



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTO-
TIETEEN LAITOS

PRO GRADU-TUTKIELMA

Keskijoukot kartioleikkausten yleistyksinä

Hanna Jaakkola

14. elokuuta 2023



TekijäHanna Jaakkola

OtsikkoKeskijoukot kartioleikkausten
yleistyksinä (engl. Equidistant sets as generalized conics)

Tutkinto-ohjelmaMatematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä

14. elokuuta 2023

Sivumäärä40

Tiivistelmä

Tämän tutkielman aiheena ovat keskijoukot. Tutkielman tarkoituksena on esitellä keskijoukkojen ominaisuuksia ja yleistää kartioleikkaukset keskijoukkojen avulla.

Keskijoukot ovat joukkoja, jotka ovat yhtä etäällä kahdesta annetusta epätyhjästä joukosta. Niitä joukkoja, joiden suhteen keskijoukko on määriteltä, kutsutaan polttopistejoukoiksi.

Kartioleikkauksia ja niiden ominaisuuksia tarkastelemalla huomataan, että aidot kartioleikkaukset hyperbeli, ellipsi ja paraabeli voidaan määritellä kahden ympyrän keskijoukkoina. Monimutkaisemmilla polttopistejoukoilla muodostuvat keskijoukot muistuttavat edelleen kartioleikkauksia, niillä on samoja ominaisuuksia kartioleikkausten kanssa. Keskijoukot voidaan siten ajatella kartioleikkausten yleistyksinä.

Tutkielmassa tarkastellaan lisäksi keskijoukkojen heijastusominaisuuksia. Kartioleikkauksille tunnetaan erityisiä polttopisteisiin liittyviä heijastusominaisuuksia. Tasogeometriassa kartioleikkausten heijastusominaisuudet todistetaan tangentsuorien ja polttopisteiden avulla. Tässä tutkielmassa nämä ominaisuudet esitetään kartioleikkauksille ilman tangentsuorien yhtälöitä keskijoukkojen heijastusominaisuuksien avulla.

Sisällys

Johdanto	3
1 Keskiyouskko ja sen ominaisuuksia	4
1.1 Keskiyouskko	4
1.2 Keskiyouskon ominaisuuksia	5
2 Kartioleikkaukset	10
2.1 Kartioleikkaukset polttopisteiden ja johtosuoran avulla	10
2.1.1 Hyperbeli	10
2.1.2 Ellipsi	13
2.1.3 Paraabeli	14
2.2 Kartioleikkaukset keskiyouskkoina	16
2.2.1 Hyperbeli keskiyouskkona	16
2.2.2 Ellipsi keskiyouskkona	18
2.2.3 Paraabeli keskiyouskkona	19
3 Keskiyouskkojen heijastusominaisuudet	21
3.1 Valonsäteen heijastuminen keskiyouskosta	21
3.2 Heijastusominaisuudet, kun kartioleikkaukset ovat määritelty keskiyouskkoina	26
4 Kartioleikkauksia muistuttavat keskiyouskot	29
4.1 Hyperbeliä muistuttavat keskiyouskot	29
4.2 Ellipsiä muistuttavat keskiyouskot	36
4.3 Paraabelia muistuttavat keskiyouskot	36

Johdanto

Tämän tutkielman aiheena ovat keskijoukot, keskijoukkojen ominaisuudet ja kartioleikkausten yleistäminen keskijoukkojen avulla. Keskijoukot (engl. *midsets, equidistant sets*) määritellään joukkoina, jotka ovat yhtä etäällä kahdesta annetusta epätyhjistä joukosta. Niitä joukkoja, joiden suhteen keskijoukko on määritelty, kutsutaan polttopistejoukoiksi.

Tutkielman päälähteinä on käytetty Mario Poncen ja Patricio Santibáñezin artikkelia *On Equidistant Sets and Generalized Conics: The Old and the New* [11], sekä Mario Poncen artikkelia *Reflections on Equidistant Sets* [10].

Tutkielman ensimmäisessä luvussa tarkastellaan keskijoukkoa ja sen ominaisuuksia. Toisessa luvussa keskitytään kartioleikkausten tarkasteluun ja esitetään kartioleikkaukset kahden ympyrän keskijoukkoina. Hyperbeli saadaan keskijoukkona, kun polttopistejoukoiksi valitaan kaksi ympyrää, jotka eivät leikkaa toisiaan. Ellipsi muodostuu, kun ympyrät ovat sisäkkäin. Paraabelin tapauksessa keskijoukko on havaittavissa jo paraabelin määritelmästä. Ympyröiden avulla paraabeli saadaan keskijoukkona, kun polttopistejoukoista toinen surkastuu pisteeksi ja suora ajatellaan yleistettynä ympyränä.

Kolmannessa luvussa tarkastellaan valonsäteen heijastumista keskijoukosta. Tutkielmassa heijastusominaisuuksien tarkastelu rajataan konvekseilla polttopistejoukoilla muodostuvien keskijoukkojen tutkimiseen. Kartioleikkauksille tunnetaan erityisiä polttopisteisiin liittyviä heijastusominaisuuksia, ja tässä luvussa esitetään nämä ominaisuudet, kun kartioleikkaukset ovat määritelty kahden ympyrän keskijoukkoina.

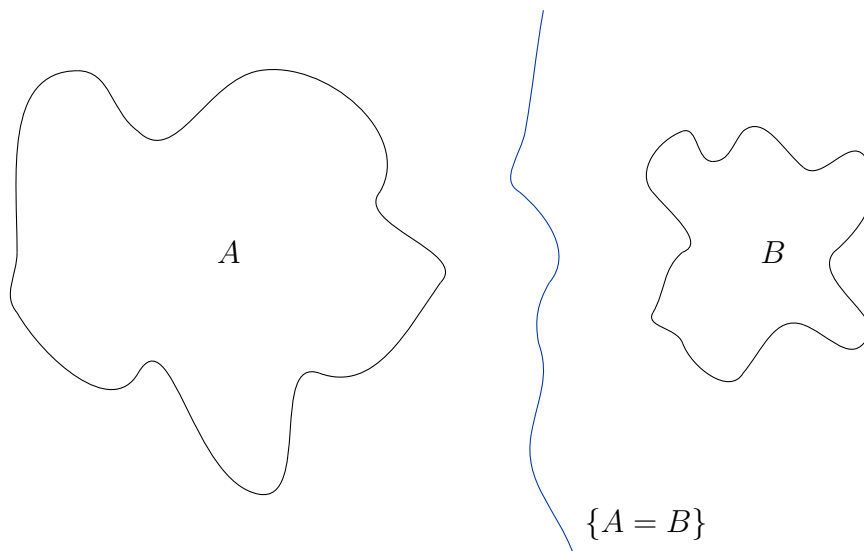
Monimutkaisemmilla polttopistejoukoilla saadaan kartioleikkauksia muistuttavia keskijoukkoja. Tutkielman viimeisessä luvussa tarkastellaan kompakteilla polttopistejoukoilla muodostuvia keskijoukkoja kaukana polttopistejoukoista ja huomataan keskijoukoille pätevän samoja ominaisuuksia, kuin kartioleikkauksille. Keskijoukot ovat siten kartioleikkausten yleistyksiä.

1 Keskijoukko ja sen ominaisuuksia

1.1 Keskijoukko

Keskijoukko määritellään joukkona, joka on yhtä etäällä kahdesta annetusta epätyhjästä joukosta. Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ välinen euklidinen etäisyys, eli etäisyysfunktio $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$



Kuva 1.1: Polttopistejoukkojen A ja B keskijoukko $\{A = B\}$.

Määritelmä 1.1. Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjiä joukkoja. Tällöin joukkojen A ja B **keskijoukko** $\{A = B\}$ on

$$\{A = B\} := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) = d(x, B)\},$$

missä

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Joukkoja A ja B kutsutaan keskijoukon $\{A = B\}$ **polttopistejoukoiksi**. Tässä tutkielmassa keskitytään tarkastelemaan avaruuden \mathbb{R}^2 keskijoukkoja, mutta suurin osa tuloksista on yleistettävissä avaruuteen \mathbb{R}^n .

1.2 Keskijoukon ominaisuuksia

Tässä kappaleessa tarkastellaan keskijoukkoihin liittyviä ominaisuuksia. Lisäksi esitetään muutamia määritelmiä ja merkintöjä.

Joukot A ja B ovat **erilliset**, kun ne eivät sisällä samoja alkioita, eli $A \cap B = \emptyset$. Olkoon joukot A ja B erilliset ja epätyhjä. Määritellään funktio $d_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_A(x) := d(x, A).$$

Kuvaus d_A on $1 - Lipschitz$ ja siten jatkuva [12]. Kun määritellään funktio $f_{A,B} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_{A,B}(x) := d_A(x) - d_B(x),$$

sen kuvajoukko on keskijoukolla $x \in \{A = B\}$ nollassa. Toisin sanoen,

$$\{A = B\} = f_{A,B}^{-1}(0)$$

[12]. Siten keskijoukko $\{A = B\}$ on aina **suljettu** joukko. Keskijoukon määrittelyssä joukot A ja B ovat epätyhjä, joten myös keskijoukko $\{A = B\}$ on aina epätyhjä. Lisäksi myös päinvastainen tulos pätee. Kaikki epätyhjä suljetut joukot ovat aina keskijoukkoja [12].

Joukko $E \subset \mathbb{R}^2$ on **yhtenäinen**, jos ei ole olemassa avoimia epätyhjiä joukkoja U ja V , joille pätee $U \cap V = E$, kun joukot U ja V ovat erilliset [9]. Kun polttopistejoukot A ja B ovat yhtenäisiä, myös muodostuva keskijoukko on yhtenäinen.

Lause 1.2. *Olkoon A ja B epätyhjiä yhtenäisiä joukkoja. Tällöin myös joukko $\{A = B\}$ on yhtenäinen.*

Todistus. Lauseen todistus on esitetty artikkelissa [12, Theorem 4]. □

Merkitään kahden pisteen $x, y \in \mathbb{R}^2$ välistä janaa

$$[x, y] := \{tx + (1 - t)y : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Joukko $K \subset \mathbb{R}^2$ on **konvekksi**, jos ja vain jos minkä tahansa kahden joukon K pisteen x ja y välinen jana $[x, y]$ on joukon K osajoukko [6]. Määritellään seuraavaksi joukon kantapisteet yleiselle joukolle ja osoitetaan sen jälkeen kantapisteen yksikäsitteisyys konveksille suljetulle joukolle.

Määritelmä 1.3. Joukon V pisteitä $p \in V$, joiden etäisyys pisteeseen $x \in \mathbb{R}^2$ on lyhyin, merkitään $\mathcal{P}_x(V)$, ja määritellään

$$\mathcal{P}_x(V) := \{p \in V : d(x, V) = d(x, p)\}.$$

Lemma 1.4. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^2$ suljettu ja konvekssi joukko. Tällöin joukko $\mathcal{P}_x(K)$ sisältää vain yhden yksikäsitteisen kantapisteen, eli **projektiopisteen** $x_K \in K$, jokaiselle $x \in \mathbb{R}^2$. Toisin sanoen*

$$\mathcal{P}_x(K) = \{x_K\},$$

jolle $\|x - x_k\| = d(x, x_k) = d(x, K)$.

Todistus. Asetetaan joukko K koordinaatistoon siten, että $x \in \mathbb{R}^2$ sijaitsee origossa, $x = (0, 0)$. Tällöin on olemassa pisteet $k_j \in K$, joille $\|k_j\| \rightarrow d(0, K)$, kun $j \rightarrow \infty$.

Osoitetaan, että $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. Joukon K konveksisuuden nojalla $\frac{1}{2}(k_n + k_m) \in K$, joten $\|\frac{1}{2}(k_n + k_m)\| \geq d(0, K)$ kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$. Suunnikasäännön nojalla suunnikaan lävistäjien pituuksien summa on sama kuin suunnikaan piiri, saadaan

$$\begin{aligned} \|k_n + k_m\|^2 + \|k_n - k_m\|^2 &= 2(\|k_n\|^2 + \|k_m\|^2) \\ \Leftrightarrow \|k_n - k_m\|^2 &= 2(\|k_n\|^2 + \|k_m\|^2) - \|k_n + k_m\|^2 \\ &\leq 2\|k_n\|^2 + 2\|k_m\|^2 - (\|k_n\| + \|k_m\|)^2 \\ &= 2\|k_n\|^2 + 2\|k_m\|^2 - \|k_n\|^2 - \|k_m\|^2 - 2\|k_n\|\|k_m\| \\ &\rightarrow 4d(0, K)^2 - d(0, K)^2 - d(0, K)^2 - 2d(0, K)^2, \text{ kun } j \rightarrow \infty \\ &= 0, \end{aligned}$$

koska $\|k_j\| \rightarrow d(0, K)$, kun $j \rightarrow \infty$. Siten jono $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono joukossa $K \subset \mathbb{R}^2$, ja se suppenee kohti jotakin pistettä $k_k \in K$.

Lähin etäisyys pisteeltä $x \in \mathbb{R}^2$ joukkoon K on siten yksikäsitteinen, koska jonolta (k_j) edellytettiin vain $\|k_j\| \rightarrow d(0, K)$, kun $j \rightarrow \infty$. Pistettä $\mathcal{P}_x(K) = x_K$ kutsutaan pisteen x projektiopisteeksi. \square

Tiedetään, että avoin r -säteinen, x -keskipisteinen pallo on joukko

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) < r\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Suljettu r -säteinen, x -keskipisteinen pallo on joukko

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) \leq r\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Avaruuden \mathbb{R}^2 pisteet voidaan jaotella **sisäpisteisiin**, **ulkopisteisiin** ja **reunapisteisiin** joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ avulla. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$. $a \in A$ on joukon A sisäpiste, jos on olemassa r_a siten, että $B(a, r_a) \subset A$. Joukon A komplementin sisäpiste on joukon A ulkopiste. Jos $x \in \mathbb{R}^2$ ei ole joukon A sisäpiste eikä ulkopiste, niin se on joukon A reunapiste, merkitään $x \in \partial A$. Joukko $A \subset \mathbb{R}^2$

on avoin, jos sen kaikki pisteet ovat sisäpisteitä. Toisaalta joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on suljettu, jos sen komplementti on avoin, tai jos se sisältää reunansa. [9]

Joukon A sulkeuma \bar{A} on pienin suljettu joukko, joka sisältää koko joukon A . Voidaan helposti osoittaa, että kahden joukon keskijoukko on aina sama, kuin kyseisten joukkojen sulkeumien keskijoukko.

Lemma 1.5. *Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^2$ epätyhjiä joukkoja. Tällöin*

$$\{A = B\} = \{\bar{A} = \bar{B}\}.$$

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}^2$. Koska $\{A = B\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, A) = d(x, B)\}$, riittää osoittaa, että

$$d(x, A) = d(x, \bar{A}),$$

jolloin myös $d(x, B) = d(x, \bar{B})$ ja edelleen $\{A = B\} = \{\bar{A} = \bar{B}\}$.

i) Selvästi

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} \geq \inf\{d(x, a') : a' \in \bar{A}\} = d(x, \bar{A}).$$

ii) Osoitetaan, että

$$d(x, A) \leq d(x, \bar{A}).$$

Olkoon $z \in \bar{A}$. Tällöin $d(z, A) = 0$, koska kaikilla $\epsilon > 0$, $B(z, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Toisin sanoen, kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$ siten, että $d(z, a) < \epsilon$. Saadaan $\inf d(z, a) = 0$, kun $a \in A$, joten $d(z, A) = 0$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin $\epsilon > d(z, A)$. On olemassa $\tilde{a} \in A$ siten, että $d(z, \tilde{a}) < \epsilon$. Nyt

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} \leq d(x, \tilde{a}) \leq d(x, z) + d(z, \tilde{a}) < d(x, z) + \epsilon.$$

Koska $d(x, A) < d(x, z) + \epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$, niin $d(x, A) \leq d(x, z)$ kaikilla $z \in \bar{A}$. Tällöin

$$d(x, \bar{A}) = \inf\{d(x, z) : z \in \bar{A}\} \geq d(x, A).$$

Nyt kohdat *i)* ja *ii)* yhdistämällä saadaan $d(x, A) = d(x, \bar{A})$. Siten $\{A = B\} = \{\bar{A} = \bar{B}\}$. □

Kahden erillisen epätyhjän suljetun joukon keskijoukko ei sisällä ollenkaan sisäpisteitä.

Lause 1.6. *Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^2$ erillisiä, epätyhjiä, suljettuja joukkoja. Tällöin keskijoukolla $\{A = B\}$ ei ole sisäpisteitä.*

Kompakti joukko on aina myös **jonokompakti**, eli joukon jokaisella jonolla on osajono, joka suppenee kohti jotain kyseisen joukon pistettä. [9]

Kahden kompaktin joukon keskijoukolle voidaan osoittaa, että se on yksiulotteinen monisto, eli 1-monisto. Lause esitetään avaruudessa \mathbb{R}^2 , mutta se on yleistettävissä avaruuteen \mathbb{R}^n . Tässä tutkielmassa lauseen todistus siivutetaan, mutta se löytyy L.D. Lovelandin artikkelista *When midsets are manifolds*. [7, Theorem 3.2].

Lause 1.7. *Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kaksi erillistä, epätyhjää, yhtenäistä, kompak-tia joukkoa.*

i) Kun $n = 2$, keskijoukko $\{A = B\}$ on yksiulotteinen monisto.

ii) Jos joukko B on lisäksi konvekksi, keskijoukko $\{A = B\}$ vastaa topologisesti ympyrää S^1 . Lisäksi, keskijoukko $\{A = B\}$ on homeomorfinen ympyrän S^1 kanssa, jos ja vain jos B on konvekksi ja se on kokonaan joukon A konveksin verhon sisällä.

Tällöin siis jokaisella $x \in \{A = B\}$ on olemassa avoin ympäristö $U \subseteq \{A = B\}$, joka on homeomorfinen jonkin avoimen joukon $C \subseteq \mathbb{R}$ kanssa.

Määritellään

$$\partial_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, A) = \epsilon\},$$

jolloin voidaan kirjoittaa keskijoukko yhdisteenä

$$\{A = B\} = \bigcup_{\epsilon \geq 0} (\partial_\epsilon(A) \cap \partial_\epsilon(B)).$$

Lause 1.8. *Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ erilliset ja suljetut joukot. Jos A on konvekksi ja $\epsilon > 0$, niin $\{A = B\}$ on homeomorfinen avoimen osajoukon $\partial_\epsilon(A)$ kanssa.*

Todistus. Todistus on esitetty artikkelissa [7, Theorem 3.1]. □

2 Kartioleikkaukset

Kartioleikkauksia on tutkittu jo Antiikin Kreikassa. Ensiksi kartioleikkauksia tutkivat Menaikmos (350eaa.) ja Eukleides (300eaa.). Apollonios Pergalainen määritteli kartioleikkaukset teoksessaan *Conica* (200eaa.) joukkoina, jotka saadaan leikkaamalla kaksisuuntaista ympyräkartiota tasolla. [5]

Kaksisuuntainen suorakulmainen ympyräkartio on joukko

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Määritelmä 2.1. Joukko $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ on *kartioleikkaus*, jos on olemassa taso $T \subset \mathbb{R}^3$ siten, että \mathcal{S} on yhtenevä joukon $K \cap T$ kanssa.

Kartioleikkauksen \mathcal{S} muoto riippuu siitä, missä kulmassa taso T leikkaa joukkoa K . Muodostuvat aidot kartioleikkaukset ovat **paraabeli**, **hyperbeli** ja **ellipsi**. **Ympyrä** on ellipsin erikoistapaus. Muodostuvia surkastuneita kartioleikkauksia ovat piste, suora, sekä kahden leikkaavan suoran yhdiste. [1]

2.1 Kartioleikkaukset polttopisteiden ja johtosuoran avulla

Kartioleikkaukset voidaan määritellä myös tasogeometriaa käyttäen polttopisteiden ja johtosuorien avulla. Määrittely tehdään etäisyyksien avulla, joten polttopisteen ja johtosuoran kautta kartioleikkaukset muistuttavat läheisesti keskijoukkoja. Kartioleikkaus on niiden tason pisteiden joukko, joilla kiinteästä pisteestä tai pisteistä ja kiinteästä suorasta mitattujen etäisyyksien suhde on vakio [4].

Kartioleikkauksille voidaan määritellä myös standardimuotoiset yhtälöt sopivilla koordinaatiston valinnoilla. Keskitytään tässä tutkielmassa tarkastelemaan aitoja kartioleikkauksia, sekä niiden ja keskijoukkojen välistä yhteyttä.

Funktiolle voidaan määritellä kuvaaja eli graafi. Funktion f graafi tasossa on joukko

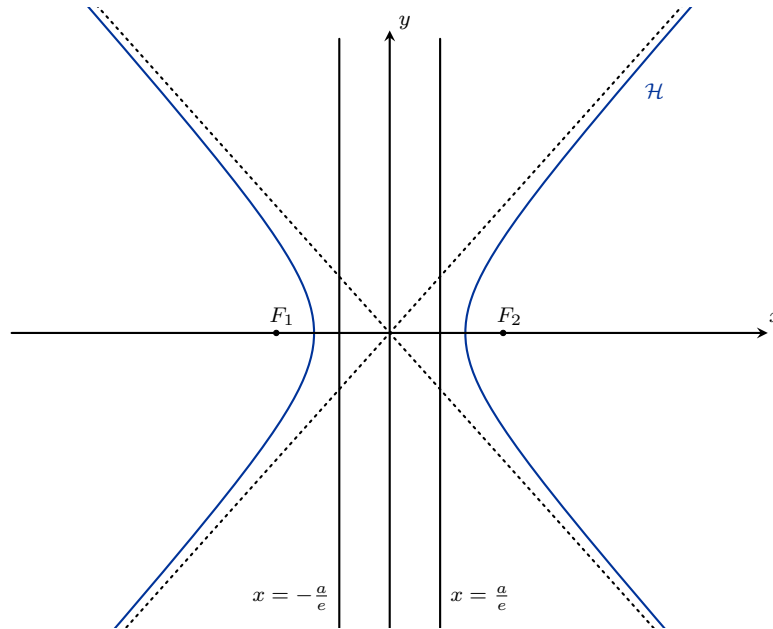
$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ ja } y = f(x)\}.$$

2.1.1 Hyperbeli

Määritelmä 2.2. Joukko $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$ on **hyperbeli**, jos on olemassa $e > 1$, tason piste F ja suora l siten, että

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF| = ed(P, l)\}. \quad (2.1)$$

Piste F on hyperbelin **polttopiste**, l **johtosuora** ja lukua e kutsutaan hyperbelin **eksentrisyydeksi**. [13]



Kuva 2.1: Hyperbeli, hyperbelin polttopisteet, johtosuorat ja asymptoottisuorat.

Geometrisesti hyperbeli koostuu kahdesta erillisestä rajoittamattomasta käyrästä eli hyperbelin haarasta (Kuva 2.1). Äärettömyyttä lähestyessä hyperbelin haarat muistuttavat kahta toisiaan leikkaavaa suoraa. Näitä suoria kutsutaan hyperbelin asymptoteiksi. [13]

Kartiroleikkauksille voidaan muodostaa standardimuotoiset yhtälöt sopivilla koordinaatiston valinnoilla. Olkoon $a, b > 0$ ja $e > 1$. **Standardimuotoisen hyperbelin** yhtälö on

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.2)$$

missä $b^2 = a^2(e^2 - 1)$. Hyperbelin polttopisteet löytyvät kohdista

$$F_1 = (ae, 0) \text{ ja } F_2 = (-ae, 0),$$

johtosuorat ovat $x = \pm \frac{a}{e}$. Asymptoottisuorien yhtälöt ovat $y = \pm \frac{b}{a}x$. Hyperbeli on symmetrinen x - ja y -akseleiden suhteen ja sen keskipiste on symmetriakseleiden leikkauspiste $(0, 0)$. [13]

Hyperbelin määritelmä voidaan esittää myös toisella tavalla. Hyperbeli on niiden tason pisteiden joukko, joilla kahdesta kiinteästä pisteestä mitattujen etäisyyksien erotuksen itseisarvo on vakio [4].

Lemma 2.3. *Olko \mathcal{H} hyperbeli ja pisteet F_1 ja F_2 sen polttopisteet. Tällöin on olemassa $0 < c < |F_1F_2|$ siten, että kaikille $P \in \mathcal{H}$ pätee*

$$||PF_1| - |PF_2|| = c. \quad (2.3)$$

Todistus. Olkoon standardimuotoisen hyperbelin johtosuorat l ja l' . Koska standardimuotoinen hyperbeli on symmetrinen x -akselin suhteen, voidaan valita $P \in \mathcal{H}$ siten, että se on lähempänä pistettä F_2 kuin pistettä F_1 . Hyperbelin määritelmästä saadaan

$$|PF_1| = ed(P, l) \text{ ja } |PF_2| = ed(P, l').$$

Koska l' ja l ovat yhdensuuntaisia, ja piste P sijaitsee lähempänä suoraa l' , kuin suoraa l , on

$$d(P, l) - d(P, l') = d(l, l') = \frac{2a}{e}.$$

Olkoon $c = 2a < 2ae = |F_1F_2|$, jolloin

$$\begin{aligned} d(P, l) - d(P, l') &= d(l', l) = \frac{2a}{e} \\ \Rightarrow \frac{|PF_1|}{e} - \frac{|PF_2|}{e} &= \frac{c}{e} \\ \Rightarrow ||PF_1| - |PF_2|| &= c. \end{aligned}$$

□

Lemman 2.3 käänteinen tulos pätee myös. Tästä saamme toisen määrittelyn hyperbelille.

Lemma 2.4. *Olko F_1 ja F_2 eri pisteitä ja $0 < c < |F_1F_2|$. Tällöin joukko*

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^2 : ||PF_1| - |PF_2|| = c\}$$

on hyperbeli.

Todistus. Osoitetaan, että joukon

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^2 : ||PF_1| - |PF_2|| = c\}$$

yhtälö on ellipsin yhtälö. Olkoon $e = |F_1F_2|/c$ ja $c = 2a$. Tarkastellaan pisteitä $P = (x, y) \in \mathcal{S}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} - \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} = 2a \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} && \| ()^2 \\
 \Rightarrow & (x - ae)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x + ae)^2 + y^2} + (x + ae)^2 + y^2 \\
 \Leftrightarrow & aex - a^2 = a\sqrt{(x + ae)^2 + y^2} && \| ()^2 \\
 \Rightarrow & a^2e^2x^2 + a^4 = a^2((x + ae)^2 + y^2) \\
 \Leftrightarrow & x^2(e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1) && \|\div a^2(e^2 - 1) \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1
 \end{aligned}$$

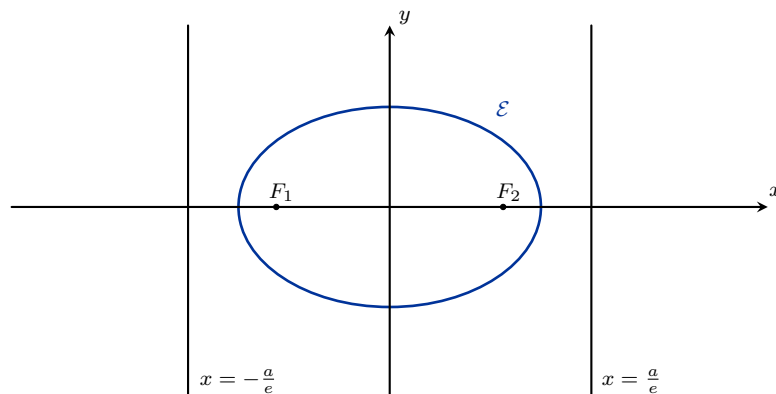
on hyperbelin yhtälö, missä $b^2 = a^2(e^2 - 1)$. □

2.1.2 Ellipsi

Määritelmä 2.5. Jos on olemassa $0 < e < 1$, tason piste F ja suora l , jolle polttopiste F ei kuulu, ellipsi on joukko

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF| = ed(P, l)\}. \quad (2.4)$$

F on ellipsin polttopiste, l johtosuora ja lukua e kutsutaan eksentrisyydeksi. [\[13\]](#)



Kuva 2.2: Ellipsi, ellipsin polttopisteet ja johtosuorat.

Geometrisesti ellipsi on suljettu toisen asteen käyrä (Kuva 2.2). Olkoon $a \geq b > 0$ ja $0 < e < 1$. **Standardimuotoisen ellipsin** yhtälö on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.5)$$

missä $b^2 = a^2(1 - e^2)$. Ellipsi on symmetrinen x -akselin ja y -akselin suhteen. Symmetria-akseleiden leikkauspiste $(0, 0)$ on ellipsin keskipiste. Ellipsin polttopisteet löytyvät kohdista

$$F_1 = (ae, 0) \text{ ja } F_2 = (-ae, 0),$$

ja johtosuorat ovat $x = \pm \frac{a}{e}$. [13]

Ympyrä on ellipsin erikoistapaus, missä eksentrisyys $e = 0$ ja polttopisteet yhtyvät. [4]

Kahden erillisen polttopisteen avulla myös ellipsille saadaan toisenlainen määrittely. Ellipsi on niiden tason pisteiden joukko, joilla kahdesta kiinteästä pisteestä mitattujen etäisyyksien summa on vakio [4].

Lemma 2.6. *Olkoon \mathcal{E} ellipsi ja pisteet F_1 ja F_2 sen polttopisteet. Tällöin on olemassa $c > |F_1F_2|$ siten, että kaikille $P \in \mathcal{E}$ pätee*

$$|PF_1| + |PF_2| = c. \quad (2.6)$$

Todistus. Todistus menee vastaavasti, kuten hyperbelin tapauksessa. [13, Lemma 3.16]. \square

Käänteinen tulos antaa seuraavan määrittelyn.

Lemma 2.7. *Olkoon F_1 ja F_2 eri pisteitä, ja $c > |F_1F_2|$. Tällöin joukko*

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF_1| + |PF_2| = c\} \quad (2.7)$$

on ellipsi.

Todistus. Todistus menee vastaavasti, kuten hyperbelin tapauksessa. [13, Lemma 3.15]. \square

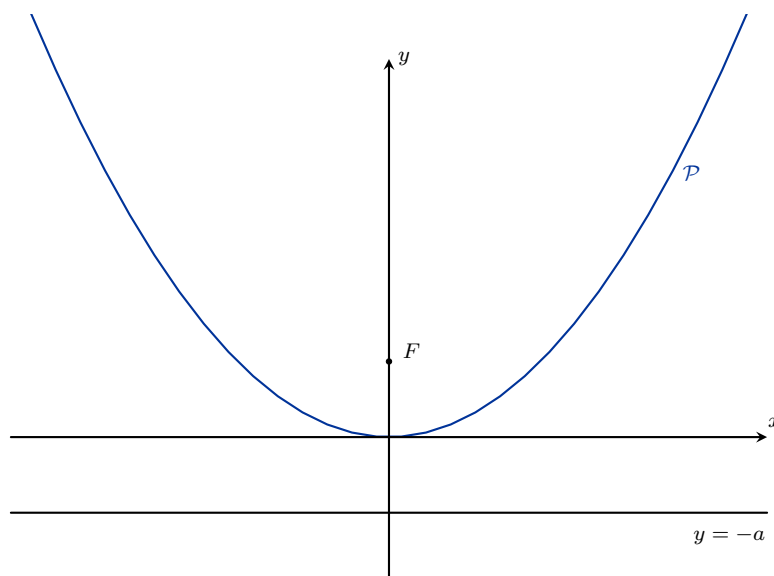
2.1.3 Paraabeli

Paraabeli on niiden tason pisteiden joukko, joiden etäisyys kiinteästä pisteestä on yhtä suuri kuin etäisyys kiinteästä suorasta. [4]

Määritelmä 2.8. Joukko $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ on paraabeli, jos on olemassa tason piste F ja suora l , jolle piste F ei kuulu siten, että

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF| = d(P, l)\}. \quad (2.8)$$

Piste F on paraabelin polttopiste ja l johtosuora.



Kuva 2.3: Paraabeli, paraabelin polttopiste ja johtosuora.

Paraabeli on rajoittamaton tasokäyrä (Kuva 2.3). Paraabeli on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja ja symmetrinen polttopisteen kautta kulkevan johtosuoran normaalin suhteen.

Olkoon $a > 0$. **Standardimuotoisen paraabelin** yhtälö, kun johtosuora on y -akselin suuntainen ja polttopiste sijaitsee kohdassa $F = (a, 0)$, on

$$y^2 = 4ax. \quad (2.9)$$

Kun asetetaan polttopiste y -akselille ja johtosuora x -akselin suuntaiseksi, saadaan paraabelille yhtälö

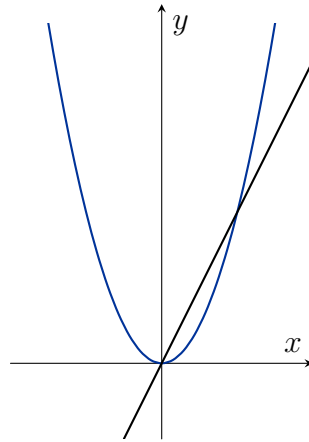
$$y = \frac{1}{4a}x^2. \quad (2.10)$$

Tällöin paraabeli aukeaa ylöspäin, ja sillä on sillä on yksi leikkauspiste y -akselin kanssa, $(0, 0)$, joka on myös paraabelin *huippupiste*. Tällöin paraabelin polttopiste on kohdassa $F = (0, a)$, johtosuora on $y = -a$ ja paraabeli on symmetrinen y - akselin suhteen.

Paraabeli on aina konvekksi eli kupera (Kuva 2.4). Voidaan osoittaa, että paraabeli kasvaa nopeammin, kuin mikä tahansa lineaarikuvaus. Koska mille tahansa paraabelille saadaan sopivalla koordinaatiston valinnalla toisen asteen polynomifunktion yhtälö, tarkastellaan funktiota $y = \frac{1}{4a}x^2$.

Kun $a, C > 0$,

$$y = \frac{1}{4a}x^2 \Rightarrow y \geq Cx,$$



Kuva 2.4: Paraabeli on konvekksi eli kupera.

kun $x \geq 4aC$. Siten paraabeli kasvaa nopeammin, kuin mikään lineaarikuvaus Cx .

2.2 Kartioleikkaukset keskijoukkoina

Kartioleikkaukset voidaan esittää kahden ympyrän keskijoukkoina. x -keskipisteinen r -säteinen ympyrä on tason joukko

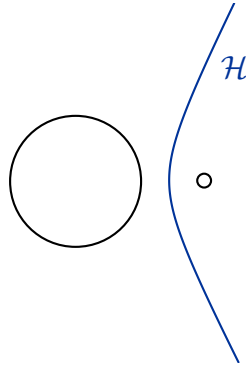
$$C(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = r\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Hyperbelin tapauksessa polttopistejoukoiksi valitaan kaksi ympyrää, jotka eivät leikkaa toisiaan. Ellipsi saadaan keskijoukkona, kun ympyrät ovat sisäkkäin. Paraabelin tapauksessa toinen ympyrä muuttuu suoraksi, ja keskijoukko on havaittavissa jo paraabelin määritelmästä. Esiitetään seuraavaksi aidot kartioleikkaukset keskijoukkoina.

2.2.1 Hyperbeli keskijoukkona

Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^2$ ja $R, r > 0$ siten, että $d(a, b) > R + r > 0$. Olkoon $A = C(a, R)$ ja $B = C(b, r)$. Tällöin muodostuvan keskijoukon pisteille $x \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$\begin{aligned} d(x, A) &= d(x, B) \\ \Rightarrow d(x, a) - R &= d(x, b) - r \\ \Rightarrow d(x, a) - d(x, b) &= R - r, \end{aligned}$$



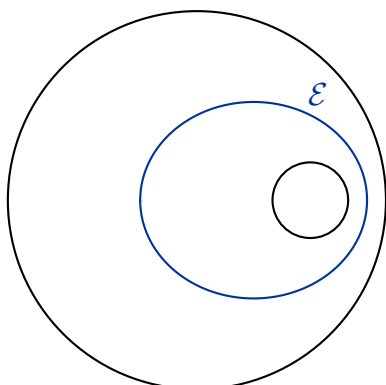
Kuva 2.5: Hyperbeli kahden ympyrän keskijoukkona.

ja määritelmän 2.4 nojalla muodostuva joukko on hyperbelin toinen haara. Kun $R = r$, muodostuva keskijoukko on suora.

Esimerkki 1. Olkoon $A = C((-2, 0), 1)$ ja $B = C((2, 0), 2)$. Tarkastellaan muodostuvaa keskijoukkoa.

$$\begin{aligned}
 & d((x, y), A) = d((x, y), B) \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 0)^2} - 1 = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 0)^2} - 2 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} + 1 = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} && \| ()^2 \\
 \Rightarrow & (x + 2)^2 + y^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} + 1 = (x - 2)^2 + y^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \\
 \Leftrightarrow & 2\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = -8x - 1 && \| ()^2 \\
 \Rightarrow & 4((x + 2)^2 + y^2) = 64x^2 + 16x + 1 \\
 \Leftrightarrow & 4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 = 64x^2 + 16x + 1 \\
 \Leftrightarrow & -60x^2 + 4y^2 = -15 && \|: (-15) \\
 \Leftrightarrow & \frac{60x^2}{15} - \frac{4y^2}{15} = 1 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2}{(1/2)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{15}/4)^2} = 1.
 \end{aligned}$$

Nyt $\frac{x^2}{(1/2)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{15}/4)^2} = 1$ on standardimuotoisen hyperbelin yhtälö 2.2, eli muodostuva keskijoukko on hyperbelin toinen haara.



Kuva 2.6: Ellipsi kahden ympyrän keskijoukkona.

2.2.2 Ellipsi keskijoukkona

Ellipsi muodostuu kahden ympyrän keskijoukkona silloin, kun ympyrät ovat sisäkkäin (Kuva 2.6). Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^2$ ja $R, r \in \mathbb{R}$, $R, r \geq 0$. Olkoon $A = C(a, R)$ ja $b \in A$. Olkoon $B = C(b, r)$ siten, että $d(a, b) + r < R$, jolloin joukko B on joukon A sisällä. Tällöin keskijoukko $\{A = B\}$ koostuu pisteistä $x \in \mathbb{R}^2$, joille

$$\begin{aligned} d(x, A) &= d(x, B) \\ \Rightarrow R - d(x, a) &= d(x, b) - r \\ \Rightarrow d(x, b) + d(x, a) &= R + r. \end{aligned}$$

Nyt kahdesta kiinteästä pisteestä a ja b mitattujen etäisyyksien summa on vakio, ja muodostuva joukko on määritelmän 2.7 nojalla ellipsi.

Esimerkki 2. Olkoon $A = C((-\frac{1}{2}, 0), \frac{5}{2})$ ja $B = C((\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{2})$. Tarkastellaan muodostuvaa keskijoukkoa $\{A = B\}$. Oletetaan, että keskijoukon pisteet $(x, y) \in A$.

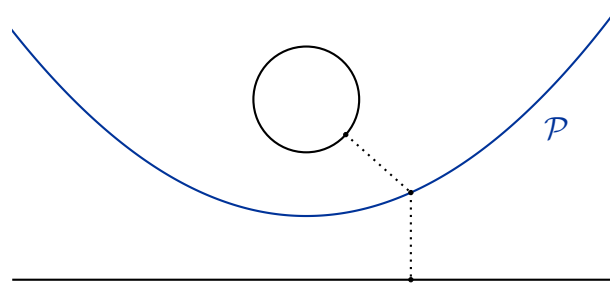
$$\begin{aligned}
& d((x, y), A) = d((x, y), B) \\
\Leftrightarrow & \frac{5}{2} - d\left((x, y), -\frac{1}{2}\right) = d\left((x, y), \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & \sqrt{\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} - \frac{6}{2} \\
\Leftrightarrow & \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} - 3 \quad \parallel ()^2 \\
\Rightarrow & \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 6\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} + 9 \\
\Leftrightarrow & \cancel{x^2} + x + \frac{1}{4} + y^2 = \cancel{x^2} - x + \frac{1}{4} + y^2 - 6\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} + 9 \\
\Leftrightarrow & 2x - 9 = -6\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} \quad \parallel ()^2 \\
\Rightarrow & 4x^2 - 36x + 81 = 36\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2\right) \\
\Leftrightarrow & 4x^2 - 36x + 81 = 64x^2 - 36x + 9 + 36y^2 \\
\Leftrightarrow & -32x^2 - 36y^2 = -72 \quad \parallel : (-72) \\
\Leftrightarrow & \frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1 \\
\Leftrightarrow & \frac{x^2}{(9/4)} + \frac{y^2}{2} = 1 \\
\Leftrightarrow & \frac{x^2}{(3/2)^2} + \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1.
\end{aligned}$$

Keskijoukolle muodostuva yhtälö on standradimuotoisen ellipsin yhtälö [2.5](#).

2.2.3 Paraabeli keskijoukkona

Paraabelin määritelmän mukaan paraabeli on niiden tason pisteiden joukko, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä pisteestä ja tunnetusta suorasta. Paraabeli voidaan määrittellä keskijoukkona $\{A = B\}$, missä joukko B on suora ja A on piste. Paraabeli voidaan muodostaa myös kahden ympyrän keskijoukkona, kun määritelmän polttopiste ajatellaan surkastuneena ympyränä, ja johtosuora ajatellaan ympyränä, jonka säde on ääretön ja keskipiste on äärettömän kaukana toisesta polttopistejoukosta.

Esimerkki 3. Olkoon joukko B suora $y = -1$ ja joukko $A = C((0, 2), 1)$.



Kuva 2.7: Paraabeli ympyrän ja suoran keskijoukkona.

Tällöin muodostuvalle keskijoukolle $\{A = B\}$ saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
 & d((x, y), B) = d((x, y), A) \\
 \Leftrightarrow & \quad y + 1 = \sqrt{(x - 0)^2 - (y - 2)^2} - 1 \\
 \Leftrightarrow & \quad y + 2 = \sqrt{(x)^2 - (y - 2)^2} \qquad \parallel ()^2 \\
 \Rightarrow & \quad y^2 + 4y + 4 = x^2 + (y - 2)^2 \\
 \Leftrightarrow & \quad \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4} = x^2 + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} \\
 \Leftrightarrow & \quad 8y = x^2 \\
 \Leftrightarrow & \quad y = \frac{x^2}{4 \cdot 2},
 \end{aligned}$$

jonka kuvaaja on yhtälön 2.10 nojalla paraabeli.

3 Keskijoukkojen heijastusominaisuudet

Aidoille kartioleikkauksille pätee erityisiä heijastusominaisuuksia, kun tarkastellaan polttopistettä kohti tulevia ja polttopisteistä lähteviä valonsäteitä. Tasaisesta pinnasta heijastuessaan valonsäteen tulokulma ja lähtökulma ovat yhtä suuret. Kaarevasta pinnasta valo heijastuu siten, että tulokulma ja lähtökulma ovat yhtä suuret suhteessa osumispisteen tangenttiin.

Hyperbelin polttopisteestä lähtevä valo heijastuu hyperbelistä siten, että heijastuneen valon jatke kulkee sen toisen polttopisteen kautta. Ellipsin polttopisteestä lähtevä valonsäde heijastuu ellipsin toiseen polttopisteeseen. Paraabelille pätee heijastava ominaisuus, jonka mukaan kaikki paraabelin koveralle puolelle tulevat johtosuoraa kohtisuorat säteet heijastuvat paraabelin polttopisteeseen. Vastaavasti kaikki paraabelin polttopisteestä lähtevät valonsäteet heijastuvat symmetria-akselin suuntaisesti. [13]

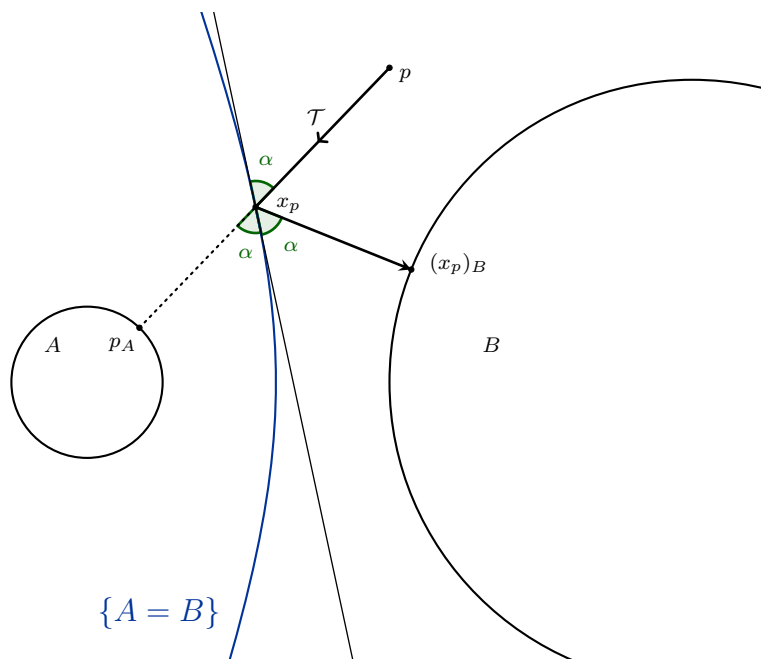
Tasogeometriassa kartioleikkausten heijastusominaisuudet todistetaan tangenttisuorien ja polttopisteiden avulla. Koordinaatiston muunnosten myötä voidaan tarkastella mitä tahansa kartioleikkausta vastaavan standardimuotoisen yhtälön kuvaajana, ja näin muodostaa sille tangenttisuora pisteessä P . Tangenttisuoran ja x -akselin leikkauspistettä T hyödyntämällä voidaan osoittaa, että ellipsin tapauksessa $\angle TPF_1 = \pi - \angle TPF_2$, hyperbelin tapauksessa $\angle TPF_1 = \angle TPF_2$ ja paraabelin tapauksessa $\angle FTP = \angle TPF$, kun pisteet F_1 ja F_2 ovat kyseisen kartioleikkauksen polttopisteitä. [13]

Tarkasteltaessa keskijoukoista heijastuvia valonsäteitä, saadaan samankaltaisia ominaisuuksia, kuin aidoista kartioleikkauksista heijastuville valonsäteille. Kun tarkastellaan kartioleikkauksia keskijoukkoina, saadaan kartioleikkausten heijastusominaisuudet määriteltä toisella tavalla, ilman tangenttisuorien yhtälöitä.

Tässä luvussa esitetään ensin keskijoukkojen yleisiä heijastusominaisuuksia, jonka jälkeen esitetään heijastusominaisuudet kartioleikkauksille, jotka ovat määriteltä kahden ympyrän keskijoukkoina. Kappaleen tulokset ja määritelmät seuraavat M. Poncen artikkelista *Reflections on Equidistant Sets* [10].

3.1 Valonsäteen heijastuminen keskijoukosta

Valonsäde \mathcal{T} on pisteen p kautta kulkeva säde kohti joukkoa $A \subset \mathbb{R}^2$, kun tuleva valonsäde kulkee pisteen p kautta ja on yhdensuuntainen janan $]p, p_A[$ kanssa, missä p_A on pisteen p projektio joukkoon A (Kuva 3.1). Kun joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on konvekksi, millä tahansa tulevan valonsäteen pisteellä $y \in]p, p_A[$ projektio pisteet joukkoon A ovat pisteen p kanssa samat, eli $y_A = p_A$.



Kuva 3.1: Pisteestä p tuleva säde \mathcal{T} heijastuu keskijoukosta projektio-
pisteeseen $(x_p)_B$ suuntaan.

Tarkastellaan tässä kappaleessa tilanteita, kun joukot A ja B ovat konvekseja. Oletetaan siis, että $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ovat erillisiä, epätyhjiä, suljettuja ja konvekseja joukkoja. On todistettavissa, että etäisyysfunktio $d_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x) := d(x, A)$ on differentioituva joukon A ulkopuolella. Koska osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia, voidaan etäisyysfunktiolle muodostaa gradientti.

Lause 3.1. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$. Tällöin funktio d_A on jatkuvasti differentioituva kaikilla $x \notin A$. Lisäksi on olemassa $x_A \in A$ siten, että*

$$\nabla d_A(x) = \frac{x - x_A}{|x - x_A|}. \quad (3.1)$$

Todistus. Etäisyysfunktio d_A on differentioituva joukon A ulkopuolella, kun joukko A on suljettu ja konvekksi [2, L.2.21 s.75]. Erityisesti osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia, ja funktio d_A jatkuvasti differentioituva kaikkialla $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ [3].

Koska osittaisderivaatat ovat olemassa, voidaan määritellä funktiolle gradientti. Pisteelle $x \notin A$ lähin piste konveksista joukosta A on x_A . Koska funktion suurin kasvu on gradientin suuntaan, muodostuu funktion d_A gradientti suuntaan, jossa etäisyys joukkoon A kasvaa nopeimmin. Pisteiden x

ja x_A muodostama suunta on nopein kasvusuunta etäisyysfunktioille d_A pisteessä x , missä gradientin pituus on 1. Saadaan gradientille yhtälö

$$\nabla d_A(x) = \frac{x - x_A}{|x - x_A|}. \quad (3.2)$$

□

Kun joukot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ovat suljettuja ja konvekseja, keskijoukko $\{A = B\}$ vastaa jatkuvan vakiofunktion $f_{A,B} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_{A,B}(x) = d_A(x) - d_B(x)$$

graafia. Joukkojen A ja B konveksisuudesta seuraa, että funktioiden $d_A(x)$ ja $d_B(x)$ gradientit voidaan muodostaa yhtälön 3.1 mukaisesti. Tällöin funktion $f_{A,B}$ osittaisderivaatat ovat olemassa joukkojen A ja B ulkopuolella, jolloin

$$\nabla f_{A,B} = \nabla d_A - \nabla d_B,$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B)$ [10].

Voidaan osoittaa, että millä tahansa pisteellä, joka ei kuulu joukkojen A ja B yhdisteeseen, funktion $f_{A,B}$ gradientti on kohtisuorassa etäisyysfunktioiden gradienttien pisteessä x muodostaman kulman puolittajan kanssa.

Lemma 3.2. *Kaikilla $x \notin A \cup B$ pätee $\nabla d_A(x) + \nabla d_B(x) \perp \nabla d_A(x) - \nabla d_B(x)$. Toisin sanoen, gradientti $\nabla f_{A,B}(x)$ on kohtisuorassa $\nabla d_A(x)$ ja $\nabla d_B(x)$ muodostaman kulman puolittajaa vastaan.*

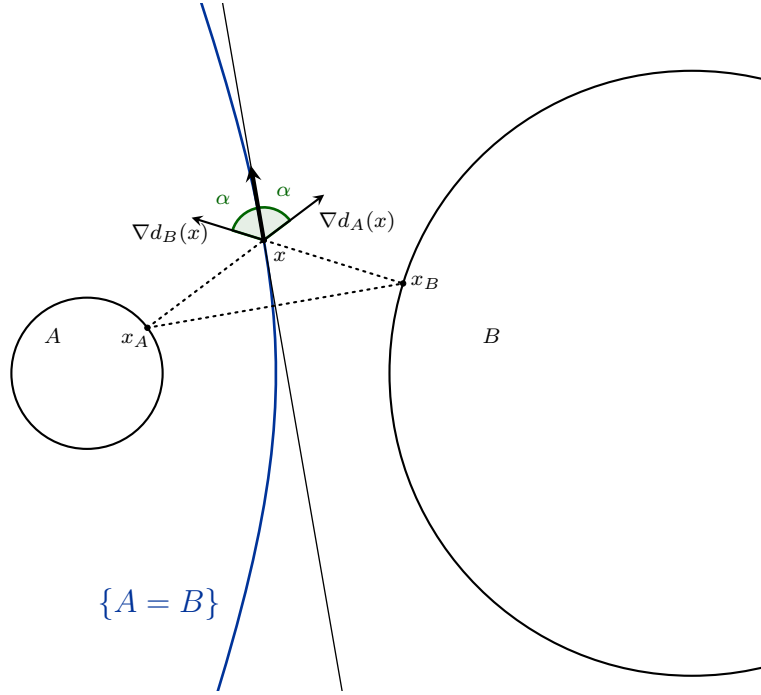
Todistus. Etäisyysfunktion gradienteille pätee $|\nabla d_A| = |\nabla d_B| = 1$ Tällöin $\nabla d_A(x) + \nabla d_B(x)$ on vektoreiden $\nabla d_A(x)$ ja $\nabla d_B(x)$ muodostaman kulman puolittajan suuntainen.

Vektoreiden $\nabla d_A(x) + \nabla d_B(x)$ ja $\nabla d_A(x) - \nabla d_B(x)$ pistetulosta saadaan

$$\begin{aligned} & \langle \nabla d_A(x) + \nabla d_B(x), \nabla d_A(x) - \nabla d_B(x) \rangle \\ &= \langle \nabla d_A(x), \nabla d_A(x) \rangle + \langle \nabla d_A(x), -\nabla d_B(x) \rangle \\ &+ \langle \nabla d_B(x), \nabla d_A(x) \rangle + \langle \nabla d_B(x), -\nabla d_B(x) \rangle \\ &= |\nabla d_A(x)|^2 - |\nabla d_B(x)|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Koska pistetulo on nolla, kulmanpuolittaja $\nabla d_A(x) + \nabla d_B(x)$ ja gradientti $\nabla f_{A,B} = \nabla d_A(x) - \nabla d_B(x)$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. □

Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että konveksien joukkojen keskijoukko on jatkuvasti differentioituva, ja tarkastellaan keskijoukon tangenttisuoraa. Tangenttisuora on samansuuntainen etäisyysfunktioiden gradienttien $\nabla d_A(x)$ ja $\nabla d_B(x)$ muodostaman kulman puolittajan kanssa (Kuva 3.2).



Kuva 3.2: Lemma 3.3 osoittaa, että keskijoukon tangenttisuora on yhdensuuntainen etäisyysfunktioiden gradienttien $\nabla d_A(x)$ ja $\nabla d_B(x)$ muodostaman kulman puolittajan kanssa.

Lemma 3.3. *Keskijoukko $\{A = B\}$ on jatkuvasti derivoitua. Keskijoukon $\{A = B\}$ tangenttisuora pisteessä x on yksikkövektoreiden $\nabla d_A(x)$ ja $\nabla d_B(x)$ muodostaman kulman puolittajan suuntaan.*

Kun x_A ja x_B ovat x :n projektiot joukoille A ja B , keskijoukon $\{A = B\}$ tangenttisuora pisteessä x on janan $[x_A, x_B]$ keskinormaali.

Todistus. Osoitetaan, että kahden konveksin joukon muodostama keskijoukko on jonkin tasa-arvokäyrän graafi eli kuvaaja. Tarkastellaan ensiksi funktion $f_{A,B}$ kääntyvyyttä sen derivaatan avulla.

Olkkoon $x \in \{A = B\}$. Kun $\nabla f_{A,B} = \nabla d_A(x) - \nabla d_B(x) = 0$, saadaan $\nabla d_A(x) = \nabla d_B(x)$, josta edelleen

$$\frac{x - x_A}{|x - x_A|} = \frac{x - x_B}{|x - x_B|}.$$

Koska $|x - x_A| = |x - x_B| \neq 0$, saadaan $x_A = x_B$. Tämä on mahdotonta, koska joukot A ja B ovat erilliset, $A \cap B = \emptyset$. Siten $f_{A,B}$ on kääntyvä kaikilla $x \in \{A = B\}$.

Tällöin implisiittifunktiolauseen nojalla keskijoukko on joukko $\{x \in \mathbb{R}^2 : f_{A,B}(x) = 0\}$, joka on erään tasoarvokäyrän kuvaaja. Siten keskijoukko on lokaalisti jatkuvasti differentioituvan funktion graafi ja $\nabla f_{A,B}$ on kohtisuorassa tangenttisuoraa vasten. [3]

Lemman 3.2 nojalla tangenttisuora on siten gradienttien ∇d_A ja ∇d_B muodostaman kulman puolittajan suuntainen.

Koska $x \in \{A = B\}$, pisteiden x, x_A ja x_B muodostama kolmio on tasakylkinen. Tällöin pisteeseen x muodostuvan kulman puolittajan suuntainen tangenttisuora on janan $[x_A, x_B]$ keskinormaali. \square

Lemmojen 3.2 ja 3.3 nojalla voidaan päätellä, että kahden konveksin joukon keskijoukolla on yksittäisessä pisteessä yksikäsitteinen tangenttisuora, joka on kyseisessä pisteessä myös keskijoukon $\{A = B\}$ yksikäsitteinen tukisuora.

Koska löydettiin keskijoukon tangenttisuoralle suunta, voidaan nyt tarkastella valon heijastumista keskijoukosta. Valonsäde heijastuu kaarevasta pinnasta aina suhteessa osuispisteen tangenttiin. Huomataan ensin, että konvekseilla polttopistejoukoilla valonsäteellä on vain yksi osuispiste keskijoukkoon. Olkoon $p \in \mathbb{R}^2$ siten, että

$$d_A(p) > d_B(p)$$

ja \mathcal{T} on pisteen p kautta kulkeva säde kohti joukkoa A .

Lemma 3.4. *Valonsäteellä \mathcal{T} on täsmälleen yksi osuispiste keskijoukkoon $\{A = B\}$.*

Todistus. Funktio $f_{A,B}(x) = d_A(x) - d_B(x)$ on jatkuva. Koska $d_A(p) > d_B(p)$,

$$f_{A,B}(p) > 0 \text{ ja } f_{A,B}(p_A) = -d_B(p_A) < 0,$$

kun p_A on pisteen p projektiopiste joukkoon A . On olemassa $x_p \in]p, p_A[\subset \mathcal{T}$ siten, että

$$d_A(x_p) = d_B(x_p).$$

Osoitetaan vielä, että osuispiste x_p on yksikäsitteinen. Olkoon $t > 0$ ja olkoon $u(t) = p + t \frac{p_A - p}{|p_A - p|}$. Tällöin $u(t) \in \mathcal{T}$ ja $\nabla d_A = -\frac{p_A - p}{|p_A - p|}$. Lauseen 3.1 nojalla yhdistetyn funktion $f \circ u(t) = (d_A - d_B) \circ u$ derivaatta on

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((d_A - d_B) \circ u) &= \langle \nabla d_A - \nabla d_B, \frac{p_A - p}{|p_A - p|} \rangle \\ &= \langle \nabla d_A - \nabla d_B, -\nabla d_A \rangle \\ &= \langle \nabla d_A, -\nabla d_A \rangle + \langle \nabla d_B, \nabla d_A \rangle \\ &= -|\nabla d_A|^2 + \langle \nabla d_B, \nabla d_A \rangle \\ &= -1 + \langle \nabla d_B, \nabla d_A \rangle. \end{aligned}$$

Valitulla p , jos jollakin $t > 0$ on $\nabla d_A = \nabla d_B$, tällöin derivaatta on nolla ja funktio on vakiofunktiona kasvava. Muualla $(d_A - d_B) \circ u$ on aidosti vähenevä, kun t kasvaa. Siten $x_p \in \mathcal{T} \cap \{A = B\}$ on säteen \mathcal{T} ainoa osumispiste joukkoon $\{A = B\}$. \square

Nyt voidaan osoittaa seuraava tulos. Kun tulevan valonsäteen osumispiste konveksien joukkojen keskijoukkoon on x_p valonsäteen kulkiessa kohti projektiopistettä p_A , keskijoukosta $\{A = B\}$ heijastuessaan valonsäde heijastuu pisteen x_p projektiopisteen $(x_p)_B$ suuntaan. Tämä vastaa kartioleikkausten polttopisteisiin heijastavaa ominaisuutta.

Lause 3.5 (Polttopisteominaisuus). *Olkoon x_p pisteen p kautta kohti joukkoa A tulevan valonsäteen \mathcal{T} osumispiste keskijoukkoon $\{A = B\}$, $x_p \in \{A = B\}$. Säde \mathcal{T} heijastuu pisteestä x_p kohti joukkoa B siten, että heijastuva säde kulkee pisteen $(x_p)_B$ kautta, kun $(x_p)_B$ on pisteen x_p projektiio joukkoon B .*

Todistus. Nyt $x_p \in \{A = B\}$. Lauseen 3.3 nojalla nähdään, että tangenttisuora keskijoukolle $\{A = B\}$ pisteessä x_p on kulman $\angle p_A x_p (x_p)_B := 2\alpha$ puolittaja (Kuva 3.2). Tällöin heijastuslain nojalla valonsäteen \mathcal{T} tulokulma α ja heijastuskulma ovat yhtä suuret. Heijastuskulma vastaa tangenttisuoran ja janan $[x_p, (x_p)_B]$ välistä kulmaa, joten heijastuva valonsäde menee kohti pistettä $(x_p)_B$. \square

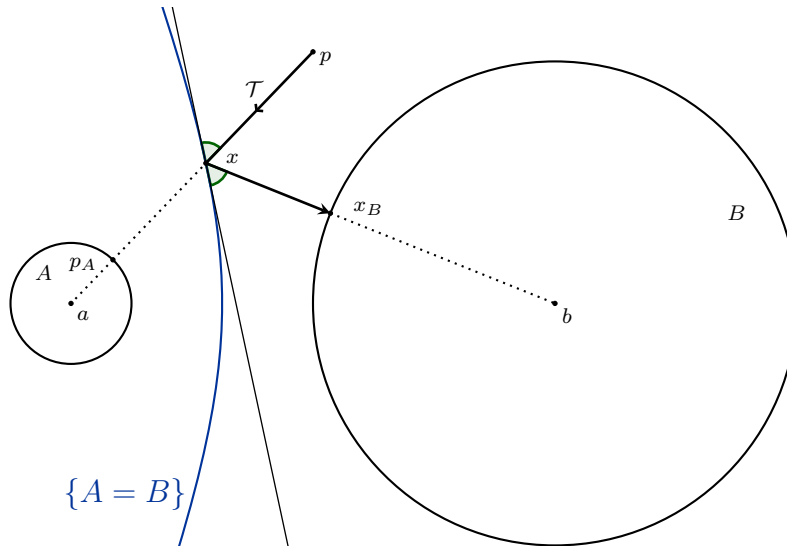
3.2 Heijastusominaisuudet, kun kartioleikkaukset ovat määritelty keskijoukkoina

Tarkastellaan nyt aitojen kartioleikkausten heijastusominaisuuksia. Määritellään kartioleikkaukset kahden ympyrän keskijoukkoina ja tarkastellaan heijastuvia valonsäteitä keskijoukoille todistettujen heijastusominaisuuksien avulla. Tällöin saadaan tutut tasogeometrian avulla osoitetut kartioleikkausten heijastusominaisuudet määriteltyä toisella tavalla.

Hyperbelin toinen haara saatiin kahden ympyrän keskijoukkona silloin, kun erilliset ympyrät eivät leikkaa toisiaan. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^2$ ja $R, r > 0$ siten, että $d(a, b) > R + r > 0$. Olkoon $A = C(a, R)$ ja $B = C(b, r)$. Tällöin muodostuva keskijoukko $\{A = B\}$ on hyperbelin toinen haara.

Olkoon nyt $p \in \mathbb{R}^2$ ja $d_A(p) > d_B(p)$. Lauseen 3.5 nojalla pisteen p kautta joukon A keskipistettä a kohti tuleva valonsäde heijastuu pisteestä x kohti joukkoa B siten, että heijastuva säde kulkee projektiopisteen $(x)_B$ kautta. Edelleen, koska projektiopisteen kautta kulkeva suora on kohtisuorassa ympyrän $C(b, r)$ tangenttia vastaan, tällöin heijastuva säde kulkee myös joukon $B = C(b, r)$ keskipisteen b kautta (Kuva 3.3).

Polttopistejoukon A (tai B) keskipisteestä lähtevä säde heijastuu keskijoukon $\{A = B\}$ pisteestä x siten, että tulokulma ja heijastuskulma ovat tangenttisuoraa vastaan yhtä suuret. Lemman 3.3 nojalla tangenttisuora menee yksikkövektoreiden $\nabla d_A(x)$ ja $\nabla d_B(x)$ muodostaman kulman puolittajan suuntaan. Tällöin heijastuneen valon jatke (kohti joukkoa B) kulkee projektiopisteen $(x_A)_B$ kautta ja ympyrän B keskipisteen läpi. Tällöin siis hyperbelin polttopisteestä lähtevän keskijoukosta heijastuvan valon jatke kulkee hyperbelin toisen polttopisteen kautta.



Kuva 3.3: Valonsäteen heijastuminen hyperbelistä.

Ellipsi saatiin kahden ympyrän keskijoukkona, kun ympyrät ovat sisäkkäin. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^2$ ja $R, r \in \mathbb{R}$, $R, r \geq 0$. Olkoon $A = C(a, R)$ ja $b \in A$. Olkoon $B = C(b, r)$ siten, että $d(a, b) + r < R$, jolloin joukko B on joukon A sisällä. Tällöin keskijoukko $\{A = B\}$ on ellipsi.

On todistettavissa, että etäisyysfunktio d_B on ympyrän A ja B leikkausjoukossa derivoituva. [10]

Olkoon $x \in \{A = B\}$. Nyt $x \neq a$, koska $d_B(a) > d(a, b)$. Siten lemmän 3.3 nojalla keskijoukon $\{A = B\}$ tangentti pisteessä x on yksikkövektoreiden $\nabla d_A(x)$ ja $\nabla d_b(x)$ puolittaja.

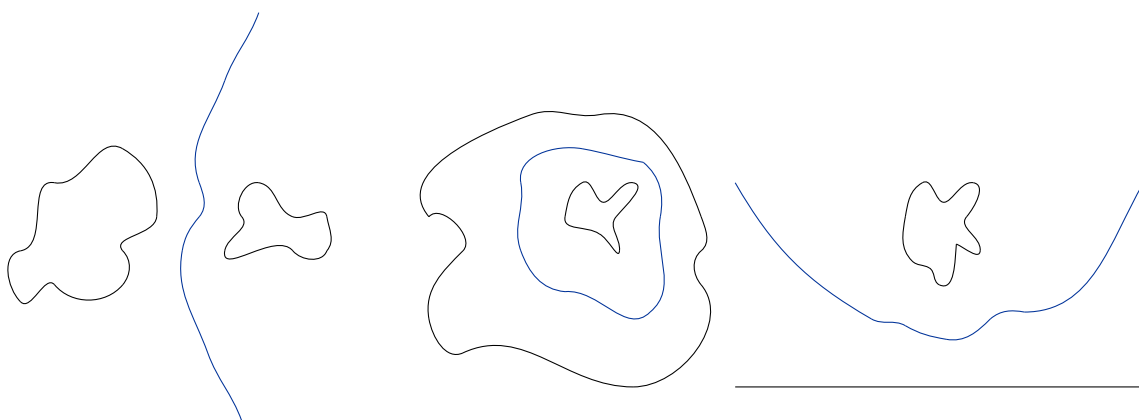
Tällöin pisteestä a lähtevä, kohti joukkoa A kulkeva valonsäde heijastuu keskijoukosta $\{A = B\}$ tangenttisuoraa vastaan siten, että heijastuva valonsäde kulkee kohti pistettä x_B , ja edelleen kohti joukon B keskipistettä b .

Keskijoukon $\{A = B\}$ ulkopuolelta tuleva valonsäde, joka menee kohti keskijoukoon B keskipistettä b , heijastuu keskijoukolta suuntaan kohti pis-

4 Kartioleikkauksia muistuttavat keskijoukot

Keskijoukot voidaan ajatella yleistettyinä kartioleikkauksina. Kartioleikkaukset saadaan kahden ympyrän keskijoukkoina, mutta monimutkaisemmilla polttopistejoukoilla saadaan kartioleikkauksia muistuttavia keskijoukkoja.

Tarkastelemalla monimutkaisemmilla polttopistejoukoilla saatuja keskijoukkoja ja niiden ominaisuuksia kaukana polttopistejoukoista, huomataan samoja geometrisiä ominaisuuksia, kuin tavallisilla kartioleikkauksilla. Tarkastelemme tässä luvussa keskijoukkoja avaruudessa \mathbb{R}^2 , mutta tulokset voidaan yleistää avaruuteen \mathbb{R}^n .



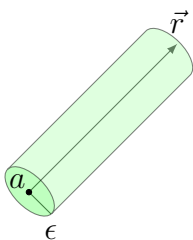
Kuva 4.1: Kartioleikkauksia muistuttavat keskijoukot.

4.1 Hyperbeliä muistuttavat keskijoukot

Tämän kappaleen päälause 4.1 osoittaa, että kun valitaan polttopistejoukoiksi kaksi erillistä kompaktilaista yhtenäistä joukkoa, niiden keskijoukko muistuttaa hyperbelin yhtä haaraa. Tarkasteltaessa muodostuvaa keskijoukkoa kaukana polttopistejoukoista, saadaan kaksi erillistä käyrää, jotka lähestyvät asymptoottisesti ääretöntä. Tiedetään, että hyperbelin haaran osat lähestyvät asymptoottisesti ääretöntä. Tämän kappaleen lauseet ja aputulokset seuraavat M. Poncen ja P. Santibáñezin artikkelista *On Equidistant Sets and Generalized Conics: The Old and the New* [11].

Tarkastellaan ensiksi erilaisten joukkojen asymptoottista käyttäytymistä. Määritellään putki $tub_\epsilon(\vec{r})$. Jos jokin joukko sisältyy tähän putkeen tietystä pisteestä lähtien, on kyseisellä joukolla asymptoottinen loppu putken suunnassa.

Olkoon $\vec{r} = [a, \infty[_v$ säde lähtien pisteestä $a \in \mathbb{R}^2$ suuntaan $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$. Valitaan v^\perp siten, että $\{v, v^\perp\}$ muodostaa ortonormaalien kannan



Kuva 4.2: $tub_\epsilon(\vec{r})$

avaruudelle \mathbb{R}^2 , eli vektorit v ja v^\perp ovat kohtisuorassa.

Määritellään kuvan 4.2 mukaisesti suuntaan \vec{r} putki, jonka säde on $\epsilon > 0$, seuraavasti.

$$tub_\epsilon(\vec{r}) := \{a + tv + sv^\perp : t \geq 0, |s| \leq \epsilon\}. \quad (4.1)$$

Nyt jos on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että joukko

$$M_{\epsilon, \vec{r}} = M \cap tub_\epsilon(\vec{r}),$$

niin joukolla M on **asymptoottinen loppu suunnassa \vec{r}** . Tämä kuvaa siis jostakin pisteestä lähtevää puolisuoraa, joka lähestyy säteen \vec{r} suuntaa jollakin tarkkuudella.

Tällöin joukon $M_{\epsilon, \vec{r}}$ kohtisuora projektio \vec{r} :lle on bijektio. Kun kirjoitetaan $M_{\epsilon, \vec{r}}$ käyttäen parametreja t, s putken $tub_\epsilon(\vec{r})$ määrittelyn mukaan, saadaan funktio s

$$\begin{aligned} s &: [0, \infty[\rightarrow [-\epsilon, \epsilon], \\ t &\mapsto s(t). \end{aligned}$$

Nyt $M_{\epsilon, \vec{r}}$ vastaa funktion s kuvaajaa ja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0.$$

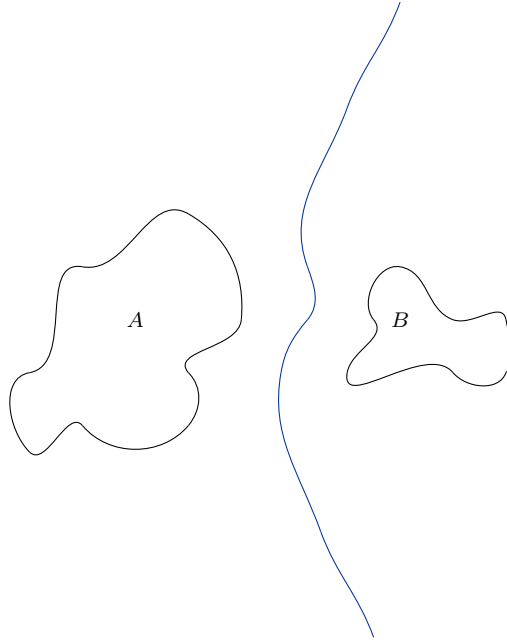
Huomataan, että funktio s on jatkuva, koska sen kuvaaja on suljettu joukko.

Määritellään kompaktille joukolle **konvekssi verho**. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti. Joukon A *konvekssi verho*, merkitään $conv(A)$ on pienin konvekssi joukko, joka sisältää joukon A . Konvekssi verho $conv(A)$ on kompakti joukko. [6]

Lause 4.1 (Hyperbeli). *Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ epätyhjät, yhtenäiset, kompaktit joukot siten, että $conv(A) \cap conv(B) = \emptyset$. Tällöin on olemassa $R > 0$ ja kaksi erillistä sädettä \vec{r}_1, \vec{r}_2 siten, että joukko*

$$\{A = B\} \cap B(0, R)^C$$

sisältää täsmälleen kaksi asyptoottista loppua suuntiin \vec{r}_1 ja \vec{r}_2 .



Kuva 4.3: Hyperbeliä muistuttava keskijoukko.

Määritellään seuraavaksi tulevia käsitteitä ja esitetään aputulokset 4.2, 4.3 ja 4.4 lauseen 4.1 todistusta varten.

Olkoon $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakti joukko. Suora l_K on joukon K **tukisuora**, jos on olemassa piste $x \in l_K$ siten, että $x \in K$ ja joukko K on kokonaan toisessa tukisuoran l_K rajaamassa puolitasossa.

Piste $a \in l_K \cap K$ on joukon K **oikea ääripiste** tukisuoran l_K suhteen, jos joukon $l_K \cap K$ alkiot kuuluvat välille $] -\infty, a]$. Vastaavasti, piste $b \in l_K \cap K$ on joukon K **vasen ääripiste** suoran l_K suhteen, jos joukon $l_K \cap K$ alkiot kuuluvat välille $[b, \infty[$.

Lemma 4.2. *Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon $V \subset \{(x, y) : x \leq \epsilon, y \leq 0\}$. Määritellään $f_h(x) = d((x, h), V)$ kaikilla $h > 0$. Tällöin funktio f_h on **aidosti kasvava**, kun $x \geq \epsilon$.*

Todistus. Olkoon $x_2 > x_1 \geq \epsilon$, kun $\epsilon > 0$. Olkoon $p \in \mathcal{P}_{(x_2, h)}(V)$. Funktion määritelmän mukaan $f_h(x_1) \leq d((x_1, h), p)$. Koska $x_2 > x_1$, on $d((x_1, h), p) < d((x_2, h), p) = f_h(x_2)$. Siten

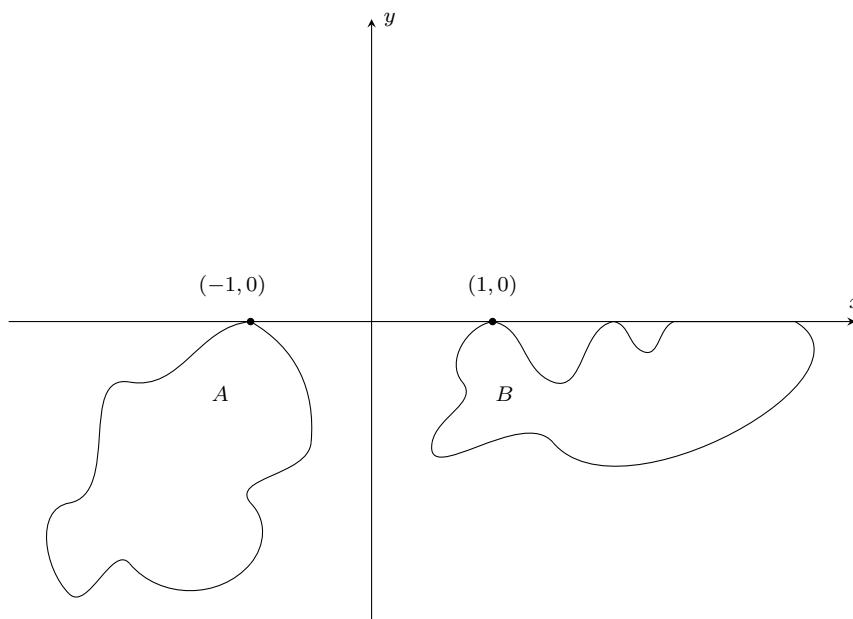
$$f_h(x_1) \leq d((x_1, h), p) < d((x_2, h), p) = f_h(x_2)$$

eli funktio f_h on aidosti kasvava. □

Kahden epätyhjän, yhtenäisen ja kompaktin joukon yhdisteellä $A \cup B$, joille $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) = \emptyset$, on olemassa neljä erillistä tukisuoraa $l_{A,B}$.

Näistä kaksi jättävät joukot A ja B eri puolitasoihin. Toiset kaksi jättävät joukot A ja B samaan tukisuoran jakamaan puolitasoon.

Oletetaan seuraavissa aputuloksissa 4.3 ja 4.4, että $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ovat erilliset kompaktit joukot, joilla on yhteinen tukisuora $l_{A,B}$ siten, että molemmat joukot sijoittuvat kokonaan samaan $l_{A,B}$:n rajaamaan puolitasoon. Oletetaan lisäksi, että $l_{A,B}$ on x -akseli, missä piste $(-1, 0)$ on joukon A oikea ääripiste ja $(1, 0)$ on joukon B vasen ääripiste suoran $l_{A,B}$ suhteen, (Kuva 4.4).



Kuva 4.4: Lauseiden 4.3 ja 4.4 oletukset. Kompaktit joukot, joilla yhteinen tukisuora x -akseli. Piste $(-1, 0)$ on joukon A oikea ääripiste, $(1, 0)$ joukon B vasen ääripiste yhteisen tukisuoran suhteen.

Lemma 4.3. *Olko $A, B \subset \mathbb{R}^2$ erilliset kompaktit joukot edellä mainittujen oletusten mukaisesti. Olkoon $\epsilon > 0$ ja joukoille A ja B pätee*

$$A \subset \{(x, y) : x \leq -1 + \epsilon, y \leq 0\}, \quad (4.2)$$

ja

$$B \subset \{(x, y) : x \geq 1 - \epsilon, y \leq 0\}. \quad (4.3)$$

Tällöin kaikilla $h > 0$ on olemassa yksikäsitteinen $x(h) \in [-1, 1]$ siten, että

$$d((x(h), h), A) = d((x(h), h), B), \quad (4.4)$$

ja $x(h) \in] - \epsilon, \epsilon[$.

Todistus. Kaikilla $(x, y) \in \{x \leq -\epsilon, y \geq 0\}$ pätee

$$d((x, y), A) < d((x, y), B).$$

Vastaavasti kaikilla $(x, y) \in \{x \geq \epsilon, y \geq 0\}$ pätee

$$d((x, y), A) > d((x, y), B).$$

Funktio $f_A(x, h) = d_A(x, h) = d((x, h), A)$ on jatkuva kaikilla $x \geq -1 + \epsilon$. Lemman 4.2 nojalla $f_A(x, h)$ on aidosti kasvava kaikilla $x \geq -1 + \epsilon$. Vastaavasti $f_B(x, h) = d((x, h), B)$ on jatkuva ja aidosti vähenevä kaikilla $x \leq 1 - \epsilon$. Tällöin on olemassa ainakin yksi piste $x(h) \in] - \epsilon, \epsilon[$, jolle

$$d((x(h), h), A) = d((x(h), h), B).$$

Funktio

$$f_{A,B}(x, h) = f_A(x, h) - f_B(x, h) = d((x, h), A) - d((x, h), B)$$

on myös aidosti kasvava välillä $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$, joten $x(h)$ on yksikäsitteinen ja kuuluu välille $[-\epsilon, \epsilon]$. \square

Nyt löydettiin yksikäsitteinen joukkojen A ja B keskijoukkoon kuuluva piste yksittäisellä y :n arvolla h . Lemmassa 4.4 osoitetaan, että joukkojen A ja B keskijoukko muodostaa yhden asymptoottisesti käyttäytyvän suoran, kun tarkastellaan muodostuvaa keskijoukkoa yksittäisissä pisteissä riittävän kaukana polttopistejoukoista.

Lemma 4.4. *Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ erilliset kompaktit joukot edellä mainittujen oletusten mukaisesti. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $h_\epsilon > 0$ siten, että kaikille $h > h_\epsilon$ löytyy $x(h) \in] - \epsilon, \epsilon[$, jolle*

$$\{A = B\} \cap \{(x, h) : x \in [-1, 1], h > h_\epsilon\} = \{(x(h), h) : h > h_\epsilon\}, \quad (4.5)$$

eli joukkojen A ja B keskijoukko sisältää vain yhden asymptoottisen suoran, kun $x \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että joukoille A ja B pätee (4.2) ja (4.3), eli

$$A \subset \{(x, y) : x \leq -1 + \epsilon, y \leq 0\}$$

ja

$$B \subset \{(x, y) : x \geq 1 - \epsilon, y \leq 0\},$$

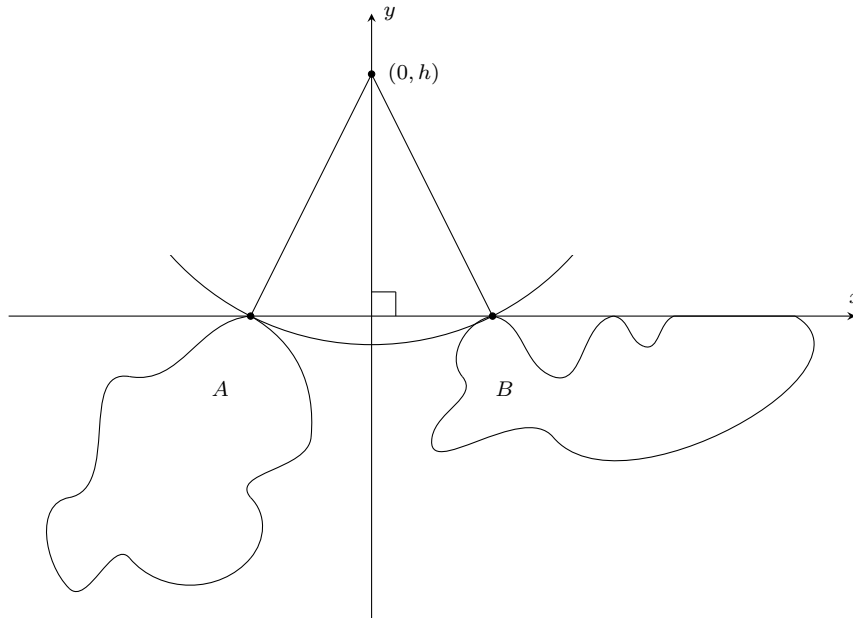
jotta voidaan hyödyntää lemmaa 4.3.

Koska $(-1, 0) \in A$, kaikilla $h > 0$ pisteet $\mathcal{P}_{(0,h)}(A)$ kuuluvat suljettuun $(0, h)$ keskipisteiseen palloon D_h joka kulkee pisteen $(-1, 0)$ kautta,

$$D_h = \bar{B}\left((0, h), d\left((0, h), (-1, 0)\right)\right),$$

(Kuva 4.5). Koska pallo \bar{B}_h kulkee myös pisteen $(1, 0)$ kautta, pisteet $\mathcal{P}_{(0,h)}(B)$ sisältyvät myös palloon, saadaan

$$\mathcal{P}_{(0,h)}(A) \cup \mathcal{P}_{(0,h)}(B) \subset D_h \cap \{(x, y) : y \leq 0\}.$$



Kuva 4.5: Pisteet $\mathcal{P}_{(0,h)}(A)$ ja $\mathcal{P}_{(0,h)}(B)$ ovat pallossa D_h .

Määritellään

$$A_h := D_h \cap A \text{ ja } \bar{B}_h := D_h \cap B.$$

Selvästi

$$d((0, h), A) = d((0, h), A_h) \text{ ja}$$

$$d((0, h), B) = d((0, h), B_h).$$

Osoitetaan, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $h_\epsilon > 0$ siten, että kun $h > h_\epsilon$

$$A_h \subset \{(x, y) : x \leq -1 + \epsilon, y \leq 0\} \text{ ja}$$

$$B_h \subset \{(x, y) : x \geq 1 - \epsilon, y \leq 0\}.$$

Tehdään antiteesi: Osoitetaan, että on olemassa $\tilde{\epsilon} > 0$ ja jono $(x_h, y_h) \in A_h$, missä $x_h > -1 + \tilde{\epsilon}$.

Koska $(x_h, y_h) \in D_h$, pätee

$$-y_h + h \leq \sqrt{h^2 + 1}.$$

Arvioidaan y_h :ta, kun $-y_h \leq \sqrt{h^2 + 1} - h$:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow \infty} \sqrt{h^2 + 1} - h \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} (\sqrt{h^2 + 1} - h) \frac{(\sqrt{h^2 + 1} + h)}{(\sqrt{h^2 + 1} + h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{h^2 + 1} + h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Koska joukko A on kompakti, se on myös jonokompakti. Tällöin on olemassa osajono (x_h, y_h) , joka suppenee kohti pistettä $(\tilde{x}, 0) \in A$, kun $\tilde{x} \geq -1 + \tilde{\epsilon} > -1$. Tämä on ristiriita sen oletuksen kanssa, että piste $(-1, 0)$ on joukon A oikea ääripiste. Ei siis voi löytyä joukon A pistettä x -akselilta lähempää nollaa kuin $(-1, 0)$. Siten kaikilla $h > h_\epsilon$

$$A_h \subset \{(x, y) : x \leq -1 + \epsilon, y \leq 0\} \text{ ja}$$

$$B_h \subset \{(x, y) : x \geq 1 - \epsilon, y \leq 0\}.$$

Nyt lemmän 4.3 nojalla löydetään yksikäsitteinen $x(h) \in]-\epsilon, \epsilon[$ keskijoukosta $\{A = B\}$.

Selvästi piste $(-\epsilon, h)$ on lähempänä joukkoa A ja vastaavasti piste (ϵ, h) on lähempänä joukkoa B , kun $h > h_\epsilon$. Siten jokaisella h :n arvolla keskijoukko $\{A = B\} \cap \{(x, h) : x \in [-1, 1], h > h_\epsilon\}$ sisältää vain yksikäsitteisen pisteen $(x(h), h)$. Kun h käy läpi arvoja $h > h_\epsilon$, joukoksi $\{A = B\} \cap \{(x, h) : x \in [-1, 1]\}$ muodostuu tasokäyrä, jolle $x \in]-\epsilon, \epsilon[$ ja h kasvaa rajatta. Tällöin muodostuva käyrä lähestyy asymptoottisesti ääretöntä. \square

Todistus lause 4.1. Osoitetaan ensin, että tällaisia yksikäsitteisiä asymptoottisia puolisuoria löydetään kaksi. Osoitetaan sitten, että muita asymptoottisuoria ei löydy, eli mikään muu keskijoukon $\{A = B\}$ osa ei karkaa äärettömään.

Lemman 4.4 avulla voidaan osoittaa, että tällaiset kaksi asymptoottista puolisuoria on olemassa. Lemmassa 4.4 tarkasteltiin joukkoja vain yhden tukisuoran $l_{A,B}$ suhteen ja löydettiin keskijoukoksi täsmälleen yksi asymptoottinen suora. Koska tiedetään, että joukoilla A ja B on kaksi yhteistä

erillistä tukisuoraa, jotka jättävät joukot A ja B samaan puolitasoon, löydetään asymptoottisia puolisuoria kaksi.

Lauseen 1.7 nojalla keskijoukko ei sisällä mitään muuta. Muodostuva keskijoukko on yksiulotteinen monisto, joten se on homeomorfinen reaalisuoran kanssa. \square

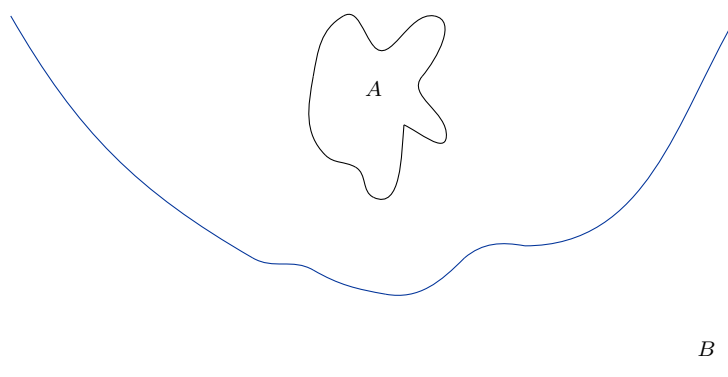
4.2 Ellipsiä muistuttavat keskijoukot

Lauseen 1.7 *ii*) -kohdan nojalla, kun joukot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ovat erillisiä, yhtenäisiä ja kompakteja joukkoja, ja konvekssi joukko B on joukon A sisällä, keskijoukko $\{A = B\}$ on homeomorfinen ympyrän S^1 kanssa. Tällöin voidaan ajatella, että muodostuva keskijoukko muistuttaa ellipsiä, koska se on suljettu toisen asteen käyrä (Kuva 4.1).

4.3 Paraabelia muistuttavat keskijoukot

Paraabelit ovat aina kuperia. Paraabelin pisteet karkaavat mistä tahansa paraabelin pisteeseen piirretystä tukisuorasta, eli paraabelin tangenttisuorasta. Sellaisia keskijoukkoja, joilla on tällainen ominaisuus, voidaan ajatella yleistyksinä paraabeleille. [11]

Tarkastellaan muodostuvaa keskijoukkoa, kun valitaan erilliset polttopistejoukot A ja B , missä A on kompakti ja yhtenäinen, ja B on rajoittamaton suljettu joukko. Oletetaan lisäksi, että joukoilla A ja B ei ole yhteistä tukisuoraa ja $\text{conv}(B)$ ei leikkaa joukkoa A .



Kuva 4.6: Paraabelia muistuttava keskijoukko.

Lause 4.5 (Paraabeli). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ yhtenäinen, epätyhjä kompakti joukko ja B erillinen suora. Tällöin on olemassa $\tilde{R} > 0$ siten, että kaikilla $R \geq \tilde{R}$*

ja jokaisella joukon $\{A = B\} \cap B(0, R)^C$ tukisuoralla l pätee

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d(l, \{A = B\} \cap B(0, s)^C) = \infty.$$

Todistus. Lauseen 1.7 nojalla joukko $\{A = B\}$ on yksiulotteinen topologinen monisto, eli se on lokaalisti homeomorfinen jonkin avoimen välin kanssa. Todistetaan ensin, että keskijoukko $\{A = B\}$ on jonkin jatkuvan funktion graafi. Osoitetaan lisäksi, että keskijoukon pisteiden etäisyys x -akselista kasvaa nopeammin kuin mikään lineaarinen funktio. Nämä yhdessä todistavat sen, että riittävän kaukana tarkastellessa paraabelia muistuttavan keskijoukon pisteet karkaavat mistä tahansa tukisuorasta äärettömään.

Siirron ja kierron avulla voidaan olettaa, että joukko B on x -akseli ja joukko A sijaitsee x -akselin jakamassa ylemmässä puolitasossa.

Koska joukko A on kompakti, on olemassa $0 < m < M$ ja $\delta > 0$ siten, että

$$A \subset] - \delta, \delta[\times] m, M[.$$

Lisäksi voidaan olettaa, että y -akseli kulkee joukon A jonkin pisteen kautta.

Osoitetaan, että joukko $\{A = B\}$ on jonkin jatkuvan funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ graafi yllä valitussa koordinaatistossa. Toisin sanoen, osoitetaan, että

$$\{A = B\} = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\},$$

missä $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva funktio.

Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja tarkastellaan ympyröitä

$$S(x, y) = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : (z - x)^2 + (y - w)^2 = y^2\},$$

missä $y \geq 0$. Nyt $S(x, 0) = (x, 0)$, jolloin $S(x, 0) \cap \{A = B\} = \emptyset$. Toisaalta jokin $(0, w) \in A$ ja yhtälöllä $x^2 + (y - w)^2 = y^2$ on ainakin yksi ratkaisu, kun $y > 0$, eli on olemassa $y > 0$ siten, että $S(x, y) \cap \{A = B\} \neq \emptyset$.

Erityisesti, koska joukko A on yhtenäinen, on olemassa $y_0 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$d((x, y_0), A) = y_0.$$

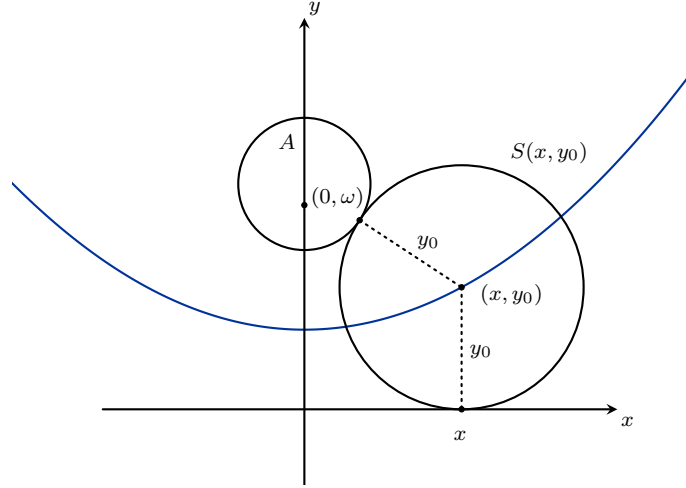
Osoitetaan vielä, että muita tällaisia ei ole vastaesimerkin avulla.

Antiteesi: On olemassa $y_1 > y_0 > 0$ siten, että $d((x, y_1), A) = y_1$. Tällöin pätee

$$A \subset B((x, y_0), y_0)^C \tag{4.6}$$

ja

$$A \subset B((x, y_1), y_1)^C. \tag{4.7}$$



Kuva 4.7: Lauseen 4.5 todistusta. Löytyy y_0 siten, että $d((x, y_0), A) = y_0$.

Koska $y_1 > y_0 > 0$,

$$B((x, y_0), y_0) \subset B((x, y_1), y_1)$$

ja

$$B((x, y_0), y_0)^C \cap B((x, y_1), y_1)^C = (x, 0).$$

Joukon A yhtenäisyyden ja tiedon (4.6) nojalla on olemassa piste

$$(u, v) \in A \cap B((x, y_1), y_1) \setminus \bar{B}((x, y_0), y_0).$$

Tämä on kuitenkin ristiriita tiedon (4.7) kanssa. Siten joukko $\{A = B\}$ on jonkin funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ graafi. Lisäksi, koska $\{A = B\}$ on topologinen yksiulotteinen monisto, niin funktio f on jatkuva.

Osoitetaan vielä, että edellä määriellyssä koordinaatistossa pisteiden $(x, y) \in \{A = B\}$ etäisyys x -akselista kasvaa nopeammin kuin mikään lineaarinen funktio.

Olkoon $(x, y) \in \{A = B\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} y^2 &= d((x, y), B)^2 \\ &= d((x, y), A)^2 \\ &\geq (x - \delta)^2 + (y - M)^2 \\ &= x^2 + 2\delta x + \delta^2 + y^2 - 2My + M^2 \end{aligned}$$

kun x on suuri. Tällöin

$$y \geq \frac{1}{2M}(x^2 + 2\delta x + \delta^2 + M^2)$$

ja yhtälön oikea puoli kasvaa nopeammin kuin Cx , mille tahansa $C > 0$, kun $x \rightarrow \infty$.

Siten riittävän kaukana tarkastellessa, muodostuvalla keskijoukolla on paraabelin kupera ominaisuus. Keskijoukon pisteet karkaavat mistä tahansa tukisuorasta, eli keskijoukon kuvaajan tangenttisuorasta,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d(l, \{A = B\} \cap B(0, s)^C) = \infty.$$

□

Keskijoukolle pätee paraabelin kupera ominaisuus myös ilman oletusta, että joukko B on suora. Olkoon A on yhtenäinen, epätyhjä kompakti joukko ja B on mikä tahansa rajoittamaton suljettu joukko. Joukkoa B voidaan rajata siten, että joukosta saadaan kompakti ja rajoitettu. Tällöin yksittäisellä joukon B osalla muodostuva keskijoukko joukon A kanssa muistuttaa hyperbeliä, eli sisältää kaksi asymptoottista puolisuoraa. Kun rajoitettua joukkoa laajennetaan, muodostuvan keskijoukon asymptoottien kulmakerroin kasvaa rajatta, jolloin keskijoukon pisteet karkaavat jokaisesta tukisuorasta. Tällöin pätee paraabelin kupera ominaisuus. Toisaalta paraabeli saadaan myös kahden ympyrän keskijoukkona, kun suora ajatellaan ympyränä, jonka säde on ääretön ja keskipiste on äärettömän kaukana.

Viitteet

- [1] DAVID A. BRANNAN, MATTHEW F. ESPLER, JEREMY J. GRAY: *Geometry*. Second edition, Cambridge University Press, New York, 2012.
- [2] MARIANO GIAQUINTA, GIUSEPPE MODICA: *Mathematical Analysis. Foundations and Advanced Techniques for Functions of Several Variables*. Birkhäuser Boston, 2012. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8310-8>
- [3] TERO KILPELÄINEN: *Vektorianalyysi*. Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä, 2019.
- [4] SIMO K. KIVELÄ: *Algebra ja geometria*. Otakustantamo, Helsinki, 1989.
- [5] MATTI LEHTINEN: *Matematiikan historian luentoja*. Luettu 27.4.2023 <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/>
- [6] ISAAC E. LEONARD, JAMES E. LEWIS: *Geometry of Convex Sets*. John Wiley & Sons Inc, 2015.
- [7] L. D. LOVELAND: *When midsets are manifolds*. Proceedings of American Mathematical Society Vol.61, No.2; 1976. 353-360. <https://www.jstor.org/stable/2041341>
- [8] JOUNI PARKKONEN: *Differentiaaligeometria*. Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä, 2021.
- [9] JOUNI PARKKONEN: *Metriset avaruudet ja Topologia*. Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä, 2020.
- [10] MARIO PONCE: *Reflections on Equidistant Sets*. The American Mathematical Monthly, Vol.129, No.9, 2022. <https://doi.org/10.1080/00029890.2022.2104574>
- [11] MARIO PONCE, PATRICIO SANTIBÁÑEZ: *On Equidistant Sets and Generalized Conics: The Old and the New*. The American Mathematical Monthly, Vol.121, No.1, 2014. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.121.01.018>
- [12] JOHN B. WILKER: *Equidistant sets and their connectivity properties*. Proceedings of the American Mathematical Society Vol.47, No.2, 1975.
- [13] TUOMO ÄKKINEN: *Analyttistä geometriaa*. Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä, 2018.