missä $a, a', b, b', c, c', d, \kappa$ ovat määrittettäviä vakioita.

vakio d

Voisimme aluksi jakaa koko yhtälön vakiolla d , mutta tämä tarkoittaisi vain muiden vakioiden määrittämistä siten, että ne jo sisältäisivät d :n nimittäjässään. Näin ollen voimme suoralta kädeltä valita d :n ykköseksi.

vakiot c ja c'

Vakiot c ja c' sisältävät termit aiheuttavat kenttäyhtälöön eksponentiaalisen heikkenemisen etäisyyden kasvaessa. Oletamme kuitenkin gravitaatiovuorovaikutuksen olevan pitkän kantaman vuorovaikutus määrittämällä $c = c' = 0$.

Etsimme seuraavaksi vakiot a', b', b käyttämällä hyväksemme energia-liikemääräjännityksen säilymistä. Kenttäyhtälö on nyt muotoa

vakiot a', b' ja b

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda\partial^\lambda h^{\mu\nu} + a\partial^\mu\partial^\nu h - a'(\partial_\lambda\partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda\partial^\mu h^{\nu\lambda}) \\ & + b\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda h + b'\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -\kappa T^{\mu\nu} \end{aligned}$$

kaava 74

missä $h^{\mu\nu}$:n jälkeen on merkitty yksinkertaisuuden vuoksi

⁸Funktio on määrittelyalueellaan identtisesti nolla, mikäli se on nolla kaikkialla määrittelyalueessaan. Toisin sanoen funktio on identtisesti nolla, mikäli mielivaltaisella muuttujan valinnalla ei saada nollasta eroavaa funktion arvoa. Huomaa, ettei b tässä tapauksessa ole muuttuja vaan parametri, jolla funktio saadaan identtisesti nolaksi.

$$h \equiv h_o^\sigma$$

kaava 75

Kuten sähkömagnetismin tapauksessakin operoimme tähän ∂_μ :llä, jolloin saamme

$$\partial_\mu \left[\partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} + a \partial^\mu \partial^\nu h - a' (\partial_\lambda \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda \partial^\mu h^{\nu\lambda}) + b \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + b' \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} \right] = - \underbrace{\kappa \partial_\mu T^{\mu\nu}}_{=0}$$

kaava 76

missä $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ilmaisee energian ja liikemäärän säilymisen analogiana sähkövarauksen säilymiseen $\partial_\mu j^\mu = 0$. Näin ollen saamme

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \partial_\mu h^{\mu\nu} + a \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu h - a' (\partial_\lambda \partial_\mu \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda \partial_\mu \partial^\mu h^{\nu\lambda}) + b \underbrace{\partial_\mu \eta^{\mu\nu}}_{=\delta^\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + b' \underbrace{\partial_\mu \eta^{\mu\nu}}_{=\delta^\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = 0$$

kaava 77

josta voidaan muuttaa summausindeksejä seuraavasti (huomaa lisäksi $h^{\mu\nu}$:n symmetrisyys)

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \partial_\mu h^{\mu\nu} + a \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu h - a' \left(\underbrace{\partial_\lambda \partial_\mu \partial^\nu h^{\mu\lambda}}_{**} + \overbrace{\partial_{\mu \rightarrow \lambda} \partial^{\mu \rightarrow \lambda} \partial_{\lambda \rightarrow \mu} h^{\nu\lambda \rightarrow \mu}}^{*\} \right) + b \partial^\nu \partial_\lambda \partial^\lambda h + b' \underbrace{\partial_\lambda \partial_{\sigma \rightarrow \mu} \partial^\nu h^{\mu \leftarrow \lambda \sigma}}_{=\partial_\lambda \partial_\mu \partial^\nu h^{\mu\lambda}} = 0$$

kaava 78

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &(-a' + b') \partial_\lambda \partial_\mu \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \\ &(1 - a') \partial_\lambda \partial^\lambda \partial_\mu h^{\mu\nu} + \\ &(a + b) \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu h = 0 \end{aligned}$$

kaava 79

Vaadimme nyt yhtälön vasemman puolen häviävän identtisesti, jolloin saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} (-a' + b') = 0 \\ (1 - a') = 0 \\ (a + b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 1 \\ b = -a \end{cases}$$

kaava 80

Sijoittamalla nämä arvot yhtälöön saamme

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} + a \partial^\mu \partial^\nu h - (\partial_\lambda \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda \partial^\mu h^{\nu\lambda}) - a \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -\kappa T^{\mu\nu}$$

kaava 81

vakio a

Yhtälössämme on yhä yksi määräämätön vakio a . Tällä vakiolla ei kuitenkaan ole fysikaalista merkitystä, sillä se liittyy saman gravitaatiokentän kuvaamiseen erilaisilla toisiinsa sidotuilla tensoreilla. Tällainen alkuperäiseen tensoriin $h^{\mu\nu}$ sidottu uusi gravitaatiokenttätensori $\bar{h}^{\mu\nu}$ saadaan vaikkapa seuraavasti

$$h^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - C\eta^{\mu\nu}\bar{h}$$

kaava 82

missä C on vakio. Nyt on lisäksi

$$h = h_{\nu}{}^{\nu} = \eta_{\nu\mu}h^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(\bar{h}^{\mu\nu} - C\eta^{\mu\nu}\bar{h}) = \bar{h} - 4C\bar{h} = (1-4)\bar{h}$$

kaava 83

Suorittamalla nämä muunnokset kenttäyhtälöön (kaava 81) saadaan yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda}\partial^{\lambda}(\bar{h}^{\mu\nu} - C\eta^{\mu\nu}\bar{h}) + a\partial^{\mu}\partial^{\nu}(1-4C)\bar{h} - [\partial_{\lambda}\partial^{\nu}(\bar{h}^{\mu\lambda} - C\eta^{\mu\lambda}\bar{h}) + \partial_{\lambda}\partial^{\mu}(\bar{h}^{\nu\lambda} - C\eta^{\nu\lambda}\bar{h})] \\ - a\eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}(1-4C)\bar{h} + \eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\sigma}(\bar{h}^{\lambda\sigma} - C\eta^{\lambda\sigma}\bar{h}) = -\kappa T^{\mu\nu} \end{aligned}$$

kaava 84

jota sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\bar{h}^{\mu\nu} - C\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\eta^{\mu\nu}\bar{h} + a\partial^{\mu}\partial^{\nu}\bar{h} - 4aC\partial^{\mu}\partial^{\nu}\bar{h} \\ - \partial_{\lambda}\partial^{\nu}\bar{h}^{\mu\lambda} + C\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}\partial^{\nu}\bar{h} - \partial_{\lambda}\partial^{\mu}\bar{h}^{\nu\lambda} + C\eta^{\nu\lambda}\partial_{\lambda}\partial^{\mu}\bar{h} \\ - a\eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\bar{h} + 4aC\eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\bar{h} + \eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\sigma}\bar{h}^{\lambda\sigma} - C\eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\sigma}\bar{h} = -\kappa T^{\mu\nu} \\ \Rightarrow \\ \partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\bar{h}^{\mu\nu} + [a(1-4C) + 2C]\partial^{\mu}\partial^{\nu}\bar{h} - (\partial_{\lambda}\partial^{\nu}\bar{h}^{\mu\lambda} + \partial_{\lambda}\partial^{\mu}\bar{h}^{\nu\lambda}) \\ - [a(1-4C) + 2C]\eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\bar{h} + \eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\sigma}\bar{h}^{\lambda\sigma} = -\kappa T^{\mu\nu} \\ \text{Merkitä } \bar{a} \equiv a(1-4C) + 2C \\ \Rightarrow \\ \partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\bar{h}^{\mu\nu} + \bar{a}\partial^{\mu}\partial^{\nu}\bar{h} - (\partial_{\lambda}\partial^{\nu}\bar{h}^{\mu\lambda} + \partial_{\lambda}\partial^{\mu}\bar{h}^{\nu\lambda}) \\ - \bar{a}\eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\bar{h} + \eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\sigma}\bar{h}^{\lambda\sigma} = -\kappa T^{\mu\nu} \end{aligned}$$

kaava 85

joka on samaa muotoa aikaisemman kenttäyhtälön kanssa (kaava 81) kuitenkin siten, että $h \rightarrow \bar{h}$, $h^{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}^{\mu\nu}$ ja $a \rightarrow \bar{a}$. Näin ollen ei \bar{a} :lla ole fysikaalista merkitystä, sillä kuten yllä todettiin liittyy \bar{a} ainoastaan toisiinsa sidottujen gravitaatiokenttätensoreiden määrittelyyn. Voimme siis hakea \bar{a} :lle mahdollisimman yksinkertaisen nollasta eroavan arvon — ykkösen. Tämä voidaan suorittaa hakemalla yllä olevassa lausekkeessa vakion C arvo siten, että $\bar{a} = 1$:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1-a}{2-4a} \\
 &\Rightarrow \\
 \bar{a} &= a(1-4C) + 2C \\
 &= a\left(1-4\frac{1-a}{2-4a}\right) + 2\frac{1-a}{2-4a} \\
 &= a\frac{1-2a}{1-2a} - 2a\frac{1-a}{1-2a} + \frac{1-a}{1-2a} \\
 &= \frac{a-2a^2-2a+2a^2+1-a}{1-2a} \\
 &= \frac{1-2a}{1-2a} = 1
 \end{aligned}$$

kaava 86

Saamme siis lopulta kenttäyhtälön muotoon

$$\begin{aligned}
 \partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu h - (\partial_\lambda \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda \partial^\mu h^{\nu\lambda}) \\
 - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -\kappa T^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

kaava 87

Yhtälö on invariantti mittamuunnoksessa⁹

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h^{\mu\nu} + \bar{o}^\nu \Lambda^\mu + \bar{o}^\mu \Lambda^\nu$$

kaava 88

mittainvarianssi

josta ei kuitenkaan ole havaittavia seurauksia. Tätä yhtälön sisältämää 'epämääräisyyttä' voidaan vähentää asettamalla kenttäyhtälöille erilaisia ehtoja. Tässä tapauksessa käytettävä ehto on ns. *Hilbertin mittaehto*

$$\partial_\mu (h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h) = 0$$

Hilbertin mittaehto

kaava 89

jonka tässä ja nyt oletamme pitävän paikkansa (ks. mittaa käsittelevä luku). Hilbertin mittaehto käyttämällä kenttäyhtälöt saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
 \partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} - \partial^\nu \underbrace{(\partial_\lambda h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h)}_{=0} - \partial^\mu \underbrace{(\partial_\lambda h^{\nu\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda h)}_{=0} \\
 - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} \partial_\sigma \partial_\lambda h = -\kappa T^{\mu\nu} \\
 \Rightarrow \\
 \partial_\lambda \partial^\lambda (h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h) = -\kappa T^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

kaava 90

Merkitsemällä nyt

⁹ Keskustelu mittamuunnoksista ja mittainvarianssista jätetään tässä yhteydessä tarkoituksella lähes olemattomalle tasolle. Mittainvarianssia tuntematon lukija voi siirtyä mitalle ja sen ominaisuuksille omistettuun lukuun jatkaakseen tästä luvusta mitan, mittamuunnoksen ja mittainvarianssin käsitteiden ymmärtämisen jälkeen.

$$\phi^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h$$

kaava 91

saadaan kenttäyhtälö eleganttiin muotoon (huomaa selvä lineaarisuus!)

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \phi^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}$$

kaava 92

ja samoin yksinkertaistuu Hilbertin mittaehto:

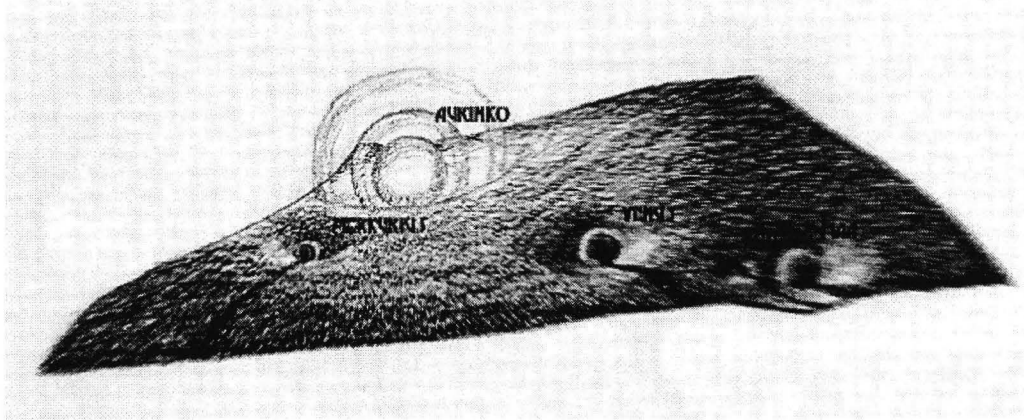
$$\partial_\mu \phi^{\mu\nu} = 0$$

kaava 93

Olemme nyt saaneet johdettua lineaariset kenttäyhtälöt gravitaatiolle käyttämällä hyväksi luonnostaan lineaarista teoriaa sähkömagneettisesta vuorovaikutuksesta. Seuraavassa luvussa joudumme ottamaan huomioon gravitaatioteorian epälineaarisen luonteen johtaessamme liikeyhtälöä hiukkaselle gravitaatiokentässä.

B.4 Lähteet

1. **D’Inverno**, Ray Introducing Einstein’s Relativity,
Oxford University Press, Oxford; 1995.
2. **Lehto**, Markku Yleisen Suhteellisuusteorian Jatkokurssi,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1996.
3. **Misner**, Charles W.
Thorne, Kip S.
Wheeler, John A. Gravitation,
W.H. Freeman and Company, New York; 1973.
4. **Ohanian**, Hans
Ruffini, Remo Gravitation and Spacetime, 2nd Ed.,
W.W. Norton & Company Inc., New York; 1994.
5. **Repo**, Pasi Einsteinin Kenttäyhtälöiden Lineaarinen Approk-
simaatio, Gravitaatioaallot ja Niiden
Havaitseminen Kaksoispulsarin PSR 1913+16
Avulla,
Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu, Jyväskylän Yliopisto;
1995.



C. Lineaarinen approksimaatio II: epälineaarisuuden esiinmarssi

Lineaarisen gravitaatioteorian perusajatuksena on jättää pois gravitaatiokentän vuorovaikutus itsensä kanssa. On kuitenkin kaksi toisiinsa liittyvää asiaa, jotka puolustavat *gravitaatiokentän itseisvuorovaikutusta* tuoden esiin yleisen suhteellisuusteorian epälineaarisen luonteen.

- Mikäli gravitaatiokenttä voi saada energia-liikemäärää materialta, täytyy myös materiaan saada energia-liikemäärää gravitaatiokentältä. Mikäli tällaista vastavaikutusta ei olisi, eivät energia ja liikemäärä säilyisi.
- Newtonin ekvivalenssiperiaatteen mukaan kappaleen aktiivinen ja passiivinen gravitaatiomassa sekä inertiaalimassa ovat yhtäsuuria. Koska aktiivinen gravitaatiomassa luo gravitaatiokentän ja passiivinen gravitaatiomassa kokee gravitaatiokentän, täytyy myös inertiaalimassaan liittyvän gravitaatioenergian toimia lähteenä gravitaatiolle.

C.1 Energia-liikemäärä-jännitystensori gravitaatiokentälle

Voimme korjata kenttäyhtälöiden lähteeseen liittyvän puutteen lisäämällä energia-liikemäärä-jännitystensoriin $T^{\mu\nu}$ oman energia-liikemäärä-jännitystensorin gravitaatiokentälle — $t^{\mu\nu}$:n. Nyt koko energia-liikemäärä-jännitystensori sisältää oman energia-liikemäärä-jännitystensorin materiaalille ja oman gravitaatiokentälle:

$$T^{\mu\nu} = T_{(m)}^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$$

kaava 1

Koko energia-liikemäärä-jännitystensorin $T^{\mu\nu}$:n sisältö jaotellaan seuraavasti:

- Materiaan liittyvän energia-liikemäärä-jännitystensorin $T_{(m)}^{\mu\nu}$ sisältö on
 - I. Materiaan liittyvä energia, liikemäärä ja jännitys.
 - II. Materiaan ja gravitaatiokentän vuorovaikutukseen liittyvä energia, liikemäärä ja jännitys.
- Gravitaatiokenttään liittyvän energia-liikemäärätensorin $t^{\mu\nu}$:n sisältö on
 - III. Puhtaan gravitaatiokentän energia, liikemäärä ja jännitys.

Mikäli siis halutaan pitää kiinni säilymislaista

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu (T_{(m)}^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0$$

kaava 2

joudutaan pakostakin itseisvuorovaikutuksiin, jotka aiheuttavat yleisen suhteellisuusteorian epälineaarisen luonteen.

Nyt kenttäyhtälö on muotoa

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \phi^{\mu\nu} = -\kappa (T_{(m)}^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})$$

kaava 3

Kaikki näyttää yksinkertaiselta ja elegantilta — lukuunottamatta tietämättömyyttämme $t^{\mu\nu}$:n sisällöstä. Liitteessä b käsiteltävää variaatioperiaatetta hyväksi käyttäen saadaan gravitaatiokentän energia-liikemäärä-jännitystensoriksi¹

$$t_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[2\phi^{\alpha\beta,\mu} \phi_{\alpha\beta,\nu} - \phi^{\cdot,\mu} \phi^{\cdot,\nu} - \eta^{\mu\nu} \left(\phi^{\alpha\beta,\sigma} \phi_{\alpha\beta,\sigma} - \frac{1}{2} \phi_{,\sigma} \phi^{\cdot,\sigma} \right) \right]$$

kaava 4

Energia-liikemäärä-jännitystensori (kaava 4) ei ole invariantti mittamuunnoksessa

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h^{\mu\nu} + \bar{o}^\nu \Lambda^\mu + \bar{o}^\mu \Lambda^\nu$$

kaava 5

Tämä ei kuitenkaan haittaa, sillä kenttäyhtälössä (kaava 3) sekä oikea että vasen puoli sisältävät käytetystä mitasta riippuvia termejä. Koko yhtälö on mittainvariantti, koska mitasta riippuvat termit hävittävät toisensa jättäen yksikäsitteisen lopputuloksen.

C.2 Liikeyhtälö

Olemme johtaneet muodon massajakauman aiheuttamalle gravitaatiokentälle ja seuraava tehtävämme onkin selvittää, kuinka syntynyt kenttä vaikuttaa massakappaleeseen. Haemme siis gravitaatiovuorovaikutuksen *liikeyhtälöä*, joka saadaan käyttämällä hyväksi (kokonais)energia-liikemäärä-jännityksen säilymistä

$$\partial_\nu (T_{(m)}^{\mu\nu} + t_{(1)}^{\mu\nu}) = 0$$

kaava 6

jossa oikeanpuoleinen termi saa muodon

¹Ks. Liite c.

*Kenttäyhtälö
gravitaatiolle*

$t_{(1)}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu t_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left[2\phi^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\nu} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu} + 2\phi^{\alpha\beta,\mu} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu}{}_{,\nu} - \phi^{\cdot\mu}{}_{,\nu} \phi^{\cdot\nu} - \phi^{\cdot\mu} \phi^{\cdot\nu}{}_{,\nu} \right. \\
 &\quad \left. - \partial^\mu \left(\phi^{\alpha\beta,\sigma} \phi_{\alpha\beta,\sigma} - \frac{1}{2} \phi_{,\sigma} \phi^{\cdot\sigma} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\overbrace{2\phi^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\nu} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu}}^{\circ} + 2\phi^{\alpha\beta,\mu} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu}{}_{,\nu} - \overbrace{\phi^{\cdot\mu}{}_{,\nu} \phi^{\cdot\nu}}^{\circ} - \phi^{\cdot\mu} \phi^{\cdot\nu}{}_{,\nu} \right. \\
 &\quad \left. - \overbrace{2\phi^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\sigma} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\sigma}}^{\circ} + \overbrace{\phi^{\cdot\mu}{}_{,\sigma} \phi^{\cdot\sigma}}^{\circ} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left(2\phi^{\alpha\beta,\mu} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu}{}_{,\nu} - \phi^{\cdot\mu} \phi^{\cdot\nu}{}_{,\nu} \right)
 \end{aligned}$$

kaava 7

Käyttämällä nyt kenttäyhtälöä (kaava 3) saadaan

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu t_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left[-2\kappa \phi^{\alpha\beta,\mu} \left(T_{(m)\alpha\beta} + t_{(1)\alpha\beta} \right) + \kappa \phi^{\cdot\mu} \eta^{\alpha\beta} \left(T_{(m)\alpha\beta} + t_{(1)\alpha\beta} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left(-2\kappa \phi^{\alpha\beta,\mu} T_{(m)\alpha\beta} - 2\kappa \phi^{\alpha\beta,\mu} t_{(1)\alpha\beta} + \kappa \phi^{\cdot\mu} T_{(m)} + \kappa \eta^{\alpha\beta} \phi^{\cdot\mu} t_{(1)\alpha\beta} \right) \\
 &= -\frac{\kappa}{4} \left(2\phi^{\alpha\beta,\mu} T_{(m)\alpha\beta} - \phi^{\cdot\mu} T_{(m)} \right) + \underbrace{\phi^{\alpha\beta} : n \text{ nelioita sisältäviä termejä}}_{\approx 0 \text{ (heikko gravitaatiokenttä)}}
 \end{aligned}$$

kaava 8

Näin saamme energia-liikemäärän säilymlain muotoon

$$\partial_\nu T_{(m)}^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} T_{(m)\alpha\beta} \left(\phi^{\alpha\beta,\mu} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \phi^{\cdot\mu} \right) = 0$$

kaava 9

tai vaihtoehtoisesti sähkömagneettisen vuorovaikutuksen liikeyhtälölle²

$$\partial_\nu T_{(m)}^{\mu\nu} - F^\mu{}_\nu j^\nu = 0$$

kaava 10

$$\partial_\nu T_{(m)}^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} T_{(m)\alpha\beta} \partial^\mu \left(\overbrace{\phi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \phi^{\cdot\mu}}^{=h^{\alpha\beta}} \right) = 0$$

liikeyhtälö

analogiseen muotoon

⇒

$$\partial_\nu T_{(m)\mu}{}^\nu - \frac{\kappa}{2} \underbrace{h_{\alpha\beta,\mu}}_{\text{gravitaatio-}} \underbrace{T_{(m)}^{\alpha\beta}}_{\text{materia-}} = 0$$

lä hteen ja
 kentän väihin
 kytkentä väkio

kaava 11

joka kuvaa gravitaatiokentän ja massallisten hiukkasten välistä energian ja liikemäärän vaihtoa.

Integroidaan nyt saadun yhtälön toinen termi yli yhden hiukkasen tilavuuden, jolloin saadaan

²Ks. esim Ohanian & Ruffini; luku 3.1 loppu.

integroidaan toinen termi

$$-\frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta, \mu} \int T_{(m)}^{\alpha\beta} d^3x$$

kaava 12

olettaen $h_{\alpha\beta, \mu}$:n olevan vakio integroitavan tilan sisällä. $T_{(m)}^{\alpha\beta}$ on muotoa

$$T_{(m)}^{\alpha\beta} = \overbrace{\rho_0 u^\alpha u^\beta}^{\text{puhdas materiaosuus}} + \underbrace{\left[\begin{array}{l} \text{Materian ja gravitaatiokentän} \\ \text{vuorovaikutukseen liittyvä} \\ \text{osuus } \propto hu^a u^b. \end{array} \right]}_{\approx 0 \text{ (heikko gravitaatiokenttä)}}$$

kaava 13

missä materian ja gravitaatiokentän vuorovaikutukseen liittyvä osuus aiheuttaa liikeyhtälön toista termiä (kaava 12) määrittettäessä h^2 :een verrannollisen korjauksen, joka voidaan heikon kentän tapauksessa approksimoida pois. $T_{(m)}^{\alpha\beta}$:n lausekkeessa $\rho_0 = mn_0$ puolestaan on ominaismassatiheys, missä n_0 ominaislukumäärätiheys. Integraalista saadaan näin ollen

$$\begin{aligned} \int \rho_0 u^\alpha u^\beta d^3x &= u^\alpha u^\beta \int mn_0 d^3x \\ &= mu^\alpha u^\beta \int \sqrt{1-v^2} nd^3x \\ &= mu^\alpha u^\beta \sqrt{1-v^2} \underbrace{\int nd^3x}_{\substack{=1 \\ \text{lkm-tiheys } n=1 \\ \text{integrointialueessa}}} \\ &= mu^\alpha u^\beta \sqrt{1-v^2} \end{aligned}$$

kaava 14

missä nelinopeuksien u^μ on oletettu olevan vakioita integrointialueessa. Edelleen integroitaessa liikeyhtälön (kaava 11) ensimmäinen termi yli yhden hiukkasen tilavuuden saadaan

integroidaan ensimmäinen termi

$$\begin{aligned} \int \partial_\nu T_{(m)\mu}^\nu d^3x &= \partial_0 \int T_{(m)\mu}^0 d^3x + \underbrace{\partial_k \int T_{(m)\mu}^k d^3x}_{=0} \\ &= \partial_0 \int T_{(m)\mu}^0 d^3x \end{aligned}$$

kaava 15

Nyt liikeyhtälön integraali saadaan muotoon

$$\frac{d}{dt} \int T_{(m)\mu}^0 d^3x - \frac{\kappa}{2} \sqrt{1-v^2} m h_{\alpha\beta, \mu} u^\alpha u^\beta = 0$$

kaava 16

ja edelleen määrittelemällä

$$P_\mu \equiv \int T_{(m)\mu}^0 d^3x$$

saadaan

$$\frac{d}{d\tau} P_\mu - \frac{\kappa}{2} m h_{\alpha\beta, \mu} u^\alpha u^\beta = 0$$

kaava 17

missä τ on hiukkasen ominaisaika, jolle on voimassa $d\tau = \sqrt{1-v^2} dt$.

Nyt P_μ :n odotetaan kuitenkin olevan muotoa

$$P_\mu = mu_\mu + \left[\begin{array}{l} \text{termi, joka liittyy hiukkasen} \\ \text{ja gravitaatiokentän väliseen} \\ \text{vuorovaikutukseen} \end{array} \right]$$

kaava 18

Nyt kaava 17 on samaa muotoa Eulerin-Lagrangen yhtälön

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\bar{\partial}L}{\bar{\partial}u^\mu} - \frac{\bar{\partial}L}{\bar{\partial}x^\mu} = 0$$

kaava 19

kanssa erityisesti mikäli asetetaan

$$\frac{\bar{\partial}L}{\bar{\partial}x^\mu} = \frac{\kappa}{2} mh_{\alpha\beta, \mu} u^\alpha u^\beta$$

kaava 20

ja

$$\frac{\bar{\partial}L}{\bar{\partial}u^\mu} = P_\mu$$

kaava 21

Integroidaan kaava 20 x_μ :n suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{\partial}}{\partial x^\mu} L dx_\mu &= \frac{\kappa}{2} mu^\alpha u^\beta \int \frac{\bar{\partial}}{\partial x^\mu} h_{\alpha\beta} dx_\mu \\ &\Rightarrow \\ L(x, u) &= \frac{\kappa}{2} mh_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + f(u) \end{aligned}$$

kaava 22

missä $f(u)$ on mielivaltainen nelinopeuden u^μ funktio. Gravitaatiokentän ulkopuolella $h_{\alpha\beta} = 0$, jolloin hiukkasen täytyy totella vapaan hiukkasen liikeyhtälöä. Lagrangen funktio vapaalle hiukkaselle on muotoa

$$L_{\text{vapaa}} = \frac{1}{2} mu^\mu u_\mu$$

kaava 23

joka siis on sama kuin $f(u)$. Näin ollen

$$\begin{aligned} L(x, u) &= \frac{1}{2} \kappa mh_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \frac{1}{2} mu^\mu u_\mu \\ &= \frac{1}{2} m(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}) u^\mu u^\nu \end{aligned}$$

kaava 24

ja edelleen

$$P_\mu = \frac{\bar{\partial}L}{\bar{\partial}u^\mu} = mu_\mu + m\kappa h_{\mu\alpha} u^\alpha$$

kaava 25

Sijoittamalla saatu tulos gravitaation liikeyhtälöön (kaava 17) saadaan

$$\frac{d}{d\tau} (mu_\mu + m\kappa h_{\mu\alpha} u^\alpha) - \frac{\kappa}{2} mh_{\alpha\beta, \mu} u^\alpha u^\beta = 0$$

kaava 26

joka sievenee muotoon

vapaan hiukkasen
liikeyhtälö eli
geodeettinen yhtälö

$$\frac{d}{d\tau} \left(u_\mu + \kappa h_{\mu\alpha} u^\alpha \right) - \frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta, \mu} u^\alpha u^\beta = 0$$

kaava 27

Olemme johtaneet vapaan hiukkasen liikeyhtälön — geodeettisen yhtälön — kaarevassa avaruusajassa. Tämän kaarevan avaruusajan geometriaa luonnehtii metrisen tensori $g_{\mu\nu}(x)$. Seuraavassa luvussa paneudumme enemmän tähän avaruusajan geometrian kaareutumiseen ja esittelemme mainitun metrisen tensorin $g_{\mu\nu}(x)$.

C.3 Avaruusaika kaareutuu

Pyrimme nyt osoittamaan kuinka massa kaareuttaa avaruusaikaa, jossa hiukkaset liikkuvat mahdollisimman suorilla ratoja — geodeeseja — pitkin. Tähän tulokseen pääsemme käyttämällä edellä johdettua liikeyhtälöä, tai pikemminkin liikeyhtälöön liittyvää Lagrangen funktiota (kaava 24). Tarkoituksemme on löytää viivaelementti edellä johdetun liikeyhtälön toteuttamassa avaruudessa. Aloitamme Lagrangen mekaniikan Hamiltonin funktiosta

$$H \equiv H(x^\mu) = u^\mu \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - L$$

kaava 28

johon sijoittamalla L ja P_μ (kaava 24, kaava 25) saadaan

$$\begin{aligned} H &= u^\mu P_\mu - L \\ &= u^\mu \left(m u_\mu + m \overbrace{\kappa h_{\mu\alpha} u^\alpha}^{\alpha \rightarrow \nu} \right) - \frac{1}{2} m (\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}) u^\mu u^\nu \\ &= m (u^\mu u_\mu + \kappa h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) - \frac{1}{2} m (u^\mu u_\mu + \kappa h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) \\ &= \frac{1}{2} m (u^\mu u_\mu + \kappa h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) \end{aligned}$$

kaava 29

Nyt koska Hamiltonin funktio on liikevakio saadaan³

$$\frac{1}{2} m (u^\mu u_\mu + \kappa h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = [\text{vakio}]$$

kaava 30

Jos oletamme hiukkasen olleen alunperin gravitaatiokentän ulkopuolella, jolloin $h_{\mu\nu} = 0$ ja $u^\mu u_\mu = 1$, saadaan

$$\frac{1}{2} m \left(\overbrace{u^\mu u_\mu}^{\equiv 1} + \kappa \overbrace{h_{\mu\nu}}^{\equiv 0} u^\mu u^\nu \right) = [\text{vakio}]$$

kaava 31

josta

$$[\text{vakio}] = \frac{1}{2} m$$

kaava 32

ja siten

³Tämä voidaan todistaa derivoimalla ensin kumpi tahansa — kaava 29 tai kaava 30 — ominaisajan suhteen. Saatuun derivaattafunktioon voidaan käyttää vapaan hiukkasen liikeyhtälöä $\frac{d}{d\tau}(m u^\mu) = 0$, jolloin lopputulokseksi saadaan nolla.

$$(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}) u^\mu u^\nu = 1$$

kaava 33

joka on sama kuin

$$(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 1$$

kaava 34

Näin ollen saamme uuden määritelmän gravitaatiokentässä kulkevan hiukkasen ominais-aikaväliksi

$$d\tau^2 = [\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x)] dx^\mu dx^\nu$$

ominais-aikaväli

kaava 35

joka eroaa laakeasta Minkowskin metriikalla $\eta_{\mu\nu}$ varustetun avaruusajan ominaisaikavälistä

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

kaava 36

termin $\kappa h_{\mu\nu}(x)$ osalta. Uusi termi esittää poikkeamia laakeaan avaruuteen, jota Minkowskin metriikka $\eta_{\mu\nu}$ kuvaa.

Massa siis muuttaa avaruusaikaa kaareuttaen sen geometriaa. Nyt massahiukkasten kaartuva ratakäyrä muiden massojen läheisyydessä voidaan selittää vapaalla pudotuksella pitkin suorimpia mahdollisia ratoja — geodeeseja — kaarevassa geometriassa.

C.3.1 Metrinen tensori $g_{\mu\nu}(x)$

Määritellään nyt yleinen *metrinen tensori* eli *metriikka*

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x)$$

kaava 37

joka kuvaa kaarevan avaruusajan geometriaa. Viivaelementti tässä avaruudessa on muotoa.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

kaava 38

viivaelementti

Esimerkiksi staattisen, pallosymmetrisen massakappaleen ympäristössä metriikka $g_{\mu\nu}(x)$ saa ns. *Schwarzschildin ratkaisun*⁴ muodon

$$g_{\mu\nu}^{[Schwarzschild]} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - 2GM/r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Schwarzschildin ratkaisu

kaava 39

Tällöin infinitesimaalinen siirtymä dx pitkin x-akselia omaa pituuden $\sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} dx$, joka selvästi lähestyy dx :tä, kun $r \rightarrow \infty$. Schwarzschildin geometria on siis *asymptoottisesti laakea*. Lähellä massakappaletta avaruusajan geometrian kaareutuminen kuitenkin aiheuttaa infinitesimaaliseen siirtymään liittyvän pituuden lyhenemisen. Schwarzschildin ratkaisu kuvaa hyvin esimerkiksi Auringon tai mustan aukon luomaa avaruusajan geometriaa.

⁴Ks. esim. D'Inverno; luku 14.5. tai Ohanian & Ruffini; luku 7.4.

$g_{\mu\nu}(x)$ laakeassa
avaruusajassa

Viivaelementti (kaava 38) voi edustaa myös laakean avaruuden viivaelementtiä kaareissa koordinaateissa. Mikäli avaruusaika on todellakin laakea, voidaan metriikalla $g_{\mu\nu}(x)$ varustettu viivaelementti muuntaa Minkowskin metriikalla varustetuksi (kaava 36) sopivalla koordinaattimuunnoksella. Jos taas avaruusaika on aidosti kaareutunut, ei tällaista muunnosta ole.

heikon gravitaatio-
kentän vaatimus

Esiteltyä metriikan muotoa $g_{\mu\nu}(x)$ (kaava 37) käytettäessä on muistettava heikon gravitaatiokentän vaatimus. Tämä vaatimus juontaa juurensa tavastamme johtaa geometrinen teoria gravitaatiolle. Olemme koko ajan käyttäneet hyväksi oletusta heikosta gravitaatiokentästä johtaessamme teorian yhtälöitä. Näin ollen voimme käyttää metriikan jakamista laakeaan Minkowskin metriikkaan ja geometrian fluktuatioihin $\kappa h_{\mu\nu}(x)$ ainoastaan heikon gravitaatiokentän yhteydessä. Tarkastellaan seuraavaksi hieman kaarevan geometrian käsitettä sekä kaarevuuden havaitsemisen ongelmaa.

C.3.2 Sisäinen kaarevuus

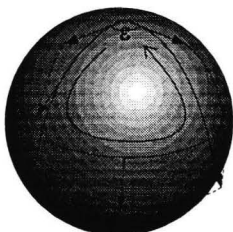
Sisäinen kaarevuus ilmaisee sitä avaruuden geometrasta rakennetta, jota voidaan havainnoida liikuttaessa tarkasteltavan avaruuden sisäpuolella. Näin esimerkiksi kaksikulotteinen olio pallopinnalla kykenee havaitsemaan pallopinnan sisäisen kaarevuuden.

affiini kaarevuus

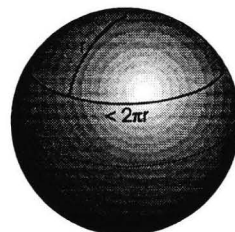
Avaruuden sisäinen kaarevuus voidaan havaita kahdella eri tavalla. Ensimmäinen on tarkkailla yhdensuuntaisten viivaelementtien tai vektorien käyttäytymistä avaruudessa. Vektorin yhdensuuntaissiirto suljetun polun ympäri tuo esille alueen kaarevuuden (Kuva 1), sillä kaarevan avaruuden ympäri yhdensuuntaissiirretty vektori eroaa alkuperäisestä vektorista lähtöpisteessä. Sama siirto yli laakean avaruuden tuo lähtöpisteeseen saman vektorin. Tällainen tapa lähestyä kaarevuutta käyttää hyväkseen avaruuden *affinia* rakennetta. Affinius ilmaisee eri pisteiden kytkentää antaen siten tietoa yhdensuuntaisuudesta avaruuden eri pisteissä.

metrinen kaarevuus

Toinen tapa tarkastella kaarevuutta on avaruuteen liitetyn metriikan tutkiminen. Tässä lähestymistavassa vertaillaan eri suuntaisia pituuksia mahdollisesti kaarevassa avaruudessa. Kaksikulotteinen esimerkki saadaan pallopinnalta, jolle piirretään r säteinen ympyrä. Mikäli ympyrän kehän pituus eroaa laakean avaruuden ympyrän kehän pituudesta $2\pi r$, on kyseinen avaruus kaareutunut (Kuva 2).

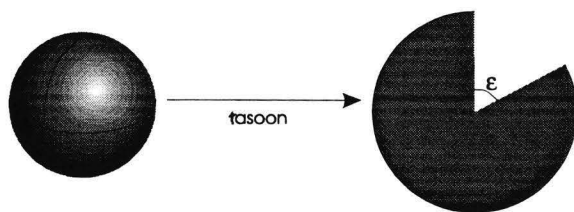


Kuva 1. Yhdensuuntaissiirrettävä vektori jonkin pallopinnan alueen ympäri on lähtöpisteeseensä palaava vektori erisuuntainen alkuperäisen vektorin kanssa. Tällainen kaarevuuden tutkiminen liittyy avaruuden affiiniin rakenteen tarkasteluun.



Kuva 2. Pallopinnalle piirretyn ympyrän kehän pituus on lyhyempi kuin $2\pi r$, missä r on säde ympyrän keskipisteestä kehälle. Laakealla pinnalla ympyrän kehän pituus on aina tasan $2\pi r$. Tällainen kaarevuuden tutkiminen liittyy avaruuden metrisen rakenteen tarkasteluun.

Kaarevan avaruuden levittäminen laakeaan avaruuteen tuottaa tietyn vajavuuden syntymisen operaation seurauksena. Kaksikulotteinen esimerkki on pallon puolikkaan levittäminen tasoon, jolloin syntyy ns. *vajavuuskulma* ϵ . Tämä vajavuuskulma on suoraan verrannollinen levitettävän avaruuden kaarevuuteen (Kuva 3). Vastaavia alueita syntyy levitettäessä planeetan pallokartta tasoon. Mikäli tällaisia 'valkoisia' alueita ei kartalla ole, on kartan mittasuhteita muutettu. Vajavuuskulmia käsitellään tarkemmin myöhemmässä, Reggen laskentaa käsittelevässä luvussa.



Kuva 3. Levitettäessä kaksiulotteinen pallokalotti laakeaan kaksiulotteiseen avaruuteen aukeaa pinta ns. *vajavuuskulman* ϵ verran. Vajavuuskulman suuruus on suoraan verrannollinen kaarevuuteen.

C.3.3 Ulkoinen kaarevuus

Ulkoinen kaarevuus ilmaisee tapaa jolla pinta kaartuu pinnan ulkopuolisiin dimensioihin. Kaksiulotteinen sylinteripinta sisältää ulkoista kaarevuutta, kuten voidaan helposti havaita tarkasteltaessa sylinteriä kolmessa ulottuvuudessa. Sisäinen kaarevuus sylinterillä on kuitenkin nolla, mikä saadaan selville suorittamalla kumpi tahansa sisäistä kaarevuutta ilmaiseva testi sylinteripinnalla. Emme kuitenkaan voi havaita neliulotteisen maailmankaikkeuden ulkoista kaarevuutta johtuen kyvyttömyydestämme siirtyä korkeampaan ulottuvuuteen kaikkeuden tarkastelua varten. Avaruusajan sisäisen kaarevuuden tutkiminen sen sijaan käy päinsä, kuten yllä havaittiin.

C.4 Johtopäätökset

Gravitaation kenttäyhtälöt voidaan lineaarisen approksimaation tapauksessa johtaa käyttämällä hyväksi analogiaa sähkömagneettisen vuorovaikutuksen kanssa. Tässä approksimaatiossa oletamme gravitaatiokentän lähteenä toimivan yksinomaan materian energia-liikemäärä-jännitystensorin jättäen huomiotta gravitaatiokentän vuorovaikutuksen itsensä kanssa.

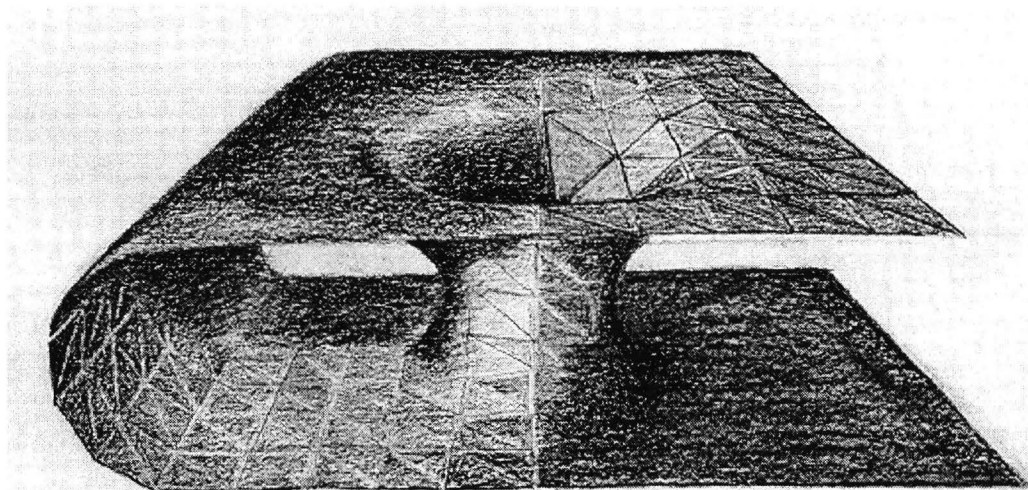
Alkaessamme hakea liikeyhtälöitä, olemme kuitenkin pakotettuja ottamaan huomioon niin gravitaatiokentän vuorovaikutuksen materiaan kuin gravitaatioenergian toimimisen gravitaation lähteenäkin. Tällöin gravitaation energia-liikemäärä-jännitystensori saadaan $T^{\mu\nu}$:n — materiaan liittyvä energia, liikemäärä ja jännitys sekä materian ja gravitaatiokentän vuorovaikutukseen liittyvä energia, liikemäärä ja jännitys — ja $t^{\mu\nu}$:n — puhtaan gravitaatiokentän energia, liikemäärä ja jännitys — summan muodossa (kaava 1). Lähteen muodonmuutosta seurasivat vääjäämättä epälineaariset termit teorian yhtälöihin.

Johdetusta liikeyhtälöstä Lagrangen mekaniikan piirteitä hyväksi käyttäen saatiin uusi määritelmä metriikalle, joka poikkeaa laakean avaruusajan Minkowskin metriikasta. Uusi metriikka antaa geometrisen tulkinnan gravitaatiolle, jossa laakea avaruusaika fluktuoi kaareuttaen avaruutta massakappaleiden läheisyydessä. Sekä kenttä- että liikeyhtälöiden johtamisessa apuna käytetty oletus heikosta gravitaatiokentästä pakottaa metriikan hajotelman $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x)$ käytön ainoastaan heikon gravitaatiokentän tapauksiin. Huolimatta tästä rajoituksesta olemme läpikäyneet merkittävän harppauksen laakeasta avaruusajasta gravitaation geometriseen rakenteeseen.

C.5 Lähteet

Alla ovat pääasialliset lähteet, joista tämän luvun tiedot on kerätty. Täydellinen lähdeluettelo löytyy tutkielman lopusta.

1. **D’Inverno**, Ray Introducing Einstein’s Relativity,
Oxford University Press, Oxford; 1995.
2. **Lehto**, Markku Yleisen Suhteellisuusteorian Jatkokurssi,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1996.
3. **Misner**, Charles W.
Thorne, Kip S.
Wheeler, John A. Gravitation,
W.H. Freeman and Company, New York; 1973.
4. **Ohanian**, Hans
Ruffini, Remo Gravitation and Spacetime, 2nd Ed.,
W.W. Norton & Company Inc., New York; 1994.
5. **Repo**, Pasi Einsteinin Kenttäyhtälöiden Lineaarinen Approk-
simaatio, Gravitaatioaallot ja Niiden
Havaitseminen Kaksoispulsarin PSR 1913+16
Avulla,
Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu, Jyväskylän Yliopisto; 1995.



D. Reggen laskenta

Reggen laskennalla voidaan rakentaa kaarevia avaruuksia laakeista osista. Näin ollen Reggen laskenta tarjoaa oivan apuvälineen avaruusajan approksimointiin yleisessä suhteellisuusteoriassa. Toisaalta taas Reggen laskennan avaruusajan paloittelu voi tarjota mallin avaruusajan lyhyiden etäisyyksien oikeasta rakenteesta — avaruusaikavaahdosta. Reggen laskennan loi italialainen fyysikko Tullio Regge vuonna 1961. Tuolloisessa julkaisussaan “General relativity without coordinates” hän esitti käsitteen suurimmaksi osaksi laakeasta avaruudesta, jonka kaarevuus sijoittui ainoastaan tietyille rajatuille alueille. Avaruusajan muotoileminen laakeista osista herätti kiinnostusta, sillä sileään kaarevaan avaruuteen liittyvät Einsteinin yhtälöt eivät suinkaan olleet helppoja ratkaista. Reggen esittämä paloista rakennettu avaruusaika antaa keinon yksinkertaistaa yhtälöiden ratkaisua.

Laakeaan avaruusaikaan on sovellettu sekä diskreettejä mittateorioiden approksimaatioita että hila-mittateorioita. Nämä teoriat eivät kuitenkaan ole luonteeltaan geometrisia. Tällaiset diskreetit teoriat on määritelty epädynaamisille laakeille hiloille, joilla ei ole yhteyttä taustalla olevaan avaruusaikamonistoon. Reggen laskenta tuo esiin geometrisen vaihtoehdon antaen mahdollisuuden gravitaation geometriseen kvanttittamiseen. Luomme tässä luvussa peruskatsauksen Reggen laskentaan sekä tapaan rakentaa avaruusaikaa Reggen laskennan perusosasista. Tarkoituksena on hakea ajatuksia kvanttigravitaatiota käsittelevää lukua varten eikä suinkaan antaa tarkkaa kuvausta Reggen laskennasta.

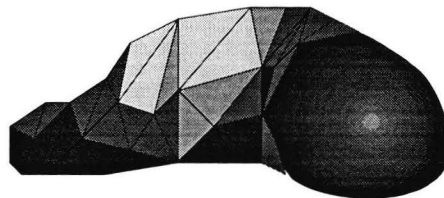
D.1 Reggen avaruusajan rakennusosaset

Reggen laskennassa avaruusaikaa ei kuvata sileällä, jatkuvalla monistolla vaan diskreeteillä ‘rakennuspalikoilla’. Rakennuspalikoiden esittelemisestä etenemme tapaan, jolla sileä avaruusaika muutetaan Reggen laskennan vaatimaan muotoon.

D.1.1 Sileän kaarevan pinnan approksimoiminen euklidisilla palasilla — simplekseillä

Reggen laskennassa *simpleksi* on laakea euklidinen geometrinen pinta, kuten esimerkiksi piste, viiva, kolmikulmio, nelitahokas tai muu useampiulotteinen objekti. Näistä simplekseistä voidaan rakentaa simpleksisiä avaruuksia alkuperäisen avaruuden rakennetta approksimoiden. Uusi avaruus rakennetaan liittämällä simpleksejä kiinni toisiinsa. Kaksiulotteinen esimerkki

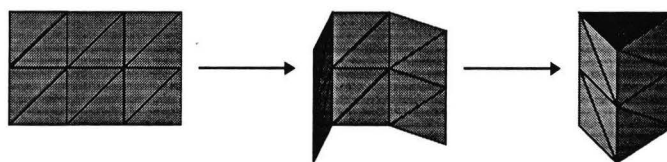
tällaisesta avaruudesta on kolmikulmioista rakennettu pinta (Kuva 1). Vastaavasti kolmiulotteisen esimerkin simpleksisestä avaruudesta antaa nelitahokkaista luotu avaruus.



Kuva 1. Kaksiulotteisen avaruuden simpleksinen approksimaatio. Etualalla sileä pinta muuttuu taka-alalla kolmikulmioista kootuksi simpleksiseksi pinnaksi.

D.1.2 Simpleksin reuna

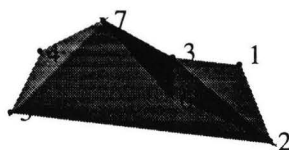
Simpleksin reuna on yksittäistä simpleksiä ympäröivä reuna. Simpleksisen avaruuden topologia ei riipu simpleksien reunojen pituudesta l_i vaan niiden kiinnitystavasta. Näin ollen esimerkiksi tason topologian omaava kolmioiden verkko saadaan topologialtaan sylinteriksi muuttamalla simpleksien reunojen kiinnitystä (Kuva 2) eikä reunojen pituutta.



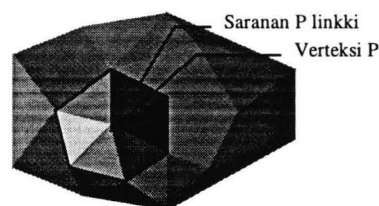
Kuva 2. Kolmioista rakennetun tason topologia saadaan tasotopologiasta sylinteritopologiaksi muuttamalla simpleksien reunojen kiinnitystä.

D.1.3 Sarana

Sarana on simpleksien muodostamassa n -ulotteisessa avaruudessa sellainen $(n-2)$ -ulotteinen simpleksi, jonka jokaisella puolella on n -ulotteinen simpleksi. Näin ollen kaksiulotteisessa tapauksessa sarana on simpleksien ympäröimä piste tai *verteksi*¹ (Kuva 3). Kolmiulotteisessa tapauksessa sarana on reuna, ja edelleen nelikulotteisessa avaruudessa sarana on kolmikulmion muotoinen.



Kuva 3. Kuvassa simpleksisessä kaksiulotteisessa pinnassa saranan määritelmän täyttävät 6 ja 7 (saranan 7 takana on myös simpleksi). Vastaavasti pisteet 1-5 eivät täytä vaatimusta saranan jokaisella puolella olevista simplekseistä.



Kuva 4. Saranan linkiksi sanotaan saman saranan jakavien perussimpleksien reunaa, jonka on oltava topologisesti ekvivalentti simpleksista avaruutta dimensioltaan yhtä pienempään avaruuteen kuuluvan pallon kanssa. Kuvassa on kaksiulotteisen simpleksipinnan erään saranan P linkki.

Mikäli tarkasteltava simpleksisen avaruus sisältää kaarevuutta, keskittyy tämä kaarevuus saranoihiin. Kaikki muut simpleksisen avaruuden osat ovat laakeita; reunat mukaan lukien. Reunojen laakeus voi olla aluksi hämäävää, mutta voidaan todistaa esimerkiksi vektorin yhdensuuntaissiirrolla reunan yli, aidosti yhtään saranaa kiertämättä. Tällöin palaava vektori vastaa täysin alkuperäistä vektoria.

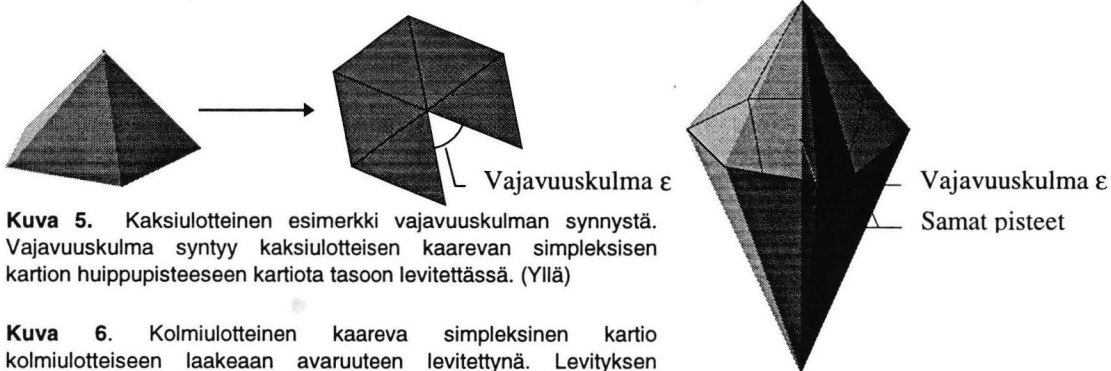
¹Verteksi on simpleksin reunalla sijaitseva 'kulmapiste'.

D.1.4 Linkki

Saman saranan jakavien simpleksien reunaa sanotaan *saranan linkiksi*, jonka on oltava topologisesti ekvivalentti simpleksistä avaruutta dimensioltaan yhtä pienempään avaruuteen kuuluvan pallon kanssa. Näin ollen kaksiulotteisen simpleksipinnan jonkin saranan linkki on yksiulotteinen saranan ympäri kiertävä polku. Tämä polku on topologisesti ekvivalentti ympyrän kanssa (Kuva 4). Edelleen kolmiulotteisessa avaruudessa yksiulotteisen viivasaranan linkki on saranaa ympäröivien simpleksien ulkopinnoista muodostuva kaksiulotteinen pinta. Vastaavasti on tämä pinta topologisesti ekvivalentti pallopinnan kanssa.

D.1.5 Vajavuuskulma

Vajavuuskulma syntyy simpleksisen avaruuden saranan kohdalle, kun simplekseistä rakennettu kaareva avaruus levitetään kokonaan auki samanulotteiseen laakeaan avaruuteen. Näin käy esimerkiksi kolmioista rakennetulle kartiopinnan approksimaatiolle (Kuva 5), missä vajavuuskulman suuruus on 2π miinus saranassa tapaavien simpleksien keskuskulma. Vajavuuskulma on sitä suurempi mitä kaarevampi levitettävä avaruus on. Näin ollen terävähuippuinen kartio tuottaa suuremman vajavuuskulman kuin matala kartio. Vajavuuskulma voi kaarevuuden luonteesta riippuen olla positiivinen (positiivisesti kaareutunut avaruus), negatiivinen (negatiivisesti kaareutunut avaruus) tai nolla (laakea euklidinen avaruus). Kaarevuutta simpleksisessä avaruudessa käsitellään enemmän myöhemmässä luvussa D.2.

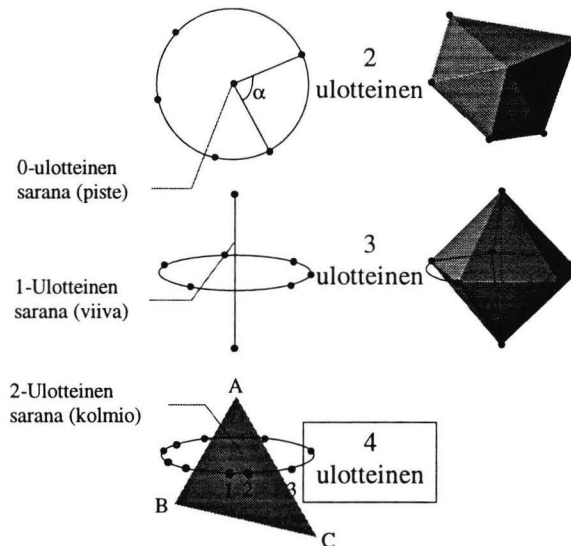


Kuva 5. Kaksiulotteinen esimerkki vajavuuskulman synnystä. Vajavuuskulma syntyy kaksiulotteisen kaarevan simpleksisen kartion huippupisteeseen kartiota tasoon levitettäessä. (Yllä)

Kuva 6. Kolmiulotteinen kaareva simpleksinen kartio kolmiulotteiseen laakeaan avaruuteen levitettynä. Levityksen ansiosta mahdollinen kaarevuus näkyy vajavuuskulmana ϵ . (Oikealla)

D.1.6 Perusosasten rakenne

Kaksiulotteista geometriaa yleistäen saadaan useampiulotteisia kaarevia avaruuksia (monistoja) rakennettua laakeista simplekseistä. Kuva 7 valaisee useampiulotteisten simpleksisten avaruuksien rakennusosasia sekä antaa niihin liittyvät saranat. Kolmiulotteisessa tapauksessa nelitahokkaat tapaavat viivasaranassa (Kuva 7 keskellä), joka mahdollisen kaarevuuden mukanaollessa aukeaa levitettäessä laakeaan kolmeen ulottuvuuteen (Kuva 6). Neliulotteinen tapaus on vaikea kuvata tarkasti, joten tyydymme ainoastaan kuvaamaan tapauksen luonnetta (Kuva 7 vasen alareuna). Nyt ABC_{12} muodostavat yhden simpleksin; ABC_{23} muodostavat seuraavan; ja niin edelleen. Kahden edelläkuvatun simpleksin välisenä reunana toimii laakea nelitahokas ABC_2 ja siitä seuraavana reunana kierrettäessä oikealle toimii laakea nelitahokas ABC_3 . Näiden reunojen väliin jää (vrt kaksiulotteinen tapaus) hyperdihedraalikulma α , jonka suuruuden määräävät täysin reunojen väliin jäävän simpleksin ABC_{23} reunojen pituudet. Mikäli neliulotteinen avaruus on kaareutunut eivät kaikki simpleksirykelmän saranan ABC liittyvät hyperdihedraalikulmat α ; summaudu 2π :ksi. Tällöin levitettäessä kyseinen simpleksirykelmä laakeaan neliulotteiseen avaruuteen aukeaa rykelmän saranan ABC kohdalle vajavuuskulma ϵ .



Kuva 7. Simpleksisten avaruuksien rakennusosasia saranoineen. Kaksiulotteisessa tapauksessa perussimpleksinä toimii kolmikulmio, joista koko avaruus voidaan rakentaa. Kolmikulmioiden keskelle muodostuu 0-ulotteinen piste eli sarana. Kolmiulotteisessa tapauksessa perussimpleksinä toimii nelitahokas, jotka kuvan tapaan luovat viivasaranan keskinäiseen liittymiskohtaansa. Neliulotteisessa tapauksessa perussimpleksi muodostuu esimerkiksi verteksin ABC12 välille piirrettävien reunojen sisälle jäävästä laakeasta avaruudesta. Neliulotteisessa tapauksessa kaarevuus keskittyy kolmikulmion muotoisille saranoille.

(Wheeler, Thorne, Misner: Gravitation)

D.2 Kaarevuus

Approksimoidessamme sileää kaarevaa avaruutta laakeilla simplekseillä ajamme kyseisen tilan kaarevuuden pois yksittäisten simpleksien sisältä; jokainen simpleksi itsessään on laakea ja euklidinen. Simpleksin sisuksen lisäksi laakeus ulottuu myös simpleksin reunaan. Tämä selviää vektorin yhdensuuntaissiirrolla reunojen yli. Jos vektoria yhdensuuntaissiirretään yli simpleksien reunojen aidosti yhtään saranaa kiertämättä on vektori lähtöpisteeseensä tuotaessa samansuuntainen kuin lähtiessäänkin. Ainoastaan yhdensuuntaissiirrettäessä vektoria jonkin saranan ympäri kokee vektori muutoksen suunnassaan. Saranan kiertänyt vektori poikkeaa lähtösunnastaan kyseisen saranan vajavuuskulman ϵ verran.

Mikäli näin kierretään useampi sarana kaksiulotteisessa simpleksisessä avaruudessa saadaan vektorin suuntakulman muutokseksi kaikkien kierrettyjen saranoiden vajavuuskulmien summa

$$\epsilon = \sum_{\text{alue}} \epsilon_i$$

kaava 1

Tämä vektorin yhdensuuntaissiirto saranan ympäri voidaan ilmaista operaationa

$$\vec{v}' = R\vec{v}$$

kaava 2

missä muunnosoperaattori R on

$$R = \left(e^{\epsilon U} \right)_{kl}$$

kaava 3

ja edelleen matriisi U_{kl} on

$$U_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

kaava 4

Kolmessa ulottuvuudessa saranana toimii yksiulotteinen reuna (pituus ℓ), jolloin tietyllä *3-ulotteinen* alueella olevien saranoiden osuus alueen kaarevuuteen on²

$$\mathcal{E} = \sum_{\text{alue}} l_i \mathcal{E}_i$$

kaava 5

Yhdensuuntaissiirrettäessä vektoria tällaisen saranan ympäri muuntuu kyseinen vektori kuten kaksiulotteisessakin tapauksessa. Nyt tosin muunnosta generoiva matriisi on

$$U_{kl} = \frac{1}{l} \epsilon_{klm} l^m$$

kaava 6

missä l on saranan pituus, l^m kyseinen sarana, ja ϵ_{klm} on *Levi-Civita symboli* kolmessa ulottuvuudessa.

Neljässä ulottuvuudessa saranana toimii kaksiulotteinen kolmikulmio (ala A), jolloin tietyllä alueella olevien saranoiden osuus alueen kaarevuuteen on³ *4-ulotteinen*

$$\mathcal{E} = \sum_{\text{alue}} A_i \mathcal{E}_i$$

kaava 7

Yhdensuuntaissiirrettäessä vektoria tällaisen saranana toimivan kolmikulmion ympäri muuntuu kyseinen vektori kuten aiemminkin. Nyt tosin muunnosta generoiva matriisi on

$$U_{\mu\nu}^{(ab)} = \frac{1}{2A} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} l_a^\rho l_b^\sigma$$

kaava 8

missä A on saranan (ab) pinta-ala, l_a^ρ , l_b^σ ovat saranana toimivan kolmikulmion (ab) virittävät reunat ja $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ on Levi-Civita symboli neljässä ulottuvuudessa.

Vapaat hiukkaset seuraavat suoria viivoja simpleksien sisällä johtuen simpleksien laakeasta geometriasta. Massakappaleiden lähellä hiukkasten radat kaartuvat johtuen simpleksien kiinnittymisestä toisiinsa. Näin esimerkiksi Schwarzschildin⁴ ratkaisun simpleksisessä approksimaatiossa hiukkaset seuraavat polygonaalaisia approksimaatioita ympyräradoille⁵.

Näin ollen Reggen laskenta approksimoi sileästi kaareutunutta n -ulotteista avaruutta (monistoa) n -ulotteisten simpleksien avulla. Tässä simpleksisessä n -ulotteisessa avaruudessa kaarevuus on sijoittunut $(n-2)$ -ulotteisille saranoille. Kaksiulotteisessa tapauksessa sarana on piste, kolmiulotteisessa tapauksessa viiva ja edelleen neliulotteisessa avaruusajassa tämä sarana on kolmikulmion muotoinen.

D.3 Reggen kehikon rakenne

Reggen simpleksisen avaruuden geometrian määräävät täysin simpleksien reunojen pituudet. Edelleen avaruuden rakenteeseen liittyvät simpleksien väliset kiinnitykset, jotka

²Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation.

³Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation.

⁴Avaruusajan geometrian ratkaisu staattiselle, pallosymmetriselle massakappaleelle, joka approksimoi hyvin esimerkiksi Aurinkoa.

⁵Williams & Ellis; 1980.

määräävät avaruuden topologisen luonteen. Näin ollen siis reunojen kiinnittyminen toisiinsa kertoo mistä päästään mihin, kun taas reunojen pituudet antavat tietoa reitin kaarevuudesta.

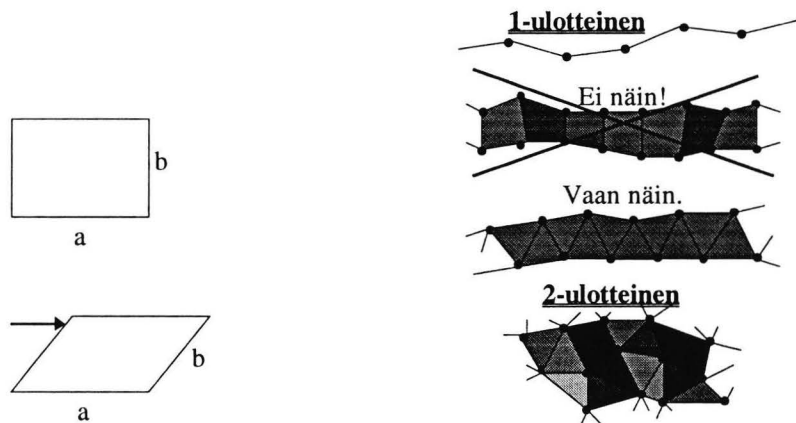
Tietyn tilan täyttäminen simplekseillä eli siis kyseisen avaruuden simpleksifiointi vaatii kulloisenkin ongelman luonteen käsittämistä. Symmetriat ovat selvä merkki tietyntyyppisen simpleksifioinnin hyödyllisyydestä, kuten myös mahdollinen kaarevuus. Edelleen on kiinnitettävä huomiota käytettävien simpleksien muotoon, sillä ei ole järkeä rakentaa kaksiulotteista avaruutta pitkistä kolmioneuloista tai kolmiulotteista avaruutta littanoista nelitahokkaista. Eri ulottuvuuksien on oltava toisiinsa nähden verrannollisia, jolloin esimerkiksi tiettyä siirtymää aika-akselilla voidaan verrata johonkin tila-akselin siirtymään.

D.3.1 Yhdestä kahteen ulottuvuuteen

Vaikka avaruusajan ulottuvuus onkin neljä, on usein hyödyllistä yksinkertaistaa tarkastelua vähentämällä 'testiavaruuden' ulottuvuuksia. Reggen kehikon luominen voidaan aloittaa yksiulotteisesta mallista laajentamalla tarvittaessa useampiin ulottuvuuksiin.

Yksiulotteisessa mallissa otamme halutun määrän hilapisteitä, jotka sitten yhdistämme yksiulotteisilla perussimplekseillä — viivoilla. Selkeästi emme voi yksiulotteisessa tapauksessa puhua sisäisestä kaarevuudesta⁶; emmekä saranoista, joiden ulottuvuudeksi tulisi saranan määritelmän mukaan mieletön -1. Yksiulotteisen mallin tarkoituksenmukaisuutta ei kuitenkaan pidä väheksyä. Malli tarjoaa helpon tavan lähestyä simpleksisen avaruuden kvantittamisen ongelmaa, ja edelleen maailmankaikkeutemme voi hyvinkin kvanttimekaanisessa mittakaavassa olla yksiulotteinen (ks. gravitaation kvantittamista käsittelevä luku).

*yksiulotteinen
Reggen kehikko*



Kuva 8. Mikäli kaksiulotteinen Reggen kehikko rakennetaan suorakaiteista ei kehikon rakenne ole täysin määrätty pelkästään reunojen pituuksien avulla. Yllä molempien suorakaiteiden reunanpituudet ovat yhtä pitkiä vaikka rakenne onkin erilainen. Sama määrittelemisen epätarkkuus sisältyy myös ylempiin polygoneihin.

Kuva 9. Reggen kehikon laajentaminen yksiulotteisesta janamallista kaksiulotteiseen tasoon. Rakenteen kiinteyden vuoksi kaksiulotteisen simpleksisen avaruuden perussimpleksiksi joudutaan ottamaan kolmikulmio ylempien polygonien sijaan (ks. esimerkki suorakaiteesta vasemmalla).

Laajennettaessa rakennetta yksiulotteisesta kaksiulotteiseen on huomattava kehikon perussimpleksien muodon vaikutus kehikon rakenteen kiinteyteen. Mikäli kaksiulotteisessa mallissa käytetään perussimplekseinä suorakaiteita, on seurauksena rakenteen määrittelyn epätarkkuus. Suorakaiteiden tapauksessa perussimpleksi voi taipua samojen reunan pituuksien alaisena (Kuva 8). Toisaalta voisimme määrittellä simpleksisen avaruuden rakenteen antamalla myös reunojen välisten kulmien suuruuden, mutta tällöin menettäisimme Reggen laskennan yksinkertaisuuden. Reggen laskennan perusidean mukaisesti simpleksisen avaruuden rakenteen määrittelemiseksi riittävät vain ja ainoastaan simpleksien reunojen pituudet. Suorakaiteiden tapauksessa joutuisimme etsimään jatkumoteorian kenttäyhtälöiden diskreettien vastikkeiden — Reggen yhtälöiden⁷ — lisäksi uudet yhtälöt määrittämään suorakaiteiden muodon kiinnittäviä kulmia.

⁶Ks. lineaarista approksimaatiota käsittelevän luvun loppuosa.

⁷Mikäli kaksiulotteinen Reggen kehikko todellakin rakennettaisiin suunnikkaista, eivät kenttäyhtälöinä toimivat Reggen yhtälökään pysyisi samoina.

*kaksiulotteinen
Reggen kehikko*

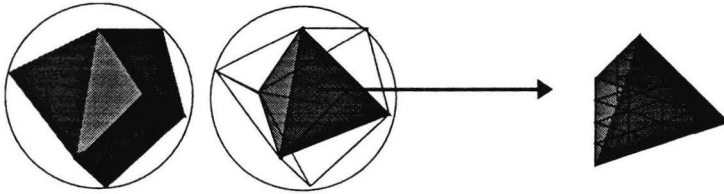
Kasvattamalla polygonisimpleksin astetta esimerkiksi viisikulmioon tai ylempiin polygoneihin, syntyy suunnikasta vastaava ongelma simpleksin rakenteen kiinteydessä. Kolmikulmion tapauksessa vastaavaa ongelmaa ei esiinny. Kolmikulmion rakenne saadaan määritettyä kiinteästi pelkästään kolmella reunan pituudella. Pysyäksemme alkuperäisessä suunnitelmassa Reggen kehikon dynaamisten muuttujien määrän suhteen otamme kaksiulotteisen Reggen kehikon perusrakenteeksi kolmikulmion.

D.3.2 Kahdesta kolmeen ulottuvuuteen

Suuri osa gravitaatioon liittyvistä ongelmista koskettaa likimääräisesti pallomaisia kappaleita, kuten tähtiä ja mustia aukkoja. Tämän vuoksi yleistyksenä kahdesta ulottuvuudesta kolmeen tarkastelemme pallomaisen topologian omaavaa kolmiulotteista avaruutta. Sileän pallomaisen avaruuden jakaminen laakeisiin simplekseihin voidaan suorittaa laatikko- tai pallomallilla, joista ensin perehdymme laatikkomalliin.

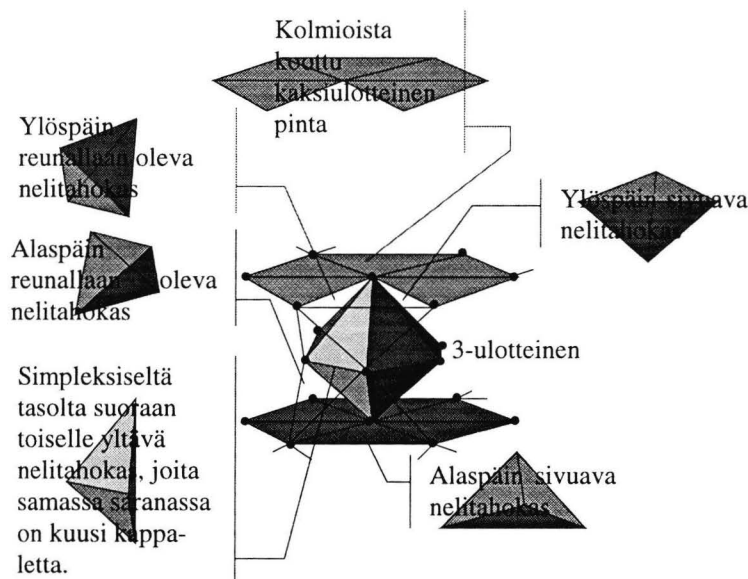
D.3.2.1 Laatikkomalli

Aloitamme jakamalla kolmiulotteisen pallon viiteen identtiseen nelitahokkaaseen ja edelleen jakamalla nämä nelitahokkaat pienempiin simpleksisiin osiin. Valitsemme nyt yhden näistä nelitahokkaista sekä nimeämme yhden tämän nelitahokkaan vertekseistä huipuksi ja sen vastakkaisen pinnan pohjaksi. Seuraavaksi jaamme pohjan kolmikulmioihin saadaksemme simpleksisen kaksiulotteisen pinnan (Kuva 10). Tämän jälkeen jaamme koko nelitahokkaan tällaisiin simpleksisiin pintoihin tasaisin välein pohjasta huippuun. Nyt täytämme pintojen väliin jäävän kolmiulotteisen avaruuden nelitahokkaista muodostuvilla simplekseillä (Kuva 11). Tämä kaikki toistetaan jokaiselle pallon viidestä nelitahokkaasta, jonka jälkeen ongelmaksi jääkin sovittaa simpleksiset nelitahokkaat yhteen. Mikäli pallomaisen avaruuden nelitahokkaiden määrä on 5, 16 tai 600, ei yhteensovituksessa synny ongelmaa⁸.



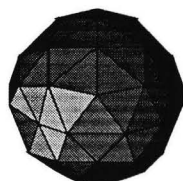
Kuva 10. Pallomaisen kolmiulotteisen pinnan simpleksifoinnissa laatikkomallilla jaetaan palloavaruus viiteen nelitahokkaaseen. Valitaan näistä nelitahokkaista yksi, ja edelleen yksi tämän nelitahokkaan vertekseistä huipuksi. Jaetaan seuraavaksi vastakkainen pinta (pohja) simpleksisiin kolmioihin. Kyseisen simpleksisen pinnan päälle rakennetaan toinen samanlainen hieman pienempi pinta ja niin edelleen tasaisin välimatkoin toistaen kunnes saavutaan kyseisen nelitahokkaan huipulle (kuvan jaossa välimatka on vain viitteellinen). Tämän jälkeen näiden simpleksisten pintojen väliin jäävä kolmiulotteinen avaruus täytetään nelitahokkailta (Kuva 11 alla). Sama toistetaan kaikille viidelle pallon nelitahokkaalle.

⁸Nämä nelitahokkaat voidaan muodostaa 5, 8 ja 120 verteksin avulla. Coxeter (1963).



Kuva 11. Reggen kehikko kolmiulotteisessa laakeassa avaruudessa saadaan jakamalla avaruus kolmiokulmioista rakennettuihin simpleksisiin tasoihin. Näillä tasoilla olevien kolmikulmioiden kulmapisteistä (vertekseistä) vedetään viivat alemman ja ylemmän tason vastaavaan kulmapisteeseen. Tämän jälkeen tasojen väliin asetetaan 'apupisteitä' puoleenväliin avaruuden jakavia tasoja siten, että ne asettuvat ylä- ja alapuolellaan olevien kolmikulmioiden keskelle. Nyt yhdistetään 'apupisteet' saman tason 'apupisteisiin' sekä lähimpien kolmikulmioiden kulmapisteisiin ylä- ja alapuolisilla tasoilla.

D.3.2.2 Pallomalli



Kuva 12. Buckminster-Fullerin geodeesikupoli.

Aloitamme pallon simpleksifioinnin jakamalla sen sisäkkäisiin pallopintoihin, jotka edelleen on jaettu kolmikulmioihin ns. Buckminster-Fullerin geodeesikupolin tavoin (Kuva 12). Jaossa on muistettava kolmikulmioiden määrän rajoitukset yhtä verteksiä kohden johtuen pallotopologian vaatimuksesta. Laakea kaksikulotteinen taso voidaan koota kolmiosisimplekseistä siten, että tavallisen verteksin ympärille sijoitetaan kuusi kolmikulmiota. Mikäli tällaisesta tasosta halutaan muodostaa pallopinta on mukaan sisällytettävä ainakin kaksitoista kappaletta viiden kolmikulmion ympäröimiä verteksejä⁹. Tämä voidaan nähdä Eulerin¹⁰ relaatiosta simpleksiselle pallopinnalle, joka liittyy yhteen kolmikulmioiden lukumäärän K , kolmikulmioiden reunojen lukumäärän R ja verteksin lukumäärän V seuraavasti

$$K - R + V = 2$$

kaava 9

jota käyttäen voimme laskea viiden kolmikulmion verteksin määrän kupolissa alla olevan taulukon mukaisesti. Sisäkkäisten geodeesikupoleiden väliin jäävän tilan täytämme edellä kuvatulla tavalla (Kuva 11).

⁹Ks. esim. Rocek & Williams: Introduction to Quantum Regge Calculus; tai Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation.

¹⁰ Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation, luku 42.6.

5 kolmikulmion verteksejä	n
6 kolmikulmion verteksejä	$V-n$
kolmikulmiota	$K = (V-n)(6/3) + n(5/3)$
kolmikulmioiden reunoja	$R = (V-n)(6/2) + n(5/2)$
verteksiä	$V = (V-n)(6/6) + n$
Eulerin relaatiosta	$2 = K - R + V = n/6$
saadaan siis	$n = 12$

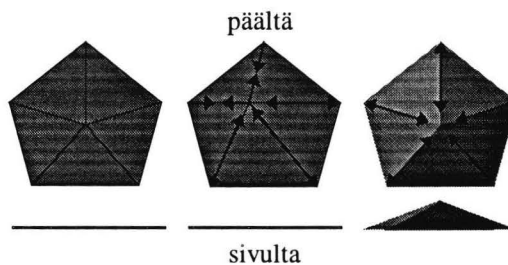
Taulukko 1. Buckminsterin-Fullerin geodeesikupoli sisältää vähintään 12 kappaletta viiden kolmikulmion verteksejä loppujen kuuden kolmikulmion verteksen seassa. Mikäli näin ei ole, ei kupolin topologia sulkeudu pallopinnaksi. Pallopinnalla olevien reunojen, kolmikulmioiden ja verteksen lukumäärän kiinnittää yhteen Eulerin relaatio (kaava 9).

D.3.3 Kolmesta neljään ulottuvuuteen

Yleistys kolmesta ulottuvuudesta neljään sisältää luonnollisesti ylimääräisten verteksen liittämistä kolmiulotteisen geometrian ulkopuolelle. Tämä suoritetaan ottamalla identtiset kolmigeometriat ja yhdistämällä edelleen vastaavat pisteet geometrioiden välillä. Noin puoleen väliin kolmigeometrioita asetetaan kolmigeometrioiden vertekseille duaaliset verteksit. Nämä verteksit yhdistetään saman geometrian lähimpiin pisteisiin sekä ylä- ja alapuolisen kolmigeometrian lähimpiin pisteisiin.

D.4 Reunan pituuksista geometriaan

Vaikkakin simpleksien reunojen pituuksilla ei ole mitään vaikutusta kyseisen avaruuden topologiaan, määräävät nämä pituudet vierekkäisten verteksen etäisyyden ollen siten analogiana jatkumoteorian metriikoille. Tämä voidaan ymmärtää helposti ajattelemalla kaksiulotteista simpleksistä tasoa (Kuva 13). Mikäli pidennämme ja lyhennämme juuri sopivasti simpleksien reunoja, siirtyy simpleksirykelmän sarana (Kuva 13 keskellä). Jos taas pidämme kyseisen saranan linkin pituuden vakiona ja kasvatamme muita reunan pituuksia kaareutuu simpleksinen avaruutemme (Kuva 13 oikealla).



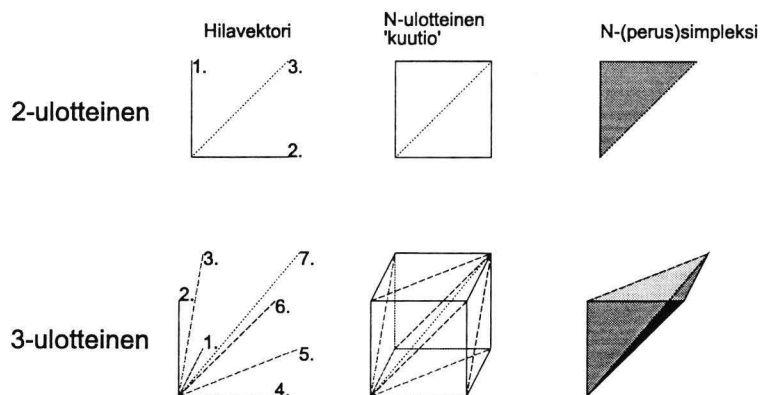
Kuva 13. Muuttamalla simpleksien reunojen pituuksia muuttuu kyseisen simpleksisen avaruuden geometria mutta ei topologia. On huomattava, että simpleksinen avaruus voidaan pitää laakeana reunojen pituuksia sopivasti muutettaessa (keskellä). Tällöin verteksi ainoastaan siirtyy laakeassa avaruudessa. Kuitenkin pidettäessä simpleksien kulmat vakioina aiheuttaa reunojen pituuksien muuttaminen väkisin simpleksisen avaruuden kaareutumisen (oikealla).

D.4.1 Metriikka ja reunanpituudet

Neliulotteisen simpleksisen avaruuden geometria ja siten myös kaarevuus saadaan suoraan Reggen kehikon reunojen pituuksista, jotka teorian dynaamisina muuttujina vastaavat jatkumoteorian metriikkaa. Vastaavuudessa syntyy kuitenkin eroavaisuuksia metriikan riippumattomien komponenttien ja reunan pituuksien määrän suhteen tarkasteltavan avaruuden

metriikan ja reunanpituuksien vastaavuudet

pistettä kohden. Tämä nähdään helposti rakentamalla Reggen kehikko alla olevan kuvan (Kuva 14) esittämällä tavalla. Kuvan 2-ulotteista neliötä 'kopioidaan' kahteen suuntaan, jolloin saadaan kaksiulotteinen simpleksinen avaruus. Tämän avaruuden perussimpleksinä on alla olevan kuvan oikean puoleinen kolmikulmio. Vastaavasti kolmiulotteinen simpleksinen avaruus saadaan kopioimalla kuvan kuutiota kolmeen suuntaan. Kolmiulotteisen simpleksisen avaruuden perusosaseksi syntyy näin tuttu nelitahokas.



Kuva 14. Jatkumoteoriassa metriikka liittää jokaiseen avaruuden pisteeseen tietyn määrän toisistaan riippumattomia reaalitykijöitä, jotka antavat tietoa avaruuden geometriasta kyseisen pisteen läheisyydessä. Simpleksien reunojen pituudet antavat vastaavasti tietoa simpleksisen avaruuden geometriasta. Yllä on kuvattu kaksi- ja kolmiulotteinen esimerkki yhteen pisteeseen liittyvistä reunan pituuksista sekä näin muodostuvista perussimplekseistä. Kahdessa ulottuvuudessa yhteen pisteeseen liittyy kolme, kolmessa ulottuvuudessa seitsemän ja neljässä ulottuvuudessa viisitoista linkin pituutta.

Yllä kuvatun simpleksisen hilan yleistys neljään ulottuvuuteen on hieman hankalampi piirtää, joten turvaudumme binäärisyyteen hilapisteistä. Tässä esityksessä 0 sijaitsee origossa ja 1 kyseisen akselin suunnassa etäisyydellä yksi. Nyt nelikulotteinen Reggen kehikko muodostetaan kopioimalla saatua nelikulotteista hyperkuutiota neljään suuntaan. Alla olevassa taulukossa (Taulukko 2) on asian selkeyttämiseksi annettu myös kaksi- ja kolmiulotteiset hilapisteet.

Ulottuvuus	Ulkosyrjät	Sivu-diagonaalit	Kulma-diagonaalit	Hyperkulma-diagonaalit
	$l = 1$	$l = \sqrt{2}$	$l = \sqrt{3}$	$l = 2$
2	1 (0,1) 2 (1,0)	3 (1,1)		
3	1 (0,0,1) 2 (0,1,0) 3 (1,0,0)	3 (0,1,1) 5 (1,0,1) 6 (1,1,0)	7 (1,1,1)	
4	1 (0,0,0,1) 2 (0,0,1,0) 4 (0,1,0,0) 8 (1,0,0,0)	3 (0,0,1,1) 5 (0,1,0,1) 6 (0,1,1,0) 9 (1,0,0,1) 10 (1,0,1,0) 12 (1,1,0,0)	7 (0,1,1,1) 11 (1,0,1,1) 13 (1,1,0,1) 14 (1,1,1,0)	15 (1,1,1,1)

Taulukko 2. Reggen hilan muodostavat vektorit kahdessa, kolmessa ja neljässä ulottuvuudessa (vertaa Kuva 14).

vastaavuus
2:ssa ja 3:ssa
ulottuvuudessa

Kaksiulotteisissa tapauksissa metriikalla on kolme riippumatonta komponenttia, kuten myös kaksiulotteisen simpleksisen avaruuden jokaisella pisteellä (Kuva 14). Kuitenkin jo kolmessa ulottuvuudessa syntyy ero metriikan ja reunan pituuksien määrän välille. Kolmessa ulottuvuudessa simpleksisen avaruuden jokaiseen pisteeseen liitetään seitsemän reunan pituutta. Kolmiulotteisessa Reggen kehikossa havaitaan siis avaruuden pistettä kohden yksi ylimääräinen

riippumaton muuttuja verrattuna kolmiulotteisen jatkumoteorian metriikan riippumattomiin komponentteihin.

Neliulotteisen Reggen simpleksisen avaruuden perusosalla hyperkuutiolla on kuusitoista verteksiä ja siten viisitoista reunan pituutta. Näin ollen yhden Reggen avaruuden simpleksin määrittämiseen käytämme viisitoista reaalityyppistä, jotka jatkumoteoriassa siis vastaavat metriikkaa. Nyt kuitenkin jatkumoteorian metriikka neljässä ulottuvuudessa on symmetrinen tensori omaten siten vain kymmenen komponenttia yksittäistä avaruusajan pistettä kohden. Williams ja Rocek (1981) havaitsivat vaikutuksen olevan riippumaton yhdestä hyperkuutiosta liittyvästä reunan pituudesta teorian lineaarisella tasolla. Tämä riippumattomuus edelleen aiheutti neljän muun ylimääräisen komponentin katoamisen. Tulkinta näille viidelle ylimääräiselle komponentille on hyperkuution sisäisen kaarevuuden kuvaaminen vastakohtana simpleksien välisen kaarevuuden luonnehtimiseen. Näiden komponenttien katoaminen olisi siten ollut odotettavissa, ottaen huomioon simpleksien laakeuden Reggen laskennassa. Jäljellä olevista kymmenestä komponentista neljä on jatkumoteorian tapaan mittamuunnoksiin liittyviä komponentteja, ja loput kuusi liittyvät koordinaattimuunnoksiin.

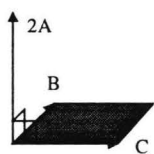
vastaavuus 4:ssä
ulottuvuudessa

Näin saadaan periaatteellisen vastaavuuden lisäksi myös vapaiden komponenttien lukumäärällinen vastaavuus jatkumoteorian metriikan komponenttien ja simpleksisen teorian linkkien pituuksien välille yhtä avaruuden pistettä kohden.

D.4.2 Reunanpituuksien luonne

Lisäksi on huomattava neliulotteisen avaruusajan tuoma aikaulottuvuuden lisäksi geometrian monimuotoisuuteen. Neliulotteista simpleksistä avaruusajaa luodessamme joudumme valitsemaan simpleksien reunojen pituuden lisäksi myös reunojen luonteen valonluonteisten, ajanluonteisten ja tilanluonteisten vektoreiden välillä. Yksinkertaisin ratkaisu olisi valita kaikki reunanpituudet nolliksi eli valonluonteisiksi, mutta tällöin ei neligeometria olisi täysin määrätty. Tämä johtuu siitä, että geometria $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$ poikkeaa geometriasta $\lambda(x^\mu)g_{\alpha\beta}(x^\mu)$, vaikka valonluonteisilla vektoreilla yhdistetyt pisteet ensimmäisessä geometriassa olisi yhdistetty valonsäteillä myös toisessa.

Valitsemalla osan reunanpituuksista tilanluonteisiksi, ja osan ajanluonteisiksi, saamme tällaisista vektoreista muodostetun kolmion alaksi joko reaalisen tai imaginaarisen luvun. Nyt kuitenkin kaarevuuden antava tulo vajavuuskulman ja avaruusajassa saranana toimivan kolmikulmion välillä (kaava 7) täytyy olla mitattava, reaalinen suure. Vajavuuskulma kuitenkin osoittautuu reaalisiksi saranan alan ollessa reaalinen ja vastaavasti imaginaariseksi saranan alan ollessa imaginaarinen. Tämä voidaan todeta seuraavasti.



Kolmiulotteisessa avaruudessa kahden vektorin ristitulo antaa kyseisten vektoreiden virittämän suunnikkaan pinta-alaa kuvaavan vektorin

$$2\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$$

kaava 10

Kuva 15. Kahden vektorin B ja C ristitulo antaa kyseisten vektorien virittämän suunnikkaan pinta-alan. Tämän pinta-alan suuruuden ilmaisee kohtisuoraan pinnasta nouseva vektori A .

Tämän vektorin suuruus saadaan Lagrangen identiteetin avulla

$$4A^2 = \vec{B}^2 \vec{C}^2 - (\vec{B} \cdot \vec{C})^2$$

kaava 11

missä A antaa nyt B :n ja C :n virittämän kolmion pinta-alan.

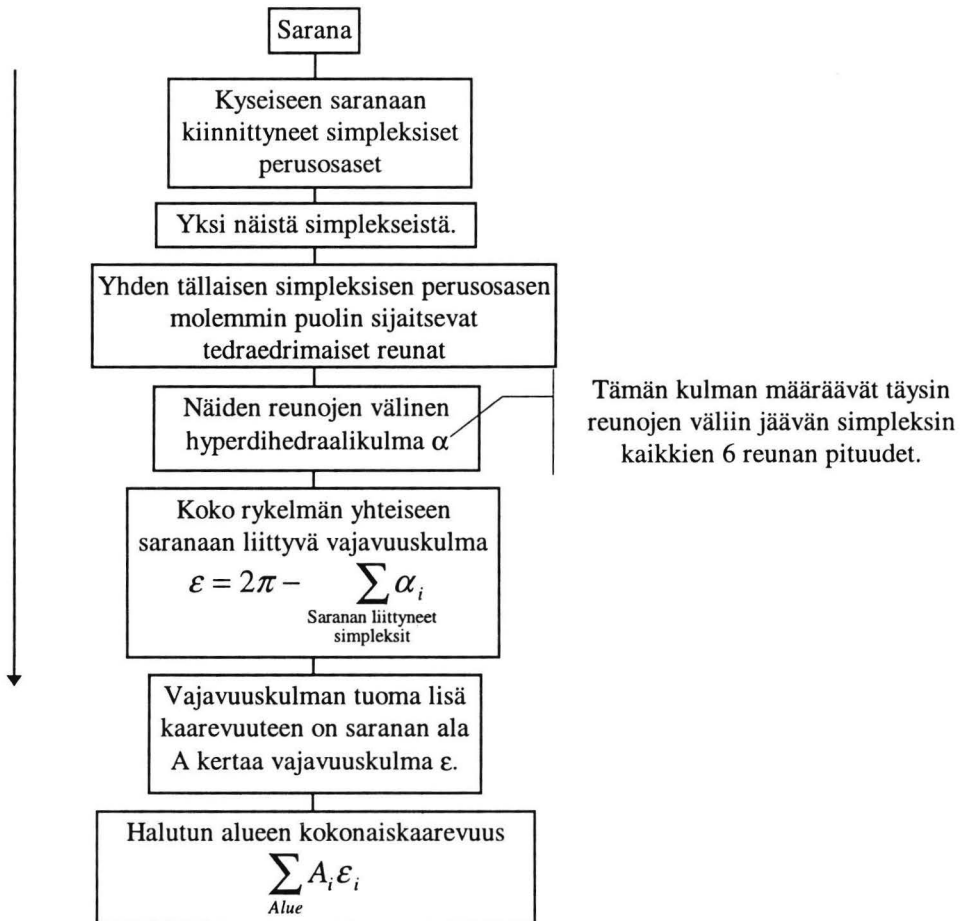
Neliulotteisessa avaruudessa saadaan vastaava tulos. Mikäli B ja C ovat kolmion reunat, antaa B :n ja C :n ristitulo vektorin $2A$ *duaali*vektorin. Näin ollen, mikäli vektori B on aika-akselin suuntainen ja C z-akselin suuntainen, sijaitsee vektori A (x,y)-tasolla ollen siten reaalinen suure. Tällaisen saranan ympäri yhdensuuntaissiirretty vektori kokee muutoksen ainoastaan x ja y komponenteissaan. Jos taas kolmikulmio-saranan virittävät vektorit B ja C sijaitsevat (x,y)-tasolla, on ristitulovektorin duaali $2A$ puhtaasti imaginaarinen suure. Tällaisen saranan ympäri yhdensuuntaissiirretty vektori kokee muutoksen ainoastaan z ja t komponenteissaan ollen siten myös imaginaarinen. Nyt tämän vektorin suuruus saadaan lausekkeesta

$$4A^2 = (\vec{B} \cdot \vec{C})^2 - \vec{B}^2 \vec{C}^2$$

kaava 12

Mikäli saranan vajavuuskulma ϵ on reaalinen, on myös saranan pinta-ala A reaalinen suure. Jos taas pinta-ala A on imaginaarinen, osoittautuu myös vajavuuskulma ϵ imaginaariseksi. Näin ollen on kaarevuuden antava tulo $A\epsilon$ aina reaalinen.

Reggen kehikon geometrian määrittävät yksikäsitteisesti reunojen pituudet. Useimmiten ongelman alkuehdot määräävät ainoastaan osan reunojen pituuksista. Loput reunojen pituudet voidaan määrittää vaatimalla kehikon toteuttavan Einsteinin yhtälöitä approksimoivia Reggen yhtälöitä. Kuva 16 sisältää kaavion geometrian määrittämisestä simpleksisen avaruuden saranoista liikkeelle lähtien.



Kuva 16. Simpleksisen geometrian kaarevuus määräytyy täysin kyseisen avaruuden Reggen kehikon reunojen pituuksista. Kaarevuus tietyllä alueella saadaan yllä olevan neliulotteisen tapauksen mukaisesti. Otetaan jokin sarana, johon kiinnittyneiden perussimpleksien (1-ul. tapaus: viiva, 2-ul. tapaus: kolmikulmio, 3-ul. tapaus: tetraedri, ...) saranan puoleisten kulmien summa vähennetään 2π :stä. Tällöin saadaan vajavuuskulma kyseisessä saranassa, josta kaarevuus saadaan kertomalla kulma saranalla (2-ul. tapaus: 1, 3-ul. tapaus: viivan pituus, 4-ul. tapaus: kolmikulmion ala) Edelleen summataan näin saadut lisät kaarevuuteen halutulta alueelta, jolloin saadaan alueen kokonaiskaarevuus.

(Wheeler, Thorne, Misner: Gravitation, s. 1171)

D.5 Reggen avaruusajan rakennusosasten yhteenveto

Moniston Dimensio	1	2	3	4
Rakennusosanen	viiva	kolmio	tetraedri	Ylempi simpleksi
Rakennusosasen reunojen määrä	—	3	4	5
Sarana, jossa rakennusosaset tapaavat muodostaen vajavuuskulman	—	piste	reuna	Kolmio
Tämän saranan dimensio	—	0	1	2
Tämän saranan sisällys	—	—	pituus l	Ala A
Kaikkien tietyllä alueella olevien tällaisten saranoiden kontribuutio moniston kaarevuuteen	—	$\sum_{\text{alue}} \varepsilon_i$	$\sum_{\text{alue}} l_i \varepsilon_i$	$\sum_{\text{alue}} A_i \varepsilon_i$

Taulukko 3. Yhteenveto Reggen laskennan perusosasista.

D.6 Variaatioperiaate Reggen laskennassa

Vaikkakaan emme tule tarvitsemaan Reggen laskentaan liittyvää variaatioperiaatetta muualla tutkielmassa, käydään se variaatioperiaatteen yleisen tärkeyden vuoksi pikaisesti läpi. Einsteinin kenttäyhtälöitä vastaavat simpleksisen avaruuden kenttäyhtälöt voidaan johtaa variaatioperiaatteen kautta. Tähän tarvitsemme Einsteinin vaikutuksen¹¹

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4 x$$

kaava 13

vastineen Reggen kehikolle.

D.6.1 Reggen vaikutus

Jatkumovaikutuksen vastine simplekseistä koostuvassa n -ulotteisessa avaruusajassa on Reggen vuonna 1961 ehdottama ns. (Einsteinin-)Reggen vaikutus

$$I_{ER} \propto \sum_{\sigma^{n-2}} \varepsilon_{\sigma^{n-2}} V(\sigma^{n-2})$$

kaava 14

missä σ^n ovat n -ulotteisen simpleksisen avaruuden perusosasia, ja siten σ^{n-2} -simpleksit kyseisessä avaruudessa olevien perusosasten välisiä saranoita. Summa käy läpi kaikki simpleksisen avaruuden saranat pitäen sisällään saranan tilavuuden $V(\sigma^{n-2})$ sekä kyseiseen saranaan liittyvän vajavuuskulman ε_{n-2} tulon. Avaruusajassa tämä vaikutus saa näin ollen muodon

$$I \propto \sum_{\Delta} \varepsilon_{\Delta} A_{\Delta}$$

E-R vaikutus avaruusajassa

kaava 15

D.6.2 Vaikutuksen variointi

Reggen kehikon vajavuuskulmat riippuvat monimutkaisella tavalla suuresta määrästä kehikon simpleksien reunojen pituuksia — jotka siis toimivat ainoina dynaamisina muuttujina Reggen laskennassa. Nyt variaatioperiaatteen mukaisesti varioimalla kaikkia simpleksisen 3+1

¹¹Kaavassa R on kaarevuuskalaari eli Riccin skalaari, ja g on metriikan determinantti.

ulotteisen avaruusajan reunanpituuksia ℓ_p saadaan vaikutuksen variaatioksi (vrt. metriikan variointi jatkumoteoriassa)

$$\delta I_{ER} \propto \left[\sum_{\Delta} \frac{\partial A_{\Delta}}{\partial \ell_p} \varepsilon_{\Delta} + \sum_{\Delta} A_{\Delta} \frac{\partial \varepsilon_{\Delta}}{\partial \ell_p} \right] \delta \ell_p = 0$$

kaava 16

missä summat käyvät läpi kaikki saranat Δ joille reuna p on yhteinen. Regge kuitenkin osoitti samaisessa v. 1961 julkaistussa tutkimuksessaan yhtälön jälkimmäisen termin häviävän

$$\sum_{\Delta} A_{\Delta} \frac{\partial \varepsilon_{\Delta}}{\partial \ell_p} \delta \ell_p \equiv 0$$

kaava 17

jolloin variaation lauseke yksinkertaistuu

$$\delta I_{ER} \propto \left[\sum_{\Delta} \frac{\partial A_{\Delta}}{\partial \ell_p} \varepsilon_{\Delta} \right] \delta \ell_p = 0$$

kaava 18

josta saadaan Einsteinin yhtälöiden simpleksiset vastineet — (Einsteinin-)Reggen yhtälöt

$$\sum_{\Delta} \frac{\partial A_{\Delta}}{\partial \ell_p} \varepsilon_{\Delta} = 0$$

kaava 19

D.7 Reggen laskennan kvantisoinnista

Gravitaation kvantittaminen Reggen laskennan avulla käyttäen ns. *polkuintegraalikkvantitusta* sisältää ongelmia polkuintegraalin määrittämisessä¹². Suurin näistä ongelmista lienee integrointimitan määrääminen integroitaville reunan pituuksille ℓ . Tämän ongelman ratkaisu piilee vaikutuksen mittainvarianssissa, jonka avulla voimme liittää polkuintegraalin integrointimitan johonkin kvantisoitavan avaruuden muuttumattomaan suureen.

On selvää, että kaarevaan simpleksiseen avaruuteen liitettävältä mittamuunnokselta vaaditaan vastaavuutta sekä laakean avaruuden että jatkumoteorian rajalla. Toisin sanoen kaarevan simpleksisen mittamuunnoksemme on lähestyttävä sekä laakean avaruuden että jatkumoteorian mittamuunnoksia taustalla toimivan avaruuden geometrian lähestyessä vastaavasti laakeata ja/tai jatkumoavaruutta. Vastaavuusperiaatteen lisäksi Rocek ja Williams ehdottavat¹³, että n -ulotteiseen simpleksiseen avaruuteen liittyvällä mittamuunnoksella on oltava n parametria jokaista avaruusajan pistettä kohden. Edelleen he ehdottavat vaikutuksen invarianssia tai ainakin approksimatiivista invarianssia kyseisessä mittamuunnoksessa. Heidän mielestään polkuintegraalin mitan määrittämiseksi olisi järkevintä liittää jokin invariantti suure integrointimitaan. Tähän ongelmaan paneudummekin tutkielman viimeisessä luvussa yksiulotteisen hilamaailmankaikkeuden kautta.

D.8 Johtopäätökset

Reggen laskenta tarjoaa geometrisen ja koordinaateista riippumattoman tavan tarkastella gravitaatiota. Einsteinin yleisestä suhteellisuusteoriasta poiketen avaruusaikajatkumoa kuvataan diskreetillä rakenteella, joka antaa mahdollisuuden yksinkertaistaa suhteellisuusteoreettisia laskuja. Näissä laskuissa jatkumoteorian metriikka korvataan diskreetin Reggen kehikon linkkien pituuksilla, jotka toimivat teorian dynaamisina muuttujina.

¹²Polkuintegraalikkvantitusta käsitellään enemmän tutkielman viimeisessä luvussa. Toinen kvantittamismetodi olisi esim. tässä tutkielmassa täysin huomiotta jätetty *kanoninen kvantitus*.

¹³Rocek & Williams: The Quantization of Regge Calculus in Particles and Fields; 1984.

Kvanttigravitaation ongelmaan Reggen laskenta tuo mielenkiintoisia näkökulmia ajatellen avaruuden konstruointia simplekseistä. Tällainen lähestymistapa yksinkertaistaa laskuja ja voi jopa tuoda esiin luonnon oikean rakenteen kvanttimekaanisella tasolla. Edelleen polkuintegraaliquantisoinnin perusongelman — integrointimitan ratkaisu voidaan löytää systeemin mittainvarianssin tarkastelun kautta, kuten Rocek ja Williams (1984) työssään ehdottavat.

D.9 Lähteet

Alla ovat pääasialliset lähteet, joista tämän luvun tiedot on kerätty. Täydellinen lähdeluettelo löytyy tutkielman lopusta.

1. **Coxeter**, H. S. M. Regular Polytopes, 2nd Ed., Macmillan, New York; 1963
2. **Hämäläinen**, Juhani Reggen Laskenta Algebrallis-Topologisena Geometrodynamiikan Approksimointimenetelmänä ja Sen Soveltaminen Friedmannin Kosmologiseen Malliin, Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu, Jyväskylän Yliopisto; 1995.
3. **Misner**, Charles
Thorne, Kip
Wheeler, John Gravitation, W.H. Freeman and Company, New York; 1973.
4. **Mäkelä**, Jarmo Aspects of Canonical Quantum Gravity, Väitöskirja, Jyväskylän Yliopisto; 1994.
5. **Mäkelä**, Jarmo Reggen Laskenta ja sen Soveltaminen Kosmologiaan, Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu, Jyväskylän Yliopisto; 1989.
6. **Senechal**, Marjorie
Fleck, George
(editors) Shaping Space, A Polyhedral Approach, Birkhäuser Boston Inc.; 1988.
7. **Williams**, Ruth Building Blocks for Space and Time, Lehtiartikkeli, New Scientist; 12 June 1986.
8. **Williams**, Ruth
Tuckey, Philip A. Regge Calculus: A Bibliography and Brief Review, CERN-TH.6211/91.
9. **Williams**, Ruth
Rocek, Martin Introduction to Quantum Regge Calculus, in Quantum Structure of Space and Time, ed. M. J. Duff and C. J. Isham.
10. **Williams**, Ruth
Rocek, Martin The Quantization of Regge Calculus, Lehtiartikkeli, Particles and Fields; 1984.



E. Mitta

Käsitlemme seuraavaksi luonnon symmetrioita, joiden osoitamme olevan yhteydessä säilyviin suureisiin. Edelleen käymme läpi käsitteet mitta, mittamuunnos, mittasymmetria ja mittainvarianssi. Pyrimme osoittamaan yhteyden säilyvän suureen, symmetrian, invarianssin ja mittakenttien välillä.

Sana 'mitta' on tässä yhteydessä hieman harhaanjohtava ollen mukana historiallisista syistä. Alkunsa tämä 'väärinkäsitys' sai vuosisadan alkupuolella Hermann Weylin (1885-1955) pyrkiessä todentamaan näkemystään sähkömagnetismista lokaalin symmetrian esityksenä. Albert Einsteinin ajatukset sähkömagnetismista symmetrian tuotteena saivat Weylin hakemaan yleisen suhteellisuusteorian yleisten koordinaattimuunnosten invarianssia vastaavaa symmetriaa sähkömagnetismille. Hänen ajatuksensa oli fysikaalisten lakien säilyminen samana muuttaessa mittakaavaa (scale) jollakin tekijällä. Mittakaavan muutoksen invarianssiin Noetherin teoreeman¹ kautta liittyvän säilyvän suureen piti olla juuri sähkövaraus.

Teoria ei kuitenkaan toiminut ja ajatuksen kehittäminen pysähtyi kunnes Schrödinger esitteli aaltoyhtälönsä vuonna 1927. Tällöin Fritz London (1900-1954) osoitti sähkömagnetismiin liittyvän symmetrian olevan Schrödingerin yhtälön aaltofunktion vaiheinvarianssi. Weyl osallistui ajatuksen kehittämiseen käyttäen edelleen 'mitan' (gauge) käsitettä, joka sittemmin on nimityksenä jäänyt pysyvästi asiaan liittyviin teorioihin.

Mittakentäteorioiden tärkeys tulee esille perusvuorovaikutuksia yhdistävänä tekijänä. Sähkömagneettisen ja heikon vuorovaikutuksen yhdiste sähkö-heikko-vuorovaikutus on tulos sähkömagneettisen ja heikon vuorovaikutuksen mittakenttien yhdistämisestä. Edelleen kvanttikromodynamiikka tuo vahvan vuorovaikutuksen mukaan kenttäteorioihin, jonka osittaisesta yhdistämisestä sähkö-heikkoon teoriaan on lupaavia tuloksia. Kaikkien vuorovaikutusten yhdistämisen esteenä näyttää olevan gravitaatiovuorovaikutuksen erilaisuus muihin kolmeen vuorovaikutukseen nähden. Ratkaisuna gravitaation ongelmaan on todennäköisesti

*taustaa 'mitta'-
sanalle*

motivaatio

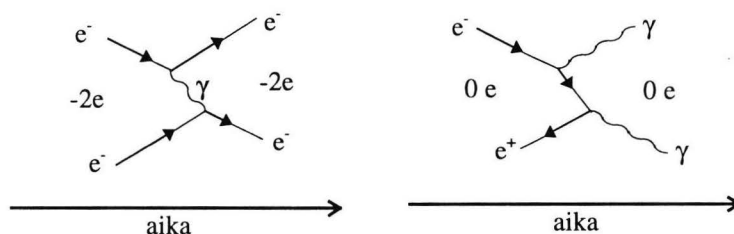
¹Noetherin teoreemaa käsitellään tässä luvussa myöhemmin.

kvanttigravitaatioteoria, jonka rakentamisessa taas mittakenttäteoriat voivat olla tärkeässä roolissa.

Aloitamme mitan käsittelyn eräiden luonnon suureiden säilymisestä kaikissa luonnon prosesseissa.

E.1 Säilymislait

Suureta kutsutaan prosessissa säilyväksi suureeksi, mikäli sen suuruus ei muutu kyseisessä prosessissa. Erilaisissa prosesseissa säilyviä suureita on fysiikan piirissä monia; kuten pariteetti, sähkövaraus, leptoniluku, barioniluku, energia, liikemäärä ja pyörimismäärä. Meitä tämän tekstin puitteissa koskettavat eniten sähkövaraus, energia, pyörimismäärä ja liikemäärä, joiden ero edellä lueteltuihin suureisiin on niiden säilyminen kaikissa neljässä perusvuorovaikutuksessa. Säilymislait ohjaavat tarkasti hiukkasfysiikkaan liittyviä tapahtumia antaen tietoa erilaisten prosessien mahdollisuudesta ja mahdottomuudesta. Sähkömagneettisen vuorovaikutuksen tiedetään säilyttävän sähkövarauksen, jolloin voidaan alkutilan alkeishiukkasista ja alkuenergiasta helpommin päätellä lopputilan hiukkaskonfiguraatio. Tällaisia



Kuva 1. Feynmanin graafeja. Vasemmalla kahden elektronin e^- välinen elastinen törmäys, jossa välittäjähiukkasena toimii sähkömagneettisen vuorovaikutuksen välittäjäbosoni eli valokvantti γ . Oikealla elektronin ja positronin annihiloituminen kahdeksi valokvantiksi. Molemmissa vuorovaikutuksissa sähkövaraus säilyy ($-2e \rightarrow -2e$, $0e \rightarrow 0e$).

prosesseja voidaan kuvata ns. *Feynmanin graafeilla* (Kuva 1).

Gravitaation tapauksessa tärkeimmät säilyvät suureet ovat energia, pyörimismäärä sekä liikemäärä, jotka kaikki toimivat massan kautta myös lähteenä gravitaatiovuorovaikutukselle.

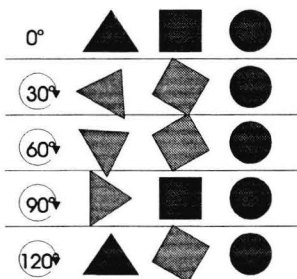
E.2 Symmetriat

Symmetriat kuvaavat muuttumattomuutta fysikaalisissa prosesseissa. Aloitamme symmetrioiden käsittelyn muutamalla esimerkillä, joista etenemme lokaalin ja globaalin symmetrian määrittelyyn. Lisäksi luomme valoa jatkuvaan ja epäjatkuvaan symmetriaan.

E.2.1 Symmetrian käsite ja invarianssi

symmetrisyys

Objekti on *symmetrinen* jossakin muunnoksessa mikäli ei voida erottaa onko objektille jo suoritettu kyseinen muunnos vai onko muunnos vielä suorittamatta. Näin ollen tasasivuinen kolmio on symmetrinen 120° kierron suhteen, neliö on symmetrinen 90° kierron suhteen ja ympyrä minkä tahansa kierron suhteen edellyttäen, että kaikki kierrot suoritetaan objektien omassa tasossa.



Kuva 2. Rotaatiosymmetriat kolmiolle, neliölle ja ympyrälle. Selvästi kolmio on symmetrinen 120° :n, neliö 90° :n ja ympyrä mielivaltaisessa objektien omassa tasossa suoritun kierron suhteen.

Translaatiosymmetria liittyy objektin muuttumattomuuteen symmetria-akselin suhteen tehtyyn siirtoon. Tällainen objekti on esimerkiksi äärettömän pitkä sylinteri tai äärettömän pitkä suora. Mikäli liikumme tällaisella suoralla, jatkuu suora aina äärettömyysiin sekä edessämme että takanamme. Näin ollen emme pysty kertomaan sijaintiamme suoralla ja suora on symmetrinen translaatiomuunnoksessa. On huomattava, että jos sidomme rusetin johonkin suoran pisteeseen rikkoutuu translaatiosymmetria sillä voimme selvästi havaita eron siirtyessämme suoralla kauemmas tai lähemmäs rusettia.

translaatio-symmetria

Mikäli objekti on symmetrinen jonkin muunnoksen suhteen sanotaan objektia *invariantiksi* kyseiselle muunnokselle. Näin ollen ympyrä on rotaatioinvariantti ja äärettömän pitkä sylinteri translaatioinvariantti. Näitä invariansseja on useita, joista esimerkkinä mainittakoon translaatio-, rotaatio-, pariteetti- eli heijastusinvarianssi (Kuva 5), ajankääntö- ja vastahiukkasiin liittyvä C-invarianssi².

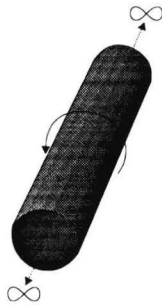
invarianssi

Yleisesti eivät maailmankaikkeuden objektit ole keskenään symmetrisiä johtuen epätasaisesti levittäytyneestä sijainnistaan ja epäsymmetrisistä muodoistaan. Maailmankaikkeuden lainalaisuudet sen sijaan näyttävät olevan hyvinkin invariantteja. Ajatellaan esimerkiksi valon nopeuteen liittyviä mittauksia eri puolilla maapalloa eri aikoihin. Kaikista näistä mittauksista saadaan mittaustarkkuuden rajoissa samat tulokset. Mittauslaboratorioiden eri sijainnista Maapallolla johtuen voidaan päätellä translaatioinvarianssin olevan voimassa. Edelleen Maapallon pallomaisuudesta johtuen mittaustarkkuudet voivat olla eri asennoissa toisiinsa nähden ilmoittaen rotaatioinvarianssista. Lisäksi tulokset ovat samoja mittaustarkkuudesta riippumatta — kyseessä on ajansiirtovinvarianssi.

fysiikan lakien symmetrisyys

Aiemmin fysikaalisissa teorioissa ilmenevien symmetrioiden ajateltiin helpottavan fysikaalisten ongelmien ratkaisemista mutta olevan täysin sattumanvaraisia vailla suurempaa merkitystä. Nykyfysiikan näkökulmasta suhtautuminen symmetrioihin on muuttunut asettaen symmetriat ohjaamaan maailmankaikkeuden lainalaisuuksia.

E.2.2 Lokaali ja globaali symmetria



Kuva 3. Äärettömän pitkän sylinterin pyörittäminen pituusakselinsa ympäri on globaali muunnos. Sylinteri on rotaatioinvariantti, sillä ei ole keinoa saada selville onko sylinteriä pyöräytetty vai ei.



Kuva 4. Osiin jaetulle äärettömän pitkälle sylinterille voidaan suorittaa lokaaleja muunnoksia pyörittämällä sylinterin osia eri suuntiin eri suurille kulmille. Sylinteri on invariantti näille lokaaleille muunnoksille, sillä ei ole keinoa saada selville onko sylinterille tehty muunnoksia vai ei.

Globaalilla muunnoksella tarkoitetaan yhtä koko systeemin kattavaa muunnosta. Mikäli objekti säilyy muuttumattomana tällaisen muunnoksen aikana, on kyseessä *globaali symmetria* ja *globaali invarianssi*. Tällainen on esimerkiksi yksi rotaatio koko maailmankaikkeudessa — vaikkapa edellä esitellyn äärettömän pitkän sylinterin pyörittäminen pituusakselinsa ympäri (Kuva 3).

globaali muunnos

Lokaali muunnos tarkoittaa useaa erillistä muunnosta avaruusajassa. Tällaisesta muunnoksesta saadaan esimerkki viipaloimalla jo tutuksi käynyt äärettömän pitkä sylinteri N :ksi viipaleeksi, ja pyörittämällä jokaista viipaleetta erikseen koko sylinterin pituusakselin ympäri. Mikäli objektit tai fysikaaliset lait ovat symmetrisiä lokaalin muunnoksen yhteydessä, on kyseessä *lokaali symmetria* ja *lokaali invarianssi*. Viimeksi viipaloimamme sylinteri toteuttaa tämän lokaalin symmetriavaatimuksen, sillä meillä ei ole keinoa saada selville onko sylinterille jo tehty näitä paikallisia muunnoksia vaiko ei (Kuva 4).

lokaali muunnos

Näin ollen on lokaalin symmetrian vaatimus paljon suurempi ja voimakkaampi kuin globaalin symmetrian. Onkin hämmästyttävää, että niin sähkömagneettinen vuorovaikutus kuin yleinen suhteellisuusteoriakin sisältävät lokaalin symmetrian. Sähkömagnetismin lokaali invarianssi ilmenee kompleksisten kenttien tai aaltofunktioiden vaihemuunnoksissa, joissa aaltofunktio muuntuu

sähkömagnetismi

² Ks. esim. Martin & Shaw, Particle Physics, luku 4.

$$\psi \rightarrow e^{i\theta(\vec{x},t)} \psi$$

kaava 1

missä $\theta(\vec{x},t)$ voi riippua sekä ajasta että paikasta tuoden mukanaan muunnoksen lokaalisen luonteen.

suhteellisuusteoria

Yleisen suhteellisuusteorian invarianssi ilmenee suppeampaan suhteellisuusteoriaan liittyvissä globaaleissa Lorentzin muunnoksissa, missä muunnoskertoimet ovat vakioita

$$x'^{\alpha\beta\dots} = a^\alpha{}_\mu a^\beta{}_\nu \dots x^{\mu\nu\dots}$$

kaava 2

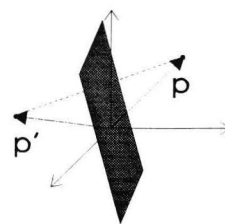
sekä yleisissä lokaaleissa koordinaattimuunnoksissa, missä muunnoskertoimet ovat funktioita avaruusajassa

$$x'^{\alpha\beta\dots} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \dots x^{\mu\nu\dots}$$

kaava 3

E.2.3 Jatkuva ja epäjatkuva symmetria

Jatkuvan muunnoksen suuruutta voidaan säätää. Näin ollen mm. translaatio- ja rotaatiomuunnos ovat jatkuvia, sillä molemmissa voidaan määrittellä muunnoksen suuruus äärettömän suurella tarkkuudella. Epäjatkuvaan muunnoksen suuruutta ei voida näin määrittää, vaan muunnos tapahtuu hyppäyksittäin. Esimerkkinä epäjatkuvasta muunnoksesta on pariteettimuunnos jonka vaikutus on peilata systeemi jonkin pinnan yli (Kuva 5). Invarianssi jatkuvassa muunnoksessa antaa jatkuvan symmetrian ja vastaavasti invarianssi epäjatkuvassa muunnoksessa antaa epäjatkuvan symmetrian.



Kuva 5. Pariteettimuunnoksessa piste p peilataan tason läpi pisteeksi p'.

E.3 Mittamuunnos

Mittamuunnos liittyy kenttäyhtälöiden potentiaaleihin suoritettaviin muunnoksiin. Käsittelemme aluksi mittamuunnoksen sähkömagnetismissä, jonka jälkeen siirrymme gravitaatiovuorovaikutukseen. Molemmissa tapauksissa käsittelemme muunnosta, jolle vuorovaikutus on invariantti.

E.3.1 Mittamuunnos sähkömagneettisessa vuorovaikutuksessa

Varatun hiukkasen liikeyhtälö mielivaltaisessa potentiaalien (ϕ, \vec{A}) aikaansaamassa sähkömagneettisessa kentässä on muotoa³

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi \right) \Psi = -\frac{1}{2m} \left(\vec{\nabla} - iq\vec{A} \right)^2 \Psi$$

kaava 4

missä Ψ on hiukkasta kuvaava aaltofunktio. Kyseiset potentiaalit eivät kuitenkaan ole ainutlaatuisia. Jokaiselle (ϕ, \vec{A}) potentiaalille on olemassa monia muitakin potentiaalivalintoja (ϕ', \vec{A}') , jotka synnyttävät samanlaisen sähkömagneettisen kentän. Erityisesti suorittamalla muunnos

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f$$

kaava 5

mittamuunnos

³ Ks. esim. Martin & Shaw, Particle Physics, Appendix C.1.

missä $f(\mathbf{x}, t)$ on mielivaltainen skalaaripotentiali, säilyy sähkömagneettinen kenttä ennallaan. Tällaista muunnosta $(\phi, \mathbf{A}) \rightarrow (\phi', \mathbf{A}')$ kutsutaan *mittamuunnokseksi* ja teoriaa jonka fysikaaliset ilmiöt säilyvät muuttumattomina tällaisissa muunnoksissa kutsutaan *mittainvariantiksi*.

Koska mitattavat suureet sähkömagnetismissa riippuvat ainoastaan sähkökentästä \mathbf{E} ja magneettikentästä \mathbf{B} — eivätkä potentiaalien valinnastamme, täytyy teorian olla mittainvariantti potentiaalien valinnan suhteen. Suoritetaan siis edellä esitelty muunnos (kaava 5) varatun hiukkasen liikeyhtälölle (kaava 4), jolloin saadaan

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi' - iq\frac{\partial f}{\partial t}\right)\Psi = -\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} - iq\vec{A}' - iq\vec{\nabla}f\right)^2\Psi$$

kaava 6

Tuloksen ollessa alkuperäisestä liikeyhtälöstä eroava näyttää siltä ettei sähkömagnetismi olekaan mittainvariantti teoria. Sijoitusta tehdessämme kuitenkin oletimme, ettei mittamuunnoksen tekeminen kenttiä luoville potentiaaleille muuta mitenkään itse hiukkasta kuvaavaa aaltofunktiota Ψ . Jos kuitenkin mittamuunnoksen yhteydessä myös aaltofunktio muuntuu

$$\Psi(\vec{x}, t) \rightarrow \Psi'(\vec{x}, t) = e^{-iqf(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t)$$

kaava 7

muuntuu varatun hiukkasen liikeyhtälön (kaava 4) vasen puoli

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi'\right)\Psi'(\vec{x}, t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\left(\phi + \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}\right)\right)e^{-iqf(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t) \\ &= \frac{\partial e^{-iqf(\vec{x}, t)}}{\partial t}\Psi(\vec{x}, t) + e^{-iqf(\vec{x}, t)}\frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} + iq\phi e^{-iqf(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t) + iq\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}e^{-iqf(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t) \\ &= -e^{-iqf(\vec{x}, t)}iq\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}\Psi(\vec{x}, t) + e^{-iqf(\vec{x}, t)}\frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} + iq\phi e^{-iqf(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t) + iq\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}e^{-iqf(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t) \\ &= e^{-iqf(\vec{x}, t)}\frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} + iq\phi e^{-iqf(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t) = e^{-iqf(\vec{x}, t)}\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi\right)\Psi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

kaava 8

ja liikeyhtälön (kaava 4) oikea puoli saadaan hieman pidemmän laskun kautta (ei esitetä tässä)

$$\left(\vec{\nabla} - iq\vec{A}'\right)^2\Psi' = e^{-iqf}\left(\vec{\nabla} - iq\vec{A}\right)^2\Psi$$

kaava 9

Nyt saadaan siis

$$\begin{aligned} e^{-iqf}\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi\right)\Psi &= e^{-iqf}\left(\vec{\nabla} - iq\vec{A}\right)^2\Psi \\ &\Rightarrow \\ i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi'\right)\Psi' &= -\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} - iq\vec{A}'\right)^2\Psi' \end{aligned}$$

kaava 10

Näin ollen varatun hiukkasen liikeyhtälö sähkömagneettisessa kentässä on mittainvariantti, mikäli oletamme hiukkasen aaltoyhtälön muuntuvan potentiaalien muunnoksen yhteydessä (kaava 5 ja kaava 7).

*invarianssi
mitta-
muunnoksessa*

E.3.2 Mittamuunnos gravitaatiovuorovaikutuksessa

Kuten sähkömagneettisessa tapauksessa ei lineaarisen gravitaatioteorian kenttäyhtälökään ole yksikäsitteinen vaan yhtälön potentiaaleja voidaan muuntaa toiseen muotoon yhtälön antaman informaation kärsimättä. Lineaarisen gravitaatioteorian kenttäyhtälöön

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu h - (\partial_\lambda \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda \partial^\mu h^{\nu\lambda}) - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -\kappa T^{\mu\nu}$$

kaava 11

liittyvä vastaava mittamuunnos on

mittamuunnos

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \bar{o}^\nu \Lambda^\mu + \bar{o}^\mu \Lambda^\nu$$

kaava 12

Tämä voidaan todistaa yksinkertaisesti sijoittamalla muunnos kenttäyhtälöön, jolloin saadaan

*invarianssi
mittamuunnoksessa*

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda \partial^\lambda (h^{\mu\nu} + \partial^\nu \Lambda^\mu + \partial^\mu \Lambda^\nu) + \partial^\mu \partial^\nu (h + \partial_\rho \Lambda^\rho + \partial^\rho \Lambda_\rho) \\ & - [\partial_\lambda \partial^\nu (h^{\mu\lambda} + \partial^\lambda \Lambda^\mu + \partial^\mu \Lambda^\lambda) + \partial_\lambda \partial^\mu (h^{\nu\lambda} + \partial^\lambda \Lambda^\nu + \partial^\nu \Lambda^\lambda)] \\ & - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda (h + \partial_\rho \Lambda^\rho + \partial^\rho \Lambda_\rho) + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma (h^{\lambda\sigma} + \partial^\sigma \Lambda^\lambda + \partial^\lambda \Lambda^\sigma) = -\kappa T^{\mu\nu} \\ & \Rightarrow \\ & \partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\lambda \partial^\lambda \partial^\nu \Lambda^\mu}_{\oplus} + \underbrace{\partial_\lambda \partial^\lambda \partial^\mu \Lambda^\nu}_{\otimes} + \partial^\mu \partial^\nu h + \underbrace{\partial^\mu \partial^\nu \partial_\rho \Lambda^\rho}_{*} + \underbrace{\partial^\mu \partial^\nu \partial^\rho \Lambda_\rho}_{*} \\ & - \partial_\lambda \partial^\nu h^{\mu\lambda} - \underbrace{\partial_\lambda \partial^\nu \partial^\lambda \Lambda^\mu}_{\oplus} - \underbrace{\partial_\lambda \partial^\nu \partial^\mu \Lambda^\lambda}_{*} - \partial_\lambda \partial^\mu h^{\nu\lambda} - \underbrace{\partial_\lambda \partial^\mu \partial^\lambda \Lambda^\nu}_{\otimes} - \underbrace{\partial_\lambda \partial^\mu \partial^\nu \Lambda^\lambda}_{*} \\ & \quad - \underbrace{\eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h}_{\bullet} - \underbrace{\eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda \partial_\rho \Lambda^\rho}_{\bullet} - \underbrace{\eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda \partial^\rho \Lambda_\rho}_{\bullet} \\ & \quad + \underbrace{\eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma}}_{\bullet} + \underbrace{\eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma \partial^\sigma \Lambda^\lambda}_{\bullet} + \underbrace{\eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma \partial^\lambda \Lambda^\sigma}_{\bullet} = -\kappa T^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Yllä samalla symbolilla merkityt termit hävittävät toisensa.

\Rightarrow

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu h - (\partial_\lambda \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda \partial^\mu h^{\nu\lambda}) - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -\kappa T^{\mu\nu}$$

kaava 13

joka on samaa muotoa alkuperäisen kenttäyhtälön kanssa antaen kenttäyhtälön mittainvarianssin.

E.4 Mittaehdot

Mittamuunnosten mittafunktioilta Λ vaaditaan ainoastaan differentioituvuus, eivätkä käyttämämme kenttäyhtälöt siten määrää kenttien muotoa yksikäsitteisesti. Tämän kaltainen epätarkkuus kenttäyhtälöissä ei tuota fysikaalisesti havaittavia seurauksia. Laskujen kannalta on kuitenkin helpottavaa rajoittaa kenttäyhtälöiden sisältämää epätarkkuutta *mittaehdolla*.

Sähkömagnetismin mittamuunnokseen (tensoriesitys⁴)

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \bar{o}^\mu \Lambda$$

kaava 14

liittyvä yleisesti käytetty mittaehto on *Lorentzin mittaehto*

⁴Sähkömagnetismin tensoriesityksestä enemmän esimerkiksi kirjassa: Ohanian & Ruffini, Gravitation and spacetime, 2nd Ed.; luku 2.5.

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Lorentzin
mittaehto

kaava 15

ja lineaarisen gravitaatioteorian mittamuunnoksen (kaava 12) tapauksessa *Hilbertin mittaehto*

$$\partial_\mu \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \right) = 0$$

Hilbertin
mittaehto

kaava 16

jonka yleisessä suhteellisuusteoriassa korvaa *harmoninen koordinaattiehto*

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$$

harmoninen
koordinaattiehto

kaava 17

$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ on ns. *Christoffelin symboli* tai *affiini konnektio*.

Mikäli annettu sähkömagneettinen kenttä A^μ ei toteuta Lorentzin mittaehto, voimme aina etsiä mittamuunnoksen (kaava 14) avulla uuden kentän, joka toteuttaa mittaehdon.

Lorentz
sähkökentässä

$$0 = \underbrace{\partial_\mu A'^\mu}_{\text{Lorentzin mittaehto}} = \partial_\mu \underbrace{\left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda \right)}_{=A'^\mu}$$

\Rightarrow

$$\partial_\mu \partial^\mu \Lambda = -\partial_\mu A^\mu$$

kaava 18

josta Λ voidaan ratkaista siten, että uusi kenttä toteuttaa ehdon. Samoin voidaan gravitaatioteorian ja Hilbertin mittaehdon tapauksessa etsiä uusi kenttä:

$$0 = \underbrace{\partial_\mu \left(h'^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h' \right)}_{\text{Hilbertin mittaehto}} = \partial_\mu h^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\mu \Lambda^v + \partial_\mu \partial^\nu \Lambda^\mu$$

Hilbert
gravitaatio--
kentässä

$$-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu h - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\sigma \Lambda^\sigma - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial^\sigma \Lambda_\sigma$$

\Rightarrow

$$0 = \partial_\mu h^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\mu \Lambda^v + \underbrace{\partial_\mu \partial^\nu \Lambda^\mu}_{\cdot} - \frac{1}{2} \partial^\nu h - \underbrace{\frac{1}{2} \partial^\nu \partial_\sigma \Lambda^\sigma - \frac{1}{2} \partial^\nu \partial^\sigma \Lambda_\sigma}_{\cdot}$$

Yllä samalla symbolilla merkityt termit hä vittä väätisensa.

\Rightarrow

$$\partial_\mu \partial^\mu \Lambda^v = -\partial_\mu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\nu h$$

kaava 19

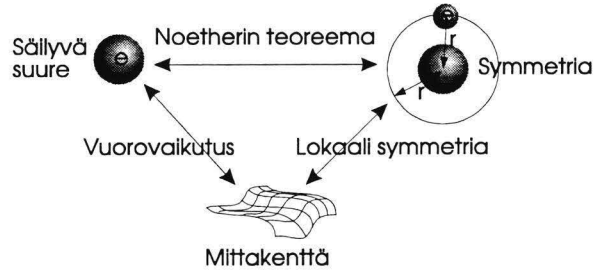
josta Λ voidaan ratkaista siten, että uusi kenttä toteuttaa ehdon. Molemmissa tapauksissa on Λ :n antavalla differentiaaliyhtälöllä useita ratkaisuja, sillä mihin tahansa Λ :n ratkaisuun voidaan lisätä saman differentiaaliyhtälön homogeeniratkaisu. Näin ollen annetut mittaehdot eivät nekään määritä kenttäyhtälöitä täysin yksikäsitteisesti.

Erilaisia koordinaatti- ja mittaehtoja on monia riippuen käytetystä teoriasta sekä suoritettavien laskujen muodosta. Mittaehdot asetetaan siten, että kulloinkin käytettävä teoria on mahdollisimman helppo ja yksinkertainen käyttää.

E.5 Mittakentät

Jokaiseen säilymlakiin voidaan liittää symmetria. Tälle symmetrialle on olemassa täydellinen mittakenttäteoria, mikäli kyseiseen symmetriaan liittyvät muunnokset ovat jatkuvia. Syntyvän mittakentän lähteenä toimii itse säilyvä suure, kuten sähkövaraus sähkömagneettiselle kentälle sekä energia, liikemäärä ja jännitys gravitaatiokentälle. Teoria sisältää vain yhden vapaan parametrin — kytkentävakion. Näin ollen on jokaiselle perusvoimalle olemassa oma

mittakenttensä. Syntynyt mittakenttä vaikuttaa säilyvään suureen, kuten sähkökenttä vaikuttaa sähkövaraukseen (Kuva 6).



Kuva 6. Mittateoria liittää yhteen säilyvän suureen, symmetrian ja mittakentät.

E.5.1 Noetherin teoreema

Säilymlait symmetrioihin kytkevä *Noetherin teoreema* kehitettiin alunperin variaatiolaskentaa varten vuonna 1918. Teoreema saa hyvin elegantin muodon niin klassisessa kuin kvanttimekaanisessakin Hamiltonin mekaniikassa. Teoreeman perusidea on seuraava: Mikäli systeemin vaikutus säilyy muuttumattomana sen koordinaattien ja potentiaalien uudelleen parametrisoinnissa, liittyy systeemiin yksi tai useampia säilyviä suureita. Toisin sanoen mikäli systeemin vaikutus on invariantti jossakin potentiaaleihin ja koordinaatteihin liittyvässä muunnosryhmässä, on olemassa kenttien ja kenttien derivaattojen kombinaatioita, jotka ovat invariantteja kyseisissä muunnoksissa.

Käsitlemme Noetherin teoreemaa aluksi kvanttimekaniikan kautta, joten lienee paikallaan kerrata muutamia kvanttimekaniikan operaattoreihin liittyviä perusasioita.

E.5.1.1 Kvanttimekaniikan operaattoreista sekä niiden kommutatiivisuudesta

Kvanttimekaniikassa hermiittiset lineaariset operaattorit edustavat fysikaalisen systeemin dynaamisia muuttujia. Mikäli operaattori \hat{A} edustaa observaabelia A systeemin tilaa kuvaavalle aaltofunktiolle Ψ , saadaan kyseisen operaattorin odotusarvo relaatiosta

$$\langle A \rangle = \Psi^* \hat{A} \Psi$$

kaava 20

Odotusarvojen lisäksi kvanttimekaniikan lineaarioperaattorit toimivat systeemin tilan muunnosten generaattoreina relaation

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-i\lambda\hat{A}}\Psi$$

kaava 21

mukaisesti. Relaatiossa esiintyvä λ on mielivaltainen reaalinen parametri. On huomattava, että jokainen jatkuva muunnos generoidaan tällä tavoin ja on siten yhteydessä johonkin fysikaalisen teorian muuttajaan. Esimerkkinä muunnoksesta on

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-i\lambda\hat{P}_z}\Psi$$

kaava 22

missä \hat{P}_z on z-akselin suuntainen liikemääräoperaattori ja Ψ' edustaa tilaa, joka eroaa tilasta Ψ siirtymän λ verran suuntaan z . Toisin sanoen ylläoleva muunnos työntää fysikaalista systeemiä λ :n verran suuntaan z .

Kvanttimekaanisten operaattoreiden *kommutatiivisuus* ilmaistaan ehdolla

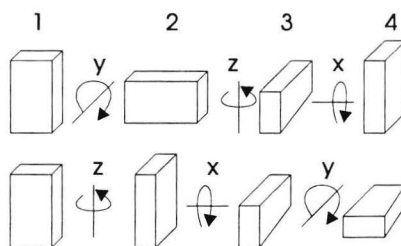
$$[\hat{A}, \hat{B}]\Psi = \hat{A}\hat{B}\Psi - \hat{B}\hat{A}\Psi = 0$$

kaava 23

Kahden systeemiin kohdistettavan kvanttimekaanisen operaattorin kommutatiivisuus antaa seuraavanlaista informaatiota operaattoreiden luonteesta sekä niihin liittyvistä odotusarvoista.

kommutatiivisuus

- Mikäli kaksi kvanttimekaanista operaattoria kommutoivat keskenään, on systeemin lopputila sama riippumatta järjestyksestä, jolla operaattorit tilaan kohdistetaan. Esimerkkinä keskenään kommutoivista operaatioista on eri suuntiin tehtävät siirrot, ja epäkommutoivista operaatioista eri akselien ympäri tehtävät kierrot (Kuva 7). Juuri näistä ominaisuuksista seuraa pyörimismääräoperaattoreiden eri komponenttien epäkommutatiivisuus ja liikemääräoperaattoreiden eri komponenttien kommutatiivisuus.



Kuva 7. Eri koordinaattiakselien ympäri suorittavat kierrot eivät kommutoi keskenään, ts. lopputulos on riippuvainen kiertojen järjestyksestä.

- Mikäli kaksi kvanttimekaanista operaattoria kommutoivat keskenään, on systeemin muuttuja A invariantti systeemiin kohdistetuissa operaatioissa \hat{B} . Mikäli \hat{A} on operaattori muuttujalle A ja \hat{B} generoi muunnoksen aaltofunktioon

$$\Psi' = e^{-i\lambda\hat{B}}\Psi$$

kaava 24

säilyy A :n odotusarvo invarianttina aaltofunktion muunnoksessa, eli siis

$$\langle A \rangle = \Psi'^* \hat{A} \Psi' = \Psi^* \hat{A} \Psi$$

kaava 25

Esimerkiksi hiukkasen sijainnin x -komponentti on invariantti y -suunnassa tehdyn siirron kanssa, mutta ei ole invariantti samassa x -suunnassa tehdyn siirron kanssa. Siis operaattori \hat{x} kommutoi operaattorin \hat{P}_y kanssa mutta ei operaattorin \hat{P}_x kanssa.

$$\Psi' = e^{-i\lambda\hat{P}_y}\Psi$$

kaava 26

$$\langle x \rangle = \Psi'^* \hat{x} \Psi' = \Psi^* \hat{x} \Psi$$

kaava 27

- Mikäli kaksi kvanttimekaanista operaattoria kommutoivat keskenään, on systeemin muuttuja B invariantti systeemiin kohdistettujen operaatioiden \hat{A} alla (kuten yllä).
- Keskenään kommutoivien operaattoreiden odotusarvot samasta systeemistä ovat yhtäaikaaisesti mitattavissa äärettömän suurella tarkkuudella. Tällöin operaattoreilla on täydellinen sarja yhteisiä ominaistiloja, eikä kyseisten operaattoreiden välillä ole epätarkkuusrelaatiota.

Mikä tahansa edellä luetellusta neljästä kohdasta aiheuttaa toteutuessaan myös muiden toteutumisen. Kaikki neljä kvanttimekaanisten operaattoreiden kommutatiivisuuteen liittyvää kohtaa ovat keskenään ekvivalenteja.

E.5.1.2 Säilymislain yhteys symmetrioihin (Noetherin teoreema)

Schrödingerin yhtälössä

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \hat{H}\Psi$$

kaava 28

esiintyvä Hamiltonin operaattori \hat{H} generoi siirtoja aikaulottuvuudessa ja toimii systeemin kokonaisenergian odotusarvon tuottavana operaattorina.

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\hat{H}}\Psi \quad (\text{ajansiirto})$$

kaava 29

$$E = \langle \hat{H} \rangle = \Psi^* \hat{H} \Psi \quad (\text{energian odotusarvo})$$

kaava 30

Jos nyt dynaaminen muuttuja A on invariantti Hamiltonin operaattorin generoimissa muunnoksissa, on se *liikevakio* ollen siten invariantti mielivaltaisissa muunnoksissa pitkin aika-akselia. Toisaalta mikäli Hamiltonin operaattori on invariantti kaikissa \hat{A} :n generoimissa muunnoksissa, on A esitys dynaamisissa laeissa esiintyvistä symmetriasta. Syynä tälle on Hamiltonin operaattorin luonne fyysikaalisten lakien määrittäjänä — ajan kuljettajana. Jos sähkömagneettisessa tapauksessa teemme vaihesiirron, sähkövarauksen säilymiseen liittyvän operaation, on Hamiltonin operaattori invariantti tämän siirron alla. Toisin sanoen systeemi säilyy ennallaan kaikilla (Hamiltonin operaattorin määräämillä) ajanhetkillä riippumatta siitä tehdäänkö vaihesiirto vai ei. Tämä kaikki on totta mikäli muuttujaan A liittyvä operaattori kommutoi Hamiltonin operaattorin kanssa. Näin ollen siis

Muuttuja A on säilyvä suure jos ja vain jos systeemin dynaamiset lait ovat invariantteja operaattorin \hat{A} generoimissa muunnoksissa ja edelleen mikäli systeemi on invariantti jossakin muunnoksessa, omaa systeemi muunnokseen liittyvän symmetrian.

E.5.1.3 Gravitaation tapaus

Gravitaation tapaus on muita perusvuorovaikutuksia huomattavasti ongelmallisempi sisältäen piirteitä, joita ei ole muiden perusvuorovaikutusten mittakentäteorioissa. Yleiseen suhteellisuusteoriaan liittyvä invariantti mielivaltaisissa käyräviivaisissa koordinaattimuunnoksissa voidaan nähdä eräänlaisena lokaalina *Poincarén invarianssina*. Poincarén muunnokset koostuvat Lorentzin muunnoksista⁵ sekä translaatioista avaruusajassa ja liittyvät gravitaatiovuorovaikutuksen lähteenä toimivaan energiaan, liikemäärään, jännitykseen ja pyörimismäärään. Gravitaatiokentän lähteenä toimivaan energia- ja liikemääräjakamaan liittyvä symmetria ei kuitenkaan ole koko Poincarén muunnosryhmän invariantti, vaan sen osan — aika-avaruuden translaatio- ja rotaatiomuunnosten invariantti. Laakeassa avaruusajassa tilaulottuvuuksien translaatioinvariantti antaa liikemäärän säilymisen, ajansiirtoinvariantti energian säilymisen ja rotaatioinvariantti pyörimismäärän säilymisen⁶.

Kaarevaan avaruusaikaan säilymlakien ja symmetrioiden yhteys voidaan liittää ns. *Killingin vektoreiden*⁷ ξ_μ avulla. Vektorit ξ_μ edustavat vektorikenttää infinitesimaalisissa koordinaattimuunnoksissa

$$x'^\alpha = x^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha(x)$$

kaava 31

ja toteuttavat ns. *Killingin yhtälön*

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$$

kaava 32

Jokainen lineaarisesti riippumaton Killingin vektori edustaa yhtä avaruusajan symmetriaa. Suurin mahdollinen määrä lineaarisesti riippumattomia Killingin vektoreita, ja siten myös avaruusajan symmetrioita, on kymmenen. Nämä symmetriat sisältyvät laakeaan avaruusaikaan neljänä riippumattomana translaationa, kolmena riippumattomana rotaationa, ja kolmena riippumattomana Lorentzin puskuna. Kaarevassa avaruusajassa nämä kaikki symmetriat ovat läsnä ainoastaan vakiokaarevuuden omaavissa avaruusajoissa, kuten esimerkiksi

⁵Ks. esim. D’Inverno, tai Ohanian & Ruffini. Molemmista kirjoista löytyy Lorentz-muunnoksesta tietoa useiden sivujen verran.

⁶Ks. esim. Ryder; luku 3.2.

⁷Ks. esim. D’Inverno; luku 7.7; tai Ohanian & Ruffini; luku 6.8.

homogeenisissa, isotrooppisissa maailmankaikkeuden malleissa — *Friedmannin-Lemaitren malleissa*⁸.

Energian ja liikemäärän säilyminen saadaan Killingin vektorin ξ_μ ja neliliikemäärän $P^\mu = mdx^\mu/d\tau$ sisätulon derivaatasta pitkin geodeesia seuraavasti

neliliikemäärän
säilyminen

$$\frac{d}{d\tau} \xi_\mu P^\mu = \xi_\mu \frac{dP^\mu}{d\tau} + P^\mu \frac{d\xi_\mu}{d\tau}$$

kaava 33

Soveltamalla yleisen suhteellisuusteorian geodeesiyhtälöä⁹

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\alpha\nu} P^\alpha \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

kaava 34

ja kovariantin derivaatan määritelmää¹⁰

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_\mu}{d\tau} &= \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \left(\nabla_\nu \xi_\mu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \xi_\alpha \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned}$$

kaava 35

saadaan kaava 33 muotoon

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \xi_\mu P^\mu &= -\xi_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\nu} P^\alpha \frac{dx^\nu}{d\tau} + P^\mu \nabla_\nu \xi_\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} + P^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \xi_\alpha \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \nabla_\nu \xi_\mu P^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \frac{1}{2m} \left(\nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu \right) P^\mu P^\nu \end{aligned}$$

kaava 36

missä sulkulauseke on nolla Killingin yhtälön (kaava 32) mukaan. Näin ollen siis

$$\xi_\mu P^\mu = [\text{vakio}]$$

kaava 37

kuvaten liikemäärän ja energian säilymistä.

Suhteellisuusteorian näyttää olevan pelkästään translaatiosymmetrioiden mittateoria. Teoriaa on kuitenkin pyritty laajentamaan käsittämään koko Poincarén ryhmää ns. *torsion*

torsio

$$T^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$$

kaava 38

avulla. Torsio on nollasta eroava *Christoffelin symbolin* $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$:n ollessa epäsymmetrinen. Epäsymmetrisyyden seurauksena avaruusaajan geometria olisi kaareutunut myös pienessä mittakaavassa.

Nollasta eroavan torsion sisältävää gravitaatioteoriaa kutsutaan *Einsteinin-Cartanin teoriaksi*. Teoria pyrkii perustelemaan torsiota perushiukkasten sisäisellä spinillä. Sisäinen spin on kuitenkin ongelma esimerkiksi kvarkkien tapauksessa. Nämä hiukkaset voivat hyvinkin koostua vielä pienemmistä hiukkasista, jolloin niiden spin olisi summa rakennusosasten

Einstein-Cartan
-teoria

⁸Ohanian & Ruffini, luku 9.

⁹Ks. esim. Ohanian & Ruffini; luvut 6.3 ja 6.4.

¹⁰Kovariantti derivaatta yleisestä tensorista on muotoa

$$\nabla_\chi T^\alpha_{\beta\dots} = \partial_\chi T^\alpha_{\beta\dots} + \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon} T^\delta_{\beta\dots} + \dots - \Gamma^\delta_{\beta\chi} T^\alpha_{\delta\dots} - \dots$$

sisäisestä spinistä ja pyörimismäärästä. Tämä epätietoisuus torsion lähteestä heikentää teorian fysikaalista merkitystä.

E.5.2 Lokaali symmetria

Seuraavaksi paneudumme symmetrian ja mittakentän väliseen yhteyteen lokaalin symmetriavaatimuksen avulla. Pyrimme aluksi hakemaan mittakentän sähkömagneettiselle vuorovaikutukselle lähtemällä sähkömagneettisen kentän vaihesiirrosta. Gravitaation tapauksessa haemme yhteyttä yleisen suhteellisuusteorian koordinaattimuunnoksen ja lineaarisen approksimaation mittamuunnoksen välille.

E.5.2.1 Sähkömagneettinen tapaus

globaalisuus

Sähkömagneettisessa vuorovaikutuksessa säilyvä suure on sähkövaraus Q , johon liittyvä kvanttitekaaninen hermiittinen operaattori on \hat{Q} . Kompleksiseen sähkömagneettiseen kenttään $\psi(x)$, joka liittyy varauksiltaan ne oleviin hiukkasiin¹¹, tämä operaattori aiheuttaa n :ään verrannollisen vaihesiirron

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-ine\theta} \psi(x)$$

kaava 39

Nyt mikä tahansa havaittava suure, kvanttitekaaninen odotusarvo, sisältää jossakin muodossa ψ^* :n ja ψ :n tulon. Tällaisessa tulossa vaihetekijät katoavat antaen invariantin sisätulon

$$\psi'^*(x)\psi'(x) = e^{ine\theta} \psi^*(x) e^{-ine\theta} \psi(x) = \overbrace{e^{ine\theta} e^{-ine\theta}}^{=1} \psi^*(x)\psi(x) = \psi^*(x)\psi(x)$$

kaava 40

Lisäksi, koska θ on vakio on lauseke invariantti myös paikkaderivaattoja sisältävässä odotusarvossa

$$\psi'^*(x)\partial_\mu\psi'(x) = e^{ine\theta} \psi^*(x)\partial_\mu e^{-ine\theta} \psi(x) = \overbrace{e^{ine\theta} e^{-ine\theta}}^{=1} \psi^*(x)\partial_\mu\psi(x) = \psi^*(x)\partial_\mu\psi(x)$$

kaava 41

infinitesimaalinen vaihemuunnos

θ :n ollessa hyvin pieni (infinitesimaalinen), on edellä kuvattu muunnos ilmaistavissa Taylorin sarjakehitelmän avulla *infinitesimaalisena vaihemuunnoksena*

$$\psi'(x) = (1 - ine\theta)\psi(x)$$

kaava 42

jonka sisätulo on

$$\begin{aligned} \psi'^*(x)\psi'(x) &= (1 + ine\theta)\psi^*(x)(1 - ine\theta)\psi(x) \\ &= (1 + (ne\theta)^2)\psi^*(x)\psi(x) \end{aligned}$$

kaava 43

Muunnokset ovat globaaleja johtuen juuri θ :n vakioisuudesta kaikissa avaruusajan pisteissä, jolloin havaittu invarianssi on globaali invarianssi.

lokaalisuus

Laajennamme nyt muunnoksemme eri suuruiseksi avaruusajan eri pisteissä, jolloin globaali vaihemuunnoksemme θ vaihtuu lokaaliksi vaihemuunnokseksi $\theta(\mathbf{x})$. Tällöin

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-ine\theta(x)} \psi(x)$$

kaava 44

jonka sisätulo on

¹¹ e on elektronin sähkövaraus.

$$\psi'^*(x)\psi'(x) = e^{ine\theta(x)}\psi^*(x)e^{-ine\theta(x)}\psi(x) = \psi^*(x)\psi(x)$$

kaava 45

Tämäkin funktio on invariantti $\psi^*\psi$:n kaltaisissa lausekkeissa. On kuitenkin huomattava invarianssin katoaminen odotusarvon antavan operaattorin sisältäessä paikkaderivaattoja, sillä tällöin syntyvä lauseke sisältää myös $\theta(x)$:n derivaattoja.

$$\begin{aligned}\psi'^*(x)\partial_\mu\psi'(x) &= e^{ine\theta(x)}\psi^*(x)\partial_\mu e^{-ine\theta(x)}\psi(x) \\ &= e^{ine\theta(x)}\psi^*(x)e^{-ine\theta(x)}\left\{[-ine\partial_\mu\theta(x)]\psi(x) + \partial_\mu\psi(x)\right\} \\ &= \psi^*(x)\partial_\mu\psi(x) - ine\psi^*(x)\partial_\mu\theta(x)\psi(x)\end{aligned}$$

kaava 46

missä jälkimmäinen termi rikkoo invarianssin.

Taylorin sarjakehityksen avulla vaihemuunnos saadaan infinitesimaaliseen muotoon

$$\psi'(x) = [1 - ine\theta(x)]\psi(x)$$

*infinitesimaalinen
vaihemuunnos*

kaava 47

Määritellään tästä muunnetun ja muuntamattoman aaltofunktion erotus

$$\delta\psi(x) \equiv \psi'(x) - \psi(x) = -ine\theta(x)\psi(x)$$

kaava 48

jolloin aaltofunktion osittaisderivaatalle sama on

$$\delta[\partial_\mu\psi(x)] = -ine\theta(x)\partial_\mu\psi(x) - ine[\partial_\mu\theta(x)]\psi(x)$$

kaava 49

Ensimmäinen termi on aikaisempaa invarianttia muotoa (kaava 48). Tämän lisäksi olemme saaneet ongelmallisen toisen termin, joka rikkoo haluamamme lokaalien muunnosten invarianssin. Saavutamme lokaalin invarianssin korvaamalla tavallisen osittaisderivaatan kovariantilla derivaatalla $D_\mu\psi$, jonka vaadimme muuntuvan

$$\delta[D_\mu\psi(x)] = D'_\mu\psi'(x) - D_\mu\psi(x) = -ine\theta(x)D_\mu\psi(x)$$

kaava 50

Tämä saadaan aikaan asettamalla

$$D_\mu = \partial_\mu + ineA_\mu$$

kaava 51

missä A_μ on sähkömagneettinen vektorikenttä

$$A_\mu = (\phi, \vec{A})$$

kaava 52

jonka muoto valitaan siten, että kaava 50 toteutuu.

A_μ :n määrittämiseksi sijoitamme D_μ :n (kaava 51) $\delta[D_\mu\psi(x)]$:n lausekkeeseen (kaava 50) ja käytämme $\partial_\mu\psi(x)$:n variaatiota (kaava 49), jolloin saamme

$$\begin{aligned}
\delta[D_\mu \psi(x)] &= \delta[(\partial_\mu + ineA_\mu)\psi(x)] \\
&= \delta[\partial_\mu \psi(x)] + \delta[ineA_\mu \psi(x)] \\
&= -ine\theta(x)\partial_\mu \psi(x) - ine[\partial_\mu \theta(x)]\psi(x) + ine\delta A_\mu \psi(x) + ineA_\mu \delta\psi(x) \\
&= -ine\theta(x)\partial_\mu \psi(x) - ine[\partial_\mu \theta(x)]\psi(x) + ine\delta A_\mu \psi(x) + ineA_\mu [-ine\theta(x)\psi(x)]
\end{aligned}$$

kaava 53

Toisaalta on (kaava 50)

$$\begin{aligned}
\delta[D_\mu \psi(x)] &= -ine\theta(x)D_\mu \psi(x) \\
&= -ine\theta(x)[\partial_\mu + ineA_\mu]\psi(x) \\
&= -ine\theta(x)\partial_\mu \psi(x) + (ne)^2 \theta(x)A_\mu \psi(x)
\end{aligned}$$

kaava 54

Näistä saadaan

$$ine\delta A_\mu \psi(x) - ine[\partial_\mu \theta(x)]\psi(x) = 0$$

kaava 55

joka on voimassa mikäli asetamme sähkömagneettisen potentiaalinn mittamuunnoksen

$$\delta A_\mu(x) = \bar{o}_\mu \theta(x)$$

kaava 56

Sähköisen varauksen säilymisestä sekä siihen liittyvästä invarianssista lokaalissa infinitesimaalisessa vaihemuunnoksessa saadaan invarianssi mittamuunnoksessa sekä sähkömagneettiseksi kentäksi osoittautuva mittakenttä.

E.5.2.2 Gravitaation tapaus

Yleisessä suhteellisuusteoriassa mittapotentialien roolissa ovat *Christoffelin symbolit*

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu})$$

kaava 57

joita eivät ole dynaamisesti riippumattomia mittapotentialeja, vaan riippuvat ylläolevan relaation mukaisesti metriikasta $g_{\mu\nu}(x)$. Toisin sanoen teorian mittapotentialit ovat metriikan derivaattojen funktioita. Seuraavassa pyrimme antamaan yhteyden yleisen suhteellisuusteorian koordinaattimuunnoksen ja jonkin mittamuunnoksen välille. Saatava mittamuunnos tulee osoittautumaan lineaarisen approksimaation mittamuunnokseksi.

Teorian lokaali symmetria on invarianssi mielivaltaisissa käyräviivaisissa koordinaattimuunnoksissa

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu$$

kaava 58

joita saavat infinitesimaalisen muodon

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \alpha \xi^\mu(x)$$

kaava 59

missä infinitesimaalinen $\alpha \ll 1$ ja $\xi^\mu(x)$ on vektorikenttä.

Haetaan seuraavaksi metriikan muutos tässä infinitesimaalisessa muunnoksessa. Nyt *metriikan muutos* derivoimalla infinitesimaalinen koordinaattimuunnos saadaan

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} = \delta_{\rho}^{\mu} + \alpha \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}}$$

kaava 60

joka metrisen tensorin koordinaattimuunnokseen sijoitettuna tuottaa

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma}(x) \\ &= \left(\delta_{\rho}^{\mu} + \alpha \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \right) \left(\delta_{\sigma}^{\nu} + \alpha \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right) g^{\rho\sigma}(x) \\ &\approx g^{\mu\nu}(x) + g^{\rho\nu}(x) \alpha \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}} + g^{\mu\sigma}(x) \alpha \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \end{aligned}$$

kaava 61

missä on jätetty pois α^2 - verrannolliset termit sekä vaihdettu kahdessa jälkimmäisessä termissä $g'^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$. Tämä voidaan tehdä ottaen huomioon, että näiden kahden metriikan välinen ero on luokkaa α ja kaksi viimeistä termiä sisältävät jo α :n. Sama koordinaattimuunnos metriikalle voidaan suorittaa Taylorin sarjakehitelmällä seuraavasti

$$g'^{\mu\nu}(x'(x)) = g'^{\mu\nu}(x + \alpha \xi) \approx g'^{\mu\nu}(x) + \alpha \xi^{\rho} \left. \frac{\partial g'^{\mu\nu}(x')}{\partial x'^{\rho}} \right|_{x'=x} \approx g'^{\mu\nu}(x) + \alpha \xi^{\rho} \frac{\partial g^{\mu\nu}(x)}{\partial x^{\rho}}$$

kaava 62

Nyt kahta edellistä relaatiota käyttämällä saadaan

$$g'^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) - \alpha \xi^{\rho} \frac{\partial g^{\mu\nu}(x)}{\partial x^{\rho}} + \alpha g^{\rho\nu}(x) \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}} + \alpha g^{\mu\sigma}(x) \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}$$

kaava 63

Mikäli liikumme melkein laakealla avaruusajan alueella, on metriikka hyvin lähellä Minkowskin laakeata metriikkaa $\eta^{\mu\nu}(x)$.

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}(x) + \kappa h_{\mu\nu}(x)$$

kaava 64

missä $\kappa h_{\mu\nu}(x)$ on hyvin pieni. Nyt koska

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$$

kaava 65

on

$$\left(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \right) \left(\eta^{\nu\rho} - \kappa h^{\nu\rho} \right) = \delta_{\mu}^{\rho} - \overbrace{O(\kappa^2)}^{\approx 0}$$

kaava 66

josta saadaan

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu}(x) - \kappa h^{\mu\nu}(x)$$

kaava 67

sillä on oltava

$$g_{\mu\nu}(x)g^{\nu\rho}(x) = \delta_{\mu}^{\rho}$$

kaava 68

Nyt yhdistämällä tämä ja kaava 63 saadaan

$$\begin{aligned} \overbrace{\eta'^{\mu\nu}(x)}^{=\eta^{\mu\nu}(x)} - \kappa h'^{\mu\nu}(x) &= \eta^{\mu\nu}(x) - \kappa h^{\mu\nu}(x) - \alpha \xi^{\rho} \frac{\partial[\eta^{\mu\nu}(x) - \kappa h^{\mu\nu}(x)]}{\partial x^{\rho}} \\ &+ \alpha [\eta^{\rho\nu}(x) - \kappa h^{\rho\nu}(x)] \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}} + \alpha [\eta^{\mu\sigma}(x) - \kappa h^{\mu\sigma}(x)] \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \\ &\Rightarrow \\ -\kappa h'^{\mu\nu}(x) &= -\kappa h^{\mu\nu}(x) + \overset{=0}{\alpha \kappa} \xi^{\rho} \frac{\partial h^{\mu\nu}(x)}{\partial x^{\rho}} - \overset{=0}{\alpha \kappa} h^{\rho\nu}(x) \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \\ &- \overset{=0}{\alpha \kappa} h^{\mu\sigma}(x) \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \alpha \eta^{\rho\nu}(x) \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}} + \alpha \eta^{\mu\sigma}(x) \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \\ &\Rightarrow \\ -\kappa h'^{\mu\nu}(x) &= -\kappa h^{\mu\nu}(x) + \alpha \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \alpha \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x_{\nu}} \end{aligned}$$

kaava 69

josta saadaan edelleen

$$-\kappa h'^{\mu\nu}(x) = -\kappa h^{\mu\nu}(x) + \alpha \partial^{\nu} \xi^{\mu} + \alpha \partial^{\mu} \xi^{\nu}$$

kaava 70

mittamuunnos

Verrataan saatua tulosta lineaarisen gravitaatioteorian mittamuunnokseen

$$h'^{\mu\nu}(x) = h^{\mu\nu}(x) + \partial^{\nu} \Lambda^{\mu} + \partial^{\mu} \Lambda^{\nu}$$

kaava 71

jolloin havaitaan näiden olevan samoja mikäli asetamme (vrt. kaava 56)

$$\alpha \xi^{\mu}(x) = -\kappa \Lambda^{\mu}(x)$$

kaava 72

missä $\xi^{\mu}(x)$ liittyy yleisen suhteellisuusteorian infinitesimaaliseen koordinaattimuunnokseen ja $\Lambda^{\mu}(x)$ lineaarisen gravitaatioteorian mittamuunnokseen. Näin ollen..

Yleisen suhteellisuusteorian invarianssia infinitesimaalisissa koordinaattimuunnoksissa voidaan pitää lineaarisen gravitaatioteorian invarianssina mittamuunnoksessa. Ehkä siis yleiset äärelliset koordinaattimuunnokset toimivat yleisen suhteellisuusteorian yleistettyinä mittamuunnoksina. Tällöin yleisen suhteellisuusteorian mittasymmetriaksi tulisi yleisen invarianssin periaate.

E.6 Mittaperiaate

Aiemmin havaittiin varatun hiukkasen liikeyhtälön mittainvarianssin vaativan hiukkasen aaltoyhtälön mittamuunnoksen. Toisaalta voidaan ottaa lähtökohdaksi aaltofunktion mittamuunnos (kaava 7) ja vaatia liikeyhtälön invarianssia tämän mittamuunnoksen alla. Tätä lähestymistapaa kutsutaan *mittaperiaatteen*ksi. Sähkömagnetismin liittyvänä esimerkkinä käsittelemme relativistisia spin- $\frac{1}{2}$ hiukkasia.

Vapaata relativistista spin- $\frac{1}{2}$ hiukkasta kuvaa Diracin yhtälö ¹²

¹² Ks. Esim. Ryder, Quantum Field Theory.

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\Psi + \beta m\Psi$$

kaava 73

missä

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} \equiv \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

kaava 74

Nyt suorittamalla aaltofunktion mittamuunnos saadaan

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t} e^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' &= -i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} e^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' + \beta m e^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' \\ &\Rightarrow \\ i\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial t} + iq\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}\Psi'\right) e^{iqf(\vec{x},t)} &= -i(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + iq\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}f)\Psi' e^{iqf(\vec{x},t)} + \beta m\Psi' e^{iqf(\vec{x},t)} \\ &\Rightarrow \\ i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\frac{\partial f}{\partial t}\right)\Psi' &= -i\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\nabla} + iq\vec{\nabla}f\right)\Psi' + \beta m\Psi' \end{aligned}$$

kaava 75

joka sisältää invarianssiin nähden Diracin yhtälön derivaatoista $\partial\Psi/\partial t$ ja $\nabla\Psi$ syntyvät ylimääräiset termit $\partial f/\partial t$ ja $\vec{\nabla}f$ (merkitty *:llä). Nyt mittaperiaatteen mukaisesti vaadimme Diracin yhtälön mittainvarianssia ja lisäämme yhtälöön termejä, jotka mittamuunnoksessa aikaansaavat *-termien katoamisen. Muuntamalla Diracin yhtälössä

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi \\ \vec{\nabla} &\rightarrow \vec{\nabla} - iq\vec{A} \end{aligned}$$

kaava 76

saadaan

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi\right)\Psi = -\vec{\alpha}\cdot(\vec{\nabla} - iq\vec{A})\Psi + \beta m\Psi$$

kaava 77

joka aaltofunktion mittamuunnoksessa käyttäytyy seuraavasti

$$\begin{aligned}
i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi\right)e^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' &= -\vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} - iq\vec{A})e^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' + \beta me^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' \\
&\Rightarrow \\
ie^{iqf(\vec{x},t)}iq\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}\Psi' + ie^{iqf(\vec{x},t)}\frac{\partial \Psi'}{\partial t} - q\phi e^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' \\
&= -\vec{\alpha} \cdot \left(e^{iqf(\vec{x},t)}iq(\vec{\nabla}f)\Psi' + e^{iqf(\vec{x},t)}\vec{\nabla}\Psi' - iq\vec{A}e^{iqf(\vec{x},t)}\Psi'\right) + \beta me^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' \\
&\Rightarrow \\
i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi\right)e^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' &= -\vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} - iq\vec{A})e^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' + \beta me^{iqf(\vec{x},t)}\Psi' \\
&\Rightarrow \\
i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi\right)\Psi' &= -\vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} - iq\vec{A})\Psi' + \beta m\Psi'
\end{aligned}$$

kaava 78

ollen siten mittainvariantti.

Mittaperiaatteen perusta on vaatimus lokaalista symmetriasta, joka taas kuvaa fysikaalisten lakien invarianssia lokaaleissa muunnoksissa. Mittaperiaatteen mukaan jokaisen jatkuvan symmetrian on oltava luonteeltaan lokaali symmetria. Tämä vaatimus esittää luonnon omaavan huomattavasti suuremman symmetrian kuin mitä tavallisesti käsitetään. On kuitenkin huomattava, että niin sähkömagneettinen vuorovaikutus kuin yleinen suhteellisuusteoriakin sisältävät lokaalin symmetrian eikä asetettu vaatimus näin olekaan aivan tuulesta temmattu.

E.7 Johtopäätökset

Säilyvät suureet liittyvät Noetherin teoreeman kautta (jatkuviin) symmetrioihin, jotka mittaperiaatteen mukaisesti ovat luonteeltaan lokaaleja. Lokaalin symmetrian kautta invarianssit voidaan liittää mittakenttään, jonka kanssa säilyvä suure vuorovaikuttaa. Saadaan siis säilyvän suureen, symmetrian ja mittakentän yhdistävä suljettu kehä (Kuva 6).

Sähkömagneettisen teorian säilyvään suureeseen, sähkövaraukseen, liittyy invarianssi aaltofunktion vaihemuunnoksessa. Tähän vaihemuunnokseen voidaan lokaalin invarianssin kautta liittää mittakenttä. Näin siis sähkövarauksen säilymisestä sekä siihen liittyvästä invarianssista lokaalissa infinitesimaalisessa vaihemuunnoksessa saadaan invarianssi mitta-muunnoksessa sekä sähkömagneettiseksi kentäksi osoittautuva mittakenttä (kaava 56).

Yleisen suhteellisuusteorian invarianssina toimii invarianssi mielivaltaisissa käyräviivaisissa koordinaattimuunnoksissa. Nämä muunnokset voidaan lokaalisti nähdä Poincarén muunnoksina, jotka siten toimivat teorian lokaalina invarianssina. Gravitaation lähteenä toimiviin energiaan, liikemäärään, jännitykseen ja pyörimismäärään liittyy invarianssi translaatio- ja rotaatiomuunnoksissa, joka laakeassa avaruusajassa on verrattain helppo todistaa¹³. Yleisessä kaarevassa avaruusajassa symmetrioita esittää ns. *Killingin vektori*, jonka avulla voidaan osoittaa symmetrioiden yhteys säilyviin suureisiin — energiaan ja liikemäärään (kaava 37).

Yleisestä mittaperiaatteesta gravitaation erottaa kuitenkin se, ettei gravitaatiokentän lähteisiin liity koko teorian invarianssi, vaan ainoastaan sen osa — translaatio- ja rotaatio-invarianssi. Mittasymmetriaa on yritetty laajentaa käsittämään koko Poincarén ryhmää käyttämällä ns. torsiota (kaava 38), joka syntyi perushiukkasten sisäisen spinin vaikutuksesta. Laajennusteorian arvoa vähentää hieman tietämättömyytemme näiden perushiukkasten sisäisestä rakenteesta. Nämä hiukkaset voivat koostua vielä pienemmistä hiukkasista, jolloin niiden spin olisi summa rakennusosasten keskinäisestä pyörimismäärästä ja sisäisestä spinistä.

¹³ Ryder; luku 3.2.

Lokaalin symmetrian kautta voidaan kuitenkin kytkeä yleisen suhteellisuusteorian invarianssi mielivaltaisissa käyräviivaisissa muunnoksissa mittainvarianssiin. Tämä onnistuu olettamalla gravitaatiokentän olevan heikko, jolloin voimme soveltaa gravitaation lineaarista approksimaatiota. Näin saadaan tulos, joka antaa yleisen suhteellisuusteorian koordinaattimuunnoksen ja lineaarisen approksimaation mittamuunnoksen vastaavuuden (kaava 72). Tämä taas saattaa yleistyä äärellisten yleisten koordinaattimuunnoksien toimimiseksi yleisen suhteellisuusteorian yleistettyinä mittamuunnoksina. Tällöin yleisen suhteellisuusteorian mittasymmetriaksi tulisi yleisen invarianssin periaate¹⁴.

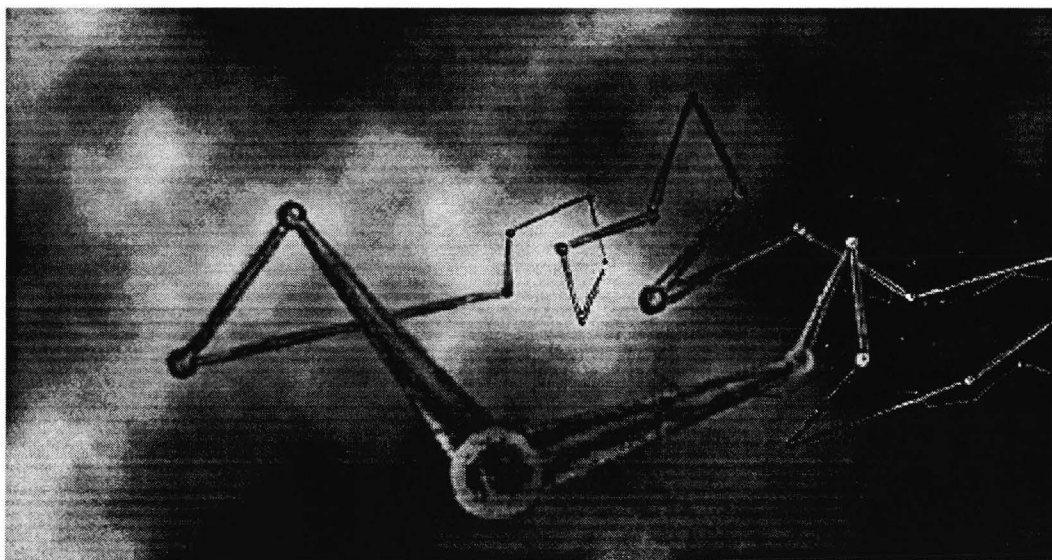
Näin lopuksi voidaan todeta gravitaation mittateorian olevan muiden perusvuorovaikutusten mittateorioihin verrattuna keskeneräinen. Teorian keskeneräisyydestä huolimatta luonnon säilyvien suureiden, invarianssien ja mittakenttien välistä yhteyttä ei pidä unohtaa — luonto ei vain ole, sillä on aina syy.

¹⁴ Toisaalta koko yleinen suhteellisuusteoria voidaan johtaa aloittamalla yleisen invarianssin vaatimuksesta; ks. esim. D’Inverno: *Introducing Einstein’s Relativity*.

E.8 Lähteet

Alla ovat pääasialliset lähteet, joista tämän luvun tiedot on kerätty. Täydellinen lähdeluettelo löytyy tutkielman lopusta.

1. **Boas**, Mary L. **Mathematical Methods in the Physical Sciences**, 2nd Ed., John Wiley & Sons Inc., New York; 1983.
2. **Lehto**, Markku **Yleinen Suhteellisuusteoria**, Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1995.
3. **Lehto**, Markku **Yleisen Suhteellisuusteorian Jatkokurssi**, Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1996.
4. **Mandl**, Franz **Quantum Mechanics**, John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England; 1992.
5. **Martin**, B.R. **Particle Physics**, John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England; 1995.
6. **Mills**, Robert **Gauge Fields**, Lehtiartikkeli, Am. J. Phys. 57 (6); June 1989.
7. **Ohanian**, Hans **Gravitation and Spacetime**, 2nd Ed., W.W. Norton & Company Inc., New York; 1994.
8. **Ruuskanen**, Vesa **Hiukkasfysiikka 1**, Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1996.
9. **Ryder**, Lewis H. **Quantum Field Theory**, Cambridge University Press, Cambridge; 1987.



F. Kvanttigravitaatio

Nykyfysiikka nojaa kahteen eri pituiseen kainalosauvaan — kvanttimekaniikkaan ja yleiseen suhteellisuusteoriaan. Nämä kaksi fysiikan teoriaa eroavat kylliksi toisistaan sotkeakseen sauvojen yhtäaikaisen käytön. Yleinen suhteellisuusteoria kuvaa mainiosti luonnon käyttäytymistä suurilla etäisyyksillä, kvanttimekaniikan keskittyessä käsittelemään lyhyitä etäisyyksiä. Nämä kaksi teoriaa yhtenäistävä teoria eli *kvanttigravitaatio* on osoittautunut hankalaksi muotoilla. Onnistunut teoria kvanttigravitaatiosta tarjoaisi suunnattoman hyödyn tutkimukseen tähtitieteestä ja mustista aukoista, kosmologiasta ja maailmankaikkeuden synnystä, puhumattakaan fysiikan todellisesta ymmärtämisestä kaikki luonnon vuorovaikutukset yhdistävänä teoriana.

Kvanttigravitaation ongelmaa on lähestytty useilla perinteisiin ja radikaaleihin tapoihin jakautuvilla keinoilla. Perinteisiin keinoihin kuuluvat kanoninen kvantitus ja polkuintegraali-kvantitus. Radikaaleihin keinoihin kuuluvat taas keinot, joissa avaruusaikaa ja materiaa käsitellään perinteisestä tavasta poikkeavilla keinoilla. Näihin kuuluvat käsitellyn avaruusaikaa diskretisoivan Reggen laskennan lisäksi esimerkiksi *hilateoriat* ja *säieteoriat*. Hilateorioissa kvanttigravitaatiota lähestytään jatkuvan moniston 'päälle' asetetun satunnaishilan kautta. Supersäieteoriassa taas ongelmaa pyritään ratkaisemaan kuvaamalla materiaa yksiulotteisilla säikeillä ja niiden erilaisilla värähtelymoodeilla.

Keskitymme nyt yksiulotteiseen maailmankaikkeuteen¹, johon sovellamme aiemmin käsiteltyjä tietoja lineaarisesta gravitaatioteoriasta, mittateoriasta ja Reggen laskennasta. Luomme yksiulotteisen hila-maailmankaikkeuden, jonka pyrimme kvantittamaan polkuintegraali-kvantitusta käyttäen statistiselle fysiikalle analogisin keinoin.

¹ Lähestymistapa perustuu Markku Lehdon aiheesta tekemään tutkimukseen sekä tutkimuksen pohjalta luennoimaansa Yleisen Suhteellisuusteorian Jatkokurssin luentosarjaan Jyväskylän yliopistossa keväällä 1996.

F.1 Yksiulotteinen maailmankaikkeus

invarianssit ja symmetriat

Lähestymistavan ohjenuorana toimivat invarianssit ja symmetriat, joita jo käsitelimme aikaisemmassa luvussa. Tällöin havaitsimme kuinka infinitesimaalista koordinaattimuunnosta voidaan pitää lineaarisen gravitaatioteorian mittamuunnoksena asettamalla $\alpha_{\xi}^{\mu}(x) = \kappa \Lambda^{\mu}(x)$. Lienee näin ollen perusteltua toivoa äärellisten yleisten koordinaattimuunnosten toimivan yleisen suhteellisuusteorian yleistettyinä mittamuunnoksina. Tällöin yleisen invarianssin periaate olisi yleisen suhteellisuusteorian mittasymmetria. Yleisen invarianssin puolesta puhuu lisäksi inertiaali- ja gravitaatiomassan yhtäsuuruus mielivaltaisessa systeemissä. Tämän ekvivalenssin teoreettinen todentaminen olisi mahdotonta ilman yleisen invarianssin periaatetta².

Tulemme käyttämään Feynmanin polkuintegraalimenetelmää kvantittaessamme yksiulotteista maailmankaikkeutta. Reggen laskennan kvantisointia käsittelevässä luvussa D.7 totesimme, että integrointimittana olisi järkevää käyttää hyväksi jotakin invarianttia suuretta. Näin ollen matkalla yksiulotteiseen kvanttigravitaatioon etsimme yksiulotteisen maailmankaikkeuden invarianssin, josta taas pyrimme saamaan integrointimitan mahdollisesti analogioita hyväksi käyttäen. Aloitamme jatkumoteoriasta kuvaten yksiulotteista maailmankaikkeutta käyrällä, jonka sitten jaamme erillisiin Reggen kehikkoon viittaaviin simplekseihin.

F.1.1 Jatkumotapaus

Tarkastelemme tässä luvussa jatkumovaikutusta ja vaikutuksen invarianssia yksiulotteisessa tapauksessa. Edelleen katsomme kuinka yksiulotteinen metriikka muuntuu infinitesimaalisessa koordinaattimuunnoksessa. Aloitamme geodeettisesta käyrästä neliulotteisessa jatkumossa etenemällä neliulotteiseen jatkumovaikutukseen.

neliulotteinen jatkumo

Neliulotteisessa avaruusajassa parametriyhtälön $x^{\alpha} = x^{\alpha}(u)$ toteuttavan käyrän C viiva-elementti on

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu}$$

kaava 1

josta jakamalla infinitesimaalisella käyräparametrin neliöllä $(du)^2$ saadaan

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du}$$

kaava 2

Koska infinitesimaalisen lyhyt pituus käyrää C pitkin on ds , saadaan kahden pisteen u_1 ja u_2 välimatka käyrällä C integraalina

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} ds &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{du} du \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du}} du \equiv I \end{aligned}$$

kaava 3

On huomattava, että tämä integraali antaa geodeesin eli suurimman mahdollisen maailmanviivan kahden pisteen u_1 ja u_2 välillä. Tällainen kahden pisteen välinen geodeesi määritellään pisteiden välisen invariantin pituuden stationaarisuutena mielivaltaisiin (pieniin) maailmanviivan heilautuksiin nähden. Näin ollen kaava 3 antaa neliulotteisen avaruusajan (jatkumo)vaikutuksen I , jonka integrandi on Lagrangen funktio

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du}}$$

kaava 4

² Hans Ohanian, 1973.

Siirrytään nyt neliulotteisesta avaruusajasta yksiulotteiseen avaruuteen, jolloin pisteiden u_1 ja u_2 välimatka käyrällä C muotoutuu (kaava 3)

*yksiulotteinen
jatkuo*

$$\int_{u_1}^{u_2} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g(x)} \frac{dx}{du} \frac{dx}{du} du$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g(x)} dx \equiv I$$

kaava 5

antaen samalla lausekkeen *vaikutukselle* I (vrt. neliulotteinen tapaus yllä).

Metriikka muuntuu infinitesimaalisessa koordinaattimuunnoksessa³

$$x \rightarrow x' = x + \alpha \xi(x)$$

kaava 6

seuraavasti

$$g(x) \rightarrow g'(x') = \left(\frac{dx}{dx'} \right)^2 g(x)$$

kaava 7

Jatkumovaikutus (kaava 5) on invariantti tässä muunnoksessa sillä

$$\sqrt{g(x)} dx \rightarrow \sqrt{g'(x')} dx' = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx'} \right)^2 g(x)} dx' = \sqrt{g(x)} dx$$

kaava 8

Yksiulotteinen muunnosmatriisi on

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{d[x' - \alpha \xi(x)]}{dx'} = \left(1 - \alpha \frac{d\xi}{dx'} \right)$$

kaava 9

jolloin metriikka muuntuu (kaava 7)

³Muunnoksessa α on infinitesimaalinen siirtymäparametri ja ξ on sijaintia kuvaava x :n funktio.

$$\begin{aligned}
 g'(x') &= \left(1 - \alpha \frac{d\xi}{dx'}\right)^2 g(x) \\
 &= \left(1 - \alpha \frac{d\xi}{dx} \frac{dx}{dx'}\right)^2 g(x) \\
 &= \left[1 - \alpha \frac{d\xi}{dx} \left(1 - \alpha \frac{d\xi}{dx'}\right)\right]^2 g(x) \\
 &\approx \left(1 - \alpha \frac{d\xi}{dx}\right)^2 g(x) \\
 &= \left[1 - 2\alpha \frac{d\xi}{dx} + O(\alpha^2)\right] g(x) \\
 &= g(x) - 2\alpha \frac{d\xi}{dx} g(x)
 \end{aligned}$$

metriikan
infinitesimaalinen
muunnos

kaava 10

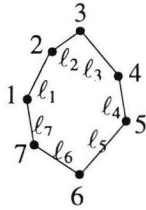
missä infinitesimaaliset α^2 termit on approksimoitu pois. Nyt siis metriikan muutos muunnoksessa on

$$\delta g(x) \equiv g'(x') - g(x) = -2\alpha \frac{d\xi}{dx} g(x)$$

kaava 11

Olemme nyt käsitelleet yksiulotteisen jatkumotapauksen lähtien jatkumovaikutuksesta ja päätyen infinitesimaalisten muunnosten kautta metriikan muutokseen kyseisissä muunnoksissa. Seuraavaksi pureudumme analogisen diskreetin hila-avaruuden rakentamiseen.

F.1.2 Yksiulotteinen hila-maailmankaikkeus



yksiulotteinen
diskreetti
maailmankaikkeus

Kuva 1. Yksiulotteinen ns. periodista reunaehtoä noudattava Reggen kehikko ($N = 7$).

Yksiulotteista maailmankaikkeutta kuvaava käyrä voidaan jakaa yksiulotteisiin laakeisiin simplekseihin — suoriin viivoihin. Jaamme maailmankaikkeutta kuvaavan viivan N :ään simpleksiin, jolloin saamme N kappaletta verteksejä eli hilapisteitä. Asetetaan lisäksi ns. periodinen reunaehto liittämällä viimeinen hilapiste ensimmäiseen.

Nyt meillä on siis yksiulotteinen maailmankaikkeus (Kuva 1) seuraavilla ehdoilla:

- N kappaletta hilapisteitä.
- N kappaletta hilapisteiden välisiä simpleksejä tai linkkejä.
- ℓ_n on hilapisteiden n ja $n+1$ välinen etäisyys.
- Periodinen reunaehto: $\ell_{N+1} = \ell_1$

Hilasysteemin vaikutuksen etsimiseen käytämme analogiaa jatkumon kanssa, missä vaikutuksena toimii kahden pisteen välinen etäisyys (kaava 5). Systeemin periodisuudesta johtuen kahden pisteen välisen etäisyyden sijaan otamme vaikutukseksi yksiulotteisen maailmankaikkeuden kokonaispituuden

$$I[l] \equiv L[l] = \sum_{n=1}^N \ell_n$$

kaava 12

joka tulee osoittautumaan mittainvariantiksi. Verrattaessa tätä jatkumoteorian vaikutukseen havaitaan integraalin muuttuneen summaukseksi kuten sopii odottaakin siirryttäessä jatkumosta diskreettiin hilaan. Lisäksi havaitaan selvä analogia linkin pituuden ja metriikan välillä. Jatkumoteorian metriikkaa $g(x)$ vastaa diskreetissä tapauksessa linkin neliö ℓ_n^2 . Tämä on tuttua

Reggen laskennan puolelta, missä linkkien pituudet niinkään vastaavat jatkumoteorian metriikkaa.

Infinitesimaalinen muunnos tässä yksiulotteisessa simpleksisessä maailmankaikkeudessa on (vrt. kaava 6)

$$l_n \rightarrow l'_n = l_n - \alpha(\xi_{n+1} - \xi_n)$$

kaava 13

Analogiana jatkumotapauksen metriikan muunnokselle (vrt. kaava 10) saadaan linkin pituuden neliön infinitesimaalinen muunnos

$$\begin{aligned} l_n'^2 &= \left(1 - \alpha \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l_n}\right)^2 l_n^2 \\ &= \left[1 - 2\alpha \frac{(\xi_{n+1} - \xi_n)}{l_n} + \alpha^2 \frac{(\xi_{n+1} - \xi_n)^2}{l_n^2}\right] l_n^2 \\ &= l_n^2 - 2\alpha l_n (\xi_{n+1} - \xi_n) + \alpha^2 (\xi_{n+1} - \xi_n)^2 \\ &= [l_n - \alpha(\xi_{n+1} - \xi_n)]^2 \end{aligned}$$

kaava 14

Linkin pituuden muutos muunnoksessa on siten (vrt. kaava 11)

$$\delta l_n \equiv l'_n - l_n = -\alpha(\xi_{n+1} - \xi_n)$$

kaava 15

missä $\alpha \xi_n$ luonnehtii hilapisteeseen n liitettävää diskreettiä mittamuunnosta. Nyt vaikutuksen eli koko maailmankaikkeuden pituuden variaatio on

$$\begin{aligned} \delta l[l] &= \delta L[l] \\ &= \sum_{n=1}^N \delta l_n \\ &= -\alpha \left(\sum_{n=1}^N \xi_{n+1} - \sum_{n=1}^N \xi_n \right) \\ &= -\alpha \left(\sum_{n=2}^{N+1} \xi_n - \sum_{n=1}^N \xi_n \right) \\ &= -\alpha (\xi_{N+1} - \xi_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

kaava 16

missä $\xi_{N+1} = \xi_1$ periodisuusehdon nojalla. Yksiulotteisen simpleksisen maailmankaikkeuden kokonaispituus on siis mittainvariantti ilmaisten hilavaikutukseen $L[l]$ liittyvän mitta-symmetrian!

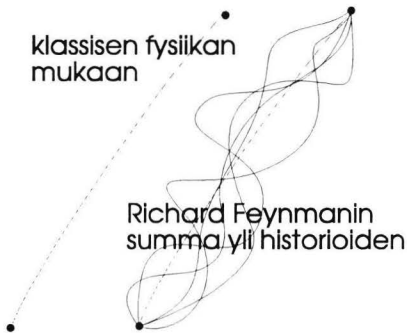
Olemme siirtyneet pois jatkumoon sijoitetusta koordinaatistopohjaisesta teoriasta. Sijaintia diskreetissä maailmankaikkeudessa ilmaisevat hilapisteet ja siirtymisen paikasta toiseen antavat hilapisteissä määritellyt mittamuunnokset.

F.2 Yksiulotteisen maailmankaikkeuden kvantisointi Feynmanin polkuintegraalimenetelmällä

Pyrimme seuraavaksi luomaan kvantisointimenetelmän yksiulotteiselle hilapisteistä koostuvalle maailmankaikkeudellemme käyttämällä Feynmanin polkuintegraalimenetelmää.

F.2.1 Polkuintegraalit

Klassisen fysiikan mukaan hiukkanen kulkee yhtä reittiä avaruusajassa alkutilasta lopputilaan. Richard Feynmanin mukaan hiukkaset eivät kuitenkaan seuraa vain tiettyä reittiä avaruusajassa, vaan kulkevat yhtä aikaa kaikkia mahdollisia reittejä (Kuva 2). Hiukkanen on



Kuva 2. Klassisen fysiikan mukaan hiukkanen seuraa vain yhtä rataa avaruusajassa, kun taas Richard Feynmanin mukaan hiukkanen seuraa kaikkia mahdollisia ratojaan yhtäaikaan.

ikäänkuin kaikkialla samanaikaisesti. Jokaisella näistä reiteistä, eli hiukkasen historioista, on oma todennäköisyytensä. Summaamalla nämä tarinat todennäköisyyksineen saamme tulokseksi useimmiten juuri klassisen fysiikan ennustamat tarinat. Tämä yhtäaikaisuus juontaa juurensa kvanttimekaniikkaan kuuluvasta Heisenbergin *epätarkkuusperiaatteesta*, jonka mukaan emme koskaan voi tarkasti tietää jonkin hiukkasen sijaintia ja nopeutta samanaikaisesti. Mitä tarkemmin selvitämme hiukkasen nopeuden, sitä vähemmän tiedämme sen sijainnista.

Gravitaation polkuintegraaliquantisoinnin perusajatus on selvittää todennäköisyys gravitaatio- ja materiakenttien siirtymiselle alkutilasta lopputilaan. Kenttien muutos seuraa klassisella rajalla yhtä ainoaa historiaa, aivan kuten hiukkanenkin seuraa klassisesti vain omaa ainokaista maailmanviivaansa. Todellisuudessa kentät saattavat kuitenkin siirtyä kaikkia mahdollisia historioita pitkin alkutilasta lopputilaan.

Tällöin siirtymän todennäköisyys saadaan summaamalla kaikkien mahdollisten historioiden todennäköisyydet. Mahdollisia historioita on yleensä ääretön määrä, jolloin "summa yli historioiden" muuttuu "integraaliksi yli historioiden". Polkuintegraaliquantisoinnin kannalta gravitaation kvantisoinnin perusongelma onkin juuri tämän integraalin laskeminen. Tämän integraalin antavan *Feynmanin tilasumman* eli *propagaattorin* perusmuoto on

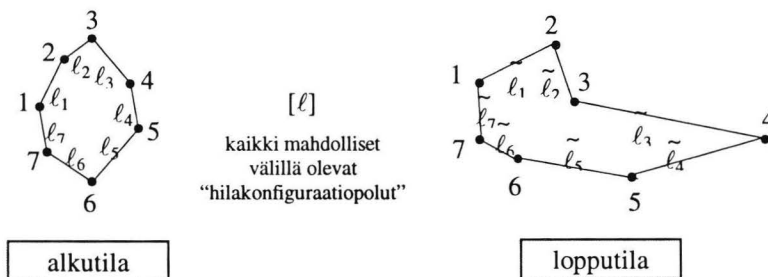
$$\langle \text{"lopputila"} | \text{"alkutila"} \rangle = \int_{\text{kaikki "tilat"}} d[\text{"tila"}] e^{\frac{i}{\hbar} I[\text{"tila"}]}$$

kaava 17

missä $d[\text{"tila"}]$ on integrointimitta kyseisessä tila-avaruudessa ja $I[\text{"tila"}]$ gravitaation vaikutus.

F.2.2 Feynmanin propagaattori hilasysteemille

Pyrimme nyt etsimään oikean tavan polkuintegraaliquantisointiin yksiuolotteiselle hila-maailmankaikkeudelle. Tällöin haluamme laskea todennäköisyyden hilasysteemin siirtymiselle alkutilasta lopputilaan. Tämä saadaan summaamalla/integroimalla yli kaikkien alku- ja lopputilan välillä olevien hilakonfiguraatiopolkujen (Kuva 3). Näin ollen



Kuva 3. Laskettaessa todennäköisyysamplitudia hilajärjestelmän siirtymisestä alkutilasta lopputilaan täytyy Feynmanin propagaattoria laskettaessa huomioida kaikki mahdolliset alkutilasta lopputilaan johtavat hilakonfiguraatiot.

todennäköisyysamplitudin tarkasteltavan hilajärjestelmän siirtymisestä kvanttitalasta

$|l_1, l_2, \dots, l_N\rangle$ kvanttitiilaan $|\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_N\rangle$ antaa edellä esitelty (kaava 17) Feynmanin propagaattori eli tilasumma

$$\langle \tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_N | l_1, l_2, \dots, l_N \rangle = \int_{\text{kaikki "polut"}} d[\text{"polku"}] e^{\frac{i}{\hbar} I[\text{"polku"}]}$$

kaava 18

joten ongelmaksi jää valita vaikutus $I[\text{"polku"}]$ sekä integrointimitta $d[\text{"polku"}]$.

Vaikutuksen I täytyy olla invariantti suure, jolloin luonnolliseksi valinnaksi yksiulotteisessa hilamaailmankaikkeudessa jää yksiulotteisen hilamaailmankaikkeuden (invariantti) kokonaispituus

$$I[\text{"polku"}] = L[l] = \sum_{n=1}^N l_n$$

kaava 19

Integrointimitan valitsemisessa lienee syytä käyttää analogiaa jatkumoteoriaan sekä jonkinlaista yhteyttä invarianttiin kokonaispituuteen. Jatkumoteorian (funktionaali)integrointimitta on muotoa

$$\int d\mu[g] = \prod_x dg(x) g^{g/2}(x)$$

kaava 20

josta analogiaa seuraamalla $d[\text{"polku"}]$:n yksinkertaisin mahdollisuus olisi siis

$$\int d[\text{"polku"}] = \prod_{n=1}^N \int_0^\infty d(l_n^2) l_n^\sigma \equiv \int d\mu[l]$$

kaava 21

muistaen linkin neliön vastaavan jatkumoteorian metriikkaa. Hila-avaruuden kokonaispituuden ollessa invariantti tiedetään ylläolevan integrointimitan olevan ainakin äärellinen.

Yksiulotteisen simpleksisen hila-maailmankaikkeutemme Feynmanin propagaattori on siis muotoa

$$\langle \tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_N | l_1, l_2, \dots, l_N \rangle = \prod_{n=1}^N \int_0^\infty d(l_n^2) l_n^\sigma e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{m=1}^N l_m}$$

kaava 22

F.2.3 Kvantisoidaan hila-avaruus

Pyrimme nyt löytämään keinon hila-maailmankaikkeuden kvantisoimiseksi etsimällä analogiaa statistisen fysiikan systeemistä lämpökylvyssä⁴. Etsimme vastinetta edellä esitellylle propagaattorille, jota sitten käytämme hila-avaruuden keskimääräisen linkin pituuden sekä avaruuden keskimääräisen kokonaispituuden kvanttifluktuaatioiden etsimiseen.

⁴Ks. esim. Mandl, Statistical Physics.

F.2.3.1 *Systeemi lämpökylvyssä*



Kuva 4. N hiukkasta sisältävä tilavuudeltaan V oleva systeemi lämpötilaltaan T olevassa lämpökylvyssä.

Tarkastellaan tilavuudeltaan vakioista systeemiä lämpökylvyssä siten, ettei systeemin ja lämpökylvyn välillä ole hiukkasten vaihtoa (Kuva 4). Lämpökylvyn suuruudesta johtuen lämpötila säilyy vakiona riippumatta systeemin ja lämpökylvyn välisestä lämmönvaihdosta. Nyt systeemin (makro)tilaa voidaan kuvaata tilavuudella, hiukkaslukumäärällä ja lämpötilalla. Vaihtoehtoisesti systeemin tilaa voidaan kuvata myös mikrotiloilla $1, 2, \dots, n, \dots$, jotka antavat tiedon systeemin tilasta pienemmässä mittakaavassa. Näin systeemin mikrotilojen määrittämiseksi voi riittää esimerkiksi systeemin ja lämpökylvyn muodostavien hiukkasten sijainnin ja liikemäärän antaminen. Edelleen systeemin eri mikrotiloja $1, 2, \dots, n, \dots$ voidaan luokitella tilojen energioilla $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$. Energioita käytettäessä on kuitenkin muistettava, etteivät energian arvot ole yksiselitteisiä eri mikrotilojen pystyessä omaamaan samoja energian arvoja.

F.2.3.2 *Yksiulotteisen hila-maailmankaikkeuden analogia systeemiin lämpökylvyssä*

Voimme nyt tarkastella hila-maailmankaikkeutta vertaamalla sitä lämpökylvyssä olevaan hiukkassysteemiin. Haemme analogiaa samaistamalla hilasysteemin hilapisteet hiukkassysteemin hiukkasiin. Tällöin voimme ajatella hila-avaruuden linkkien pituuksien vastaavan hiukkasjärjestelmän eri mikrotiloja ja hila-avaruuden kokonaispituuden $L(\ell)$ hiukkasjärjestelmän eri mikrotilojen energioita E_n .

F.2.3.3 *Lämpökylvyssä olevan systeemin keskimääräinen energia*

Todennäköisyyden sille, että systeemi lämpökylvyssä on mikrotilassa n energialla E_n antaa ns. *Boltzmannin jakauma*

$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$$

kaava 23

missä Z on *partitiofunktio* eli *tilasumma*. Eksponenttifunktiossa esiintyvä β on Boltzmannin vakioista k ja lämpötilasta T koostuva *lämpötilaparametri*

$$\beta \equiv \frac{1}{kT}$$

kaava 24

Partitiofunktiolla käsitetään systeemiin liittyvien mikrotilojen summaamista yhdeksi olioksi. Näin ollen partitiofunktiota voidaan käyttää jonkin tilan todennäköisyyden laskemisessa jakolaskun nimittäjänä

$$P(A) = \frac{A}{Z}$$

kaava 25

missä A on tapahtuma, Z kaikista tapahtumista muodostettu tilasumma ja $P(A)$ tapahtuman A todennäköisyys. Partitiofunktio toimii siis *normitusvakiona* todennäköisyydelle varmistaen kaikkien tapahtumien todennäköisyyksien summautumisen yhdeksi, ts. $\sum_n p_n = 1$.

Boltzmannin jakauman partitiofunktio on muotoa

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

kaava 26

Systeemin keskimääräinen energia $\langle E \rangle$ saadaan Boltzmannin jakaumasta seuraavasti

$$\langle E \rangle \equiv \sum_n p_n E_n = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} E_n$$

kaava 27

F.2.3.4 Hila-maailmankaikkeuden keskipituus

Nyt voidaan maailmankaikkeuden kokonaispituudelle $L(l)$ saada keskiarvo $\langle L(l) \rangle$ analogiana statistisen fysiikan energian keskiarvon $\langle E \rangle$ lausekkeesta (kaava 27). Vaihtamalla $\langle E \rangle$:n lausekkeessa E_n :n paikalle $L(l)$ sekä korvaamalla summaus integroinnilla saadaan hila-avaruuden kokonaispituuden keskiarvoksi

$$\langle L(l) \rangle = \frac{1}{Z_N} \int d\mu[l] e^{-\lambda L(l)} L(l)$$

kaava 28

missä $d\mu[l]$ on käytettävä integrointimitta (kaava 21). Lämpötilaparametrin β korvanneella vakiolla λ :lla on ehkä eräänlaisena "lämpökylpyyn" liittyvänä kosmologisena vakiona. Kysymykseksi jääkin lämpökylvyn rooli hila-maailmankaikkeuden tapauksessa.

Jakamalla hila-maailmankaikkeuden keskimääräinen kokonaispituus hilapisteiden lukumäärällä saadaan keskimääräiseksi linkin pituudeksi⁵

$$\frac{\langle L(l) \rangle}{N} = \frac{\sigma + 2}{\lambda}$$

kaava 29

F.2.3.5 Fluktuaatiot lämpökylvyssä olevan systeemin energiassa

Keskihajonta ΔE lämpökylvyssä olevan systeemin keskimääräisestä energian arvosta (kaava 27) on

$$(\Delta E)^2 \equiv \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$$

kaava 30

jota hyväksi käyttämällä voidaan osoittaa energian suhteellisten heilahtelujen olevan käänteisesti verrannollisia systeemin koon neliöjuureen

$$\frac{\Delta E}{\langle E \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

kaava 31

F.2.3.6 Kvanttifluktuaatiot maailmankaikkeuden kokonaispituudessa

Myös maailmankaikkeuden kokonaispituuden $L(l)$ suhteelliset heilahtelut eli *kvanttifluktuaatiot* saadaan analogiana statistisen fysiikan suhteellisista heilahteluista (kaava 31)⁶

$$\frac{\Delta L}{\langle L \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sigma}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

kaava 32

Hilasysteemin koon kasvaessa suhteelliset kvanttifluktuaatiot siis pienenevät, mikä on hyvässä analogiassa statistisen fysiikan kanssa.

⁵Ks. Liite c.

⁶Ks. Liite c.

F.3 Yhteneväisyyksiä ja analogioita

Alle on selvyuden vuoksi taulukoitu hila-maailmankaikkeuden yhteneväisyyksiä jatkumoteoriaan ja statistisen fysiikan systeemiin lämpökylvyssä.

(yksiulotteinen)	Jatkumoteoria	Hilateoria
Geometrian antaa	metriikka — $g(x)$	linkkien neliö — l_n^2
Vaikutus I	$\int \sqrt{g(x)} dx$	$\sum_{n=1}^N l_n$
(Funktionaali)- integrintimitta	$\int d\mu[g] = \prod_x \int dg(x) g^{\frac{1}{2}}(x)$	$\int d\mu[l] = \prod_{n=1}^N \int_0^\infty d(l_n^2) l_n^\sigma$

Taulukko 1. Yksiulotteisen jatkumoteorian sekä yksiulotteisen hilateorian väliset yhteydet.

	Statistisen fysiikan hiukkasjärjestelmä	Yksiulotteinen hila- maailmankaikkeus
Mikrotilat	Mikrotilat	Hilapisteet
Mikrotiloihin liittyvät suureet	Energiat E_n	Linkin pituudet ℓ_n
Suure keskimäärin	$\langle E \rangle \equiv \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} E_n$	$\langle L(l) \rangle \equiv \frac{1}{Z_N} \int d\mu[l] e^{-\lambda L(l)} L(l)$

Taulukko 2. Statistisen fysiikan ja yksiulotteisen hilamaailmankaikkeuden välinen analogia.

F.4 Johtopäätökset

Yksiulotteinen hila-maailmankaikkeus omaa analogiaa sekä Reggen laskentaan että statistiseen fysiikkaan. Gravitaation lineaarisen approksimaation kautta lähestyttiin gravitaatiovuorovaikutuksen geometrista mallia, jolle Reggen laskenta antoi diskreetin luonteen. Jatkumoteoriaa hyväksi käyttäen haimme invariantin integrointimitan Feynmanin polkuintegraaliquantitukselle. Teorian invarianttina suureena on hila-avaruuden kokonaispituus L , jonka voidaan näin antaa toimia systeemin vaikutuksena.

Yksiulotteisen hilamaailmankaikkeuden metriikkana toimivat hila-avaruuden hilapisteitä yhdistävien linkkien neliöt. Näin ollen nämä viivasimpleksit antavat Reggen laskennan simpleksien reunojen tavoin hila-avaruuden geometrian. Edelleen linkkien pituudet ovat analogisia statistisen fysiikan lämpökylvyssä olevan systeemin energioihin. Statistisen fysiikan analogiaa hyväksi käyttäen voidaankin laskea hilamaailmankaikkeuden keskimääräinen kokonaispituus (kaava 29 \times N), keskimääräinen linkin pituus (kaava 29) sekä fluktuaatiot tämän pituuden ympärillä (kaava 32). Fluktuaatiot vastaavat statistisen fysiikan lämpökylvyssä olevan systeemin energiafluktuaatioita, eli ovat käänteisesti verrannollisia systeemin kokoon.

Luonnolliselta tuntuva yleistys yksiulotteisesta hilasysteemistä olisi lisätä hilapisteitä tai pelkästään linkin pituuksia siten, että yhdestä pisteestä lähtisi ulottuvuutta vastaava määrä linkkejä. Tällöin sopiva analogia statistisen fysiikan kanssa olisi todellakin hiukkasjärjestelmä tai kaasu. Onkin mielenkiintoista ajatella kuinka pitkälle analogia statistisen fysiikan kanssa mallia kantaisi. Hila-avaruus säilyisi edelleen eräällä tavalla yksiulotteisena, useampiulotteisen avaruuden supistuessa hilapisteisiin. Lähestymistapa onkin selvästi erilainen verrattuna muihin kvanttigravitaatiota hakeviin ehdotelmiin, joissa avaruusajan kvanttitaso ulottuvuuksia pyritään ennemminkin lisäämään kuin vähentämään.

Edelleen on muistettava, ettei hila-avaruudessa ole otettu huomioon massan mahdollisuutta. Jää mietittäväksi mihin kohtaan massa mallissa sijoitetaan. Hilapisteet tuntuvat tässä vaiheessaärkevimmiltä sijoituskohteilta. Massan sijoittamisen jälkeen voidaankin alkaa keskustella liikeyhtälöistä ja ehkä näkyvämmistä seurauksista.

F.5 Lähteet

1. **Agarwal, B. K.** Statistical Mechanics,
John Wiley & Sons Inc., New York; 1988.
2. **Eisner, Melvin**
Au, Gary K. The Quest for Quantum Gravity,
UM-P-95/24; gr-gc/9506001; June 1995.
3. **Boas, Mary L.** Mathematical Methods in the Physical Sciences, 2nd
Ed.,
John Wiley & Sons Inc., New York; 1983.
4. **Isham, C. J.** Quantum Gravity
in General Relativity and Gravitation
[Stockholm 1986]
(1987)
5. **Isham, C. J.** Prima Facie Questions in Quantum Gravity
in Canonical Gravity — from Classical to Quantum
[Bad Honnes 1993]
(1993)
6. **Kellomäki, Markku** Klassinen ja Kvanttimekaaninen Gravitaatio ja
Kausaaliset Joukot,
Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu, Jyväskylän yliopisto; 1993.
7. **Lehto, Markku** Yleinen Suhteellisuusteoria,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1995.
8. **Lehto, Markku** Yleisen Suhteellisuusteorian Jatkokurssi,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1996.
9. **Mandl, Franz** Statistical Physics,
John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England; 1971.
10. **Misner, Charles W.** Gravitation,
Thorne, Kip S. W.H. Freeman and Company, New York; 1973.
Wheeler, John A.
11. **Ohanian, Hans** Math. Phys. 14, 1892
(1973)
12. **Ohanian, Hans** Gravitation and Spacetime, 2nd Ed.,
Ruffini, Remo W.W. Norton & Company Inc., New York; 1994.
13. **Penrose, R.** Quantum Concepts in Space and Time,
Isham, C. J. Clarendon Press, Oxford; 1986.

G. Johtopäätökset

Olettamalla avaruusaika laakeaksi ja approksimoimalla pois gravitaatiokentän itseisvuorovaikutus voidaan johtaa lineaarinen approksimaatio gravitaation kenttäyhtälöistä. Nämä kenttäyhtälöt ovat toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöitä ja kuvaavat gravitaatiovuorovaikutusta kenttien ollessa verrattain heikkoja. Heikon gravitaatiokentän vaatimus kattaa suurimman osan tähtisysteemeistä ja näin ollen approksimaatio onkin hyvin käytännöllinen verrattuna tarkkoihin Einsteinin kenttäyhtälöihin. Ottamalla mukaan gravitaatiokentän itseisvuorovaikutus uuden energia-liikemäärä-jännitystensorin muodossa edetään tilanteeseen, jossa perinteinen laakea Minkowskin avaruusaika joudutaan hylkäämään. Tilalle astuu gravitaation geometrinen tulkinta, jossa pituuksia mitataan metrisen tensorin avulla. Uusi metrisen tensori

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x)$$

kaava 1

poikkeaa Minkowskin laakeasta metriikasta $\eta_{\mu\nu}$ eli laakeasta avaruusajasta. Tässä teoriassa massa ja sen johdannaiset — energia, liikemäärä, pyörimismäärä — kaareuttavat avaruusajan geometriaa. Kaarevassa neliulotteisessa geometriassa hiukkaset kulkevat suorinta mahdollista reittiä — geodeesia pitkin.

Luonto sisältää suuren määrän symmetrioita, jotka usein helpottavat fysikaalisten ongelmien ratkaisua. Symmetrioilla on kuitenkin huomattavasti syvällisempään merkitystä Luonnon tapahtumien selittämiseksi. Noetherin teoreeman mukaan jokaiselle Luonnon symmetrialle on olemassa säilyvä suure ja vastaavasti jokaiselle säilyvälle suurelle oma symmetria. Edelleen mittaperiaatteen mukaisesti jokainen jatkuva symmetria on lokaali symmetria, joka taas kytkee symmetrian mittakenttään. Edelleen mittakenttä vuorovaikuttaa säilyvän suureen kanssa, jolloin syntyy suljettu kehä kuvaamaan kyseisen säilyvän suureen luomaa vuorovaikutusta.

Sähkömagneettisen kentän lähteenä toimii sähkövaraus, joka myös on teorian säilyvä suure. Nyt Noetherin teoreeman kautta sähkövaraukseen liittyy symmetria, joka on invariassi sähkömagneettisen kentän aaltofunktion vaihemuunnoksessa. Edelleen lokaalin symmetrian kautta tämä invariassi voidaan liittää sähkömagneettiseksi kentäksi osoittautuvaan mittakenttään.

*gravitaation
lineaarinen
approksimaatio*

*symmetriat ja
mittakentät*

*mittateoria
sähkö-
magnetismissa*

*mittateoria
gravitaatiovuoro-
vaikutuksessa*

Gravitaatio ei asetu mittaperiaatteeseen yhtä vaivattomasti kuin muut perusvuoro-vaikutukset. Yleiseen suhteellisuusteoriaan liittyvä symmetria on invarianssi mielivaltaisissa käyräviivaisissa koordinaattimuunnoksissa, jotka lokaalisti voidaan mieltää Poincarén muunnoksiksi. Gravitaatiokentän lähteenä massan kautta toimivat energia, liikemäärä ja pyörimismäärä liittyvät Noetherin teoreeman kautta — ei koko Poincarén ryhmän, vaan sen osan — translaatio- ja rotaatiomuunnosten invarianssiin. Lokaalin symmetrian kautta yleisen suhteellisuusteorian invarianssi koordinaattimuunnoksissa voidaan kuitenkin liittää lineaarisen approksimaation mittainvarianssiin. Tällöin infinitesimaalista koordinaattimuunnosta voidaan pitää lineaarisen gravitaatioteorian mittamuunnoksena. Tämä taas saattaa yleistyä äärellisten yleisten koordinaattimuunnoksien toimimiseksi yleisen suhteellisuusteorian yleistettyinä mittamuunnoksina. Tällöin yleisen suhteellisuusteorian mittasymmetriaksi tulisi yleisen invarianssin periaate.

Reggen laskenta

Huolimatta yleisen suhteellisuusteorian suuresta kyvystä kuvata Luonnon tapahtumia on teoriaa hankalahkoa soveltaa. Einsteinin kenttäyhtälöiden eksakti ratkaisu onnistuu vain yksittäisille yksinkertaisille tapauksille. Ongelmaa voidaan helpottaa Reggen laskennan avulla. Teoria rakentaa avaruuden laakeista palasista eli simplekseistä ajaen kaarevuuden diskreeteille alueille avaruudessa. Näitä kaarevuutta ylläpitäviä palasia kutsutaan saranoiksi.

*yksiulotteinen hila-
maailmankaikkeus*

Tutkielman viimeisessä luvussa käsitellään Markku Lehdon esittämää yksiulotteista hilamaailmankaikkeutta, jossa hilapisteet kytketään toisiinsa Reggen laskentaan viittaavilla linkin pituuksilla. Hila-avaruus omaa analogiaa statistisen fysiikan lämpökylvyssä olevan systeemin kanssa. Analogiaa käyttäen voidaankin laskea hila-maailmankaikkeuden kokonaispituus, keskimääräinen linkin pituus sekä kokonaispituuden kvanttifluktuaatiot. Tämän yksiulotteisen maailmankaikkeuden kokonaispituus L osoittautuu mittainvariantiksi suureeksi, ollen keskimäärin

$$\langle L \rangle = \frac{2 + \sigma}{\lambda} N$$

kaava 2

missä σ on vapaa parametri, N on hilapisteiden määrä ja λ kuvaa lämpökylvyn lämpötilaparametria β vastaavaa kosmologista vakiota. Keskimääräisen kokonaispituuden ympärillä tapahtuvien kvanttifluktuaatioiden suhteelliseksi suuruudeksi saadaan

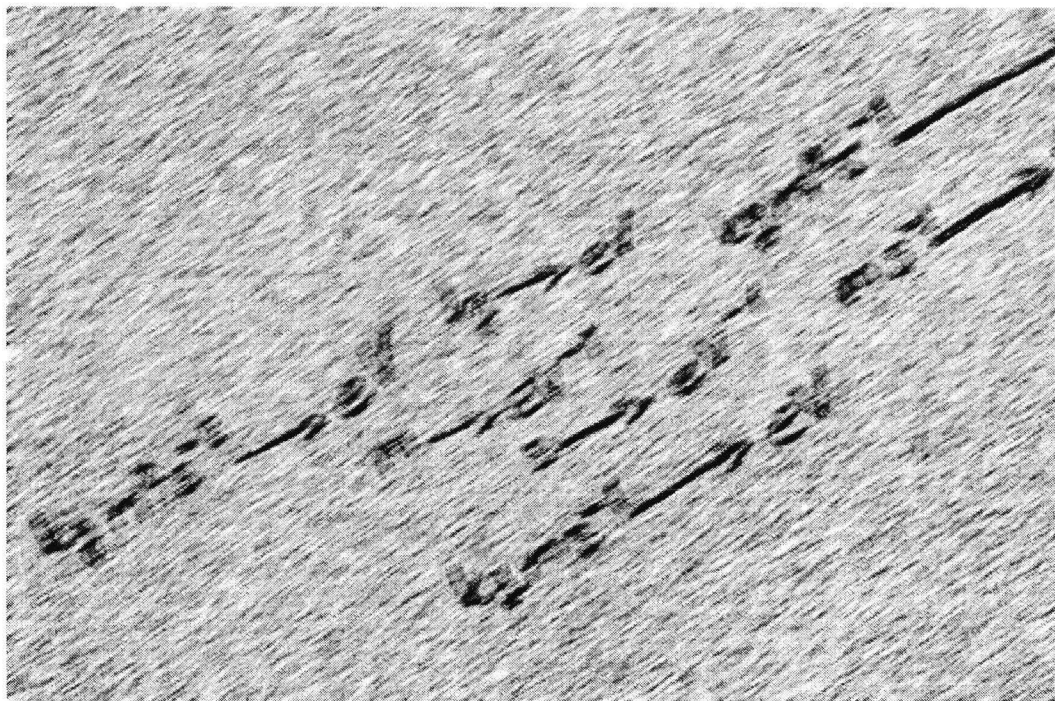
$$\frac{\Delta L}{\langle L \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sigma}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

kaava 3

Fluktuaatioiden suuruus on siis käänteisesti verrannollinen hila-avaruuden koon neliöön, mikä on analogiassa statistisen fysiikan lämpökylvyssä olevan systeemin energiafluktuaatioiden kanssa.

Yksiulotteisesta hila-systeemiä voidaan yleistää useampiin ulottuvuuksiin lisäämällä hilapisteitä siten, että yhdestä pisteestä lähtisi kolme tai useampia linkkejä. Edes hilapisteiden lisääminen ei ole pakollista, sillä ylempiä ulottuvuuksia saadaan lisäämällä pelkästään linkkejä eri pisteiden välille. Tällöin sopiva analogia statistisen fysiikan kanssa olisi hiukkasjärjestelmä tai kaasu. Hila-avaruus säilyisi edelleen eräällä tavalla yksiulotteisena, useampiulotteisen avaruuden supistuessa hilapisteisiin. Lähestymistapa onkin selvästi erilainen verrattuna muihin kvanttigravitaatiota hakeviin ehdotelmiin, joissa avaruuden kvanttitaso ulottuvuuksia pyritään ennemminkin lisäämään kuin vähentämään. Massan luonnollisin sijoituskohta puolestaan olisi hila-avaruuden hilapisteikkö.

Yksiulotteiseen hilamaailmankaikkeuden rakenne on yhdistelmä Reggen laskentaa, statistista fysiikkaa, mittateoriaa ja gravitaation lineaarista approksimaatiota. Kvantti-gravitaation kokoaminen jo olemassaolevista palasista kiehtoo mielikuvitusta. Ratkaisu on voinut olla silmiemme alla jo kauan.



Liite a. Yksiköistä

Tekstissä käytetyt fysikaaliset kaavat ovat yleensä muodossa, jossa valonnopeus c on määritelty ykköseksi. Näin ollen on tarpeellista mainita hieman luonnontieteissä käytetyistä yksikköjärjestelmistä ja merkintätavoista.

Liite a.1 Yksiköt luonnontieteissä

Yksiköt ovat ongelma luonnontieteissä jokaisen tieteenhaaran pyrkiessä käyttämään itselleen sopivaa yksikköjärjestelmää. Yhteistä eri järjestelmissä on eri luonnonvakioiden muuttaminen ykköseksi. Tällöin päästään eroon teoriassa mahdollisesti useita kertoja esiintyvistä monimutkaisesta numeerisesta arvosta sekä numeron dimensiosta.

On kuitenkin muistettava, että Luonto itse kuljettaa mukanaan kaikkia näitä yksiköitä kaikkine desimaaleineen ja dimensioineen. Näin ollen onkin teorian muovaamisvaiheessa ykköseksi muutetut vakiot kyettävä muuttamaan takaisin tavalliseen SI-järjestelmään teorian todentamista varten.

Liite a.2 Luonnolliset yksiköt

Useimmiten käytetty yksikköjärjestelmä lienee ns. *luonnollinen yksikköjärjestelmä*, jossa perusvakiot \hbar ja c määrätään dimensiottomiksi

$$\hbar = 1, c = 1$$

kaava 1

Toisin sanoen c :tä ja \hbar :aa käytetään perusyksikköinä nopeudelle ja vaikutukselle (tai pyörimismäärälle). Tämän lisäksi kiinnitetään kolmas yksikkö — energia, joka onkin ainoa luonnollisen

yksikköjärjestelmän yhtälöissä eri potensseissa esiintyvä yksikkö. Koska ainoa yksikkö on energia, pysyvät dimensionaaliset laskutarkistukset suurissakin yhtälöissä yksinkertaisina. Massat, pituudet ja aikavälit voidaan ilmaista muodossa

$$M = E/c^2, L = \hbar c/E, T = \hbar/E$$

kaava 2

Nyt SI-yksiköissä dimensioltaan $M^p L^q T^r$ oleva suure omaa luonnollisessa yksikköjärjestelmässä dimensiot E^{p+q-r} johtuen juuri \hbar :n ja c :n muuttamisesta ykköseksi. Taulukko 1 antaa joidenkin fysikaalisten suureiden dimensiot sekä luonnollisessa että SI-järjestelmässä. Eri suureiden muuttaminen SI-yksiköistä luonnolliseen yksikköjärjestelmään on vaivatonta muuttamalla \hbar ja c ykköiksi. Esimerkiksi systeemin relativistinen kokonaisenergia

esimerkki 1

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

kaava 3

saadaan muotoon

$$E^2 = p^2 + m^2$$

kaava 4

	SI-yksiköt			Luonnolliset yksiköt
Suure	p	q	r	n
Vaikutus (\hbar)	1	2	-1	0
Nopeus (c)	0	1	-1	0
Massa	1	0	0	1
Pituus	0	1	0	-1
Aika	0	0	1	-1
Liikemäärä	1	1	-1	1
Energia	1	2	-2	1

Taulukko 1. Joidenkin suureiden dimensiot sekä SI-yksiköissä $M^p L^q T^r$ että luonnollisissa yksiköissä E^{p+q-r} .

(Martin & Shaw: Particle Physics, 1995)

Toiseen suuntaan tehtävä muunnos ei ole aivan yhtä yksinkertainen mutta kuitenkin helposti ymmärrettävissä oleva; tarkastellaan tätä seuraavaksi.

Liite a.3 Luonnollisista yksiköistä SI-yksiköihin

Jotta saatuja tuloksia voitaisiin verrata kokeellisiin tuloksiin, täytyy luonnollisissa yksiköissä olevat tulokset muuntaa takaisin SI-järjestelmään. Tämä tapahtuu sijoittamalla aluksi \hbar ja c takaisin yhtälöön dimensionaalisia perusteita käyttäen, jonka jälkeen voidaan (tarvittaessa) sijoittaa \hbar :n ja c :n numeroarvot

$$\begin{aligned} \hbar &= 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s} \\ \hbar c &= 1.97 \cdot 10^{-13} \text{ MeV m} \end{aligned}$$

kaava 5

numeerisen lopputuloksen saamiseksi.

Otetaan esimerkkinä luonnollisissa yksiköissä olevan kokonaisenergian muuttaminen takaisin SI-yksiköihin. Emme tiedä missä muodossa valon nopeus ja Planckin vakio energiassa esiintyvät, joten kerrotaan jokainen termi seuraavasti

esimerkki 2

$$E^2 = p^2 \hbar^a c^b + m^2 \hbar^d c^e$$

kaava 6

Seuraavaksi käytetään dimensionaalisia perusteita vaatimalla lopputulokselta SI-yksiköiden energian toisen potenssin dimensioita (Taulukko 1), eli $(M^1 L^2 T^{-2})^2$. Muunnetaan kaava 6 dimensioyhtälöksi sijoittamalla jokaisen suureen paikalle suureen dimensiot, jolloin saadaan

$$(M^1 L^2 T^{-2})^2 = (M^1 L^1 T^{-1})^2 (M^1 L^2 T^{-1})^a (M^0 L^1 T^{-1})^b + (M^1 L^0 T^0)^2 (M^1 L^2 T^{-1})^d (M^0 L^1 T^{-1})^e$$

kaava 7

joka sievenee muotoon

$$M^2 L^4 T^{-4} = M^2 L^2 T^{-2} M^a L^{2a} T^{-a} L^b T^{-b} + M^2 M^d L^{2d} T^{-d} L^e T^{-e}$$

\Rightarrow

$$M^2 L^4 T^{-4} = M^{2+a} L^{2+2a+b} T^{-2-a-b} + M^{2+d} L^{2d+e} T^{-d-e}$$

kaava 8

Tämä dimensioyhtälö voi olla tosi ainoastaan mikäli asetamme

$$a = 0$$

$$d = 0$$

$$b = 2$$

$$e = 4$$

kaava 9

jolloin kaava 6 saadaan muotoon

$$E^2 = p^2 \hbar^0 c^2 + m^2 \hbar^0 c^4$$

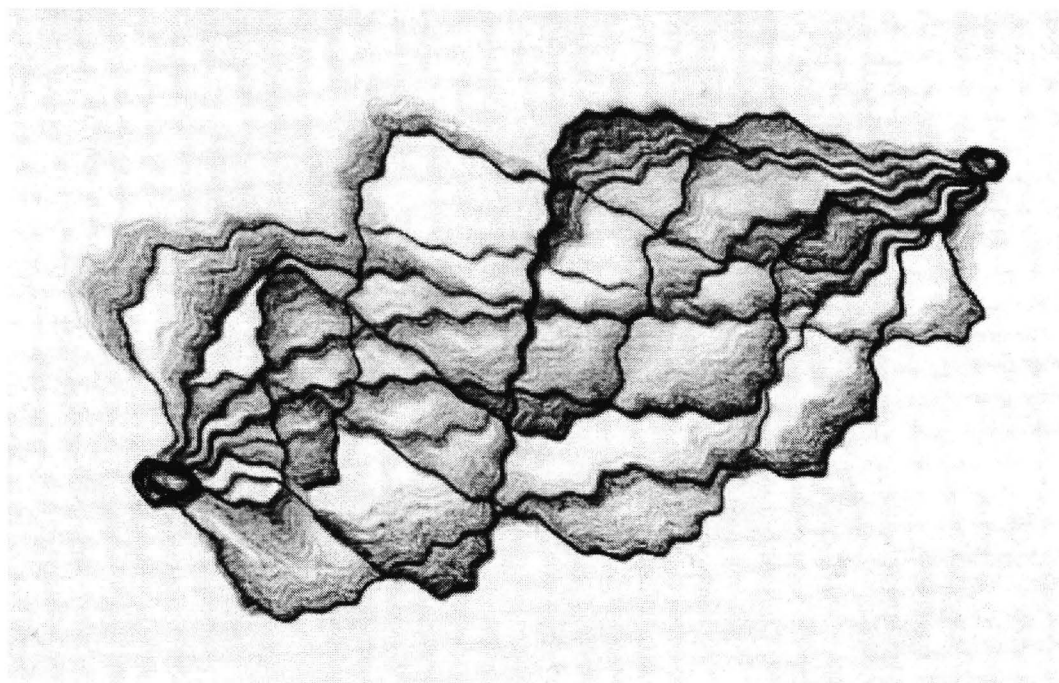
joka on sama kuin kaava 3.



Liite a.4 Lähteet

Alla ovat pääasialliset lähteet, joista tämän luvun tiedot on kerätty. Täydellinen lähdeluettelo löytyy tutkielman lopusta.

1. **Martin, B.R.** Particle Physics,
Shaw, G. John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England; 1995.
2. **Ruuskanen, Vesa** Hiukkasfysiikka 1,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1996.



Liite b. Variaatioperiaate

Variaatioperiaate lienee tärkeimpiä ja eniten käytettyjä teorioita fysiikassa johtuen sen mahdollisten sovellusten monimuotoisuudesta. Yleisin Hamiltonin variaatioperiaatteen sovelluksista lienee fysikaalisen järjestelmän kehityksen johtaminen alkupisteestä loppupisteeseen. Edelleen periaatteen avulla voidaan johtaa teorioiden kenttäyhtälöitä; tai kuten tässä tapauksessa — hakea apua gravitaatiokentän energia-liikemäärä-jännitystensordin löytämiseen.

Liite b.1 Variaatioperiaate klassisessa mekaniikassa

Vaikka liitteen päämääränä onkin variaatioperiaate erilaisille kentille, lähestymme aluksi variaatioperiaatetta klassisen mekaniikan hiukkassysteemille.

Liite b.1.1 Vaikutus

Vaikutuksella tarkoitetaan fysikaalisen systeemin historian tiettyyn aikaväliin $[t_1, t_2]$ liitettyä reaaliarvoa. Klassisen fysiikan mukaan fysikaalisen systeemin sallitut historiat ovat systeemin reunaehtojen kautta yksikäsitteisesti määrättyjä. Tällainen fysikaalinen systeemi koostuu keskenään vaikuttavista massahiukkasista laakeassa avaruudessa. Näin ollen systeemin tilan määrittämiseksi meidän tarvitsee tietää hiukkasten lukumäärä k , tilalottuvuuksien määrä n sekä hiukkasten sijainti eri ajanhetkinä antavat koordinaatit $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, N; N = k \cdot n$). Koordinaatit q_i ovat *yleistettyjä koordinaatteja*, eivätkä siten ole minkään erityisen koordinaattisysteemin alaisia.

Lagrangen formalismin mukaan voimme johtaa hiukkasjärjestelmän liikeyhtälöt *Hamiltonin variaatioperiaatteen* mukaan seuraavasti. Määritellään aluksi *vaikutus I* integraalina

vaikutus

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt$$

kaava 1

missä ns. *Lagrangen funktio*¹ $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ on jokin annettu funktio yleistetyistä koordinaateista q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) ja nopeuksista $\dot{q}_i = dq_i/dt$. Lagrangen funktio L sisältää kaiken tarvittavan tiedon systeemin tilasta eri ajanhetkillä.

liikkeyhtälöt

Liikkeyhtälöt saadaan nyt vaatimalla vaikutuksen stationaarisuutta funktioiden $q_i(t)$ infinitesimaalisissa variaatioissa. Toisin sanoen Hamiltonin variaatioperiaatteen mukaan hiukkassysteemin historioista ovat sallittuja ainoastaan ne historiat joille vaikutus on stationaarinen. Variaatioilla käsitetään tässä tapauksessa mielivaltaisia infinitesimaalisia yleistettyjen koordinaattien heilahteluja, jotka kuitenkin häviävät hiukkasten maailmanviivojen päissä, eli hetkillä t_1 ja t_2 .

Mikäli koordinaatteja q_i varioidaan siten, että ajanhetkellä t muutos on $\delta q_i(t)$, saadaan variaatioksi nopeuksille $\delta \dot{q}_i = (d/dt) \delta q_i(t)$. Näin ollen vaikutuksen I variaatioksi saadaan

$$\begin{aligned} \delta I &= \int \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \int \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt \end{aligned}$$

Jälkimmäinen termi voidaan integroida osittain, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &= \int \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0, \text{ koska } \delta q_i \text{ on nolla hetkillä } t_1 \text{ ja } t_2} - \int \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt \end{aligned}$$

Variaatioksi saadaan siis

vaikutuksen variaatio

$$\delta I = \int \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

kaava 2

Liite b.1.2 Eulerin-Lagrangen yhtälöt ja Hamiltonin funktio

Selvästi vaikutus I voi olla stationaarinen (eli siis $dI=0$) mielivaltaisilla funktioilla $\delta q_i(t)$ jos ja vain jos kaikilla näillä funktioilla on nollakertoimet (ylläolevan yhtälön sulkulauseke on nolla)

Eulerin-Lagrangen yhtälöt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

kaava 3

Nämä ovat N kappaletta *Eulerin-Lagrangen yhtälöitä* N -ulotteiselle hiukkassysteemille. Yhtälöt voidaan kirjoittaa q_i :n *kanonisen liikemääräkonjugaatin*

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

kaava 4

avulla seuraavasti

¹ Klassisessa mekaniikassa Lagrangen funktio saa monille tutun muodon $L = T - U$, missä T on systeemin kineettinen energia ja U systeemin potentiaalienergia.

$$\frac{d}{dt} \pi_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

kaava 5

Eulerin-Lagrangen yhtälöiden seurauksena *Hamiltonin funktio*

Hamiltonin funktio

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - L$$

kaava 6

on liikevakio, eli sen suuruus ei muutu ajan funktiona:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \end{aligned}$$

kaava 7

Yllä oleva lauseke on nolla johtuen juuri Eulerin-Lagrangen yhtälöistä (kaava 3).

Liite b.1.3 Vapaa hiukkanen

Esimerkkisysteeminä käsitellään yhden vapaan hiukkasen systeemiä, jolloin Lagrangen funktio on

$$L_{\text{vapaa}} = -m\sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}$$

kaava 8

Edelleen q_i :n kanoninen liikemääräkonjugaatti saadaan Lagrangen funktiosta

Kanoninen liikemääräkonjugaatti

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{\partial L_{\text{vapaa}}}{\partial \dot{q}_i} \\ &= -m \frac{\partial \sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{m \dot{q}_i}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}} \end{aligned}$$

kaava 9

missä $q_i = x, y, z$, kun $i=1, 2, 3$.

Eulerin-Lagrangen yhtälöt systeemille saadaan (kaava 3; $i=1$):

Eulerin-Lagrangen yhtälöt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{m \dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}} + \frac{\partial m \sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}}{\partial x} \\ = \frac{m \ddot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}} + \frac{m \dot{x} (\ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} + \dot{z} \ddot{z})}{(1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2)^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

kaava 10

Yllä $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ sillä kyseessä on vapaa kappale ja kaikki termit häviävät. Lasku on vastaava i :n arvoille 2 ja 3.

Systeemin Hamiltonin funktioksi saadaan (kaava 6)

Hamiltonin funktio

$$H_{\text{vapaa}} = \sum_{i=1}^3 \left(\dot{q}_i \frac{\partial L_{\text{vapaa}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - L_{\text{vapaa}}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\dot{x} \frac{\partial m \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}}{\partial \dot{x}} - \dot{y} \frac{\partial m \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}}{\partial \dot{y}} \\
 &\quad - \dot{z} \frac{\partial m \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}}{\partial \dot{z}} + m \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \\
 &= m \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}} + \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \right) \\
 &= \frac{m}{\sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}}
 \end{aligned}$$

kaava 11

joka on yhtäsuuri vapaan hiukkasen kokonaisenergian kanssa.

Hamiltonin funktio on yhtäsuuri kokonaisenergian kanssa vain jos onnistumme valitsemaan oikean Lagrangen funktion systeemille. On olemassa useita Lagrangen funktioita, jotka antavat saman liikeyhtälön vapaalle hiukkaselle. Edellä mainittu funktion L_{vapaa} kanoninen liikemäärä on sama relativistisen liikemäärän kanssa, mikä erottaa L_{vapaa} :n muista ehdokkaista.

Liite b.2 Lagrangen yhtälöt kentille

Seuraavaksi pyrimme yleistämään edellä käsitellyt Lagrangen yhtälöt kentille. Tensorikentän (gravitaatiokenttä) tai vektorikentän (sähkökenttä) sijaan aloitamme tarkastelun yksikomponenttisesti kentästä eli skalaarikentästä.

Liite b.2.1 Skalaarikenttä

Tietyllä ajanhetkellä t voimme ilmaista kentän voimakkuuden eli amplitudin pisteessä \mathbf{x} funktiolla $\psi(\mathbf{x}, t)$. Jos jaamme kentän ΔV :n suuruisiin kuutioihin, joiden keskipisteiden koordinaatit ovat (vektoreita!) \vec{x}_i ($i=1,2,3,\dots$), voimme approksimoida kentän voimakkuutta eri pisteissä yleistettyjen koordinaattien avulla

$$q_i = \psi(\vec{x}_i)$$

kaava 12

Nyt hiukkassysteemin yksittäistä hiukkasta vastaa yksittäinen kuutio koko avaruuden jakavista ΔV :n suuruisista kuutioista. Voimme siis approksimoida kenttäyhtälöitä hiukkastapauksessa esiteltujen Eulerin-Lagrangen yhtälöiden avulla (kaava 3). Selvästikin tarkat kenttäyhtälöt saadaan pienentämällä avaruutta jakavien kuutioiden tilavuutta eli siis hilapisteikön raja-arvona $\Delta V \rightarrow 0$. Rakentamassamme kentän hila-approksimaatioissa vapausasteiden määrä on ääretön mutta kuitenkin diskreetti, kun taas tarkka kenttä sisältää vapausasteinaan äärettömän jatkumon.

vaikutus

Etsiessämme vaikutuksen antavaa yhtälöä joudumme vaihtamaan hiukkastapauksessa esiintyneen summauksen kaikkien i :n arvojen yli integroinniksi kaikkien x :n arvojen yli seuraavasti:

$$L = \int l \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) d^3 x$$

kaava 13

missä $l(\psi, (\partial \psi / \partial t), (\partial \psi / \partial x^k))$ on Lagrangen tiheys. Oletamme, että l sisältää kentän amplitudifunktion ψ sekä sen ensimmäisiä derivaattoja. Aikaderivaatta saadaan analogiasta hiukkassysteemin Lagrangen funktion kanssa ja tiladerivaattojen $\partial \psi / \partial x^k$ mukanaolo hila-approksimaation (kaava 12) sisällöstä seuraavasti: yksiulotteisesti saamme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cong \frac{q_{i+1} - q_i}{x_{i+1} - x_i} \approx q_{i+1} - q_i$$

kaava 14

missä x_i on x koordinaatti keskellä jotain approksimaation kuutioista ja x_{i+1} on sen vieressä olevan kuution keskipisteen koordinaatti. Näin ollen tiladerivaattojen mukanaolo ilmaisee jonkin kentän voimakkuuden muutokseen liittyvän tekijän sisältyvän Lagrangen tiheyden antavaan funktioon.

Nyt vaikutukseksi saadaan (kaava 1 ja kaava 13)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int \int l \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) d^3 x dt$$

kaava 15

Kentän ψ variaatiosta $\delta \psi(\vec{x}, t)$ saadaan variaatiot derivaattoihin seuraavasti:

$$\delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{\bar{\delta}}{\partial t} \delta \psi$$

kaava 16

ja

$$\delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) = \frac{\bar{\delta}}{\partial x^k} \delta \psi$$

kaava 17

Näin ollen vaikutuksen I variaatio on

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \int \int \left[\frac{\partial l}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial x^k)} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) \right] d^3 x dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int \int \left[\frac{\partial l}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \frac{\partial}{\partial t} \delta \psi + \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial x^k)} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \psi \right] d^3 x dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int \int \frac{\partial l}{\partial \psi} \delta \psi d^3 x dt + \int_{t_1}^{t_2} \int \int \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \frac{\partial}{\partial t} \delta \psi d^3 x dt + \int_{t_1}^{t_2} \int \int \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial x^k)} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \psi d^3 x dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int \int \frac{\partial l}{\partial \psi} \delta \psi d^3 x dt + \underbrace{\int \left[\frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \delta \psi \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0, \text{ koska } \delta \psi = 0 \text{ hetkillä } t_1 \text{ ja } t_2.} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \delta \psi dt d^3 x \\ &\quad + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial x^k)} \delta \psi \right]}_{=0, \text{ koska } \delta \psi = 0 \text{ integrointialueen reunoilla}} - \int \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial x^k)} \delta \psi d^3 x dt \end{aligned}$$

vaikutuksen
variaatio

kaava 18

ja siten

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \int \int \left[\frac{\partial l}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial t)} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial l}{\partial (\partial \psi / \partial x^k)} \right] \delta \psi d^3 x dt$$

kaava 19

Koska $\delta\psi$ on mielivaltainen funktio, on vaikutus stationaarinen jos ja vain jos sulussa oleva termi on nolla. Einsteinin summauskonventiolla ja derivaattojen pilkkumerkinnällä tämä vaatimus saadaan muotoon

*Eulerin-Lagrangen
yhtälö*

$$\frac{\bar{o}}{\partial x^\mu} \frac{\bar{o}l}{\partial \psi_{,\mu}} - \frac{\bar{o}l}{\partial \psi} = 0$$

kaava 20

Saatu osittaisdifferentiaaliyhtälö on kenttäyhtälö annetulle Lagrangen tiheydelle l .

Kenttäsystemin Hamiltonin funktio saadaan korvaamalla hiukkassysteemin Hamiltonin funktion (kaava 6) summaus $i:n$ yli integraalilla $x:n$ seuraavasti (nollat ovat aikaderivaattoja):

Hamiltonin funktio

$$\begin{aligned} H &= \int \psi_{,0} \frac{\bar{o}l}{\partial \psi_{,0}} d^3x - l \\ &= \int \left(\psi_{,0} \frac{\partial l}{\partial \psi_{,0}} - l \right) d^3x \end{aligned}$$

kaava 21

Hamiltonin funktio antaa suljetun systeemin kokonaisenergian ollen siten säilyvä suure. Tällaisen systeemin Lagrangen funktio ja siten myös Hamiltonin funktio sisältävät termejä, joissa hiukkas- ja kenttäsuureet esiintyvät tulomuodossa. Oletamme nyt hiukkasten olevan hyvin etäällä toisistaan. Myöhemmin hiukkasten lähestyessä toisiaan ja törmätessä toisiinsa ne aikaansaavat kenttiä. Koska alussa systeemi rakentui vapaista hiukkasista, on Hamiltonin funktion arvo alussa sama kuin kokonaisenergian. Sekä Hamiltonin funktio että kokonaisenergia säilyvät hiukkasten törmätessä ja luodessa kenttiä. Molemmat ovat siis koko ajan yhtäsuuria. Säilymislain nojalla voidaan Hamiltonin funktion arvo näin samaistaa kokonaisenergian arvoon.

■

Liite b.3 Lähteet

Alla ovat pääasialliset lähteet, joista tämän luvun tiedot on kerätty. Täydellinen lähdeluettelo löytyy tutkielman lopusta.

1. **Boas**, Mary L. **Mathematical Methods in the Physical Sciences**, 2nd Ed.,
John Wiley & Sons Inc., New York; 1983.
2. **Lehto**, Markku **Yleisen Suhteellisuusteorian Jatkokurssi**,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1996.
3. **Mäkelä**, Jarmo **Aspects of Canonical Quantum Gravity**,
Väitöskirja, Jyväskylän Yliopisto; 1994.
4. **Ohanian**, Hans
Ruffini, Remo **Gravitation and Spacetime**, 2nd Ed.,
W.W. Norton & Company Inc., New York; 1994.
5. **Suhonen**, Jouni **Mekaniikka**,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1993.

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{(1)\mu}^{\nu} = h^{\mu\rho} \frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial h^{\rho\nu}} = \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{(1)\mu}^{\nu} = \frac{1}{4} [2h^{\mu\rho} h_{\rho\sigma} h^{\sigma\nu} - h_{\mu\sigma} h^{\sigma\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} (h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu})]$$

$$\mathcal{L}_{(1)\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} [2\phi^{\alpha\sigma} \phi_{\sigma\rho} h^{\rho\nu} - \phi^{\mu\sigma} \phi^{\sigma\nu} - \delta^{\mu\nu} (\phi^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu})]$$

$$\mathcal{L}_{(1)}^{\mu\nu} = \phi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \phi^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}$$

Liite c. Laskut

Liitteen alaisuudessa ovat tekstissä esiintyneisiin tuloksiin johtaneet laskut, jotka eivät esiinny itse tekstissä, eivätkä ole annettuna käytetyissä lähteissä.

Liite c.1 Energia-liikemäärä-jännitystensori $t^{\mu\nu}$ ¹

Tässä luvussa lasketaan lineaarisen approksimaation toiseen osioon tarvittava gravitaatiokentän energia-liikemäärä-jännitystensori. Asian selventämisen vuoksi käsittely aloitetaan skalaarikentästä edeten vektori ja tensorikenttiin.

Liite c.1.1 Gravitaatiokenttään liittyvä energia-liikemäärä-jännitystensori $t^{\mu\nu}$

Aloitetaan energia-liikemäärä-jännitystensorin hakeminen yksinkertaisesta tapauksesta — skalaarikentästä. Tämän jälkeen käymme variaatioperiaatteen kanssa yleistämään skalaarikentän tuloksia vuoroin sähkömagneettiselle ja vuoroin gravitaatiokentälle.

Liite c.1.1.1 Energia-liikemäärä-jännitystensori skalaarikentälle

Koska Hamiltonin funktio antaa systeemin kokonaisenergian, voidaan variaatiomenetelmää käsitellessä luvussa olleen yhtälön

$$H = \int \left(\psi_{,0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,0}} - \mathcal{L} \right) d^3x$$

kaava 1

integrandi tulkita energiatiheytenä

¹Ohanian & Ruffini, Gravitation and Spacetime, 2nd Ed.; Appendix A.1.- A.3.

$$t_0^0 = \psi_{,0} \frac{\bar{\partial} l}{\partial \psi_{,0}} - l$$

kaava 2

Energia-liikemäärä-jännitystensori, jonka t_0^0 -komponentti on ylläolevan kaltainen on

$$t_{\mu}^{\nu} = \psi_{,\mu} \frac{\bar{\partial} l}{\partial \psi_{,\nu}} - l \delta_{\mu}^{\nu}$$

kaava 3

Energiatiheys (kaava 2) on sama kaikissa koordinaatistoissa vastaten energia-liikemäärä-jännitystensorin (kaava 3) t_0^0 -komponenttia. Nyt energia-liikemäärätensori voi poiketa lausekkeesta (kaava 3) vain symmetrisen tensorin S_{μ}^{ν} verran. Tensorin S_0^0 -komponentin täytyy olla nolla kaikissa koordinaatistoissa, koska muuten t_0^0 (kaava 2) ei olisi sama kaikissa koordinaatistoissa. Täten seuraa S_{μ}^{ν} :n häviäminen kaikissa koordinaatistoissa seuraavasti:

$$S^{00} = \underbrace{a_0^0}_{\text{Lorentzin muunnos}} a_0^0 S^{00} + a_0^1 a_1^0 S^{11} + 2a_0^1 a_1^0 S^{01}$$

kaava 4

$$\begin{aligned} \text{Nyt koska } S^{00} = S^{00} = 0 \text{ on} \\ a_0^1 S^{11} + 2a_0^1 a_1^0 S^{01} = 0 \end{aligned}$$

kaava 5

Jotta tämä olisi tosi mielivaltaisille Lorentzin muunnoksille a^0_1 ja a^0_0 on oltava $S^{11} = S^{01} = 0$
Yllä Lorentzin muunnos on muotoa

$$a^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-V^2} & -V/\sqrt{1-V^2} & 0 & 0 \\ -V/\sqrt{1-V^2} & 1/\sqrt{1-V^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kaava 6

Nyt koska S^{00} , S^{11} ja S^{01} ovat nollija, voidaan samoin todistaa koko S^{mn} :n häviäminen. Näin ollen on kaava 3 ainoa oikea lauseke energia-liikemäärä-jännitystensorille.
Säilymlaki

*energia-liikemäärä-
jännitys säilyy*

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial x^{\nu}} t_{\mu}^{\nu} = 0$$

kaava 7

saadaan todennettua seuraavasti:

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial x^{\nu}} t_{\mu}^{\nu} = \psi_{,\mu,\nu} \frac{\bar{\partial} l}{\partial \psi_{,\nu}} + \psi_{,\mu} \frac{\bar{\partial}}{\partial x^{\nu}} \frac{\bar{\partial} l}{\partial \psi_{,\nu}} - \frac{\bar{\partial} l}{\partial \psi} \psi_{,\mu} - \frac{\bar{\partial} l}{\partial \psi_{,\alpha}} \psi_{,\alpha,\mu}$$

kaava 8

missä ensimmäinen ja viimeinen termi hävittävät toisensa ja jäljelle jäävät termit katoavat variaatiota käsittelevässä luvussa olleen yhtälön

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial x^{\mu}} \frac{\bar{\partial} l}{\partial \psi_{,\mu}} - \frac{\bar{\partial} l}{\partial \psi} = 0$$

kaava 9

mukaisesti.

Kokonaisenergian eli Hamiltonin funktion säilyminen saadaan seuraavasti:

energia säilyy

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \int t_0^0 d^3x = \int \frac{\partial}{\partial t} t_0^k d^3x = - \int \frac{\partial}{\partial x^k} t_0^k d^3x \\ &\stackrel{\text{Gaussin teoreema}}{=} - \int_{\text{pinnan yli}} t_0^k \cdot \hat{n} \, d^2x \end{aligned}$$

pinnasta
ulos osoittava
kohtisuora
yksikkövektori

kaava 10

missä pinnan täytyy pitää sisällään kaiken tilan, eli pinnan täytyy sijaita äärettömän kaukana. Jos nyt oletamme, että t_0^k on nolla jossakin kaukana tai ainakin lähestyy nollaa nopeammin kuin r^{-2} , on pintaintegraali nolla. Näin ollen on dH/dt nolla ja energia säilyy. Kokonaisliikemäärän säilyminen saadaan samalla tavalla:

liikemäärä säilyy

$$\frac{dP_k}{dt} = \frac{d}{dt} \int t_k^0 d^3x = \int \frac{\partial}{\partial t} t_k^0 d^3x = - \int \frac{\partial}{\partial x^k} t_k^0 d^3x \stackrel{\text{Gaussin teoreema}}{=} - \int_{\text{pinnan yli}} t_k^0 \cdot \hat{n} d^2x$$

kaava 11

joka on nolla samalla periaatteella kuin kokonaisenergian muutos yllä.

On huomattava, että kanoninen energia-liikemäärä-jännitystensori $t^{\mu\nu}$ ei välttämättä ole symmetrinen μ :n ja ν :n suhteen. Tämä on ongelmallista, sillä gravitaatiokentän kenttäyhtälöt

energia-liikemäärä-jännitystensorin symmetrisyys

$$\begin{aligned} &\partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu h - (\partial_\lambda \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda \partial^\mu h^{\nu\lambda}) - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} \\ &= -\kappa T^{\mu\nu} = T_{(m)}^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} \end{aligned}$$

kaava 12

perustuvat symmetriseen energia-liikemäärä-jännitystensoriin. Tensoriin $t^{\mu\nu}$ voidaan kuitenkin lisätä ylimääräinen termi $\bar{t}^{\mu\nu}$ siten, että saatu summa on symmetrinen. Lisättävän termin täytyy olla sellainen, että kokonaisenergia (kaava 1), kokonaisliikemäärä (kaava 11) ja säilymlaki (kaava 6) eivät muutu, joka matemaattisesti tarkoittaa

$$\int \bar{t}_0^0 d^3x = \int \bar{t}_k^0 = \partial_\nu t_\mu^\nu = 0$$

kaava 13

Ylimääräinen termi jakaa uudelleen energian ja liikemäärän tila-avaruudessa mutta ei vaikuta kummankaan suuruuteen. Edellisen kaltainen vapaus lisätä termejä $t^{\mu\nu}$:hyn ilmaisee energia-liikemäärätensoriin liittyvän epätarkkuuksia, joita voidaan vähentää asettamalla lisäehtoja tensorin muodolle. Esimerkkinä on vaatimus mittainvarianssista.

Liite c.1.1.2 Esimerkki skalaarikentästä

Skalaarikentän esimerkkinä otamme kentän ψ , jonka Lagrangen tiheys on

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2} (\psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha} - m^2 \psi^2) \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} - m^2 \psi^2) \end{aligned}$$

kaava 14

missä m on vakio. Nyt Lagrangen kenttäyhtälö on²

² Ks. variaatiota käsittelevä liite.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial \psi_{,\alpha}} \frac{1}{2} (\eta^{\mu\beta} \psi_{,\mu} \psi_{,\beta} - m^2 \psi^2) &= \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{1}{2} (\eta^{\mu\beta} \psi_{,\mu} \psi_{,\beta} - m^2 \psi^2) \\
 &= \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x^\alpha} \frac{1}{2} \eta^{\mu\beta} (\delta_\alpha^\mu \psi_{,\beta} + \psi_{,\mu} \delta_\alpha^\beta) + m^2 \psi \\
 &= \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x^\alpha} \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} \psi_{,\beta} + \eta^{\mu\alpha} \psi_{,\mu}) + m^2 \psi \\
 &= \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x^\alpha} \eta^{\mu\alpha} \psi_{,\mu} + m^2 \psi = 0
 \end{aligned}$$

joka on sama kuin

$$\psi_{,\mu}{}^{,\mu} + m^2 \psi = 0$$

kaava 15

eli siis Kleinin-Gordonin yhtälö vapaalle skalaarikentälle.

Vastaava kanoninen energia-liikemäärä-jännitystensori on (kaava 3)

energia-liikemäärä-
jännitystensori
skalaarikentälle

$$\begin{aligned}
 t_\mu{}^\nu &= \psi_{,\mu} \frac{\bar{\partial}}{\partial \psi_{,\nu}} \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} - m^2 \psi^2) - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu (\eta^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} - m^2 \psi^2) \\
 &= \psi_{,\mu} \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\delta_\nu^\alpha \psi_{,\beta} + \psi_{,\alpha} \delta_\nu^\beta) - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu (\eta^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} - m^2 \psi^2) \\
 &= \psi_{,\mu} \psi^{,\nu} - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu (\psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha} - m^2 \psi^2)
 \end{aligned}$$

kaava 16

Nyt energiatiheys on

energiatiheys
skalaarikentälle

$$\begin{aligned}
 t_0{}^0 &= \psi_{,0} \psi^{,0} - \frac{1}{2} \delta_0^0 (\psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha} - m^2 \psi^2) = \psi_{,0} \psi^{,0} - \frac{1}{2} \psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha} + \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \\
 &= \psi_{,0} \psi^{,0} - \frac{1}{2} \psi_{,0} \psi^{,0} - \frac{1}{2} \psi_{,a} \psi^{,a} + \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \\
 &= \frac{1}{2} \psi_{,0} \psi^{,0} - \frac{1}{2} \psi_{,a} \psi^{,a} + \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\psi_{,0})^2 - \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \psi^2
 \end{aligned}$$

kaava 17

Liite c.1.2 Vektori- ja tensorikentät

Useampikomponenttisia kenttiä käsiteltäessä vaikutuksen variointi tuottaa jokaiselle komponentille variaatiota käsittelevässä liitteessä olleen yhtälön

$$\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial t)} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x^k)} \right] \delta \psi d^3 x dt$$

kaava 18

suluissa olevan kaltaisen termin. Koska joka komponentilla on toisistaan riippumattomat variaatiot, on jokaisen näistä termeistä hävitettävä, jolloin saadaan variaatioliitteessä olleen yhtälön

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial x^\mu} \frac{\bar{\partial} \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} - \frac{\bar{\partial} \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$

kaava 19

kaltaiset lausekkeet vektori- ja tensorikentille. Eulerin-Lagrangen yhtälöt nelikomponenttiselle (vektori)kentälle ovat siis

$$\frac{\bar{o}}{\partial x^\mu} \frac{\bar{o}l}{\partial A^{\nu, \mu}} - \frac{\bar{o}l}{\partial A^\nu} = 0 \quad \nu = 0, 1, 2, 3$$

*Euler-Lagrange
vektori kentälle*

kaava 20

ja kuusitoistakomponenttiselle (tensori)kentälle

$$\frac{\bar{o}}{\partial x^\mu} \frac{\bar{o}l}{\partial h^{\alpha\beta, \mu}} - \frac{\bar{o}l}{\partial h^{\alpha\beta}} = 0 \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$

*Euler-Lagrange
tensori kentälle*

kaava 21

Lasketaan seuraavaksi sekä sähkömagneettisen kentän että gravitaatiokentän kenttäyhtälöt variaatiomenetelmällä. Tämä lähestymistapa on vaihtoehtoinen lineaarista approksimaatiota käsittelevän luvun kenttäyhtälöiden hakemiselle. Edelleen saatavat kenttäyhtälöt todentavat alla valittavat Lagrangen tiheydet oikeiksi valinnoiksi sähkömagnetismille ja gravitaatiolle. Tämä seuraa variaatioperiaatteesta, jonka mukaan Eulerin-Lagrangen yhtälöt antavat teorian kenttäyhtälöt, mikäli käytettävä Lagrangen tiheys on oikein valittu.

Liite c.1.2.1 Sähkömagneettisen kentän kenttäyhtälöt variaatiomenetelmällä

Asettamalla Lagrangen tiheydeksi

$$l_{(em)} = -\frac{1}{16\pi} (A_{\mu, \nu} - A_{\nu, \mu}) (A^{\mu, \nu} - A^{\nu, \mu})$$

kaava 22

saadaan vapaan sähkömagneettisen kentän kenttäyhtälöt seuraavasti (kaava 19):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\bar{o}}{\partial x^\alpha} \frac{\bar{o}l_{(em)}}{\partial A^{\beta, \alpha}} - \frac{\bar{o}l_{(em)}}{\partial A^\beta} = -\frac{1}{16\pi} \partial_\alpha \frac{\bar{o}}{\partial A^{\beta, \alpha}} (A_{\mu, \nu} A^{\mu, \nu} - A_{\mu, \nu} A^{\nu, \mu} - A_{\nu, \mu} A^{\mu, \nu} + A_{\nu, \mu} A^{\nu, \mu}) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \partial_\alpha (\delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu A_{\mu, \nu} + A_{\mu, \nu} \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu A_{\nu, \mu} - A_{\nu, \mu} \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu \\ &\quad - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu A_{\mu, \nu} - A_{\nu, \mu} \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu + \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu A_{\nu, \mu} + A_{\nu, \mu} \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu) \\ &= -\frac{1}{16\pi} (\partial_\nu \partial^\nu A_\mu + \partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu A^\nu - \partial_\mu \partial_\nu A^\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\mu - \partial_\nu \partial_\mu A^\nu + \partial_\mu \partial^\mu A_\nu + \partial_\mu \partial^\mu A_\nu) \\ &= -\frac{1}{16\pi} (2\partial_\nu \partial^\nu A_\mu - 2\partial_\nu \partial_\mu A^\nu - 2\partial_\mu \partial_\nu A^\mu + 2\partial_\mu \partial^\mu A_\nu) \\ &= -\frac{1}{16\pi} (4\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - 4\partial_\nu \partial_\mu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \eta_{\nu\sigma} (\partial_\mu \partial^\mu A^\sigma - \partial^\sigma \partial_\mu A^\mu) = 0 \end{aligned}$$

Jaetaan metriikka ja vakiot pois sekä vaihdetaan $\sigma \rightarrow \nu$ jolloin saadaan

$$\bar{o}_\mu \bar{o}^\mu A^\nu - \bar{o}^\nu \bar{o}_\mu A^\mu = 0$$

kaava 23

eli siis haetut vapaan sähkömagneettisen kentän kenttäyhtälöt, kun virtatiheys $j^\nu = 0$. Käyttämämme Lagrangen tiheys on siis oikea.

Liite c.1.2.2 Gravitaatiokentän kenttäyhtälöt variaatiomenetelmällä

Asettamalla Lagrangen tiheydeksi

$$l_{(1)} = \frac{1}{4} \left(h_{\mu\nu,\lambda} h^{\mu\nu,\lambda} - 2h_{\mu\nu}{}^{,\mu} h^{\nu\lambda}{}_{,\lambda} + 2h_{\mu\nu}{}^{,\mu} h^{\nu}{}_{,\nu} - h_{,\nu} h^{\nu}{}_{,\nu} \right)$$

kaava 24

saadaan vapaan gravitaatiokentän kenttäyhtälöt seuraavasti (kaava 19):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\bar{o}}{\partial x^\gamma} \frac{\bar{o} l_{(1)}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} - \frac{\bar{o} l_{(1)}}{\partial h^{\alpha\beta}} \\ &\text{Yllä viimeinen termi on nolla sillä } l_{(1)} \text{ sisältää pelkästään derivaattoja.} \\ &= \frac{1}{4} \left(\partial_\gamma \frac{\partial h_{\mu\nu,\lambda}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} h^{\mu\nu,\lambda} + \partial_\gamma h_{\mu\nu,\lambda} \frac{\partial h^{\mu\nu,\lambda}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} - 2\partial_\gamma \frac{\partial h_{\mu\nu}{}^{,\mu}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} h^{\nu\lambda}{}_{,\lambda} - 2\partial_\gamma h_{\mu\nu}{}^{,\mu} \frac{\partial h^{\nu\lambda}{}_{,\lambda}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} \right. \\ &\quad \left. + 2\partial_\gamma \frac{\partial h_{\mu\nu}{}^{,\mu}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} h^{\nu}{}_{,\nu} + 2\partial_\gamma h_{\mu\nu}{}^{,\mu} \frac{\partial h^{\nu}{}_{,\nu}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} - \partial_\gamma \frac{\partial h_{,\nu}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} h^{\nu}{}_{,\nu} - \partial_\gamma h_{,\nu} \frac{\partial h^{\nu}{}_{,\nu}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\lambda \partial_\gamma h_{\mu\nu}{}^{,\lambda} + \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\lambda \partial_\gamma h_{\mu\nu}{}^{,\lambda} - 2\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\mu \partial_\gamma h_{\nu\lambda}{}^{,\lambda} - 2\delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\lambda \delta_\gamma^\lambda \partial_\gamma h_{\mu\nu}{}^{,\mu} \right. \\ &\quad \left. + 2\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\mu \partial_\gamma h_{,\nu} + 2\partial_\gamma h^{\mu\nu}{}_{,\mu} \eta_{\sigma\rho} \frac{\partial h^{\rho\sigma}{}_{,\nu}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} - \partial_\gamma \eta_{\sigma\rho} \frac{\partial h^{\rho\sigma}{}_{,\nu}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} h^{\nu}{}_{,\nu} - \partial_\gamma h^{\nu}{}_{,\nu} \eta_{\sigma\rho} \frac{\partial h^{\rho\sigma}{}_{,\nu}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} \right) \end{aligned}$$

Vaihetaan deltojen avulla indeksit seuraavasti:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\partial_\gamma \partial^\gamma h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial^\lambda h_{\beta\lambda} - \partial_\beta \partial^\lambda h_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta h + \eta_{\alpha\beta} \partial_\gamma \partial_\lambda h^{\lambda\gamma} - \eta_{\alpha\beta} \partial_\gamma \partial^\gamma h \right) \\ &\text{Järjestellään termit sekä vaihdetaan } \alpha \rightarrow \mu, \beta \rightarrow \nu, \text{ ja vaihdetaan sidottuja summausindeksejä.} \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \partial_\mu \partial^\lambda h_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial^\sigma h^{\lambda\sigma} \right) = 0 \end{aligned}$$

 Nostetaan kaikki μ :t ja ν :t ylös metriikalla, kerrotaan 1/2 ja kyseinen metriikka pois, jolloin saadaan

$$\bar{o}_\lambda \bar{o}^\lambda h^{\mu\nu} + \bar{o}^\mu \bar{o}^\nu h - \bar{o}_\lambda \bar{o}^\nu h^{\mu\lambda} - \bar{o}_\lambda \bar{o}^\mu h^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\nu} \bar{o}_\lambda \bar{o}^\lambda h + \eta^{\mu\nu} \bar{o}_\lambda \bar{o}^\sigma h^{\lambda\sigma} = 0$$

kaava 25

 eli siis haetut vapaan gravitaatiokentän kenttäyhtälöt, kun $T^{\mu\nu} = 0$. Käyttämämme Lagrangen tiheys gravitaatiovuorovaikutukselle osoittautuu siis oikeaksi valinnaksi.

Liite c.1.2.3 Kanoninen energia-liikemäärä-jännitystensori sähkökentälle

Kanoninen energia-liikemäärä-jännitystensori sähkökentälle saadaan yleistämällä kaava 3 seuraavasti:

$$\begin{aligned} t_{(em)\sigma}{}^\rho &= A^\alpha{}_{,\sigma} \frac{\bar{o} l_{(em)}}{\partial A^\alpha{}_{,\rho}} - \delta_\sigma{}^\rho l_{(em)} \\ &= -\frac{1}{16\pi} A^\alpha{}_{,\sigma} \frac{\bar{o}}{\partial A^\alpha{}_{,\rho}} \left(A_{\mu,\nu} A^{\mu,\nu} - A_{\mu,\nu} A^{\nu,\mu} - A_{\nu,\mu} A^{\mu,\nu} + A_{\nu,\mu} A^{\nu,\mu} \right) \\ &\quad + \frac{1}{16\pi} \delta_\sigma{}^\rho \left(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \right) \left(A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi} A^\alpha{}_{,\sigma} \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\rho A_\mu{}^{,\nu} + A_\mu{}^{,\nu} \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\rho - \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\rho A^\nu{}_{,\mu} - A^\mu{}_{,\nu} \delta_\alpha^\nu \delta_\nu^\rho \right. \\ &\quad \left. - \delta_\alpha^\nu \delta_\mu^\rho A^\mu{}_{,\nu} - A^\nu{}_{,\mu} \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\rho + \delta_\alpha^\nu \delta_\mu^\rho A_\nu{}^{,\mu} + A_\nu{}^{,\mu} \delta_\alpha^\nu \delta_\mu^\rho \right) + \frac{1}{16\pi} \delta_\sigma{}^\rho F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

 Yllä $F^{\mu\nu} = A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}$.

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{16\pi} \left(A^{\mu, \sigma} A_{\mu, \sigma}{}^{\cdot \rho} + A^{\mu, \sigma} A_{\mu, \sigma}{}^{\cdot \rho} - A^{\mu, \sigma} A^{\rho, \cdot \mu} - A^{\nu, \sigma} A^{\rho, \cdot \nu} - A^{\nu, \sigma} A^{\rho, \cdot \nu} \right. \\
 &\quad \left. - A^{\mu, \sigma} A^{\rho, \cdot \mu} + A^{\nu, \sigma} A_{\nu, \sigma}{}^{\cdot \rho} + A^{\nu, \sigma} A_{\nu, \sigma}{}^{\cdot \rho} \right) + \frac{1}{16\pi} \delta_{\sigma}{}^{\rho} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \left[A^{\mu, \sigma} (A_{\mu, \sigma}{}^{\cdot \rho} - A^{\rho, \cdot \mu}) - \frac{1}{4} \delta_{\sigma}{}^{\rho} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right]
 \end{aligned}$$

eli siis

$$t_{(em)\mu}{}^{\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(-A^{\alpha, \mu} F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4} \delta_{\mu}{}^{\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$

kaava 26

Saatu kanoninen energia-liikemäärä-jännitystensori ei ole symmetrinen mutta saadaan symmetriseksi lisäämällä siihen termi

symmetrisyys

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}x^{\alpha}} (A_{\mu} F^{\nu\alpha})$$

kaava 27

Yllä olevan termin lisääminen $t_{(em)\mu}{}^{\nu}$:hyn ei vaikuta säilymlakiin (kaava 7), sillä termin divergenssi on nolla:

säilymlaki

$$\begin{aligned}
 &\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}x^{\nu}} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}x^{\alpha}} (A_{\mu} F^{\nu\alpha}) \\
 &= \partial_{\nu} \partial_{\alpha} [A_{\mu} (\partial^{\alpha} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\alpha})] = \partial_{\nu} \partial_{\alpha} [A_{\mu} \partial^{\alpha} A^{\nu} - A_{\mu} \partial^{\nu} A^{\alpha}] \\
 &= \bar{\partial}_{\nu} \bar{\partial}_{\alpha} A_{\mu} \bar{\partial}^{\alpha} A^{\nu} + \bar{\partial}_{\alpha} A_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} \bar{\partial}^{\alpha} A^{\nu} + \bar{\partial}_{\nu} A_{\mu} \bar{\partial}_{\alpha} \bar{\partial}^{\alpha} A^{\nu} + A_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} \bar{\partial}_{\alpha} \bar{\partial}^{\alpha} A^{\nu} \\
 &\quad - \bar{\partial}_{\nu} \bar{\partial}_{\alpha} A_{\mu} \bar{\partial}^{\nu} A^{\alpha} - \bar{\partial}_{\alpha} A_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} \bar{\partial}^{\nu} A^{\alpha} - \bar{\partial}_{\nu} A_{\mu} \bar{\partial}_{\alpha} \bar{\partial}^{\nu} A^{\alpha} - A_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} \bar{\partial}_{\alpha} \bar{\partial}^{\nu} A^{\alpha} = 0
 \end{aligned}$$

kaava 28

Vaihdetaan yllä kaikissa termeissä summausindeksit $\alpha \rightarrow \nu$ ja $\nu \rightarrow \alpha$, jolloin termit häviävät pareittain seuraavasti: 1 ja 5, 2 ja 7, 3 ja 6, 4 ja 8.

Myös energia ja liikemäärä (kaava 1 ja kaava 11) säilyvät muuttumattomina termin (kaava 27) lisäyksen yhteydessä. Jos kyseisen termin $\nu = 0$ komponentit integroidaan yli kaiken tilan saadaan nolla:

$$\int \partial_{\alpha} (A_{\mu} F^{0\alpha}) d^3x = \int \underbrace{\partial_0 (A_{\mu} F^{00})}_{=0, \text{ sillä } F^{00}=0} d^3x + \int \partial_a (A_{\mu} F^{0a}) d^3x = 0$$

kaava 29

Jälkimmäinen termi voidaan muuttaa pintaintegraaliksi Gaussin lausetta käyttäen. Tämä integraali häviää kenttien kadotessa äärettömyydessä.

Vapaalle sähkömagneettiselle kentälle $\bar{\partial}_{\alpha} F^{\alpha\nu} = 0$, joten kaava 27 voidaan kirjoittaa seuraavasti

$$-\frac{1}{4\pi} A_{\mu, \alpha} F^{\nu\alpha}$$

kaava 30

Lisäämällä tämä energia-liikemäärä-jännitystensorin lausekkeeseen (kaava 26) saadaan symmetrinen sähkömagneettisen kentän energia-liikemäärä-jännitystensori muotoon

$$\begin{aligned} t_{(em)\mu}{}^{\nu} &= -\frac{1}{4\pi} \left(-A^{\alpha}{}_{,\mu} F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4} \delta_{\mu}{}^{\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{4\pi} A_{\mu,\alpha} F^{\nu\alpha} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu}{}^{\alpha} F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4} \eta_{\mu}{}^{\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \end{aligned}$$

kaava 31

Energia-liikemäärä-jännitystensorin symmetrisoivan lisätermin muodon määrää mittainvarianssi. Energia-liikemäärä-jännitystensorin täytyy olla invariantti sähkömagneettisessa mittamuunnoksessa³

$$A^{\mu} \rightarrow A^{\mu} + \bar{o}^{\mu} \Lambda$$

kaava 32

jotta se voi olla yksikäsitteinen kentän lähde. Tensori on ainoa vaadittua muotoa oleva symmetrinen tensori.

Liite c.1.2.4 Kanoninen energia-liikemäärä-jännitystensori gravitaatiokentälle

Kanoninen energia-liikemäärä-jännitystensori gravitaatiokentälle saadaan yleistämällä kaava 3 seuraavasti:

$$\begin{aligned} t_{(1)\sigma}{}^{\gamma} &= h^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} \frac{\delta l_{(1)}}{\delta h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} - \delta_{\sigma}{}^{\gamma} l_{(1)} \\ &= \frac{1}{4} h^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} \left(\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\lambda}^{\gamma} h_{\mu\nu}{}^{,\lambda} + \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\lambda}^{\gamma} h_{\mu\nu}{}^{,\lambda} - 2\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\mu}^{\gamma} h_{\nu\lambda}{}^{,\lambda} - 2h_{\mu\nu}{}^{,\mu} \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\beta}^{\lambda} \delta_{\lambda}^{\gamma} \right. \\ &\quad \left. + 2\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\mu}^{\gamma} h_{,\nu} + 2\eta_{\rho\epsilon} h^{\mu\nu}{}_{,\mu} \delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\rho} \delta_{\nu}^{\gamma} - \eta_{\rho\epsilon} \delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\rho} \delta_{\nu}^{\gamma} h^{,\nu} - \eta_{\rho\epsilon} h^{,\nu} \delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\rho} \delta_{\nu}^{\gamma} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \delta_{\sigma}{}^{\gamma} \left(h_{\mu\nu,\lambda} h^{\mu\nu,\lambda} - 2h_{\mu\nu}{}^{,\mu} h^{\nu\lambda}{}_{,\lambda} + 2h_{\mu\nu}{}^{,\mu} h^{,\nu} - h_{,\nu} h^{,\nu} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[2h^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} h_{\alpha\beta}{}^{,\gamma} \underbrace{\left(\overbrace{-2h^{\gamma\beta}{}_{,\sigma} h_{\beta\lambda}{}^{,\lambda}}_{=-2h^{\gamma\nu}{}_{,\sigma} h_{\nu\lambda}{}^{,\lambda}} - \overbrace{2h^{\alpha\gamma}{}_{,\sigma} h_{\lambda\alpha}{}^{,\lambda}}_{=-2h^{\nu\gamma}{}_{,\sigma} h_{\lambda\nu}{}^{,\lambda}} \right)}_{=0} + 2h^{\nu\gamma}{}_{,\sigma} h_{,\beta} \right. \\ &\quad \left. + 2\eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} \underbrace{\left(\overbrace{\frac{1}{2} h^{\lambda\gamma}{}_{,\lambda}}_{=2h^{\epsilon\gamma}{}_{,\gamma} = 2h^{\epsilon\lambda}{}_{,\lambda} = h^{,\lambda}} \right)}_{=-h_{,\sigma} h^{,\gamma}} - 2\eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} h^{,\gamma} \right] \\ &\quad - \delta_{\sigma}{}^{\gamma} \left[h_{\mu\nu,\lambda} h^{\mu\nu,\lambda} - \underbrace{\left(\overbrace{2h_{\mu\nu}{}^{,\mu} h^{\nu\lambda}{}_{,\lambda}}_{=\frac{1}{2} h^{,\mu} h_{,\nu}} + \overbrace{2h_{\mu\nu}{}^{,\mu} h^{,\nu}}_{=h^{,\mu} h_{,\nu}} \right)}_{=\frac{1}{2} h_{,\lambda} h^{,\lambda}} - h_{,\nu} h^{,\nu} \right] \\ &\quad \text{Mittahtoa } h^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{2} h^{,\nu} \text{ käyttämällä saadaan} \\ &= \frac{1}{4} \left[2h^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} h_{\alpha\beta}{}^{,\gamma} - h_{,\sigma} h^{,\gamma} - \delta_{\sigma}{}^{\gamma} \left(h^{\mu\nu}{}_{,\lambda} h_{\mu\nu}{}^{,\lambda} - \frac{1}{2} h_{,\lambda} h^{,\lambda} \right) \right] \end{aligned}$$

Saadaan siis

³ Ks. mittaa käsittelevä luku.

$$t_{(1)\mu}{}^{\nu} = \frac{1}{4} \left[2h^{\alpha\beta}{}_{,\mu} h_{\alpha\beta}{}^{,\nu} - h_{,\mu} h^{,\nu} - \delta_{\mu}{}^{\nu} \left(h^{\alpha\beta}{}_{,\lambda} h_{\alpha\beta}{}^{,\lambda} - \frac{1}{2} h_{,\lambda} h^{,\lambda} \right) \right]$$

kaava 33

Koska

$$h^{\alpha\beta} = \phi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \phi$$

kaava 34

on

$$h = h_{\beta}{}^{\beta} = \eta_{\beta\alpha} h^{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha} \phi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \phi = \phi - 2\phi = -\phi$$

kaava 35

Nyt siis

$$\begin{aligned} t_{(1)\mu}{}^{\nu} &= \frac{1}{4} \left[2 \left(\phi^{\alpha\beta}{}_{,\mu} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \phi_{,\mu} \right) \left(\phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \phi^{,\nu} \right) - \phi_{,\mu} \phi^{,\nu} \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\mu}{}^{\nu} \left(\left(\phi^{\alpha\beta}{}_{,\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \phi_{,\lambda} \right) \left(\phi_{\alpha\beta}{}^{,\lambda} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \phi^{,\lambda} \right) - \frac{1}{2} (-\phi)_{,\lambda} (-\phi)^{,\lambda} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(2\phi^{\alpha\beta}{}_{,\mu} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu} - \eta_{\alpha\beta} \phi^{\alpha\beta}{}_{,\mu} \phi^{,\nu} - \eta^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu} \phi_{,\mu} + 2\phi_{,\mu} \phi^{,\nu} \right) - \phi_{,\mu} \phi^{,\nu} \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\mu}{}^{\nu} \left(\left(\phi^{\alpha\beta}{}_{,\lambda} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\lambda} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \phi^{\alpha\beta}{}_{,\lambda} \phi^{,\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\lambda} \phi_{,\lambda} + \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \right) - \frac{1}{2} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[2\phi^{\alpha\beta}{}_{,\mu} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu} - \phi_{,\mu} \phi^{,\nu} - \left(\phi^{\alpha\beta}{}_{,\lambda} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\lambda} - \frac{1}{2} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \right) \right] \end{aligned}$$

Edelleen saadaan

$$t_{(1)}{}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\gamma} t_{(1)\gamma}{}^{\nu} = \frac{1}{4} \left[2\eta^{\mu\gamma} \phi^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu} - \eta^{\mu\gamma} \phi_{,\gamma} \phi^{,\nu} - \eta^{\mu\gamma} \left(\phi^{\alpha\beta}{}_{,\lambda} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\lambda} - \frac{1}{2} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \right) \right]$$

joka on sama kuin

$$t_{(1)}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[2\phi^{\alpha\beta}{}_{,\mu} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu} - \phi_{,\mu} \phi^{,\nu} - \eta^{\mu\nu} \left(\phi^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\sigma} - \frac{1}{2} \phi_{,\sigma} \phi^{,\sigma} \right) \right]$$

energia-
liikemäärä-
jännitustensori
gravitaatio-
kentälle !!!

kaava 36

Liite c.2 Yksiulotteisen maailmankaikkeuden kvantisointi Feynmanin polkuintegraalimenetelmällä

Jatkumovaikutusta

$$\int \sqrt{g(x)} dx$$

kaava 37

vastaa yksiulotteisen maailmankaikkeuden linkkien kokonaispituus

$$L(l) \equiv \sum_{n=1}^N l_n$$

kaava 38

Jatkumoteorian (funktionaali)integrointimitan

$$\int d\mu[g] = \int \prod_x dg(x) g^{\sigma/2}(x)$$

kaava 39

vastineena käytämme diskreettiä integrointimittaa

$$\int d\mu[l] \equiv \int \prod_{n=1}^N d(l_n^2) l_n^\sigma$$

kaava 40

Liite c.2.1 $\langle L(\ell) \rangle$ ilman λ :aa

Lasketaan aluksi $L(\ell)$:n keskiarvo ilman *painofunktiota* $e^{-\lambda L(\ell)}$. Aloitetaan tilasummasta Z_N

$$\begin{aligned} Z_N &= \int d\mu[l] \\ &= \int \prod_{n=1}^N \overbrace{d(l_n^2)}^{=2l_n dl_n} l_n^\sigma \\ &= 2 \int \prod_{n=1}^N dl_n l_n^{\sigma+1} \\ &= 2 \left[\int_0^\infty dl l^{\sigma+1} \right]^N \end{aligned}$$

kaava 41

Nyt voimme siirtyä itse $\langle L(\ell) \rangle$:n määrittämiseen integraalista

$$\begin{aligned}
 \langle L(l) \rangle &= Z_N^{-1} \cdot \int d\mu[l] L(l) \\
 &= Z_N^{-1} \cdot \int \prod_{n=1}^N d(l_n^2)_n^\sigma \sum_{i=1}^N l_i \\
 &= Z_N^{-1} \cdot 2 \int \prod_{n=1}^N dl_n l_n^{\sigma+1} \sum_{i=1}^N l_i \\
 &= Z_N^{-1} \cdot 2 \int_0^\infty dl_1 l_1^{\sigma+1} dl_2 l_2^{\sigma+1} \cdots dl_N l_N^{\sigma+1} (l_1 + l_2 + \dots + l_N) \\
 &= Z_N^{-1} \cdot 2 \left[\int_0^\infty dl_1 l_1^{\sigma+1} l_1 dl_2 l_2^{\sigma+1} \cdots dl_N l_N^{\sigma+1} \right. \\
 &\quad + \int_0^\infty dl_1 l_1^{\sigma+1} dl_2 l_2^{\sigma+1} l_2 \cdots dl_N l_N^{\sigma+1} + \dots \\
 &\quad \left. \dots + \int_0^\infty dl_1 l_1^{\sigma+1} dl_2 l_2^{\sigma+1} \cdots dl_N l_N^{\sigma+1} l_N \right] \\
 &= Z_N^{-1} \cdot 2N \int_0^\infty dl l^{\sigma+2} \left[\int_0^\infty dl l^{\sigma+1} \right]^{N-1}
 \end{aligned}$$

kaava 42

Yhdistämällä kaava 41 ja kaava 42 saadaan

$$\begin{aligned}
 \langle L(l) \rangle &= \frac{2N \int_0^\infty dl l^{\sigma+2} \left[\int_0^\infty dl l^{\sigma+1} \right]^{N-1}}{2 \left[\int_0^\infty dl l^{\sigma+1} \right]^N} \\
 &= N \frac{\int_0^\infty dl l^{\sigma+2}}{\int_0^\infty dl l^{\sigma+1}} \\
 &= N \frac{\sigma+2}{\sigma+3} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l^{\sigma+3}}{l^{\sigma+2}} \\
 &= N \frac{\sigma+2}{\sigma+3} \lim_{l \rightarrow \infty} l = \infty
 \end{aligned}$$

kaava 43

Näin ollen $\langle L(l) \rangle$:n laskeminen ilman painofunktiota $e^{-\lambda L(l)}$ tuottaa tulokseksi äärettömyyden.

Liite c.2.2 $\langle L(l) \rangle$ λ :n kanssa

Otamme nyt mukaan integraaliin painofunktion $e^{-\lambda L(l)}$, jolloin tilasummaksi saamme

$$\begin{aligned}
 Z_N &= \int d\mu[l] e^{-\lambda L(l)} \\
 &= \int \prod_{n=1}^N d(l_n^2) \Big|_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(l_1 + l_2 + \dots + l_N)} \\
 &= 2 \int \prod_{n=1}^N dl_n l_n^{\sigma+1} e^{-\lambda(l_1 + l_2 + \dots + l_N)} \\
 &= 2 \int \prod_{n=1}^N dl_n l_n^{\sigma+1} e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \dots e^{-\lambda_N} \\
 &= 2 \int \prod_{n=1}^N dl_n l_n^{\sigma+1} e^{-\lambda_n} \\
 &= 2 \left[\int_0^{\infty} dl l^{\sigma+1} e^{-\lambda l} \right]^N
 \end{aligned}$$

kaava 44

ja edelleen $\langle L(l) \rangle$:ksi saadaan

$$\begin{aligned}
 \langle L(l) \rangle &= Z_N^{-1} \cdot \int d\mu[l] e^{-\lambda L(l)} L(l) \\
 &= Z_N^{-1} \cdot \int \prod_{n=1}^N d(l_n^2) \Big|_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(l_1 + l_2 + \dots + l_N)} (l_1 + l_2 + \dots + l_N) \\
 &= Z_N^{-1} \cdot 2 \int \prod_{n=1}^N dl_n l_n^{\sigma+1} e^{-\lambda_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_N) \\
 &= Z_N^{-1} \cdot 2 \left[\int_0^{\infty} dl_1 l_1^{\sigma+1} e^{-\lambda_1} l_1 dl_2 l_2^{\sigma+1} e^{-\lambda_2} \dots dl_N l_N^{\sigma+1} e^{-\lambda_N} + \dots \right. \\
 &\quad \dots + \int_0^{\infty} dl_1 l_1^{\sigma+1} e^{-\lambda_1} dl_2 l_2^{\sigma+1} e^{-\lambda_2} l_2 \dots dl_N l_N^{\sigma+1} e^{-\lambda_N} + \dots \\
 &\quad \left. \dots + \int_0^{\infty} dl_1 l_1^{\sigma+1} e^{-\lambda_1} dl_2 l_2^{\sigma+1} e^{-\lambda_2} \dots dl_N l_N^{\sigma+1} e^{-\lambda_N} l_N \right] \\
 &= Z_N^{-1} \cdot 2N \int_0^{\infty} dl l^{\sigma+2} e^{-\lambda l} \left[\int_0^{\infty} dl l^{\sigma+1} e^{-\lambda l} \right]^{N-1}
 \end{aligned}$$

kaava 45

Yhdistämällä kaava 44 ja kaava 45 saadaan

$$\langle L(l) \rangle = N \frac{\int_0^{\infty} dl l^{\sigma+2} e^{-\lambda l}}{\int_0^{\infty} dl l^{\sigma+1} e^{-\lambda l}}$$

kaava 46

joka Laplace-muunnoksen⁴

$$\int_0^{\infty} dt t^k e^{-pt} = \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}} \quad (k > -1 \text{ ja } \operatorname{Re} p > 0)$$

kaava 47

sekä gammafunktion $\Gamma(p)$ rekursiorelaation

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

kaava 48

avulla saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \langle L(l) \rangle &= N \frac{\Gamma(\sigma+3)/\mathcal{X}^{\sigma+3}}{\Gamma(\sigma+2)/\mathcal{X}^{\sigma+2}} \\ &= N \frac{(\sigma+2)}{\lambda} \end{aligned}$$

kaava 49

Näin ollen keskimääräiseksi linkin pituudeksi saadaan

$$\frac{\langle L(l) \rangle}{N} = \frac{\sigma+2}{\lambda}$$

kaava 50

Liite c.2.3 Fluktuaatiot

Määritetään nyt yksiulotteisen maailmankaikkeuden fluktuaatiot keskimääräisen kokonaispituuden ympärillä. Tähän tarvitsemme linkin kokonaispituuden keskihajontaa ΔL , joka suoraviivaisena laskutoimituksena on monimutkainen laskettava. Haemme jälleen apua statistisen fysiikan puolelta, jossa lämpökylvyn energian keskihajonta ΔE saadaan keskimääräisen energian osittaisderivaatasta

$$(\Delta E)^2 = -\frac{\partial^2 \langle E \rangle}{\partial \beta^2}$$

kaava 51

Linkin kokonaispituuden keskihajonta saadaan nyt analogian avulla vastaavasti

$$\begin{aligned} (\Delta L)^2 &= \langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2 \\ &= \frac{1}{Z_N} \frac{\partial^2 Z_N}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{1}{Z_N} \frac{\partial Z_N}{\partial \lambda} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \underbrace{\left(\frac{1}{Z_N} \frac{\partial Z_N}{\partial \lambda} \right)}_{=-\langle L \rangle} = -\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

kaava 52

Laskemalla tämä auki saadaan

⁴Laplace-muunnoksista sekä gammafunktion ominaisuuksista enemmän esim. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 2nd ed.; luvut 11 ja 15.

$$\begin{aligned}
 (\Delta L)^2 &= -\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \lambda} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{2+\sigma}{\lambda} N \\
 &= -(2+\sigma) N \frac{\partial \lambda^{-1}}{\partial \lambda} \\
 &= \frac{2+\sigma}{\lambda^2} N
 \end{aligned}$$

kaava 53

Nyt linkin pituuden fluktuaatiot voidaan laskea seuraavasti

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta L}{\langle L \rangle} &= \frac{\sqrt{\frac{2+\sigma}{\lambda^2} N}}{\frac{2+\sigma}{\lambda} N} \\
 &= \frac{\lambda \sqrt{(2+\sigma) N}}{\lambda (2+\sigma) N} \\
 &= \sqrt{\frac{(2+\sigma) N}{(2+\sigma)^2 N^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2+\sigma}} \frac{1}{\sqrt{N}}
 \end{aligned}$$

kaava 54

eli fluktuaatiot ovat käänteisesti verrannollisia systeemin koon neliöjuureen. Tämä oli odotettavissa analogiana statistisesta fysiikasta, missä tilanne on sama. Yksiulotteisen hilamaailmankaikkeuden pituuden kvanttifluktuaatioiksi saamme siis

$$\frac{\Delta L}{\langle L \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2+\sigma}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

kaava 55

■

Lähteet

1. **Agarwal, B. K.** Statistical Mechanics,
Eisner, Melvin John Wiley & Sons Inc., New York; 1988.
2. **Au, Gary K.** The Quest for Quantum Gravity,
UM-P-95/24; gr-gc/9506001; June 1995.
3. **Boas, Mary L.** Mathematical Methods in the Physical Sciences, 2nd Ed.,
John Wiley & Sons Inc., New York; 1983.
4. **D’Inverno, Ray** Introducing Einstein’s Relativity,
Oxford University Press, Oxford; 1995.
5. **Coxeter, H. S. M.** Regular Polytopes, 2nd Ed.,
Macmillan, New York; 1963
6. **Hämäläinen, Juhani** Reggen Laskenta Algebrallis-Topologisena
Geometrodynamiikan Approksimointimenetelmänä ja Sen
Soveltaminen Friemannin Kosmologiseen Malliin,
Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu, Jyväskylän Yliopisto; 1995.
7. **Isham, C. J.** Quantum Gravity
in General Relativity and Gravitation
[Stockholm 1986]
(1987)
8. **Isham, C. J.** Prima Facie Questions in Quantum Gravity
in Canonical Gravity — from Classical to Quantum
[Bad Honnes 1993]
(1993)
9. **Kellomäki, Markku** Klassinen ja Kvanttimekaaninen Gravitaatio ja Kausaaliset
Joukot,
Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu, Jyväskylän Yliopisto; 1993.
10. **Lehto, Markku** Yleinen Suhteellisuusteoria,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1995.
11. **Lehto, Markku** Yleisen Suhteellisuusteorian Jatkokurssi,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1996.
12. **Mäkelä, Jarmo** Aspects of Canonical Quantum Gravity,
Väitöskirja, Jyväskylän Yliopisto; 1994.
13. **Mäkelä Jarmo** Reggen Laskenta ja sen Soveltaminen Kosmologiaan,
Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu, Jyväskylän Yliopisto; 1989.
14. **Mäkelä, Jarmo** Fysiikan Matemaattiset Perusteet 3,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1995.
15. **Mandl, Franz** Statistical Physics,
John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England; 1971.
16. **Mandl, Franz** Quantum Mechanics,
John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England; 1992.
17. **Martin, B.R.** Particle Physics,
Shaw, G. John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England; 1995.
18. **Mills, Robert** Gauge Fields,
Lehtiartikkeli, Am. J. Phys. 57 (6); June 1989; ss. 493-507.
19. **Misner, Charles W.** Gravitation,
Thorne, Kip S. W.H. Freeman and Company, New York; 1973.
Wheeler, John A.
20. **Ohanian, Hans** Math. Phys. 14, 1892
(1973)
21. **Ohanian, Hans** Physics, 2nd Ed. Expanded,
W.W. Norton & Company Inc., London; 1989.
22. **Ohanian, Hans** Gravitation and Spacetime, 2nd Ed.,
Ruffini, Remo W.W. Norton & Company Inc., New York; 1994.

-
23. **Penrose, R.**
Isham, C. J. Quantum Concepts in Space and Time,
Clarendon Press, Oxford; 1986.
24. **Repo, Pasi** Einsteinin Kenttäyhtälöiden Lineaarinen Approksimaatio,
Gravitaatioaalot ja Niiden Havaitseminen Kaksoispulsarin
PSR 1913+16 Avulla,
Teoreettisen Fysiikan Pro Gradu, Jyväskylän Yliopisto; 1995.
25. **Ruuskanen, Vesa** Hiukkasfysiikka 1,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1996.
26. **Ryder, Lewis H.** Quantum Field Theory,
Cambridge University Press, Cambridge; 1987.
27. **Senechal, Marjorie**
Fleck, George Shaping Space, A Polyhedral Approach,
(editors) Birkhäuser Boston Inc.; 1988.
28. **Suhonen, Jouni** Mekaniikka,
Luentosarja, Jyväskylän Yliopisto; 1993.
29. **Williams, Ruth** Building Blocks for Space and Time,
Lehtiartikkeli, New Scientist; 12 June 1986; ss. 48-51.
30. **Williams, Ruth**
Tuckey, Philip A. Regge Calculus: A Bibliography and Brief Review,
CERN-TH.6211/91.
31. **Williams, Ruth**
Rocek, Martin Introduction to Quantum Regge Calculus,
in Quantum Structure of Space and Time,
ed. M. J. Duff and C. J. Isham.
32. **Williams, Ruth**
Rocek, Martin The Quantization of Regge Calculus,
Lehtiartikkeli, Particles and Fields; 1984.ss. 371-381.