Parakompaktius

Valtteri Varis

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2023

Tiivistelmä:
Valtteri Varis, *Parakompaktius*, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, matematiikan pro gradu -tutkielma, 29 s., lokakuu 2023.

Tämä tutkielma on katsaus topologiaan keskittyen etenkin parakompaktiuteen ja avaruuksien metristyvyyteen. Tutkielmassa esitellään topologian perusteet avoimista joukoista alkaen ja tämän jälkeen käydään läpi tarvittavia esitietoja, kuten topologian kanta, jatkuva funktio ja separaatioaksioomat. Eräs tärkeimmistä esitiedoista on paikallisen äärellisyyden käsite.

Parakompaktiutta vahvempi ominaisuus topologiselle avaruudelle on kompaktius. Kompaktin joukon voidaan ajatella olevan yleistys suljetusta ja rajoitetusta välistä reaalilukujen joukossa. Tutkielmassa näytetään, miten kompaktiuden määritelmästä saadaan muotoiltua parakompaktiuden määritelmä ja mitä tuloksia parakompaktiuden nojalla topologiselle avaruudelle voidaan todistaa. Yksi näistä tuloksista on metristyvyys, joka tarkoittaa, että kyseisessä topologisessa avaruudessa voidaan määritellä etäisyyden käsite. Metristyvyydelle on topologian historian aikana annettu useita ehtoja ja tässä tutkielmassa niistä esitetään kolme. Kaksi ensimmäistä näistä, eli Urysonin metristyvyyslause ja Nagata-Smirnovin metristyvyyslause, eivät käytä todistuksissaan parakompaktiutta. Viimeisenä esitettävä Smirnovin metristyvyyslause taas käyttää parakompaktiutta.

Tutkielmassa käsitellään useita parakompaktiuden sovelluksia. Smirnovin metristyvyyslauseen lisäksi tarkastellaan monistoja, joille saadaan parakompaktiutta käyttäen osoitettua erilaisia ominaisuuksia. Monistot ovat topologisia avaruuksia, jotka paikallisesti näyttävät euklidisilta avaruuksilta. Esimerkiksi fysiikassa aika-avaruutta voidaan mallintaa monistona. Parakompaktiuden sovellukset ovat usein seurausta ykkösen osituksen olemassaolosta. Ykkösen osituksessa laajennetaan paikallisesti määriteltyjä jatkuvia funktioita koko avaruuteen.

Sisällys

Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustutaan topologisten avaruuksien parakompaktiuteen. Aiheesta tekee mielenkiintoisen sen yhteys kompaktiuteen, jota voidaan pitää yhtenä merkittävimpänä topologisena ominaisuutena. Kompaktiuden merkittävyys johtuu siitä, että sen voidaan ajatella olevan yleistys suljetuille ja rajoitetuille väleille reaalilukujen joukossa, mitä tarvitaan esimerkiksi Weierstrassin lauseessa. Parakompaktius on kompaktiutta heikompi ominaisuus, mutta sen avulla saadaan taattua kuitenkin toivottuja tuloksia topologisille avaruuksille. Yksi tällaisista ominaisuuksista on metristyvyys, joka tarkoittaa, että kyseisessä topologisessa avaruudessa voidaan määritellä etäisyys. Tutkielmassa keskitytään erilaisiin metristyvyyslauseisiin, joilla osoitetaan, että millaisissa topologisessa avaruuksissa etäisyys todella voidaan määritellä. Lopulta näytetään parakompaktiutta hyödyntävä versio metristyvyyslauseesta.

Tutkielman luvussa 1 käydään topologiaa läpi sen peruskäsitteistä alkaen ja luku päätetään yksityiskohtaisempiin lauseisiin. Topologiset esitiedot helpottavat tutkielman lukemista, mutta tärkeimmät esitiedoista annetaan. Luvussa 1 tarkastellaan myös tulevien lukujen kannalta oleellista paikallisen äärellisyyden käsitettä.

Luvussa 2 tarkastellaan topologisten avaruuksien metristyvyyttä ja millaisia ehtoja avaruuden on täytettävä, jotta se voi olla metristyvä. Luvussa annetaan kaksi erilaista metristyvyyslausetta, Urysonin metristyvyyslause ja Nagata-Smirnovin metristyvyyslause. Kumpikaan näistä lauseista ei vielä käytä parakompaktiutta, mutta ne antavat esikuvaa siitä, mitä metristyvä avaruus vaatii.

Kolmannessa luvussa tutkitaan tutkielman pääaihetta eli parakompaktiutta. Parakompaktius määritellään ja siitä seuraavia tuloksia käsitellään. Luku päätetään todistukseen siitä, että jokaisella parakompaktilla avaruudella on olemassa ykkösen ositus. Ykkösen osituksen voi ajatella yhdistävän paikallisesti määriteltyjä jatkuvia funktioita koko avaruudessa määritellyksi. Ykkösen ositus on eräs tärkeimmistä ominaisuuksista, joita parakompaktius takaa topologiselle avaruudelle ja sitä tullaan hyödyntämään useissa parakompaktiuden sovelluksissa.

Luku 4 keskittyy parakompaktiuden sovelluksiin. Ensimmäisenä yhdistetään parakompaktius ja metristyvyys todistamalla Smirnovin metristyvyyslause. Tämän jälkeen tarkastellaan monistoja, jotka todistetaan ensin parakompakteiksi avaruuksiksi ja sen jälkeen todistetaan ykkösen ositusta käyttämällä niille uusia tuloksia. Voidaan esimerkiksi todistaa, että monistot ovat upotettavissa euklidiseen avaruuteen. Monistot ovat topologisia avaruuksia, jotka muistuttavat paikallisesti euklidista avaruutta. Monistoja hyödynnetään paljon esimerkiksi erilaisissa fysiikan sovelluksissa.

Tutkielman pohjana toimii James Munkresin teos Topology ja sen luvut 2-4 ja 6. Monistoihin liittyvät tulokset pohjautuvat John M. Leen kirjan Introduction to Topological Manifolds lukuun 4. Käännösapua topologian termeihin, määritelmiin ja lauseisiin on saatu Jussi Väisälän teoksista Topologia I ja II.

LUKU 1

Topologiaa

1.1. Määritelmiä ja yleisiä tuloksia

Tässä luvussa käsitellään tutkielmassa vaadittuja topologisia määritelmiä ja todistetaan tarvittavia tuloksia. Luvun perustana on [**3**, kappale 2-4].

MÄÄRITELMÄ 1.1. Joukon X *topologia* τ on kokoelma joukon X osajoukkoja, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) Tyhjä joukko $\emptyset$ ja joukko X kuuluvat kokoelmaan τ.
(2) Kaikki kokoelmaan τ joukkojen yhdisteet kuuluvat kokoelmaan τ.
(3) Kaikki kokoelmaan τ joukkojen äärelliset leikkaukset kuuluvat kokoelmaan τ.

Joukko X yhdistettynä sen topologialla τ on *topologinen avaruus* (X, τ). Tässä tutkielmassa avaruuksista puhuttaessa viitataan topologisiin avaruuksiin. Joukon τ alkioita kutsutaan *avoimiksi joukoiksi.* Avoimien joukkojen $U \in \tau$ komplementteja $X \setminus U$ kutsutaan *suljetuiksi joukoiksi.* Jos $x \in U \subset X$ ja U on avoin joukko, niin U on pisteen x *ympäristö.* Jos joukolla X on kaksi eri topologiaa τ_1 ja τ_2 ja jos $\tau_1 \subset \tau_2$, sanotaan, että τ_1 on *karkeampi topologia* kuin τ_2 ja τ_2 on *hienompi topologia* kuin τ_1.

Topologian määrittely jokaisen siihen kuuluvan joukon avulla voi olla hankalaa. Topologian kannan käsite mahdollistaa topologioiden määrittelyn pienemmällä määrällä joukkoja.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Joukon X topologian *kanta* on kokoelma $\mathcal{B}$ joukon X osajoukkoja, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) Jokaisella $x \in X$ on olemassa ainakin yksi joukko $B \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B$.
(2) Jos x kuuluu kahden joukon $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ leikkaukseen, niin on olemassa joukko $B_3 \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B_3$ ja $B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$.

Joukon $\mathcal{B}$ täyttäessä nämä ehdot, voidaan sen avulla määritellä joukolle X topologia. Avoimiksi joukoiksi määritellään ne joukon X osajoukot U, joissa jokaiselle pisteelle $x \in U$ on olemassa $B \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B$ ja $B \subset U$. Kannan muodostamaa topologiaa voi kuvailla myös kantajoukkojen yhdisteiden avulla, sillä jokainen topologian alkio eli avoin joukko voidaan esittää kantajoukkojen yhdisteenä.

Toinen tapa esittää avaruuden topologia on esikannan avulla.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Joukon X topologian *esikanta* on kokoelma $\mathcal{S}$ joukon X osajoukkoja, joiden yhdiste on yhtäsuuri kuin X. Tällöin kokoelman $\mathcal{S}$ virittämä topologia τ on yhdiste kaikista kokoelman $\mathcal{S}$ alkioiden äärellisistä leikkauksista.

Eri kantojen virittämiä topologioita voidaan vertailla seuraavan lemman avulla.

LEMMA 1.4. *Olkoon avaruudella X kanta $\mathcal{B}$, joka virittää topologian $\mathcal{T}$, ja kanta $\mathcal{B}'$, joka virittää topologian $\mathcal{T}'$. Topologia $\mathcal{T}'$ on hienompi kuin $\mathcal{T}$, jos ja vain jos jokaisella pisteellä $x \in X$ ja kanta-alkiolla $B \in \mathcal{B}$, johon piste x kuuluu, on olemassa kanta-alkio $B' \in \mathcal{B}'$ siten, että $x \in B' \subset B$.*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Olkoon $x \in X$ ja $B \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B$. Nyt määritelmän nojalla $B \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ eli $B \in \mathcal{T}'$. Koska $\mathcal{B}'$ virittää topologian $\mathcal{T}'$, niin kannan määritelmän nojalla on oltava olemassa jokin kanta-alkio $B' \in \mathcal{B}'$ siten, että $x \in B' \subset B$.
Oletetaan nyt, että jokaisella pisteellä $x \in X$ ja kanta-alkiolla $B \in \mathcal{B}$, johon piste x kuuluu, on olemassa kanta-alkio $B' \in \mathcal{B}'$ siten, että $x \in B' \subset B$. Osoitetaan, että jos $U \in \mathcal{T}$, niin $U \in \mathcal{T}'$. Olkoon $x \in U$. Koska kanta $\mathcal{B}$ virittää topologian $\mathcal{T}$, on olemassa kanta-alkio $B \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B \subset U$. Oletuksen nojalla on olemassa kannan $\mathcal{B}'$ alkio B' siten, että $x \in B' \subset B$. Joten $x \in B' \subset U$ eli $U \in \mathcal{T}'$ kannan määritelmän nojalla. □

Topologisten avaruuksien osajoukkoihin saadaan määriteltyä topologia relatiivitopologian avulla.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja $A \subset X$ epätyhjä joukko. Kokoelma

$$\tau|_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$$

on avaruuden (X, τ) määräämä *relatiivitopologia* joukolla A.

Yksi merkittävimmistä ominaisuuksista, joita topologisella avaruudella voi olla, on kompaktius. Tutkielman pääaiheena oleva parakompaktius on hyvin läheisesti yhteydessä kompaktiuteen ja näihin yhteksiin tutustutaan myöhemmin.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Avaruuden X *peite* on kokoelma $(U_i)_{i \in I}$ siten, että $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Jos kokoelman $(U_i)_{i \in I}$ joukot ovat avoimia, niin kyseessä on *avoin peite*. Avaruus X on *kompakti* jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Määritellään seuraavaksi funktioiden jatkuvuus.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia. Funktio $f : X \to Y$ on *jatkuva pisteessä* x_0, jos jokaiselle pisteen $f(x_0)$ ympäristölle V on olemassa pisteen x_0 avoin ympäristö U siten, että $f(U) \subset V$. Funktio f on *jatkuva funktio*, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.

Jatkuva funktio voidaan määritellä myös seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia. Funktio $f : X \to Y$ on jatkuva funktio, jos jokaisella avoimella joukolla $U \subset Y$, joukko $f^{-1}(U)$ on avaruuden X avoin osajoukko.

Jos maaliavaruuden Y topologia annetaan kannan tai esikannan avulla, funktion jatkuvuuden osoittamiseksi riittää osoittaa, että jokaisen kanta-alkion tai esikanta-alkion käänteiskuva on avoin joukko [**3**, s. 103].
Topologiassa erityisen tärkeässä asemassa ovat funktiot, jotka säilyttävät avaruuksien topologiset ominaisuudet. Tällaisia funktioita kutsutaan homeomorfismeiksi.

MÄÄRITELMÄ 1.9. Olkoon X, Y topologisia avaruuksia. Funktio $f : X \to Y$ on *homeomorfismi*, jos:

(1) Funktio f on bijektio.
(2) Funktio f on jatkuva.
(3) Funktio f^{-1} on jatkuva.

Kolmannen ehdon kanssa yhtäpitävä ehto on:

(3*) Funktio f on avoin funktio. Avoin funktio kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi.

Mikäli homeomorfismin määritelmässä vaadittu bijektio muutetaan injektioksi, on kyseessä *upotus*. Mikäli funktio $f : X \to Y$ on upotus, voidaan sen maaliavaruus muuttaa funktion f arvojoukoksi, jolloin $g : X \to f(X)$ on homeomorfismi. Jos kahden topologisen avaruuden X, Y välillä on olemassa homeomorfismi $f : X \to Y$, sanotaan, että X ja Y ovat homeomorfiset. Homeomorfisilla avaruuksilla on samat topologiset ominaisuudet. Tällaisia ominaisuuksia on esimerkiksi edellä mainittu kompaktius ja seuraavaksi määriteltävät separaatioaksioomat.

Erilaiset separaatioaksioomat ovat oleellisia sekä metristyvyyslauseiden määritelmissä, että niiden todistuksissa. Määritellään seuraavaksi Hausdorff-avaruudet, säännölliset avaruudet ja normaalit avaruudet.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Olkoon X topologinen avaruus.

(1) Avaruus X on *Hausdorff-avaruus*, jos jokaisella pisteparilla $x_1, x_2 \in X$ on olemassa erilliset avoimet joukot U_1, U_2 siten, että $x_1 \in U_1$ ja $x_2 \in U_2$.
(2) Avaruus X on *säännöllinen*, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ ja suljetulla joukolla $F \subset X$, $x \notin F$ on olemassa erilliset avoimet joukot $U_1, U_2 \subset X$ siten, että $x \in U_1$ ja $F \subset U_2$.
(3) Avaruus X on *normaali*, jos jokaisella parilla erillisiä suljettuja joukkoja F_1, F_2 on olemassa erilliset avoimet joukot U_1, U_2 siten, että $F_1 \subset U_1$ ja $F_2 \subset U_2$.

Avaruuden säännöllisyys takaa topologisille avaruuksille useita ominaisuuksia, jotka ovat erittäin hyödyllisiä. Todistetaan seuraavaksi tuloksia, jotka seuraavat avaruuden säännöllisyydestä. Määritellään ensin joukon sulkeuma.

MÄÄRITELMÄ 1.11. Olkoon X topologinen avaruus. Osajoukon $A \subset X$ sulkeuma $\overline{A}$ on leikkaus kaikista suljetuista joukoista, joihin joukko A sisältyy:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ suljettu.}}} F.$$

LEMMA 1.12. *Topologinen avaruus X on säännöllinen jos ja vain jos jokaisella pisteellä $x \in X$ ja pisteen x avoimella ympäristöllä U_1 on olemassa toinen pisteen x avoin ympäristö U_2 siten, että joukon U_2 sulkeuma sisältyy joukkoon U_1.*

TODISTUS. Olkoon avaruus X säännöllinen ja olkoon x jokin avaruuden X piste, jolla on avoin ympäristö U_1. Merkitään $F = X \setminus U_1$, jolloin F on avoimen joukon komplementtina suljettu joukko. Täten myös piste x ja joukko F ovat erillisiä, joten säännöllisyyden nojalla on olemassa erilliset avoimet joukot U_2, U_3 siten, että

$x \in U_2, F \subset U_3$. Joukon U_2 sulkeuma on erillinen joukosta F. Todistetaan väite vastaväitteellä: olkoon piste $y \in \overline{U_2} \cap F$. Piste y kuuluu joukon U_2 sulkeumaan jos ja vain jos jokainen avoin joukko johon piste y kuuluu leikkaa joukkoa U_2. Tämä voidaan todistaa muotoilemalla väite seuraavasti: y ei kuulu joukkoon $\overline{U_2}$ jos ja vain jos on olemassa avoin joukko, johon piste y kuuluu ja joka ei leikkaa joukkoa U_2. Jos $x \notin \overline{U_2}$ niin $x \in X \setminus \overline{U_2}$, joka on avoin joukko joka ei leikkaa joukkoa U_2. Toisaalta jos tällainen avoin joukko U on olemassa, niin $X \setminus U$ on suljettu joukko, johon U_2 sisältyy ja sulkeuman määritelmän nojalla myös $\overline{U_2} \subset X \setminus U$. Yksi tällaisista avoimista joukoista on kuitenkin joukko U_3, joka määriteltiin erilliseksi joukosta U_2. Koska joukon U_2 sulkeuma on erillinen joukosta F niin pätee $\overline{U_2} \subset U_1$.

Oletetaan seuraavaksi, että on olemassa piste $x \in X$, suljettu joukko F siten, että $x \notin F$ ja jokaisella pisteen x avoimella ympäristöllä U_1 on olemassa toinen pisteen x avoin ympäristö U_2 siten, että joukon U_2 sulkeuma sisältyy joukkoon U_1. Merkitään $U_1 = X \setminus F$, jolloin U_1 on pisteen x avoin ympäristö ja oletuksen nojalla on olemassa pisteen x avoin ympäristö U_2 siten, että $\overline{U_2} \subset U_1$. Nyt avoimet joukot U_2 ja $X \setminus \overline{U_2}$ ovat erillisiä ja $x \in U_2, B \subset (X \setminus \overline{U_2})$, joten avaruus X on säännöllinen. $\square$

Tutkielmassa tarkastellaan metristyvyyttä, joten tarvitsemme metriikan ja metrisen avaruuden määritelmät. Topologisissa avaruuksissa ei välttämättä ole mahdollista mitata etäisyyksiä pisteiden välillä, mutta metriikkafunktion olemassaolo mahdollistaa sen.

MÄÄRITELMÄ 1.13. Funktio $d : X \times X \to [0, \infty[$ on joukon X metriikka- eli etäisyysfunktio, jos se täyttää seuraavat ehdot kaikilla pisteillä $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(3) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Joukkoa X varustettuna metriikalla $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kutsutaan metriseksi avaruudeksi. Joukko $B_d(x_0, r) = B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ on x_0-keskeinen pallo, jonka säde on r.

Metristyvyyslauseiden todistuksissa tarvitaan jatkuvia funktioita, joiden olemassaolo ei ole itsestäänselvää. Urysonin lemma kuitenkin takaa tarvittavien funktioiden olemassaolon.

LEMMA 1.14 (Urysonin lemma). *Olkoon X normaali avaruus. Olkoon $A, B \subset X$ erillisiä ja suljettuja joukkoja. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $f : X \to [0, 1]$ siten, että $f(A) = \{0\}$ ja $f(B) = \{1\}$.*

TODISTUS. VAIHE 1. Aloitetaan todistus konstruoimalla jokaiselle rationaaliluvulle r avoin joukko $U_r \subset X$ siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) $U_r = \emptyset$, kun $r < 0$, ja $U_r = X$, kun $r > 1$.
(2) $A \subset U_0$.
(3) $U_1 = X \setminus B$.
(4) Jos $p < q$, niin $\overline{U}_p \subset U_q$.

Määritellään $U_1 = X \setminus B$ ja U_r samoin kuin ehdossa (1), kun $r \notin [0, 1]$. Koska avaruus X on normaali, niin joukolla A on olemassa ympäristö U_0 siten, että $\overline{U_0} \subset U_1$.

Olkoon $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ välin $[0,1]$ rationaalilukujen muodostama jono. Normaaliuden nojalla on jälleen olemassa avoin joukko $U_{r_1} \subset X$ siten, että $\overline{U_0} \subset U_{r_1}$ ja $\overline{U_{r_1}} \subset U_1$. Tehdään induktio-oletus, että jokaiselle $i \in \{1, ..., n\}$ on olemassa avoin joukko U_{r_i}, jolla $\overline{U_0} \subset U_{r_i}$, $\overline{U_{r_i}} \subset U_1$ ja aina kun $r_i < r_j$, niin $\overline{U_{r_i}} \subset U_{r_j}$. Tarkastellaan jonon seuraavaa rationaalilukua r_{n+1} ja olkoon p suurin joukon $\{0, r_1, ..., r_n, 1\}$ luku, joka on pienempi kuin r_{n+1} ja q pienin luku, joka on suurempi kuin r_{n+1}. Induktio-oletuksen nojalla pätee $\overline{U_p} \subset U_q$. Normaaliuden perusteella on olemassa avoin joukko $U_{r_{n+1}} \subset X$ siten, että $\overline{U_p} \subset U_{r_{n+1}}$ ja $\overline{U_{r_{n+1}}} \subset U_q$. Täten induktion nojalla halutut osajoukot on olemassa jokaiselle rationaaliluvulle.

Määritellään nyt funktio $f : X \to \mathbb{R}, f(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in U_r\}$. Avoimien joukkojen U_r ehtojen perusteella $f(x) = 0$, kun $x \in A$ ja $f(x) = 1$, kun $x \in B$. Jäljelle jää osoittaa, että funktio f on jatkuva. Muotoa $]a, \infty[$ ja $]-\infty, a[$ olevat joukot muodostavat esikannan avaruuden $\mathbb{R}$ topologialle, joten jos saadaan osoitettua, että niiden käänteiskuvat ovat avoimia, niin funktio f on jatkuva. Osoitetaan seuraavaksi, että:

$$f(x) < a \iff x \in U_r \text{ jollakin rationaaliluvulla } r < a.$$
$$f(x) \leq a \iff x \in \overline{U_r} \text{ jokaisella rationaaliluvulla } r > a.$$

Ensimmäinen kohta seuraa funktion f määritelmästä. Toisen kohdan osoittamiseksi oletetaan ensin, että $f(x) \leq a$. Olkoon rationaaliluku $r > a$, jolloin funktion f määritelmän nojalla on olemassa rationaaliluku $s < r$ siten, että $x \in U_s \subset U_r \subset \overline{U_r}$. Oletetaan seuraavaksi, että jokaiselle rationaaliluvulle $r > a$ pätee $x \in \overline{U_r}$. Jos $s > a$ on rationaaliluku, niin valitaan rationaaliluku r siten, että $s > r > a$. Tällöin $x \in \overline{U_r} \subset U_s$, jolloin $f(x) \leq s$. Tämä pitää paikkansa jokaiselle rationaaliluvulle $s > a$, joten $f(x) \leq a$. Yhdistämällä nämä tulokset saadaan:

$$f^{-1}(]-\infty, a[) = \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q} \\ r<a}} U_r, \qquad f^{-1}(]a, \infty[) = X \setminus \bigcap_{\substack{r\in\mathbb{Q} \\ r>a}} \overline{U_r},$$

jotka molemmat ovat avoimia joukkoja, joten funktio f on jatkuva. □

1.2. Paikallinen äärellisyys

Paikallinen äärellisyys on tärkeä käsite metristyvyyslauseissa sekä parakompaktiudessa. Tässä alaluvussa määritellään paikallinen äärellisyys sekä joukon tihennys. Lisäksi todistetaan kaksi lemmaa, joita käytetään tulevissa todistuksissa. Tekstin lähteenä on sekä [**2**, luku 4], että [**3**, kappale 39].

Määritelmä 1.15. Kokoelma topologisen avaruuden X osajoukkoja $\mathcal{A}$ on *paikallisesti äärellinen* avaruudessa X, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on ympäristö joka leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\mathcal{A}$ alkiota. Kokoelma $\mathcal{A}$ on *numeroituvasti paikallisesti äärellinen*, jos $\mathcal{A}$ voidaan muodostaa numeroituvana yhdisteenä kokoelmista $\mathcal{A}_n$, joista jokainen on paikallisesti äärellinen.

Määritelmä 1.16. Olkoon $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ joukon X osajoukkojen kokoelmia. Sanotaan, että kokoelma $\mathcal{B}$ on kokoelman $\mathcal{A}$ *tihennys*, jos jokaiselle $B \in \mathcal{B}$ on olemassa $A \in \mathcal{A}$ siten, että $B \subset A$. Tihennys on *avoin tihennys*, jos kokoelman $\mathcal{B}$ alkiot ovat avoimia. Vastaavasti tihennys on *suljettu tihennys*, jos kokoelman $\mathcal{B}$ alkiot ovat suljettuja.

LEMMA 1.17. *Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Tällöin $\mathcal{A}$ on paikallisesti äärellinen jos ja vain jos $\overline{\mathcal{A}}$ on paikallisesti äärellinen.*

TODISTUS. Jos $\overline{A}$ on paikallisesti äärellinen, niin jokaisella avaruuden X pisteellä x on ympäristö, joka leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\overline{A}$ joukkoa. Tällöin myös A on paikallisesti äärellinen, koska $A \subset \overline{A}$.

Oletetaan, että $\mathcal{A}$ on paikallisesti äärellinen. Olkoon $x \in X$ ja U pisteen x ympäristö. Koska $\mathcal{A}$ on paikallisesti äärellinen, niin joukko U leikkaa vain äärellistä määrää kokoelman $\mathcal{A}$ joukkoja. Olkoon nämä joukot $\{A_1, ..., A_n\}$. Jos U sisältää jonkin joukon $\overline{A}$ alkion jollain $A \in \mathcal{A}$, niin tällöin U sisältää myös jonkin joukon A pisteen. Täten A on siis yksi joukoista $\{A_1, ..., A_n\}$, jolloin U leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\overline{\mathcal{A}}$ alkiota. $\square$

LEMMA 1.18. *Jos $\mathcal{A}$ on kokoelma paikallisesti äärellisiä avaruuden X osajoukkoja, niin*

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}.$$

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} \supset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$. Jokaisella $A \in \mathcal{A}$ pätee $A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Jos molemmista puolista otetaan sulkeuma, saadaan $\overline{A} \subset \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$. Koska tämä pätee jokaisella $A \in \mathcal{A}$, myös $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \subset \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$. Käytetään tähän kontrapositiota: osoitetaan, että jos $x \in X, x \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$ niin $x \notin \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$. Edellisen lemman nojalla pisteellä x on ympäristö U, joka leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\overline{A}$ alkiota. Olkoon nämä joukot $\{\overline{A_1}, ..., \overline{A_k}\}$. Tällöin $U \setminus (\overline{A_1} \cup ... \cup \overline{A_k})$ on pisteen x ympäristö, joka ei leikkaa yhtään kokoelman $\mathcal{A}$ alkiota, joten $x \notin \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$.
Täten $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$. $\square$

LUKU 2

Metristyvyys

Tässä luvussa tarkastellaan metristyvyyslauseita. Metristyvyyslauseiden avulla voidaan osoittaa millaisilla topologisilla avaruuksilla on olemassa metriikka. Luvun lähteenä on [**3**, luku 2, 4 ja 6].

MÄÄRITELMÄ 2.1. Avaruus X on *metristyvä*, jos on olemassa metriikka d, joka virittää avaruuden (X, τ) topologian τ.

Topologian virittäminen tarkoittaa, että kaikkien pallojen $B(x, r)$, $x \in X$ ja $r > 0$, kokoelma muodostaa kannan avaruuden X topologialle. Tarkastellaan seuraavaksi millaisia erilaisia ominaisuuksia topologisella avaruudella on oltava, jotta se olisi metristyvä. Tässä luvussa käsitellään kahta erilaista tulosta metristyvyydelle. Todistetaan vielä ensin metristyvyyden takaama ominaisuus avaruuden peitteille.

LEMMA 2.2. *Olkoon X metristyvä avaruus ja $\mathcal{A}$ avaruuden X avoin peite. Tällöin on olemassa avaruuden X avoin peite $\mathcal{E}$, joka on peitteen $\mathcal{A}$ tihennys ja numeroituvasti paikallisesti äärellinen.*

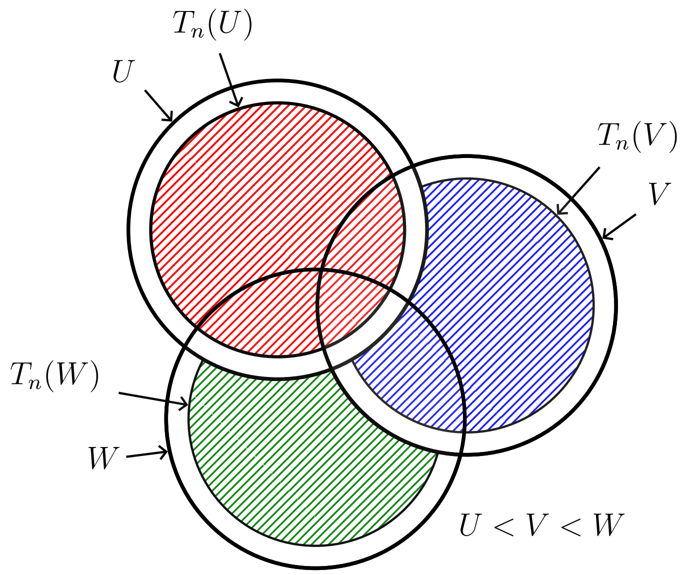
TODISTUS. Olkoon kokoelmalla $\mathcal{A}$ hyvinjärjestys $<$ [**3**, s. 64]. Nimetään kokoelman alkioita U, V, W ja niin edelleen. Olkoon avaruudella X jokin metriikka ja olkoon n luonnollinen luku. Määritellään jokaiselle kokoelman $\mathcal{A}$ alkiolle U uusi joukko $S_n(U)$ seuraavasti:

$$S_n(U) = \{x : B(x, 1/n) \subset U\}.$$

Rakennetaan seuraavaksi vielä pienempi joukko käyttämällä kokoelman hyvinjärjestystä. Leikataan joukosta $S_n(U)$ pois kaikki joukkoa U järjestyksessä pienemmät joukot ja saadaan:

$$T_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V<U} V.$$

Havainnollistetaan tilannetta kuvalla olettamalla, että kokoelma $\mathcal{A}$ sisältää vain alkiot U, V ja W tässä järjestyksessä. Huomataan, että jokainen joukko T_n on erillinen. Erillisyyden lisäksi voidaan osoittaa, että kaikkien joukkojen T_n etäisyys toisistaan on vähintään $1/n$ eli jos $U, V \in \mathcal{A}$, niin $d(x, y) \geq 1/n$ aina, kun $x \in T_n(U)$ ja $y \in T_n(V)$. Oletetaan, että joukot ovat järjestyksessä $U < V$. Koska $x \in T_n(U)$, niin $x \in S_n(U)$ eli joukon $S_n(U)$ määritelmän nojalla $B(x, 1/n) \subset V$. Toisaalta $y \in T_n(V)$ ja joukon $T_n(V)$ määritelmän nojalla $y \notin U$.



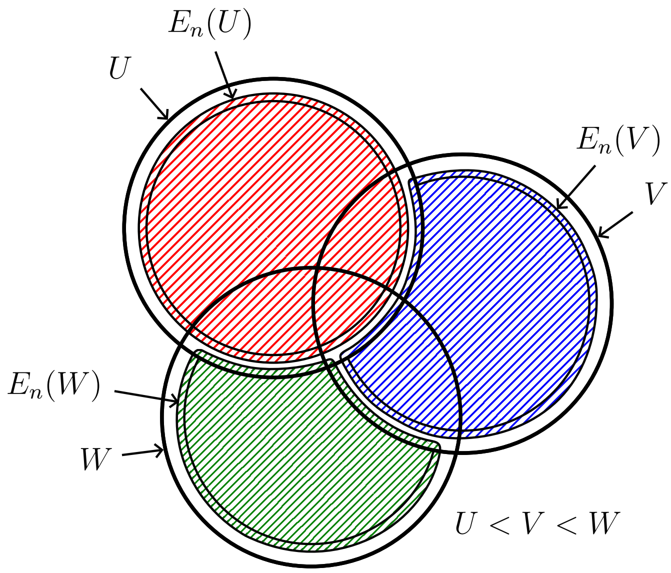
Joukkoja täytyy vielä muokata, jotta voidaan olla varmoja siitä, että ne ovat avoimia joukkoja. Tehdään tämä laajentamalla joukkoja T_n $1/3n$ verran. Rakennetaan siis uusi joukko $E_n(U)$ ottamalla yhdiste jokaisesta $1/3n$-säteisestä pallosta, jonka keskipiste sisältyy joukkoon $T_n(U)$, jolloin saadaan:

$$E_n(U) = \bigcup_{x \in T_n(U)} B(x, 1/3n).$$

Tarkastellaan taas kolmen joukon tilannetta, missä järjestyksenä on $U < V < W$. Osoitetaan, että joukot E_n ovat erillisiä joukkoja ja niiden etäisyys on vähintään $1/3n$. Olkoon $U, V \in \mathcal{A}$ ja $x_0 \in E_n(U)$ ja $y_0 \in E_n(V)$, jolloin x_0 ja y_0 kuuluvat joihinkin palloihin, joiden keskipisteet sisältyvät joukkoihin $T_n(U)$ ja $T_n(V)$. Olkoon nämä pisteet x ja y ja olkoon $x_0 \in B(x, 1/n)$ ja $y_0 \in B(y, 1/n)$, $x \in T_n(U)$, $y \in T_n(V)$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla:

$$\begin{aligned}
d(x,y) &\leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \\
d(x,y) &\leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y) \\
d(x,y) - d(x,x_0) - d(y_0,y) &\leq d(x_0,y_0) \\
1/n - 1/3n - 1/3n &\leq d(x_0,y_0) \\
1/3n &\leq d(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

Jokaisella kokoelman $\mathcal{A}$ alkiolla U, joukko $E_n(U)$ sisältyy joukkoon U.



Määritellään nyt joukkojen E_n avulla kokoelma $\mathcal{E}_n$:

$$\mathcal{E}_n = \{E_n(U) : U \in \mathcal{A}\}.$$

Osoitetaan, että $\mathcal{E}_n$ on paikallisesti äärellinen kokoelman $\mathcal{A}$ avoin tihennys. Paikallinen äärellisyys seuraa siitä, että jokaisella $x \in X$ ympäristö $B(x, 1/6n)$ leikkaa korkeintaan yhtä kokoelman $\mathcal{E}_n$ alkiota. Tämä tiedetään, koska kokoelman $\mathcal{E}_n$ alkioiden etäisyys on vähintään $1/3n$. Kokoelma $\mathcal{E}_n$ on kokoelman $\mathcal{A}$ tihennys, koska $E_n(U) \subset U$ jokaisella $U \subset \mathcal{A}$.
Kokoelma $\mathcal{E}_n$ ei kuitenkaan ole avaruuden X peite. Peite saadaan ottamalla yhdiste

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n.$$

Osoitetaan, että $\mathcal{E}$ peittää avaruuden X. Olkoon $x \in X$. Koska kokoelma $\mathcal{A}$ peittää avaruuden X, piste x kuuluu ainakin johonkin kokoelman $\mathcal{A}$ alkioon. Valitaan tästä kokoelmasta hyvinjärjestyksen mukaan ensimmäinen joukko U, johon piste x kuuluu. Valitaan seuraavaksi luku n siten, että $B(x, 1/n) \subset U$. Tällöin joukkojen S_n määritelmän nojalla $x \in S_n(U)$. Joukko $T_n(U)$ rakennettiin poistamalla joukosta $S_n(U)$ kaikki joukkoa U järjestyksessä edeltävät joukot. Koska U oli järjestyksessä ensimmäinen joukko, johon piste x kuuluu, piste x kuuluu myös joukkoon $T_n(U)$. Täten piste x kuuluu myös joukkoon E_n, joka on kokoelman $\mathcal{E}_n$ alkio.

$\square$

2.1. Urysonin metristyvyyslause

Ensimmäinen merkittävä lause metristyvyyden saralla on Urysonin metristyvyyslause. Ennen lausetta ja sen todistusta annetaan todistuksessa käytettäviä määritelmiä ja tuloksia.

Määritelmä 2.3. Joukko $\mathbb{R}^\omega$ on reaalilukujen $\mathbb{R}$ numeroituva ja ääretön karteesinen tulo. Joukolla $\mathbb{R}^J$ tarkoitetaan reaalilukujen karteesista tuloa, jonka indeksijoukko J voi olla myös ylinumeroituva.

Urysonin metristyvyyslauseen todistuksessa avaruuden X metristyvyys osoitetaan upottamalla se metristyvään avaruuteen Y. Todistuksessa käytetään tulotopologiaa takaamaan avaruuksille haluttuja ominaisuuksia. Määritellään seuraavaksi tulotopologia ja tarkastellaan näitä ominaisuuksia. Tulotopologia määritellään projektiokuvausten avulla.

Määritelmä 2.4. Olkoon $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksoitu kokoelma topologisia avaruuksia ja olkoon

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$$

funktio, joka kuvaa tuloavaruuden jokaisen alkion sen β:nneksi koordinaatiksi. Tällöin siis

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta.$$

Tällaista funktiota kutsutaan *indeksin β projektiokuvaukseksi.*

Määritelmä 2.5. Olkoon kokoelma

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ on avoin } X_\beta\text{:ssa}\}$$

ja näiden kokoelmien yhdiste

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} S_\beta.$$

Esikannan $\mathcal{S}$ virittämää topologiaa kutsutaan *tulotopologiaksi.*

Lause 2.6. *Olkoon funktio $f : A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha, f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$, missä $f_\alpha : A \to X_\alpha$ jokaisella α. Olkoon avaruudella $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ tulotopologia. Tällöin funktio f on jatkuva, jos ja vain jos jokainen funktio f_α on jatkuva.*

Todistus. Olkoon π_β projektio. Se on jatkuva funktio, koska jos U_β on avoin avaruudessa X_β, niin joukko $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ on tulotopologian esikannan alkio. Oletetaan ensin, että funktio $f : A \to \prod X_\alpha$ on jatkuva. Funktio f_β voidaan muodostaa yhdistettynä funktiona $\pi_\beta \circ f$, joka on kahden jatkuvan funktion yhdistettynä funktiona jatkuva. Oletetaan seuraavaksi, että jokainen koordinaattifunktio f_α on jatkuva. Funktion f jatkuvuuden takaamiseksi riittää osoittaa, että jokaisen esikannan alkion käänteiskuva on avoin avaruudessa A. Avaruuden $\prod X_\alpha$ tulotopologian esikannan alkio on muotoa $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, missä $\beta \in J$ on jokin indeksi ja U_β on avoin joukko. Nyt

$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta^{-1}(U_\beta),$$

koska $f_\beta = \pi_\beta \circ f$. Koska f_β on jatkuva, niin tämä joukko on avoin. □

Todistuksessa tarvitaan myös uniformista topologiaa. Määritellään uniforminen topologia ja verrataan sitä tulotopologiaan.

Määritelmä 2.7. Olkoon J indeksijoukko ja pisteet $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$, $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ siten, että $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^J$. Määritellään avaruuteen $\mathbb{R}^J$ metriikka

$$\overline{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in J\},$$

missä $\overline{d} = \min\{|x_\alpha - y_\alpha|, 1\}$. Metriikka $\overline{\rho}$ on *uniforminen metriikka* ja sen virittämä topologia on *uniforminen topologia.*

Lause 2.8. *Uniforminen topologia avaruudessa* $\mathbb{R}^J$ *on hienompi kuin tulotopologia.*

Todistus. Olkoon $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ jokin piste ja olkoon $\prod U_\alpha$ sellainen tulotopologian kannan alkio, johon piste $\mathbf{x}$ kuuluu. Olkoon $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sellaisia indeksejä, joilla $U_\alpha \neq \mathbb{R}$. Valitaan nyt jokaiselle $i \in \{1, ..., n\}$ sellainen $\epsilon_i > 0$, että $\overline{d}$-metriikalla pallo, jonka keskipiste on x_{α_i} ja säde on ϵ_i, kuuluu joukkoon U_{α_i}. Koska U_{α_i} on avoin, niin tällainen pallo on olemassa. Olkoon $\epsilon = \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$, jolloin $\overline{\rho}$-metriikalla pallo, jonka keskipisteenä on $\mathbf{x}$ ja säde on ϵ, kuuluu joukkoon $\prod U_\alpha$. Koska jos $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^J$ siten, että $\overline{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \epsilon$, niin $\overline{d}(x_\alpha, z_\alpha) < \epsilon$ jokaisella α, joten $\mathbf{z} \in \prod U_\alpha$ eli $B_{\overline{\rho}}(\mathbf{x}, \epsilon) \subset \prod U_\alpha$. Tästä seuraa lemman 1.4 nojalla, että uniforminen topologia on hienompi kuin tulotopologia. □

Lause 2.9 (Urysonin metristyvyyslause). *Avaruus* X *on metristyvä, jos se on säännöllinen ja sillä on numeroituva kanta.*

Todistus. Lauseelle annetaan kaksi eri todistusta, koska molemmat todistukset saadaan yleistettyä hyödyllisiksi tuloksiksi.

Vaihe 1. Todistuksen ensimmäisessä vaiheessa osoitetaan, että on olemassa numeroituva kokoelma jatkuvia funktioita $f_n : X \to [0, 1]$ siten, että millä tahansa joukon X pisteellä x ja pisteen x ympäristöllä U on olemassa jokin indeksi n siten, että f_n saa positiivisen arvon pisteessä x ja arvon 0 ympäristön U ulkopuolella. Urysonin lemman nojalla tällainen funktio on olemassa jokaiselle pisteelle x ja sen ympäristölle U, mutta yleisessä tapauksessa ei voida olla varmoja, että tällainen funktioiden joukko olisi numeroituva. Todistuksen ensimmäisessä vaiheessa tehtävänä onkin tehdä tällaisesta funktioiden kokoelmasta numeroituva.
Olkoon $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ avaruuden X numeroituva kanta. Valitaan Urysonin lemman avulla jokaiselle indeksiparille n, m, joille $\overline{B_n} \subset B_m$, jatkuva funktio $g_{n,m} : X \to [0, 1]$ siten, että $g_{n,m}(\overline{B_n}) = \{1\}$ ja $g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{0\}$. Osoitetaan, että tällaisten funktioiden kokoelma $\{g_{n,m}\}$ täyttää ehtomme. Olkoon piste $x_0 \in X$ ja pisteellä x_0 ympäristö U. Tällöin voidaan valita kanta-alkio B_m, joka sisältää pisteen x_0 ja kuuluu joukkoon U. Nyt avaruuden X säännöllisyyden nojalla ja lemmaa 1.12 hyödyntäen on pisteellä x_0 olemassa myös toinen ympäristö V siten, että $\overline{V} \subset U$. Täten on olemassa myös kanta-alkio $B_n \subset V$ siten, että $x_0 \in B_n$ ja $\overline{B_n} \subset B_m$. Koska $\overline{B_n}$ ja $X \setminus B_m$ ovat erillisiä ja suljettuja joukkoja, voidaan Urysonin lemman nojalla todeta, että on olemassa funktio $g_{n,m}$, jolle pätee $g_{n,m}(\overline{B_n}) = \{1\}$ ja $g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{0\}$. Täten pisteessä x_0 funktio saa positiivisen arvon ja ympäristön U ulkopuolella funktio saa arvon 0. Koska funktioiden kokoelma on indeksoitu joukon $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ osajoukolla ja koska numeroituvien joukkojen karteesinen tulo on myös numeroituva, on funktioiden $\{g_{n,m}\}$ kokoelma myös numeroituva. Indeksoidaan kokoelma uudestaan luonnollisilla luvuilla, jolloin saadaan haluttu kokoelma $\{f_n\}$.

Vaihe 2, ensimmäinen todistus. Luodaan ensimmäisen vaiheen funktioista f_n uusi funktio $F : X \to \mathbb{R}^\omega$, missä avaruudella $\mathbb{R}^\omega$ on tulotopologia. Funktio F määritellään siten, että

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), ...).$$

Osoitetaan, että funktio F on upotus, eli että funktio se on homeomorfismi avaruuksien X ja $Z = F(X) \subset \mathbb{R}^\omega$ välillä. Funktio F on jatkuva, koska jokainen funktioista f_n on jatkuva. Funktio $F(x)$ on injektiivinen, koska jos $x \neq y$, on todistuksen edellisen vaiheen nojalla olemassa indeksi n siten, että $f_n(x) > 0$ ja $f_n(y) = 0$. Pisteellä x on avaruuden X säännöllisyyden nojalla olemassa ympäristö, mihin piste y ei kuulu, joten voimme käyttää ensimmäisen vaiheen tulosta. Täten funktio $F(x)$ on injektiivinen.

Viimeisenä on osoitettava, että funktio F on avoin, eli jokaisella avoimella joukolla $U \subset X$ joukko $F(U) \subset Z$ on avoin. Olkoon piste $z_0 \in F(U)$. Etsitään seuraavaksi avoin joukko $W \subset F(U)$ siten, että $z_0 \in W$.

Olkoon piste $x_0 \in U$ siten, että $F(x_0) = z_0$. Valitaan sellainen indeksi N, että $f_N(x_0) > 0$ ja $f_N(X \setminus U) = \{0\}$. Tarkastellaan nyt avointa sädettä $]0, \infty[$ avaruudessa $\mathbb{R}$ ja olkoon V avoin joukko $V = \pi_N^{-1}(]0, \infty[)$ avaruudessa $\mathbb{R}^\omega$. Joukko V muodostuu siis kaikista avaruuden $\mathbb{R}^\omega$ alkioista, joiden N:s koordinaatti on positiivinen. Rajoitetaan nyt tämä joukko avaruuden $\mathbb{R}^\omega$ aliavaruuteen $Z = F(X)$. Olkoon $W = V \cap Z$, joka on avoin aliavaruudessa Z relatiivitopologian määritelmän nojalla. Osoitetaan, että $z_0 \in W \subset F(U)$.

Osoitetaan ensin, että piste z_0 kuuluu joukkoon W, mikä on totta jos sen N:s koordinaatti on positiivinen. Piste z_0 on sen määritelmän nojalla sama kuin $F(x_0)$, joten $\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0))$. Tämä taas on yhtäsuuri kuin $f_N(x_0)$, koska se on $F(x_0)$:n N:s koordinaatti. Koska N oli valittu siten, että $f_N(x_0) > 0$, niin $z_0 \in W$.

Seuraavaksi osoitetaan, että $W \subset F(U)$. Olkoon $z \in W$ mikä tahansa. Tällöin $z = F(x)$, jollain $x \in X$. Joukon W määritelmän nojalla $\pi_N(z) \in]0, \infty[$. Koska $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$ ja funktio f_N saa arvon 0 joukon U ulkopuolella, pisteen x täytyy kuulua joukkoon U. Täten siis $z \in F(U)$ ja $W \subset F(U)$.

Funktio F siis upottaa avaruuden X avaruuteen $\mathbb{R}^\omega$ ja koska $\mathbb{R}^\omega$ on metristyvä [**3**, s. 125], niin myös X on metristyvä.

Vaihe 2, toinen todistus. Toisessa vaiheessa upotamme avaruuden X metriseen avaruuteen $(\mathbb{R}^\omega, \overline{\rho})$, jossa käytössä on metriikan virittämä topologia. Metriikka $\overline{\rho}$ määritellään siten, että jos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\omega$, niin

$$\overline{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup \left\{ \overline{d}(x_i, y_i) : i \in \omega \right\},$$

missä $\overline{d} = \min\{|a - b|, 1\}$.

Rajoitetaan vielä upotukseen käytettyä avaruutta aliavaruuteen $[0,1]^\omega$, missä metriikka $\overline{\rho}$ on sama kuin $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{|x_i - y_i|\}$. Käytetään ensimmäisen vaiheen numeroituvaa funktioiden $f_n : X \to [0,1]$ kokoelmaa, mutta funktioilta vaaditaan lisäksi ehtoa $f_n(x) \leq 1/n$ kaikilla x. Tämä ehto saadaan tarvittaessa toteutettua mikäli jokainen funktio f_n jaetaan n:llä. Määritellään funktio $F : X \to [0,1]^\omega$:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), ...)$$

Osoitetaan, että funktio F upottaa avaruuden X avaruuteen $([0,1]^\omega, \rho)$. Edellä osoitettiin, että funktio F on injektiivinen. Ensimmäisessä todistuksessa osoitettiin myös, että jos avaruudessa $\mathbb{R}^\omega$ on käytössä tulotopologia, funktio F on avoin. Nyt metriikka ρ virittää avaruuteen $[0,1]^\omega$ tulotopologiaa hienomman topologian, joten funktio F on edelleen avoin. Osoitetaan vielä, että funktio $F(x)$ on jatkuva. Olkoon $x \in X$ mikä tahansa piste. Täytyy osoittaa, että jokaisella avoimella joukolla V, johon piste $F(x)$

kuuluu, on olemassa pisteen x ympäristö U siten, että $F(U) \subset V$. Koska funktion $F(x)$ maaliavaruutena on metrinen avaruus, käytämme avaruuden topologiana metristä topologiaa, jolloin avoimet joukot ovat avoimia palloja. Väittämä siis pätee, jos $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$ ja $\rho(F(x), F(x_0)) < \epsilon$ tai toisin sanoen $F(U) \subset B_\epsilon(F(x_0))$. Valitaan nyt niin suuri $N \in \mathbb{N}$, että $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$. Koska funktiot f_n ovat jatkuvia, voidaan löytää avoin joukko U_n, johon x_0 kuuluu siten, että $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Asetetaan nyt

$$U := U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_N,$$

jolloin U on haluttu ympäristö, koska jos $x \in U$, niin

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

kaikilla $n \leq N$. Toisaalta jos $n > N$, niin

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{1}{N} \leq \frac{\epsilon}{2},$$

koska funktion f_n maaliavaruus on $[0, 1/n]$.
Täten kaikilla $x \in U$ pätee $\rho(F(x), F(x_0)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, joten funktio F on jatkuva. Funktio F siis upottaa avaruuden X metriseen avaruuteen $[0, 1]^\rho$, jolloin myös avaruus X on metristyvä. □

Urysonin metristyvyyslauseen ensimmäinen todistus saadaan yleistettyä hyödylliseksi upotuslauseeksi.

LAUSE 2.10. *Olkoon* $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *indeksoitu kokoelma jatkuvia funktioita* $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ *ja jokaisella pisteellä* $x_0 \in X$ *ja tämän pisteen ympäristöllä* U *on olemassa indeksi* α *siten, että* f_α *on positiivinen pisteessä* x_0 *ja saa arvon 0 joukon* U *ulkopuolella.*

Tällöin funktio $F : X \to \mathbb{R}^J, F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$ *on avaruuden* X *upotus avaruuteen* $\mathbb{R}^J$. *Jos* f_α *kuvaa avaruuden* X *välille* $[0, 1]$ *jokaisella* α, *niin* F *upottaa avaruuden* X *avaruuteen* $[0, 1]^J$.

Lauseen todistus on muuten täysin vastaava kuin Urysonin metristyvyyslauseen toinen todistus, mutta n korvataan α:lla ja $\mathbb{R}^\omega$ korvataan $\mathbb{R}^J$:llä.

2.2. Nagata-Smirnovin metristyvyyslause

Urysonin metristyvyyslauseen voidaan ajatella olevan ongelmallinen, koska se antaa meille vain ehtoja, jotka takaavat avaruuden metristyvyyden. Se ei kuitenkaan kerro mitään siitä, mitkä ehdot täyttyisivät jos tiedämme avaruuden jo olevan metristyvä. Nagata-Smirnovin metristyvyyslause sen sijaan tarjoaa ehdot, jotka ovat ekvivalentteja metristyvyyden kanssa. Käytämme Nagata-Smirnovin metristyvyyslauseen todistuksessa G_δ-joukkoja ja kahta niihin liittyvää lemmaa. Aloitetaan G_δ-joukon määritelmällä.

MÄÄRITELMÄ 2.11. Avaruuden X osajoukko A on *G_δ-joukko*, jos se on yhtäsuuri avaruuden X avoimien osajoukkojen numeroituvan leikkauksen kanssa.

LEMMA 2.12. *Olkoon* X *säännöllinen avaruus, jolla on numeroituvasti paikallisesti äärellinen kanta* $\mathcal{B}$. *Tällöin* X *on normaali avaruus ja jokainen suljettu joukko avaruudessa* X *on* G_δ*-joukko avaruudessa* X.

Todistus. Olkoon W mikä tahansa avaruuden X avoin joukko. Osoitetaan todistuksessa ensin välitulos, jonka mukaan on olemassa numeroituva kokoelma avaruuden X avoimia joukkoja $\{U_n\}$ siten, että:

$$W = \bigcup U_n = \bigcup \overline{U_n}.$$

Koska avaruudella X on numeroituvasti paikallisesti äärellinen kanta $\mathcal{B}$, se voidaan muodostaa paikallisesti äärellisten kokoelmien $\mathcal{B}_n$ yhdisteenä. Olkoon $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{B}_n$ niiden kannan joukkojen kokoelma joille pätee $\overline{B} \subset W$. Kokoelma $\mathcal{C}_n$ on tällöin paikallisesti äärellinen, koska se on kokoelman $\mathcal{B}_n$ osakokoelma. Määritellään joukko U_n seuraavasti:

$$U_n = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B.$$

Tällöin U_n on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin joukko ja koska $\mathcal{C}_n$ on kokoelma paikallisesti äärellisiä joukkoja, niin pätee:

$$\overline{U_n} = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B} = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} \overline{B}.$$

Koska jokainen joukko $\overline{B}$ kuuluu joukkoon W, kun $B \in \mathcal{C}_n$, niin myös $U_n \subset \overline{U_n} \subset W$. Osoitetaan vielä, että joukot U_n ja W ovat yhtäsuuria. Olkoon $x \in W$. Koska avaruus X on säännöllinen, on lemman 1.12 nojalla pisteellä x oltava jokin toinen ympäristö V siten, että $\overline{V} \subset W$. Tällöin on oltava jokin kannan alkio $B \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B$ ja $B \subset V$ eli $\overline{B} \subset W$. Joukko B kuuluu myös johonkin kokoelmaan $\mathcal{B}_n$ ja täten myös $B \in \mathcal{C}_n$, jolloin $x \in U_n$. Tästä seuraa $W \subset \bigcup U_n$.

Osoitetaan seuraavaksi, että avaruuden X suljetut joukot F ovat G_δ-joukkoja avaruudessa X. Olkoon F nyt mikä tahansa suljettu joukko ja merkitään $W = X \setminus F$. Edeltäneen perusteella voidaan merkitä $W = \bigcup \overline{U_n}$, jolloin:

$$F = X \setminus \bigcup \overline{U_n} = \bigcap X \setminus \overline{U_n}.$$

Suljettu joukko F on siis yhtäsuuri avaruuden X avoimien osajoukkojen numeroituvan leikkauksen kanssa ja täten se on G_δ-joukko.

Osoitetaan, että avaruus X on normaali. Olkoon joukot F_1, F_2 avaruuden X erillisiä suljettuja osajoukkoja. Tällöin joukko $X \setminus F_2$ on avoin joukko ja todistuksen ensimmäisen osan perusteella on siis olemassa numeroituva kokoelma avoimia joukkoja $\{U_n\}$ siten, että $X \setminus F_2 = \bigcup \overline{U_n} = \bigcup U_n$. Tällöin $\{U_n\}$ peittää joukon F_1 ja jokainen joukoista $\overline{U_n}$ on erillinen joukosta F_2. Vastaavasti on olemassa kokoelma $\{V_n\}$, joka peittää joukon F_2. Määritellään seuraavaksi

$$U'_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \qquad \text{ja} \qquad V'_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

Tällöin joukot

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_n \qquad \text{ja} \qquad V' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V'_n$$

ovat erillisiä avoimia joukkoja siten, että $F_1 \subset U'$ ja $F_2 \subset V'$. Joukot ovat erillisiä, koska jos $x \in U' \cap V'$, niin $x \in U'_j \cap V'_k$ joillakin j ja k. Oletetaan, että $j \leq k$. Joukon

U'_j määritelmän nojalla $x \in U_j$ ja joukon V'_k määritelmän nojalla $x \notin \overline{U_j}$. Vastaava ristiriita saadaan myös, jos oletetaan, että $j \geq k$. Täten avaruus X on normaali. □

LEMMA 2.13. *Olkoon X normaali avaruus ja olkoon A suljettu G_δ-joukko avaruudessa X. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $f : X \to [0,1]$ siten, että $f(x) = 0$, kun $x \in A$, ja $f(x) > 0$, kun $x \notin A$.*

TODISTUS. Joukko A voidaan G_δ-joukkona kirjoittaa avaruuden X avoimien osajoukkojen numeroituvana leikkauksena. Olkoon $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Valitaan Urysonin lemmaa hyödyntäen jokaiselle luvulle n jatkuva funktio $f_n : X \to [0,1]$ siten, että $f(x) = 0$, kun $x \in A$, ja $f(x) = 1$, kun $x \in X \setminus U_n$. Määritellään $f(x) = \sum f_n(x)/2^n$. Tämä funktio on jatkuva, koska sarja suppenee tasaisesti ja jokainen summan alkio on jatkuva funktio. Funktio f saa arvon 0 aina, kun $x \in A$ ja se saa positiivisen arvon aina, kun $x \in X \setminus A$. □

Edeltävien tulosten avulla voimme nyt todistaa Nagata-Smirnovin metristyvyyslauseen.

LAUSE 2.14 (Nagata-Smirnovin metristyvyyslause). *Topologinen avaruus X on metristyvä, jos ja vain jos X on säännöllinen ja sillä on numeroituvasti paikallisesti äärellinen kanta.*

TODISTUS. VAIHE 1. Oletetaan, että X on säännöllinen ja sillä on numeroituvasti paikallisesti äärellinen kanta $\mathcal{B}$. Tällöin X on normaali avaruus ja jokainen suljettu joukko avaruudessa X on G_δ-joukko avaruudessa X. Osoitetaan, että avaruus X on metristyvä upottamalla se metriseen avaruuteen $(\mathbb{R}^J, \overline{\rho})$ jollakin J.
Olkoon $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, missä jokainen kokoelma $\mathcal{B}_n$ on paikallisesti äärellinen. Valitaan jokaiselle luonnolliselle luvulle n ja kanta-alkiolle $B \in \mathcal{B}_n$ jatkuva funktio

$$f_{n,B} : X \to [0, 1/n]$$

siten, että $f_{n,B}(x) > 0$ kun $x \in B$ ja $f_{n,B}(x) = 0$ kun $x \notin B$. Nyt kokoelma $\{f_{n,B}\}$ erottaa pisteet suljetuista joukoista avaruudessa X seuraavasti: olkoon pisteellä x_0 ympäristö U, jolloin on olemassa kanta-alkio B siten, että $x_0 \in B \subset U$. Tällöin $B \in \mathcal{B}_n$ jollain n, joten $f_{n,B}(x_0) > 0$ ja $f_{n,B}(x) = 0$, kun $x \notin U$.
Olkoon $J \subset \mathbb{N} \times \mathcal{B}$. Joukko $\mathbb{N} \times \mathcal{B}$ koostuu kaikista pareista (n, B) siten, että $B \in \mathcal{B}_n$. Määritellään funktio

$$F : X \to [0,1]^J, F(X) = (f_{n,B}(x))_{(n,B) \in J}.$$

Funktio F on lauseen 2.10 nojalla upotus avaruuteen $[0,1]^J$, kun käytössä on tulotopologia. Osoitetaan, että se on upotus myös silloin kuin avaruudella $[0,1]^J$ on käytössä uniformisen metriikan virittämä uniforminen topologia. Koska uniforminen topologia on hienompi kuin tulotopologia, funktio F on injektiivinen ja kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi arvoavaruudessa. Jäljelle jää osoittaa, että funktio F on jatkuva. Avaruudessa $[0,1]^J$ uniforminen metriikka on sama kuin $\rho(x_\alpha, y_\alpha) = \sup\{|x_\alpha - y_\alpha|\}$. Jatkuvuuden osoittamiseksi etsitään jokaiselle pisteelle $x_0 \in X$ ja luvulle $\epsilon > 0$ sellainen pisteen x_0 ympäristö W, että $x \in W \Rightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \epsilon$. Olkoon n nyt kiinnitetty ja valitaan sellainen pisteen x_0 ympäristö U_n, joka leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\mathcal{B}_n$ alkiota. Tällöin kaikki paitsi äärellisen monta funktioista $f_{n,B}$ saa arvon 0. Koska jokainen funktioista $f_{n,B}$ on jatkuva, voidaan valita pisteen x_0 ympäristö $V_n \subset U_n$ siten, että jokaiselle jäljelle jääneistä funktioista $f_{n,B}$

pätee $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \epsilon/2$. Valitaan nyt N siten, että $1/N \leq \epsilon/2$ ja määritellään $W = V_1 \cap ... \cap V_N$. Osoitetaan, että W on haluttu pisteen x_0 ympäristö. Olkoon $x \in W$. Jos $n \leq N$, niin $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \epsilon/2$ ja jos $n > N$, niin $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq 1/n \leq \epsilon/2$, koska $f_{n,B}$ kuvaa avaruuden X avaruuteen $[0, 1/n]$. Täten $\rho(F(x), F(x_0)) \leq \epsilon/2 < \epsilon$. Koska avaruus X saatiin upotettua metriseen avaruuteen, se on metristyvä avaruus.

Vaihe 2. Oletetaan, että avaruus X on metristyvä. Osoitetaan, että X on normaali avaruus, mistä seuraa, että se on myös säännöllinen. Olkoon avaruudella X metriikka d ja olkoon $A, B \subset X$ erillisiä suljettuja joukkoja. Valitaan jokaiselle pisteelle $a \in A$ ϵ_a siten, että pallo $B(a, \epsilon_a)$ ei leikkaa joukkoa B. Valitaan samoin jokaiselle pisteelle $b \in B$ ϵ_b siten, että pallo $B(b, \epsilon_b)$ ei leikkaa joukkoa A. Määritellään nyt

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon_a/2) \qquad \text{ja} \qquad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \epsilon_b/2).$$

Joukot U ja V ovat nyt erillisiä avoimia joukkoja ja $A \subset U, B \subset V$, koska jos $z \in U \cap V$, niin $z \in B(a, \epsilon_a/2) \cap B(b, \epsilon_b/2)$ jollain $a \in A, b \in B$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla $d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < (\epsilon_a + \epsilon_b)/2$. Jos $\epsilon_a \leq \epsilon_b$, niin $d(a, b) < \epsilon_b$, eli pallo $B(b, \epsilon_b)$ sisältää pisteen a, mikä on mahdotonta, koska ϵ_b valittiin siten, että $B(b, \epsilon_b)$ ei leikkaa joukkoa A. Vastaava ristiriita syntyy, jos $\epsilon_b \leq \epsilon_a$.

Osoitetaan seuraavaksi, että avaruudella X on numeroituvasti paikallisesti äärellinen kanta. Kiinnitetään luku m ja olkoon $\mathcal{A}_m$ avaruuden X peite, joka koostuu avoimista $1/m$-säteisistä palloista. Lemman 2.2 nojalla on olemassa avaruuden X avoin peite $\mathcal{B}_m$, joka on peitteen $\mathcal{A}_m$ tihennys siten, että $\mathcal{B}_m$ on numeroituvasti paikallisesti äärellinen. Koska $\mathcal{B}_m$ on peitteen $\mathcal{A}_m$ tihennys, niin jokaisen kokoelman $\mathcal{B}_m$ alkion halkaisija on korkeintaan $2/m$. Olkoon $\mathcal{B}$ yhdiste kokoelmista $\mathcal{B}_m$. Koska jokainen kokoelmista $\mathcal{B}_m$ on numeroituvasti paikallisesti äärellinen, niin myös $\mathcal{B}$ on. Osoitetaan, että $\mathcal{B}$ on avaruuden X kanta. Olkoon piste $x \in X$ ja $\epsilon > 0$. Näytetään, että on olemassa kokoelman $\mathcal{B}$ alkio B siten, että $x \in B \subset B(x, \epsilon)$. Valitaan m siten, että $1/m < \epsilon/2$. Koska $\mathcal{B}_m$ peittää avaruuden X, valitaan kokoelman $\mathcal{B}_m$ alkio B siten, että $x \in B$. Koska x kuuluu joukkoon B ja joukon B halkaisija on korkeintaan $2/m < \epsilon$, niin $B \subset B(x, \epsilon)$.

□

LUKU 3

Parakompaktius

3.1. Määritelmä ja ominaisuuksia

Tässä luvussa tarkastellaan parakompaktiutta. Parakompaktisuus on kompaktisuuden yleistys ja sillä on monia sovelluksia esimerkiksi differentiaaligeometriassa ja monistoja tutkittaessa. Muistetaan, että avaruus X on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä $\mathcal{A}$ on äärellinen osapeite $\mathcal{B}$. Tämä määritelmä voidaan ilmaista myös siten, että avaruus X on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä $\mathcal{A}$ on äärellinen avoin tihennys $\mathcal{B}$. Tästä kompaktiuden määritelmästä saadaan muotoiltua parakompaktiuden määritelmä. Tämän luvun lähteenä on [**3**, kappale 41].

MÄÄRITELMÄ 3.1. Avaruus X on *parakompakti*, jos jokaisella avaruuden X avoimella peitteellä $\mathcal{A}$ on paikallisesti äärellinen avoin tihennys $\mathcal{B}$, joka peittää avaruuden X.

Monet hyödylliset avaruudet ovat parakompakteja. Esimerkiksi kaikki kompaktit avaruudet ovat myös parakompakteja, koska äärelliset joukot ovat myös paikallisesti äärellisiä.

ESIMERKKI 3.2. Osoitetaan, että avaruus $\mathbb{R}^n$ on parakompakti. Olkoon $\mathcal{A}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin peite. Olkoon joukot $B_m, m \in \mathbb{N}$ avoimia palloja joiden säde on m ja joiden keskipiste on origossa. Merkitään myös $B_0 = \emptyset$. Olkoon m nyt mielivaltaisesti valittu. Valitaan äärellisen monta avoimen peitteen $\mathcal{A}$ alkiota, jotka peittävät joukon $\overline{B_m}$. Näin voidaan tehdä, koska $\overline{B_m}$ on suljettu ja rajoitettu joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukko, jolloin se on kompakti. Otetaan jokaisesta valitusta alkiosta leikkaus avoimen joukon $X \setminus \overline{B_{m-1}}$ kanssa. Nämä leikkaukset muodostavat avoimien joukkojen kokoelman $\mathcal{C}_m$ ja näiden kokoelmien yhdiste $\mathcal{C} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_m$ on peitteen $\mathcal{A}$ avoin tihennys. Tämä nähdään selvästi, koska $A \cap (X \setminus \overline{B_{m-1}}) \subset A$ kaikilla $A \in \mathcal{A}$. Kokoelma $\mathcal{C}$ myös peittää koko avaruuden $\mathbb{R}^n$. Tämä voidaan osoittaa seuraavasti: olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja m pienin luonnollinen luku siten, että $x \in \overline{B_m}$. Tällöin x kuuluu kokoelman $\mathcal{C}_m$ alkioon.

LEMMA 3.3. *Parakompakti Hausdorff-avaruus on normaali.*

TODISTUS. Olkoon X parakompakti Hausdorff-avaruus ja $A, B \subset X$ erillisiä suljettuja joukkoja. Osoitetaan ensin, että avaruus X on säännöllinen asettamalla $B = \{b\}$. Koska X on Hausdorff, jokaisella pisteellä $a \in A$ on olemassa erilliset avoimet joukot U_a, V_a siten, että $a \in U_a$ ja $b \in V_a$. Kokoelma $\{U_a : a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ on nyt avaruuden X peite ja sillä on parakompaktiuden nojalla paikallisesti äärellinen avoin tihennys $\mathcal{W}$. Peite $\mathcal{W}$ koostuu avoimista joukoista, jotka kuuluvat joko joukkoon U_a jollakin pisteellä $a \in A$ tai joukkoon $X \setminus A$. Muodostetaan kokoelma $\mathcal{U}$ niistä peitteen $\mathcal{W}$ alkioista, jotka kuuluvat johonkin joukoista $U_a, a \in A$. Kokoelma $\mathcal{U}$ on

edelleen paikallisesti äärellinen ja se on joukon A avoin peite. Lisäksi jos $U \in \mathcal{U}$, niin pisteellä b on ympäristö V_a, joka on erillinen joukosta U, joten $b \notin \overline{U}$.
Olkoon $U' = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ja $V' = X \setminus \overline{U'}$. Kokoelman $\mathcal{U}$ paikallisesta äärellisyydestä seuraa, että $\overline{U'} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{U}$. Täten koska piste b ei kuulu minkään joukon U sulkeumaan, niin $b \notin \overline{U'}$. Nyt joukot U' ja V' ovat erillisiä avoimia joukkoja siten, että $A \subset U'$ ja $b \in V'$, joten avaruus on säännöllinen.
Osoittaaksemme, että avaruus on normaali, tarvitsee yllä olevassa todistuksessa B korvata mielivaltaisella suljetulla joukolla ja säännöllisyyden nojalla jokaisella pisteellä $a \in A$ ja joukolla B on erilliset ympäristöt. Tästä eteenpäin todistus seuraa vastaavasti säännöllisyyden todistusta. □

LAUSE 3.4. *Metristyvät avaruudet ovat parakompakteja.*

TODISTUS. Lemman 2.2 nojalla jokaisella metristyvän avaruuden avoimella peitteellä on olemassa numeroituvasti paikallisesti äärellinen avoin tihennys, kun taas parakompaktiuden määritelmä vaatii, että peitteellä tulee olla paikallisesti äärellinen avoin tihennys. Osoitetaan seuraavaksi, että säännöllisessä avaruudessa nämä ehdot ovat ekvivalentteja

LEMMA 3.5. *Olkoon X säännöllinen avaruus. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä: Jokaisella avaruuden X avoimella peitteellä on tihennys, joka on avaruuden X:*

(1) *avoin peite ja numeroituvasti paikallisesti äärellinen.*
(2) *peite ja paikallisesti äärellinen.*
(3) *suljettu peite ja paikallisesti äärellinen.*
(4) *avoin peite ja paikallisesti äärellinen.*

Jokainen paikallisesti äärellinen joukko itsessään on numeroituvasti paikallisesti äärellinen, joten jos ehto (4) on totta, on myös ehdon (1) oltava totta. Osoitetaan ekvivalenttius toiseen suuntaan.

(1) $\Rightarrow$ (2). Olkoon $\mathcal{A}$ avaruuden X avoin peite. Olkoon $\mathcal{B}$ kokoelman $\mathcal{A}$ numeroituvasti paikallisesti äärellinen tihennys ja

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n,$$

missä jokainen $\mathcal{B}_n$ on paikallisesti äärellinen. Olkoon

$$V_i = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U.$$

Seuraavaksi jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja jokaiselle kokoelman $\mathcal{B}_n$ alkiolle U määritellään

$$S_n(U) = U \setminus \bigcup_{i<n} V_i.$$

Olkoon

$$\mathcal{C}_n = \{S_n(U) : U \in \mathcal{B}_n\}.$$

Koska jokainen $S_n(U)$ kuuluu joukkoon U, niin $\mathcal{C}_n$ on kokoelman $\mathcal{B}_n$ tihennys. Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_n$ on avaruuden X paikallisesti äärellinen peite. Olkoon piste $x \in X$ ja osoitetaan, että piste x kuuluu johonkin kokoelman $\mathcal{C}$ alkioon ja pisteellä x on olemassa ympäristö, joka leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman

$\mathcal{C}$ alkiota. Tarkastellaan peitettä $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ ja olkoon N pienin luku, jolla x kuuluu johonkin kokoelman $\mathcal{B}_N$ alkioon ja olkoon tämä alkio joukko U. Nyt x ei kuulu minkään kokoelmien $\mathcal{B}_i$ alkioihin, kun $i < N$. Tällöin x kuuluu kokoelman $\mathcal{C}$ alkioon $S_N(U)$. Koska jokainen kokoelmista $\mathcal{B}_n$ on paikallisesti äärellinen, voidaan jokaiselle luvulle $n = 1, ..., N$ valita pisteen x ympäristö W_n, joka leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\mathcal{B}_n$ alkiota. Jos W_n leikkaa kokoelman $\mathcal{C}_n$ alkiota $S_n(V)$, sen on myös leikattava kokoelman $\mathcal{B}_n$ alkiota V, koska $S_n(V) \subset V$. Koska U kuuluu kokoelmaan $\mathcal{B}_N$, niin U ei leikkaa yhtään kokoelman $\mathcal{C}_n$ alkiota, kun $n > N$. Tästä seuraa, että pisteen x ympäristö

$$W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_N \cap U$$

leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\mathcal{C}$ alkiota.

(2) $\Rightarrow$ (3). Olkoon $\mathcal{A}$ avaruuden X avoin peite. Olkoon $\mathcal{B}$ kokoelma kaikista avaruuden X avoimista joukoista U siten, että $\overline{U}$ kuuluu johonkin kokoelman $\mathcal{A}$ alkioon. Säännöllisyyden ja lemman 1.12 nojalla $\mathcal{B}$ on avaruuden X peite. Kohdan (2) nojalla on olemassa peitteen $\mathcal{B}$ tihennys $\mathcal{C}$, joka on paikallisesti äärellinen. Olkoon

$$\mathcal{D} = \{\overline{C} : C \in \mathcal{C}\}.$$

Nyt $\mathcal{D}$ on myös avaruuden X peite, se on paikallisesti äärellinen lemman 1.15 nojalla ja se on peitteen $\mathcal{A}$ tihennys.

(3) $\Rightarrow$ (4). Olkoon $\mathcal{A}$ avaruuden X avoin peite. Kohdan (3) nojalla, olkoon $\mathcal{B}$ peitteen $\mathcal{A}$ tihennys, joka on paikallisesti äärellinen avaruuden X suljettu peite. Jokaista kokoelman $\mathcal{B}$ alkiota on nyt laajennettava hieman siten, että uudet avoimet joukot ovat edelleen paikallisesti äärellisiä ja tihentävät kokoelmaa $\mathcal{A}$. Tehdään tämä toisen avaruuden X peitteen $\mathcal{C}$ avulla.

Jokaisella avaruuden X pisteellä x on olemassa ympäristö, joka leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\mathcal{B}$ alkiota. Näiden ympäristöjen kokoelma on täten avaruuden X avoin peite. Käytetään tälle peitteelle kohtaa (3) ja olkoon $\mathcal{C}$ tämän peitteen suljettu paikallisesti äärellinen tihennys. Jokainen kokoelman $\mathcal{C}$ alkioista leikkaa nyt siis vain äärellisen montaa kokoelman $\mathcal{B}$ alkiota. Olkoon jokaiselle kokoelman $\mathcal{B}$ alkiolle B nyt

$$\mathcal{C}(B) = \{C : C \in \mathcal{C} \text{ ja } C \subset X \setminus B\}.$$

Määritellään nyt

$$E(B) = X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C.$$

Koska $\mathcal{C}$ on paikallisesti äärellinen suljettujen joukkojen kokoelma, on tämän kokoelman alkioiden yhdiste suljettu lemman 1.16 nojalla. Täten joukko $E(B)$ on avoin ja määritelmän nojalla jokaiselle joukolle $E(B)$ pätee $B \subset E(B)$. Joukkojen $E(B)$ kokoelma ei välttämättä ole kuitenkaan peitteen $\mathcal{A}$ tihennys, joten rajoitetaan joukkoja valitsemalla jokaiselle $B \in \mathcal{B}$ peitteen $\mathcal{A}$ alkio $F(B)$, johon B kuuluu. Määritellään nyt

$$\mathcal{D} = \{E(B) \cap F(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

Kokoelma $\mathcal{D}$ on nyt peitteen $\mathcal{A}$ tihennys ja se on myös avaruuden X peite.

Osoitetaan vielä, että $\mathcal{D}$ on paikallisesti äärellinen. Valitaan mielivaltainen avaruuden X piste x ja valitaan sen ympäristö W, joka leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\mathcal{C}$ alkiota. Olkoon nämä alkiot $C_1, ..., C_k$. Koska $\mathcal{C}$ peittää avaruuden X, niin nämä joukot $C_1, ..., C_k$ peittävät ympäristön W. Riittää siis osoittaa, että jokainen kokoelman $\mathcal{C}$ alkio C leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\mathcal{D}$ alkiota. Jos C leikkaa joukkoa $E(B) \cap F(B)$, niin se leikkaa joukkoa $E(B)$ jolloin määritelmän nojalla $E(B)$ ei kuulu joukkoon $X \setminus B$, joten joukon C täytyy leikata joukkoa B. Koska C leikkaa vain äärellisen montaa kokoelman $\mathcal{B}$ alkiota, se ei voi leikata enempää kokoelman $\mathcal{D}$ alkioita. □

3.2. Ykkösen ositus

Tärkeimpiä parakompaktiuden takaamia ominaisuuksia on ykkösen osituksen olemassaolo. Ennen ykkösen osituksen määritelmää tarvitaan vielä funktion kantajan määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Olkoon X topologinen avaruus ja $f : X \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Funktion f *kantaja* (engl. *support*) on joukon $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ sulkeuma. Funktion f kantajaa merkitään supp f.

MÄÄRITELMÄ 3.7. Olkoon topologisella avaruudella X indeksöity avoin peite $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Indeksoitua kokoelmaa jatkuvia funktioita

$$\psi_\alpha : X \to [0, 1]$$

kutsutaan peitteeseen $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sopivaksi ykkösen osituikseksi (engl. *partition of unity*), jos sille pätee seuraavat ehdot:

- supp $\psi_\alpha \subset U_\alpha$ jokaisella α.
- Indeksoitu kokoelma $\{\text{supp } \psi_\alpha\}$ on paikallisesti äärellinen.
- $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$ kaikilla $x \in X$.

Nyt tavoitteena on konstruoida ykkösen ositus mielivaltaiselle parakompaktille Hausdorff-avaruudelle. Osoitetaan tätä varten, että Hausdorff-avaruuksille pätee vahvempi parakompaktiuden muoto.

LEMMA 3.8. *Olkoon X parakompakti Hausdorff-avaruus. Jos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on avaruuden X indeksoitu avoin peite, niin peitteellä $\mathcal{U}$ on paikallisesti äärellinen avoin tihennys $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ siten, että $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ jokaisella α.*

TODISTUS. Edellä osoitettiin, että parakompakti Hausdorff-avaruus on normaali. Normaalissa avaruudessa pätee seuraava ehto: jos A on avaruuden X suljettu osajoukko ja joukolla A on ympäristö U, joukolla A on myös ympäristö V siten, että $\overline{V} \subset U$. Tämä nähdään asettamalla normaaliuden ehdossa toiseksi suljetuksi joukoksi $X \setminus U$. Täten jokaisella $x \in X$ on olemassa ympäristö Y_x siten, että $\overline{Y_x} \subset U_\alpha$ jollain $\alpha \in A$. Koska avaruus X on parakompakti, avoimella peitteellä $\{Y_x : x \in X\}$ on paikallisesti äärellinen avoin tihennys. Olkoon tämä tihennys indeksoitu joukolla B ja merkitään tihennystä $\mathcal{Z} = \{Z_\beta\}_{\beta \in B}$. Jokaisella $\beta \in B$ on olemassa jokin $x \in X$ siten, että $Z_\beta \subset Y_x$, jolloin on myös jokin $\alpha \in A$ siten, että $\overline{Z_\beta} \subset \overline{Y_x} \subset U_\alpha$. Olkoon funktio $a : B \to A$, joka kuvaa jokaisen $\beta \in B$ joksikin $\alpha \in A$. Määritellään nyt jokaiselle

$\alpha \in A$ avoin osajoukko $V_\alpha \subset X$ seuraavasti:

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta : a(\beta)=\alpha} Z_\beta.$$

Kokoelman $\mathcal{Z}$ paikallisesta äärellisyydestä seuraa, että

$$\overline{V_\alpha} = \overline{\bigcup_{\beta : a(\beta)=\alpha} Z_\beta} = \bigcup_{\beta : a(\beta)=\alpha} \overline{Z_\beta}.$$

Koska jokaisen joukon Z_β sulkeuma kuuluu joukkoon U_α, myös $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. □

Ykkösen ositus voidaan nyt konstruoida.

LAUSE 3.9. *Olkoon X parakompakti Hausdorff-avaruus. Tällöin, jos $\mathcal{U}$ on mikä tahansa avaruuden X indeksoitu avoin peite, on olemassa peitteeseen $\mathcal{U}$ sopiva ykkösen ositus.*

TODISTUS. Olkoon $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ avaruuden X indeksoitu avoin peite. Edellisen lemman nojalla on olemassa avoin peite $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ siten, että $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Käyttämällä lemmaa toisen kerran saadaan toinen avoin peite $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ siten, että $\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$. Koska parakompaktiuden vuoksi avaruus X on normaali, voidaan Urysonin lemman perusteella määritellä jokaiselle $\alpha \in A$ funktio $f_\alpha : X \to [0,1]$ siten, että $f_\alpha(\overline{W_\alpha}) = \{1\}$ ja $f_\alpha(X \setminus V_\alpha) = \{0\}$. Koska funktio f_α saa nollasta poikkeavia arvoja vain joukon V_α pisteissä, pätee supp $f_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Koska $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on paikallisesti äärellinen, niin $\{\overline{V_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ on paikallisesti äärellinen ja täten myös $\{\text{supp } f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on paikallisesti äärellinen.

Määritellään funktio $f : X \to \mathbb{R}, f(p) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p)$. Paikallisen äärellisyyden nojalla jokaisella $p \in X$ on olemassa ympäristö W_p, joka leikkaa vain äärellisen montaa joukon supp f_α alkiota ja tällöin summassa on vain äärellisen monta nollasta poikkeavaa alkiota, joten f on äärellisenä jatkuvien funktioiden summana jatkuva. Koska kokoelma $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ peittää avaruuden X, jokaisella pisteellä $p \in X$ on olemassa ainakin yksi $\alpha \in A$ siten, että $p \in W_\alpha$, jolloin $f_\alpha(p) = 1$. Täten funktio f on joka pisteessä positiivinen.

Määritellään uusi funktio $\psi_\alpha(p) = f_\alpha(p)/f(p)$ ja käydään läpi ykkösen osituksen ehdot. Jos $f_\alpha(p) = 0$ niin $\psi_\alpha(p) = 0$ kaikilla $p \in X$, joten supp ψ_α=supp $f_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Kokoelma $\{\text{supp } \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on täten myös paikallisesti äärellinen. Funktioiden ψ_α summia tarkasteltaessa huomataan, että

$$\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(p) = \sum_{\alpha \in A} \frac{f_\alpha(p)}{f(p)} = \sum_{\alpha \in A} \frac{f_\alpha(p)}{\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p)} = 1.$$

Täten ψ_α on peitteeseen $\mathcal{U}$ sopiva ykkösen ositus. □

LUKU 4

Sovelluksia

4.1. Smirnovin metristyvyyslause

Tähän mennessä tässä tutkielmassa ollaan käyty läpi erilaisia ehtoja metristyvyydelle ja sen jälkeen tutustuttu parakompaktiuteen ja sen takaamiin ominaisuuksiin. Metristyvyys ja parakompaktius yhdistetään nyt Smirnovin metristyvyyslauseessa. Smirnovin metristyvyyslauseessa esiintyy paikallisen metristyvyyden käsite, joten määritellään se. Todistus perustuu lähteeseen [**3**, kappale 42].

MÄÄRITELMÄ 4.1. Avaruus (X, τ) on paikallisesti metristyvä, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa ympäristö U siten, että $(U, \tau|_U)$ on metristyvä.

LAUSE 4.2 (Smirnovin metristyvyyslause). *Avaruus X on metristyvä, jos ja vain jos se on paikallisesti metristyvä parakompakti Hausdorff-avaruus.*

TODISTUS. Oletetaan, että avaruus X on metristyvä. Tällöin se on myös paikallisesti metristyvä. Metristyvät avaruudet ovat myös parakompakteja avaruuksia lauseen 3.4 nojalla.
Oletetaan sitten, että avaruus X on paikallisesti metristyvä parakompakti Hausdorff-avaruus. Paikallisesta metristyvyydestä seuraa, että avaruudella X on avoin peite, joka koostuu metristyvistä joukoista. Koska avaruus X on parakompakti, tällä peitteellä on paikallisesti äärellinen tihennys $\mathcal{C}$, joka peittää avaruuden X. Nyt jokainen $C \in \mathcal{C}$ on metristyvä ja olkoon $d_C : C \times C \to \mathbb{R}$ metriikka, joka antaa joukon C topologian. Muodostetaan avoimet pallot $B_C(x, \epsilon) = y \in C : d_C(x, y) < \epsilon$ jokaiselle $x \in C$. Nämä avoimet pallot ovat avoimia joukossa C relatiivitopologialla, joten ne ovat avoimia myös avaruudessa X. Kiinnitetään luku m ja olkoon $\mathcal{A}_m$ avaruuden X peite, joka koostuu näistä avoimista palloista $1/m$-säteisinä:

$$\mathcal{A}_m = \{B_C(x, 1/m) : x \in C \text{ ja } C \in \mathcal{C}\}.$$

Parakompaktiuden nojalla tällä peitteellä on paikallisesti äärellinen avoin tihennys $\mathcal{D}_m$, joka peittää avaruuden X. Olkoon $\mathcal{D}$ näiden kokoelmien yhdiste: $D = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_m$. Nyt $\mathcal{D}$ on numeroituvasti paikallisesti äärellinen. Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{D}$ on avaruuden X kanta, jolloin metristyvyys seuraa Nagata-Smirnovin metristyvyyslauseesta.
Olkoon $x \in X$ ja U pisteen x avoin ympäristö. Etsitään kokoelman $\mathcal{D}$ joukko D siten, että $x \in D \subset U$. Piste x kuuluu vain äärelliseen moneen kokoelman $\mathcal{C}$ joukoista, koska $\mathcal{C}$ on paikallisesti äärellinen. Olkoon nämä joukot $C_1, ..., C_k$. Tällöin $U \cap C_i$ on pisteen x ympäristö joukossa C_i, joten on olemassa ϵ_i siten, että

$$B_{C_i}(x, \epsilon_i) \subset (U \cap C_i).$$

Valitaan m siten, että $2/m < \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_k\}$. Koska $\mathcal{D}_m$ peittää avaruuden X, on oltava olemassa joukko $D \in \mathcal{D}_m$, johon piste x kuuluu. Koska $\mathcal{D}_m$ on kokoelman $\mathcal{A}_m$

tihennys, on oltava olemassa kokoelman $\mathcal{A}_m$ alkio $B_C(y, 1/m)$ jollakin $C \in \mathcal{C}$ ja $y \in C$, joka sisältää joukon D. Koska

$$x \in D \subset B_C(y, 1/m),$$

piste x kuuluu joukkoon C, joten joukko C on yksi joukoista $C_1, ..., C_k$. Olkoon tämä joukko C_n. Koska valittiin $2/m < \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_k\}$, niin seuraa:

$$x \in D \subset B_{C_n}(y, 1/m) \subset B_{C_n}(y, \epsilon_n) \subset U \cap C_n \subset U.$$

Nyt koska parakompaktit avaruudet ovat normaaleja, ne ovat myös säännöllisiä ja säännöllinen avaruus, jolla on numeroituvasti paikallisesti äärellinen kanta on Nagata-Smirnovin metristyvyyslauseen nojalla metristyvä. □

4.2. Monistot

Parakompaktius tarjoaa vahvan työkalun monistojen tutkimiseen ykkösen osituksen muodossa. Monistot ovat topologisia avaruuksia, joiden voidaan ajatella paikallisesti näyttävän euklidiselta avaruudelta. Koska tämä tutkielma keskittyy topologiaan, määritellään vain topologinen monisto. Monistoihin liittyvät tulokset pohjautuvat lähteeseen [**2**, luku 4].

MÄÄRITELMÄ 4.3. Topologinen avaruus on *n-ulotteinen topologinen monisto*, jos sillä on numeroituva kanta, se on Hausdorff-avaruus ja sen jokaisella pisteellä on ympäristö, joka on homeomorfinen jonkin avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimen joukon kanssa. Usein n-ulotteinen monisto lyhennetään n-monistoksi.

Määritelmän nojalla, jos M on n-monisto, niin jokaiselle pisteelle $p \in M$ löydetään ympäristö $U \subset M$, avoin joukko $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ ja homeomorfismi $\varphi : U \to \hat{U}$. Näistä avoimista joukoista ja homeomorfismeista voidaan muodostaa järjestetty pari (U, φ), jota kutsutaan *koordinaattikartaksi* tai vain *kartaksi*. Homeomorfismien määrittelyjoukkoa U kutsutaan *koordinaattimäärittelyjoukoksi*. Jos U kuvautuu avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimeksi palloksi, niin U on *koordinaattipallo*.

Jotta ykkösen ositusta päästään käyttämään monistoilla, on osoitettava, että sellainen on olemassa. Todistetaan seuraavaksi, että jokainen monisto on parakompakti, mikä takaa ykkösen osituksen olemassaolon. Tämä todistus tehdään osoittamalla, että jokainen monisto on paikallisesti kompakti ja sen jälkeen osoitetaan, että jokainen paikallisesti kompakti Hausdorff-avaruus, jolla on numeroituva kanta, on parakompakti. Aloitetaan määrittelemällä paikallinen kompaktius ja esikompaktius.

MÄÄRITELMÄ 4.4. Topologinen avaruus X on *paikallisesti kompakti*, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa avaruuden X kompakti osajoukko, joka sisältää jonkin pisteen x ympäristön.

MÄÄRITELMÄ 4.5. Topologisen avaruuden X osajoukko A on *esikompakti*, jos joukon A sulkeuma $\overline{A}$ on kompakti.

Paikallinen kompaktius ja esikompaktius saadaan yhdistettyä hyödyllisessä tuloksessa, kun tarkastellaan Hausdorff-avaruuksia. Proposition todistuksessa käytetään ympäristökannan käsitettä, joten määritellään se ensin.

MÄÄRITELMÄ 4.6. Olkoon X topologinen avaruus ja piste $x \in X$. Kokoelma $\mathcal{B}_x$ pisteen x ympäristöjä on pisteen x *ympäristökanta*, jos jokaisella pisteen x ympäristöllä U on olemassa jokin ympäristökannan alkio $B \in \mathcal{B}_x$ siten, että $B \subset U$.

Todistuksen kannalta oleellista on, että jos jokaisella avaruuden pisteellä on olemassa ympäristökanta, niin näiden ympäristökantojen yhdiste muodostaa topologian kannan. Koska jokaisella pisteellä on ympäristökanta, niin jokaisella pisteellä on vähintään yksi kanta-alkio, mihin kyseinen piste kuuluu. Jos jokin piste x kuuluu kahden ympäristökanta-alkion $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ leikkaukseen, niin tämä leikkaus on avoimien joukkojen äärellisenä leikkauksena avoin, jolloin se on myös pisteen x ympäristö. Ympäristökannan määritelmän nojalla jokainen pisteen x ympäristö sisältää jonkin ympäristökannan alkion ja täten on olemassa $B_3 \in \mathcal{B}_x$ siten, että $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Tämä täyttää kannan ehdot.

PROPOSITIO 4.7. *Olkoon avaruus X Hausdorff-avaruus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Avaruus X on paikallisesti kompakti.*
(2) *Jokaisella pisteellä x avaruudessa X on esikompakti ympäristö.*
(3) *Avaruudella X on kanta, joka koostuu esikompakteista avoimista joukoista.*

TODISTUS. Nähdään, että (3) $\to$ (2) $\to$ (1), koska jos avaruudella X on esikompakteista joukoista koostuva kanta ja jokainen piste $x \in X$ kuuluu vähintään yhteen kanta-alkioon, niin tämä kanta-alkio on kohdassa (2) haluttu esikompakti ympäristö. Esikompaktiudesta seuraa, että tämän kanta-alkion sulkeuma on kompakti. Täten jokaisella pisteellä x on olemassa kompakti osajoukko, joka sisältää jonkin tämän pisteen ympäristön.
Ekvivalenttiuden osoittamiseksi osoitetaan, että (1) $\to$ (3). Tämä tehdään näyttämällä, että jos avaruus X on paikallisesti kompakti Hausdorff-avaruus, niin jokaisella pisteellä $x \in X$ on esikompakteista avoimista joukoista koostuva ympäristökanta. Olkoon nyt piste $x \in X$ ja pisteellä x ympäristö U. Paikallisen kompaktiuden nojalla olkoon $K \subset X$ kompakti joukko siten, että $U \subset K$. Kokoelma $\mathcal{V}$ kaikista pisteen x ympäristöistä, jotka kuuluvat joukkoon U on pisteen x ympäristökanta. Koska avaruus X on Hausdorff, joukko K on suljettu avaruudessa X. Jos $V \in \mathcal{V}$, niin $\overline{V} \subset K$, koska $V \subset U \subset K$ ja K on suljettu. Kompaktin joukon suljettu osajoukko on kompakti [**3**, s. 165] ja täten $\overline{V}$ on kompakti ja $\mathcal{V}$ on kohdassa (3) haluttu kanta. $\square$

Edellisen proposition nojalla avaruus on paikallisesti kompakti, jos sillä on esikompakteista avoimista joukoista koostuva kanta. Osoitetaan seuraavaksi, että jokaisella monistolla on sellainen kanta.

PROPOSITIO 4.8. *Jokaisella monistolla on numeroituva kanta, joka koostuu esikompakteista koordinaattipalloista.*

TODISTUS. Olkoon M n-monisto. Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa avaruus M voidaan peittää yhdellä kartalla $\varphi : M \to \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$. Olkoon $\mathcal{B}$ kokoelma avoimia palloja $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ siten, että r on rationaaliluku, pisteellä x on rationaalilukukoordinaatit ja $B(x, r') \subset \hat{U}$ jollakin $r' > r$. Jokainen näistä palloista on esikompakti, koska suljetut joukot avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ovat kompakteja ja sulkeuma on suljettu joukko. Kokoelma $\mathcal{B}$ on joukon $\hat{U}$ topologian numeroituva kanta ja kokoelma $\{\varphi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ on tällöin avaruuden M topologian numeroituva kanta.

Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa tarvitaan useampi kartta peittämään avaruus M. Jokainen moniston M piste kuuluu johonkin koordinaattimäärittelyjoukkoon. Koska monistoilla on numeroituva kanta, niin jokaisella avoimella peitteellä on numeroituva alipeite, joten numeroituvan monta karttaa $\{U_i, \varphi_i\}$ peittää avaruuden M. Edellisen vaiheen nojalla jokaisella koordinaattimäärittelyjoukolla U_i on olemassa esikompakteista koordinaattipalloista koostuva numeroituva kanta. Näiden kantojen yhdiste on numeroituva kanta avaruuden M topologialle. Osoitetaan vielä, että kanta-alkiot ovat esikompakteja myös avaruudessa M. Jos $V \subset U_i$ on yksi tällaisista joukoista, niin joukon V sulkeuma joukossa U_i on kompakti ja täten se on suljettu avaruudessa M, koska M on Hausdorff-avaruus. Nyt joukon V sulkeumat avaruuksissa U_i ja M ovat samat, joten V on esikompakti myös avaruudessa M. $\square$

PROPOSITIO 4.9. *Jokainen monisto on paikallisesti kompakti.*

TODISTUS. Proposition 4.8 nojalla jokaisella monistolla on esikompakteista koordinaattipalloista koostuva kanta. Nyt proposition 4.7 perusteella voidaan sanoa, että jokainen monisto on paikallisesti kompakti. $\square$

Tarvitsemme monistojen parakompaktiuden todistamista varten vielä tuloksen tyhjennyksistä.

MÄÄRITELMÄ 4.10. Olkoon X topologinen avaruus. Jono $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ avaruuden X kompakteja osajoukkoja on *avaruuden X tyhjennys*, jos $X = \bigcup_i K_i$ ja $K_i \subset \mathrm{Int} K_{i+1}$, jokaisella i.

PROPOSITIO 4.11. *Paikallisesti kompaktilla Hausdorff-avaruudella, jolla on numeroituva kanta, on olemassa tyhjennys.*

TODISTUS. Olkoon X paikallisesti kompakti Hausdorff-avaruus, jolla on numeroituva kanta. Tällöin sillä on esikompakteista avoimista joukoista koostuva numeroituva kanta ja se voidaan peittää numeroituvalla kokoelmalla näitä joukkoja $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$.
Proposition todistamiseksi on konstruoitava kompakteista joukoista koostuva jono $(K_j)_{j=1}^{\infty}$, jolle pätee $U_j \subset K_j$ ja $K_j \subset \mathrm{Int} K_{j+1}$ jokaisella j.
Käytetään jonon konstruointiin induktiota. Olkoon $K_1 = \overline{U_1}$. Tehdään induktio-oletus, että joukot $K_1, ..., K_n$ ovat kompakteja joukkoja, jotka toteuttavat halutut ehdot. Koska K_n on kompakti, se voidaan peittää äärellisellä määrällä joukkoja U_i. Olkoon k_n sellainen luku, että $K_n \subset U_1 \cup ... \cup U_{k_n}$. Määritellään $K_{n+1} = \overline{U_1} \cup ... \cup \overline{U_{k_n}}$, jolloin K_{n+1} on kompakti joukko, johon K_n kuuluu. Jos valitaan vielä $k_n > n+1$ niin $U_{n+1} \subset K_{n+1}$. Täten induktion nojalla haluttu jono on olemassa. $\square$

LAUSE 4.12. *Paikallisesti kompakti Hausdorff-avaruus, jolla on numeroituva kanta, on parakompakti.*

TODISTUS. Olkoon X paikallisesti kompakti Hausdorff-avaruus, jolla on numeroituva kanta, ja olkoon U avaruuden X avoin peite. Lemman 4.11 nojalla olkoon $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ avaruuden X tyhjennys. Jokaiselle j olkoon $A_j = K_{j+1} \setminus \mathrm{Int} K_j$ ja $W_j = \mathrm{Int} K_{j+2} \setminus K_{j-1}$. Tällöin A_j on kompakti joukko, joka sisältyy avoimeen joukkoon W_j. Valitaan jokaiselle $x \in A_j$ ympäristö $U_x \in \mathcal{U}$ ja olkoon $V_x = U_x \cap W_j$. Kun x käy läpi kaikki joukon A_j pisteet, niin joukkojen V_j kokoelma on joukon A_j peite ja täten sillä on äärellinen alipeite. Kun j käy läpi kaikki luonnolliset luvut, niin näiden äärellisten alipeitteiden yhdiste muodostaa avaruuden X avoimen peitteen joka on peitteen $\mathcal{U}$ tihennys.

Tämä peite on myös paikallisesti äärellinen, koska jokainen joukoista W_j leikkaa vain joukkoja $W_{j'}$, joilla $j-2 \leq j' \leq j+2$. □

Monistoilla on parakompaktiuden nojalla täten olemassa ykkösen ositus ja sen avulla voidaan todistaa useita tuloksia.

LAUSE 4.13. *Jokainen kompakti monisto on homeomorfinen jonkin euklidisen avaruuden osajoukon kanssa. Toisin sanoen kompakti monisto voidaan upottaa euklidiseen avaruuteen.*

TODISTUS. Olkoon M kompakti n-monisto. Kompaktiuden nojalla monistolla M on olemassa äärellisen monesta avoimesta joukosta $U_1, ..., U_k$ koostuva peite siten, että jokainen joukoista U_i on homeomorfinen $\mathbb{R}^n$ kanssa. Olkoon jokaiselle i nyt $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismi. Olkoon (ψ_i) tähän peitteeseen sopiva ykkösen ositus ja määritellään funktiot $F_i : M \to \mathbb{R}^n$ seuraavasti:

$$F_x(x) = \begin{cases} \psi_i(x)\varphi_i(x), & x \in U_i \\ 0, & x \in M \setminus \operatorname{supp} \psi_i \end{cases}.$$

Jokainen funktioista F_i on jatkuva. Määritellään seuraavaksi funktio

$$F : M \to \mathbb{R}^{nk+k}, F(x) = (F_1(x), ..., F_k(x), \psi_1(x), ..., \psi_k(x)).$$

Funktio $F(x)$ on myös jatkuva. Osoitetaan, että se on injektio, jolloin se on myös upotus niin sanotun suljetun kuvauksen lemman nojalla [**2**, s. 100]. Oletetaan, että $F(x) = F(y)$ joillain pisteillä $x, y \in M$. Koska $\sum_i \psi_i(x) = 1$, niin on olemassa jokin i siten, että $\psi_i(x) > 0$ ja täten $x \in U_i$. Nyt kuitenkin $F(x) = F(y)$, mikä tarkoittaa, että $\psi_i(y) = \psi_i(x) > 0$ ja tällöin myös $y \in U_i$. Nähdään myös, että $F_i(x) = F_i(y)$ tarkoittaa sitä, että $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$. Täten $x = y$, koska φ_i on injektio. □

Seuraavassa lauseessa puhutaan nollajoukoista. Nollajoukko on joukko $\{x \in X : f(x) = 0\}$, kun X on mikä tahansa joukko ja funktio $f : X \to \mathbb{R}$.

LAUSE 4.14. *Olkoon M topologinen monisto ja $B \subset M$ suljettu osajoukko. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $f : M \to [0, \infty[$, jonka nollajoukko on B.*

TODISTUS. Tarkastellaan ensin tilannetta, missä $M = \mathbb{R}^n$ ja $B \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu joukko. Tällöin sopiva funktio on $u(x) = \inf\{|x-y| : y \in B\}$.
Tarkastellaan seuraavaksi mielivaltaista tilannetta. Olkoon M n-monisto ja B sen suljettu osajoukko. Olkoon $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ avaruuden M peite, joka koostuu avoimista joukoista, jotka ovat homeomorfisia avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanssa ja olkoon $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ tähän peitteeseen sopiva ykkösen ositus. Edellisen tilanteen funktiosta saadaan jokaiselle $\alpha \in A$ jatkuva funktio $u_\alpha : U_\alpha \to [0, \infty[$ siten, että $u_\alpha(0) = B \cap U_\alpha$. Määritellään nyt $f : M \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) u_\alpha(x).$$

Summan termit ovat 0, kun $x \notin \operatorname{supp} \psi_\alpha$ ja summan termit ovat jatkuvia. Tämä funktio on haluttu jatkuva funktio. □

Viimeinen ykkösen osituksen käyttökohde liittyy tyhjennysfunktioihin. Jos X on topologinen avaruus, tyhjennysfunktio avaruudelle X on jatkuva funktio $f : X \to \mathbb{R}$ siten, että $f^{-1}(]-\infty, c])$ on kompakti joukko jokaisella $c \in \mathbb{R}$. Tällöin joukot $f^{-1}(]-$

$\infty, c])$ muodostavat avaruuden X tyhjennyksen, kun c käy läpi kaikki luonnolliset luvut.

Lause 4.15. *Jokaisella monistolla on olemassa positiivinen tyhjennysfunktio.*

Todistus. Olkoon M monisto ja $\{U_i\}$ avaruuden M avoin peite, joka koostuu esikompakteista avoimista joukoista ja olkoon $\{\psi_i\}$ tähän peitteeseen sopiva ykkösen ositus. Määritellään funktio

$$f : M \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_k(x).$$

Funktio f on nyt jatkuva ja saa vain positiivisia arvoja, koska $f(x) \geq \sum_k \psi_k(x) = 1$. Millä tahansa luonnollisella luvulla m, jos $x \notin \bigcup_{k=1}^{m} \overline{U_k}$, niin $\psi_k(x) = 0$, kun $1 \leq k \leq m$, joten

$$f(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} k\psi_k(x) > \sum_{k=m+1}^{\infty} m\psi_k(x) = m \sum_{k=m+1}^{\infty} \psi_k(x) = m.$$

Toisaalta tämän perusteella, jos $f(x) \leq m$, niin $x \in \bigcup_{k=1}^{m} \overline{U_k}$. Olkoon $c \in \mathbb{R}$ mikä tahansa ja $m > c$ luonnollinen luku. Tällöin $f^{-1}(] - \infty, c])$ on kompaktin joukon $\bigcup_{k=1}^{m} \overline{U_k}$ suljettu osajoukko ja täten myös kompakti. $\square$

Kirjallisuutta

[1] JAMES DUGUNDJI *Topology*, ensimmäinen laitos, Allyn and Bacon, 1966.
[2] JOHN M. LEE: *Introduction to Topological Manifolds*, toinen laitos, Springer, 2010.
[3] JAMES R. MUNKRES: *Topology*, toinen laitos, Prentice Hall, 2000.
[4] JUSSI VÄISÄLÄ: *Topologia I*, Limes ry, 1999.
[5] JUSSI VÄISÄLÄ: *Topologia II*, Limes ry, 1999.