Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro-gradu tutkielma

Moniulotteinen Riemannin integraali

Elina Kattelus

2. elokuuta 2023

Tekijä Elina Kattelus	
Otsikko Moniulotteinen Riemannin integraali (engl. Multidimensional Riemann integral)	
Tutkinto-ohjelma Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma	
Päivämäärä 2. elokuuta 2023	**Sivumäärä** 38

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tutustutaan moniulotteiseen Riemannin integraaliin ja sen taustalla oleviin lauseisiin ja todistuksiin. Riemannin integraali saadaan Darboux'n summien raja-arvona integrointivälin jakoa tihennettäessä, jos raja-arvo on olemassa. Arkhimedes-Riemann lause esittelee Arkhimedeen jakokokoelmat, joiden ominaisuus on, että Darboux'n ylä- ja alasummat suppenevat kohti samaa arvoa. Rajoitettu funktio on integroituva jos ja vain jos sillä on Arkhimedeen jakokokoelma. Arkhimedes-Riemann lause on tärkeä tutkielman muiden lauseiden todistamisen kannalta.

Joukon ollessa korkeampiulotteisen avaruuden osajoukko, joukon tutkimiseen tarvitaan n-ulotteisia välejä. Kun integroitava joukko on n-väli, voidaan se jakaa pienemmiksi väleiksi. Yleisempi alue ei ole valmiiksi väli, joten siitä täytyy tehdä väli nollajatkeen avulla. Nollajatke tarkoittaa, että funktio saa arvon nolla kyseisen rajoitetun joukon ulkopuolella. Nollajatke ei muuta integraalin arvoa, koska funktion arvon ollessa nolla myös integraali on nolla. Kuitenkin tällöin myös joukon reunan tutkiminen tulee tarpeelliseksi. Rajoitettu joukko on Jordan-mitallinen, jos sen reunalla on nollasisältö eli reuna ei ole liian paksu. Jatkuvat funktiot ovat integroituvia yli Jordan-alueiden, koska Jordan-alueen reunalla on nollasisältö.

Fubinin lauseen avulla moniulotteinen integraali saadaan palautettua yksiulotteiseksi iteroimalla. Fubinin lause on tutkielman päätulos. Fubinin lauseen avulla Riemannin integraalia voidaan hyödyntää fysiikan ja muidenkin alojen sovelluksissa. Esimerkiksi kappaleen massa saadaan integroimalla tiheyden funktiota kappaleen tilavuuden yli.

Sisällys

Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutustutaan moniulotteiseen Riemannin integraaliin. Tutkielman tavoitteena on laajentaa Riemannin integraalin määritelmä useamman muuttujan funktioille ja osoittaa, että näitä moniulotteisia integraaleja voidaan laskea yhden muuttujan integraalin avulla.

Aluksi esitellään integraalin määritelmä. Yhden muuttujan funktiolle integraalia käsitellään yleensä pinta-alana, joka jää funktion kuvaajan ja x-akselin välille. Integrointiväli jaetaan osiin ja jakoa tihennetään, kunnes muodostuneiden suorakulmioiden ala vastaa funktion kuvaajan alle jäävää alaa mahdollisimman hyvin. Moniulotteisessa tilanteessa pinta-alan sijaan saatu integraalin arvo vastaa tilavuutta ja abstrakteja mittoja, joita kutsutaan myös sisällöksi.

Riemannin integraalissa jaetaan integrointialue pienemmiksi n-väleiksi. Riemannin integraalin kanssa samankaltainen on Lebesguen integraali, jossa käytetään yleisempiä mitallisia joukkoja. Riemannin integraalia käytetään monissa fysiikan sovelluksissa, kuten kolmiulotteisen kappaleen massan määrittämisessä.

Tutkielman alussa määritellään Darboux'n summat, joiden avulla saadaan integraalin arvo raja-arvona, kun jakoa tihennetään. Esitellään Fubinin lauseen todistamista varten Arkhimedes-Riemann lause, jossa määritellään Arkhimedeen jakokokoelmat. Arkhimedes-Riemann lausetta hyödynnetään myös Darboux'n summien suppenemisen tutkimisessa. Lisäksi tarkastellaan funktion jatkuvuuden ja integroituvuuden yhteyttä. Useamman muuttujan tilanteessa tarvitaan nollajatke, jotta funktion integroituvuutta voidaan tutkia yleisemmissä alueissa.

Lisäksi tutustutaan Jordan-mitallisiin joukkoihin sekä Jordanin nollasisältöön ja alueisiin. Jordan-mitallisuudessa tutkitaan joukon reunaa. Kun joukon reunalla on nollasisältö, voidaan reuna peittää äärellisellä määrällä avoimia välejä, joiden mittojen summa on niin pieni kuin halutaan. Tästä seuraa, että Jordan-alueessa jatkuva funktio on integroituva. Jordanin nollasisällöllä tutkitaan myös epäjatkuvuuspisteiden joukkoa. Jos epäjatkuvuuspisteiden joukolla on nollasisältö, epäjatkuvuuskohdat eivät vaikuta integroituvuuteen.

Lopulta tutkielmassa päädytään Fubinin lauseeseen, jossa moninkertainen integraali voidaan jakaa alempiulotteisiksi integraaleiksi ja myös integraalin integrointijärjestystä voidaan vaihtaa. Fubinin lausetta käytettäessä integroitava alue jaetaan siivuihin suorakulmaisten särmiöiden sijaan. Fubinin lauseen avulla voidaan helpottaa esimerkiksi fysiikan laskuja.

Tutkielmassa esitellään usein ensin kaksiulotteinen tilanne ymmärtämisen helpottamiseksi, sillä kaksiulotteisia tilanteita voi mallintaa kuvilla. Sen jälkeen käsitellään useamman ulottuvuuden tilanne. Siirryttäessä useamman ulottuvuuden tilanteeseen etenkin integroitavan alueen reunan luonne ratkaisee.

Pääasiallisena lähteenä tutkielman teossa on käytetty Patrick M. Fitzpatrickin kirjaa Advanced Calculus [3]. Toisena lähteenä on ollut Apostolin Mathematical Analysis -kirja [2]. Robert A. Adamsin ja Christopher Essexin Calculus A Complete Course [1] on käytetty aiheen perusteiden ja yksinkertaisten tapausten hahmottamiseen. Käsitteiden määrittelyssä on tarvittu Tero Kilpeläisen [4] ja Juha Lehrbäckin [5] luentomonisteita. Yhdessä todistuksessa on käytetty apuna math.stackexchange-verkkosivustoa [6].

1 Integraalin määritelmä

Yhden muuttujan funktion $f(x)$ tilanteessa tutkitaan tasoalueen alaa, jota rajaa funktion kuvaaja, x-akseli ja suorat $x = a$ ja $x = b$. Integrointialue on siis väli $[a, b]$. Tässä tilanteessa integraali on yksinkertainen. Yksiulotteisessa tilanteessa voidaan tehdä jako seuraavasti: Olkoon a ja b reaalilukuja ja $a < b$. Jos m on luonnollinen luku ja

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b,$$

niin $P_x = \{x_0, ..., x_m\}$ kutsutaan välin $[a, b]$ jaoksi. Jokaiselle indeksille $m \geq i \geq 0$ jakopiste jaolle P_x on x_i ja jos $m \geq i \geq 1$ on väli $[x_{i-1}, x_i]$ jaon P_x jakoväli. Yksinkertaisin jako välille $[a, b]$ on jako, jossa $m = 1$. Tällöin jaossa on kaksi jakopistettä $x_0 = a$ ja $x_1 = b$ ja vain yksi jakoväli $[a, b]$.

Tutkitaan nyt kahden muuttujan tilannetta, jossa integraali on kaksinkertainen. Kaksinkertaisessa integraalissa tutkitaan kolmiulotteisen alueen tilavuutta, joka jää xy-tasossa olevan integrointialueen ja kahden muuttujan funktion $f(x, y)$ muodostaman pinnan $z = f(x, y)$ välille.

1.1 Kaksinkertainen integraali ja suljettu suorakulmio

Kahden muuttujan funktion integraalin arvo on tilavuus. Tutkitaan ensin tilannetta, jossa integrointialue D on suljettu suorakulmio, jonka reunat kulkevat xy-tason koordinaattiakseleiden suuntaisesti. Funktio f on rajoitettu funktio alueessa D. Alue D koostuu pisteistä (x, y), joille

$$a \leq x \leq b$$

ja

$$c \leq y \leq d.$$

Voidaan tehdä jako P alueelle D, jolloin suorakulmiosta D muodostuu pienempiä suorakulmioita. Merkitään

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$$

ja

$$c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d.$$

Olkoon jako x-suunnassa P_x ja y-suunnassa P_y. Nämä jaot muodostavat jakovälejä, jotka ovat suorakulmion mn sivuja. Jako P koostuu mn suorakulmiosta, merkitään niitä R_{ij}, missä $1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq n$. Suorakulmio

R_{ij} sisältää pisteet (x, y), joissa $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ ja $y_{j-1} \leq y \leq y_j$. Näiden pienempien suorakulmioiden R_{ij} alat saadaan kaavasta

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

ja suorakulmion halkaisija on

$$\mathrm{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Jaon P normi on suurin suorakulmioiden R_{ij} halkaisijoista eli

$$\|P\| = \max \{\mathrm{diam}(R_{ij}) : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Valitaan nyt mielivaltainen piste (x_{ij}^*, y_{ij}^*) jokaisesta suorakulmiosta R_{ij} ja muodostetaan Riemannin summa

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}.$$

Tämä on mn termin summa, yksi termi kustakin jaon suorakulmiosta. Jos $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \geq 0$, termi vastaa suorakulmaisen särmiön tilavuutta, joka saadaan kertomalla pohjan R_{ij} ala korkeudella eli funktion arvolla pisteessä (x_{ij}^*, y_{ij}^*). Jos $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) < 0$, tilavuuden arvo huomioidaan negatiivisena. Riemannin summa siis arvioi tilavuutta alueen D ja funktion f kuvaajan välissä suorakulmaisten särmiöiden avulla. Kaksinkertainen integraali funktiosta f yli alueen D määritetään raja-arvona Riemannin summista, jos raja-arvo on olemassa kun $\|P\| \to 0$ riippumatta pisteiden (x_{ij}^*, y_{ij}^*) valinnasta.[1]

Epsilon-delta -määritelmä kaksinkertaiselle integraalille esitellään seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 1.1 (Kaksinkertainen integraali integrointialueena suorakulmio). Rajoitettu funktio $f : D \to \mathbb{R}$ on integroituva yli alueen D ja sillä on kaksinkertainen integraali

$$I = \iint_D f(x, y)\, dA,$$

jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa δ_ϵ siten, että $|R(f, P) - I| < \epsilon$ pätee jokaiselle alueen D jaolle P, missä $\|P\| < \delta$, ja kaikille pisteiden (x_{ij}^*, y_{ij}^*) valinnoille jaon P osasuorakulmioissa R_{ij}.

Kun arvioidaan kaksinkertaista integraalia iteroimalla $dA = dx \cdot dy$, joten integroimisjärjestyksellä voi olla merkitystä laskemisen helppouden kannalta. Kappaleessa 7 käsitellään Fubinin lause, jossa palautetaan moniulotteiset integraalit yksiulotteisiksi iteroinnin avulla.

1.2 Rajoitetun funktion Riemannin integraali kompaktilla välillä avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Seuraavaksi käydään läpi integrointia kompaktin integrointialueen yli, joten määritellään ensin kompaktiuden käsite.

Määritelmä 1.2 (**Kompakti joukko avaruudessa** $\mathbb{R}^n$**).** Joukko $S \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti jos ja vain jos jokainen joukon S avoin peite sisältää äärellisen osajoukon, joka peittää myös joukon S. [2]

Lause 1.3. *Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

(a) Joukko S on kompakti joukko.

(b) Joukko S on suljettu ja rajoitettu.

(c) Jokaisella joukon S äärettömällä osajoukolla on kasautumispiste joukossa S.

(d) Joukko S on jonokompakti.

Joukko $I \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti n-väli, jos se on muotoa

$$I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_k \in I_k\},$$

missä $I_k \subset \mathbb{R}$ ovat suljettuja ja rajoitettuja välejä kaikilla $k = 1, 2, ..., n$.[2]

Määritelmä 1.4. Olkoon $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ kompakti väli avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Jos P_k on jako välillä $I_k \subset \mathbb{R}$, missä $I_k = [a_k, b_k]$, niin karteesinen tulo

$$P = P_1 \times ... \times P_n$$

on jako välille I. Jos jako P_k jakaa m_k yksiulotteiseen osaväliin välin I_k, tällöin jako P määrittää välin I yhdisteenä $m_1...m_n$ kappaleesta välin I n-ulotteisia osavälejä. Välin I jako P' on tiheämpi kuin P, jos $P \subseteq P'$. Tämä tarkoittaa, että kaikki jaon P jakopisteet löytyvät myös jaosta P'. Kaikkien välin I jakojen kokoelmaa merkitään $\mathcal{P}(I)$.

Esitellään lyhyesti mitan käsite. Mitan käsitettä tarvitaan esimerkiksi Riemannin summassa. Yksiulotteisen välin mitta on välin pituus eli $\mu([a, b]) = b - a$. Rajoitetun n-ulotteisen välin mitalle, jota merkitään μ, pätee seuraavat ominaisuudet. Jos jokainen väleistä I_k on rajoitettu, niin välin I n-ulotteinen mitta saadaan yksiulotteisten mittojen tulona.

$$\mu(I) = \mu(I_1) \cdots \mu(I_n).[2]$$

Koska kyseessä on kertolasku, niin $\mu(I) = 0$, jos $\mu(I_k) = 0$ jollakin k.[2] Kun mitta $\mu(I_k) = 0$, se tarkoittaa, että väli I_k on vain yksittäinen piste.

Jos osavälit ovat n-ulotteisia, saadaan välin I mitta osavälien I_k mittojen summana

$$\mu(I) = \mu(I_1) + ... + \mu(I_m),$$

koska n-väli I muodostettiin välien I_k yhdisteenä. Tällöin joukkojen yhdisteen mitta on nolla, jos jokaisen joukon mitta on nolla.[2]

Nollamittaisuus tarkoittaa sitä, että joukkoa peittävien osavälien mittojen summa saadaan mielivaltaisen pieneksi. Yksittäisten pisteiden mitta on aina nolla.

Määritelmä 1.5. Reaalilukujoukko S on nollamittainen, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa numeroituva määrä avoimia välejä, jotka peittävät joukon S ja näiden välien mittojen summa on $< \epsilon$.

Jos avoimia välejä merkitään (a_k, b_k), määritelmän mukaan

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \epsilon.$$

Vastaavasti avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko N on nollamittainen, jos kaikilla $\epsilon > 0$, joukko N voidaan peittää numeroituvalla määrällä n-ulotteisia välejä I_k, joiden mittojen summa on $< \epsilon$. Välin pituuden sijaan käytetään n-ulotteisen osavälin mittana $\mu(I_k)$.

Kun n-ulotteinen väli I on jaettu osaväleihin, valitaan jokaiselta osaväliltä I_k piste t_k ja muodostetaan Riemannin summa osavälin mitasta $\mu(I_k)$ ja funktion arvosta kyseisessä pisteessä.

Määritelmä 1.6. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio kompaktilla välillä $I \subset \mathbb{R}^n$. Jos P on välin I jako m osaväliin $I_1, ..., I_m$ ja jos piste $t_k \in I_k$, kaikilla $k = 1, 2, ..., m$, niin vastaava Riemannin summa on muotoa

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^{m} f(t_k)\mu(I_k).$$

Funktio f on Riemann-integroituva välillä I, jos on olemassa reaaliluku T, jolla on seuraava ominaisuus: Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa välin I jako P_ϵ siten, että kaikille jakoa P_ϵ tiheämmille jaoille P pätee

$$|R(f, P) - T| < \epsilon,$$

kaikille Riemannin summille $R(f,P)$. Kun sellainen luku T on olemassa, se on yksikäsitteisesti määritelty ja merkitään

$$T = \int_I f \; dx = \int_I f(x) \; dx$$

tai

$$T = \int_I f(x_1, ..., x_n) d(x_1, ..., x_n).$$

Tällöin reaaliluku T on funktion f Riemannin integraali yli välin I.[2]

1.3 Funktion nollajatke

Yhden muuttujan tapauksessa pätee, että jos f on jatkuva välillä $[a,b]$, niin f on integroituva yli välin $[a,b]$. Usean muuttujan funktion jatkuvuuden ja integroituvuuden yhteyteen palataan luvussa 4.

Yhden muuttujan funktioita integroitaessa määrittelyalue on suljettu ja rajoitettu väli. Useamman muuttujan funktion integrointiin tarvitaan nollajatke, että voidaan käyttää myös muunlaisia joukkoja määrittelyalueena. Jos D on rajoitettu alue, sisältyy se johonkin suorakulmioon R, jonka reunat ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Suorakulmion pisteissä, jotka eivät ole alueessa D, funktion arvo on nolla. Tätä laajennusta kutsutaan funktion nollajatkeeksi. Seuraavassa määritelmässä on kaksiulotteinen tilanne, jossa on reaaliluvut x ja y.

Määritelmä 1.7. Olkoon f rajoitettu ja määritelty alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$. Olkoon $\hat{f}$ laajennus funktiolle f, niin että se on nollaa alueen D ulkopuolella.

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{, jos } (x,y) \in D \\ 0 & \text{, jos } (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Jos $\hat{f}$ on integroituva yli suorakulmion R, sanotaan että f on integroituva yli alueen D ja funktion f integraali yli alueeen D on

$$\iint_D f(x,y) \; dA = \iint_R \hat{f}(x,y) \; dA.[1]$$

Vaikka funktio f olisi jatkuva alueessa D, nollajatke $\hat{f}$ ei ole jatkuva alueessa R ellei $f(x,y) \to 0$ kun (x,y) lähestyy alueen D reunaa. Tähän liittyy alueen reunan Jordanin nollasisältö, josta lisää kappaleessa 6.

Seuraavassa määritelmässä x on n-ulotteinen vektori.

Määritelmä 1.8. Rajoitetulle osajoukolle $D \subset \mathbb{R}^n$ ja rajoitetulle funktiolle $f : D \to \mathbb{R}$, jos I on n-ulotteinen väli, joka sisältää alueen D, määritellään funktion f nollajatke $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$ välillä I

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ jos } x \in D \\ 0 & , \text{ jos } x \in I \setminus D.[3] \end{cases}$$

Seuraava lause voidaan perustella nollajatkeen avulla. Lauseen joukko D on Jordanin alue. Luvussa 8 käsitellään tarkemmin tämän lauseen kaltaisia tuloksia.

Lause 1.9. *Jos f on jatkuva suljetulla ja rajoitetulla alueella D, jonka reuna muodostuu äärellisestä määrästä siistejä käyriä, niin integroitumisehto toteutuu eli f on integroituva alueessa D.*

2 Darboux'n ylä- ja alasummat

Integraalin arvoa voidaan arvioida Darboux'n summien avulla. Muodostetaan välille jako. Jos jakoa tihennettäessä summien arvot lähestyvät raja-arvoa, niin tämä raja-arvo on funktion integraalin arvo kyseisen välin yli.

2.1 Summat yksiulotteisessa tilanteessa

Oletetaan, että funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja $P = \{x_0, ..., x_n\}$ on välin $[a, b]$ jako. Jokaiselle indeksille $i \geq 1$ määritellään

$$\begin{cases} m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{cases}$$

Edelleen määritellään, että Darboux'n ala- ja yläsummat ovat

$$\begin{cases} L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \text{ [3]} \end{cases}$$

Darboux'n summissa otetaan funktion infimum tai supremum arvoja jakoväliltä, kun taas Riemannin summissa otetaan jokin funktion arvo jakoväliltä. Niinpä Riemannin summan arvot ovat Darboux'n ala- ja yläsummien välissä

$$L(f, P) \leq R(f, P) \leq U(f, P).$$

Tämän takia voidaan käsitellä jatkossa vain Darboux'n summia. Darboux'n summien avulla voidaan määritellä Riemannin integraali.

2.2 Riemannin ala- ja yläintegraali summien avulla

Määritelmä 2.1 (Ala- ja yläintegraali). Olkoon f määritelty ja rajoitettu funktio kompaktilla välillä $I \subset \mathbb{R}^n$. Olkoon välillä I jako P, joka jakaa välin m osaväliin $I_1, ..., I_m$ ja

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$$

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in I_k\}.$$

Tällöin luvut

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{m} m_k(f)\mu(I_k)$$

ja

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{m} M_k(f)\mu(I_k)$$

ovat Darboux'n ala- ja yläsummia. Riemannin ala- ja yläintegraali funktiolle f yli välin I määritellään

$$\underline{\int_I} f\ dx = \sup\{L(P, f) : P \in \mathcal{P}(I)\}$$

ja

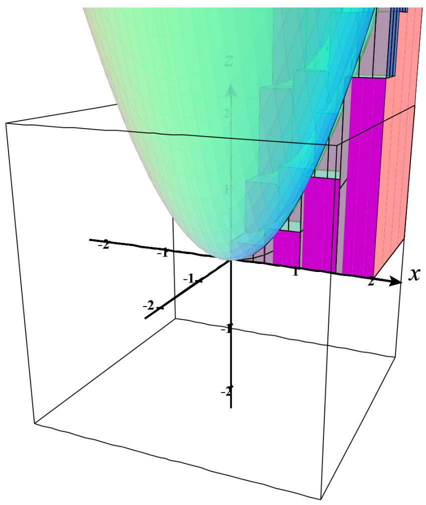
$$\overline{\int_I} f\ dx = \inf\{U(P, f) : P \in \mathcal{P}(I)\}.[2]$$

Määritelmä 2.2. Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu n-välillä I. Tällöin funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on integroituva välillä I kunhan

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

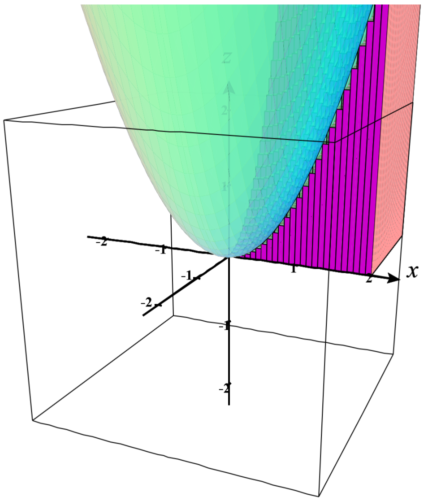
Tällöin saadaan funktion integraaliksi

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$



Kuva 2.1: Harvempi jako

Kuten kuvista 2.1 ja 2.2 nähdään jakoa tihentämällä saadaan parempi arvio funktion integraalin arvolle, koska ala- ja yläsummien arvot pisteessä (x^*_{ij}, y^*_{ij}) ovat lähellä funktion arvoa kyseisessä pisteessä. Jakovälien määrän kasvaessa osavälien normi pienenee.



Kuva 2.2: Tihennetty jako

Lemma 2.3 (**Tihennyslemma**). *Oletetaan, että funktio* $f : I \to \mathbb{R}$ *on rajoitettu ja että kompaktin välin* $I \subset \mathbb{R}^n$ *jako on* P. *Jos* P^* *on jaon* P *tihennys, niin pätee*

$$L(f, P) \leq L(f, P^*)$$

ja

$$U(f, P^*) \leq U(f, P).[3]$$

Summat kahden muuttujan tilanteessa voidaan merkitä mitan avulla

$$\begin{cases} L(f,P) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} m_{ij}\mu(Q_{ij}) \\ U(f,P) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\mu(Q_{ij})). \end{cases}$$

3 Arkhimedes-Riemann lause

Arkhimedes-Riemann lauseen avulla voidaan osoittaa, että funktio on integroituva. Integroituvuuden todistamisessa tutkitaan Darboux'n ala-ja yläsummien suppenemista. Ei tarvitse käyttää funktion infimumia ja supremumia. Tässä luvussa määritellään Arkhimedeen jakokokoelmat. Arkhimedes-Riemann lausetta käytetään myöhemmin esimerkiksi lauseen 4.7 todistuksessa.

Lemma 3.1. *Rajoitetulle funktiolle $f : I \to \mathbb{R}$ ja välin I jaolle P pätee*

$$L(f,P) \leq \underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f \leq U(f,P). \tag{3.1}$$

Tästä seuraa epäyhtälöt

$$0 \leq \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leq U(f,P) - L(f,P),$$

$$0 \leq U(f,P) - \overline{\int_I} f \leq U(f,P) - L(f,P), \tag{3.2}$$

ja

$$0 \leq \underline{\int_I} f - L(f,P) \leq U(f,P) - L(f,P). \tag{3.3}$$

Todistus. Alaintegraali on yläraja Darboux'n alasummille ja yläintegraali on alaraja Darbouxin yläsummille, joten saadaan epäyhtälöt

$$L(f,P) \leq \underline{\int_I} f$$

ja

$$\overline{\int_I} f \leq U(f,P).$$

Koska ala- ja yläintegraalille pätee

$$\underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f,$$

saadaan epäyhtälö (3.1). Tämän epäyhtälön avulla saadaan todistettua kolme muuta väitteen epäyhtälöä. □

Lause 3.2 (Arkhimedes-Riemann lause). *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ kompakti väli ja $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Funktio f on integroituva välillä I jos ja vain jos on olemassa jono $\{P_m\}$ välin I jakoja siten, että*

$$\lim_{m\to\infty}[U(f,P_m) - L(f,P_m)] = 0. \tag{3.4}$$

Tällöin

$$\lim_{m\to\infty} L(f, P_m) = \int_I f \tag{3.5}$$

ja

$$\lim_{m\to\infty} U(f, P_m) = \int_I f.[3] \tag{3.6}$$

Todistus. Oletetaan, että on olemassa jaot P_m siten, että lauseen yhtälö pätee. Käytetään lemmaa 3.1. Korvataan jako P jaolla P_m lemman toisessa epäyhtälössä. Käytetään lauseen epäyhtälöä ja saadaan epäyhtälö

$$0 \leq \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leq \lim_{m\to\infty} [U(f, P_m) - L(f, P_m)] = 0.$$

Suppiloperiaatteen nojalla ala- ja yläintegraali ovat yhtä suuria. Niinpä funktio f on integroituva välillä I.

Toinen suunta: Oletetaan, että funktio f on integroituva välillä I. Integroituvuuden määritelmän 2.2 mukaan tämä tarkoittaa, että pätee yhtälö

$$\underline{\int_I} f = \int_I f = \overline{\int_I} f.$$

Kiinnitetään luonnollinen luku m. Alaintegraalin määritelmän mukaan $\underline{\int_I} f$ on pienin yläraja funktion f Darboux'n alasummista. Niinpä luku

$$\left[\underline{\int_I} f\right] - \frac{1}{m},$$

joka on pienempi kuin $\underline{\int_I} f$, ei ole tämän kokoelman yläraja ja siksi on olemassa välin I jako P' siten, että

$$\left[\underline{\int_I} f\right] - \frac{1}{m} < L(f, P').$$

Niinpä oletuksen nojalla saadaan

$$\left[\int_I f\right] - \frac{1}{m} < L(f, P').$$

Yläintegraalille pätee vastaava, joten on olemassa jako P'' jolle pätee

$$U(f, P'') < \left[\int_I f\right] + \frac{1}{m}.$$

Tihennyslemman 2.3 avulla nähdään, että yhtälöt pätevät myös jaolle P_m, joka sisältää sekä jaon P' että P'' jakopisteet. Niinpä voidaan sijoittaa yhtälöihin merkintä P_m merkintöjen P' ja P'' tilalle. Saadaan yhtälö

$$0 \leq U(f, P_m) - L(f, P_m) < \left[\int_I f + \frac{1}{m}\right] - \left[\int_I f - \frac{1}{m}\right] = \frac{2}{m}.$$

Suppiloperiaatteen nojalla tästä saadaan, että

$$\lim_{m\to\infty}[U(f, P_m) - L(f, P_m)] = 0.$$

Täytyy vielä osoittaa sauraava: Jos funktio f on integroituva välillä I ja $\{P_m\}$ on sellainen jakokokoelma, että yhtälö (3.4) pätee, niin molemmat Darboux'n summakokoelmat suppenevat kohti integraalin arvoa. Kun (3.4) pätee ja jako P korvataan jaolla P_m sekä ala- ja yläintegraalit korvataan integraalilla, saadaan epäyhtälöt (3.2) ja (3.3) muotoon

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} U(f, P_m) - \int_I f \leq \lim_{m\to\infty}[U(f, P_m) - L(f, P_m)] = 0$$

ja

$$0 \leq \int_I f - \lim_{m\to\infty} L(f, P_m) \leq \lim_{m\to\infty}[U(f, P_m) - L(f, P_m)] = 0.$$

Näin voidaan tehdä, koska oletuksen mukaan funktio f on integroituva välillä I. Niinpä suppiloperiaatteen nojalla erotukset lähestyvät nollaa, kun $m \to \infty$ ja saadaan yhtälöt (3.5) ja (3.6). □

Seuraavaksi esitellään määritelmä tällaisille jakokokoelmille, joille pätee (3.4). Näitä kutsutaan Arkhimedeen jakokoelmiksi.

Määritelmä 3.3. Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Olkoon jokaiselle luonnolliselle luvulle m jako P_m välillä I. Tällöin jonoa $\{P_m\}$ sanotaan Arkihimedeen jakokokoelmaksi funktiolle f välillä I jos

$$\lim_{m\to\infty}[U(f, P_m) - L(f, P_m)] = 0.$$

Arkhimedes-Riemann lause voidaan kirjoittaa toisin sanoin: Rajoitettu funktio f välillä I on integroituva jos ja vain jos on olemassa Arkhimedeen jakokokoelma funktiolle f välillä I eli jokaiselle Arkhimedeen jakokokoelmalle löytyy Darboux ylä- ja alasummat, jotka suppenevat kohti funktion f integraalin arvoa välillä I.

Lause 3.4. *Olkoon rajoitettu funktio $f : I \to \mathbb{R}$ välillä $I \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä* *(i) On olemassa Arkhimedeen jakokokoelma funktiolle $f : I \to \mathbb{R}$.*

(ii) Jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa välin I jako P siten, että

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.[3]$$

Arkimedes-Riemann lauseesta seuraa seuraava lemma.

Lemma 3.5. *Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$ integroituva. Tällöin jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa välin I jako P siten, että*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Seuraavaa lemmaa käytetään lauseen 3.7 todistamisessa.

Lemma 3.6. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ kompakti väli ja funktio $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja olkoon $M \geq 0$ siten, että*

$$-M \leq f(x) \leq M$$

kaikille $x \in I$. Olkoon P välin I jako, jolla on s kappaletta jakopisteitä. Olkoon P^* mikä tahansa toinen välin I jako. Tällöin

$$U(f, P^*) - L(f, P^*) \leq U(f, P) - L(f, P) + E,$$

missä $E = 2sM \operatorname{diam}(I)^{n-1} \|P^*\|$.

Todistus. Olkoon n-välit Q_i jaon P^* osavälejä. Olkoon $1 \leq i \leq n$ ja

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in Q_i\}.$$

Tällöin $M_i \leq M$ kaikilla $1 \leq i \leq n$. Olkoon $\mathcal{C}$ niiden indeksien i joukko, joille väli Q_i leikkaa useampaa jaon P väliä. Tällöin jonkun jaon P jakopisteen z koordinaatti z_j kuuluu välin Q_i koordinaattivälille j. Näiden välien mittojen summa on korkeintaan

$$s \operatorname{diam}(I)^{n-1} \|P^*\|,$$

missä s on jaon P jakovälien lukumäärä. Tästä seuraa normin määritelmän nojalla yläsummille

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} M_i \mu(Q_i) \leq Ms \operatorname{diam}(I)^{n-1} \|P^*\| \tag{3.7}$$

ja vastaavasti alasummille

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} m_i \mu(Q_i) \geq -Ms \operatorname{diam}(I)^{n-1} \|P^*\|. \tag{3.8}$$

Tästä seuraa

$$\sum_{i\in\mathcal{C}}(M_i - m_i)\mu(Q_i) \leq 2sM\,\mathrm{diam}(I)^{n-1}\|P^*\|. \tag{3.9}$$

Indekseille $i \notin \mathcal{C}$ väli Q_i sisältyy kokonaan johonkin jaon P jakoväliin, mistä seuraa

$$\sum_{i\notin\mathcal{C}}(M_i - m_i)\mu(Q_i) \leq U(f, P') - L(f, P'). \tag{3.10}$$

Tässä jako P' sisältää sekä jaon P^* että jaon P jakopisteet eli jako P' on niiden yhteinen tihennys ja saadaan tihennyslemman 2.3 epäyhtälöiden avulla

$$\sum_{i\notin\mathcal{C}}(M_i - m_i)\mu(Q_i) \leq U(f, P) - L(f, P).$$

Yhdistämällä (3.9) ja (3.10) saadaan

$$U(f, P^*) - L(f, P^*) \leq U(f, P) - L(f, P) + 2sM\,\mathrm{diam}(I)^{n-1}\|P^*\|.$$

[3][6] □

Lause 3.7 (Darboux'n summan suppeneminen). *Olkoon n-ulotteinen väli I ja oletetaan, että funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on integroituva. Olkoon jono $\{P_m\}$ välin I jakokokoelma. Jos*

$$\lim_{m\to\infty} \|P_m\| = 0, \tag{3.11}$$

niin $\{P_m\}$ on Arkhimedeen kokoelma funktiolle $f : I \to \mathbb{R}$ ja siksi

$$\lim_{m\to\infty} L(f, P_m) = \int_I f \tag{3.12}$$

ja

$$\lim_{m\to\infty} U(f, P_m) = \int_I f. [3] \tag{3.13}$$

Todistus. Oletetaan, että funktio f on integroituva välillä I. Olkoon $\{P_m\}$ mikä tahansa välin I jakokokoelma, jolle pätee (3.11). Osoitetaan, että tällöin pätee (3.4). Valitaan suppenemisen määritelmän nojalla $\epsilon > 0$ ja osoitetaan, että on olemassa indeksi N siten, että

$$0 \leq U(f, P_m) - L(f, P_m) < \epsilon \tag{3.14}$$

jos $m \geq N$. Koska $\frac{\epsilon}{2} > 0$, lemman 3.5 nojalla voidaan valita välin I jako P siten, että

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Olkoon s jakopisteiden lukumäärä jaossa P ja $M \geq 0$ siten, että

$$-M \leq f(x) \leq M$$

kaikille $x \in I$. Lemman 3.6 nojalla voidaan korvata jako P^* jaolla P_m ja jokaiselle indeksille m pätee

$$U(f, P_m) - L(f, P_m) \leq U(f, P) - L(f, P) + E_m,$$

missä $E_m = 2sM \operatorname{diam}(I)^{n-1} \|P_m\|$. Niinpä jokaiselle indeksille $m \geq N$ pätee

$$\begin{aligned} 0 \leq U(f, P_m) - L(f, P_m) &= [U(f, P) - L(f, P)] + E_m \\ &< \frac{\epsilon}{2} + [2sM \operatorname{diam}(I)^{n-1} \|P_m\|]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Oletuksen mukaan

$$\lim_{m \to \infty} \|P_m\| = 0.$$

Koska $2s$, M, $\operatorname{diam}(I)^{n-1}$ ja n ovat vakioita, saadaan

$$\lim_{m \to \infty} [2sM \operatorname{diam}(I)^{n-1} \|P_m\|] = 0.$$

Niinpä voidaan valita indeksi N siten, että

$$0 \leq 2sM \operatorname{diam}(I)^{n-1} \|P_m\| < \frac{\epsilon}{2}$$

kaikille $m \geq N$. Yhtälön (3.15) avulla myös epäyhtälö (3.14) pätee kaikilla indekseillä $m \geq N$. Niinpä jakokokoelma $\{P_m\}$ on Arkhimedeen jakokokoelma välille I ja Arkhimedes-Riemann lauseen 3.2 nojalla yhtälöt (3.12) ja (3.13) pätevät. $\square$

Seuraavassa lauseessa sivutaan Riemannin summien suppenemista ja voidaan todeta, että tulos on sama kuin Darboux'n summien suppenemisella.

Lause 3.8 (Riemannin summan suppeneminen). *Oletetaan, että funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on integroituva. Jokaiselle luonnolliselle luvulle m, olkoon P_m n-ulotteisen välin I jako ja olkoon $R(f, P_m)$ vastaava Riemannin summa. Jos*

$$\lim_{m \to \infty} \|P_m\| = 0,$$

niin

$$\lim_{m \to \infty} R(f, P_m, Z_m) = \int_I f,$$

missä Z_m on valitut pisteet $z_1, z_2, ..., z_M$ jaosta P.

Todistus. Kaikilla indekseillä m pätee

$$L(f, P_m) \leq R(f, P_m, Z_m) \leq U(f, P_m).$$

Darboux'n summien suppenemisen lauseen mukaan

$$\lim_{m \to \infty} L(f, P_m) = \int_I f$$

ja

$$\lim_{m \to \infty} U(f, P_m) = \int_I f.$$

Niinpä saadaan

$$\int_I f = \lim_{m \to \infty} L(f, P_m) \leq \lim_{m \to \infty} R(f, P_m, Z_m) \leq \lim_{m \to \infty} U(f, P_m) = \int_I f.$$

Suppiloperiaatteen nojalla väite pätee. $\square$

4 Funktion jatkuvuus ja integroituvuus

Tässä luvussa osoitetaan, että jatkuva funktio on integroituva kompaktilla välillä. Määritellään ensin funktion jatkuvuus kahdella tavalla.

Epsilon-delta -määritelmä jatkuvuudelle:

Määritelmä 4.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ ja funktio $f : I \to \mathbb{R}^m$. Funktio f on jatkuva pisteessä $x_0 \in I$, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

aina kun $x \in I$ ja $|x - x_0| < \delta$.[4]

Vastaava jatkuvuuden määritelmä raja-arvon avulla.

Määritelmä 4.2. Funktio on jatkuva kohdassa $x = x_0$, jos funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = x_0$, funktio on määritelty kyseisessä kohdassa ja funktion raja-arvo on sama kuin funktion arvo kohdassa $x = x_0$ eli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Seuraavaksi esitellään tasainen jatkuvuus. Jatkuvuuden määritelmässä δ saa riippua muuttujasta x. Tasaisen jatkuvuuden määritelmässä on sama δ joka kohdassa.

Lemma 4.3. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva kompaktilla välillä I. Jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa luku $\delta_\epsilon > 0$ siten, että*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

kun x ja x_0 kuuluvat välille I ja niille pätee $|x - x_0| < \delta_\epsilon$, toisin sanoen funktio f on tasaisesti jatkuva välillä I.

Seuraus 4.4. *Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio n-välillä. Tällöin funktiolla on minimi- ja maksimiarvo.*

Lause 4.5. *Jatkuva funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on kompaktilla n-ulotteisella välillä integroituva.[3]*

Tämä lause perustuu jatkuvan funktion perustuloksiin, että jatkuvalla funktiolla on kompaktilla välillä minimi- ja maksimiarvo ja funktio on tasaisesti jatkuva. Seurauksen 4.4 ja lemman 4.3 avulla voidaan laajentaa lause koskemaan myös n-välejä.

Lemma 4.6. *Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$ jatkuva n-ulotteisella kompaktilla välillä I. Olkoon P välin I jako. Tällöin on olemassa välin I pisteet u ja v, jotka ovat jaon P samalla jakovälillä ja joille pätee*

$$0 \leq U(f, P) - L(f, P) \leq [f(u) - f(v)]\mu(I).$$

Todistus. Olkoon $J \subset I$ väli jaossa P eli jako P koostuu väleistä $I_1, I_2, ..., I_N$. Funktio f on jatkuva, joten seurauksen 4.4 nojalla funktio saavuttaa minimi- ja maksimiarvonsa välillä J. Tämä tarkoittaa, että välillä J on pisteet $u(J)$ ja $v(J)$ siten, että

$$f(v(J)) = m(f, J) = \inf\{f(x) : x \in J\}$$

ja

$$f(u(J)) = M(f, J) = \sup\{f(x) : x \in J\}.$$

Koska jaossa P on äärellinen määrä n-välejä, voidaan valita väli J^* jaosta P siten, että

$$M(f, J^*) - m(f, J^*) = \max_{k=1,2,...,N} [M(f, I_k) - m(f, I_k)]$$

ja määritellään $u = u(J^*)$ ja $v = v(J^*)$. Tällöin saadaan, että

$$M(f, J) - m(f, J) \leq M(f, J^*) - m(f, J^*) = f(u) - f(v)$$

kaikille $J \in P$. Siksi pätee

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{k=1}^{N} [M(I_k) - m(I_k)]\mu(I_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} [f(u) - f(v)]\mu(I_k) \\ &= [f(u) - f(v)] \sum_{k=1}^{N} \mu(I_k) \\ &= [f(u) - f(v)]\mu(I). \end{aligned}$$

□

Lause 4.7. *Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$ jatkuva n-ulotteisella välillä I. Tällöin funktio f on integroituva välillä I.*

Todistus. Käytetään Arkhimedes-Riemann lausetta. Olkoon $\{P_k\}$ välin I jakokokoelma siten, että

$$\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0.$$

Näytetään, että jono $\{P_k\}$ on funktion f Arkhimedeen jakokokoelma n-ulotteisella välillä I. Lemman 4.6 nojalla voidaan valita jokaiselle indeksille k jaon P_k saman jakovälin pisteet u_k ja v_k, joille pätee

$$0 \leq U(f, P_k) - L(f, P_k) \leq [f(u_k) - f(v_k)]\mu(I). \tag{4.1}$$

Koska u_k ja v_k kuuluvat jollekin jaon P_k välille, saadaan epäyhtälö

$$\operatorname{dist}(u_k, v_k) \leq \|P_k\|.$$

Pisteiden u_k ja v_k etäisyys on siis korkeintaan jakovälin halkaisijan maksimiarvon suuruinen. Raja-arvon ja epäyhtälön nojalla $\{u_k\}$ ja $\{v_k\}$ ovat jonoja n-ulotteisella välillä I, joille pätee

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(u_k, v_k) = 0.$$

Lemman 4.3 nojalla jatkuva funktio on n-ulotteisella välillä tasaisesti jatkuva. Tasaisesti jatkuvien funktioiden arvot pisteissä lähestyvät toisiaan, kun pisteet lähestyvät toisiaan. Niinpä saadaan

$$\lim_{k\to\infty} [f(u_k) - f(v_k)] = 0.$$

Kun yhdistetään tämä raja-arvo ja (4.1) saadaan epäyhtälö

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} U(f, P_k) - L(f, P_k) \leq \lim_{k\to\infty} [f(u_k) - f(v_k)]\mu(I) = 0.$$

Niinpä jono $\{P_k\}$ on Arkhimedeen jakokokoelma välillä I. Arkhimedes-Riemann lauseen nojalla funktio f on tällöin integroituva välillä I. [3] $\square$

Lause 4.8. *Olkoon funktio f määritelty ja rajoitettu kompaktilla välillä $I \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin funktio f on integroituva välillä I jos ja vain jos funktion epäjatkuvuuskohtien joukon mitta on nolla.*

Todistus sivuutetaan. Todistus löytyy lähteestä [2], tarkemmin se on lauseen 7.48 todistus.

5 Jordan-mitalliset joukot

Jordan-mitallisten joukkojen avulla saadaan tutkittua moniulotteista Riemannin integraalia yleisemmissä alueissa, jotka eivät ole välejä. Jordan-mitallisuuden avulla alueista saadaan muodostettua välejä. Tämän takia tutustumme joukon reunan määritelmään ja funktion käyttäytymiseen reunalla. [2]

Määritelmä 5.1 (**Sisäpiste**). Piste $x \in A$ on joukon A sisäpiste, jos on olemassa $r > 0$ siten, että x-keskinen r-säteinen n-pallo $B(x, r) \subset A$. [5]

Määritelmä 5.2 (**Joukon reuna**). Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko. Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon S reunapiste jos jokainen x-keskinen n-pallo sisältää pisteen sekä joukosta S että joukon S komplementista eli joukosta $\mathbb{R}^n \setminus S$. Näiden kaikkien reunapisteiden kokoelmaa kutsutaan joukon S reunaksi ja sitä merkitään ∂S.[2]

Määritelmä 5.3. Olkoon S kompaktin välin $I \subset \mathbb{R}^n$ osajoukko. Jokaiselle välin I jaolle P määritellään välin osavälien mittojen summa $\underline{J}(P, S)$, jotka sisältävät vain joukon S sisäpisteitä, ja olkoon $\overline{J}(P, S)$ niiden jaon P osavälien mittojen summa, jotka sisältävät sisäpisteiden lisäksi joukon S reunapisteitä. Tällöin n-ulotteiset Jordanin sisä- ja ulkosisällöt joukolle S ovat

$$\underline{c}(S) = \sup\{\underline{J}(P, S) : P \in \mathcal{P}(I)\}$$

$$\overline{c}(S) = \inf\{\overline{J}(P, S) : P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

Joukko S on Jordan-mitallinen jos $\underline{c}(S) = \overline{c}(S)$. Tätä arvoa kutsutaan joukon S Jordanin sisällöksi, merkitään $c(S)$.

Joukolla S on nollasisältö, jos $\underline{c}(S) = \overline{c}(S) = 0$. Tällöin jokaisella $\epsilon > 0$ joukko S voidaan peittää äärellisellä määrällä välejä, joiden mittojen summa on $< \epsilon$. Jokainen joukko, joka on nollasisältöinen on myös nollamittainen, mutta ei toisinpäin.

Esimerkki 5.4. Tutkitaan rationaalilukuja välillä $I = [0, 1]$ eli olkoon $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Rationaalilukujen joukolla S ei ole sisäpisteitä, koska ei ole olemasssa sellaista väliä, joka sisältäisi pelkkiä rationaalilukuja. Niinpä kaikki välin $[0, 1]$ pisteet ovat reunapisteitä. Niinpä $\underline{J}(P, S) = 0$ kaikille $P \in \mathcal{P}(I)$ ja siten $\underline{c}(S) = 0$. Tarvitaan kaikki jaon $P \in \mathcal{P}(I)$ välit peittämään joukko S ja sen reuna ∂S eli suljettu väli $[0, 1]$. Niinpä niiden yhteismitta on vähintään yksi eli $\overline{J}(P, S) \geq 1$ kaikille $P \in \mathcal{P}(I)$ ja infimumin määritelmän mukaan saadaan ulkosisällöksi $\overline{c}(S) = 1$. Lopputulokseksi saadaan, että joukko S ei ole Jordan-mitallinen. Rationaalilukujen joukko on siis nollamittainen, mutta ei nollasisältöinen.

Jokainen kompakti väli Q on Jordan-mitallinen ja sen sisältö $c(Q)$ on yhtä suuri kuin sen mitta $\mu(Q)$. Jordanin sisältöä sanotaan kaksiulotteisessa tilanteessa alaksi $c(S)$ ja kolmiulotteisessa tilanteessa joukon S tilavuudeksi. Tässä tapauksessa $\underline{J}(P,S)$ ja $\overline{J}(P,S)$ arvioivat alaa joukon S sisä- ja ulkopuolella. Rajoitetulla joukolla on Jordanin sisältö jos ja vain jos reuna ei ole liian paksu.

Lause 5.5. *Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko ja merkitään sen reunaa ∂S. Tällöin*

$$\overline{c}(\partial S) = \overline{c}(S) - \underline{c}(S).$$

Joukko S on Jordan-mitallinen jos ja vain jos reunalla ∂S on nollasisältö.

Todistus. Olkoon I kompakti väli, joka sisältää joukon S ja reunan ∂S. Tällöin jokaiselle välin I jaolle P pätee

$$\overline{J}(P,\partial S) = \overline{J}(P,S) - \underline{J}(P,S).$$

Tästä johtuen

$$\overline{J}(P,\partial S) \geq \overline{c}(S) - \underline{c}(S)$$

ja

$$\overline{c}(\partial S) \geq \overline{c}(S) - \underline{c}(S).$$

Yhtäsuuruus on tosi kun todistetaan vielä epäyhtälö toiseen suuntaan. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan välin I jako P_1 siten, että pätee

$$\overline{J}(P_1,S) < \overline{c}(S) + \epsilon/2$$

ja jako P_2 siten, että

$$\underline{J}(P_2,S) > \underline{c}(S) - \epsilon/2.$$

Olkoon jako P, joka sisältää jakojen P_1 ja P_2 jakopisteet. Koska jaon tihentäminen kasvattaa sisäsummaa $\underline{J}$ ja pienentää ulkosummaa $\overline{J}$, saadaan

$$\overline{c}(\partial S) \leq \overline{J}(P,\partial S) = \overline{J}(P,S) - \underline{J}(P,S) \leq \overline{J}(P_1,S) - \underline{J}(P_2,S) \leq \overline{c}(S) - \underline{c}(S) + \epsilon.$$

Koska ϵ on mielivaltainen, saadaan

$$\overline{c}(\partial S) \leq \overline{c}(S) - \underline{c}(S).$$

Niinpä lauseen yhtäsuuruus pätee.[2] $\square$

6 Joukon Jordanin nollasisältö

Seuraavaksi esitellään vaihtoehtoinen määritelmä Jordanin nollasisällölle.

Määritelmä 6.1. Rajoitetulla osajoukolla $S \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan olevan Jordanin nollasisältö jos jokaisella $\epsilon > 0$ on äärellinen kokoelma $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, ..., I_m\}$ n-ulotteisia välejä, jotka peittävät joukon S ja näiden n-ulotteisten välien mittojen summa on alle ϵ. Toisin sanoen

$$S \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j$$

ja

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(I_j) < \epsilon.$$

Seuraavassa lauseessa 6.3 palataan funktion epäjatkuvuuden ja integroituvuuden yhteyteen Jordanin nollasisällön avulla. Esitellään kuitenkin ensin lause 6.2, sillä lause 6.3 on sen laajennus, koska välin reunalla on Jordanin nollasisältö.

Lause 6.2. *Olkoon n-väli $I \subset \mathbb{R}^n$. Olkoon rajoitettu funktio $f : I \to \mathbb{R}$ jatkuva välin I sisäpisteissä. Tällöin funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on integroituva.*

Lause 6.3. *Olkoon rajoitettu funktio $f : I \to \mathbb{R}$ välillä $I \subset \mathbb{R}^n$. Jos funktion $f : I \to \mathbb{R}$ epäjatkuvuuspisteiden joukolla on Jordanin nollasisältö, niin funktio f on integroituva välillä I.*

Todistus. Käytetään apuna Arkhimedes-Riemann lauseen 3.2 ja Lauseen 3.4 toista kohtaa. Olkoon $\epsilon > 0$. On olemassa välin I jako P siten, että ylä- ja alasumman erotus on $< \epsilon$. Koska funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on rajoitettu, voidaan valita funktion arvojen itseisarvoille yläraja kaikilla $x \in I$. Merkitään funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukkoa välillä I joukolla D. Joukolla D on oletuksen mukaan Jordanin nollasisältö. Voidaan valita äärellinen kokoelma $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, ..., I_m\} \subset I$ n-ulotteisia välejä, jotka peittävät joukon D ja joiden mittojen summa on $< \frac{\epsilon}{4M}$, missä M on mainittu yläraja.

Määritellään jokaiselle indeksille $1 \leq i \leq n$ yksiulotteinen jako P_i, niin että esimerkiksi P_1 koostuu kokoelman $\mathcal{F}$ välien x_1-suuntaisten koordinaattivälien päätepisteistä ja muut jaot vastaavasti. Olkoon $P = (P_1, P_2, ..., P_n)$. Jokainen kokoelman $\mathcal{F}$ n-väli on yhdiste jaon P n-väleistä. Jaetaan jako P niin, että niitä jakovälejä, jotka kuuluvat kokoelman $\mathcal{F}$ väliin merkitään $J_1^*, ..., J_l^*$ ja niitä, jotka eivät $J_1, ..., J_m$. Koska kokoelman $\mathcal{F}$ n-välien mittojen summa on $< \frac{\epsilon}{4M}$ eli

$$\sum_{i=1}^{l} \mu(J_i^*) < \frac{\epsilon}{4M}$$

ja valittiin yläraja M, saadaan

$$\sum_{i=1}^{l}[M(f,J_i^*)-m(f,J_i^*)]\mu(J^*) \le \sum_{i=1}^{l} 2M\cdot\mu(J^*) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Toisaalta, koska n-välien kokoelma $\{J_1^*,...,J_l^*\}$ peittää joukon D, jokaiselle indeksille $1 \le i \le m$ pätee, että funktio $f : J_i \to \mathbb{R}$ on jatkuva välin J_i sisäpisteissä. Niinpä lauseen 6.2 nojalla funktio $f : J_i \to \mathbb{R}$ on integroituva. Tällöin Arkhimedes-Riemann lauseen 3.2 ja Lauseen 3.4 toisen kohdan nojalla voidaan valita jako P_i väliltä J_i siten, että

$$U(f,P_i)-L(f,P_i) < \frac{\epsilon}{2m}.$$

Olkoon jako P^* jaon P sellainen tiehennys, joka antaa kaikille indekseille $1 \le i \le m$ välin J_i jaon P_i tihennyksen. Tällöin tihennyslemman 2.3 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} U(f,P^*)-L(f,P^*) &\le \sum_{i=1}^{l}[M(f,J_i^*)-m(f,J_i^*)]\mu(J^*) + \sum_{i=1}^{m}[U(f,P_i)-L(f,P_i)] \\ &< \frac{\epsilon}{2} + m\left[\frac{\epsilon}{2m}\right] = \epsilon. \end{aligned}$$

Niinpä funktio f on integroituva välillä I. □

7 Fubinin lause

Fubinin lauseen avulla moniulotteiset integraalit saadaan palautettua yksiulotteisiksi iteroiduiksi integraaleiksi. Iteroitujen integraalien järjestystä voidaan myös vaihtaa laskemisen helpottamiseksi. Iterointi tarkoittaa laskutoimituksen toistamista.

7.1 Fubinin lause tasossa

Lause 7.1 (Fubinin lause tasossa). *Oletetaan, että kahden muuttujan funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on integroituva, missä $I = [a, b] \times [c, d]$ on väli tasossa $\mathbb{R}^2$. Määritellään jokaiselle pisteelle x väliltä $[a, b]$ funktio $F_x : [c, d] \to \mathbb{R}$ siten, että $F_x(y) = f(x, y)$ jokaiselle y väliltä $[c, d]$. Oletetaan, että $F_x : [c, d] \to \mathbb{R}$ on integroituva kaikille $x \in [a, b]$ ja määritellään*

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{7.1}$$

Tällöin funktio $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ on integroituva, ja integraali välin I yli voidaan esittää kahden integraalin yhdistelmänä, joissa integroidaan muuttujien x ja y suhteen seuraavasti

$$\int_I f = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{7.2}$$

Todistus. Lauseen todistamista varten näytetään, että Darboux'n summien epäyhtälöt pätevät funktiolle $f : I \to \mathbb{R}$ ja $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ jokaiselle jaolle $P = (P_1, P_2)$ väliltä I.

$$U(f, P) \geq U(A, P_1) \geq L(A, P_1) \geq L(f, P). \tag{7.3}$$

Tässä P_1 on välin jako $[a, b]$ ja P_2 välin $[c, d]$ jako. Koska f on integroituva välillä I, voidaan Arkhimedes-Riemann lauseen 3.2 nojalla valita välille I Arkhimedeen jakokoelman jono $\{P_k\}$. Jokaiselle indeksille k on jako $P_k = (P_k^1, P_k^2)$. Epäyhtälöstä (7.3) seuraa, että jono $\{P_k^1\}$ on Arkhimedeen jakokokoelma funktiolle A välillä $[a, b]$. Funktio A on myös integroituva välillä $[a, b]$, joten Darboux'n summien jakoa tihennetään, niiden arvot suppenenevat kohti funktion integraalin arvoa. Niinpä Integraali voidaan iteroida.

Osoitetaan, että epäyhtälö pitää paikkansa. Olkoon $P = (P^1, P^2)$ välin I jako, siten että $P^1 = \{x_0, ..., x_m\}$ on välin $[a, b]$ jako ja $P^2 = \{y_1, ..., y_l\}$ on välin $[c, d]$ jako. Näistä saadaan indeksiparit $\{ij\}$, missä $1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq l$. Määritellään

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\},$$

ja

$$m_i = \inf\{A(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Tällöin Darboux'n summan määritelmän nojalla saadaan alasummaksi

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

ja x-suunnassa

$$L(A, P_1) = \sum_{i=1}^{m} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Kiinnitetään indeksi i ja kiinnitetään sitten x väliltä $[x_{i-1}, x_i]$. Tällöin jokaiselle indeksille j pätee

$$f(x, y) \geq m_{ij}$$

kaikilla pisteillä y väliltä $[y_{j-1}, y_j]$. Funktioiden integraalien monotonisuusominaisuuden avulla saadaan

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy \geq m_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Käydään jokainen indeksi j läpi ja summataan integraalit yhteen, niin saadaan funktion additiivisuudesta johtuen

$$\int_{c}^{d} f(x, y)\, dy \geq \sum_{j=1}^{l} m_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Koska tämä epäyhtälö pätee jokaiselle pisteelle $x \in [x_{i-1}, x_i]$, infimumin m_i määritelmästä seuraa, että

$$m_i \geq \sum_{j=1}^{l} m_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Kerrotaan tämä epäyhtälö ensin termillä $(x_i - x_{i-1})$ ja summataan yli kaikkien indeksien i. Tällöin saadaan epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^{m} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

eli

$$L(A, P_1) \geq L(f, P).$$

Samalla tavalla saadaan todistettua vastaava yläsummille. Yläsummien tapauksessa epäyhtälöt kääntyvät toisin päin. Väitteen keskimmäinen epäyhtälö on aina tosi, koska alasummassa välin pituutta kerrotaan pienemmällä tai yhtäsuurella luvulla kuin yläsummassa. Niinpä epäyhtälö (7.3) on todistettu. Jakoa tihennettäessä suppiloperiaatteen mukaisesti summien arvot lähestyvät kohti samaa arvoa. Niinpä A on integroituva ja sen arvo on sama kuin funktion f integraalin arvo. [3] $\square$

Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että

$$\int_I f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

kunhan sopivat oletukset ovat voimassa eli oletetaan, että funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on integroituva. Määritellään jokaiselle pisteelle y väliltä $[a,b]$ funktio $F_y : [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että $F_y(x) = f(x,y)$ jokaiselle x väliltä $[a,b]$. Oletetaan, että $F_y : [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva kaikille $y \in [c,d]$ ja määritellään

$$A(x) = \int_a^b f(x,y)\, dy. \tag{7.4}$$

Tällöin saadaan

$$\int_I f = \int_c^d A(x)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy. \tag{7.5}$$

Olkoon D alue, jota rajoittavat funktiot $y = c(x)$ ja $y = d(x)$ sekä vakiofunktiot $x = a$ ja $x = b$. missä $c : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $d : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia funktioita ja $c(x) \leq d(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Integraalin avulla voidaan tutkia tilavuutta, joka jää näiden funktioiden, xy-tason ja pinnan $z = f(x,y)$ sisälle. Siivun ala on

$$A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy.$$

Kaksinkertainen integraali saadaan muodostettua summaamalla tällaisten siivujen tilavuuksia. Siivujen paksuus on dx välillä $x = a$ ja $x = b$ eli

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Kun kyseessä on y-yksinkertainen tilanne, ovat nämä siivut x-akselia vastaan kohtisuorassa. Tällöin sisäintegraalissa x on vakio.

Määritelmä 7.2. Alue xy-tasossa on y-yksinkertainen, jos se on rajoitettu kahdella pystysuoralla suoralla $x = a$ ja $x = b$ ja kahdella jatkuvalla kuvaajaalla $y = c(x)$ ja $y = d(x)$. Suorat ovat y-akselin suuntaiset.

Lause 7.3. *Jos $f(x,y)$ on jatkuva rajoitetulla y-yksinkertaisella alueella D, jossa $a \leq x \leq b$ ja $c(x) \leq y \leq d(x)$, niin kaksinkertainen integraali on*

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Esimerkki 7.4. Fubinin lauseen 7.1 nojalla seuraavista integraaleista saadaan sama tulos vaikka integrointijärjestystä vaihdetaan. Integrointirajat muutetaan järjestyksen mukaan sopiviksi. Uloimman intgraalin rajat ovat vakioita.

$$\int_0^3 \left[\int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y)dx \right] dy = \int_1^2 \left[\int_0^{4-x^2} (x+y)\, dy \right] dx = \frac{241}{60}.[3]$$

Ensimmäisen integraalin laskeminen.

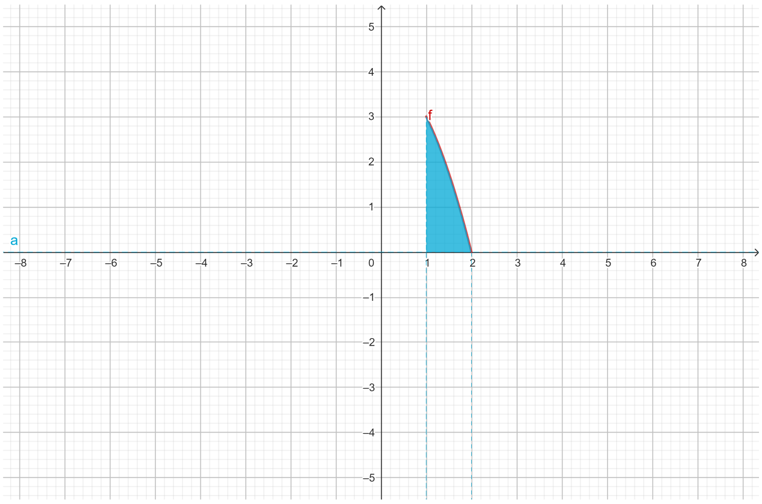
$$\begin{aligned}
&\int_0^3 \left[\int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y)\, dx \right] dy \\
&= \int_0^3 \Bigg|_1^{\sqrt{4-y}} \frac{1}{2}x^2 + xy\, dy \\
&= \int_0^3 -\frac{3}{2}y + \sqrt{4-y}\, y + \frac{3}{2}\, dy
\end{aligned}$$

Päädytään ongelmalliseen tilanteeseen, joten kokeillaan vaihtaa integrointijärjestystä. Jälkimmäisen integraalin laskeminen on helpompaa, koska siinä ei tule integroitavaksi neliöjuurta.

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \left[\int_0^{4-x^2} (x+y)\, dy \right] dx \\
&= \int_1^2 \Bigg|_0^{4-y^2} xy + \frac{1}{2}y^2\, dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 8\, dx \\
&= \Bigg|_1^2 \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 8x \\
&= \frac{241}{60}.
\end{aligned}$$

Kuvassa 7.1 on esimerkin integraalin integrointialue. Nyt integrointialueena on D, jossa $1 \leq x \leq 2$ ja $c(x) = 0 \leq y \leq d(x) = 4 - x^2$. Voidaan myös merkitä

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}.$$



Kuva 7.1: Esimerkin integrointialue

7.2 Fubinin lause n-ulotteisessa tilanteessa

Aiemmin käsiteltiin kaksiulotteinen tilanne, jossa $m = 1$ ja $k = 1$ eli $\mathbb{R}^2$.

Lause 7.5. *Oletetaan, että funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on integroituva, kun*

$$I = I_x \times I_y = I_1 \times ... \times I_m \times I_{m+1} \times ... \times I_{m+k}$$

on n-väli avaruudessa $\mathbb{R}^{m+k}$ eli

$$I = I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k.$$

Jokaiselle pisteelle $x \in I_x$ määritellään funktio $F_x : I_y \to \mathbb{R}$

$$F_x(y) = f(x, y)$$

kun $y \in I_y$. Oletetaan, että funktio $F_x : I_y \to \mathbb{R}$ on integroituva kaikille $x \in I_x$ ja määritellään

$$A(x) = \int_{I_y} f(x, y)\, dy.$$

Tällöin funktio $A : I_x \to \mathbb{R}$ on integroituva ja

$$\int_I f = \int_{I_x} A(x)dx = \int_{I_x} \left[\int_{I_y} f(x, y)dy \right] dx.[3]$$

Todistus. Olkoon P välin I jako, joka muodostuu n-väleistä Q_{ij}. Tällöin väli $I \subset \mathbb{R}^{m+k}$ saadaan yhdisteenä väleistä Q_{ij} eli

$$I = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} Q_{ij},$$

missä

$$Q_{ij} = Q_i \times Q_j \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k.$$

Darboux'n summien perusteella tiedetään, että

$$L(f, P) \leq \int_I f \leq U(f, P).$$

Lauseen todistamiseksi siis riittää osoittaa, että

$$\int_I f = \int_{I_x} A(x)\, dx = \int_{I_x} \left[\int_{I_y} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Tiedetään, että integraalin arvo on yksikäsitteinen luku Darboux'n ala- ja yläsummien $L(f, P)$ ja $U(f, P)$ väliltä jokaisella jaolla P. Osoitetaan, että tämä pätee myös iteroidulle integraalille eli yhtälön oikealle puolelle. Olkoon

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\},$$

ja

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\}.$$

Tiedetään, että funktion arvoille alueessa Q_{ij} pätee

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$$

kaikilla $y \in Q_j \subset I_y \subset \mathbb{R}^k$ eli funktion arvo on infimumin ja supremumin välillä. Integroidaan muuttujan y suhteen yli välin Q_j ja saadaan

$$m_{ij}\mu(Q_j) \leq \int_{Q_j} f(x, y)\, dy \leq M_{ij}\mu(Q_j).$$

Kiinnitetään x ja käydään läpi kaikki indeksit j summaamalla integraalien arvot. Tällöin saadaan

$$\sum_{j=1}^{l} m_{ij}\mu(Q_j) \leq \sum_{j=1}^{l} \int_{Q_j} f(x, y)\, dy \leq \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\mu(Q_j),$$

koska jokaisella indeksillä j epäyhtälö pätee, integraalin additiivisuuden nojalla epäyhtälö pätee myös summille. Nyt summaa integraaleista yli alueen Q_j tarkoittaa samaa kuin integraali yli alueen I_y

$$\sum_{j=1}^{l} m_{ij}\mu(Q_j) \leq \int_{I_y} f(x, y)\, dy \leq \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\mu(Q_j).$$

Tämä pitää paikkansa kaikille $x \in Q_i$. Integroidaan yli välin Q_i ja saadaan

$$\int_{Q_i} \sum_{j=1}^{l} m_{ij}\mu(Q_j)dx \leq \int_{Q_i} \left(\int_{I_y} f(x,y)\, dy \right) dx \leq \int_{Q_i} \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\mu(Q_j)dx.$$

Infimum ja supremum ovat muuttujan x suhteen vakioita, joten ne voidaan ottaa integraalin ulkopuolelle. Integraalin arvoksi tulee mitta $\mu(Q_{ij})$ ja saadaan epäyhtälö muotoon

$$\sum_{j=1}^{l} m_{ij}\mu(Q_{ij}) \leq \int_{Q_i} \left(\int_{I_y} f(x,y)\, dy \right) dx \leq \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\mu(Q_{ij}),$$

missä $\mu(Q_{ij}) = \mu_{m+k}(Q_{ij}) = \mu_m(Q_i)\mu_k(Q_j)$. Lasketaan yhteen yli kaikkien indeksien $i = 1, ..., k$ ja saadaan

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} m_{ij}\mu(Q_{ij}) \leq \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x,y)\, dy \right) dx \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\mu(Q_{ij}).$$

Voidaan merkitä

$$L(f,P) \leq \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x,y)\, dy \right) dx \leq U(f,P).$$

Niinpä saadaan, että myös iteroitu integraali on Darboux'n ala- ja yläsummien välillä. Arkhimedes-Riemann lauseen 3.2 ja suppiloperiaatteen nojalla saadaan, että

$$\int_I f = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

□

Fubinin lausetta voidaan soveltaa Cavalierin periaattessa.

Seuraus 7.6. *Jos kappaleiden pinta-alat ovat yhtä suuret samalla korkeudella joka kohdassa, niin myös kappaleiden tilavuudet ovat yhtä suuret.*

Tulos seuraa siitä, että voidaan tutkia tilavuutta ottamalla viipaleita V_t eli poikkileikkauksia, jolloin

$$\text{Tilavuus}\,(V) = \int_a^b Ala\,(V_t)\, dt,$$

missä $t \in [a,b]$. [1]

Esimerkki 7.7. Määritellään funktio $f : I \to \mathbb{R}$, missä $I = [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{jos } x \text{ on rationaaliluku} \\ 2y, \text{jos } x \text{ on irrationaaliluku.} \end{cases}$$

Jokaiselle pisteelle $x \in [0,1]$ pätee $\int_0^1 f(x,y)\,dy = 1$, joten

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy \right] dx = 1.$$

Osoitetaan, että funktio $f : I \to \mathbb{R}$ ei ole integroituva.

Todistus: Olkoon $P = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ välin $[0,1]$ jako. Jokaisella välillä $[x_{i-1}, x_i]$ on sekä rationaaliluku että irrationaaliluku, vaikka väli olisi kuinka pieni. Kun $x < 1/2$ funktion arvo on suurimmillaan $M_{ij} = 1$ ja pienimmillään $m_{ij} = 2y$. Kun taas $x \geq 1/2$ funktion arvot ovat $M_{ij} = 2y$ ja $m_{ij} = 1$. Tästä seuraa, että alaintegraali on erisuuri kuin yläintegraali, joten funktio $f : I \to \mathbb{R}$ ei ole integroituva.

8 Jordanin alueet

Rajoitetussa osajoukossa $D \subset \mathbb{R}^n$ määritellyn jatkuvan funktion nollajatkeen epäjatkuvuuspisteiden joukko sisältyy joukon D reunaan. Aiemmin osoitettiin, että rajoitettu funktio on integroituva n-ulotteisella välillä, jos sen epäjatkuvuuspisteillä on Jordanin nollasisältö.

Määritelmä 8.1. Osajoukko $D \subset \mathbb{R}^n$ on Jordanin alue, jos sen reunalla on Jordanin nollasisältö.

Aiemmin esitelty lause 1.9 on seuraavan lauseen erikoistapaus, koska jos joukko koostuu äärellisen monesta siististä käyrästä, on sillä nollasisältö.

Lause 8.2. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordanin alue ja olkoon funktio $f : D \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Jos funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukolla on Jordanin nollasisältö, niin funktio $f : D \to \mathbb{R}$ on integroituva.*

Todistus. Valitaan väli $I \subset \mathbb{R}^n$, joka sisältää alueen D. Osoitetaan, että funktion $f : D \to \mathbb{R}$ nollajatke $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$ on integroituva. Lauseen 6.3 nojalla nollajatke on integroituva jos sen epäjatkuvuuspisteiden joukolla on nollasisältö. Nollajatke on jatkuva jokaisessa joukon D sisäpisteessä, jossa funktio $f : D \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Tämä johtuu siitä, että jokaisen pisteen x lähellä on ympäristö, jossa nollajatke $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$ ja funktio $f : D \to \mathbb{R}$ saavat samat arvot. Toisaalta jokaisella joukon D ulkopisteellä $x \in I$ on lähellä ympäristö, jossa nollajatke saa arvo nolla. Niinpä $\hat{f}$ on jatkuva pisteessä x. Tästä seuraa, että nollajatkeen epäjatkuvuuspisteiden joukko sisältyy joukon D reunan ja funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukon yhdisteeseen. Oletuksen mukaan näillä molemmilla on Jordanin nollasisältö ja siten myös niiden yhdisteellä.[3] □

8.1 Jordanin alue n-ulotteisessa tilanteessa

Lause 8.3. *Olkoon Jordanin alueessa $K \subset \mathbb{R}^m$ jatkuvat ja rajoitetut funktiot $h : K \to \mathbb{R}$ ja $g : K \to \mathbb{R}$, joille pätee $h(x) \leq g(x)$ kaikille pisteille $x \in K$. Määritellään*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in K,\ h(x) \leq y \leq g(x)\},$$

missä $n = m + 1$. Olkoon funktio $f : D \to \mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitettu. Tällöin

$$\int_D f = \int_K \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{8.1}$$

Esitellään ensin lauseen todistamista varten tarvittava lemma.

Lemma 8.4. *Olkoon funktio $f : J \to \mathbb{R}$ integroituva funktio n-välillä J ja olkoon väli $I \subset \mathbb{R}^n$, joka sisältää välin J. Tällöin funktion f nollajatke $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$ välillä I on integroituva ja*

$$\int_I \hat{f} = \int_J f.$$

Lauseen 8.3 todistus. Joukko D on Jordanin alue, koska sen reuna koostuu kuvaajista, jotka ovat jatkuvia rajoitetulla välillä. Valitaan väli $I \subset \mathbb{R}^{m+1}$ siten, että väli $I = I_x \times I_y$ sisältää alueen D. Olkoon funktion f nollajatke $\hat{f}$, kuten määritelmässä 1.8. Lauseen 8.2 nojalla nollajatke $\hat{f}$ on integroituva. Nollajatke ei muuta integraalin arvoa, koska nollajatke 1.8 saa arvon nolla kun $x \in I \setminus D$. Niinpä lemman 8.4 nojalla saadaan

$$A(x) = \int_{I_y} \hat{f}(x, y)\, dy = \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy$$

kaikille $x \in K \subset I_x$. Yhtälö (8.1) seuraa Fubinin lauseesta n-ulotteisella välillä 7.5. $\square$

Viitteet

[1] Robert A. Adams ja Christopher Essex: *Calculus a complete course.* seventh edition, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, 2010.

[2] Tom M. Apostol: *Mathematical analysis.* second edition, Adisson-Wesley Publishing Company , 1974.

[3] Patrick M. Fitzpatrick: *Advanced calculus.* second edition, United States of America, 2006.

[4] Tero Kilpeläinen: *Vektorianalyysi.* luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2019.

[5] Juha Lehrbäck: *Mitta- ja integraaliteoria.* luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, syksy 2018.

[6] *Understanding Darboux sum comparison lemma.* math.stackexchange, julkaistu helmikuu 2017, viitattu 5.7.2023. https://math.stackexchange.com/questions/2124048/understanding-darboux-sum-comparison-lemma