JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Köydenvetopeli satunnaiskohinalla ja p-Laplacen yhtälö

Janne Taipalus

28. kesäkuuta 2023

Tekijä
Janne Taipalus

Otsikko
Köydenvetopeli satunnaiskohinalla ja p-Laplacen yhtälö (engl. Tug-of-war with random noise and the p-Laplace equation)

Tutkinto-ohjelma
Matematiikan maisteriohjelma

Päivämäärä	Sivumäärä
28. kesäkuuta 2023	59

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tutustumme köydenvetopeliin satunnaiskohinalla. Kyseinen peli on kahden pelaajan stokastinen peli, jossa kukin pelaaja yrittää saavuttaa alueen reunan sellaisesta kohdasta, joka on hänelle edullinen. Pelin lopuksi toinen pelaaja maksaa toiselle pelaajalle sen verran rahaa, kuin alueen reunalla määritelty funktio siinä kohdassa määrää.

Jokaisella kierroksella on täysin sattumasta kiinni, kumman pelaajan vuoro on päättää minne liikutaan ja lisäksi tässä on mukana satunnaiskohina, joka voi viedä pelaajat satunnaiseen pisteeseen. Pelaajien ottamien askelten pituus on oltava pienempää kuin $\varepsilon > 0$ ja samoin satunnaisen pisteen etäisyys nykyisestä pelitilanteesta on oltava pienempää kuin ε.

Kyseisen köydenvetopelin avulla määrittelemme (p, ε)-harmoniset funktiot jotka suppenevat p-harmoniseen funktioon, kun pelin askelpituus ε lähestyy nollaa. Todistaaksemme tämän suppenemisen meidän pitää osoittaa säännöllisyys lokaalisti ja alueen reunalla. Tutkielmassa annamme peliteoreettiset todistukset näille säännöllisyystuloksille.

Tutkielman alussa käymme läpi osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ja stokastiikan osalta tarvittavia käsitteitä ja tuloksia. Tutkielmassa käsittelemme peliteoreettista (tunnetaan myös normalisoituna) p-Laplacen yhtälöä. Määritelläksemme tämän tutustumme ensin Laplacen yhtälöön ja ∞-Laplacen yhtälöön. Käsittelemme tässä tutkielmassa viskositeettiratkaisuja ja käy ilmi, että peliteoreettisen p-Laplacen yhtälön ja p-Laplacen yhtälön viskositeettiratkaisut ovat samat. Joten voimme tutkia p-Laplacen yhtälön ratkaisuja tutkimalla peliteoreettisen p-Laplacen yhtälön ratkaisuja.

Stokastiikasta tarvitsemme erityisesti pysähtymisaikaa ja valinnaisen pysähtymisen lausetta. Näitä varten tutustumme moniin stokastiikan peruskäsitteisiin ja eräisiin stokastisiin prosesseihin, joita kutsutaan martingaaleiksi.

Avainsanat: p-Laplacen yhtälö, köydenvetopeli satunnaiskohinalla, (p, ε)-harmoniset funktiot, p-harmoniset funktiot, viskositeettiratkaisut.

Sisällys

Johdanto

Vähän yli 15 vuotta sitten Yuval Peres, Oded Schramm, Scott Sheffield ja David Wilson huomasivat yhteyden osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\Delta_\infty u = 0$$

ratkaisujen (tunnetaan ∞-harmonisina funktioina) ja köydenvetopelin välillä [20]. Pian tämän jälkeen Yuval Peres ja Scott Sheffield julkaisivat artikkelin, jossa he käsittelivät yhteyttä osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\Delta_p u = 0, \text{ missä } p \in (1, \infty),$$

ratkaisujen ja satunnaiskohinalla varustetun köydenvetopelin välillä [21]. Kyseisen yhtälön ratkaisut tunnetaan p-harmonisina funktioina.

Tässä tutkielmassa käytämme pääsääntöisenä lähteenä Mikko Parviaisen artikkelia [19] ja tutustumme köydenvetopeliin satunnaiskohinalla. Kyseessä on kahden pelaajan stokastinen peli, jota pelataan rajoitetussa alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Oletamme tässä tutkielmassa, että $n \geq 2$. Pelin alussa kiinnitetään $\varepsilon > 0$, mikä kertoo pelin askelpituuden. Pelaajat saavat ottaa vain pelin askelpituutta lyhyempiä askelia. Pelin jokaisen kierroksen alussa heitetään painotettua kolikkoa. Jos tulos on kruuna, pelaajat pelaavat köydenvetoa. Jos tulos on klaava, astutaan satunnaiseen pisteeseen, joka on myös alle askelpituuden päässä nykypisteestä. Peli päättyy, kun saavutamme alueen Ω reunan. Alueen Ω reunalla on määritelty reaaliarvoinen funktio, jota kutsumme voittofunktioksi. Pelin päätyttyä pelaaja II maksaa pelaajalle I voittofunktion arvon verran.

Kun olemme määritelleet köydenvetopelin satunnaiskohinalla, tutustumme (p, ε)-harmonisiin funktioihin. Pelin alue, voittofunktio ja askelpituus määrittävät yksikäsitteisen (p, ε)-harmonisen funktion. Näiden funktioiden olemassaolo ja yksikäsitteisyys todistetaan kappaleessa 3.2. Olemassaolo saadaan todistettua iteraatiolla. Määrittelemme alueen Ω, voittofunktion ja askelpituuden avulla funktion ja operaattorin, jolla operoida kyseistä funktiota. Muodostamme näiden avulla iteratiivisesti funktiojonon, joka suppenee (p, ε)-harmoniseen funktioon. Yksikäsitteisyyden saamme osoittamalla, että kahden (p, ε)-harmonisen funktion arvot voivat erota toisistaan korkeintaan sen verran, kuin niiden reuna-arvot eroavat toisistaan.

Lopuksi osoitamme, että (p, ε)-harmonisilla funktioilla u_ε voidaan approksimoida p-harmonisia funktioita u. Kun pelin askelpituus lähestyy nollaa, niin $u_\varepsilon \to u$. Tämä saadaan todistettua käyttämällä eräänlaista variaatiota Arzelá-Ascolin lauseesta. Tarvitsemme Arzelá-Ascolin käyttöä varten kuitenkin säännöllisyystuloksia. Reunasäännöllisyyden todistamme alaluvussa 4.2

ja lokaalin Lipschitz-säännöllisyyden alaluvussa 5.2. Annamme peliteoreettiset todistukset molemmille tuloksille. Lipschitz-säännöllisyyden todistuksessa valitsemme vuorotellen molemmille pelaajille kumoamisstrategian, jossa toinen pelaajista pyrkii kumoamaan vastapelaajan kaikki askeleet.

Käytämme tässä tutkielmassa käsittelemäämme köydentopeliin liittyvissä määritelmissä tuloksissa lähteinä artikkeleita [19], [17], [16] ja [15], joita lukemalla aiheeseen voi tutustua lisää. Aiheesta voi lukea myös kirjoista [13] ja [3]. Peliteoriasta yleisemmin kerrotaan kirjassa [6].

Käsittelemässämme aiheessa tarvitaan esitietoja erityisesti osittaisdifferentiaaliyhtälöihin ja stokastiikkaan liittyen. Osittaisdifferentiaaliyhtälöistä tarvitsemme p-Laplacen yhtälöä ja viskositeettiratkaisujen käsitettä. Kun puhumme ratkaisuista luvun alussa esiteltyihin yhtälöihin, tarkoitamme viskositeettiratkaisuja. Nämä ovat eräänlaisia klassisen ratkaisun yleistyksiä. Kun selvitetään, onko jokin funktio viskositeettiratkaisu ongelmaan, käytämme C^2-funktioita, jotka koskettavat mahdollista ratkaisufunktiota täsmälleen yhdessä pisteessä, ja tutkimme, päteekö tietty epäyhtälö tässä tapauksessa. Epäyhtälö riippuu siitä, koskemmeko ratkaisuehdokasta ylhäältä vai alhaalta. Jos kaikki tällaiset C^2-funktiot toteuttavat kyseisen epäyhtälön, kyseessä on viskositeettiratkaisu.

Viskositeettiratkaisujen käsitteen esittelivät Michael G. Grandal ja Pierre-Louis Lions vuoden 1983 artikkelissaan [4]. Tällöin niitä sovellettiin Hamilton-Jacobi-yhtälöihin, jotka ovat eräänlaisia 1. asteen osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Viskositeettiratkaisujen käsitettä on myöhemmin laajennettu koskemaan myös 2. asteen elliptisiä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Tästä voi lukea Hitoshi Ishiin ja Pierre-Louis Lionsin artikkelista [8]. Viskositeettiratkaisuista voi lukea lisää esimerkiksi Nikos Katzourakisin kirjasta [10] ja Shigeaki Koiken kirjasta [12].

Stokastiikasta tarvitsemme erityisesti pysähtymisajan käsitettä ja valinnaisen pysähtymisen lausetta, joka liittyy martingaaleihin. Käytämme valinnaisen pysähtymisen lausetta muun muassa Lipschitz-säännöllisyyden todistuksessa ja kun todistamme, että pienin voitto, minkä Pelaaja I voi itselleen taata, ja pienin häviö, minkä Pelaaja II voi itselleen taata, ovat yhtäsuuret. Stokastiikkaan ja stokastisiin prosesseihin voi tutustua lisää lukemalla esimerkiksi Sathamangalam Varadhanin kirjaa [26], David Williamsin kirjaa [27] tai Daniel Stroockin kirjaa [24].

Taustatiedot

Tutkielmaa seuratakseen on hyvä osata mittateorian perusteet yleisissä mitta-avaruuksissa. Näistä voi lukea esimerkiksi Walter Rudinin kirjasta [22] tai Terence Taon kirjasta [25]. Diskreettien stokastisten prosessien perusteiden osaaminen ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden perusteiden tunteminen erityisesti viskositeettiteoriaa ja p-Laplacen yhtälöä koskien, missä $p \in (2, \infty)$ ovat hyödyksi mutta eivät välttämättömiä, sillä näistä kerrotaan luvussa 1. Diskreeteistä stokastisista prosesseista voi lukea kirjoista [26] ja [27]. Viskositeettiteoriasta voi lukea kirjoista [12] ja [10], p-Laplacen yhtälöön voi tutustua lukemalla kirjaa [14].

1 Taustaa

Tässä luvussa käymme läpi määritelmiä ja tuloksia, joita tarvitsemme tässä tutkielmassa. Määritelmät ja tulokset on jaettu kahteen alalukuun, osittaisdifferentiaaliyhtälöihin 1.1 ja stokastiikkaan 1.2

1.1 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Käytämme lähteenä tässä alaluvussa Mikko Parviaisen artikkelia [19] sekä Lawrence Evansin kirjaa [5] ja Peter Lindqvistin kirjaa [14]. Lisää tietoa viskositeettiratkaisuista on muun muassa Nikos Katzourakisin kirjassa [10].

Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa tarvitsemme monesti heikompia ratkaisun käsitteitä Sillä vahvoja, klassisessa mielessä derivoituvia ratkaisuja ei välttämättä aina ole. Käsitellään tästä esimerkki tähän alkuun. Käsitellään yhtälöä

$$\Delta_\infty u = 0.$$

Operaattori Δ_∞ tunnetaan nimellä ∞-Laplacen operaattori. Määrittelelemme myöhemmin tässä alaluvussa, mitä tämä tarkoittaa. Kerrotaan kuitenkin tässä vaiheessa, että yllä oleva yhtälö on 2. asteen osittaisdifferentiaaliyhtälö. Tällöin sen klassiset ratkaisut ovat C^2 funktioita. Sanotaan, että haluamme ratkaista ongelman

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0, & \text{joukossa } \Omega, \\ u \equiv b, & \text{joukossa } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tällöin ainut klassinen ratkaisu on $u \equiv b$ kaikkialla. Tämä johtuu siitä, että ylempi yhtälö pätee täsmälleen silloin, kun u on vakio tai $Du \neq 0$ joukossa Ω (tapauksen $\mathbb{R}^2$ todistus Gunnar Aronssonin artikkelissa [1] ja tapauksen $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ todistus Yu Yifengin artikkelissa [28]). Täten tähän ongelmaan ei ole olemassa epätriviaalia (eli vakiofunktiosta poikkeavaa) klassista ratkaisua, mutta tähän on olemassa heikompi ratkaisu, jota kutsutaan viskositeettiratkaisuksi. Ratkaisun olemassaolo todistettu kirjassa [10] sivuilla 101-102. Laajempi ratkaisujen käsite mahdollistaa tämän osittaisdifferentiaaliyhtälön tutkimisen.

Määritellään tähän väliin Laplacen operaattori ja harmoniset funktiot. Tämän jälkeen siirrymme p-Laplacen operaattoriin ja yhtälöön, jolloin tarvitsemme taas heikompaa ratkaisujen käsitettä.

Määritelmä 1.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu ja yhtenäinen joukko. Kutsumme funktioita $u \in C^2(\Omega)$, jotka toteuttavat toisen asteen osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_i)^2} = 0 \quad \text{joukossa } \Omega,$$

harmonisiksi funktioiksi.

Näin määriteltyä operaattoria Δ kutsutaan *Laplacen operaattoriksi*. Määritelmän 1.1 yhtälö on neliöllisen potentiaalienergian funktionaalin

$$I_2(u) := \int_\Omega |Du|^2 \, dx$$

Euler-Lagrange yhtälö. Kyseistä yhtälöä kutsutaan *Laplacen yhtälöksi*.

Luonnollinen yleistys yllä olevalle integraalille on p-potentiaalienergian funktionaali

$$I_p(u) := \int_\Omega |Du|^p \, dx.$$

Tätä funktiota vastaa Euler-Lagrange yhtälö

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = 0.$$

Kyseisen yhtälön avulla määrittelemme *p-Laplacen operaattorin* seuraavasti.

Määritelmä 1.2. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu ja yhtenäinen joukko, $p \in (2, \infty)$ ja $u \in C^2(\Omega)$. Kutsumme operaattoria

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du),$$

p-Laplacen operaattoriksi.

Rajoitumme tässä tutkielmassa tilanteeseen $p \in (2, \infty)$, toisin kuin johdannossa mainitussa artikkelissa [21], jossa Peres ja Sheffield käsittelivät tilannetta $p \in (1, \infty)$.

Jotta voimme puhua p-Laplacen yhtälöstä meidän on määriteltävä yleisempi ratkaisun käsite. Kuten Peter Lindqvist mainitsee artikkelissaan [14] sivulla 5, klassiset ratkaisut eivät riitä p-Laplacen yhtälön käsittelemiseen. Mainittakoon, että viskositeettiratkaisujen lisäksi on olemassa niin kutsuttuja distributiivisia ratkaisuja (ratkaisuja, jotka määritellään heikkojen derivaattojen avulla), jotka ovat myös heikkoja ratkaisuja. Käsittelemme tässä tutkielmassa kuitenkin viskositeettiratkaisuja.[1]

[1] Petri Juutinen, Peter Lindqvist ja Juan Manfredi todistivat vuonna 2001, että distributiiviset ratkaisut ja viskositeettiratkaisut p-Laplacen yhtälölle vastaavat toisiaan [9].

Sanomme, että funktio $\varphi \in C^2(\Omega)$ koskettaa funktiota $u \in C(\Omega)$ alhaalta päin pisteessä $x \in \Omega$, jos

$$\varphi(x) = u(x) \text{ ja } \varphi(y) < u(y) \text{ kaikilla } y \in \Omega \setminus \{x\}.$$

Vastaavasti funktio φ koskettaa funktiota u ylhäältä päin pisteessä x, jos

$$\varphi(x) = u(x) \text{ ja } \varphi(y) > u(y) \text{ kaikilla } y \in \Omega \setminus \{x\}.$$

Määritelmä 1.3. Olkoon $u \in C(\Omega)$. Funktio u on *viskositeettiyläratkaisu* p-Laplacen yhtälölle jos missä tahansa pisteessä $x \in \Omega$ kaikille funktiota u alhaalta päin koskeville funktioille $\varphi \in C^2(\Omega)$ pätee

$$\Delta_p \varphi(x) \leq 0.$$

Vastaavasti sanotaan, että funktio u on *viskositeettialaratkaisu* p-Laplacen yhtälölle, jos missä tahansa pisteessä $x \in \Omega$ kaikille funktiota u ylhäältä päin koskeville funktioille $\varphi \in C^2(\Omega)$ pätee

$$\Delta_p \varphi(x) \geq 0.$$

Sanomme, että funktio u on *viskositeettiratkaisu* p-Laplacen yhtälölle, jos se on sekä viskositeettiyläratkaisu että viskositeettialaratkaisu kyseiselle yhtälölle.

Viskositeettiratkaisujen etuna on, että voimme hyödyntää testifunktioita, jotka ovat C^2-funktioita. Näin ollen lähtökohtaisesti p-Laplacen yhtälön viskositeettiratkaisujen ei tarvitse olla derivoituvia. Käy kuitenkin ilmi, että ne ovat $C^{1,\alpha}$-funktioita [14].

Seuraava lause löytyy artikkelista [9].

Lause 1.4. *Olkoot $g \in C(\partial\Omega)$ ja $u \in C(\overline{\Omega})$ viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälöön siten, että $u \equiv g$ joukossa $\partial\Omega$. Tällöin funktio u on yksikäsitteinen.*

Huomautus 1.5. Kunhan $|Du| \neq 0$, voimme kirjoittaa p-Laplacen operaattorin myös seuraavissa muodoissa

$$\begin{aligned}
\Delta_p u &= \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) \\
&= |Du|^{p-2} \left(\Delta u + (p-2)|Du|^{-2} \langle D^2 u Du, Du \rangle \right) \\
&= |Du|^{p-2} \left(\Delta u + (p-2)|Du|^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} u_{x_i} u_{x_j} \right).
\end{aligned}$$

Määritelläksemme peliteoreettisen p-Laplacen operaattorin tarvitsemme ∞-Laplacen operaattorin Δ_∞. Saamme määriteltyä sen p-Laplacen avulla. Aloitamme muokkaamalla p-Laplacen yhtälöä. Huomautuksen 1.5 nojalla voimme esittää yhtälön

$$\Delta_p u = 0$$

muodossa

$$|Du|^{p-2}\Delta u + (p-2)|Du|^{p-4}\langle D^2uDu, Du\rangle = 0.$$

Seuraavaksi jaamme tämän yhtälön puolittain termillä $(p-2)|Du|^{p-4}$ ja saamme

$$\frac{|Du|^2}{p-2}\Delta u + \langle D^2uDu, Du\rangle = 0.$$

Nyt kun $p \to \infty$, saamme formaalisti yhtälön

$$\langle D^2uDu, Du\rangle = 0,$$

joten määrittelemme

$$\Delta_\infty u := \langle D^2uDu, Du\rangle.$$

Määritellään peliteoreettinen (normalisoitu) ∞-Laplacen operaattori $\Delta_\infty^N u$ lausekkeella

$$\Delta_\infty^N u := |Du|^{-2}\langle D^2uDu, Du\rangle = \left\langle D^2u\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|}\right\rangle.$$

Tämän avulla saamme määriteltyä peliteoreettisen p-Laplacen operaattorin.

Määritelmä 1.6. Olkoon $p \in (2, \infty)$ ja $u \in \{v \in C^2(\Omega) : Dv \neq 0\}$. Kutsumme operaattoria

$$\Delta_p^N u := \Delta u + (p-2)\Delta_\infty^N u$$

peliteoreettiseksi (tunnetaan myös normalisoituna) p-Laplacen operaattoriksi.

Peliteoreettiselle p-Laplacen operaattorille Δ_p^N voimme määritellä peliteoreettisen p-Laplacen yhtälön

$$\Delta_p^N u = 0.$$

Kun puhumme tämän yhtälön ratkaisuista, puhumme jälleen viskositeettiratkaisuista, joille annamme seuraavan määritelmän.

Määritelmä 1.7. Olkoon $u \in C(\Omega)$. Funktio u on viskositeettiyläratkaisu peliteoreettiselle p-Laplacen yhtälölle, jos missä tahansa pisteessä $x \in \Omega$ kaikille funktiota u alhaalta päin koskeville funktioille

$$\varphi \in \{\phi \in C^2(\Omega) : D\phi(x) \neq 0\}$$

pätee

$$\Delta_p^N \varphi(x) \leq 0.$$

Vastaavasti sanotaan, että funktio u on viskositeettialaratkaisu peliteoreettiselle p-Laplacen yhtälölle, jos missä tahansa pisteessä $x \in \Omega$ kaikille funktiota u ylhäältä päin koskeville funktioille

$$\varphi \in \{\phi \in C^2(\Omega) : D\phi(x) \neq 0\}$$

pätee

$$\Delta_p^N \varphi(x) \geq 0.$$

Sanomme, että funktio u on viskositeettiratkaisu peliteoreettiselle p-Laplacen yhtälölle, jos se on sekä viskositeettiyläratkaisu että viskositeettialaratkaisu kyseiselle yhtälölle.

Peliteoreettisen p-Laplacen yhtälön ratkaisut voitaisiin määritellä puolijatkuvilla kuorilla (eng. envelopes) artikkelin [7] tapaan. Tämä määritelmä on kuitenkin artikkelissa [11] sivulla 10 näytetty yhtäpitäväksi antamamme määritelmän kanssa.

Seuraava lause on hahmoteltu artikkelin [17] sivulla 3.

Lause 1.8. *Olkoon $u \in C(\Omega)$, tällöin*

$$\Delta_p u = 0 \quad \textit{pätee viskositeettimielessä}$$

jos ja vain jos

$$\Delta_p^N u = 0 \quad \textit{pätee viskositeettimielessä.}$$

1.2 Stokastiikka

Tässä luvussa käsiteltävät asiat löytyvät muun muassa Varadhanin kirjasta [26], Stroockin kirjasta [24] ja Williamsin kirjasta [27].

Määritelmä 1.9. Olkoot $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \subset 2^E$ σ-algebra ja $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ mitta, jolle pätee $\mathbb{P}(E) = 1$.

- Tällaista mittaa kutsutaan *todennäköisyysmitaksi*,

- mitta-avaruutta $(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *todennäköisyysavaruudeksi* ja
- mitallisia funktioita $X\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *satunnaismuuttujiksi.*

Merkitsemme todennäköisyysavaruudessa integroituvien funktioiden kokoelmaa merkinnällä $\mathcal{L}(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Stokastinen prosessi on satunnaismuuttujien $X_j\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ jono $X := (X_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Tässä tutkielmassa käsittelemämme köydenvetopeli ja todistuksissa käytetyt stokastiset prosessit ovat diskreettiaikaisia eli ajanhetket voidaan indeksoida luonnollisilla luvuilla, toisin kuin jatkuvat stokastiset prosessit, joiden ajanhetket indeksoidaan jollain välillä $I \subset \mathbb{R}$. Tästä eteenpäin oletamme aina, että stokastinen prosessi on diskreettiaikainen.

Stokastisiin prosesseihin liittyy läheisesti *filtraation* käsite.

Määritelmä 1.10. Olkoot $(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ kokoelma σ-algebroja siten, että

$$F_j \subset \mathcal{F}_{j+1} \subset \mathcal{F} \quad \text{kaikilla } j \in \mathbb{N}.$$

Tällöin kokoelmaa $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ kutsutaan filtraatioksi.

Käytetään merkintää $\sigma(A)$ merkitsemään joukon A virittämää σ-algebraa. Määritellään

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_j\right)$$

Filtraation määrittelyyn ei tarvita stokastista prosessia, mutta stokastisten prosessien kanssa on luonnollista määritellä sellainen filtraatio, että jokaista prosessin satunnaismuuttujaa kohden filtraatiosta löytyy σ-algebra, jonka suhteen satunnaismuuttuja on mitallinen. Stokastista prosessia X, jossa jokainen satunnaismuuttuja X_j on $\mathcal{F}_j$-mitallinen, kutsutaan $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$-*adaptoiduksi.*

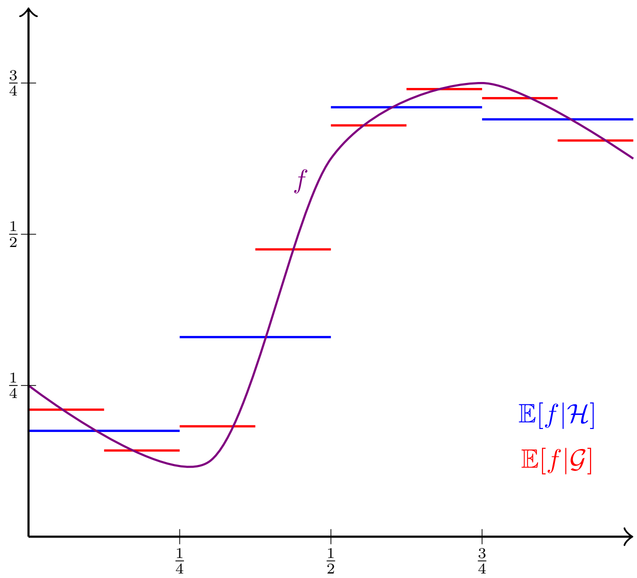
Määritelmä 1.11. Olkoot $(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus, $f \in \mathcal{L}(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra. Tällöin todennäköisyysavaruudessa $(E, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ integroituvaa funktiota $g \in \mathcal{L}(E, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, jolle pätee

$$\int_B f \, d\mathbb{P} = \int_B g \, d\mathbb{P} \quad \text{kaikilla } B \in \mathcal{G},$$

kutsutaan funktion f *ehdolliseksi odotusarvoksi* σ-algebran $\mathcal{G}$ suhteen. Täl-

löin käytetään merkintää
$$g = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}).$$

Funktion f ehdollinen odotusarvo σ-algebran $\mathcal{G}$ suhteen tarkoittaa funktiota, joka on määritelty funktion f odotusarvoksi, jokaisessa σ-algebran joukossa $B \in \mathcal{G}$. Voimme ajatella tätä odotusarvoa joukossa B tietona, joka meillä on funktiosta tässä joukossa. Jos mikään joukon B aito osajoukko ei kuulu kokoelmaan $\mathcal{G}$, niin tällöin emme pysty sanomaan funktiosta f mitään näissä joukoissa. Tästä esimerkki kuvassa 1.1.



Kuva 1.1: Kuvassa funktion $f \in \mathcal{L}([0,1], \mathcal{F}, m)$ graafi ja sen eräiden ehdollisten odotusarvojen graafit. Ehdolliset odotusarvot on otettu σ-algebrojen suhteen, joille pätee $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Tässä m on Lebesguen mitta ja $\mathcal{F}$ Lebesgue-mitallisten joukkojen σ-algebra.

Ehdollisen todennäköisyyden olemassaolo saadaan Radon-Nikodym-derivaatalla. Tämä on tehty kirjassa [26] sivulla 79. Muotoilemme ensin Radon-Nikodym-lauseen ja sen jälkeen käytämme sitä olemassaolon ja yksikäsitteisyyden todistamiseen.

Lause 1.12 (Radon-Nikodym)**.** *Olkoot* $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ *ja* $\nu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$*. Jos siitä, että* $\mu(A) = 0$ *seuraa, että myös* $\nu(A) = 0$ *kaikilla* $A \in \mathcal{F}$*, niin on olemassa yksikäsitteinen funktio* $f \in \mathcal{L}(E, \mathcal{F}, \mu)$ *siten, että*

$$\nu(B) = \int_B f \, d\mu \quad \textit{kaikilla } B \in \mathcal{F}.$$

Todistus. Varadhanin kirjassa [26] sivulla 77. □

Lemma 1.13. *Määritelmän 1.11 funktio g on olemassa ja melkein varmasti yksikäsitteinen.*

Todistus. Todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ on lähtökohtaisesti määritelty σ-algebralta $\mathcal{F}$. Kuitenkin jotta saamme todistettua väitteen, meidän on rajattava se σ-algebraan $\mathcal{G}$. Käytämme samaa merkintää $\mathbb{P}$ tälle rajoittumalle.

Olkoon $\nu\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$,

$$\nu(B) := \int_B f \, d\mathbb{P}.$$

Tällöin $\nu(B)$ on mitta, sillä integraali on numeroituvasti additiivinen ja integraali tyhjän joukon yli on 0. Nyt Radon-Nikodym-lauseen nojalla on olemassa yksikäsitteinen satunnaismuuttuja $g \in \mathcal{L}(E, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ siten, että

$$\int_B f \, d\mathbb{P} = \nu(B) = \int_B g \, d\mathbb{P} \quad \text{kaikilla } B \in \mathcal{G}.$$ □

Huomautus 1.14. Jos jokin asia pätee joukossa $A \subset E$ ja joukolle A pätee $\mathbb{P}(A) = 1$, sanomme, että kyseinen asia pätee *melkein varmasti*. Käytämme tästä lyhennettä m.v. Tätä voi verrata mittateoriasta tuttuun tapaan ilmaista, että asia pätee melkein kaikkialla, sillä tässä tapauksessa $\mathbb{P}(E \setminus A) = 0$.

Osoitamme seuraavaksi muutaman kätevän ominaisuuden ehdolliseen todennäköisyyteen liittyen. Seuraamme väitteiden *4. ja 5.* todistuksissa kirjan [27] sivuja 88-89 ja väitteen *6.* todistuksessa kirjan [24] sivuja 197-198. Väitteet *2. ja 3.* on todettu kirjassa [2] sivulla 358 ja väite *1.* todettu kirjassa [27] sivulla 85, näiden todistaminen on kuitenkin helppoa.

Propositio 1.15. *Olkoot $(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus, $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-algebroja, $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\mathcal{F}$-mitallisia funktioita siten, että $f_1 \leq f_2$ ja $g \in \mathcal{L}(E, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ $\mathcal{G}$-mitallinen funktio. Lisäksi olkoot $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin seuraavat ominaisuudet pätevät:*

1. $E[f|\{\emptyset, E\}] = \mathbb{E}f$ *m.v.*
2. *(Lineaarisuus)* $\mathbb{E}[a_1 f_1 + a_2 f_2|\mathcal{G}] = a_1\mathbb{E}[f_1|\mathcal{G}] + a_2\mathbb{E}[f_2|\mathcal{G}]$ *m.v.*
3. *(Monotonisuus) Jos $f_1 \leq f_2$ melkein varmasti, niin* $\mathbb{E}[f_1|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[f_2|\mathcal{G}]$ *m.v.*
4. $\mathbb{E}(g|\mathcal{G}) = g$ *m.v.*
5. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{H})$ *m.v.*
6. $\mathbb{E}(gf|\mathcal{G}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ *m.v.*

Todistus.

1. Pätee, sillä

$$\int_\emptyset f\, d\mathbb{P} = 0 = \int_\emptyset \mathbb{E} f\, d\mathbb{P} \quad \text{ja} \quad \int_E f\, \mathbb{P} = \mathbb{E} f = \int_E \mathbb{E} f\, d\mathbb{P}$$

pätevät melkein varmasti.

2. Olkoon $B \in \mathcal{G}$. Tällöin ehdollisen odotusarvon määritelmän ja integraalin lineaarisuuden nojalla saamme

$$\int_B \mathbb{E}[a_1 f_1 + a_2 f_2 | \mathcal{G}]\, d\mathbb{P} = \int_B a_1 f_1 + a_2 f_2\, d\mathbb{P}$$

$$= a_1 \int_B f_1\, d\mathbb{P} + a_2 \int_B f_2\, d\mathbb{P} = a_1 \int_B \mathbb{E}[f_1|\mathcal{G}]\, d\mathbb{P} + a_2 \int_B \mathbb{E}[f_2|\mathcal{G}]\, d\mathbb{P}$$

$$\int_B a_1 \mathbb{E}[f_1|\mathcal{G}] + a_2 \mathbb{E}[f_2|\mathcal{G}]\, d\mathbb{P},$$

joten

$$\int_B \mathbb{E}[a_1 f_1 + a_2 f_2 | \mathcal{G}]\, d\mathbb{P} = \int_B a_1 f_1 + a_2 f_2\, d\mathbb{P}$$

$$= \int_B a_1 \mathbb{E}[f_1|\mathcal{G}] + a_2 \mathbb{E}[f_2|\mathcal{G}]\, d\mathbb{P}.$$

Täten lemman 1.13 nojalla

$$\mathbb{E}[a_1 f_1 + a_2 f_2 | \mathcal{G}] = a_1 \mathbb{E}[f_1|\mathcal{G}] + a_2 \mathbb{E}[f_2|\mathcal{G}] \quad \text{m.v.}$$

3. Antiteesi: On olemassa $B \in \mathcal{G}$ siten, että $\mathbb{P}(B) > 0$ ja

$$\int_B f_1\, d\mathbb{P} > \int_B f_2\, d\mathbb{P},$$

mikä on ristiriita integraalin monotonisuuden kanssa.

4. Seuraa suoraan määritelmästä.

5. $\mathbb{E}(f|\mathcal{H})$ on määritelmän nojalla $\mathcal{H}$-mitallinen ja siten myös $\mathcal{G}$ mitallinen, joten ominaisuuden *2.* nojalla $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ m.v. Olkoon $A \in \mathcal{H}$. Tällöin suoraan ehdollisen todennäköisyyden määritelmällä saadaan

$$\int_A \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H})\, d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} = \int_A f\, d\mathbb{P},$$

joten $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{H})$ m.v.

6. Voimme olettaa funktiot ei-negatiivisiksi, sillä funktiot voidaan aina esittää positiivi- ja negatiiviosiensa erotuksena ja näihin voidaan hyödyntää integraalin lineaarisuutta. Aloitetaan käsittelemällä yksinkertainen funktio, sillä mittateoriasta muistamme, että voimme arvioida ei-negatiivista mitallista funktiota kasvavalla jonolla ei-negatiivisia yksinkertaisia funktioita (tulos löytyy esimerkiksi kirjasta [22], sivulta 15).

   Olkoot $h\colon E \to [0,\infty]$, $h = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, missä $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$, $A_i \in \mathcal{G}$ kaikilla i ja joukot A_i erillisiä. Olkoon $A \in \mathcal{G}$, tällöin m.v.

$$\begin{aligned}\int_A hf\, d\mathbb{P} &= \sum_{i=1}^n a_i \int_A \chi_{A_i} f\, d\mathbb{P} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_{A_i \cap A} f\, d\mathbb{P} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_{A_i \cap A} \mathbb{E}(f|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} \\ &= \int_A \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \right) \mathbb{E}(f|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} \\ &= \int_A h\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\, d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

   Olkoon nyt $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ kasvava jono ei-negatiivisia yksinkertaisia funktioita siten, että $g_j \to g$ kun $j \to \infty$. Tällöin m.v.

$$g\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \lim_{j\to\infty} g_j \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \overset{\substack{\text{äskeinen}\\ \text{tulos}}}{=} \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}(g_j f|\mathcal{G}) \overset{\substack{\text{monotoninen}\\ \text{konvergenssi}}}{=} \mathbb{E}(gf|\mathcal{G}). \quad \square$$

Määritelmä 1.16. Olkoon $M := (M_j)_{j\in\mathbb{N}}$, missä $M_j \in \mathcal{L}(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kaikilla j. Lisäksi olkoon $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ filtraatio. Prosessi M on *martingaali*, jos M on $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$-adaptoitu ja

$$\mathbb{E}(M_{j+1}|\mathcal{F}_j) = M_j \quad \text{m.v. kaikilla } j \in \mathbb{N}.$$

Prosessi M on *alamartingaali*, jos M on $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$-adaptoitu ja

$$\mathbb{E}(M_{j+1}|\mathcal{F}_j) \geq M_j \quad \text{m.v. kaikilla } j \in \mathbb{N},$$

vastaavasti M on *ylämartingaali*, jos pätee

$$\mathbb{E}(M_{j+1}|\mathcal{F}_n) \leq M_j \quad \text{m.v. kaikilla } j \in \mathbb{N}.$$

Martingaali on keskeinen käsite stokastististen prosessien parissa. Jos prosessi on martingaali, ajanhetkellä j seuraavan ajanhetken $j+1$ ehdollinen odotusarvo on sama kuin nykyinen arvo riippumatta aiemmista arvoista. Alamartingaali taas antaa alarajan kyseiselle ehdolliselle odotusarvolle ja ylämartingaali ylärajan.

Tässä tutkielmassa tarvitsemme martingaalin käsitettä lähinnä valinnaisen pysähtymisen lauseen käyttämiseen. Kyseinen lause todistetaan tämän alaluvun lopussa. Määritellään seuraavaksi pysähtymisaika.

Määritelmä 1.17. Olkoon $(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus, joka on varustettu filtraatiolla $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Satunnaismuuttujaa $\tau\colon E \to \mathbb{N}_\infty$ kutsutaan *pysähtymisajaksi*, jos

$$\tau^{-1}(j) = \{x \in E : \tau(x) = j\} \in \mathcal{F}_j \quad \text{kaikilla } j \in \mathbb{N}_\infty.$$

Intuitiivisesti pysähtymisaika kertoo, että pystymme sillä hetkellä saatavilla olevalla tiedolla tekemään päätöksen, siitä pysäytämmekö prosessin vaiko emme.

Propositio 1.18. *Olkoon meillä pysähtymisajat τ_1, τ_2. Tällöin*

$$\tau_1 \wedge \tau_2 := \min\{\tau_1, \tau_2\}$$

on myös pysähtymisaika.

Todistus. Käytämme seuraavassa päättelyssä lyhyyden vuoksi joukon Z komplementille merkintää Z^C. Huomataan, että kaikilla $j \in \mathbb{N}_\infty$ pätee

$$\{\min\{\tau_1, \tau_2\} = j\} = \{\tau_1 = j, \tau_2 \geq j\} \cup \{\tau_1 \geq j, \tau_2 = j\}$$

$$= \Big(\{\tau_1 = j\} \cap \{\tau < j\}^C\Big) \cup \Big(\{\tau_1 < j\}^C \cap \{\tau_2 = j\}\Big) \in \mathcal{F}_j,$$

joten $\tau_1 \wedge \tau_2$ on pysähtymisaika. □

Jokaista pysähtymisaikaa τ vastaa σ-algebra $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}$, missä

$$\mathcal{F}_\tau := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq j\} \in \mathcal{F}_j\}.$$

Tämän σ-algebran voi ajatella tapahtumina, joita koskeviin kysymyksiin osaamme vastata kyllä tai ei, jos pysähdymme tarkkailemaan prosessia ajanhetkellä τ. Seuraavan proposition väitteet löytyvät harjoitustehtävinä kirjan [26] sivuilta 117-118.

Propositio 1.19. *Olkoon τ pysähtymisaika ja $\mathcal{F}_\tau$ määritelty kuten yllä. Tällöin seuraavat pätevät:*

1. *Jos on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $\tau \equiv k$, niin tällöin $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_k$,*
2. *kokoelma $\mathcal{F}_\tau$ on σ-algebra,*
3. *Jos on olemassa pysähtymisajat τ_1, τ_2 siten, että $\tau_1 \leq \tau_2$, niin tällöin $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$,*
4. *pysähtymisaika τ on $\mathcal{F}_\tau$-mitallinen.*

Todistus. 1. Kun $\tau \equiv k$ on vakio, huomaamme, että $\{\tau = j\} = \emptyset$ aina, kun $j \neq k$, ja

$$\{A \in \mathcal{F} : A \cap \emptyset \in \mathcal{F}_j\} = \mathcal{F}.$$

Täten

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\tau &= \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq j\} \in \mathcal{F}_j\} \\
&= \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \left\{ A \in \mathcal{F} : A \cap \left(\bigcup_{i=0}^{j} \{\tau = i\} \right) \in \mathcal{F}_j \right\} \\
&= \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k\} \\
&= \{A \in \mathcal{F} : A \cap E \in \mathcal{F}_k\} \\
&= \{A \in \mathcal{F} : A \in \mathcal{F}_k\} \\
&= \mathcal{F}_k.
\end{aligned}$$

2. Tarkistetaan, että $\mathcal{F}_\tau$ täyttää σ-algebralta vaadittavat ominaisuudet.

- $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$, sillä $\emptyset \in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.
- Olkoon $A \in \mathcal{F}_\tau$. Käytämme taas lyhyyden vuoksi joukon Z komplementista merkintää Z^C. Tällöin

$$A^C \cap \{\tau \leq j\} = \{\tau \leq j\} \cap (A \cap \{\tau \leq j\})^C \in \mathcal{F}_j.$$

- Olkoot $A_i \in \mathcal{F}_\tau$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cap \{\tau \leq j\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap \{\tau \leq j\}),$$

nyt koska $A_i \cap \{\tau \leq j\} \in \mathcal{F}_j$ kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$, niin myös

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cap \{\tau \leq j\} \in \mathcal{F}_j$$

kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$ ja täten $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}_\tau$.

3. Olkoon $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, tällöin

$$A \cap \{\tau_1 \leq j\} \in \mathcal{F}_j.$$

Huomataan, että

$$\{\tau_2 \leq j\} \subset \{\tau_1 \leq j\},$$

sillä kaikille $x \in E$, joilla pätee $\tau_2(x) \leq j$, pätee myös $\tau_1(x) \leq j$. Täten

$$A \cap \{\tau_2 \leq j\} = A \cap \{\tau_2 \leq j\} \cap \{\tau_1 \leq j\} \in \mathcal{F}_j,$$

joten

$$\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}.$$

4. Olkoon $k \in \mathbb{N}$, tällöin

$$\{\tau \leq k\} \cap \{\tau \leq j\} = \{\tau \leq j \wedge k\} \in \mathcal{F}_{j \wedge k} \subset \mathcal{F}_j$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Täten $\{\tau \leq k\} \in \mathcal{F}_\tau$ millä tahansa $k \in \mathbb{N}$, täten τ on $\mathcal{F}_\tau$-mitallinen. $\square$

Propositio 1.20. *Olkoon $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ $(\mathcal{F}_j)_{j \in \mathbb{N}}$-adaptoitu prosessi ja $\tau \colon E \to \mathbb{N}_\infty$ pysähtymisaika. Tällöin X_τ on $\mathcal{F}_\tau$-mitallinen.*

Todistus. Täytyy siis osoittaa, että kaikille $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pätee

$$\{x \in E : X_{\tau(x)}(x) \in B\} \in \mathcal{F}_\tau.$$

Tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että

$$\{x \in E : X_{\tau(x)}(x) \in B\} \cap \tau^{-1}(j) = \{x \in E : X_j(x) \in B\} \cap \tau^{-1}(j) \in \mathcal{F}_j,$$

mikä on totta. $\square$

Tarvitsemme Doobin erittelylausetta valinnaisen pysähtymisen lauseen todistukseen, joten todistamme sen seuraavaksi. Seuraavat kaksi lausetta löytyvät kirjasta [26] (sivu 115).

Lause 1.21 (Doobin erittelylause alamartingaalille)**.** *Prosessi $Y = (Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ on alamartingaali jos ja vain jos kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee*

$$Y_j = M_j + A_j,$$

missä $A = (A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ja $M = (M_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ovat prosesseja, joille pätee seuraavat ominaisuudet:

1. $0 = A_0 \leq A_1 \leq \ldots$ *m.v.*

2. A_{j+1} *on* $\mathcal{F}_j$*-mitallinen kaikilla* $j \in \mathbb{N}$.

3. M *on martingaali.*

Prosessille A *pätee myös, että se on melkein varmasti yksikäsitteinen. Toisin sanoen jos meillä olisi toinenkin prosessi* A'*, joka toteuttaa yllä olevat ehdot, niin pätee* $\mathbb{P}(A_j = A'_j) = 1$ *kaikilla* $j \in \mathbb{N}$.

Todistus. Olkoon $Y_j \in \mathcal{L}(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\mathcal{F}_j$-mitallinen kaikilla $j \in \mathbb{N}$, siten, että

$$Y_j = M_j + A_j,$$

missä M ja A ovat lauseessa kuvailtuja prosesseja. Tällöin

$$\mathbb{E}[Y_{j+1}|\mathcal{F}_j] = \mathbb{E}[M_{j+1} + A_{j+1}|\mathcal{F}_j] = M_j + A_{j+1} \geq M_j + A_j = Y_j, \tag{1.1}$$

joten Y on alamartingaali.

Sitten teemme todistuksen toiseen suuntaan ja oletamme, että Y on alamartingaali. Osoitamme, että tällöin on olemassa halutunlaiset prosessit A ja M. Määrittelemme prosessin A siten, että

$$A_0 \equiv 0 \quad \text{ja} \quad A_{j+1} := \mathbb{E}[Y_{j+1}|\mathcal{F}_j] - Y_j + A_j.$$

Nyt saamme prosessin A kasvavuuden suoraan siitä, että Y on alamartingaali.

Halutun mitallisuuden saamme induktiivisesti, sillä $\mathbb{E}[Y_{j+1}|\mathcal{F}_j]$ ja Y_j ovat aina $\mathcal{F}_j$-mitallisia, joten meidän tarvitsee keskittyä vain termiin A_j. Huomaamme, että A_1 on $\mathcal{F}_0$-mitallinen. Teemme sitten induktio-oletuksen. Oletamme, että väite pätee tapauksessa $j \in \mathbb{N}$, tällöin

$$A_{j+1} = \mathbb{E}[Y_{j+1}|\mathcal{F}_j] - Y_j + A_j$$

on $\mathcal{F}_j$-mitallinen, sillä kaksi ensimmäistä termiä ovat $\mathcal{F}_j$-mitallisia ja viimeinen termi on induktio-oletuksen nojalla F_{j-1}-mitallinen ja siten myös $\mathcal{F}_j$-mitallinen.

Sitten osoitamme, että prosessi M on melkein varmasti martingaali. Tämän saamme päättelemällä, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{j+1}|\mathcal{F}_j] &= \mathbb{E}[Y_{j+1} - A_{n+1}|\mathcal{F}_j] \\
&= \mathbb{E}[Y_{j+1} - \mathbb{E}[Y_{j+1}|\mathcal{F}_j] + Y_j - A_j|\mathcal{F}_j] \\
&= \mathbb{E}[Y_{j+1}|\mathcal{F}_j] - \mathbb{E}[Y_{j+1}|\mathcal{F}_j] + \mathbb{E}[Y_j|\mathcal{F}_j] - \mathbb{E}[A_j|\mathcal{F}_j] \\
&= \mathbb{E}[Y_j|\mathcal{F}_j] - \mathbb{E}[A_j|\mathcal{F}_j] \\
&= Y_j - A_j \\
&= M_j
\end{aligned}$$

pätee.

Osoitamme lopuksi vielä, että prosessi A on melkein varmasti yksikäsitteinen. Olkoon meillä prosessit A ja A'. Tällöin päättelyn 1.1 nojalla kaikilla $j \in \mathbb{N}$ melkein varmasti pätee

$$A_{j+1} = \mathbb{E}[Y_{j+1}|\mathcal{F}_j] - Y_j + A_j$$

ja

$$A'_{j+1} = \mathbb{E}[Y_{j+1}|\mathcal{F}_j] - Y_j + A'_j,$$

joten koska $A_0 \equiv 0 \equiv A'_0$, niin saamme induktiivisesti, että prosessit ovat melkein varmasti samat. □

Lause 1.22 (Doobin erittelylause ylämartingaalille)**.** *Muutoin sama kuin lause 1.21, mutta Y on ylämartingaali ja A on m.v. vähenevä prosessi ei-positiivisia satunnaismuuttujia.*

Todistus. Kuin lauseen 1.21 todistus, pienin muutoksin. □

Nyt pääsemme todistamaan valinnaisen pysähtymisen lauseen. Seuraamme todistuksessa kirjan [26] sivua 118.

Lause 1.23 (Valinnaisen pysähtymisen lause)**.** *Olkoon $Y = (Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ martingaali filtraation $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suhteen ja olkoot $\tau_1, \tau_2 \colon E \to \mathbb{N}_\infty$ pysähtymisaikoja siten, että*

$$\tau_1(x) \leq \tau_2(x) \leq T_0 < \infty$$

kaikilla $x \in E$, jollekin $T_0 > 0$. Tällöin

$$\mathbb{E}(Y_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = Y_{\tau_1} \quad m.v.$$

Jos Y on alamartingaali, niin m.v. pätee

$$\mathbb{E}(Y_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) \geq Y_{\tau_1}.$$

Vastaavasti jos Y on ylämartingaali, niin m.v. pätee

$$\mathbb{E}(Y_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) \leq Y_{\tau_1}.$$

Todistus. Todistamme väitteen martingaaleille. Ala- ja ylämartingaalitapaukset saadaan samantapaisesti, hyödyntämällä ensin Doobin erittelylauseita.

Koska $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2} \subset \mathcal{F}_{T_0}$, niin riittää näyttää, että mille tahansa martingaalille Y pätee

$$\mathbb{E}[Y_k|\mathcal{F}_\tau] = Y_\tau,$$

missä τ on pysähtymisaika, joka on rajoitettu luonnollisella luvulla k.

Olkoon $A \in \mathcal{F}_\tau$. Merkitään $E_j := \{x \in E : \tau(x) = j\}$. Tällöin $E = \bigcup_{j=1}^k E_j$ ja joukot E_j ovat erillisiä. Lisäksi $A \cap E_j \subset \mathcal{F}_j$ kaikilla $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, joten proposition 1.15 nojalla

$$\int_{A\cap E_j} Y_k \, d\mathbb{P} = \int_{A\cap E_j} \mathbb{E}[Y_k|\mathcal{F}_j] \, d\mathbb{P} = \int_{A\cap E_j} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_k|\mathcal{F}_{j+1}]Y_k|\mathcal{F}_j] \, d\mathbb{P}.$$

Iteroimalla ominaisuutta niin kauan, kuin tarvitsee, ja käyttämällä sitten martingaaliominaisuutta saamme

$$\int_{A\cap E_j} Y_k \, d\mathbb{P} = \int_{A\cap E_j} Y_j \, d\mathbb{P} = \int_{A\cap E_j} Y_\tau \, d\mathbb{P}.$$

Integraalin additiivisuudella saamme

$$\int_A Y_k \, d\mathbb{P} = \int_A Y_\tau \, d\mathbb{P}$$

kaikille $A \in \mathcal{F}_\tau$. Täten $\mathbb{E}[Y_k|\mathcal{F}_\tau] = Y_\tau$. Hyödynnämme nyt tätä tietoa ja saamme

$$Y_{\tau_1} = \mathbb{E}[Y_{T_0}|\mathcal{F}_{\tau_1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{T_0}|\mathcal{F}_{\tau_2}]|\mathcal{F}_{\tau_1}] = \mathbb{E}[Y_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}],$$

kuten halusimmekin.

Ala- ja ylämartingaalitapaukset palautetaan martingaalitapauksiin Doobin erittelylauseen avulla. Sitten voidaan soveltaa yllä tehtyä päättelyä. □

Valinnaisen pysähtymisen lause avulla saadaan seuraava propositio.

Propositio 1.24. *Olkoon τ äärellinen pysähtymisaika ja $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ filtraatio, jonka suhteen M on martingaali, Y on ylämartingaali ja A on alamartingaali, tällöin*

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0, \quad \mathbb{E}Y_\tau \leq \mathbb{E}Y_0 \quad \textit{ja} \quad \mathbb{E}A_\tau \geq \mathbb{E}A_0.$$

Todistus. Todistamiseen tarvitsemme propositiota 1.15 ja lausetta 1.23. Todistetaan väite ylämartingaalille Y. Muut menevät samalla lailla. Väite saadaan osoitettua päättelyllä,

$$\mathbb{E}Y_\tau = \mathbb{E}[Y_\tau|\{\emptyset, E\}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_\tau|\mathcal{F}_0]|\{\emptyset, E\}] \leq \mathbb{E}[Y_0|\{\emptyset, E\}] = \mathbb{E}Y_0. \qquad \square$$

2 Köydenvetopeli satunnaiskohinalla

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue. Köydenvetopeli satunnaiskohinalla on kahden pelaajan stokastinen peli, joten olkoon meillä pelaajat I ja II. Pelin alussa pelitilanne on pisteessä $x_0 \in \Omega$. Pelin jokaisella kierroksella liikutaan johonkin pisteeseen avoimessa pallossa $B_\varepsilon(x)$. Peli päättyy, kun saavutetaan piste, joka ei ole alueessa Ω.

Jokaisen kierroksen alussa heitetään puolueellista kolikkoa. Todennäköisyydellä $\alpha \in [0,1]$ tulos on kruuna ja todennäköisyydellä $\beta := 1 - \alpha$ tulos on klaava. Jos kolikonheiton tulos on kruuna, pelaajat pelaavat köydenvetoa. Köydenvedossa heitetään reilua kolikkoa. Jos tulos on kruuna, liikutaan pelaajan I haluamaan pisteeseen, ja jos tulos on klaava, liikutaan pelaajan II haluamaan pisteeseen. Jos kierroksen alussa kolikonheiton tulos on klaava, liikutaan satunnaiseen pisteeseen pallon $B_\varepsilon(x)$ sisällä. Todennäköisyys, että siirrytään johonkin joukon $A \subset B_\varepsilon(x)$ pisteeseen, on

$$\frac{|A|}{|B_\varepsilon(x)|},$$

missä $|\cdot|$ on Lebesguen mitta.

Peli ei välttämättä pääty alueen reunalle $\partial\Omega$, sillä pelaajat saavat ottaa lähes ε suuruisia askeleita tai voimme kierroksella päätyä satunnaiseen melkein ε päässä olevaan pisteeseen. Tämän vuoksi on syytä paksuntaa aluetta ε verran joka puolelta.

Määritelmä 2.1. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue. Merkitsemme joukon Ω ympärillä olevaa ε-laajennusta merkinnällä

$$\Gamma_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon\}$$

ja merkitsemme

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \cup \Gamma_\varepsilon.$$

Kun pelisijainti saavuttaa ε-laajennuksen Γ_ε, peli päättyy ja pelaaja II maksaa pelaajalle I Borel-mitallisen *voittofunktion* $F\colon \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ määräämän määrän. Selvästikin pelaaja I haluaa, että peli päättyy pisteeseen, jossa funktio F saa mahdollisimman suuren arvon, ja pelaaja II haluaa, että peli päättyy pisteeseen, jossa funktio F saa mahdollisimman pienen arvon. Tämä peli on niin kutsuttu *kahden pelaajan nollasummapeli*, joka tarkoittaa sitä, että toinen pelaaja voittaa sen, mitä toinen häviää.

Käsitellään nyt tarkempia määritelmiä köydenvetopeliin liittyen. Näissä määritelmissä seuraamme artikkelia [17] ja kirjaa [3].

Käsittelemässämme pelissä pelaajat tietävät, mitä pelissä on tapahtunut nykytilanteeseen mennessä, heillä on siis pelin historia käytössä. *Pelin historia* askeleeseen $k \in \mathbb{N}$ asti on vektori

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \Omega_\varepsilon^{k+1},$$

jonka komponentit ovat pisteitä, joissa pelin aikana on oltu.

Merkitsemme pelin kaikkien askeleeseen k olevien historioiden kokoelmaa merkinnällä H_k ja merkitsemme kaikkien äärellisten historioiden kokoelmaa merkinnällä

$$H \coloneqq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k.$$

Pelin historian avulla pelaajat pystyvät tekemään päätöksiä sen suhteen, mitä kannattaa tehdä seuraavaksi. Tätä päätöstä kutsutaan strategiaksi. Jos pelaaja voittaa kolikonheiton, hänen käyttämänsä strategia S määrittää mihin pisteeseen astutaan seuraavaksi.

Määritelmä 2.2. Olkoon $S\colon H \to \Omega_\varepsilon$ pelaajan strategia. Tällöin

$$S(x_0, x_1, \ldots, x_k) = x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k).$$

Avaruuteen H saamme todennäköisyysmitan $\mathbb{P}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}\colon H \to [0,1]$ *Kolmogorovin laajennuslauseen* avulla, kuten hahmoteltu artikkelissa [17] sivuilla 6-7. Kolmogorovin laajennuslause löytyy muun muassa kirjoista [2] ja [26]. Kyseinen todennäköisyysmitta riippuu vain aloituspisteestä ja pelaajien strategioista.

Olkoon $B_k \in \mathcal{B}(\Omega_\varepsilon)$, kaikilla $k \in \mathbb{N}$, missä $\mathcal{B}(\Omega_\varepsilon)$ tarkoittaa avaruuden Ω_ε Borel-mitallisia joukkoja. Saamme todennäköisyysavaruuteen $\left(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}\right)$ filtraation $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, määrittelemällä

$$\mathcal{F}_k = \sigma\left(\left(\bigtimes_{j=0}^{k}\right) \times \Omega_\varepsilon^\infty\right)$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Määritellään kuvaus

$$x_k\colon H \to \Omega_\varepsilon, \quad x_k(\omega_1, \omega_2, \ldots) = \omega_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tällöin x_k on $\mathcal{F}_k$-mitallinen satunnaismuuttuja. Tämän kuvauksen avulla saamme määriteltyä pysähtymisajan τ filtraation $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suhteen. Olkoon $\tau\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{N}_\infty$,

$$\tau(\omega) \coloneqq \inf\{k : x_k(\omega) \in \Gamma_\varepsilon, k \in \mathbb{N}\}.$$

Määritelmä 2.3. Olkoot $S^{\mathrm{I}}, S^{\mathrm{II}}$ pelaajien I ja II strategiat, $x_0 \in \Omega$ pelin aloituspiste, $x_\tau \in \Gamma_\varepsilon$ piste, johon peli päättyy ja F pelin voittofunktio. Pelin odotettu voitto on tällöin

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[F(x_\tau)] = \int_H F(x_\tau(\omega))\, d\mathbb{P}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}(\omega).$$

Yllä olevassa määritelmässä merkintä τ, joka viittaa pysähtymisaikaan filtraation $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suhteen. Tämän luvun lopuksi määrittelemme pelin arvot pelaajille. Pelin arvo pelaajalle I kertoo, mikä on pienin voitto, jonka hän voi itselleen taata. Vastaavasti pelin arvo pelaajalle II kertoo, mikä on pienin häviö, jonka hän voi itselleen taata.

Nämä arvot saamme pelin odotetun voiton avulla. Molemmat pelaajat odottavat vastapuolen pelaavan täydellisesti, siksi esimerkiksi pelaajan I pelin arvon kanssa otamme ensin supremumin pelin odotusta voitosta pelaajan I strategioiden suhteen. Sen jälkeen otamme infimumin pelaajan II strategioiden suhteen ja katsomme, kuinka pieneksi pelaaja II saa vietyä odotetun voiton.

Määritelmä 2.4. Pelin arvo pelaajalle I määritellään funktiona

$$u_\varepsilon^{\mathrm{I}}(x_0) := \sup_{S^{\mathrm{I}}} \inf_{S^{\mathrm{II}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}} F(x_\tau)$$

ja pelaajalle II funktiona

$$u_\varepsilon^{\mathrm{II}}(x_0) := \inf_{S^{\mathrm{II}}} \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}} F(x_\tau).$$

Arvojen määritelmistä huomaamme, että aina on pädettävä $u_\varepsilon^{\mathrm{I}} \le u_\varepsilon^{\mathrm{II}}$, sillä molemmissa funktioissa minimoidaan ja maksimoidaan odotettua voittoa. Ainoastaan järjestys näille operaatioille muuttuu. Yleisesti ottaen se kumpi tehdään ensin, jää epäedulliseen tilanteeseen. Esimerkiksi pelaajan I arvon tapauksessa se, että pelaaja II saa tehdä minimoivan valinnan sen jälkeen kun pelaaja I on jo tehnyt valintansa jättää pelaajan I epäedulliseen tilanteeseen.

Yllä kuvailtu tilanne arvoille on lähtökohtaisesti totta, mutta myöhemmin käy ilmi, että $u_\varepsilon^{\mathrm{I}} \equiv u_\varepsilon^{\mathrm{II}}$. Tässä tapauksessa sanotaan, että pelillämme on *arvo*. Tämä todistetaan luvussa 3.2.

3 (p,ε)-harmoniset funktiot

Tässä luvussa tutustumme dynaamisen ohjelmoinnin periaatteeseen ja määrittelemme sen avulla (p,ε)-*harmoniset* funktiot. Luvussa 4 osoitamme, että pystymme approksimoimaan p-harmonisia funkioita niiden avulla. Seuraamme pääsääntöisesti artikkeleita [16], [19] ja kirjaa [3].

3.1 Dynaamisen ohjelmoinnin periaate

Tämän alaluvun määritelmät löytyvät artikkelista [19]. Aloitetaan käsittelemällä dynaamisen ohjelmoinnin periaatetta. Intuitiivisesti funktio u_ε toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen silloin, kun funktion u_ε arvo pisteessä $x \in \Omega$ on summa, jonka termit ovat funktion mahdollisimman suuri arvo ε-pallossa (pelaaja I haluaa maksimoida funktion u_ε arvon), mahdollisimman pieni arvo ε-pallossa (pelaaja II haluaa minimoide funktion u_ε arvon) ja funktion u_ε keskiarvo ε-pallossa (satunnaiskohinan odotusarvo). Kaikki edellä mainitut termit ovat painotettuja niillä todennäköisyyksillä, joilla kukin pelaaja voittaa kierroksen tai otetaan satunnainen askel.

Määritelmä 3.1. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $\alpha, \beta \geq 0$ siten, että $\alpha + \beta = 1$. Tällöin funktio $u_\varepsilon \colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ toteuttaa *dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen*, jos se on muotoa

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2}\left(\sup\limits_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \inf\limits_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon \, dy, & x \in \Omega, \\ F(x), & x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Käytämme tästä lähtien dynaamisen ohjelmoinnin periaatteesta lyhennettä DOP. Valitsemalla α ja β sopivasti siten, että niiden arvot riippuvat muuttujasta p ja dimensiosta n, saamme määriteltyä (p, ε)-harmoniset funktiot.

Määritelmä 3.2. Olkoon $p \in [2, \infty]$. Kutsumme funktioita, jotka toteuttavat DOP:n seuraavilla valinnoilla (p, ε)-*harmonisiksi* funktioiksi. Kun $p \in [2, \infty)$, valitsemme

$$\alpha = \frac{p-2}{p+n} \quad \text{ja} \quad \beta = \frac{n+2}{p+n}.$$

Kun $p = \infty$, valitsemme

$$\alpha = 1 \quad \text{ja} \quad \beta = 0.$$

Yllä oleva määritelmä sallii muuttujan p arvot 2 ja ∞. Emme kuitenkaan käsittele näitä tapauksia tässä tutkielmassa, jotta voimme keskittyä köydenvetopeliin satunnaiskohinalla.

Tapauksessa $p = \infty$ käsittelemämme peli on tavallinen köydenvetopeli ilman satunnaiskohinaa. Tavallinen köydenvetopeli ei pääty melkein varmasti ilman, että lisäämme pelaajille rankaisun sellaisten strategioiden käytöstä, jotka johtavat siihen, että peli ei pääty. Satunnaiskohinan kanssa tätä ongelmaa ei ole.

Tapauksessa $p = 2$ käsittelemämme ”peli” on satunnaispallokävely. Satunnaispallokävely on stokastinen prosessi, jossa jokaisen pisteen $x \in \Omega$ jälkeen seuraava piste valitaan satunnaisesti pallosta $B_\varepsilon(x)$. Satunnaispallokävely päättyy melkein varmasti, mutta ohitamme sen käsittelyn keskittyäksemme tapaukseen, jossa on pelaajia. Tapauksista $p \in \{2, \infty\}$ voi lukea tarkemmin kirjasta [3].

3.2 Olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Seuraamme tässä alaluvussa artikkelia [16]. Aloitamme osoittamalla, että mille tahansa rajoitetun alueen Ω_ε Borel-mitalliselle reunafunktiolle on olemassa (p, ε)-harmoninen funktio u_ε. Todistusta varten tarvitsemme lemmaa 3.3, jonka mukaan operoidessamme rajoitettua Borel-mitallista funktiota u_ε tietynlaisella operaattorilla T, saamme Borel-mitallisen rajoitetun funktion Tu_ε. Tarvitsemme tätä tietoa olemassaolotodistuksessa, sillä se perustuu operaattorin T avulla muodostettuun funktiojonoon.

Lemma 3.3. *Olkoot $M > 0$ ja*

$$\mathbb{F}_\varepsilon := \{u_\varepsilon \colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R} : u_\varepsilon \text{ on Borel-mitallinen ja } u_\varepsilon < M \text{ joukossa } \Omega_\varepsilon\}.$$

Tällöin kaikille $u_\varepsilon \in \mathbb{F}_\varepsilon$ pätee $Tu_\varepsilon \in \mathbb{F}_\varepsilon$, missä

$$Tu_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon \, dy, & x \in \Omega \\ u_\varepsilon(x), & x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Todistus. Oletuksen nojalla funktio u_ε on rajoitettu vakiolla $M > 0$. Täten joukossa Γ_ε

$$|Tu_\varepsilon| = |u_\varepsilon| \leq M < \infty$$

ja joukossa Ω

$$\begin{aligned} |Tu_\varepsilon| &= \left| \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon \, dy \right| \\ &\overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} \left| \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon \right| + \left| \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon \right| + \left| \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon \, dy \right| \\ &\leq \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} M + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} M \, dy \\ &= \alpha M + \beta M = M < \infty. \end{aligned}$$

Funktio Tu_ε on siis rajoitettu, enää tarvitsee osoittaa, että se on Borel-mitallinen. Tehdään tämä osoittamalla summattavat funktiot Borel-mitallisiksi. Kuvaus

$$x \mapsto \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon(y)\,dy$$

on jatkuva Lebesguen integraalin absoluuttisen jatkuvuuden nojalla ja siten Borel-mitallinen. Riittää siis osoittaa, että funktiot

$$\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon \quad \text{ja} \quad \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon$$

ovat Borel-mitallisia. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$, osoitetaan, että seuraava yhtäsuuruus pätee

$$\left\{x \in \Omega : \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon > \lambda\right\} = \Omega \cap \left(\bigcup_{\substack{y\in\Omega_\varepsilon,\\ u_\varepsilon(y)>\lambda}} B_\varepsilon(y) \right).$$

Olkoon $x \in \left\{w \in \Omega : \sup_{B_\varepsilon(w)} u_\varepsilon > \lambda\right\}$, tällöin on olemassa $y \in B_\varepsilon(x) \subset \Omega_\varepsilon$ siten, että $\lambda < u_\varepsilon(y) \leq \sup_{B_\varepsilon(x)} u$, joten

$$x \in \Omega \cap B_\varepsilon(y) \subset \Omega \cap \left(\bigcup_{\substack{w\in\Omega_\varepsilon,\\ u_\varepsilon(w)>\lambda}} B_\varepsilon(w) \right).$$

Olkoon

$$z \in \Omega \cap \left(\bigcup_{\substack{w\in\Omega_\varepsilon,\\ u_\varepsilon(w)>\lambda}} B_\varepsilon(w) \right)$$

sellainen, että $z \notin \left\{x \in \Omega : \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon > \lambda\right\}$. Tällöin $\sup_{B_\varepsilon(y)} u_\varepsilon \leq \lambda$. Tämä tarkoittaisi, että z ei voi kuulua mihinkään yhdisteen

$$\bigcup_{\substack{w\in\Omega_\varepsilon,\\ u(w)>\lambda}} B_\varepsilon(w)$$

palloon, joten tämä on ristiriita.

Nyt kun olemme osoittaneet halutun yhtäsuuruuden, on helppoa nähdä, että $\left\{x \in \Omega : \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon > \lambda\right\}$ on avoin joukko ja siten Borel-joukko, joten $\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon$ on Borel-mitallinen.

Äskeisen nojalla, koska $-u_\varepsilon$ on Borel, niin myös $\sup_{B_\varepsilon(x)}(-u_\varepsilon)$ on Borel. Saamme

$$\sup_{B_\varepsilon(x)} (-u_\varepsilon) = -\inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon,$$

joten $\inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon$ on Borel. $\square$

Lause 3.4. *Olkoon* $F\colon \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ *Borel ja olkoot* $u_j^\varepsilon\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ *sellaisia, että*

$$u_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \inf_{\Gamma_\varepsilon} F & x \in \Omega \\ F(x) & x \in \Gamma_\varepsilon \end{cases} \quad \textit{ja} \quad u_{j+1}^\varepsilon = Tu_j^\varepsilon,$$

missä $j \in \mathbb{N}$ *ja* T *on Lemmassa 3.3 määritelty operaattori. Tällöin on olemassa* $u_\varepsilon\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ *siten, että*

$$u_j^\varepsilon \xrightarrow{\textit{tasaisesti}} u_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = Tu_\varepsilon \quad \textit{ja} \quad u_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} = F.$$

Todistus. Todistamme induktiolla, että $u_{j+1}^\varepsilon \geq u_j^\varepsilon$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Huomaamme ensin, että operaattorin T määritelmän nojalla väite pätee triviaalisti joukossa Γ_ε, joten keskitymme tilanteeseen joukossa Ω. Aloitamme osoittamalla, että väite pätee tapauksessa $j = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} u_1^\varepsilon = Tu_0^\varepsilon &= \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_0^\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_0^\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_0^\varepsilon \, dy \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} \inf_{y \in \Gamma_\varepsilon} F + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} \inf_{y \in \Gamma_\varepsilon} F + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} \inf_{y \in \Gamma_\varepsilon} F \, dy \\ &= \frac{\alpha}{2} \inf_{y \in \Gamma_\varepsilon} F + \frac{\alpha}{2} \inf_{y \in \Gamma_\varepsilon} F + \beta \inf_{y \in \Gamma_\varepsilon} F \\ &= \inf_{y \in \Gamma_\varepsilon} F = u_0^\varepsilon. \end{aligned}$$

Teemme seuraavaksi induktio-oletuksen ja oletamme, että $u_j^\varepsilon \geq u_{j-1}^\varepsilon$ jollain $j \in \mathbb{Z}_+$. Lopuksi osoitamme, että induktio-oletuksesta seuraa, että $u_{j+1}^\varepsilon \geq u_j^\varepsilon$. Tämä pätee, sillä

$$\begin{aligned} u_{j+1}^\varepsilon = Tu_j^\varepsilon = T(Tu_{j-1}^\varepsilon) &= \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_j^\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_j^\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_j^\varepsilon \\ &\overset{\text{i.o.}}{\geq} \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_{j-1}^\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_{j-1}^\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_{j-1}^\varepsilon \\ &= Tu_{j-1}^\varepsilon = u_j^\varepsilon. \end{aligned}$$

Täten jono $(u_j^\varepsilon)_{j\in\mathbb{N}}$ on kasvava. Lisäksi $(u_j^\varepsilon)_{j\in\mathbb{N}}$ on ylhäältä rajoitettu. Joukossa Γ_ε selvästi pätee

$$u_j^\varepsilon = F \leq \sup_{\Gamma_\varepsilon} F < \infty,$$

lisäksi induktion avulla saadaan osoitettua, että $u_j^\varepsilon \leq \sup_{\Gamma_\varepsilon} F$ pätee joukossa Ω.

Perusaskel:

$$u_0^\varepsilon = \inf_{\Gamma_\varepsilon} F \leq \sup_{\Gamma_\varepsilon} F.$$

Induktio-oletus:
$$u_j^\varepsilon \leq \sup_{\Gamma_\varepsilon} F.$$

Induktioaskel:
$$\begin{aligned} u_{j+1}^\varepsilon &= \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_j^\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_j^\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_j^\varepsilon \, dy \\ &\overset{\text{i.o.}}{\leq} \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} \sup_{\Gamma_\varepsilon} F + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} \sup_{\Gamma_\varepsilon} F + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} \sup_{\Gamma_\varepsilon} F \, dy = \sup_{\Gamma_\varepsilon} F. \end{aligned}$$

Konstruktion nojalla $\inf_{\Gamma_\varepsilon} F \leq u_j^\varepsilon$, joten $0 \leq u_j^\varepsilon - \inf_{\Gamma_\varepsilon} F$. Lisäksi koska funktiot u_j^ε ja vakiofunktio $-\inf_{\Gamma_\varepsilon} F$ ovat Borel-mitallisia, niiden summafunktio on Borel-mitallinen. Täten monotonisen konvergenssin nojalla on olemassa funktio $\tilde{u}_\varepsilon \colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = \lim_{j \to \infty} u_j^\varepsilon(x) - \inf_{\Gamma_\varepsilon} F,$$

kaikilla $x \in \Omega_\varepsilon$. Täten on olemassa Borel-mitallinen funktio $u_\varepsilon \colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$u_\varepsilon(x) = \lim_{j \to \infty} u_j^\varepsilon(x),$$

kaikilla $x \in \Omega_\varepsilon$. Funktio u_ε on myös rajoitettu. Olemme todistaneet pisteittäisen suppenemisen. Todistetaan seuraavaksi, että suppeneminen on itse asiassa jopa tasaista.

Todistetaan tasainen suppeneminen antiteesin avulla. Merkitsemme

$$M := \lim_{j \to \infty} \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon - u_j^\varepsilon)(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \tag{3.1}$$

missä $M > 0$ antiteesin mukaisesti. Kiinnitetään sitten mielivaltainen $\delta \in \left(0, \frac{M(1-\alpha)}{3+\alpha}\right)$ ja valitsemme $k \geq 1$ niin suureksi, että

$$u_\varepsilon - u_k^\varepsilon \leq M + \delta \quad \text{joukossa } \Omega_\varepsilon. \tag{3.2}$$

Dominoidun konvergenssin nojalla voimme olettaa, että

$$\sup_{x \in \Omega} \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - u_k^\varepsilon)(y) \, dy \leq \delta. \tag{3.3}$$

Yhtälön (3.1) nojalla voimme valita $x_0 \in \Omega$ siten, että $u_\varepsilon(x_0) - u_{k+1}^\varepsilon(x_0) \geq M - \delta$. Valitsemme $\ell > k$ niin suureksi, että $u_\varepsilon(x_0) - u_{\ell+1}^\varepsilon(x_0) < \delta$, josta seuraa, että

$$u_{\ell+1}^\varepsilon(x_0) - u_{k+1}^\varepsilon(x_0) \geq M - 2\delta. \tag{3.4}$$

Johdamme tässä välissä seuraavan tuloksen. Mille tahansa joukolle $A \subset \mathbb{R}$ pätee $\sup_A u_\ell - \sup_A u_k \leq \sup_A(u_\ell - u_k)$. Saamme todistettua tämän tiedolla $\sup(B + C) \leq \sup B + \sup C$, sillä

$$\sup_A((u_\ell^\varepsilon - u_k^\varepsilon) + u_k^\varepsilon) \leq \sup_A(u_\ell^\varepsilon - u_k^\varepsilon) + \sup_A u_k^\varepsilon,$$

joka on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\sup_A u_\ell^\varepsilon - \sup_A u_k^\varepsilon \leq \sup_A(u_\ell^\varepsilon - u_k^\varepsilon).$$

Nyt

$$\begin{aligned}
M - 2\delta &\leq u_{\ell+1}^\varepsilon(x_0) - u_{k+1}^\varepsilon(x_0) \\
&= \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x_0)} u_\ell^\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x_0)} u_\ell^\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} u_\ell^\varepsilon \\
&\quad - \left(\frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x_0)} u_k^\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x_0)} u_k^\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} u_k^\varepsilon \right) \\
&\leq \alpha \sup_{B_\varepsilon(x_0)} (u_\ell^\varepsilon - u_k^\varepsilon) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} (u_\ell^\varepsilon - u_k^\varepsilon) \\
&\leq \alpha \sup_{B_\varepsilon(x_0)} (u_\varepsilon - u_k^\varepsilon) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} (u_\varepsilon - u_k^\varepsilon) \\
&\leq \alpha(M + \delta) + \delta.
\end{aligned}$$

Koska

$$M - 2\delta \leq \alpha(M + \delta) + \delta,$$

josta saamme

$$\frac{M(1 - \alpha)}{3 + \alpha} \leq \delta,$$

niin tämä on ristiriita sen kanssa, että $\delta \in \left(0, \frac{M(1-\alpha)}{3+\alpha}\right)$. Tasaisen jatkuvuuden nojalla u toteuttaa DOP:n ja konstruktion nojalla $u_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} = F$. □

Seuraus 3.5. *Mille tahansa Borel-reunafunktiolle $F\colon \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ on olemassa rajoitettu Borel funktio $u_\varepsilon\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa DOP:n reuna-arvoilla F.*

Huomautus 3.6. Seurauksen 3.5 antama funktio u_ε on (p, ε)-harmoninen täsmälleen silloin, kun valitsemme parametrit α ja β kuten määritelmässä 3.1.

Tiedämme nyt, että Borel-mitalliselle reunafunktiolle on aina olemassa sitä vastaava (p, ε)-harmoninen funktio. Seuraavaksi osoitamme, että tämä funktio on yksikäsitteinen.

Lause 3.7. *Olkoot $u_\varepsilon, v_\varepsilon\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ (p,ε)-harmonisia funktioita, joilla on reuna-arvot F_u ja F_v. Tällöin*

$$\sup_{\Omega}|u_\varepsilon - v_\varepsilon| \leq \sup_{\Gamma_\varepsilon}|F_u - F_v|.$$

Todistus. Riittää osoittaa, että

$$M \coloneqq \sup_{\Omega}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \leq \sup_{\Gamma_\varepsilon}(F_u - F_v) \eqqcolon m,$$

loput saamme symmetrisellä argumentilla.

Oletamme, että väite ei pidä paikkaansa, eli $M > m$. Tällöin koska molemmat funktiot u_ε ja v_ε toteuttavat DOP:n, niin kaikilla $x \in \Omega$ pätee

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x) &= \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon - \sup_{B_\varepsilon(x)} v_\varepsilon\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon - \inf_{B_\varepsilon(x)} v_\varepsilon\right) \\ &\quad + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy \\ &\leq \alpha \sup_{y\in B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)\, dy \\ &\leq \alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Merkitsemme

$$G \coloneqq \{x \in \Omega_\varepsilon : u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x) = M\},$$

vastaoletuksen nojalla $G \subset \Omega$. Näytämme aluksi, että joukko G ei ole tyhjä joukko. Joukko Ω on rajoitettu, joten on olemassa jono $(x_k)_k$ joukossa Ω ja rajapiste $x_\infty \in \overline{\Omega}$ siten, että

$$(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x_k) \to M \text{ ja } x_k \to x_\infty, \quad \text{kun} \quad k \to \infty. \tag{3.6}$$

Tällöin Lebesguen integraalin absoluuttisen jatkuvuuden nojalla pätee

$$\fint_{B_\varepsilon(x_\infty)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy = \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy.$$

Lisäksi

$$\lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy = M$$

pätee seuraavan päättelyn nojalla. Saamme epäyhtälön (3.5) nojalla, että

$$\lim_{k\to\infty} (u_\varepsilon(x_k) - v_\varepsilon(x_k)) \leq \lim_{k\to\infty} \left(\alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy\right),$$

josta saamme ominaisuuden (3.6) nojalla

$$M \leq \alpha M + \beta \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy.$$

Tästä vähentämällä vakio αM puolittain ja kertomalla puolittain vakiolla $\frac{1}{\beta}$ saamme

$$M(\overbrace{1-\alpha}^{=\beta}) \cdot \frac{1}{\beta} \leq \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy,$$

joka sievenee muotoon

$$M \leq \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy.$$

Lisäksi koska $u_\varepsilon - v_\varepsilon \leq M$ koko joukossa Ω_ε, niin

$$\lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy \leq \lim_{k\to\infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} M\, dy = M.$$

Täten

$$\fint_{B_\varepsilon(x_\infty)} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(y)\, dy = M,$$

jolloin siitä, että $u_\varepsilon - v_\varepsilon \leq M$ pätee pallossa $B_\varepsilon(x_\infty) \subset \Omega_\varepsilon$, seuraa $u_\varepsilon - v_\varepsilon = M$ melkein kaikkialla pallossa $B_\varepsilon(x_\infty)$. Täten $|B_\varepsilon(x_\infty) \setminus G| = 0$, joten G on epätyhjä joukko. Lisäksi seuraava ominaisuus pätee,

$$\text{jos} \quad x \in G, \quad \text{niin} \quad |B_\varepsilon(x) \setminus G| = 0. \tag{3.7}$$

Koska jos $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x) = M$, niin $x \in \Omega$ ja täten epäyhtälöstä (3.5) ja siitä, että $u_\varepsilon - v_\varepsilon \leq M$ pätee joukossa Ω_ε seuraa, että $u_\varepsilon - v_\varepsilon = M$ melkein kaikkialla pallossa $B_\varepsilon(x)$. Nyt ominaisuudesta (3.7) ja siitä, että $G \neq \emptyset$ saamme ristiriidan seuraavasti.

Olkoon e_1 avaruuden $\mathbb{R}^n$ ensimmäinen standardikantavektori. Nyt ominaisuudesta (3.7) seuraa, että

$$G \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}\left(x + \frac{\varepsilon}{2} e_1\right) \neq \emptyset.$$

Tehdään nyt konstruktio, jonka avulla saamme ristiriidan aikaiseksi,

$$\begin{gathered} x_0 \in G \\ x_1 \in G \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2} e_1\right) \\ \vdots \\ x_{k+1} \in G \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}\left(x_k + \frac{\varepsilon}{2} e_1\right). \end{gathered}$$

Nyt $\lim_{k\to\infty} e_1 \cdot x_k = \infty$, mikä on ristiriita, sillä Ω on rajoitettu ja $x_k \in G \subset \Omega$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Alkuperäinen väite siis pätee. $\square$

Todistetaan seuraavaksi, että pelaamallamme pelillä todella on arvo. Kyseinen arvo on reunafunktion määräämä yksikäsitteinen (p,ε)-harmoninen funktio u_ε.

Lause 3.8. *Olkoot $u_\varepsilon^{\mathrm{I}}, u_\varepsilon^{\mathrm{II}}$, kuten määritelmässä 2.4 ja u_ε seurauksen 3.5 funktio, joka toteuttaa DOP:n ja jonka reuna-arvot määrää pelin voittofunktio. Tällöin*

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^{\mathrm{I}} = u_\varepsilon^{\mathrm{II}}.$$

Todistus. Riittää näyttää, että

$$u_\varepsilon^{\mathrm{II}} \le u_\varepsilon, \tag{3.8}$$

sillä tällöin symmetrian nojalla $u_\varepsilon \le u_\varepsilon^{\mathrm{I}}$ ja kuten totesimme pelin arvot määriteltyämme, niin aina pätee $u_\varepsilon^{\mathrm{I}} \le u_\varepsilon^{\mathrm{II}}$.

Todistamme epäyhtälön (3.8) pelaamalla peliä siten, että pelaaja II seuraa strategiaa S_0^{II}. Tässä strategiassa pelitilanteen ollessa pisteessä $x_k \in \Omega$ $x_k \in \Omega$ hän liikkuu ε-pallossa pisteeseen, joka melkein minimoi funktion u_ε. Eli pisteeseen $x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k)$, jolle pätee

$$u_\varepsilon(x_{k+1}) \le \inf_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon + \eta 2^{-(k+1)},$$

jollain kiinnitetyllä $\eta > 0$. Lemman A.1 nojalla strategia S_0^{II} voidaan valita Borel-mitalliseksi.

Olkoon S^{I} Pelaajan I strategia. Tällöin saadaan arvio

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}\left[u_\varepsilon(x_{k+1}) + \eta 2^{-(k+1)} | \mathcal{F}_k\right] \\
&\overset{\text{lineaarisuus}}{=} \quad \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}\left[u_\varepsilon(x_{k+1}) | \mathcal{F}_k\right] + \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}\left[\eta 2^{-(k+1)} | \mathcal{F}_k\right] \\
&\overset{\substack{\text{pelin}\\ \text{määritelmä}}}{=} \quad \frac{\alpha}{2}\Bigg(\underbrace{u_\varepsilon\left(S_0^{\mathrm{II}}(x_0,\dots,x_k)\right)}_{\le \inf_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon + \eta 2^{-(k+1)}} + \underbrace{u_\varepsilon\left(S^{\mathrm{I}}(x_0,\dots,x_k)\right)}_{\le \sup_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon} \Bigg) \\
&\qquad + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon \, dy + \eta 2^{-(k+1)} \\
&\le \frac{\alpha}{2}\left(\inf_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon + \eta 2^{-k} + \sup_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon \right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon \, dy + \eta 2^{-(k+1)} \\
&\overset{\text{DOP}}{=} u_\varepsilon(x_k) + \eta 2^{-(k+1)} \underbrace{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}_{\le 2} \\
&\le u_\varepsilon(x_k) + \eta 2^{-k}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Täten riippumatta strategiasta S^{I}, stokastinen prosessi $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$, missä $M_k := u_\varepsilon(x_k)+\eta 2^{-k}$, on ylämartingaali filtraation $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suhteen. Olkoon τ pysähtymisaika, tällöin $u_\varepsilon(x_\tau) = F(x_\tau)$. Nyt koska ylämartingaali on rajoitettu, saamme valinnaisen pysähtymisen lauseen nojalla

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^{\mathrm{II}}(x_0) &= \inf_{S^{\mathrm{II}}} \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[F(x_\tau)] \le \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[F(x_\tau)+\eta 2^{-\tau}] \\ &\le \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[u_\varepsilon(x_0)+\eta 2^{-0}] = u_\varepsilon(x_0)+\eta. \end{aligned}$$

Koska η oli mielivaltainen, väite on todistettu. $\square$

4 Suppeneminen p-harmoniseen funktioon

Käsittelemme tässä kappaleessa sen, että (p,ε)-harmoniset funktiot suppenevat p-harmoniseen funktioon, kun $\varepsilon \to 0$. Suppenemiseen tarvitsemme muun muassa säännöllisyystuloksia, mutta keskitymme näihin vasta jälkikäteen.

Aluksi oletamme, että tarpeellinen säännöllisyys pätee ja saamme siten halutun suppenemisen. Jälkimmäisessä alaluvussa käsittelemme reunasäännöllisyyttä ja luvussa 5 lokaalia säännöllisyyttä. Tarvitsemme nämä molemmat, jotta tämän luvun ensimmäisessä alaluvussa tehty argumentti pätee.

4.1 Suppenemisen todistaminen

Todistamme aluksi variaation Arzelá-Ascolin lauseesta. Tarvitsemme tätä tulosta suppenemistodistukseen. Seuraamma todistuksessa artikkelia [17].

Lemma 4.1 (Arzelá-Ascoli)**.** *Olkoon $\{v_\varepsilon\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \varepsilon > 0\}$ joukko jatkuvia funktioita, joille pätee seuraavat ominaisuudet.*

1. *On olemassa $C > 0$ siten, että $|v_\varepsilon(x)| < C$ kaikille $\varepsilon > 0$ ja kaikille $x \in \overline{\Omega}$,*

2. *mille tahansa $\eta > 0$ on olemassa vakiot r_0 ja ε_0 siten, että kaikille $\varepsilon < \varepsilon_0$ ja mille tahansa $x, y \in \overline{\Omega}$ pätee*

$$|v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)| < \eta, \quad \text{kun } |x-y| < r_0.$$

Tällöin on olemassa tasaisesti jatkuva funktio $v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ja osajono $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ (jonka indeksejä merkitsemme myös muuttujalla ε) siten, että

$$v_\varepsilon \xrightarrow{\text{tasaisesti}} v \quad \text{joukossa } \overline{\Omega},\ \text{kun } \delta \to 0.$$

Todistus. Aloitamme etsimällä raja-arvoehdokkaan v. Olkoon $Q \subset \overline{\Omega}$ numeroituva tiheä osajoukko. Koska funktiot ovat tasaisesti rajoitettu, diagonalisaatiolla saamme kaikille $x \in Q$ osajonon $\{v_\varepsilon\}$. Vaikka kyseessä on osajono, merkitsemme indeksejä edelleen epsilonilla.

Oletuksen nojalla mille tahansa $\eta > 0$, on olemassa r_0 siten, että kaikille $x, y \in Q$, joille $|x - y| < r_0$, pätee

$$|v(x) - v(y)| < \eta.$$

Täten voimme jatkuvasti laajentaa funktion v koko joukkoon $\overline{\Omega}$ asettamalla

$$v(z) \coloneqq \lim_{Q \ni x \to z} v(x).$$

Seuraavaksi osoitamme, että jono $\{v_\varepsilon\}$ suppenee tasaisesti. Valitsemme äärellisen peitteen

$$\bigcup_{i=1}^{N} B_r(x_i) \supset \overline{\Omega}$$

ja $\varepsilon_0 > 0$ siten, että

$$|v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x_i)|, |v(x) - v(x_1)| < \frac{\eta}{3}$$

kaikille $x \in B_r(x_i)$ ja $\varepsilon < \varepsilon_0$, lisäksi

$$|v_\varepsilon(x_i) - v(x_i)| < \frac{\eta}{3},$$

kaikilla x_i ja $\varepsilon < \varepsilon_0$. Täten kaikille $x \in \overline{\Omega}$ voimme löytää pisteen x_i siten, että $x \in B_r(x_i)$ ja

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon(x) - v(x)| &\le |v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x_i)| + |v_\varepsilon(x_i) - v(x_i)| + |v(x_i) - v(x)| \\ &< \eta, \end{aligned}$$

kaikille $\varepsilon < \varepsilon_0$, missä ε_0 ei riipu pisteestä x. □

Seuraavaksi todistamme, että pelin arvofunktiot u_ε suppenevat tasaisesti johonkin funktioon u joukossa $\overline{\Omega}$. Osoitamme myöhemmässä lauseessa (lause 4.3), että kyseinen funktio u on p-harmoninen. Seuraamme tämän lauseen todistuksessa artikkelia [19].

Lause 4.2. *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja sileä alue, $F\colon \mathbb{R}^n \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ sileä funktio. Lisäksi olkoon u_ε arvofunktio köydenvetopeliin satunnaiskohinalla, jonka voittofunktio on F. Tällöin*

$$u_\varepsilon \overset{\text{tasaisesti}}{\longrightarrow} u \quad \text{joukossa } \overline{\Omega}, \ \text{kun } \varepsilon \to 0.$$

Todistus. Aloitetaan havaitsemalla, että u_ε on tasaisesti rajoitettu. Funktio F on rajoitettu, joten on olemassa $M > 0$ siten, että

$$|F| < M.$$

Täten integraalin monotonisuuden nojalla

$$u_\varepsilon(x) = \inf_{S^{\mathrm{II}}} \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^x_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[F(x_\tau)] \leq \inf_{S^{\mathrm{II}}} \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^x_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[M] = M,$$

kaikilla $x \in \Omega$ ja $\varepsilon > 0$.

Yllä saadun tasaisen rajoittuneisuuden ja myöhemmin todistettavien lauseiden 4.4 ja 5.3 nojalla voimme käyttää Arzelá-Ascolia ja väite on todistettu. □

Osoitamme, nyt että yllä saatu rajafunktio on itse asiassa p-harmoninen funktio. Seuraamme todistuksessa artikkelia [19]. Tähän löytyy myös erilainen todistus artikkelista [21]. Alla $u = F$ tarkoittaa, että u saavuttaa reuna-arvot F jatkuvasti.

Lause 4.3. *Lauseen 4.2 rajafunktio u on viskositeettiratkaisu ongelmaan*

$$\begin{cases} \Delta_p^N u = 0 & \textit{joukossa } \Omega, \\ u = F & \textit{joukossa } \partial\Omega. \end{cases}$$

Todistus. Valitsemme pisteen $x \in \Omega$ ja C^2-funktion φ, joka on määritelty pisteen x ympäristössä. Olkoon piste x_1^ε sellainen, että

$$\varphi(x_1^\varepsilon) = \min_{\overline{B}_\varepsilon(x)} \varphi.$$

Funktion φ Taylorin kehitelmä pisteessä x pisteen x_1^ε suhteen on

$$\varphi(x_1^\varepsilon) = \varphi(x) + \langle D\varphi(x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + o(\varepsilon^2).$$

Olkoon $\tilde{x}_1^\varepsilon$ piste, jolle pätee $\tilde{x}_1^\varepsilon - x = -(x_1^\varepsilon - x)$. Tällöin hyödyntämällä sisätulon bilineaarisuudetta pisteen $\tilde{x}_1^\varepsilon$ suhteen muodostettuun Taylorin kehitelmään saamme, että

$$\varphi(\tilde{x}_1^\varepsilon) = \varphi(x) - \langle D\varphi(x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + o(\varepsilon^2).$$

Laskemalla kehitelmät yhteen ja siirtämällä termejä saamme

$$\varphi(\tilde{x}_1^\varepsilon) + \varphi(x_1^\varepsilon) - 2\varphi(x) = \langle D^2\varphi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + o(\varepsilon^2).$$

Nyt pisteen x_1^ε määritelmän nojalla saamme, että

$$\varphi(\tilde{x}_1^\varepsilon) + \varphi(x_1^\varepsilon) - 2\varphi(x) \le \max_{\overline{B}_\varepsilon(x)} \varphi + \min_{\overline{B}_\varepsilon(x)} \varphi - 2\varphi(x).$$

Yhdistämällä tämä tieto aiemmin saadun yhtälön kanssa saamme, että

$$\frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + o(\varepsilon^2) \le \frac{1}{2}\left(\max_{\overline{B}_\varepsilon(x)} \varphi + \min_{\overline{B}_\varepsilon(x)} \varphi\right) - \varphi(x). \quad (4.1)$$

Olkoon $y \in \Omega$. Tällöin ottamalla keskiarvointegraali puolittain funktion φ Taylorin kehitelmästä pisteessä x pisteen $x + y$ suhteen saamme

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} \varphi(x+y)\,dy$$

$$= \varphi(x) + \fint_{B_\varepsilon(0)} \langle D\varphi(x), y\rangle\,dy + \frac{1}{2}\fint_{B_\varepsilon(0)} \langle D^2\varphi(x)y, y\rangle\,dy + o(\varepsilon^2).$$

Symmetrian nojalla integraali $\fint_{B_\varepsilon(0)} \langle D\varphi(x), y\rangle\,dy$ katoaa ja samasta syystä

$$\frac{1}{2}\fint_{B_\varepsilon(0)} \langle D^2\varphi(x)y, y\rangle\,dy = \frac{1}{2}\fint_{B_\varepsilon(0)} \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{x_i x_j} y_i y_j\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{x_i x_j} \fint_{B_\varepsilon(0)} y_i y_j\,dy = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i x_i} \fint_{B_\varepsilon(0)} y_i y_i\,dy.$$

Lisäksi symmetrian nojalla kaikille $i \in \{1, \dots, n\}$ saamme laskettua

$$\begin{aligned}
\fint_{B_\varepsilon(0)} y_i^2\,dy &= \frac{1}{n}\fint_{B_\varepsilon(0)} \sum_{j=1}^{n} y_j^2\,dy \\
&= \frac{1}{n}\fint_{B_\varepsilon(0)} |y|^2\,dy \\
&= \frac{1}{n|B_\varepsilon|}\int_0^\varepsilon \int_{\partial B_\rho(0)} \rho^2\,dS\,d\rho \\
&= \frac{1}{n|B_\varepsilon|}\int_0^\varepsilon |\partial B_1|\rho^{n-1}\rho^2\,d\rho \\
&= \frac{|\partial B_1|}{n(n+2)|B_1|\varepsilon^n}\varepsilon^{n+2} \\
&= \frac{|\partial B_1|}{n(n+2)|B_1|}\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Täten

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i x_i} \fint_{B_\varepsilon(0)} y_i^2\,dy = \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta\varphi(x).$$

Saamme

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} \varphi(x+y)\,dy = \varphi(x) + \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta\varphi(x) + o(\varepsilon^2). \tag{4.2}$$

Nyt kertomalla yhtälöä (4.1) puolittain luvulla α ja epäyhtälöä (4.2) luvulla β ja summaamalla nämä saamme

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}&\left(\max_{\overline{B}_\varepsilon(x)}\varphi + \min_{\overline{B}_\varepsilon(x)}\varphi\right) + \beta\fint_{B_\varepsilon(x)}\varphi(y)\,dy - \varphi(x)\\ &\geq \frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\left((p-2)\left\langle D^2\varphi(x)\left(\frac{x_1^\varepsilon - x}{\varepsilon}\right), \left(\frac{x_1^\varepsilon - x}{\varepsilon}\right)\right\rangle\right) + o(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Oletamme, että funktio φ koskettaa funktiota u pisteessä x alhaalta päin. Voimme lisäksi olettaa, että $D\varphi(x) \neq 0$, sillä muutoin kyseessä on kriittinen piste ja viskositeettiyläratkaisun vaatima epäyhtälö $\Delta_p\varphi(x) \leq 0$ toteutuu.

Koska funktiojono $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ suppenee funktioon u tasaisesti, kun $\varepsilon \to 0$, niin on olemassa jono $\{x_\varepsilon\}_\varepsilon$, joka suppenee pisteeseen x siten, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa vakio $\eta_\varepsilon > 0$, jonka avulla epäyhtälö

$$u_\varepsilon(y) - \varphi(y) \geq u_\varepsilon(x_\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon) - \eta_\varepsilon$$

pätee kaikilla $y \in \overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Vakio η_ε tarvitaan, sillä funktio u_ε ei välttämättä ole jatkuva ja siten ei välttämättä löytyisi edellä mainittua minimoivaa pistettä x_ε. Koska funktio u_ε on (p,ε)-harmoninen, pätee

$$\eta_\varepsilon \geq -\varphi(x_\varepsilon) + \frac{\alpha}{2}\left(\max_{\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)}\varphi + \min_{\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)}\varphi\right) + \beta\fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}\varphi\,dy.$$

Nyt valitsemalla $\eta_\varepsilon \geq o(\varepsilon^2)$ ja uudelleenmäärittelemällä pisteen x_1^ε siten, että se toteuttaa yhtälön

$$\varphi(x_1^\varepsilon) = \min_{\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)}\varphi,$$

saamme epäyhtälön nojalla (4.3)

$$0 \geq \frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\left((p-2)\left\langle D^2\varphi(x_\varepsilon)\left(\frac{x_1^\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon}\right), \left(\frac{x_1^\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\rangle + \Delta\varphi(x_\varepsilon)\right) + o(\varepsilon^2). \tag{4.4}$$

Koska $D\varphi(x) \neq 0$, on olemassa $\varepsilon_0 > 0$ siten, että kaikilla $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ pätee $x_1^\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Jos näin ei olisi, voisimme muodostaa jonon pisteitä $z_\varepsilon \in \overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)$ siten, että $z_\varepsilon \to x$, kun $\varepsilon \to 0$ ja $D\varphi(z_\varepsilon) = 0$ kaikilla z_ε, mutta tämä on ristiriita, sillä tällöin saataisiin osittaisderivaattojen jatkuvuuden nojalla $D\varphi(x) = 0$. Täten voimme olettaa, että ε on tarpeeksi pieni ja pätee

$|x_1^\varepsilon - x| = \varepsilon$. Hyödynnetään nyt 1. asteen Taylorin kehitelmää. Ajatellaan aluksi, että ε on kiinnitetty, tällöin

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1^\varepsilon) &= \varphi(x_\varepsilon) + \langle D\varphi(x_\varepsilon), (x_1^\varepsilon - x_\varepsilon)\rangle + o(\varepsilon) \\
\varphi(x_1^\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon) &= \langle D\varphi(x_\varepsilon), (x_1^\varepsilon - x_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon) \\
\frac{\varphi(x_1^\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon)}{|x_1^\varepsilon - x_\varepsilon|} &= \left\langle D\varphi(x_\varepsilon), \frac{x_1^\varepsilon - x_\varepsilon}{|x_1^\varepsilon - x_\varepsilon|}\right\rangle + \frac{o(\varepsilon)}{|x_1^\varepsilon - x_\varepsilon|} \\
\frac{\varphi(x_1^\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon)}{\varepsilon} &= \left\langle D\varphi(x_\varepsilon), \frac{x_1^\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon}\right\rangle + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\
\frac{1}{|D\varphi(x_\varepsilon)|}\frac{\varphi(x_1^\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon)}{\varepsilon} &= \left\langle \frac{D\varphi(x_\varepsilon)}{|D\varphi(x_\varepsilon)|}, \frac{x_1^\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon}\right\rangle + \frac{1}{|D\varphi(x_\varepsilon)|}\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Täten koska

$$\frac{\varphi(x_1^\varepsilon) - \varphi(x)}{\varepsilon} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{\varepsilon} \quad \text{kaikilla } y \in \overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon),$$

niin on myös pädettävä

$$\left\langle \frac{D\varphi(x_\varepsilon)}{|D\varphi(x_\varepsilon)|}, \frac{x_1^\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon}\right\rangle + \frac{1}{|D\varphi(x_\varepsilon)|}\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \left\langle \frac{D\varphi(x_\varepsilon)}{|D\varphi(x_\varepsilon)|}, \frac{y - x_\varepsilon}{\varepsilon}\right\rangle + \frac{1}{|D\varphi(x_\varepsilon)|}\frac{\tilde{o}(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

kaikilla $y \in \overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Epäyhtälön molemmilla puolilla olevat oikeanpuoleiset termit menevät nollaan, kun $\varepsilon \to 0$, joten niiden merkitys katoaa. Koska sisätulot molemmilla puolilla saavat pienimmän arvonsa, kun niissä olevat vektorit ovat toistensa vastavektoreita, voimme päätellä, että kun $\varepsilon \to 0$, niin $x_1^\varepsilon - x_\varepsilon \to -D\varphi(x_\varepsilon)$. Joten saamme

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x_1^\varepsilon - x}{\varepsilon} = -\frac{D\varphi(x)}{|D\varphi(x)|}.$$

Täten jakamalla epäyhtälö (4.4) puolittain luvulla ε^2 ja antamalla $\varepsilon \to 0$ saamme

$$0 \geq \frac{\beta}{2(n+2)}((p-2)\Delta_\infty^N \varphi(x) + \Delta\varphi(x)) = \frac{\beta}{2(n+2)}\Delta_p^N \varphi(x).$$

Funktio u on siis viskositeettiyläratkaisu tähän ongelmaan. Funktion u osoittaminen viskositeettialaratkaisuksi tapahtuu hyvin samalla tavalla. Täten u on viskositeettiratkaisu. □

4.2 Reunasäännöllisyys

Osoitamme, että lauseen 4.2 arvofunktiot toteuttavat Arzelá-Ascolin vaatiman säännöllisyyden lähellä reunaa $\partial\Omega$. Seuraamme lauseen todistuksessa artikkelin [17] lemmojen 4.1 ja 4.4 todistuksia. Kyseisessä artikkelissa on tarkemmat todistukset, joissa ei tehdä oletusta siitä, että käsittelemämme alue on pallo tai että reunadata on lokaalisti vakio.

Lause 4.4. *Olkoon $\{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ kokoelma joukon Ω (p,ε)-harmonisia funktioita kiinnitetyllä jatkuvalla reunadatalla F. Tämä kokoelma toteuttaa Arzelá-Ascolin ehdon 2. kun $x \in \Omega$ ja $y \in \Gamma_\varepsilon$.*

Todistus. Yksinkertaisuuden vuoksi, oletamme, että $\Omega = B_2(0)$ ja että F on vakio lähellä pistettä, jota tarkastelemme. Olkoot $y \in \Gamma_\varepsilon$ ja $z \in B_1(y) \cap \Gamma_\varepsilon$. Merkitsemme

$$\mu := \min\left\{\operatorname{dist}(\Omega, z),\ \operatorname{dist}(\partial B_1(y), z),\ \frac{1}{2}\right\}.$$

Tällöin $B_\mu(z) \subset B_1(y) \setminus \Omega$. Tarkastelemme nyt ongelmaa

$$\begin{cases} \Delta_p u(x) = 0, & x \in B_4(z) \setminus \overline{B}_\mu(z), \\ u(x) = \sup_{B_5(y)\cap\Gamma_\varepsilon} F, & x \in \partial B_\mu(z), \\ u(x) = \sup_{\Gamma_\varepsilon} F, & x \in \partial B_4(z). \end{cases}$$

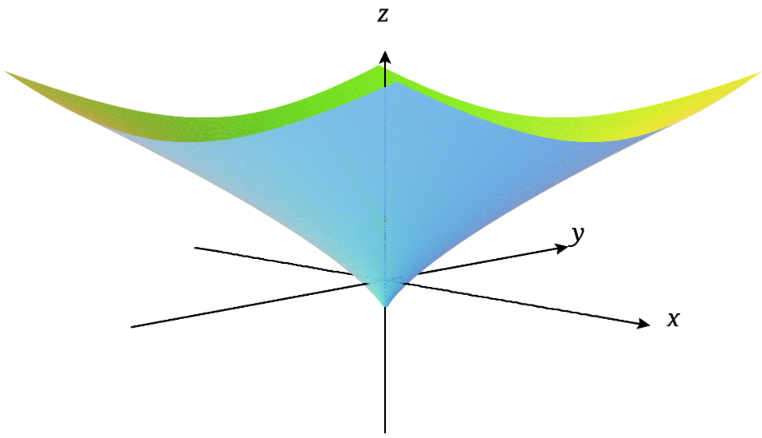
Tällä ongelmalla on eksplisiittinen radiaalisesti symmetrinen ratkaisu. Ratkaisun graafi kuvassa 4.1. Merkitsemme $r := |x - z|$. Kyseinen ratkaisu voidaan tällöin kirjoittaa muodossa

$$u(x) := v(|x - z|) = v(r) := \begin{cases} \frac{a}{r^{\frac{n-p}{p-1}}} + b, & (p \neq n), \\ a\log(r) + b, & (p = n). \end{cases}$$

Laajennamme ratkaisut joukkoon $B_{4+2\varepsilon}(z) \setminus \overline{B}_{\mu-2\varepsilon}(z)$. Merkitsemme yksinkertaisuuden vuoksi myös laajennettua funktiota symbolilla u. Muistamme, että lauseiden 3.7 ja 3.8 nojalla reuna-arvot ja askelpituus ε määrittävät yksikäsitteisen (p,ε)-harmonisen funktion joukolle $B_{4+2\varepsilon}(z) \setminus \overline{B}_{\mu-2\varepsilon}(z)$. Merkitään tätä funktiota merkinnällä $u_\varepsilon^{\text{arvo}}$. Osoitetaan seuraavaksi, että tällöin pätee

$$u_\varepsilon^{\text{arvo}} \to u, \quad \text{tasaisesti joukossa } \overline{B_{4-\varepsilon}(z) \setminus \overline{B}_{\mu-\varepsilon}(z)} = \overline{B}_{4-\varepsilon}(z) \setminus B_{\mu-\varepsilon}(z),$$

kun $\varepsilon \to 0$.



Kuva 4.1: p-Laplacen yhtälön perusratkaisu.

Olkoon S_0^{II} pelaaja II:n strategia, jossa pelitilanteen ollessa pisteessä x_k hän astuu pallon $B_\varepsilon(x_k)$ sisällä pisteeseen, joka melkein minimoi funktion u. Siis

$$u(x_{k+1}) = \inf_{B_\varepsilon(x_k)} u + \lambda 2^{-k},$$

jollain kiinnitetyllä $\lambda > 0$ Funktio u toteuttaa asymptoottisen laajennuksen tasaisella virheellä $O(\varepsilon^3)$, (lähde [18]) toisin sanoen kaikilla $x \in \overline{B}_{4-\varepsilon}(z) \setminus B_{\mu-\varepsilon}(z)$ pätee

$$u(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\max_{\overline{B}_\varepsilon(x)} u + \min_{\overline{B}_\varepsilon(x)} u\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u\, dy + O(\varepsilon^3). \tag{4.5}$$

Valitaan $C > 0$ siten, että $|O(\varepsilon^3)| \leq C\varepsilon^3$. Funktioista $M_k \coloneqq u(x_k) + \lambda 2^{-k} -$

$Ck\varepsilon^3$ koostuva stokastinen prosessi on ylämartingaali, sillä

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[u(x_{k+1}) + \lambda 2^{-(k+1)} - C(k+1)\varepsilon^3 | \mathcal{F}_k] \\
&\overset{\substack{\text{valittu}\\\text{strategia}}}{\leq} \frac{\alpha}{2}\left(\inf_{B_\varepsilon(x_k)} u + \sup_{B_\varepsilon(x_k)} u\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_k)} u\,dy + \lambda 2^{-(k+1)} - C(k+1)\varepsilon^3 \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(\max_{\overline{B}_\varepsilon(x_{k-1})} u + \min_{\overline{B}_\varepsilon(x_k)} u\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_k)} u\,dy + O(\varepsilon^3) + \lambda 2^{-(k+1)} \\
&\quad - O(\varepsilon^3) - C(k+1)\varepsilon^3 \\
&\overset{(4.5)}{=} u(x_k) + \lambda 2^{-(k+1)} - O(\varepsilon^3) - C(k+1)\varepsilon^3 \\
&\leq u(x_k) + \lambda 2^{-k} + C\varepsilon^3 - C(k+1)\varepsilon^3 = u(x_k) + \lambda 2^{-k} - Ck\varepsilon^3.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Tehdään seuraavaksi arvio pelaajan II arvofunktiolle. Saamme

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon^{\mathrm{II}} &= \inf_{S^{\mathrm{II}}} \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[F(x_\tau)] \\
&\leq \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[u(x_\tau)] \\
&= \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[u(x_\tau) - C\tau\varepsilon^3 + C\tau\varepsilon^3] \\
&\overset{\substack{\text{Fatoun}\\\text{lemma}}}{\leq} \sup_{S^{\mathrm{II}}} \left(\liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[u(x_{\tau\wedge k}) - C(\tau\wedge k)\varepsilon^3] + C\varepsilon^3 \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[\tau]\right) \\
&\overset{1.23}{\leq} \sup_{S^{\mathrm{II}}} \left(\liminf_{k\to\infty} (u(x_0) - C\cdot 0\cdot\varepsilon^3) + C\varepsilon^3 \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[\tau]\right) \\
&\leq u(x_0) + C\varepsilon^3 \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[\tau].
\end{aligned}
$$

Samankaltainen argumentti voidaan tehdä myös pelaajalle I, josta saamme $u(x_0) - C\varepsilon^3 \inf_{S^{\mathrm{II}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_0^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[\tau] \leq u_\varepsilon^{\mathrm{I}}(x_0)$. Yhdistämällä nämä lauseen 3.8 kanssa saamme

$$
u(x_0) - C\varepsilon^3 \inf_{S^{\mathrm{II}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_0^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[\tau] \leq u_\varepsilon^{\mathrm{arvo}}(x_0) \leq u(x_0) + C\varepsilon^3 \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[\tau].
$$

Olemme nyt melkein todistaneet, että $u_\varepsilon^{\mathrm{arvo}}(x_0) \to u(x_0)$, kun $\varepsilon \to 0$, tarvitsemme vielä tiedon, että on olemassa $D > 0$ siten, että

$$
\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[\tau] \leq \frac{D}{\varepsilon^2}. \tag{4.7}
$$

Näytämme tämän osoittamalla, että funktioista

$$
N_k := -u(x_k)^2 + u(x_0)^2 + \tilde{D}\varepsilon^2 k
$$

koostuva stokastinen prosessi on ylämartingaali, kun ε on tarpeeksi pieni. Koska $Du \neq 0$, niin jos pelaaja II voittaa kolikonheiton, saamme

$$u(x_k) - u(x_{k-1}) \leq -\varepsilon \inf_{B_{4-\varepsilon}(z)\setminus \overline{B}_{\mu-\varepsilon}(z)} \frac{|Du|}{2}.$$

Tästä saamme

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[(u(x_{k+1}) - u(x_k))^2|\mathcal{F}_k] \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\left(\left(-\varepsilon \inf_{B_{4-\varepsilon}(z)\setminus \overline{B}_{1-\varepsilon}(z)} \frac{|Du|}{2}\right)^2 + 0\right) + \beta \cdot 0 \qquad (4.8)\\
&= \varepsilon^2 \frac{\alpha}{2}\left(\inf_{B_{4-\varepsilon}(z)\setminus \overline{B}_{1-\varepsilon}(z)} \frac{|Du|}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Havaitsemme, että

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[N_{k+1} - N_k|\mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[-u(x_{k+1})^2 + u(x_k)^2 + \tilde{D}\varepsilon^2|\mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[-(u(x_{k+1}) + u(x_k))^2|\mathcal{F}_k] \\
&\quad - \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[2(u(x_{k+1}) + u(x_k))u(x_k)|\mathcal{F}_k] + \tilde{D}\varepsilon^2. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Käytämme lyhyyden vuoksi seuraavassa arviossa merkintää

$$\|u\|_\infty := \sup_{B_{4+2\varepsilon}(z)\setminus \overline{B}_{\mu-2\varepsilon}(z)} u.$$

Voimme olettaa, että $u < 0$, sillä tarpeen tullen voimme vähentää vakion, koska u on rajoitettu. Kuitenkin pitääksemme asiat yksinkertaisemman näköisinä jätämme tämän vakion merkitsemättä. Teemme tämän avulla seuraavan arvion

$$\begin{aligned}
&-\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[2(u(x_{k+1}) + u(x_k))u(x_k)|\mathcal{F}_k] \\
&= \underbrace{-2u(x_k)}_{=2|u(x_k)|}\left(\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[u(x_{k+1})|\mathcal{F}_k] - u(x_k)\right) \\
&= 2|u(x_k)|\left(\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[u(x_{k+1}) - (k+1)C\varepsilon^3|\mathcal{F}_k] + (k+1)C\varepsilon^3 - u(x_k)\right) \\
&\overset{(4.6)}{\leq} 2\|u\|_\infty\left(u(x_k) - kC\varepsilon^3 + (k+1)C\varepsilon^3 - u(x_k)\right) \\
&= 2\|u\|_\infty C\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

Nyt yhdistämällä tämän, (4.8) ja (4.9) saamme

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[N_k - N_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] \le 0,$$

kunhan epäyhtälö

$$\frac{-\varepsilon^2}{2}\left(\inf_{B_{4-\varepsilon}(z)\setminus\overline{B}_{1-\varepsilon}(z)}\frac{|Du|}{2}\right)^2 + 2\|u\|_\infty C\varepsilon^3 + \tilde{D}\varepsilon^2 \le 0$$

pätee. Yllä oleva epäyhtälö pätee, kun valitsemme vakion $\tilde{D}$ siten, että

$$\inf_{B_{4-\varepsilon}(z)\setminus\overline{B}_{1-\varepsilon}(z)}\frac{|Du|}{2} \ge 2\sqrt{\frac{\tilde{D}}{\alpha}}$$

ja oletamme, että

$$\varepsilon < \frac{\tilde{D}}{2\|u\|_\infty C}.$$

Tällöin $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on ylämartingaali ja saamme valinnaisella pysähtymislauseella, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[N_{\tau\wedge k}] \le N_0 = 0,$$

joten

$$\tilde{D}\varepsilon^2\mathbb{E}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[\tau\wedge k] \le \mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}_0}[u(x_{\tau\wedge k})^2 - u(x_0)^2],$$

mistä saamme halutun tuloksen yhtälöä muokkaamalla ja viemällä muuttujan k äärettömään.

Tiedämme siis, että

$$u_\varepsilon^{\text{arvo}} \to u, \quad \text{tasaisesti joukossa } \overline{B}_{4-\varepsilon}(z)\setminus B_{\mu-\varepsilon}(z),$$

kun $\varepsilon \to 0$. Täten

$$|u_\varepsilon^{\text{arvo}} - u| = o(1) \quad \text{joukossa } \overline{B}_{4+\varepsilon}(z)\setminus B_{\mu-\varepsilon}(z),$$

missä $o(1) \to 0$, kun $\varepsilon \to 0$. Nyt tarpeeksi pienille ε saamme vertailuperiaatteen (todistus artikkelissa [17] (sivu 9)) ja äsken osoitetun yhtälön avulla, että

$$u_\varepsilon \le u_\varepsilon^{\text{arvo}} + o(1) \le u + o(1).$$

Alarajan argumentti on samankaltainen. Käytämme alarajana -1:llä kerrottua p-Laplacen perusratkaisua, jota on siirretty ja skaalattu sopivasti. Oletamme funktion F olevan vakio pisteen y lähettyvillä, joten saamme ylärajan ja alarajan arvot hyvin lähelle toisiaan reunan lähellä. Täten saamme funktiolle u_ε halutun säännöllisyyden eli mille tahansa $\eta > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|u_\varepsilon(x) - F(y)| < \eta,$$

kun $|x - y| < \delta$. □

5 Lipschitz-säännöllisyys

Aloitamme tutustumalla ensimmäisessä alaluvussa sylinterikävelyyn ja todistamalla erään arvion tämän avulla. Jälkimmäisessä alaluvussa hyödynnämme tätä arviota Lipschitz-säännöllisyyden todistuksessa. Tämän lähes koko luvun lähteenä toimii artikkeli [19]. Lauseen 5.3 lähteenä toimii artikkeli [15].

5.1 Sylinterikävely

Sylinterikävely on sylinterissä määritelty satunnaiskävely. Olkoon meillä $n+1$-ulotteinen sylinteri $B_{2r}(0) \times (0, 2r+t)$, missä $B_{2r} \subset \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että olemme pisteessä

$$(x_j, y_j) \in B_{2r}(0) \times (0, 2r+t).$$

On kolme mahdollisuutta sen suhteen, mitä tapahtuu seuraavaksi:

- Todennäköisyydellä $\frac{\alpha}{2}$ pätee $(x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_j, y_j - \varepsilon)$.
- Todennäköisyydellä $\frac{\alpha}{2}$ pätee $(x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_j, y_j + \varepsilon)$.
- Todennäköisyydellä β pätee $(x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_{j+1}, y_j)$, missä x_{j+1} on tasaisen todennäköisyysjakauman mukaisesti valittu satunnainen piste pallossa $B_\varepsilon(x_j)$.

Kävely loppuu, kun poistumme sylinteristä. Merkitsemme poistumisaikaa symbolilla τ'.

Seuraavalle lemmalle on olemassa stokastinen todistus lähteessä [15]. Tässä tutkielmassa annamme osittaisdifferentiaaliyhtälöihin perustuvan todistuksen.

Lemma 5.1. *Aloitetaan sylinterikävely pisteestä $(0, t)$. Tällöin todennäköisyys, että kävely ei poistu sylinteristä pohjan kautta, on pienempää kuin*

$$L(p, n)\frac{t+\varepsilon}{r},$$

kaikille tarpeeksi pienille $\varepsilon > 0$.

Todistus. Teemme todistuksen kahdessa palassa, ensin osoitamme, että saamme osoitettua halutun väitteen käyttämällä sopivaa sileää funktiota u apuna. Jälkimmäisessä osassa osoitamme, että tällainen funktio u on todella olemassa. Merkitsemme tämän todistuksen ajan

$$(x, y) := (x_1, x_2, \dots, x_n, y).$$

Todennäköisyys poistua sylinteristä pohjan kautta. Oletetaan, että meillä on sileä funktio u, joka toteuttaa asymptoottisen laajennuksen

$$u(x,y) = \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u(h,y)\,dh + \frac{\alpha}{2}\Big(u(x,y+\varepsilon) + u(x,y-\varepsilon)\Big) + O(\varepsilon^3),$$

tasaisella virheellä $|O(\varepsilon^3)| \leq C\varepsilon^3$ ja jolla on reuna-arvot 1 joukossa $B_{2r}(0) \times \{0\}$ ja 0 muualla.[2]

Käsitellään satunnaismuuttujien jonoa $(u(x_j,y_j))_{j\in\mathbb{N}}$, missä pisteet (x_j,y_j) vastaavat sylinterikävelyn pisteitä ja jonon ensimmäinen piste (x_0,y_0) vastaa sylinterikävelyn aloituspistettä $(0,t)$. Huomataan, että asymptoottisen laajennuksen nojalla funktioista $M_j := u(x_j,y_j) + cj\varepsilon^3$ koostuva prosessi on alamartingaali, sillä

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[u(x_{j+1},y_{j+1}) + c(j+1)\varepsilon^3|\mathcal{F}_j] \\
&\quad= \beta \fint_{B_\varepsilon(x_j)} u(h,y_j)\,dh + \frac{\alpha}{2}\Big(u(x_j,y_j+\varepsilon) + u(x_j,y_j-\varepsilon)\Big) + c(j+1)\varepsilon^3 \\
&\quad= u(x_j,y_j) - O(\varepsilon^3) + c(j+1)\varepsilon^3 \\
&\quad\geq u(x_j,y_j) + cj\varepsilon^3,
\end{aligned}$$

pätee kun $c \geq \frac{O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^3}$. Täten odotusarvon lineaarisuuden ja proposition 1.24 nojalla saamme, että

$$\mathbb{E}[u(x_{\tau'},y_{\tau'})] + c\mathbb{E}[\tau']\varepsilon^3 = \mathbb{E}\left[u(x_{\tau'},y_{\tau'}) + c\tau'\varepsilon^3\right] = \mathbb{E}M_{\tau'} = \mathbb{E}M_0$$

$$= \mathbb{E}u(0,t) = u(0,t).$$

Merkitsemme kirjaimella P todennäköisyyttä, että saavutamme reunan $B_{2r}(0) \times \{0\}$. Tällöin ylläolevan nojalla

$$u(0,t) - c\mathbb{E}[\tau']\varepsilon^3 \leq \mathbb{E}[u(x_{\tau'},y_{\tau'})] \leq P\cdot 1 + (1-P)\cdot 0 = P. \tag{5.1}$$

Seuraavaksi näytämme, että $0 \leq \mathbb{E}[\tau'] \leq \frac{C}{\varepsilon^2}$. Tämä seuraa faktasta, että $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$, missä $N_j := y_j^2 - \alpha j\varepsilon^2$, on martingaali. Martingaaliominaisuus pätee, sillä

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_{j+1}^2 - \alpha(j+1)\varepsilon^2|\mathcal{F}_j] &= \frac{\alpha}{2}\left((y_j+\varepsilon)^2 + (y_j-\varepsilon)^2\right) + \beta y_j^2 - \alpha(j+1)\varepsilon^2 \\
&= y_j^2 + \alpha\varepsilon^2 - \alpha(j+1)\varepsilon^2 \\
&= y_j^2 - \alpha j\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

[2]Kun annamme eksplisiittisen esityksen funktiolle u, joudumme askelpituuden takia määrittelemään sen suuremmassa sylinterissä.

Kahden pysähtymisajan minimi $\tau' \wedge k$ on myös pysähtymisaika proposition 1.18 nojalla. Lisäksi $\tau' \wedge k$ on äärellinen kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Täten proposition 1.24 nojalla saamme

$$\mathbb{E}N_0 = \mathbb{E}N_{\tau' \wedge k} \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N},$$

joten

$$\mathbb{E}N_0 = \limsup_{k \to \infty} \mathbb{E}N_{\tau' \wedge k}.$$

Nyt käänteisen Fatoun lemman (Lause A.2) nojalla saamme

$$y_0^2 = \mathbb{E}N_0 = \limsup_{k \to \infty} \mathbb{E}N_{\tau' \wedge k} \leq \mathbb{E}N_{\tau'} = \mathbb{E}[y_{\tau'}^2 - \alpha \tau' \varepsilon^2].$$

Tästä seuraa

$$y_0^2 \leq \mathbb{E}[(1+\varepsilon)^2 - \alpha \tau' \varepsilon^2] = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \alpha \varepsilon^2 \mathbb{E}[\tau'].$$

Siirtämällä termejä saamme

$$\alpha \varepsilon^2 \mathbb{E}[\tau'] \leq 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - y_0^2.$$

Nyt jakamalla puolittain $\alpha \varepsilon^2$:lla saamme

$$\mathbb{E}[\tau'] \leq \frac{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - y_0^2}{\alpha} \varepsilon^{-2}.$$

Tästä saamme

$$\mathbb{E}[\tau'] \leq \frac{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - y_0^2}{\alpha} \varepsilon^{-2} \leq \frac{1+2+1}{\alpha} \varepsilon^{-2} \leq C(\alpha) \varepsilon^{-2}.$$

Nyt kertomalla puolittain ε^3:lla ja jakamalla vakion pois oikealta puolelta saamme

$$c\mathbb{E}[\tau'] \varepsilon^3 \leq \varepsilon. \tag{5.2}$$

Voimme olettaa, että funktio u on sileä, sillä jälkimmäisessä osassa tätä todistusta annamme eksplisiittisen esityksen funktiolle u, josta näemme, että se on sileä. Sileyden nojalla funktio u on Lipschitz-jatkuva. Myöhemmin näemme, että funktio u riippuu parametrista p ja dimensiosta n, joten funktion u Lipschitz-vakio riippuu niistä. Yhdistämällä tämä epäyhtälön (5.2) kanssa, saamme että on olemassa $L(p,n) = L > 0$ siten, että

$$u(0, -\varepsilon) - u(0,t) \leq L(t + \varepsilon) - c\mathbb{E}[\tau'] \varepsilon^3,$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$1 - L(t+\varepsilon) \leq u(0,t) - c\mathbb{E}[\tau'] \varepsilon^3.$$

Yhdistämällä tähän epäyhtälön (5.1) saamme

$$1 - L(t+\varepsilon) \leq u(0,t) - c\mathbb{E}[\tau']\varepsilon^3 \leq P.$$

Funktion u löytäminen. Seuraavaksi annamme eksplisiittisen esityksen sileällä funktiolle u, joka toteuttaa asymptoottisen laajennukseen ja saa sopivat reuna-arvot.

Merkitään

$$R_\varepsilon \coloneqq ((\overline{B}_{2r+\varepsilon}(0) \setminus B_{2r}(0)) \times (0, 2r+t) \cup \overline{B}_{2r}(0) \times [2r+t, 2r+t+\varepsilon].$$

Tavoitteenamme on löytää funktio $u\colon \overline{B}_{2r+\varepsilon}(0) \times [-\varepsilon, 2r+t+\varepsilon] \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\begin{aligned} u(x,-\varepsilon) &\approx 1, \quad \text{kun } x \text{ on lähellä nollaa,} \\ u &\leq 0, \quad \text{joukossa } R_\varepsilon, \\ u &\leq 1, \quad \text{määrittelyjoukossaan,} \\ \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} + (p-2)u_{yy} &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Hyödynnetään funktion u Taylorin kehitelmää, saamme

$$u(x+h,y) \approx u(x,y) + \langle Du(x,y), h\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2u(x,y)h, h\rangle,$$

nyt voimme soveltaa yhtälöä (4.2) ja saamme

$$⨍_{B_\varepsilon(0)} u(x+h,y)\,dh \approx u(x,y) + \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)} \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_i}(x,y)$$

Lisäksi

$$u(x, y \pm \varepsilon) \approx u(x,y) \pm u_y(x,y)\varepsilon + \frac{1}{2}u_{yy}(x,y)\varepsilon^2,$$

joten

$$u(x,y+\varepsilon) + u(x,y-\varepsilon) \approx 2u(x,y) + u_{yy}(x,y)\varepsilon^2.$$

Muistetaan, että

$$\beta = \frac{n+2}{p+n} \quad \text{ja} \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{p-2}{2(p+n)}.$$

Täten

$$
\begin{aligned}
&\beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u(x,y)\,dh + \frac{\alpha}{2}\Big(u(x,y+\varepsilon) + u(x,y-\varepsilon)\Big) \\
&= \beta\left(u(x,y) + \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,y)\right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2}\Big(2u(x,y) + u_{yy}(x,y)\varepsilon^2\Big) + O(\varepsilon^3) \\
&= \frac{n+2}{p+n}u(x,y) + \frac{n+2}{p+n}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,y) + 2\cdot\frac{p-2}{2(p+n)}u(x,y) \\
&\qquad + \frac{p-2}{2(p+n)}u_{yy}(x,y)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \\
&= u(x,y) + \frac{\varepsilon^2}{2(p+n)}\left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,y) + u_{yy}(x,y)(p-2)\right) + O(\varepsilon^3) \\
&\overset{(5.3)}{=} u(x,y) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
$$

Olkoot v harmoninen funktio ja

$$
u(x,y) = v\left(x, \frac{y}{\sqrt{p-2}}\right) = v(x,s),
$$

täten

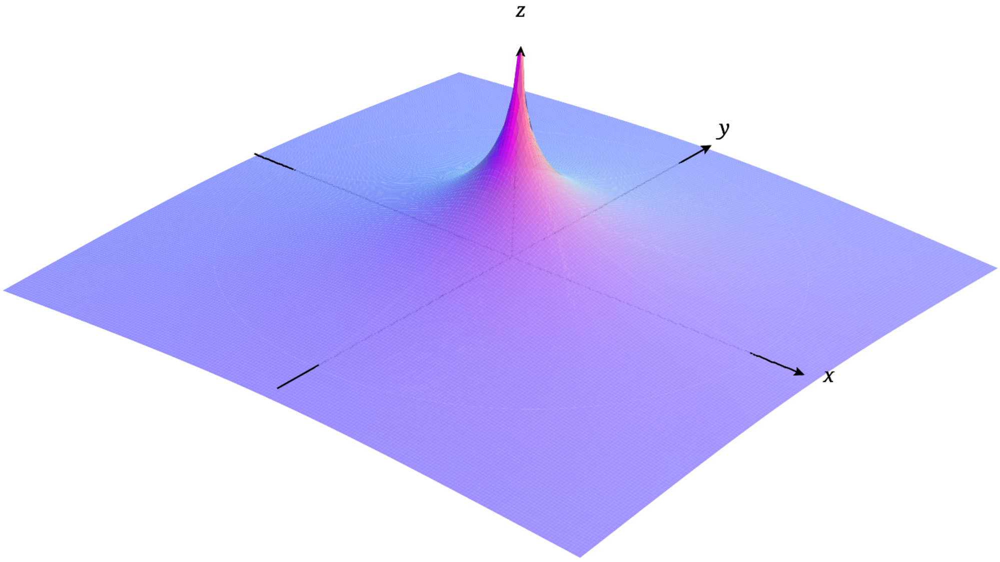
$$
u_{yy}(x,y) = \frac{v_{ss}\left(x, \frac{y}{\sqrt{p-2}}\right)}{p-2}.
$$

Funktio u toteuttaa yhtälön

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,y) + (p-2)u_{yy}(x,y) &= \sum_{j=1}^{n} v_{x_jx_j}(x,s) + (p-2)\frac{v_{ss}\left(x, \frac{y}{\sqrt{p-2}}\right)}{p-2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_{x_jx_j}(x,s) + v_{ss}(x,s) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Saamme sopivan funktion skaalaamalla ja siirtämällä Laplacen yhtälön *perusratkaisua* siten, että tasa-arvo joukko 1 leikkaa pisteen $(0,-\varepsilon)$ ja tasa-arvojoukko 0 läpäisee joukon $\partial B_{2r}(0) \times \{0\}$. Laplacen yhtälön perusratkaisu $\Phi\colon \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ on muotoa

$$
\Phi(x,y) \coloneqq \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|(x,y)| & (m=2) \\ \frac{1}{m(m-2)|B_1|}\cdot\frac{1}{|(x,y)|^2} & (m \geq 3). \end{cases}
$$



Kuva 5.1: Laplacen yhtälön perusratkaisu.

Tämä ratkaisu löytyy muun muassa kirjasta [5]. Ratkaisun graafi kuvassa 5.1. Oletamme, että $n \geq 2$, tällöin $n+1 \geq 3$, joten huomioimme vain perusratkaisun muodon. Nyt muuttamalla funktiota Φ aiemmin mainituilla tavoilla saamme funktion v,

$$v(x,s) := \frac{|2re_1 + 2\varepsilon e_{n+1}|^2\varepsilon^2}{|2re_1 + 2\varepsilon e_{n+1}|^2 - \varepsilon^2} \frac{1}{|(x,s) + 2\varepsilon e_{n+1}|^2} - \frac{\varepsilon^2}{|2re_1 + 2\varepsilon e_n|^2 - \varepsilon^2}.$$

Joten

$$u(x,y) = \frac{|2re_1 + 2\varepsilon e_{n+1}|^2\varepsilon^2}{|2re_1 + 2\varepsilon e_{n+1}|^2 - \varepsilon^2} \frac{1}{\left|\left(x, \frac{y}{\sqrt{p-2}}\right) + 2\varepsilon e_{n+1}\right|^2} - \frac{\varepsilon^2}{|2re_1 + 2\varepsilon e_{n+1}|^2 - \varepsilon^2}.$$

$\square$

5.2 Lipschitz-säännöllisyyden todistus

Tässä alaluvussa pelin historiaa on muutettava siten, että se seuraa myös kolikonheittojen tuloksia pelisijaintien lisäksi ja siten myös todennäköisyysavaruutemme filtraatio muuttuu hieman. Yksinkertaisuuden vuoksi emme mene yksityiskohtiin asian suhteen. Tämä muutos pitää tehdä, jotta voimme käyttää myöhemmin tarvittavaa kumoamisstrategiaa.

Aloitetaan osoittamalla seuraava lemma, jonka jälkeen voimme todistaa Lipschitz-säännöllisyyden.

Lemma 5.2. *Olkoon τ^* pysähtymisaika, jolle pätee $\tau^* \leq \tau$, missä τ on tavallinen poistumisaika rajoitetusta alueesta. Tällöin*

$$u_\varepsilon(y) \leq \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^y_{S^{\mathrm{I}}, S^{\mathrm{II}}_0} \left[u_\varepsilon(x_{\tau^*}) \right],$$

mille tahansa kiinnitetylle S^{II}_0 ja

$$u_\varepsilon(y) \geq \inf_{S^{\mathrm{II}}} \mathbb{E}^y_{S^{\mathrm{I}}_0, S^{\mathrm{II}}} \left[u_\varepsilon(x_{\tau^*}) \right],$$

mille tahansa kiinnitetylle S^{I}_0.

Todistus. Oletamme, että pelaaja II seuraa kiinnitettyä strategiaa S^{II}_0. Seuratkoon tällöin pelaaja I strategiaa $S^{\mathrm{I}}_{\max}$. Tässä strategiassa pelitilanteen ollessa pisteessä $x_k \in \Omega$ hän siirtyy pisteeseen, joka melkein maksimoi funktion u_ε, eli pisteeseen $x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k)$ jolle pätee

$$u_\varepsilon(x_{k+1}) \geq \sup_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon - \eta 2^{-(k+1)},$$

jollakin kiinnitetyllä $\eta > 0$. Tämän valinnan ja DOP:n nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S^{\mathrm{I}}_{\max}, S^{\mathrm{II}}_0} \left[u_\varepsilon(x_{k+1}) - \eta 2^{-(k+1)} | \mathcal{F}_k \right] \\
&\geq \frac{\alpha}{2} \left(\inf_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon + \sup_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon - \eta 2^{-(k+1)} \right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_k)} u_\varepsilon \, dy - \eta 2^{-(k+1)} \\
&\geq u_\varepsilon(x_k) - \eta 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Yllä olevasta seuraa, että satunnaismuuttujista $M_k := u_\varepsilon(x_k) - \eta 2^{-k}$ koostuva stokastinen prosessi on rajoitettu alamartingaali. Proposition 1.24 avulla saamme

$$\begin{aligned}
\sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^y_{S^{\mathrm{I}}, S^{\mathrm{II}}_0} \left[u_\varepsilon(x_{\tau^*}) \right] &\geq \mathbb{E}^y_{S^{\mathrm{I}}_{\max}, S^{\mathrm{II}}_0} \left[u_\varepsilon(x_{\tau^*}) \right] \\
&\geq \mathbb{E}^y_{S^{\mathrm{I}}_{\max}, S^{\mathrm{II}}_0} \left[u_\varepsilon(x_{\tau^*} - \eta 2^{-\tau^*}) \right] \\
&\geq \mathbb{E}^y_{S^{\mathrm{I}}_{\max}, S^{\mathrm{II}}_0} \left[M_0 \right] = u_\varepsilon(y) - \eta.
\end{aligned}$$

Koska $\eta > 0$ on mielivaltainen, olemme todistaneet ensimmäisen väitteen. Toisen väitteen todistus on samankaltainen. $\square$

Seuraavan lauseen todistuksessa seuraamme artikkelin [15] sivuja 8-10.

Lause 5.3 (Lipschitz-säännöllisyys)**.** *Olkoot* u_ε (p, ε)*-harmoninen funktio joukossa* Ω *ja* $z_0 \in \Omega$*. Lisäksi olkoon* $r > 0$ *sellainen, että* $B_{10r}(z_0) \subset \Omega$*. Tällöin kun* $r > \varepsilon$*, niin*

$$|u_\varepsilon - u_\varepsilon(y)| \leq \frac{L}{r} \left(\sup_{B_{6r}(z_0)} u_\varepsilon - \inf_{B_{6r}(z_0)} u_\varepsilon \right) |x - y|,$$

kaikille $x, y \in B_r(z_0)$*, joille* $|x - y| \geq \varepsilon$*.*

Todistus. Olkoot $x, y \in B_r(z_0)$. Valitsemme positiivisen kokonaisluvun m siten, että

$$(m - 1)\varepsilon \leq |x - y| < m\varepsilon.$$

Nyt kiinnitämme pisteen $z \in B_{2r}(z_0)$ siten, että

$$|z - x| = |z - y| = (m - 1)\varepsilon. \tag{5.4}$$

Pelaajalle II määritämme strategian S_0^{II} peliin, joka alkaa pisteestä x. Tässä strategiassa pelaaja II pyrkii kumoamaan pelaajan I aikaisimman liikkeen, jota ei ole jo peruttu. Jos kuitenkin kaikki pelaajan I liikkeet on kumottu ja pelaaja II voittaa kolikonheiton, hän siirtyy vektorin

$$\varepsilon \left(\frac{m-1}{m} \right) \frac{z - x}{|z - x|}$$

suuntaisesti sen pituuden verran. Kerroin $\frac{m-1}{m}$ tarvitaan, sillä pelaajat eivät voi ottaa askelta avoimen pallon $B_\varepsilon(x)$ reunalle.

Jokaisella hetkellä pelitilanne voidaan jakaa vektorien summaksi seuraavasti

$$x + \sum_{k \in I_1} u_{k,1} + \sum_{k \in I_2} u_{k,2} + \sum_{k \in I_3} v_k.$$

Tässä indeksijoukko I_1 koostuu pelaajan I voittamien kierrosten luvuista, joukko I_2 taas koostuu pelaajan II voittamien kierrosten luvuista ja I_3 niiden kierrosten luvuista, joilla siirryttiin satunnaisiin pisteisiin. Vektorit $u_{k,1}$ taas merkitsevät pelaajan I liikkeitä, vektorit $u_{k,2}$ pelaajan II liikkeitä ja vektorit v_k satunnaisesti valittuja pisteitä.

Määrittelemme nyt pysähtymisajan τ^*. Pelin päättymiselle on kolme ehtoa:

1. Jos pelaaja II on voittanut m kertaa enemmän kuin pelaaja I.
2. Jos pelaaja I on voittanut $\left\lceil \frac{2r}{\varepsilon} \right\rceil$ kertaa useammin kuin pelaaja II.
3. Jos $|\sum_{k \in I_3} v_k| \geq 2r$.

Pysähtymisaika τ^* on äärellinen melkein varmasti. Tämä tulee satunnaiskävelyn äärellisestä pysähtymisajasta, pysähtymisajan äärellisyys muutoin selkeä.

Tapauksessa 1. pelaaja II on kumonnut pelaajan I kaikki askeleet ja ottanut m määrän askelia vektorin $\varepsilon\left(\frac{m-1}{m}\right)\frac{z-x}{|z-x|}$ mukaisesti. Joten kun laskemme pelaajien I ja II askeleet yhteen, päädymme pisteeseen

$$\text{ASKELEET} = \sum_{k\in I_1} u_{k,1} + \sum_{k\in I_2} u_{k,2} = m\varepsilon\left(\frac{m-1}{m}\right)\frac{z-x}{|z-x|} \overset{(5.4)}{=} z-x.$$

Täten pelin pysähtymispiste x_{τ^*} on satunnainen, sillä

$$x_{\tau^*} = x + \sum_{k\in I_1} u_{k,1} + \sum_{k\in I_2} u_{k,2} + \sum_{k\in I_3} v_k = z + \sum_{k\in I_3} v_k. \tag{5.5}$$

Toisaalta tapauksessa 1. on korkeintaan $\left\lfloor\frac{2r}{\varepsilon}\right\rfloor + m$ vektoria ja tapauksessa 2. $\left\lceil\frac{2r}{\varepsilon}\right\rceil + m - 1$ vektoria, jotka eivät kumoudu summassa

$$\sum_{k\in I_1} u_{k,1} + \sum_{k\in I_2} u_{k,2}.$$

Huomataan lisäksi, että $\left\lfloor\frac{2r}{\varepsilon}\right\rfloor + m \geq \left\lceil\frac{2r}{\varepsilon}\right\rceil + m - 1$, joten

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k\in I_1} u_{k,1} + \sum_{k\in I_2} u_{k,2}\right| &\leq \varepsilon\left\lfloor\frac{2r}{\varepsilon}\right\rfloor + m\varepsilon\left(\frac{m-1}{m}\right) \leq \varepsilon\frac{2r}{\varepsilon} + \varepsilon(m-1)\\ &\leq 2r + |x-y| < 4r.\end{aligned}$$

Lisäämällä tähän arvioon pelin kolmas päättymisehto saadaan kolmioepäyhtälön avulla

$$\left|\sum_{k\in I_1} u_{k,1} + \sum_{k\in I_2} u_{k,2} + \sum_{k\in I_3} v_k\right| \leq \left|\sum_{k\in I_1} u_{k,1} + \sum_{k\in I_2} u_{k,2}\right| + \left|\sum_{k\in I_3} v_k\right| < 4r + 2r = 6r,$$

kun peli ei ole vielä pysähtynyt. Eli emme poistu pallosta $B_{6r}(z_0)$, kun peli on käynnissä.

Olkoon S_0^{I} vastaava kumoamisstrategia Pelaajalle I, kun peli alkaa pisteestä y. Tällöin millä tahansa Pelaajien I ja II strategioilla $S^{\mathrm{I}}, S^{\mathrm{II}}$ pätee

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^x_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[u_\varepsilon(x_{\tau^*}) \mid \text{peli päättyy ehtoon 1.}]\\ &=\mathbb{E}^y_{S_0^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[u_\varepsilon(x_{\tau^*}) \mid \text{peli päättyy ehtoon 1.}].\end{aligned} \tag{5.6}$$

Yhtälö (5.6) pätee, sillä jos peli päättyy ehdolla 1., yhtälössä (5.5) oleva piste x_{τ^*} on riippumaton strategioista ja pelin aloituspisteestä. Lemman 5.2 nojalla saadaan, että

$$u_\varepsilon(x) \leq \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[u_\varepsilon(x_{\tau^*})]$$

ja

$$u_\varepsilon(y) \geq \inf_{S^{\mathrm{II}}} \mathbb{E}^{y}_{S_0^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[u_\varepsilon(x_{\tau^*})].$$

merkitsemme symbolilla P todennäköisyyttä, että peli loppuu ehdolla 1., joka riippuu vain luvuista p ja n. Käyttämällä ylhäällä olevia arvioita, tietoa, että kun peli on käynnissä, emme poistu pallosta $B_{6r}(z_0)$, ja yhtälöä (5.6) symmetrisen osan eliminointiin saadaan, että

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq & \left| \sup_{S^{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[u_\varepsilon(x_{\tau^*})] - \inf_{S^{\mathrm{II}}} \mathbb{E}^{y}_{S_0^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[u_\varepsilon(x_{\tau^*})] \right| \\
\leq & \left| P(\mathbb{E}^{x}_{S^{\mathrm{I}},S_0^{\mathrm{II}}}[u_\varepsilon(x_{\tau^*})| \text{ ehto } 1.] - \mathbb{E}^{y}_{S_0^{\mathrm{I}},S^{\mathrm{II}}}[u_\varepsilon(x_{\tau^*})| \text{ ehto } 1.]) \right| \\
& + (1-P) \left(\sup_{B_{6r}(z_0)} u_\varepsilon - \inf_{B_{6r}(z_0)} u_\varepsilon \right) \\
\leq & (1-P) \left(\sup_{B_{6r}(z_0)} u_\varepsilon - \inf_{B_{6r}(z_0)} u_\varepsilon \right).
\end{aligned}$$

Huomataan, että soveltamalla lemmaa 5.1 valinnalla $t = m\varepsilon$, saamme summalle $1 - P$ ylärajan

$$1 - P \leq \frac{C(p,n)(m+1)\varepsilon}{r} \leq \frac{L}{r}|x - y|$$

kun $|x - y| \geq \varepsilon$ kaikilla $|x - y| \geq \varepsilon$. □

A Liite

Tämän lemman todistuksessa seuraamme artikkelia [16].

Lemma A.1 (Borel-mitallisten strategioiden olemassaolo). *Olkoot $\delta > 0$ ja $u \colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borel-funktio. Tällöin on olemassa rajoitetut Borel-funktiot $S_{\sup}, S_{\inf} \colon \Omega \to \Omega_\varepsilon$, joille pätee $S_{\inf}(x), S_{\sup}(x) \in B_\varepsilon(x)$ ja*

$$u(S_{\sup}(x)) \geq \sup_{B_\varepsilon(x)} u - \delta \qquad u(S_{\inf}(x)) \geq \inf_{B_\varepsilon(x)} u + \delta$$

kaikille $x \in \Omega$.

Todistus. Riittää löytää $S_{\sup}$. Merkitsemme

$$\mathcal{B} \coloneqq \{B_r(x) \subset \Omega_\varepsilon : x \in \mathbb{Q}^n \cap \Omega_\varepsilon \text{ ja } r \in \mathbb{Q}_+\}.$$

$\mathcal{B}$ on numeroituva joukko. Valitaan kaikilla $B \in \mathcal{B}$ piste $x_B \in B$ siten, että

$$v(x_B) \geq \sup_{y \in B} v(y) - \frac{\delta}{2}.$$

merkitsemme valittujen pisteiden joukkoa seuraavasti $S \coloneqq \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$. Mikä tahansa avoin pallo $B_r(x) \subset \Omega_\varepsilon$ voidaan esittää joukossa $\mathcal{B}$ olevien pallojen yhdisteenä, eli jokaiselle $x \in \Omega$ pätee

$$\sup_{B_\varepsilon(x)} v \leq \sup_{S \cap B_\varepsilon(x)} v + \frac{\delta}{2}.$$

Funktio $S_{\sup}$ saadaan käyttämällä *Lusinin numeroituvaa Borel-valintalausetta*, joka löytyy kirjasta [23] sivulta 210, Borel joukkoon

$$\left\{(x,y) \in \Omega \times \Omega_\varepsilon : |x-y| < \varepsilon \text{ ja } \sup_{B_\varepsilon(x)} v < v(y) - \delta\right\} \cap (\mathbb{R}^n \times S). \qquad \square$$

Fatoun lemmasta saadaan helposti osoitettua niin kutsuttu käänteinen versio. Fatoun lemma löytyy esimerkiksi kirjoista [22] (sivu 23) ja [25].

Lemma A.2 (Käänteinen Fatoun lemma)**.** *Olkoot $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus ja $f_k \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ jono μ-mitallisia funktioita. Tällöin jos on olemassa μ-integroituva $f \colon X \to \mathbb{R}$ siten, että $f_k \leq f$ pätee pisteittäin kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin*

$$\limsup_{k \to \infty} \int_X f_k \, d\mu \leq \int_X \limsup_{k \to \infty} f_k \, d\mu.$$

Todistus. Koska $f_k \leq f$, niin $0 \leq f - f_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$-\limsup_{k \to \infty} \int_X f_k - f \, d\mu = \liminf_{k \to \infty} \int_X f - f_k \, d\mu \geq \int_X \liminf_{k \to \infty} f - f_k \, d\mu$$

$$= -\int_X \limsup_{k \to \infty} f_k - f \, d\mu,$$

joten summaamalla funktion f integraali pois ja kertomalla puolittain vakiolla -1 saamme

$$\limsup_{k \to \infty} \int_X f_k \, d\mu \leq \int_X \limsup_{k \to \infty} f_k \, d\mu. \qquad \square$$

Viitteet

[1] Gunnar Aronsson. On the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$. *Arkiv för Matematik*, 7(5):395–425, 1968.

[2] Richard F. Bass. *Stochastic Processes*, volume 33 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, 2011.

[3] Pablo Blanc and Julio Daniel Rossi. *Game Theory and Partial Differential Equations*, volume 31 of *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. De Gruyter, 2019.

[4] Michael G. Crandall and Pierre-Louis Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American mathematical society*, 277(1):1–42, 1983.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2nd edition, 2010.

[6] Julio González Díaz, Ignacio García-Jurado, and M. Fiestras-Janiero. *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, volume 115 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2010.

[7] Michael G. Grandal, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7(1):1–67, 1992.

[8] Hitoshi Ishii and Pierre-Louise Lions. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations. *Journal of Differential Equations*, 83(1):26–78, 1990.

[9] Petri Juutinen, Peter Lindqvist, and Juan J. Manfredi. On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 33(3):699–717, 2001.

[10] Nikos Katzourakis. *An Introduction To Viscosity Solutions for Fully Nonlinear PDE with Applications to Calculus of Variations in L^∞*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer Cham, 1st edition, 2014.

[11] Bernd Kawohl, Juan Manfredi, and Mikko Parviainen. Solutions of nonlinear pdes in the sense of averages. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 97(2):173–188, 2012.

[12] Shigeaki Koike. *A beginner's guide to the theory of viscosity solutions*, volume 13 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, 2004.

[13] Marta Lewicka. *A Course on Tug-of-War Games with Random Noise*. Universitext. Springer Cham, 2020.

[14] Peter Lindqvist. *Notes on the p-Laplace equation*, volume 161 of *Report / University of Jyväskylä, Department of Mathematics and Statistics*. University of Jyväskylä, 2nd edition, 2017.

[15] Hannes Luiro, Mikko Parviainen, and Eero Saksman. Harnack's inequality for p-harmonic functions via stochastic games. *Communications in Partial Differential Equations*, 38(11):1985–2003, 2013.

[16] Hannes Luiro, Mikko Parviainen, and Eero Saksman. On the existence and uniqueness of p-harmonious functions. *Differential and Integral Equations*, 27(3/4):201–216, 2014.

[17] Juan Manfredi, Mikko Parviainen, and Julio Rossi. On the definition and properties of p-harmonious functions. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V*, 11(2):215–241, 2012.

[18] Juan J. Manfredi, Mikko Parviainen, and Julio D. Rossi. An asymptotic mean value characterization for p-harmonic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138(3):881–889, 2010.

[19] Mikko Parviainen. Notes on tug-of-war games and the p-Laplace equation. *To appear in SpringerBriefs on PDEs and Data Science*, 2023.

[20] Yuval Peres, Oded Schramm, Scott Sheffield, and David B. Wilson. Tug-of-war and the infinity Laplacian. *Journal of the American Mathematical Society*, 22(1):167–210, 2009.

[21] Yuval Peres and Scott Sheffield. Tug-of-war with noise: A game-theoretic view of the p-Laplacian. *Duke Mathematical Journal*, 145(1):91–120, 2008.

[22] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.

[23] Shashi M. Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1st edition, 1998.

[24] Daniel W. Stroock. *Probability Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2011.

[25] Terence Tao. *An Introduction to Measure Theory*, volume 126 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, 2011.

[26] Sathamangalam R. S. Varadhan. *Probability theory*, volume 7 of *Courant Lecture Notes*. American Mathematical Society and Courant Institute of Mathematical Sciences, 2001.

[27] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1st edition, 1991.

[28] Yu Yifeng. A remark on C^2 infinity-harmonic functions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2006(122):1–4, 2006.