



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO  
MATEMATIIKAN JA TILASTO-  
TIETEEN LAITOS

PRO GRADU-TUTKIELMA

# Kvaterniot ja geometria

*Alexi Peltokangas*

12. kesäkuuta 2023



---

**Tekijä**Aleksi Peltokangas

---

**Otsikko**Kvaterniot ja geometria (Quaternions and geometry)

---

**Tutkinto-ohjelma**Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

---

**Päivämäärä**

12. kesäkuuta 2023

**Sivumäärä**54

---

**Tiivistelmä**

Tässä tutkielmassa käsitellään Hamiltonin kvaternioita sekä niiden yhteyttä säännöllisten monitahokkaiden symmetriaan. Tutkielman aluksi kerrataan muutamia jo tunnettuja määritelmiä ryhmistä, renkaista ja matriiseista. Lisäksi esitellään aliryhmäkriteeri ja alirengastesti, joiden avulla on helppo tutkia ryhmien ja renkaiden osajoukkojen ominaisuuksia.

Tämän jälkeen tutkielmassa perehdytään hieman siihen, kuinka Sir William Rowan Hamilton päätyi löytämään kvaterniot etsiessään matemaattista mallinnusta kolmiulotteiselle maailmalle. Luvussa myös tarkastellaan kvaternioiden algebrallisia ominaisuuksia ja osoitetaan, että kvaterniot muodostavat vinon kunnan.

Kolmannessa luvussa keskitytään kvaternioiden lineaarialgebrallisiin ominaisuuksiin, kuten sisätuloon ja normiin. Tästä päädytäänkin tulokseen, että kvaterniot vastaavat reaaliavaruutta  $\mathbb{R}^4$  ja imaginaariset kvaterniot niiden osajoukkona puolestaan avaruutta  $\mathbb{R}^3$ . Luvun lopuksi osoitetaan eräs tutkielman tärkeimpiä tuloksia, että jokainen joukon  $\text{Im } \mathbb{H}$  erityinen ortogonaalikuvaus voidaan esittää yksikkökvaternion ja sen käänteiskvaternion avulla kuvauksena  $\Phi_a(u) = auu^{-1}$ . Lisäksi nämä kuvaukset vastaavat kiertoja ja ne kuvaavat yksikkökvaterniot ortogonaaliryhmäksi  $\text{SO}(3)$ .

Tutkielman lopuksi tutustutaan säännöllisten kolmiulotteisten monitahokkaiden symmetriaryhmiin. Tämän jälkeen tutkitaan, kuinka kuvaukset  $\Phi$  kuvaavat binaarisia polyedri- eli monitahokasryhmiä. Tutkielman viimeisenä tuloksena osoitetaan, että kvaternioiden yksiköiden  $\mathbb{H}^\times$  kaikki äärelliset aliryhmät ovat äärelliset sykliset ryhmät, binaariset diedriryhmät sekä binaariset monitahokasryhmät.

# Sisältö

<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>1 Esitietoja</b>	<b>4</b>
1.1 Ryhmät ja renkaat . . . . .	4
1.2 Matriiseista . . . . .	7
<b>2 Kvaterniot</b>	<b>9</b>
2.1 Lyhyt katsaus kvaternioiden syntyyn . . . . .	9
2.2 Kvaternioiden algebrallisia ominaisuuksia . . . . .	11
2.3 Kvaternion konjugaatti . . . . .	16
<b>3 Kvaternioiden ja ryhmien väliset kuvaukset</b>	<b>21</b>
3.1 Kvaternioiden lineaarialgebrallisia ominaisuuksia . . . . .	21
3.2 Yleiset ortogonaalikuvaukset . . . . .	26
3.3 Kvaterniot ja ortogonaalikuvaukset . . . . .	30
<b>4 3-ulotteiset kappaleet ja kvaterniot</b>	<b>39</b>
4.1 Säännölliset monitahokkaat . . . . .	39
4.2 Kvaternioiden yhteys säännöllisiin monitahokkaisiin . . . . .	45
<b>Merkintöjä</b>	<b>53</b>
<b>Viitteet</b>	<b>54</b>



## Johdanto

Sir William Rowan Hamiltonin löysi 1840-luvulla kvaterniot yrittäessään ratkaista ongelmaa, kuinka voidaan kuvata reaalista avaruutta  $\mathbb{R}^3$  matemaattisesti. Kvaterniot siis ovat kompleksilukujen neliulotteinen laajennus, joiden kertolasku ei ole kommutatiivinen. Kun kompleksiluku voidaan esittää muodossa  $x = a + ib$ , kvaternio on muotoa  $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Kvaterniot saivat suurta suosiota niiden löytymisen jälkeen, ja niillä on useita sovelluksia erityisesti fysiikan parissa. Nykyaikainen vektorianalyysi kuitenkin syrjäytti kvaternioiden käytön monella alalla. Tämä johtuu erityisesti siitä, että vektoreiden avulla on helppo käsitellä useampiulotteisia avaruuksia, kun kvaternioiden tapauksessa joudutaan tyytymään enintään neliulotteiseen avaruuteen.

Tämän tutkielman tarkoituksena onkin tutustuttaa lukija kvaternioiden perusominaisuuksiin, sekä siihen, kuinka kvaternioita voidaan hyödyntää kolmiulotteisen geometrian tutkimisessa. Tutkielman aluksi esitellään algebran ja matriisilaskennan saralta tunnettuja käsitteitä, kuten rengas, ryhmä ja konjugaattitranspoosi. Näiden lisäksi käydään läpi joitain hyödyllisiä tuloksia algebran parista, esimerkiksi aliryhmäkriteeri, joita voidaan soveltaa myöhemmin tutkielmassa helpottamaan merkittävien lauseiden todistamista. Lisäksi esitellään sykliset ryhmät sekä diedriryhmä.

Toisen luvun aluksi tutustutaan lyhyesti William Rowan Hamiltonin työn-  
täyteiseen, mutta kenties hieman onnettomaan elämään. Neroudestaan huolimatta hän paini kolmiulotteisen avaruuden mallintamisen kanssa noin kymmenen vuoden ajan. Kuitenkin hän lopulta onnistui keksimään lukunelikon, jota kutsutaan Hamiltonin kvaternioiksi hänen mukaansa. Lyhyen historia-katsauksen jälkeen toinen luku keskittyykin lähinnä kvaternioiden algebrallisiin ominaisuuksiin. Kvaterniot esitetään tässä tutkielmassa matriisien avulla kompleksisina  $2 \times 2$ -matriiseina muodossa  $x = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ . Luvussa tarkastellaan esimerkiksi laskutoimitusten ominaisuuksia ja kvaterniokonjugointia. Lopuksi tärkeinä tuloksina osoitetaan, että Hamiltonin kvaterniot muodostavat vinon kunnan, ja että reaaliset kvaterniot muodostavat kvaternioiden renkaan keskuksen.

Kolmannessa luvussa keskitytään kvaternioiden lineaarialgebrallisiin ominaisuuksiin. Kvaterniot pystytään samaistamaan neliulotteisen euklidisen avaruuden kanssa, jolloin niillä on vektoreiden tapaan sisätulo ja normi. Lisäksi mainitaan muutamista erityisistä kvaternioiden sisätulon ominaisuuksista sekä esitellään yksikkökvaternioiden muodostama joukko  $S^3$ , joka on kvaternioiden multiplikatiivisen ryhmän aliryhmä. Tämän jälkeen keskitytään yleisten sisätuloavaruuksien ortogonaalisiin lineaarikuvauksiin. Näitä yleisiä

tuloksia voidaan soveltaa niin kvaternioiden joukolle  $\mathbb{H}$ , kuin imaginaaristen kvaternioiden joukolle  $\text{Im } \mathbb{H}$ .

Luvun loppuksi perehdytään, kuinka sekä kvaternioiden että imaginaaristen kvaternioiden ortogonaalikuvaukset voidaan esittää kahden kuvauksen,  $R_{a,b}, S_{a,b} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,

$$R_{a,b}(x) = axb$$

ja

$$S_{a,b}(x) = a\bar{x}b$$

avulla, kun  $a$  ja  $b$  ovat yksikkökvaternioita. Itse asiassa Hamilton keksi tämän tuloksen imaginaarisille kvaternioille vain vuosi sen jälkeen, kun oli löytänyt kvaterniot. Erityisesti kvaternioita hyödyntämällä saadaan esitettyä avaruuden  $\mathbb{R}^3$  kiertoja ortogonaalikuvausten avulla. Jokainen sisätuloavaruuden  $\mathbb{R}^3$  erityinen ortogonaalikuvaus voidaan esittää muodossa  $\Phi : S^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ ,

$$\Phi(a)(u) = au\bar{a},$$

missä  $a$  on yksikkökvaternio ja  $u$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoria vastaava imaginaarinen kvaternio. Erityisesti kuvajoukko  $\Phi(S^3) = \text{SO}(3)$ .

Tutkielman loppuksi neljännessä luvussa keskitytään säännöllisiin monitahokkaisiin. Luvun alussa tutustutaan monitahokkaiden symmetriaan erityisesti kiertojen osalta. Lisäksi esimerkkinä tarkastellaan tetraedrin kaikkia symmetriaoperaatioita. Tämän jälkeen perehdytään siihen, kuinka edellä esitelty kuvaus  $\Phi$  kuvaa binaariset diedriryhmät ja binaariset monitahokasryhmät, sillä nämä edellämainitut ryhmät muodostuvat yksikkökvaternioista. Esimerkiksi binaarisen diedriryhmän virittävät kaksi yksikkökvaterniota, siis  $2D_n = \langle e^{\frac{i\pi}{n}}, \mathbf{j} \rangle$ . Tuloksena saadaan, että binaariset ryhmät kuvautuvatkin diedriryhmäksi sekä monitahokkaiden kiertosymmetriaryhmiksi. Tämän havainnon avulla tutkielma huipentuu Coxeterin lauseeseen, jonka mukaan binaariset diedriryhmät, binaariset monitahokasryhmät sekä äärelliset sykliiset ryhmät ovat kvaternioiden multiplikatiivisen ryhmän ainoat äärelliset aliryhmät.

Tämän tutkielman lukemiseksi lukijalta odotetaan perustietotaidot niin algebran kuin myös yksinkertaisen lineaarialgebran suhteen. Lisäksi kompleksilukujen perusominaisuudet oletetaan tunnetuiksi.

*"O brooding spirit of Wisdom and Love,  
Whose mighty wings even now o'ershadow me:  
Absorb me in thine own immensity,  
And raise me far my finite self above!"*

– W. R. Hamilton runossaan Robert Perceval Gravesille 1831.

# 1 Esitietoja

Tutkielman ensimmäisessä luvussa kerrataan suppeasti joitain keskeisiä lauseita ja määritelmiä algebran sekä matriisilaskennan parista. Lauseita ei kuitenkaan todisteta, sillä suuri osa tuloksista on jo todistettu joidenkin yliopistomatematiikan kurssien aikana. Lukua kirjoitettaessa on käytetty pääosin lähteenä [5, §1, §2 ja §7] ja [7, §1.10, §1.11, §2.2 ja §2.3], joiden lisäksi lähteitä [4, §3.4] ja [8, §3].

## 1.1 Ryhmät ja renkaat

Aloitetaan kertaamalla ryhmien ja renkaiden keskeisiä tuloksia.

**Määritelmä 1.1.** Olkoon  $G$  epätyhjä joukko varustettuna laskutoimituksella  $\star$ . Sanotaan, että pari  $(G, \star)$  on *ryhmä*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

- $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$  kaikilla  $a, b, c \in G$ , eli laskutoimitus  $\star$  on *assosiatiivinen*.
- On olemassa  $e \in G$  siten, että  $e \star a = a = a \star e$  kaikilla  $a \in G$ . Alkiota  $e$  kutsutaan laskutoimituksen *neutraalialkioksi*.
- Jokaista alkiota  $a \in G$  kohden on olemassa alkio  $a^{-1} \in G$  siten, että  $a \star a^{-1} = e = a^{-1} \star a$ . Alkiota  $a^{-1}$  kutsutaan alkion  $a$  *käänteisalkioksi*.

Lisäksi jos laskutoimitus  $\star$  on kommutatiivinen, niin ryhmän  $G$  sanotaan olevan *Abelin ryhmä*.

Epätyhjää, vakaata osajoukkoa  $H \subset G$ , jossa pätee laskutoimitus  $\star$ , kutsutaan ryhmän  $G$  *aliryhmäksi*.

**Määritelmä 1.2.** Olkoon  $R$  epätyhjä joukko varustettuna kahdella laskutoimituksella  $+$  ja  $\cdot$ . Kolmikko  $(R, +, \cdot)$  on *renkas*, jos

- laskutoimitukset  $+$  ja  $\cdot$  ovat assosiatiivisia
- $(R, +)$  on Abelin ryhmä
- kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen
- kertolaskulla on neutraalialkio.

Epätyhjää, vakaata osajoukkoa  $S \subset R$ , jossa pätevät renkaan  $R$  laskutoimitukset, kutsutaan renkaan  $R$  *alirenkaaksi*.

Seuraavaksi mainitaan kaksi kätevää lausetta alirenkaiden ja aliryhmien tunnistamiseksi.

**Lause 1.3** (Aliryhmäkriteeri). *Olkoon  $G$  ryhmä ja  $H \subset G$  epätyhjä osajoukko. Tällöin  $H$  on ryhmän  $G$  aliryhmä, jos ja vain jos  $xy^{-1} \in H$  kaikille  $x, y \in H$ .*

*Todistus.* Katso [5, §2.1 Proposition 1]. □

**Lause 1.4** (Alirengastesti). *Olkoon  $R$  rengas ja  $S \subset R$ . Tällöin  $S$  on renkaan  $R$  alirengas, jos ja vain jos*

- $x + y \in S$  ja  $xy \in S$  kaikille  $x, y \in S$
- $-1 \in S$ , kun  $1$  on renkaan  $R$  neutraalialkio kertolaskun suhteen.

Lausetta 1.4 ei ole suoraan todistettu, mutta sen ehdot on mainittu esimerkiksi lähteessä [7, §6.1].

Kaikki ryhmät eivät ole kommutatiivisia. Jokaisessa ryhmässä on kuitenkin ainakin neutraalialkio, joka kommutoi jokaisen ryhmän alkion kanssa.

**Määritelmä 1.5.** Ryhmän  $G$  osajoukkoa

$$Z(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ kaikilla } x \in G\}$$

kutsutaan ryhmän  $G$  keskukseksi.

Seuraavaksi määritellään eräitä renkaihin liittyviä käsitteitä. Alkiolla  $0$  on olemassa käänteisalkio ainoastaan yhden alkion muodostamassa renkaassa  $\{0\}$ . Renkaassa  $R$ , jonka kertaluvulle pätee  $|R| \geq 2$ , nolllalla ei ole käänteisalkiota kertolaskun suhteen. [5, §7.1 Example 1] Keskitytään niihin alkioihin, joilla kuitenkin on käänteisalkio kertolaskun suhteen.

**Määritelmä 1.6.** Jos renkaan  $R$  alkiolla  $a$  on olemassa käänteisalkio kertolaskun suhteen, niin  $a$  on *yksikkö*. Renkaan  $R$  yksiköiden ryhmää kutsutaan *multiplikaatiiviseksi ryhmäksi* ja sitä merkitään

$$R^\times = \{a \in R : a \text{ on yksikkö}\}.$$

**Määritelmä 1.7.** Jos renkaan  $R$  jokainen nollasta eroava alkio on yksikkö, niin  $R$  on *jakorengas*.

Kommutatiivinen jakorengas on *kunta*. Jos jakorengas ei ole kunta, niin se on *vinokunta*.

Seuraavaksi määritellään, mitä ovat sykliset ryhmät.



**Määritelmä 1.8.** Olkoon  $G$  multiplikatiivinen ryhmä ja  $H$  additiivinen ryhmä. Joukot

$$\langle x \rangle = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

ja

$$\langle y \rangle = \{ny : n \in \mathbb{Z}\}$$

ovat alkioiden  $x \in G$  ja  $y \in H$  virittämät sykliset aliryhmät.

Jos puolestaan ryhmälle  $Z$  pätee, että  $Z = \langle a \rangle$  jollakin  $a \in Z$ , niin  $Z$  on *syklinen ryhmä*.

Esimerkiksi ryhmät  $(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle$  ja  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \cdot) = \langle 3 + 5\mathbb{Z} \rangle$  ovat molemmat syklisiä ryhmiä.

Kuten tässäkin tutkielmassa, ryhmäteoriassa on monesti yhteyttä geometriaan, erityisesti symmetriaan. Symmetrisimpiä kappaleita ovatkin kaikenlaiset säännölliset objektit, esimerkiksi monikulmiot.

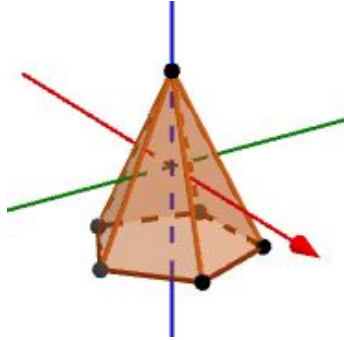
**Määritelmä 1.9.** Säännöllisten monikulmioiden symmetriaryhmää kutsutaan *diedriryhmäksi*, ja säännölliselle  $n$ -kulmiolle sitä merkitään  $D_n$ , kun  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Säännöllinen  $n$ -kulmio voidaan ajatella kolmiulotteisessa vektoriavaroudessa prismana. Tällöin prisman pohja ja kansi muodostuvat kyseisistä  $n$ -kulmioista. Huomaa, että luvulla  $n = 2$  monikulmio surkastuu janaksi. Se voidaan kuitenkin monikulmioita vastaavalla tavalla laajentaa kolmiulotteiseksi, jolloin se vastaa levyä, jonka kantana kyseinen jana on.

Eräs mielenkiintoinen geometrinen tulkinta sykliselle ryhmälle  $C_n = \langle a \rangle$  kolmiulotteisessa avaruudessa on ajatella se pyramidina, jonka pohjana on säännöllinen  $n$ -kulmio. Tämä johtuu siitä, että alkion  $a$  monikertoina saadaan kaikki ryhmän  $C_n$  alkioita. Erityisesti  $a^n = 1$ . Puolestaan  $n$ -kulmiota voidaan kiertää kulman  $\frac{2\pi}{n}$  verran, jolloin kulman monikertoina saadaan kaikki kierrot. Lisäksi  $\frac{2\pi}{n} \cdot n = 2\pi$ , jolloin monikulmio on kiertänyt täyden kierroksen. Tämä vastaa sitä, että monikulmiota ei ole kierretty lainkaan, eli kiertojen neutraalialkiota. Siispä syklisessä ryhmässä on yhtä monta alkioita, kuin säännöllisellä  $n$ -kulmiolla kiertoja. Esimerkiksi kuvassa 1.1 on syklistä ryhmää  $C_5$  vastaava pyramidi, jonka pohjana on säännöllinen viisikulmio.

Aliluvun lopuksi mainitaan lyhyesti homomorfismeista, sekä niitä koskien eräs tulos, mistä osoittautuu olevan suurta hyötyä erityisesti tutkielman lopuksi luvussa 4.2.

**Määritelmä 1.10.** Olkoot  $(G, \star)$  ja  $(H, \diamond)$  ryhmiä. Kuvausta  $\varphi : G \rightarrow H$ , jolle pätee  $\varphi(x \star y) = \varphi(x) \diamond \varphi(y)$  kaikille  $x, y \in G$ , kutsutaan *homomorfismiksi*. Jos  $\varphi$  on lisäksi bijektio, niin kuvausta kutsutaan *isomorfismiksi*. Tällöin sanotaan, että ryhmät  $G$  ja  $H$  ovat *isomorfishet*. Isomorfisuutta merkitään  $G \cong H$ .



Kuva 1.1: Syklistä ryhmää  $C_5$  vastaava pyramidi.

**Lause 1.11.** *Olkoot  $G$  ja  $H$  ryhmiä, ja  $\varphi : G \rightarrow H$  homomorfismi. Tällöin*

- (1) *kuvausten  $\varphi$  ydin  $\ker \varphi$  on ryhmän  $G$  aliryhmä*
- (2) *kuvajoukko  $\varphi(G) \subset H$  on ryhmän  $H$  aliryhmä*
- (3) *jos  $\varphi$  on injektio, niin  $\varphi(G) \cong G$ .*

*Todistus.* (1) [5, §3.1 Proposition 1], (2) ja (3) [5, §1.6 Exercise 13]. □

## 1.2 Matriiseista

Tähän lyhyeen alalukuun on lueteltu kertauksena joitain vieraampia käsitteitä matriisilaskennan puolelta, jotka ovat tutkielman kannalta olennaisia. Ensimmäinen niistä on matriisin konjugaattitranspoosi eli adjungaatti.

**Määritelmä 1.12.** Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{m \times n},$$

missä  $\mathbb{C}_{m \times n}$  on kompleksisten  $m \times n$ -matriisien joukko. Siis jokainen  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ .

Matriisin  $A$  konjugaattitranspoosi on matriisi

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{n \times m}.$$

**Määritelmä 1.13.** Neliömatriisi  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$  on *unitaarinen*, jos  $A^* = A^{-1}$ . Unitaaristen matriisien joukkoa merkitään

$$U(n) = \{U \in GL(n) : UU^* = I\} \subset \text{Mat}_n(\mathbb{C}),$$

missä  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  on kompleksisten  $n \times n$ -matriisien joukko ja  $GL(n)$  kääntyvien  $n \times n$ -matriisien ryhmä.

Kun  $n = 2$ , niin unitaariset matriisit  $U(2)$  muodostavat joukon  $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$  aliryhmän. [6, §2.6] Ryhmällä  $U(2)$  on eräs kiinnostava osajoukko.

**Määritelmä 1.14.** Joukko  $SU(2) = \{U \in U(2) : \det U = 1\}$  on *erityinen unitaarinen ryhmä*.

**Lause 1.15.**  $SU(2)$  on ryhmän  $U(2)$  aliryhmä.

*Todistus.* Olkoon determinanttikuvaus  $\det : U(2) \rightarrow \mathbb{C}$ , joka on homomorfini. Selvästi  $\ker(\det) = SU(2)$ , sillä  $\det U = 1$  aina, kun  $U \in SU(2)$ . Tällöin Lauseen 1.11 kohdan (1) nojalla  $SU(2)$  on ryhmän  $U(2)$  aliryhmä.  $\square$

E erityinen unitaarinen ryhmä  $SU(2)$  on tärkeä ryhmä fyysikoille ja kemisteille. Esimerkiksi matriisit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

ovat *Paulin spinmatriiseja*, jotka ovat keskeisiä kvantttimekaniikan tutkimuksessa. [8, §3]

## 2 Kvaterniot

Tässä luvussa päästään tutustumaan kvaternioihin sekä niiden algebrallisiin ominaisuuksiin. Aluksi perehdytään kuitenkin hieman siihen, mistä kvaterniot ovat saaneet syntynsä. Aliluvussa 2.1 on käytetty lähteinä [9] ja [11], luvuissa 2.2 ja 2.3 puolestaan [6, §2.1] ja [8, §3].

### 2.1 Lyhyt katsaus kvaternioiden syntyyn

Elettiin vuotta 1805 Irlannin Dublinissa, kun elokuun 3. ja 4. päivien välisenä yönä Archibald ja Sarah Hutton Hamiltonin perheeseen syntyi poika. Pojan nimeksi tuli William Rowan Hamilton. Hamiltonien perheeseen syntyi yhteensä yhdeksän lasta, joista William Rowan oli neljänneksi vanhin. Hamilton oli poikkeuksellisen lahjakas jo pienestä pitäen: hän osasi lukea jo kolmevuotiaana ja viisivuotiaana hän osasi kreikkaa, latinaa ja hepreaa. 12-vuotiaana hän osasi puhua niin yleisimpiä Euroopan kieliä kuin persiaa ja arabiaa. Valitettavasti pian täytettyään 12, hänen molemmat vanhempansa kuolivat kahden vuoden sisään, ensin äiti vuonna 1817 ja sitten isä, vuonna 1819. Hamiltonin nerouden oletetaan periytyvän hänen äitinsä puolelta, jossa olikin monia tunnettuja tiedemiehiä.

Hamilton kiinnostui matematiikasta noin 15-vuotiaana. 17-vuotiaana hän oli lukenut sekä Isaac Newtonin teoksen *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) että Pierre-Simon Laplacen *Mécanique céleste*, joita pidetään matematiikan ja fysiikan alan merkittävimpinä teoksina. Hän aloitti opintonsa Trinity Collegessa, Dublinissa sijaitsevassa yliopistossa vuonna 1823, ja valmistui sieltä vuonna 1827.

Hamilton menestyi opinnoissaan loistavasti. Hän julkaisi jo vuonna 1824 artikkelin *On Caustics* saaden tästä merkittävää positiivista palautetta Royal Irish Academyilta. Erityisen suurta arvostusta hän sai laajennettuaan kyseistä artikkelia vuonna 1827 ja uudelleenjulkaistua sen nimellä *A Theory of System of Rays*. Hänet valittiin samana vuonna professoriksi Trinity Collegeen vain 21-vuotiaana, ja hän asuikin Dublinissa koko lopun ikänsä.

Vuosina 1827-1835 Hamilton tekikin merkittävää työtä matemaattisen fysiikan suhteen, aluksi optiikan ja myöhemmin mekaniikan parissa. Eräs hänen tärkeimpiä saavutuksiaan on esimerkiksi eräs mekaniikan alan työkalu, Hamilton-Jacobi osittaisdifferentiaaliyhtälöt. Vuonna 1833 Hamilton esitti Royal Irish Academylle pitkän artikkelin, joka käsitteli kompleksilukuja. Artikkelissa Hamilton esitti kompleksiluvun  $a + ib$  reaalityökalujen järjestettynä parina  $(a, b)$ , joille erityisesti pätee parien kertolasku

$$(a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha).$$

Näin ollen kompleksiluku voitiin tulkita euklidisen tason suunnattuna suurena, sillä käsitettä ”vektori” ei vielä tuolloin oltu keksitty. Ansioidensa vuoksi hänet aateloitiin vuonna 1835 ja nimitettiin vuotta myöhemmin Royal Irish Academyn puheenjohtajaksi.

Toisin kuin matematiikan saralla, naisrintamalla Hamiltonilla ei ollut niinkään onnea. Vuonna 1824 hän kävi setänsä kanssa Summerhillissä tapaamassa Disneyn perhettä, ja rakastuikin sillä silmäyksellä perheen tyttöön, Catherineen. Hän jatkoi kuitenkin opiskeluaan sillä seurauksella, että Catherinein äiti ilmoittikin Hamiltonille seuraavan vuoden alussa Catherine aikovan naida viisitoista vuotta vanhemman pappismiehen. Tämä kun pystyi varakkaana tarjoamaan parempaa kuin Hamilton. Hamilton masentui syvästi, mutta onnekseen hän löysi runouden, jonka kautta pystyi purkamaan pahaa oloaan. Hän ystäväystyikin myöhemmin runoilija William Wordsworthin kanssa. Wordsworth ei tosin ollut yhtä vakuuttunut Hamiltonin runollisista taidoista. Hän piti enemmän Williamin siskon, Elizan, runoista, ja kehotti Hamiltonia kovasanaisesti pysymään tieteen parissa.

Eräällä matkalla oppilaansa kanssa, Hamilton tapasi neiti Ellen de Veren. Vuonna 1830 hän alkoi vakavasti harkita avioitumista, ja pohti Ellenin olevan tähän paras vaihtoehto, myöntämättä kuitenkaan rakastavansa häntä. Hamilton pommiti Elleniä runoillaan ja aikoi kosia häntä, mutta Ellen kieltäytyi vedoten siihen, että hän ei voinut elää onnellisesti kuin Curraghissa. Ellen kuitenkin meni seuraavana vuonna naimisiin ja muutti kuin muuttikin pois Curraghista.

Hamilton kuitenkin koki suureksi velvollisuudekseen mennä naimisiin, ja osittain tämän vuoksi hän päätyi avioliittoon Helen Maria Baylyn kanssa. Helen ei ollut hänen mielestään kovinkaan erinomainen valinta, eikä avioliitto ollutkaan kovin onnellinen. He esimerkiksi viettivät häämatkan Baylyjen maatilalla, jonka ajan Hamilton työskenteli *A Theory of System of Raysin* uuden painoksen parissa. Heille kuitenkin syntyi kolme lasta, pojat William Edwin ja Archibald Henry vuosina 1834 ja 1835, sekä nuorimmaiseksi tyttö Helen Eliza Amelia vuonna 1840.

Löydettyään yhteyden kompleksilukujen ja tason välillä, Hamilton luonnollisesti halusi yleistää tätä ajatusmallia koskemaan korkeampiakin ulottuvuuksia. Erityisesti hän yritti löytää kolmikkoa, jonka avulla voisi kuvata kolmiulotteisen avaruuden. Tämä ei kuitenkaan onnistunut kovin helposti, vaan hän painikin kyseisen ongelman parissa noin kymmenen vuoden ajan. Kolmikoiden yhteenlasku sujui komponenteittain, mutta kertolasku tuotti ongelmia. Hamiltonin turhautuminen alkoi näkyä ulospäin perheenjäsenille, ja hän kertoikin myöhemmin lastensa tiedustelleen häneltä joka aamu laskeutuessaan alakertaan: *Well, Papa, can you multiply triplets?* Kaikkien pettymykseksi hän joutui päättään pudistaen vastaamaan: *No, I can only add and*

*subtract them.*

Monien tuskaisten vuosien ja epäonnistuneiden yritysten jälkeen ratkaisu ongelmaan välähti Hamiltonin päähän hänen kävellessään vaimonsa kanssa Royal Canalin vartta pitkin vuonna 1843. Hänen täydensi kolmikon nelikoksi  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , joille pätevät laskusäännöt  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$ . Hamilton oli tästä niin innostunut, että kaiversi edellämainitut laskusäännöt puukolla Brougham Bridgen kiveen.

Hamilton piti kvaternioita suurimpana saavutuksenaan, ja tutkikin niiden ominaisuuksia loppuelämänsä 22 vuoden ajan, erityisesti matematiikan, fyysiikan ja astronomian yhteydessä. Hän vertasi kvaternioiden merkitystä 1800-luvulle peräti yhtä tärkeäksi kuin Newtonin *fluksioita* 1600-luvulle. Väitteily kvaternioiden merkityksestä jatkui pitkälle Hamiltonin kuoleman jälkeenkin. Erimieliset jopa sanoivat kvaternioiden olevan ”sekavaa pahuutta heille, jotka koskevat niihin millään tavoin.” Hamilton julkaisi vuonna 1853 kirjan *Lectures on Quaternions*, ja aloitti työstämään ennen kuolemaansa teosta *Elements of Quaternions*, minkä hänen poikansa William Edwin Hamilton viimeisteli ja julkaisi.

Kvaternioiden löytämisen jälkeen kului vain pari vuotta, kun Hamilton oli palannut jo aiempaan alkoholintäyteiseen elämäänsä. Tähän myötävaikuttivat Catherinen käynti Hamiltonin luona, sekä hänen kahden enonsa poismeno. William Hamilton kuoli rajuun kihtiin vuonna 1865. Vain hieman aiemmin hänet oli valittu ensimmäiseksi USA:n National Academy of Sciencesin ulkomaiseksi jäseneksi.

Hamiltonin toiveista huolimatta kvaterniot eivät lopulta saaneet niin suurta merkitystä kuin fluksiot, vaikka niille löytyi käyttöä varsinkin fyysiikan sarjalta heti niiden löytymisen jälkeen. Valitettavasti nykyaikainen vektorianalyysi kuitenkin lopulta syrjäytti kvaternioiden yleisemmän käytön. Esimerkiksi useampiulotteisen avaruuden kuvaaminen onnistuu vektoreiden avulla, kun taas kvaternioiden kanssa on tyydyttävä jäämään korkeintaan neliulotteiseen avaruuteen. Kvaternioilla on kuitenkin edelleen sovelluksia erityisesti kolmi- ja neliulotteisen euklidisen geometrian tutkimisessa, kuten tässäkin tutkielmassa myöhemmin selviää.

## 2.2 Kvaternioiden algebrallisia ominaisuuksia

Sir William Rowan Hamilton siis löysi kvaterniot, ja tässä alaluvussa keskitytään niiden algebrallisiin ominaisuuksiin.

**Määritelmä 2.1.** Hamiltonin kvaterniot ovat joukko

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C}),$$

missä  $z = a + ib$  ja  $w = c + id$ .

Usein kvaternio  $x \in \mathbb{H}$  esitetään muodossa  $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ , missä

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Kvaternioita  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  kutsutaan *peruskvaternioiksi*.

Kvaternioiden joukossa peruskvaternioille pätevät seuraavat yhtäsuuruudet:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}. \quad (2.1)$$

Kvaternioiden joukossa alkioita  $0 := 0\mathbf{1} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$  kutsutaan *nollaksi* ja alkioita  $\mathbf{1}$  *ykköseksi*.

Yhtälön (2.1) viimeisestä yhtäsuuruudesta ja siitä, että kvaternioiden kertolasku ei ole kommutatiivinen (mikä todistetaan myöhemmin), seuraavat suoraan yhtäsuuruudet

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik} \text{ ja } \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}. \quad (2.2)$$

Nämä yhtäsuuruudet on myös esitetty selkeyden vuoksi taulukkomuodossa Taulukossa 1.

Taulukko 1 Peruskvaternioiden laskutaulukko

	<b>1</b>	<b>i</b>	<b>j</b>	<b>k</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>i</b>	<b>j</b>	<b>k</b>
<b>i</b>	<b>i</b>	<b>-1</b>	<b>k</b>	<b>-j</b>
<b>j</b>	<b>j</b>	<b>-k</b>	<b>-1</b>	<b>i</b>
<b>k</b>	<b>k</b>	<b>j</b>	<b>-i</b>	<b>-1</b>

Kvaterniot ajatellaan monesti kompleksilukujen joukon  $\mathbb{C}$  laajennuksena ja niillä onkin monia samanlaisia ominaisuuksia kuin kompleksiluvuilla. Kompleksilukujen joukossa imaginaariyksikölle  $i$  pätee laskusääntö  $i^2 = -1$ , ja edellä huomattiin, että peruskvaternioille  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  pätee aivan vastaava ominaisuus!

Määritellään seuraavan lauseen avulla kvaternioiden joukkoon yhteen- ja kertolasku.

**Lause 2.2.** *Hamiltonin kvaterniot ovat kompleksisten  $2 \times 2$ -matriisien vakaa osajoukko yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen.*

*Todistus.* Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$ ,  $x = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$  ja  $y = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ . Nyt kompleksilukujen summan konjugoinnin ominaisuuksia hyödyntäen saadaan

$$\begin{aligned} x + y &= \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \\ -\bar{w}_1 - \bar{w}_2 & \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \\ -\overline{(w_1 + w_2)} & \overline{(z_1 + z_2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Siis  $x + y \in \mathbb{H}$ , joten matriisien yhteenlasku määrää indusoidun laskutoimituksen kvaternioiden joukkoon.

Lisäksi kompleksilukujen tulo konjugoinnin ominaisuuksia hyödyntämällä saadaan

$$\begin{aligned} xy &= \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1 \\ -\bar{z}_1 \bar{w}_2 - z_2 \bar{w}_1 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{w}_1 w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1 \\ -\overline{z_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1} & \overline{z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Selvästi myös  $xy \in \mathbb{H}$ , joten myös matriisien kertolasku määrää indusoidun laskutoimituksen kvaternioiden joukkoon.  $\square$

**Esimerkki 2.3.** Esitetään kvaternio  $-21 + 7\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}$  matriisimuodossa. Merkitään peruskvaternioita kuten Määritelmässä 2.1 ja lasketaan tunnetuilla matriisien laskusäännöillä.



$$\begin{aligned}
-2\mathbf{1} + 7\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k} &= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
&+ 10 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{5} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7i & 0 \\ 0 & -7i \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5}i \\ \sqrt{5}i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 + 7i & 10 + \sqrt{5}i \\ -10 + \sqrt{5}i & -2 - 7i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 + 7i & 10 + \sqrt{5}i \\ -(10 + \sqrt{5}i) & -2 + 7i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Kvaternioille on myös muita vaihtoehtoisia esitystapoja. Eräs tapa on esittää kvaterniot avaruuden  $\mathbb{R}^4$  vektoreina.

*Huomautus 2.4.* Kvaternio  $x = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$  voidaan esittää euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^4$  vektorina  $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Tällöin peruskvaterniot ovat euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^4$  kantavektorit

$$\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0), \mathbf{i} = (0, 1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 0, 1, 0) \text{ ja } \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1).$$

Kvaterniot esitetään tässä tutkielmassa pääasiassa matriisimuodossa. Tämä johtuu erityisesti siitä, että kvaternioiden kertolasku on kohtalaisen siisti laskea kahden matriisin tulona. Joissain tapauksissa kvaternioita on kuitenkin helpompi ajatella vektorina tai pisteenä avaruudessa, erityisesti myöhemmin tutkielmassa, kun tarkastellaan säännöllisiä monitahokkaita yksikköpallossa.

Tarkastellaan seuraavaksi hieman kvaternioiden laskutoimitusten ominaisuuksia. Koska edellä määriteltiin kvaterniot matriisimuodossa, voidaan näiden seuraavien lauseiden todistukset sivuuttaa, sillä ne ovat matriisien laskutoimituksina jo tulleet lineaarialgebran kursseilla tutuiksi.

**Lause 2.5.** *Olkoot  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ . Kvaternioiden yhteenlaskulle pätevät ominaisuudet*

$$(1) \quad q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3 \quad (\text{assosiatiivisuus})$$

$$(2) \quad q_1 + q_2 = q_2 + q_1 \quad (\text{kommutatiivisuus}).$$

**Lause 2.6.** Olkoot  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ . Kvaternioiden kertolaskulle pätevät ominaisuudet

$$(1) \quad q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3 \quad (\text{assosiatiivisuus})$$

$$(2) \quad q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3 \quad (\text{distributiivisuus vasemmalta})$$

$$(3) \quad (q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3 \quad (\text{distributiivisuus oikealta}).$$

Kvaternioiden kertolasku ei kuitenkaan ole kommutatiivinen. Tämä seuraa myös suoraan matriisien laskusäännöistä, sillä matriisien tulo ei ole kommutatiivinen, mutta se voidaan kuitenkin varmuuden vuoksi tarkistaa helposti peruskvaternioiden avulla:

$$\mathbf{ij} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \mathbf{ji}.$$

Kvaternioiden joukossa yhteenlaskun neutraalialkio on nolla, sillä jokaiselle kvaterniolle  $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$  pätee  $q + 0 = q = 0 + q$ . Kertolaskun neutraalialkio on puolestaan alkio ykkönen, sillä  $\mathbb{H} \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  ja identtinen matriisi  $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  on tunnetusti joukon  $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$  kertolaskun neutraalialkio.

**Määritelmä 2.7.** Olkoon  $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ . Jos kvaternio on muotoa  $q = a\mathbf{1}$ , missä  $b = c = d = 0$ , niin kvaterniota  $q$  kutsutaan *reaalikvaternioksi*. Jos taas  $q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ , missä  $a = 0$ , niin kvaterniota  $q$  kutsutaan (*puhtaasti*) *imaginaariseksi kvaternioksi*.

Reaalisten kvaternioiden joukkoa merkitään

$$\text{Re } \mathbb{H} = \{a\mathbf{1} : a \in \mathbb{R}\}$$

ja imaginaaristen kvaternioiden joukkoa

$$\text{Im } \mathbb{H} = \{b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

*Huomautus 2.8.* Määritellään kuvaus  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $h(x) = x\mathbf{1}$ , joka on selvästi injektiivinen homomorfismi. Tällöin kvaternion merkintä  $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  tarkoittaa samaa, kuin  $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ .

**Määritelmä 2.9.** Kvaternion  $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$  *reaaliosa* on  $\text{Re}(q) = a$  ja *imaginaariosa* on kvaternio  $\text{Im}(q) = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ .

## 2.3 Kvaternion konjugaatti

Kompleksianalyysissa on varmasti monesti tullut vastaan tuttu käsite, kompleksiluvun konjugaatti. Kvaternioiden joukossa on olemassa tälle vastine.

**Määritelmä 2.10.** Olkoon  $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ . Kvaternion  $q$  kvaterniokonjugaatti on

$$\bar{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k} \in \mathbb{H}.$$

Konjugaattitranspoosin avulla esitettynä kvaterniokonjugaatti on  $\bar{q} = q^*$ .

Seuraavaan lauseeseen on koottu muutamia kvaterniokonjugaatin ominaisuuksia.

**Lause 2.11.** *Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$ . Tällöin*

(1)  $\bar{\bar{x}} = x$

(2)  $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$

(3)  $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$

(4)  $\operatorname{Re}(\bar{x}) = \operatorname{Re}(x)$

(5)  $\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$

*Todistus.* Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$ .

(1) Esitetään kvaternio  $x$  peruskvaternioiden avulla. Tällöin  $x$  on muotoa  $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  joillain  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Nyt

$$\bar{\bar{x}} = \overline{\overline{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}}} = \overline{a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = x.$$

(2) Esitetään kvaterniot matriisimuodossa

$$x = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \text{ ja } y = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix},$$

missä  $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ . Tällöin matriisien yhteenlaskun avulla

$$x + y = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \\ -\bar{w}_1 - \bar{w}_2 & \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{pmatrix},$$

josta konjugaattitranspoosin ja kompleksikonjugaatin laskusääntöjen avulla saadaan

$$\overline{x + y} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 + \bar{z}_2 & -(w_1 + w_2) \\ \bar{w}_1 + \bar{w}_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

Toisaalta

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & -w_1 \\ \bar{w}_1 & z_1 \end{pmatrix} \text{ ja } \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & -w_2 \\ \bar{w}_2 & z_2 \end{pmatrix},$$

jolloin

$$\bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & -w_1 \\ \bar{w}_1 & z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & -w_2 \\ \bar{w}_2 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 + \bar{z}_2 & -w_1 - w_2 \\ \bar{w}_1 + \bar{w}_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix},$$

eli  $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ .

(3) Edelleen kvaternioiden matriisiesityksestä saadaan

$$xy = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1 \\ -\bar{z}_1 \bar{w}_2 - z_2 \bar{w}_1 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{w}_1 w_2 \end{pmatrix}.$$

Hyödyntämällä jälleen kompleksikonjugaattia ja konjugaattitranspoosia,

$$\overline{xy} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{w}_1 w_2 & -z_1 w_2 - \bar{z}_2 w_1 \\ \bar{z}_1 \bar{w}_2 + z_2 \bar{w}_1 & z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 \end{pmatrix}.$$

Matriisien kertolaskusta puolestaan seuraa, että

$$\bar{y}\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & -w_2 \\ \bar{w}_2 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & -w_1 \\ \bar{w}_1 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{w}_1 w_2 & -z_1 w_2 - \bar{z}_2 w_1 \\ \bar{z}_1 \bar{w}_2 + z_2 \bar{w}_1 & z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 \end{pmatrix} = \overline{xy}.$$

(4) Koska  $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ , niin  $\bar{x} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ . Selvästi  $\operatorname{Re}(x) = a = \operatorname{Re}(\bar{x})$ .

(5) Suoralla laskulla

$$\frac{1}{2}(x + \bar{x}) = \frac{1}{2}((a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) + (a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k})) = \frac{1}{2}2a = a = \operatorname{Re}(x).$$

□

Kvaterniokonjugaatin ominaisuudet muistuttavat huomattavasti kompleksikonjugaattien ominaisuuksia. Ehto (3) poikkeaa kuitenkin kompleksikonjugaation kertolaskun ei-kommutatiivisuuden vuoksi.

*Huomautus 2.12.* Määritelmästä 2.10 saadaan imaginaaristen kvaternioiden joukolle vaihtoehtoinen esitysmuoto:  $\operatorname{Im} \mathbb{H} = \{x \in \mathbb{H} : \bar{x} = -x\}$ .

**Lemma 2.13.** *Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$ . Tällöin  $\operatorname{Re}(xy) = \operatorname{Re}(yx)$ .*

*Todistus.* Olkoot

$$x = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \text{ ja } y = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix},$$

missä  $z_1 = a + ib, w_1 = c + id, z_2 = \alpha + i\beta$  ja  $w_2 = \gamma + i\delta$ . Suoralla laskulla saadaan

$$xy = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1 \\ -\bar{z}_1 \bar{w}_2 - z_2 \bar{w}_1 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{w}_1 w_2 \end{pmatrix}$$

ja

$$yx = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 - \bar{w}_1 w_2 & \bar{z}_1 w_2 + z_2 w_1 \\ -z_1 \bar{w}_2 - \bar{z}_2 \bar{w}_1 & \bar{z}_2 \bar{z}_1 - w_1 \bar{w}_2 \end{pmatrix}.$$

Määritelmän 2.1 mukaan kvaternion reaaliosa on matriisin alkion  $a_{11}$  reaaliosa. Lasketaan siis auki tulot  $z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2$  ja  $z_1 z_2 - \bar{w}_1 w_2$  ja otetaan niistä reaaliosat.

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2) = \operatorname{Re}((a + ib)(\alpha + i\beta) - (c + id)(\gamma - i\delta)) = a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta$$

ja

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2 - \bar{w}_1 w_2) = \operatorname{Re}((a + ib)(\alpha + i\beta) - (c - id)(\gamma + i\delta)) = a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta.$$

Siispä  $\operatorname{Re}(xy) = a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta = \operatorname{Re}(yx)$ , kuten haluttiin.  $\square$

Seuraavan lauseen jälkeen kvaternioille pystytään hyödyntämään monia algebrallisia ominaisuuksia.

**Lause 2.14.** *Hamiltonin kvaterniot  $\mathbb{H}$  varustettuna kompleksisten  $2 \times 2$ -matriisien yhteen- ja kertolaskulla on vino kunta.*

*Todistus.* Todistetaan ensin, että joukko  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$  on rengas. Tehdään tämä osoittamalla, että  $\mathbb{H}$  on renkaan  $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$  alirengas käyttämällä alirengastestiä 1.4. Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$ . Lauseessa 2.2 on todistettu, että kvaterniot  $x + y, xy \in \mathbb{H}$ . Lisäksi alkio

$$-\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$$

on selvästi muotoa  $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ , joten  $-\mathbf{1} \in \mathbb{H}$ . Alirengastestin perusteella joukko  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$  on renkaan  $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$  alirengas, joten se on erityisesti rengas.

Olkoon  $q \in \mathbb{H}^\times$ ,  $q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ , missä  $z = a + ib$  ja  $w = c + id$ . Kvaternion  $q$  determinantti  $\det q = z\bar{z} + w\bar{w}$ , jolloin kompleksilukujen ominaisuuksia hyödyntäen  $\det q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Erityisesti  $\det q \neq 0$ . Jos olisi  $\det q = 0$ , niin  $a = b = c = d = 0$ , jolloin kvaternio  $q$  olisi muotoa  $q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , eikä tällöin olisi yksikkö. Koska  $\det q \neq 0$ , niin  $q$ :lla on olemassa käänteismatriisi  $q^{-1} = \frac{1}{\det q} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix}$ . Siispä rengas  $\mathbb{H}$  on jakorengas. Erityisesti  $\mathbb{H}$  ei ole kommutatiivinen jakorengas, sillä esimerkiksi  $\mathbf{i}\mathbf{j} \neq \mathbf{j}\mathbf{i}$ . Siispä Määritelmän 2.14 perusteella  $\mathbb{H}$  on vino kunta.  $\square$

Algebran kursseilla tutustutaan moniin erilaisiin esimerkkeihin jakorenkaiden ja kunnien, mutta tässä yhteydessä on syytä mainita, että kvaternioiden joukko on ensimmäinen löydetty jakorengas, joka ei ole kunta.

Koska kvaternioiden kertolasku ei ole kommutatiivinen, onkin mielenkiintoista, onko olemassa muita kvaternioita kuin  $\mathbf{1}$ , jotka kommutoivat muiden kvaternioiden kanssa. Osoittautuu, että tällaisia ovat pelkästään reaaliset kvaterniot.

**Lause 2.15.** *Kvaternioiden keskus  $Z(\mathbb{H}) = \text{Re } \mathbb{H}$ .*

*Todistus.* ” $\supset$ ” Osoitetaan ensin helpompi suunta, eli että reaaliset kvaterniot ovat joukon  $Z(\mathbb{H})$  osajoukko. Olkoot

$$r \in \text{Re } \mathbb{H}, r = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ ja } q \in \mathbb{H}, q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$rq = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z & \alpha w \\ -\alpha \bar{w} & \alpha \bar{z} \end{pmatrix}$$

ja

$$qr = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z & \alpha w \\ -\alpha \bar{w} & \alpha \bar{z} \end{pmatrix},$$

eli  $Z(\mathbb{H}) \supset \text{Re } \mathbb{H}$ .

” $\subset$ ” Olkoon nyt

$$r \in \mathbb{H}, r = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

siten, että  $rq = qr$  kaikille  $q \in \mathbb{H}$ . Osoitetaan, että  $r$  on reaalikvaternio. Koska  $rq = qr$  kaikille  $q$ , niin on näin oltava myös peruskvaternioille  $\mathbf{i}$  ja  $\mathbf{k}$ .

Suoralla laskulla saadaan

$$r\mathbf{i} = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b+ia & d-ic \\ -d-ic & b-ia \end{pmatrix}$$

ja

$$\mathbf{i}r = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b+ia & -d+ic \\ d+ic & -b+ia \end{pmatrix}.$$

Kvaterniot ovat siis samat, kun  $d+ic = -d-ic$ . Koska  $c, d \in \mathbb{R}$ , ehto toteutuu, kun  $c = 0 = d$ . Siis  $r$  on muotoa  $r = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$ .

Vastaavasti

$$r\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+ia \\ -b+ia & 0 \end{pmatrix}$$

ja

$$\mathbf{k}r = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b+ia \\ b+ia & 0 \end{pmatrix}.$$

Kvaterniot ovat samat, kun  $-b+ia = b+ia$ . Ehto toteutuu, kunhan  $b = 0$ . Siispä  $r$  on muotoa  $r = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , jolloin  $r \in \text{Re } \mathbb{H}$ . Koska  $r$  on mielivaltaisesti valittu,  $Z(\mathbb{H}) \subset \text{Re } \mathbb{H}$ .  $\square$

Luvun lopuksi osoitetaan eräs pieni, mutta tutkielman lopuksi hyödyllinen tulos, koskien kvaternion neliötä.

**Lause 2.16.** *Olkoon  $x \in \mathbb{H}$ . Tällöin  $x^2 = \mathbf{1}$ , jos ja vain jos  $x = \pm \mathbf{1}$ .*

*Todistus.* Jos  $x = \pm \mathbf{1}$ , niin tulos on selvä. Olkoon siis  $x \in \mathbb{H}$ ,  $x = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ .

Nyt hyödyntämällä kompleksiluvun modulia  $|z|^2 = z\bar{z}$ , saadaan

$$x^2 = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 - |w|^2 & zw + \bar{z}w \\ -z\bar{w} - \bar{z}\bar{w} & -|w|^2 + \bar{z}^2 \end{pmatrix}.$$

Jotta olisi  $x^2 = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , saadaan ehto

$$z^2 - |w|^2 = 1 = \bar{z}^2 - |w|^2. \quad (\star)$$

Siis on oltava  $z^2 = \bar{z}^2$ . Tämä toteutuu ainoastaan, kun  $z \in \mathbb{R}$ .

Toisaalta on oltava  $zw + \bar{z}w = 0$ . Koska  $z \in \mathbb{R}$ , sievenee tämä ehto muotoon  $zw = 0$ . Jos  $z = 0$ , niin ehdosta  $(\star)$  seuraa, että  $-|w|^2 = 1$ . Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä kompleksiluvun moduli  $|w| \in \mathbb{R}_+$ , jolloin myös  $|w|^2 \in \mathbb{R}_+$ . Siispä on oltava  $w = 0$ , jolloin  $(\star)$  sievenee muotoon  $z^2 = 1$ . Ottamalla puolittain neliöjuuri saadaan  $z = \pm 1$ , jolloin  $x = \pm \mathbf{1}$ .  $\square$

### 3 Kvaternioiden ja ryhmien väliset kuvaukset

Tässä luvussa perehdytään hyvin pitkälti kvaternioiden lineaarialgebrallisiin ominaisuuksiin. Luvussa on käytetty lähteenä [6, §1.3, §2 ja §3] ja [8, §5].

#### 3.1 Kvaternioiden lineaarialgebrallisia ominaisuuksia

Koska kvaterniot voidaan samaistaa euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^4$  vektoreiksi, on luonnollista määritellä niille myös vastaavia ominaisuuksia. Ensimmäiseksi käsitellään kvaternioiden sisätuloa, joka on täsmälleen sama kuin reaalisen vektoriaruuden sisätulo.

**Lause 3.1.** *Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$ . Kuvaus  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(x^*y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

*on avaruuden  $\mathbb{R}^4$  sisätulo.*

*Todistus.* Olkoot

$$x = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \text{ ja } y = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix},$$

missä  $z_1 = x_1 + ix_2$ ,  $w_1 = x_3 + ix_4$ ,  $z_2 = y_1 + iy_2$  ja  $w_2 = y_3 + iy_4$ . Osoitetaan, että  $\operatorname{Re}(x^*y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ .

Nyt  $\bar{x} = x^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & -w_1 \\ \bar{w}_1 & z_1 \end{pmatrix}$ . Suoralla laskulla

$$\begin{aligned} x^*y &= \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & -w_1 \\ \bar{w}_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{z}_1z_2 + w_1\bar{w}_2 & \bar{z}_1w_2 - \bar{z}_2w_1 \\ z_2\bar{w}_1 - z_1\bar{w}_2 & z_1\bar{z}_2 + \bar{w}_1w_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Määritelmän 2.1 mukaan kvaternion reaaliosa on matriisin alkion  $a_{11}$  reaaliosa. Siispä

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{z}_1z_2 + w_1\bar{w}_2) &= \operatorname{Re}((x_1 - ix_2)(y_1 + iy_2) + (x_3 + ix_4)(y_3 + iy_4)) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4, \end{aligned}$$

kuten haluttiin. □

Sisätulon avulla saadaan määriteltyä kvaternion normi.



**Määritelmä 3.2.** Kvaternion  $q = a + bi + cj + dk$  normi on reaaliluku

$$\|q\| = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Seuraavassa lemmassa esitellään kaksi vaihtoehtoista tapaa kvaternion normin esittämiselle. Myöhemmin huomataan, että nämä tavat helpottavat joidenkin tulosten todistamista. Ensimmäinen vaihtoehto normille on vastaava kuin kompleksiluvuilla, jolloin kvaternion normi saadaan kvaternion ja sen konjugaatin avulla. Toinen vaihtoehto puolestaan hyödyntää kvaternion matriisiesitystä, josta kvaternion normi saadaan kätevästi determinantin avulla.

**Lemma 3.3.** *Olkoon  $q \in \mathbb{H}$ . Tällöin*

$$(1) \|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q}$$

$$(2) \|q\| = \sqrt{\det q}.$$

*Todistus.* Olkoon  $q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ , missä  $z = a + ib$  ja  $w = c + id$ .

$$(1) \text{ Nyt } \bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix}, \text{ jolloin}$$

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z\bar{z} + w\bar{w} & -zw + zw \\ -\bar{z}\bar{w} + \bar{z}\bar{w} & z\bar{z} + w\bar{w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z\bar{z} + w\bar{w} & 0 \\ 0 & z\bar{z} + w\bar{w} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kompleksilukujen laskusäännöistä tiedetään, että  $x\bar{x} = \operatorname{Re}(x)^2 + \operatorname{Im}(x)^2$  kaikilla  $x \in \mathbb{C}$ , joten

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{pmatrix} \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1} \\ &= \|q\|^2\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Ottamalla puolittain neliöjuuri, saadaan  $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$ . Toinen yhtäsuuruus saadaan vastaavasti.

(2) Laskemalla saadaan

$$\det q = \det \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = z\bar{z} + w\bar{w},$$

jolloin vastaavasti kuin kohdassa (1) saadaan kompleksilukujen laskusäännöistä  $\det q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Ottamalla puolittain neliöjuuri saadaan haluttu tulos  $\|q\| = \sqrt{\det q}$ .  $\square$

Koska Hamiltonin löysi kvaterniot pyrkimyksenään löytää keino moniulotteisen avaruuden kuvaamiseen, voidaan tässä tapauksessa, kuten yleisesti vektorianalyyseissä, normi ajatella vektorin pituutena.

**Lause 3.4.** *Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$ . Tällöin*

$$(1) \|xy\| = \|x\|\|y\|$$

$$(2) \|\bar{x}\| = \|x\|.$$

*Todistus.* Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$ . Lemman 3.3 kohdan (2) mukaan kvaternion normi voidaan esittää determinantin avulla.

(1) Hyödynnetään tässä kohdassa determinantin lineaarisuutta, jolloin

$$\|xy\| = \sqrt{\det xy} = \sqrt{\det x \det y} = \sqrt{\det x} \sqrt{\det y} = \|x\|\|y\|.$$

(2) Tässä kohtaa voidaan hyödyntää transpoosin determinanttia. Koska kvaternion normi on reaalityyppinen, on  $\det x = \overline{\det x}$ . Siispä

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\det x^*} = \sqrt{\det x} = \|x\|. \quad \square$$

Edellä Lauseessa 2.14 osoitettiin, että Hamiltonin kvaterniot muodostavat vinon kunnan. Tällöin kvaternioilla on olemassa käänteisalkio yhteenlaskun suhteen. Nollasta eroavilla alkioilla on myös käänteisalkio kertolaskun suhteen.

**Lemma 3.5.** *Kvaternion  $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  käänteisalkio yhteenlaskun suhteen on kvaternio  $-q = -a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ .*

*Jos  $q \neq 0$ , niin käänteisalkio kertolaskun suhteen on alkio  $q^{-1} = \bar{q}/\|q\|^2$ .*

*Todistus.* Olkoon  $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Tällöin selvästi  $q + (-q) = 0$ .

Jos  $q \neq 0$ , niin hyödyntämällä Lemman 3.3 kohtaa (1) saadaan

$$qq^{-1} = q\bar{q}/\|q\|^2 = \|q\|^2/\|q\|^2 = 1. \quad \square$$

*Huomautus 3.6.* Yhteenlaskun käänteisalkiota kutsutaan myös *vasta-alkioksi*.

Aiemmin Huomautuksessa 2.4 mainittiin, että kvaternio  $q \in \mathbb{H}$  voidaan esittää avaruuden  $\mathbb{R}^4$  vektorina. Itseasiassa kvaterniot muodostavat euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^4$ , ja imaginaariset kvaterniot  $\text{Im } \mathbb{H}$  puolestaan muodostavat kolmiulotteisen euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^3$ , mikä oli ratkaisu Hamiltonia

kymmenen vuotta työllistäneeseen ongelmaan. Tarkemmat perustelut avaruuksien yhteydelle jätetään lukijan vastuulle, ja niitä löytyykin esimerkiksi lähteestä [6]. Todistetaan kuitenkin eräs pieni, mutta merkittävä tulos: Hamiltonin kvaterniot voidaan esittää reaalisten ja imaginaaristen kvaternioiden avaruuden suorana summana. Tulos on tuttu lineaarialgebrasta, mutta tässä annetaan perustelu kvaternioiden näkökulmasta.

**Lemma 3.7.**  $\mathbb{H} = \text{Re } \mathbb{H} \oplus \text{Im } \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ .

*Todistus.* Olkoot  $x \in \text{Re } \mathbb{H}$  ja  $y \in \text{Im } \mathbb{H}$ ,  $x = \alpha$  ja  $y = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Tällöin

$$x + y = \alpha + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Koska  $x$  on realkvaternio, niin  $\bar{x} = x$ . Lauseen 3.1 nojalla

$$\langle x, y \rangle = \text{Re}(x^*y) = \text{Re}(\alpha b\mathbf{i} + \alpha c\mathbf{j} + \alpha d\mathbf{k}) = 0,$$

joten  $\text{Re } \mathbb{H}$  ja  $\text{Im } \mathbb{H}$  ovat ortogonaaliset. □

Hamilton esitti teoksissaan kvaterniot monesti muodossa  $q = a + u$ , ja käytti  $a$ :lle nimitystä ”skalaariosa” ja  $u$ :lle nimitystä ”vektoriosa.” Hän olikin luultavasti ensimmäinen sanojen ”skalaari” ja ”vektori” käyttäjä matematiikassa.

**Määritelmä 3.8.** Olkoon  $x \in \mathbb{H}$ . Sanotaan, että  $x$  on *yksikkökvaternio*, jos  $\|x\| = 1$ . Yksikkökvaternioiden joukkoa merkitään  $S^3 = \{x \in \mathbb{H} : \|x\| = 1\}$ .

**Lause 3.9.** *Joukko  $S^3$  on kvaternioiden yksiköiden ryhmän  $\mathbb{H}^\times$  aliryhmä.*

*Todistus.* Olkoot

$$x, y \in S^3, x = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \text{ ja } y = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix},$$

missä  $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ . Tällöin  $\|x\| = 1 = \|y\|$ . Määritelmän 3.5 ja Lemman 3.3 mukaan

$$y^{-1} = \bar{y}/\|y\|^2 = \bar{y}. \tag{3.1}$$

Lauseen 3.4 (2) perusteella  $\|\bar{y}\| = \|y\| = 1$ , joten  $y^{-1} \in S^3$ .

Selvästi  $xy^{-1} = x\bar{y} \in \mathbb{H}^\times$ . Lisäksi Lemman 3.3 nojalla

$$\|xy^{-1}\| = \sqrt{\det(xy^{-1})} = \sqrt{\det x \det y^{-1}} = \sqrt{\det x} \sqrt{\det y^{-1}} = \|x\| \|y^{-1}\| = 1.$$

Siis  $xy^{-1} \in S^3$ , joten aliryhmäkriteerin 1.3 nojalla  $S^3$  on ryhmän  $\mathbb{H}^\times$  aliryhmä. □

Ryhmä  $S^3$  koostuu siis niistä kvaternioista, joiden normi eli pituus on 1. Toisaalta kvaternio voidaan ajatella avaruuden vektorina. Tällöin voidaankin ajatella, että ryhmä  $S^3$  muodostaa siis kolmiulotteisen yksikköpallon pinnan.

Lauseen 3.9 todistuksesta huomataan erityisesti kaava (3.1), jonka mukaan yksikkökvaternion käänteisalkio on sama kuin sen kvaterniokonjugaatti. Tätä tullaan tarvitsemaan luvun 3 loppupuolella.

**Lause 3.10.** *Ryhmät  $S^3$  ja  $SU(2)$  ovat samat, eli  $S^3 = SU(2)$ . Lisäksi  $SU(2) \subset \mathbb{H}$ .*

*Todistus.* ” $\subset$ ” Määritelmän 2.1 mukaan mikä tahansa kvaternio  $x$  voidaan esittää kompleksisena  $2 \times 2$ -matriisina. Olkoon siis

$$x = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}, \text{ jolloin } x^* = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$xx^* = \begin{pmatrix} z\bar{z} + w\bar{w} & -\bar{w}\bar{z} + \bar{w}z \\ -z\bar{w} + z\bar{w} & z\bar{z} + w\bar{w} \end{pmatrix} = (\det x)I.$$

Normin määritelmästä ja Lemmasta 3.3 kvaternion  $x \in S^3$  normille pätee  $\|x\| = \sqrt{\det x} = 1$ . Siis  $S^3 \subset SU(2)$ .

” $\supset$ ” Olkoon  $A \in SU(2)$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Tällöin määritelmän 1.14 nojalla  $A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$ . Toisaalta  $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , sillä Määritelmän 1.14 perusteella  $\det A = 1$ , koska  $A \in SU(2)$ . Yhdistämällä nämä saadaan  $d = \bar{a}$  ja  $c = -\bar{b}$ , jolloin Määritelmän 2.1 nojalla  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ . Lisäksi Lemman 3.3 nojalla  $\|A\| = \sqrt{\det A} = 1$ , joten  $A \in S^3$ . Koska  $A$  on mielivaltaisesti valittu, on  $S^3 \supset SU(2)$ , mikä todistaa lauseen.  $\square$

Lause 3.10 antaa perustelun sille, miksi kvaterniot ovat fysiikan ja kemian parissa edelleen tänä päivänä tärkeitä työkaluja, vaikka nykyaikainen vektorianalyysi onkin korvannut ne monella matematiikan saralla.

Sisätulo siis määrittää normin kvaternioiden ryhmässä. Sillä on kuitenkin muitakin hyödyllisiä ominaisuuksia. Eräs niistä on se, että sisätulon avulla saadaan laskettua kolmen kvaternion tulo  $xyx$  hyvinkin helposti ilman huolehtimista peruskvaternioiden laskusäännöistä (2.2). Tulos saadaan seurauksena seuraavasta Lemmasta.

**Lemma 3.11.** *Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$ . Tällöin  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$ .*

*Todistus.* Lemman 3.3 mukaan  $\langle x, x \rangle = x\bar{x}$ . Sijoittamalla  $x$ :n paikalle kvaternio  $x + y$ , saadaan

$$\begin{aligned}(x + y)\overline{(x + y)} &= (x + y)(\bar{x} + \bar{y}) \\ &= x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y} \\ &= \langle x, x \rangle + x\bar{y} + y\bar{x} + \langle y, y \rangle,\end{aligned}\tag{3.2}$$

sillä Lauseen 2.11 (2) mukaan  $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$ . Toisaalta sisätulon lineaarisuudesta seuraa

$$\begin{aligned}(x + y)\overline{(x + y)} &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Yhdistämällä kaavat (3.2) ja (3.3) saadaan  $2\langle x, y \rangle = x\bar{y} + y\bar{x}$ , mistä jakamalla luvulla 2 haluttu tulos seuraa.  $\square$

**Seuraus 3.12** (Kolmoistulo).  $xyx = 2\langle \bar{x}, y \rangle y - \langle y, y \rangle \bar{x}$ .

*Todistus.* Lemman 3.11 nojalla  $2\langle x, y \rangle = x\bar{y} + y\bar{x}$ . Korvaamalla kvaternio  $x$  sen konjugaatilla  $\bar{x}$  ja huomioimalla Lauseen 2.11 kohta (1), saadaan edellisestä yhtälöstä, että  $2\langle \bar{x}, y \rangle = \bar{x}\bar{y} + yx$ . Vähentämällä puolittain kvaternio  $\bar{x}\bar{y}$  sekä kertomalla oikealta kvaterniolla  $y$  seuraa, että  $xyx = 2\langle \bar{x}, y \rangle y - \bar{x}\bar{y}y$ . Koska Lemman 3.3 kohdan (1) nojalla  $\bar{y}y = \langle y, y \rangle$ , tulos sievenee haluttuun muotoon  $xyx = 2\langle \bar{x}, y \rangle y - \langle y, y \rangle \bar{x}$ .  $\square$

## 3.2 Yleiset ortogonaalikuvaukset

Tässä aliluvussa päästään perehtymään erääseen Hamiltonin merkittävimpään löytöön kvaternioiden osalta. Kuten mainittu, Hamilton etsi kvaternioita löytääkseen matemaattisen mallin kuvaamaan ympäröivää maailmaa, eli kolmiulotteista avaruutta. Malli kuitenkin löytyi neliulotteisen avaruuden  $\mathbb{R}^4$  osajoukkona, sillä kolmiulotteisen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreita vastaavat siis imaginaariset kvaterniot. Löydettyään kvaterniot ja työskenneltyään niiden kanssa noin vuoden, Hamilton päätyi tulokseen: sen mukaan jokainen imaginaaristen kvaternioiden  $\text{Im } \mathbb{H}$  ortogonaalikuvauksia, jonka determinantti on 1, voidaan esittää muodossa  $aua^{-1}$ , missä  $a \in S^3$  ja  $u \in \text{Im } \mathbb{H}$ .

Myöhemmin, vuonna 1855, brittiläinen Arthur Cayley (1821-1895), päätyi ”normaalien” kvaternioiden tapauksessa vastaavaan tulokseen. Hänen mukaansa joukon  $\mathbb{H}$  erityiset ortogonaalikuvaukset voidaan esittää muodossa  $axb$ , missä  $a, b \in S^3$  ja  $x \in \mathbb{H}$ . Seuraavaksi perustellaan nämä Hamiltonin ja

Cayleyn esittämät tulokset, kuitenkin siten, että Hamiltonin tulos imaginaarisille kvaternioille saadaan Cayleyn tuloksen seurauksena.

Aluksi kuitenkin määritellään, mitä ovat ortogonaalikuvaukset.

**Määritelmä 3.13.** Olkoon  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  äärellisulotteinen sisätuloavaruus. Lineaarikuvaus  $f : V \rightarrow V$  on *ortogonaalinen*, jos

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

kaikille  $x, y \in V$ .

**Lause 3.14.** Olkoon  $f : V \rightarrow V$  lineaarikuvaus. Tällöin  $f$  on ortogonaalinen, jos ja vain jos  $\|f(x)\| = \|x\|$  kaikille  $x \in V$ .

*Todistus.* Olkoon  $f : V \rightarrow V$  lineaarikuvaus. Hyödynnetään todistuksessa molempiin suuntiin sisätulon ja normin välistä yhteyttä.

” $\Rightarrow$ ” Oletetaan, että  $f$  on ortogonaalinen, jolloin Määritelmän 3.13 perusteella sille pätee  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ . Nyt

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Ottamalla puolittain neliöjuuri saadaan  $\|f(x)\| = \|x\|$ , kuten haluttiin.

” $\Leftarrow$ ” Oletetaan nyt, että  $\|f(x)\| = \|x\|$ . Sisätulon lineaarisuutta hyödyntämällä saadaan

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \|f(x) + f(y)\|^2 &= \langle f(x) + f(y), f(x) + f(y) \rangle \\ &= \langle f(x), f(x) \rangle + \langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(y), f(x) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle \\ &= \|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), f(y) \rangle + \|f(y)\|^2. \end{aligned}$$

Oletuksen nojalla  $\|f(x)\| = \|x\|$  ja  $\|f(y)\| = \|y\|$ , joten yhdistämällä edelliset saadaan  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .  $\square$

Yleisesti ortogonaalisten kuvausten ryhmää tietyssä sisätuloavaruudessa  $V$  merkitään  $O(V)$ . Kun lineaarikuvaus  $f : V \rightarrow V$  on ortogonaalinen, merkitään  $f \in O(V)$ .

Lineaarikuvauksella  $f : V \rightarrow V$  on myös muita ominaisuuksia. Lineaarialgebrasta on tunnettua, että lineaarikuvausta vastaa aina jokin  $m \times n$ -matriisi.

Koska tässä tapauksessa kuvaus  $f$  on automorfismi, eli kuvaus joukolta  $V$  itselleen, on  $m = n$ . Kuvausta  $f$  vastaava matriisi on siis neliömatriisi, jolloin sillä on olemassa determinantti.

Jos  $f$  on ortogonaalinen, niin sitä vastaava determinantti  $\det f = \pm 1$ . Lisäksi determinantin ollessa nollasta eroava, on kuvauksella  $f$  käänteiskuvaus  $f^{-1}$ , joka on myös ortogonaalinen. [10, §34]

Ortogonaaliryhmä voidaan jakaa determinantin mukaan kahteen joukkoon, *erityiseen ortogonaaliryhmään*

$$\text{SO}(V) = \{f \in \text{O}(V) : \det f = 1\}$$

ja joukkoon

$$\text{O}^-(V) = \{f \in \text{O}(V) : \det f = -1\}.$$

Erityisesti

$$\text{O}(V) = \text{SO}(V) \cup \text{O}^-(V)$$

kaikilla sisätuloavaruuksilla  $V$ .

Seuraavaksi määritellään kuvaus, joka osoittautuu hyvinkin pian merkittäväksi.

Olkoon  $s_a : V \rightarrow V$ ,

$$s_a(x) = x - 2\langle a, x \rangle a.$$

missä  $a \in V, \|a\| = 1$ . Kuvaus  $s_a$  on itse asiassa hypertason peilaus, mutta keskitytään tähän tietoon myöhemmin. Todistetaan kuitenkin, että  $s_a$  on yleisesti ortogonaalinen missä tahansa sisätuloavaruudessa.

**Lause 3.15.** *Olkoon  $s_a$  kuten edellä määritelty. Kuvaus  $s_a$  on ortogonaalinen.*

*Todistus.* Hyödyntämällä sisätulon ominaisuuksia sekä Määritelmää 3.2, suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned} \langle s_a(x), s_a(y) \rangle &= \langle x - 2\langle a, x \rangle a, y - 2\langle a, y \rangle a \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2\langle a, y \rangle \langle a, x \rangle - 2\langle a, x \rangle \langle a, y \rangle + 4\langle a, x \rangle \langle a, y \rangle \langle a, a \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2\langle a, y \rangle \langle a, x \rangle - 2\langle a, x \rangle \langle a, y \rangle + 4\langle a, x \rangle \langle a, y \rangle \|a\|^2 \\ &= \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

sillä  $\|a\| = 1$ . Määritelmän 3.13 perusteella  $s_a$  on ortogonaalinen. □

**Lause 3.16.** *Kuvauksella  $s_a$  on seuraavat ominaisuudet*

(1)  $s_a \in \text{O}^-(V)$

(2)  $s_a^2 = \text{id}$ , missä  $\text{id}$  on identtinen kuvaus, sekä

(3)  $f \circ s_a \in \text{SO}(V)$ , kun  $f \in \text{O}^-(V)$ .

*Todistus.* Olkoot siis  $s_a : V \rightarrow V$ ,  $s_a(x) = x - 2\langle a, x \rangle a$  ja  $a \in V$ ,  $\|a\| = 1$ .

(1) Oletetaan, että sisätuloavaruus  $V$  on  $n$ -ulotteinen. Koska  $V$  on sisätuloavaruus, niin erityisesti on olemassa  $n$  kappaletta lineaarisesti riippumattomia vektoreita, jotka muodostavat avaruuden  $V$  kannan. Olkoot nämä vektorit  $a, x_2, x_3, \dots, x_n$ , siis  $V = \langle a, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ . Oletetaan lisäksi, että  $a \perp x_k$  kaikilla  $k = 2, 3, \dots, n$ . Tämä on mahdollista, sillä itse asiassa sisätuloavaruudelle voidaan muodostaa täysin ortogonaalinen kanta Gramin ja Schmidtin menetelmällä, mutta tässä tapauksessa riittää pelkästään vektorin  $a$  kohtisuoruus muihin kantavektoreihin.

Tarkastellaan, kuinka kuvaus  $s_a$  kuvaa kantavektoreita. Nyt

$$s_a(a) = a - 2\langle a, a \rangle a = a - 2\|a\|^2 a = a - 2a = -a,$$

sillä  $\|a\| = 1$ . Koska  $a \perp x_k$  kaikilla  $k$ , niin  $\langle a, x_k \rangle = 0$ . Tällöin

$$s_a(x_k) = x_k - 2\langle a, x_k \rangle a = x_k.$$

Kuvausta  $s_a$  vastaava matriisi on siis diagonaalimatriisi  $\text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ , missä diagonaalin ensimmäinen alkio on  $-1$  ja muut  $1$ . Tällöin  $\det s_a = -1$ . Koska edellä Lauseessa 3.15 osoitettiin kuvauksen  $s_a$  ortogonaalisuus, pätee  $s_a \in \text{O}^-(V)$ .

(2) Käyttämällä sisätulon lineaarisuutta saadaan suoralla laskulla

$$\begin{aligned} s_a(s_a(x)) &= s_a(x - 2\langle a, x \rangle a) \\ &= x - 2\langle a, x \rangle a - 2\langle a, x - 2\langle a, x \rangle a \rangle a \\ &= x - 2\langle a, x \rangle a - 2\langle a, x \rangle a + 4\langle a, x \rangle \langle a, a \rangle a \\ &= x - 4\langle a, x \rangle a + 4\langle a, x \rangle \|a\|^2 a \\ &= x. \end{aligned}$$

(3) Kun  $f \in \text{O}^-(V)$ , niin  $\det f = -1$ . Kohdan (1) nojalla  $\det s_a = -1$ , joten determinantin lineaarisuudesta seuraa, että

$$\det(f \circ s_a) = \det f \cdot \det s_a = -1 \cdot (-1) = 1.$$

Siispä  $f \circ s_a \in \text{SO}(V)$ . □



### 3.3 Kvaterniot ja ortogonaalikuvaukset

Aiemmin tutkielmassa Luvussa 3.1 on mainittu, että Hamiltonin kvaterniot vastaavat euklidista avaruutta  $\mathbb{R}^4$  ja imaginaariset kvaterniot avaruutta  $\mathbb{R}^3$ . Sen vuoksi keskitytään pääosin euklidisiin avaruuksiin, jotka tunnetusti ovat sisätuloavaruuksia.

**Määritelmä 3.17.** Euklidisen sisätuloavaruuden  $\mathbb{R}^n$  ortogonaaliryhmää merkitään  $O(n)$ . Vastaavalla tavalla merkitään erityistä ortogonaaliryhmää

$$SO(n) = \{f \in O(n) : \det f = 1\}$$

ja joukkoa

$$O^-(n) = \{f \in O(n) : \det f = -1\}.$$

*Huomautus 3.18.* Tässä tutkielmassa euklidisen avaruuden ortogonaaliryhmä on määritelty lineaarikuvauksille. Kuitenkin matriisit tunnetusti vastaavat lineaarikuvauksia [10, §17], joten joissain tapauksissa on helpompi ajatella ryhmän  $O(n)$  alkiot lineaarikuvauksia vastaavina neliömatriiseina. Tällöin merkitään seuraavasti: euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  ortogonaaliryhmä on

$$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : AA^T = I_n\},$$

missä  $I_n$  on  $n \times n$ -identtinen matriisi. Euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  erityinen ortogonaaliryhmä on

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}.$$

Lisäksi merkitään

$$O^-(n) = \{A \in O(n) : \det A = -1\}.$$

**Lemma 3.19.** Ryhmä  $SO(n)$  on ortogonaaliryhmän  $O(n)$  aliryhmä.

*Todistus.* Huomautuksen 3.18 mukaan ortogonaalista lineaarikuvausta vastaa neliömatriisi. Olkoon determinanttikuvaus  $\det : O(n) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ . Determinanttikuvaus on injektiivinen homomorfismi, jonka ydin  $\ker(\det) = SO(n)$ . Lauseen 1.11 kohdan (1) nojalla  $SO(n)$  on ryhmän  $O(n)$  aliryhmä.  $\square$

Tässä tutkielmassa keskitytään pääosin euklidisten avaruuksien ortogonaaliryhmiin. Mainitaan kuitenkin vielä yksi tulos koskien yleisiä sisätuloavaruuksia, jolla on merkittävä seuraus kvaternioihin liittyen.

**Lause 3.20.** Ryhmän  $O(V)$  peilaukset virittävät koko ryhmän  $O(V)$ . Erityisesti jokainen kuvaus  $f \in SO(V)$  on parillisen monen  $k$  peilauksen yhdiste, kun  $k \leq \dim V$ .

*Todistus.* Katso [2, §I.2 Proposition 2.18]. □

Seuraavaksi keskitytään kvaternioiden muodostamaan sisätuloavaruuteen. Määritellään aluksi kaksi kuvausta joukossa  $\mathbb{H}$ . Olkoot  $a, b \in S^3$  ja kuvaukset  $R_{a,b} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,

$$R_{a,b}(x) = axb$$

ja  $S_{a,b} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,

$$S_{a,b}(x) = a\bar{x}b.$$

Nämä ovat itse asiassa Cayleyn ja Hamiltonin löytämät kuvaukset, ja kaikki reaalisen sisätuloavaruuden  $\mathbb{H}$  ortogonaaliset kuvaukset voidaan esittää näiden kahden kuvauksen avulla. Todistetaan kuitenkin aluksi, että nämä kuvaukset itse ovat ortogonaalisia.

**Lause 3.21.** *Olkoot  $a, b \in S^3$ . Kuvaukset  $R_{a,b}$  ja  $S_{a,b}$  ovat ortogonaalisia lineaarikuvauksia.*

*Todistus.* Olkoot siis kuvaukset  $R_{a,b}$  ja  $S_{a,b}$ , kuten edellä on määritelty. Todistetaan väite kuvaukselle  $S_{a,b}$ . Osoitetaan ensin lineaarisuus.

Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}$  ja  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Käyttämällä Lauseen 2.11 kohtaa (2) sekä kertolaskun distributiivisuutta saadaan

$$S_{a,b}(x + y) = a(\overline{x + y})b = a(\bar{x} + \bar{y})b = a\bar{x}b + a\bar{y}b = S_{a,b}(x) + S_{a,b}(y).$$

Lisäksi hyödyntämällä Lauseen 2.15 tulosta, että reaaliset kvaterniot ovat kvaternioiden keskus, saadaan

$$S_{a,b}(\lambda x) = a(\overline{\lambda x})b = a(\lambda \bar{x})b = \lambda(a\bar{x}b) = \lambda S_{a,b}(x),$$

joten kuvaus  $S_{a,b}$  on lineaarikuvaus.

Osoitetaan seuraavaksi kuvauksen ortogonaalisuus hyödyntämällä Lauseen 3.4 ja sitä, että  $a, b \in S^3$ . Nyt

$$\|S_{a,b}(x)\| = \|a\bar{x}b\| = \|a\|\|\bar{x}\|\|b\| = \|x\|,$$

jolloin Lauseen 3.14 nojalla kuvaus  $S_{a,b}$  on ortogonaalinen. Todistus on vastaava kuvaukselle  $R_{a,b}$ . □

**Seuraus 3.22.** *Kuvaus  $s_a : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  on muotoa  $s_a(x) = -a\bar{x}a$ , kun  $a \in S^3$  ja  $x \in \mathbb{H}$ .*

*Todistus.* Hyödynnetään kolmoistuloa 3.12, jonka mukaan kaikille kvaternioille pätee yhtäsuuruus  $yx y = 2\langle \bar{x}, y \rangle - \langle y, y \rangle \bar{x}$ . Normin Määritelmästä 3.2 saadaan sisätulo muotoon  $\langle y, y \rangle = \|y\|^2$ . Sijoittamalla kolmoistulon lausekkeeseen kvaternion  $y$  tilalle  $a$  ja  $x$ :n tilalle  $\bar{x}$ , sekä esittämällä sisätulo normin

neliönä, saadaan lauseke muotoon  $a\bar{x}a = 2\langle x, a \rangle - \|a\|^2x$ . Koska  $a \in S^3$ , on  $\|a\| = 1$ . Lisäksi voidaan hyödyntää sisätulon lineaarisuutta, jolloin lauseke sievenee muotoon  $a\bar{x}a = 2\langle a, x \rangle - x$ . Kertomalla puolittain luvulla  $(-1)$ , saadaan  $s_a(x) = x - 2\langle a, x \rangle a = -a\bar{x}a$ , kuten haluttiinkin.  $\square$

Lemmasta 3.22 seuraa eräs erityinen ominaisuus, nimittäin tapauksessa, jossa  $a = 1$ . Tällöin  $s_1 = -\bar{x}$ .

Määritellään seuraavaksi kuvaus  $p_a : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,

$$p_a(x) = axa, a \in S^3.$$

Erityisesti  $p_a = R_{a,a}$ , joten se on Lauseen 3.21 nojalla ortogonaalinen.

Havaitaan, että kuvauksilla  $s_a$  ja  $p_a$  on yhteys.

**Lemma 3.23.** *Kuvauksille  $s_a$  ja  $p_a$  pätee  $s_a \circ s_b = p_a \circ p_{\bar{b}}$ .*

*Todistus.* Suoralla laskulla saadaan

$$(s_a \circ s_b)(x) = s_a(s_b(x)) = s_a(-b\bar{x}b) = -a(\overline{-b\bar{x}b})a = \bar{a}\bar{x}\bar{b}a$$

ja toisaalta

$$(p_a \circ p_{\bar{b}})(x) = p_a(p_{\bar{b}}(x)) = p_a(\bar{b}x\bar{b}) = \bar{a}\bar{b}x\bar{b}a,$$

kuten haluttiin.  $\square$

Edeltävästä Lemmasta ja siitä, että  $p_1 = id$ , seuraa erityisesti, että

$$p_a = s_a \circ s_1.$$

**Esimerkki 3.24.** (a) Tarkastellaan kuvausta  $s_i$ . Olkoon  $x = a + bi + cj + dk$  kvaternio. Nyt huomioiden peruskvaternioiden laskusäännöt (2.1) ja (2.2), saadaan

$$\begin{aligned} s_i(x) &= -\mathbf{i}(a - bi - cj - dk)\mathbf{i} \\ &= -a\mathbf{ii} + b\mathbf{iii} + c\mathbf{iji} + d\mathbf{iki} \\ &= a - bi + c\mathbf{k}\mathbf{i} + d\mathbf{ij} \\ &= a - bi + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Kuvaus  $s_i$  on siis peilaus kvaternioiden  $\mathbf{1}, \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  virittämässä hypertasossa, sillä se kuvaa  $\mathbf{i}$ :n suuntaisen komponentin vastakkaisekseen.

(b) Kuvaus  $p_a$  ei ole peilaus: tämä johtuu siitä, että  $p_a = s_a \circ s_1$ . Tarkastellaan kuitenkin hieman, mitä kuvaus  $p_a$  tekee.

Olkoon nyt  $a = \cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi$ , jolloin  $a$  on yksikkökvaternio. Tällöin  $a$  voidaan esittää muodossa  $a = e^{i\varphi}$ . Nyt

$$\begin{aligned}
p_{e^{i\varphi}}(\mathbf{j}) &= e^{i\varphi} \mathbf{j} e^{i\varphi} \\
&= (\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi) \mathbf{j} (\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi) \\
&= \mathbf{j} (\cos \varphi - \mathbf{i} \sin \varphi) (\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi) \\
&= \mathbf{j} (\cos -\varphi + \mathbf{i} \sin -\varphi) (\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi) \\
&= \mathbf{j} e^{-i\varphi} e^{i\varphi} \\
&= \mathbf{j},
\end{aligned}$$

joten kuvaus  $p_{e^{i\varphi}}$  säilyttää  $\mathbf{j}$ :n suuntaisen komponentin paikallaan. Vastaava havainto pätee myös kvaterniolle  $\mathbf{k}$ . Sen sijaan esimerkiksi kvaterniolle  $e^{i\theta}$  kuvaus  $p_{e^{i\varphi}}$  on kierto, sillä

$$p_{e^{i\varphi}}(e^{i\theta}) = e^{i\varphi} e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+2\varphi)}.$$

Koska Hamiltonin kvaterniot muodostavat reaalisen sisätuloavaruuden, niille pätee Lauseen 3.20 tulos.

**Lause 3.25.** *Jokainen ortogonaalinen kuvaus  $f \in \text{SO}(4)$  on enintään neljän kuvauksen  $p_a, a \in S^3$  yhdistetty kuvaus. Erityisesti kuvaukset  $p_a$  ja  $s_1$  virittävät joukon  $\text{O}(4)$ .*

*Todistus.* Seuraa Lauseesta 3.20, Seurauksesta 3.22 ja Lemmasta 3.23.  $\square$

**Esimerkki 3.26.** Kuvaus  $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, g(x) = -x$  voidaan esittää kolmen kuvauksen yhdisteenä  $g = p_k \circ p_j \circ p_i$ . Olkoon  $x = a + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}$ . Siirtämällä vakio-termit kertoimiksi sekä huomioiden peruskvaternioiden laskusäännöt (2.1) ja (2.2) saadaan

$$\begin{aligned}
g(x) &= p_k \circ p_j \circ p_i(x) = \mathbf{kjixijk} \\
&= \mathbf{kji}(a + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k})\mathbf{ijk} \\
&= \mathbf{kji}(a)\mathbf{ijk} + \mathbf{kji}(\mathbf{b}\mathbf{i})\mathbf{ijk} + \mathbf{kji}(\mathbf{c}\mathbf{j})\mathbf{ijk} + \mathbf{kji}(\mathbf{d}\mathbf{k})\mathbf{ijk} \\
&= a\mathbf{kj}(\mathbf{ii})\mathbf{jk} + b(\mathbf{kj})(\mathbf{ii})(\mathbf{ijk}) + c(\mathbf{kj})(\mathbf{ij})(\mathbf{ijk}) + d(\mathbf{kj})(\mathbf{ik})(\mathbf{ijk}) \\
&= -a\mathbf{k}(\mathbf{jj})\mathbf{k} + b(-\mathbf{i})(-1)(-1) + c(-\mathbf{i})\mathbf{k}(-1) + d(-\mathbf{i})(-\mathbf{j})(-1) \\
&= a\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{b}\mathbf{i} - \mathbf{c}\mathbf{j} - \mathbf{d}\mathbf{k} \\
&= -(a + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}) = -x.
\end{aligned}$$

**Lause 3.27** (Cayley). *Jokaiselle ortogonaaliselle kuvaukselle  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  on olemassa yksikkökvaterniot  $a$  ja  $b$ , joille pätee*

$$(1) f = R_{a,b}, \text{ jos } f \in \text{SO}(4)$$

(2)  $f = S_{a,b}$ , jos  $f \in O^-(4)$ .

*Todistus.* Olkoon siis  $f \in O(4)$ .

(1) Jos  $f \in SO(4)$ , niin Lauseen 3.25 mukaan se voidaan kirjoittaa korkeintaan neljän eri kuvauksen  $p_{a_i}$  yhdisteenä, joissa  $a_i \in S^3$  kaikilla indekseillä  $i = 1, 2, 3, 4$ . Siis  $f = p_{a_1} \circ p_{a_2} \circ p_{a_3} \circ p_{a_4}$ , jolloin  $f(x) = a_1 a_2 a_3 a_4 x a_4 a_3 a_2 a_1$ . Kun merkitään  $a = a_1 a_2 a_3 a_4$  ja  $b = a_4 a_3 a_2 a_1$ ,  $f$  on muotoa  $f(x) = axb$ . Lisäksi Lauseen 3.4 kohdan (1) nojalla

$$\|a\| = \|a_1 a_2 a_3 a_4\| = 1 = \|a_4 a_3 a_2 a_1\| = \|b\|,$$

joten  $f = R_{a,b}$ .

(2) Jos  $f \in O^-(4)$ , niin Lemman 3.16 mukaan  $f \circ s_1 \in SO(4)$ . Tällöin kohdan (1) nojalla  $f(-\bar{x}) = (f \circ s_1)(x) = cxb$  joillain  $c, b \in S^3$ . Vaihtamalla  $x$  ja  $-\bar{x}$  paikkoja keskenään, saadaan  $f(x) = -c\bar{x}b = a\bar{x}b$ , kun merkitään  $a = -c$ . Siispä  $f = S_{a,b}$ , kuten haluttiin.  $\square$

**Lause 3.28.** *Olkoon  $a \in S^3$ . Kuvausten  $R_{a,\bar{a}}, S_{a,\bar{a}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  rajoittumat avaruuteen  $\text{Im } \mathbb{H}$  ovat ortogonaalisia lineaarikuvauksia, joille pätee*

$$R_{a,\bar{a}}, S_{a,\bar{a}} : \text{Im } \mathbb{H} \rightarrow \text{Im } \mathbb{H}.$$

*Todistus.* Kuvausten lineaarisuus ja ortogonaalisuus on jo todistettu Lauseessa 3.21. Todistetaan kuitenkin se, että kuvaukset  $R_{a,\bar{a}}$  ja  $S_{a,\bar{a}}$  kuvaavat imaginaariset kvaterniot imaginaarisiksi kvaternioiksi.

Olkoon  $u \in \text{Im } \mathbb{H}$  mielivaltainen imaginaarinen kvaternio ja  $a \in S^3$ . Täytyy siis osoittaa, että  $R_{a,\bar{a}}(u) = au\bar{a} \in \text{Im } \mathbb{H}$ . Tuloksen voisi todistaa suoralla laskulla, mutta se on melko työlästä. Sovelletaan sen sijaan Lemmaa 2.13 kvaternioihin  $a$  ja  $u\bar{a}$ . Nyt

$$\text{Re}(au\bar{a}) = \text{Re}(a(u\bar{a})) = \text{Re}((u\bar{a})a) = \text{Re}(u\bar{a}a).$$

Lemman 3.3 nojalla  $\sqrt{\bar{a}a} = \|a\|$ , jolloin korottamalla molemmat toiseen potenssiin saadaan

$$\text{Re}(u\bar{a}a) = \text{Re}(u\|a\|^2) = \text{Re}(u) = 0,$$

sillä  $a$  on yksikkökvaternio ja  $u$  imaginaarinen kvaternio. Siis  $R_{a,\bar{a}}(u) \in \text{Im } \mathbb{H}$ .

Todistus on vastaava kuvaukselle  $S_{a,\bar{a}}$ ; kun  $u \in \text{Im } \mathbb{H}$ , on  $\bar{u} = -u$ . Tällöin

$$S_{a,\bar{a}}(u) = a\bar{u}a = -aua = -R_{a,\bar{a}}(u),$$

jolloin myös  $S_{a,\bar{a}}(u) \in \text{Im } \mathbb{H}$ .  $\square$

Vastaavasti kuin joukossa  $\mathbb{H}$ , joukossa  $\text{Im } \mathbb{H}$  kaikki ortogonaaliset kuvaukset voidaan esittää kuvausten  $R_{a,\bar{a}}$  ja  $S_{a,\bar{a}}$  avulla.

Määritellään seuraavaksi kuvaus  $F$ , jonka avulla jokainen avaruuden  $\text{Im } \mathbb{H}$  ortogonaalikuvaus  $f$  voidaan esittää yksikäsitteisesti avaruuden  $\mathbb{H}$  ortogonaalikuvausena. Määritellään  $F$  kuitenkin matriisien avulla, sillä Huomautuksen 3.18 mukaan matriiseilla on lähtö- ja maalijoukossa niitä vastaavat lineaarikuvaukset.

Olkoon  $F : \text{O}(3) \rightarrow \text{O}(4)$ ,

$$F(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Kuvausta  $F$  vastaava matriisi on siis lohkodeagonaalinen matriisi, jolloin sen determinantille pätee

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det 1 \cdot \det B = \det B. \quad (3.4)$$

Lisäksi

$$F(B)^T F(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^T B \end{pmatrix}.$$

Nyt  $F(B)^T F(B) = I_4$ , jos ja vain jos  $B^T B = I_3$ . Siispä  $F(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  on ortogonaalinen, jos ja vain jos  $B$  on ortogonaalinen.

**Lemma 3.29.** *Kuvaus  $F$  on injektiivinen homomorfismi.*

*Todistus.* Selvästi kuvaus  $F$  on injektio. Lisäksi

$$F(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = F(A) \cdot F(B),$$

joten kuvaus  $F$  on homomorfismi. □

**Esimerkki 3.30.** Matriisi  $F(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  vastaa kvaterniosta riippuen erilaista ortogonaalista kuvausta. Huomautuksen 2.4 mukaan kvaternio voidaan esittää avaruuden  $\mathbb{R}^4$  vektorina, jolloin sitä vastaa  $4 \times 1$ -matriisi. Jos  $x$  on reaalikvaternio, niin  $x = (a, 0, 0, 0)$ . Tällöin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jos  $y$  puolestaan on imaginaarinen kvaternio, niin sen vektoriesitys on  $y = (0, b, c, d)$ . Tällöin matriisitulot

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ ja } B \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

vastaavat samaa imaginaarista kvaterniota.

Tästä erityisesti seuraa, että matriiseja  $F(B)$  ja  $B$  vastaaville ortogonaalisille kuvauksille  $h \in O(4)$  ja  $f \in O(3)$  pätee  $h(x) = f(x)$  aina, kun  $x \in \text{Im } \mathbb{H}$ . [6, §3.3]

**Lause 3.31** (Hamilton). *Jokaiselle  $f : \text{Im } \mathbb{H} \rightarrow \text{Im } \mathbb{H}$ ,  $f \in O(3)$  on olemassa yksikkökvaternio  $a$ , jolle pätee*

$$(1) \quad f = R_{a,\bar{a}}, \text{ jos } f \in \text{SO}(3)$$

$$(2) \quad f = -R_{a,\bar{a}}, \text{ jos } f \in O^-(3).$$

*Todistus.* (1) Oletetaan, että  $f \in \text{SO}(3)$ , jolloin Huomautuksen 3.18 mukaan sitä vastaa ortogonaalinen matriisi  $A$ . Tällöin

$$\det A = 1 = \det F(A)$$

kaavan (3.4) mukaan. Siis  $F(A) \in \text{SO}(4)$ , jolloin Huomautuksen 3.18 nojalla sitä puolestaan vastaa ortogonaalinen lineaarikuvaus  $h \in \text{SO}(4)$ .

Cayleyn lauseen 3.27 kohdan (1) mukaan  $h$  on muotoa  $R_{a,b}$ , mistä seuraa, että  $R_{a,b}(x) = axb$  joillain  $a, b \in S^3$ . Erityisesti  $R_{a,b}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ , sillä  $\mathbf{1} \in \text{Re } \mathbb{H}$ . Siis on oltava  $ab = \mathbf{1}$ , jolloin  $b = a^{-1} = \bar{a}$  kaavan (3.1) mukaan. Tällöin  $h = R_{a,\bar{a}}$ . Esimerkin 3.30 tuloksesta seuraa, että  $f = h = R_{a,\bar{a}}$ , sillä kuvaukset kuvaavat ainoastaan imaginaarisia kvaternioita.

(2) Oletetaan, että  $f \in O^-(3)$ . Tällöin kuvauksen  $-f = -id \circ f$  determinantti on  $\det(-f) = \det(-id) \cdot \det f = -1 \cdot (-1) = 1$ , sillä kuvaukset  $f, -id \in O^-(3)$ . Tällöin  $-f \in \text{SO}(3)$ , joten kohdan (1) nojalla  $-f = R_{a,\bar{a}}$ . Siispä  $f = -R_{a,\bar{a}}$ .  $\square$

**Lause 3.32.** *Olkoon  $\Phi : S^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ ,*

$$\Phi(a)(u) = R_{a,\bar{a}}|_{\text{Im } \mathbb{H}}(u) = au\bar{a}$$

*kaikille  $u \in \text{Im } \mathbb{H}$ . Kuvaus  $\Phi$  on surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on  $\{\pm \mathbf{1}\}$ . Lisäksi  $\Phi(S^3) = \text{SO}(3)$ .*

*Huomautus 3.33.* Kuvaus  $\Phi(a)$  on siis kuvauksen  $R_{a,\bar{a}}$  rajoittuma avaruuteen  $\text{Im } \mathbb{H}$ . Selkeyden vuoksi merkitään  $\Phi(a) = \Phi_a$ .

*Todistus.* Olkoot  $a, b \in S^3$  ja  $u \in \text{Im } \mathbb{H}$ . Todistetaan ensin kuvauksen  $\Phi$  homomorfinisuus.

$$\begin{aligned} [\Phi_a \circ \Phi_b](u) &= \Phi_a(bu\bar{b}) \\ &= abu\bar{b}\bar{a} \quad (\star) \\ &= (ab)u\bar{a}\bar{b} \\ &= \Phi_{ab}(u), \end{aligned}$$

missä kohdassa  $(\star)$  on käytetty Lauseen 2.11 kohtaa (2) Siispä  $\Phi_a \circ \Phi_b = \Phi_{ab}$ , joten  $\Phi$  on homomorfinismi.

Todistetaan sitten, että  $\ker \Phi = \{\pm \mathbf{1}\}$ . Oletetaan, että  $a \in \ker \Phi$ . Tällöin  $u = au\bar{a}$  kaikille  $u \in \text{Im}(\mathbb{H})$ . Lauseen 3.9 todistuksen mukaan  $\bar{a} = a^{-1}$ , kun  $a \in S^3$ . Kertomalla oikealta puolittain kvaterniolla  $a$  saadaan  $ua = au$ . Lauseen 2.15 mukaan kvaternioiden ryhmän keskus on  $\mathbb{R}$ , joten  $a \in \mathbb{R} \cap S^3$ . Siispä on oltava  $a = \pm \mathbf{1}$ . Lisäksi  $\Phi_{-\mathbf{1}}(u) = -\mathbf{1}u(-\mathbf{1}) = u$ , joten  $\Phi_{-\mathbf{1}}$  on identtinen kuvaus.

Todistetaan vielä, että  $\Phi(S^3) = \text{SO}(3)$ . Hamiltonin lauseen 3.31 kohdasta (1) seuraa, että  $\Phi(S^3) \supset \text{SO}(3)$ . Tämä osoittaa samalla sen, että kuvaus  $\Phi$  on surjektio. Toisen suunnan osoittamiseksi tehdään antiteesi, että kuvaus  $\Phi_a \in O^-(3)$  jollain  $a \in S^3$ , jolloin  $\Phi_a(x) = -ax\bar{a} = a\bar{x}\bar{a}$  kaikilla  $x \in \text{Im } \mathbb{H}$ . Tällöin Hamiltonin lauseen 3.31 kohdan (2) nojalla on olemassa  $b \in S^3$ , jolle

$$a\bar{x}\bar{a} = bx\bar{b}.$$

Kertomalla vasemmalta kvaterniolla  $\bar{b}$  ja oikealta kvaterniolla  $b$ , saadaan yhtäsuuruus  $x = p\bar{x}p^{-1}$ , missä  $p = \bar{b}a$ . Erityisesti  $p$  on yksikkökvaternio kahden yksikkökvaternion tulona, jolloin  $p^{-1} = \bar{p}$  kaavan (3.1) mukaan. Sijoittamalla  $x = p$ , saadaan yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} p &= p\bar{p}p^{-1} \\ &= p^{-1}, \quad \text{sillä } p\bar{p} = \|p\|^2 = 1 \\ &= \bar{p}, \quad \text{sillä } x^{-1} = \bar{x} \text{ kaikilla } x \in S^3. \end{aligned}$$

Siispä  $p \in \text{Re } \mathbb{H}$ . Mutta tällöin  $x = p\bar{x}p^{-1} \iff x = pp^{-1}\bar{x} \iff x = \bar{x}$  kaikille  $x$ , mikä on ristiriita. Täten  $\Phi(S^3) \subset \text{SO}(3)$ , joten  $\Phi(S^3) = \text{SO}(3)$ .  $\square$

**Lause 3.34.** *Olkkoon  $\Psi : S^3 \times S^3 \rightarrow \text{SO}(4)$ ,*

$$\Psi(a, b)(x) = R_{a,\bar{b}} = ax\bar{b}.$$

*Kuvaus  $\Psi$  on surjekttiivinen homomorfinismi, jonka ydin on  $\{\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})\}$ . Lisäksi  $\Psi(S^3 \times S^3) = \text{SO}(4)$ .*



*Huomautus 3.35.* Merkitään selkeyden vuoksi  $\Psi(a, b)(x) = \Psi_{a,b}(x)$ .

*Todistus.* Olkoon  $x \in \mathbb{H}$  ja olkoot  $(a, b), (c, d) \in S^3 \times S^3$ . Todistetaan ensin kuvauksen  $\Psi$  homomorfinisuus, joka on lähes vastaava kuin Lauseen 3.32 todistus. Nyt

$$\begin{aligned} [\Psi_{a,b} \circ \Psi_{c,d}](x) &= \Psi_{a,b}(cx\bar{d}) \\ &= acx\bar{d}\bar{b} \quad (\star) \\ &= (ac)x(\bar{b}\bar{d}) \\ &= \Psi_{ac,bd}(x) \\ &= \Psi_{(a,b)\cdot(c,d)}(x). \end{aligned}$$

Myös tässä todistuksessa kohdassa  $(\star)$  on käytetty Lauseen 2.11 kohtaa (2). Siis  $\Psi_{a,b} \circ \Psi_{c,d} = \Psi_{(a,b)\cdot(c,d)}$ , joten kuvaus  $\Psi$  on homomorfismi.

Todistetaan sitten, että  $\ker \Psi = \{\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})\}$ . Oletetaan, että  $(a, b) \in \ker \Psi$ , jolloin  $\mathbf{1} = \Psi_{a,b}(\mathbf{1}) = ab$ . Tästä seuraa, että  $a = \bar{b}^{-1} = b$ , missä jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa kaavasta (3.1). Nyt

$$x = \Psi_{a,b}(x) = ax\bar{b} = ax\bar{a} = axa^{-1}$$

kaikilla  $x \in \mathbb{H}$ . Lauseen 2.15 mukaan kvaternioiden ryhmän keskus on  $\mathbb{R}$ , joten on oltava  $a \in \mathbb{R} \cap S^3 = \{\pm\mathbf{1}\}$ . Siispä  $(a, b) = \pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ , kuten haluttiin.

Osoitetaan vielä, että  $\Psi(S^3 \times S^3) = \text{SO}(4)$ . Cayleyn lauseen 3.27 kohdassa (1) on osoitettu, että  $\Psi(S^3 \times S^3) \supset \text{SO}(4)$ , mikä myös todistaa homomorfin surjektiivisuusominaisuuden. Osoitetaan toinen suunta käyttäen antiiteesia. Oletetaan, että  $\Psi_{a,b} \in O^-(4)$  joillain  $a, b \in S^3$ , jolloin  $\Psi_{a,b}(x) = ax\bar{b}$  kaikilla  $x \in \mathbb{H}$ . Cayleyn lauseen 3.27 kohdan (2) perusteella on olemassa  $c, d \in S^3$ , joille  $ax\bar{b} = c\bar{x}d$  kaikilla  $x$ . Tällöin  $\bar{x} = pxq^{-1}$ , kun  $p = \bar{c}a$  ja  $q = \bar{d}b$ . Sijoittamalla  $x$ :n paikalla kvaternion  $\mathbf{1}$ , saadaan  $\bar{\mathbf{1}} = p\mathbf{1}q^{-1}$ , josta kertomalla oikealta kvaterniolla  $q$  saadaan  $p = q$ . Yhtälö sievenee muotoon  $\bar{x} = pxp^{-1}$ , josta saadaan vastaavalla tavalla kuin Lauseen 3.32 todistuksessa, että  $p \in \text{Re } \mathbb{H}$ . Tästä seuraa jälleen ristiriita, että  $x = \bar{x}$  kaikille kvaterniolla  $x$ . Antiteesin ollessa väärä, on  $\Psi(S^3 \times S^3) = \text{SO}(4)$ .  $\square$

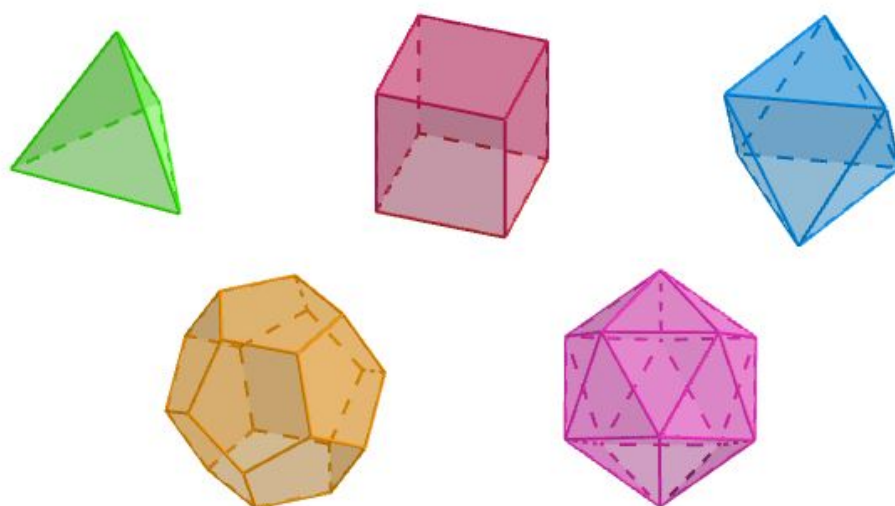
Näin on siis saatu todistettua Hamiltonin ja Cayleyn jo yli 150 vuotta vanhat tulokset. Koska kuvaus  $\Phi \in \text{SO}(3)$ , niin tunnetusti  $\Phi$  on kolmiulotteinen kierto. [6, §3.5] Lisäksi kuvaus  $\Phi$  on osoitettu surjektioksi. Itse asiassa, jokaista maalijoukon  $\Phi(S^3)$  alkiota vastaa kaksi lähtöjoukon alkiota,  $a$  ja  $-a$ , sillä  $\Phi_a(u) = au\bar{a} = -au(\bar{-a}) = \Phi_{-a}(u)$ .

## 4 3-ulotteiset kappaleet ja kvaterniot

Tässä luvussa päästään vihdoin tutkielman päätulokseen, eli millainen yhteys säännöllisillä monitahokkailla on kvaternioihin. Aluksi luvussa 4.1 perehdytään kolmiulotteisiin säännöllisiin monitahokkaisiin sekä niiden symmetriaan. Luvussa 4.2 puolestaan käsitellään, miten binaariset monitahokasryhmät kuvautuvat edellisessä Luvussa 3.3 esitellyllä kuvauksella  $\Phi$ , sekä perehdytään multiplikatiivisen ryhmän  $\mathbb{H}^\times$  aliryhmiin. Luvussa 4.1 on käytetty pääosin lähteitä [7] sekä [12], ja luvussa 4.2 puolestaan lähteitä [1, §8 ja §19], [3, §6] ja [4, §3] sekä [8, §5].

### 4.1 Säännölliset monitahokkaat

Kolmiulotteiset säännölliset monitahokkaat ovat tetraedri, kuutio, oktaedri, dodekaedri ja ikosaedri, jotka ovat tässä järjestyksessä kuvassa 4.1.



Kuva 4.1: Platonin kappaleet.

Nämä monitahokkaat on tunnettu jo noin vuosisadalla 400 eaa, jolloin filosofi Platon käytti niitä kuvaamaan ympäröivää maailmaa. Tetraedri kuvasi tulta, kuutio maata, oktaedri ilmaa ja ikosaedri vettä. Dodekaedri kuvasi puolestaan koko maailmankaikkeutta. Tästä syystä kyseiset kappaleet tunnetaan myös nimellä *Platonin kappaleet*. Nimensä mukaisesti säännölliset

monitahokkaat koostuvat useasta säännöllisestä samanlaisesta monikulmiosta. Tunnetuin näistä on eittämättä kuutio, jonka muotoisia kappaleita tulee arkielämässä vastaan niin pienten lasten leluina kuin esimerkiksi nestesäiliöinä.

Säännöllisillä monitahokkailla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia. Tarkastellaan näiden kappaleiden symmetriaa.

**Määritelmä 4.1.** Suora  $l$  on geometrisen kappaleen  $n$ -kertainen *kiertoakseli*, jos kappaleen symmetria ei muutu kierrettäessä kappaletta  $2\pi/n$  radiaania suoran suhteen.

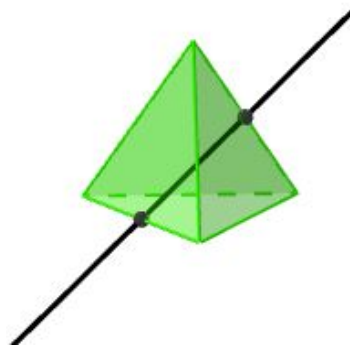
Havaitaan, että  $n$ -kertaisella kiertoakselilla on  $n$  alkioita. Näistä yksi on triviaalisti neutraalialkio, kun kappaletta ei kierretä ollenkaan. Tämän lisäksi kiertoakselilla on  $(n - 1)$  muuta alkioita. Kappale on kiertynyt  $2\pi$  radiaania  $n:n$  kierron jälkeen, mikä vastaa käytännössä samaa, kuin kappaletta ei olisi kierretty ollenkaan.

Tutustutaan seuraavaksi tarkemmin säännöllisten monitahokkaiden kiertoihin. Näitä kiertoja, ja yleisestikin kappaleen symmetriaa, käsitellään siten, että kappale on asetettu kolmiulotteiseen euklidiseen avaruuteen siten, että kappaleen keskipiste on origossa. Aloitetaan yksinkertaisimmasta kappaleesta, eli tetraedristä.

Tetraedri koostuu neljästä tasasivuisesta kolmiosta. Tetraedrilla on kolminkertainen kiertoakseli, joka kulkee tetraedrin kärjen ja kärjen vastakkaisen tahkon keskipisteen kautta (kuva 4.2a). Tällaisella kiertoakselilla on kaksi neutraalialkiota poikkeavaa kiertoa. Koska tetraedrilla on 4 kärkeä, on alkioita yhteensä  $4 \cdot 2 = 8$ .



(a) 3-kertainen kiertoakseli  $r$ .



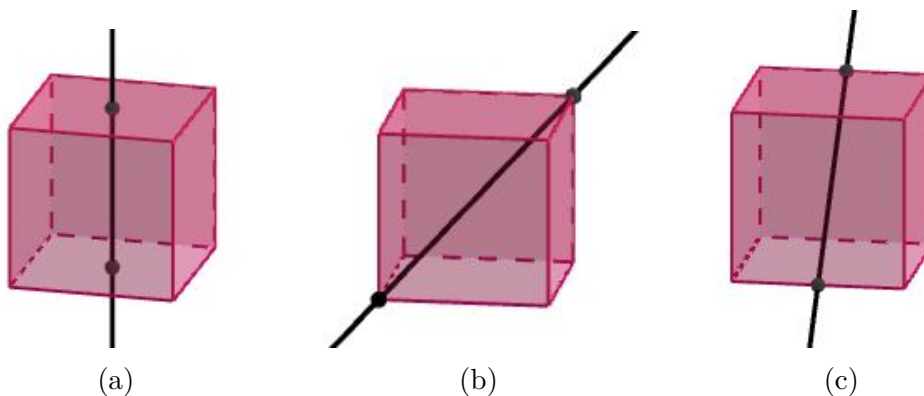
(b) 2-kertainen kiertoakseli  $s$ .

Kuva 4.2: Tetraedrin kiertoakselit.

Lisäksi tetraedilla on kaksinkertainen kiertoakseli, joka kulkee kahden vastakkaisen särmän keskipisteiden kautta (kuva 4.2b). Tällaisella kiertoakselilla on vain yksi neutraalialkiosta poikkeava kierto; tämä vaihtaa kärjet toisikseen särmillä, jonka kautta kiertoakseli kulkee. Vastakkaisia särmäpareja on kolme, joten kiertoalkioitakin on kolme. Kun lasketaan neutraalialkio mukaan, on tetraedriryhmässä yhteensä 12 alkioita.

Seuraavana on vuorossa tuttu monitahokas, kuutio, joka koostuu kuudesta neliöstä. Kuvassa 4.3a näkyy kuution nelinkertainen kiertoakseli, joka kulkee kahden vastakkaisen tahkon keskipisteiden kautta. Tällä kiertoakselilla on kolme neutraalialkiosta poikkeavaa kiertoa. Kuutiossa on vastakkaisia tahkopareja kolme, joten alkioita näiden kiertoakselien suhteen on yhteensä  $3 \cdot 3 = 9$ . Näistä kuuden kertaluku on 4, niitä vastaavat kierrot  $\pi/2$  ja  $3\pi/2$  radiaania. Kolmen kertaluku on kaksi, ja ne ovatkin  $\pi$  radiaanin kierrot akseliensa suhteen.

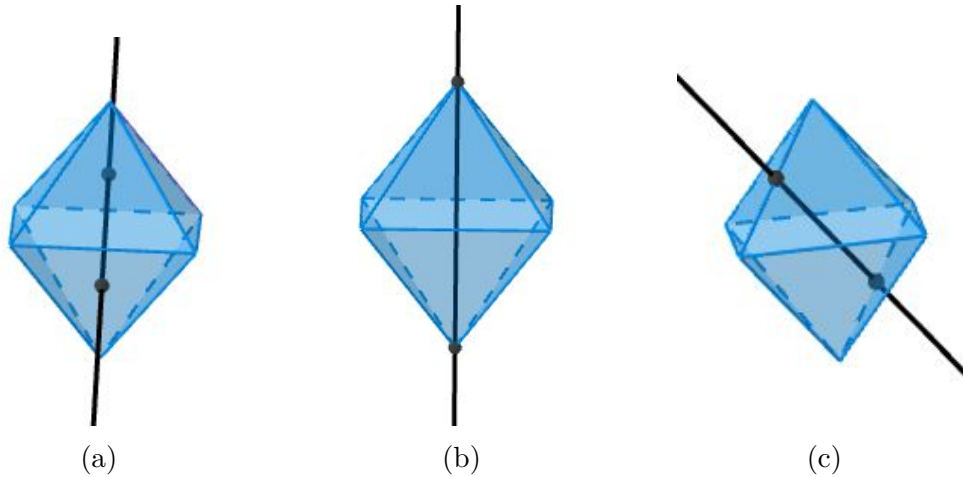
Toinen kuution kiertoakseli on kolminkertainen, ja se kulkee kahden vastakkaisen kärjen kautta (kuva 4.3b). Vastaavia kiertoakseleita kuutiosta löytyy lisäksi kolme, vastakkaisten kärkiparien mukaan. Alkioita näiden akselien suhteen on siis  $4 \cdot 2 = 8$ . Viimeinen kuution kiertoakseleista on kuvassa 4.3c esiintyvä, kahden vastakkaisen särmän keskipisteiden kautta kulkeva kaksinkertainen kiertoakseli. Vastakkaisia särmäpareja on 6, jolloin alkioita on 6. Neutraalialkio mukaan luettuna alkioita on yhteensä 24.



Kuva 4.3: Kuution kiertoakselit.

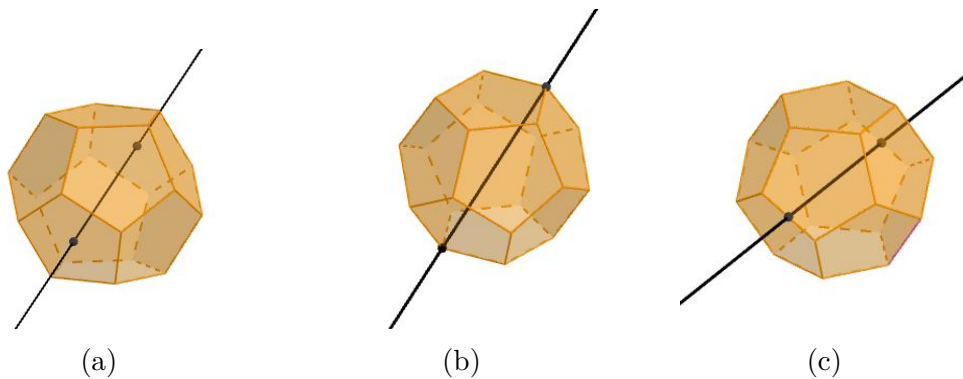
Oktaedri koostuu kahdeksasta tasasivuisesta kolmiosta. Sen eräs kiertoakseli kulkee kahden vastakkaisen tahkon keskipisteiden kautta, kuten kuvassa 4.4a. Tämä kiertoakseli on kolminkertainen, jolloin vastakkaisia tahkopareja ollessa neljä, alkioita on yhteensä 8. Kuvassa 4.4b on oktaedrin nelinkertainen kiertoakseli, joka kulkee vastakkaisten kärkien kautta. Vastaavia kiertoakseleita on lisäksi kaksi muutakin, jolloin alkioita on kaikkiaan 9. Oktaedril-

la on vielä kuusi kaksinkertaista kiertoakselia, jotka kulkevat vastakkaisten särmien keskipisteiden kautta. Lasketaessa neutraalialkio mukaan, saadaan oktaedrin kiertosymmetriaryhmään yhteensä 24 alkioita, kuten kuutiollakin.



Kuva 4.4: Oktaedrin kiertoakselit.

Dodekaedri on monitahokas, joka koostuu kahdestatoista säännöllisestä viisikulmiosta. Dodekaedrin kahden, toistensa suhteen vastakkaisten tahkojen keskipisteiden lävitse kulkee viisinkertainen kiertoakseli, joista eräs kuvassa 4.5a. Koska tahkoja on dodekaedrissa 12, on tällaisia kiertoakseleita yhteensä kuusi. Näillä kiertoakseleilla on neutraalialkiosta poikkeavia alkioita siis yhteensä  $6 \cdot 4 = 24$ .

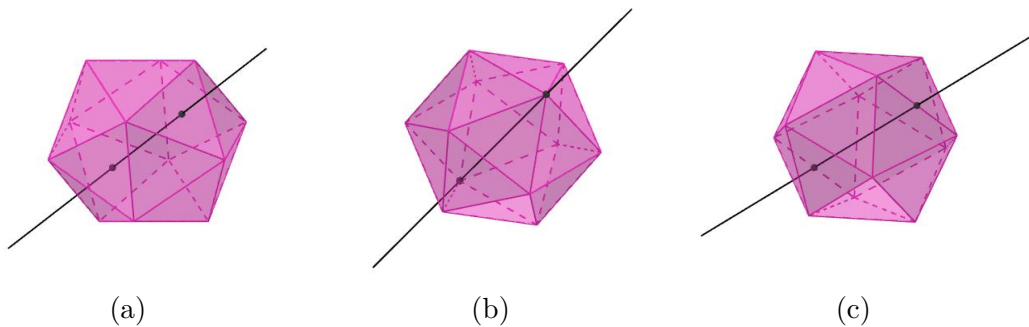


Kuva 4.5: Dodekaedrin kiertoakselit.

Dodekaedrin vastakkaisten kärkien läpi kulkee kolminkertainen kiertoakseli (kuva 4.5b). Vastakkaisia kärkipareja on kymmenen, jolloin alkioita näiden kiertoakseliin suhteen on  $10 \cdot 2 = 20$ . Lisäksi myös dodekaedrilla on

kiertoakseli, joka kulkee vastakkaisten särmien keskipisteiden kautta (kuva 4.5c). Nämä kiertoakselit ovat kaksinkertaisia, ja niitä on yhteensä 15, joten alkioitakin on 15. Neutraalialkio mukaan laskettuna kiertosymmetriaryhmän kertaluku on 60.

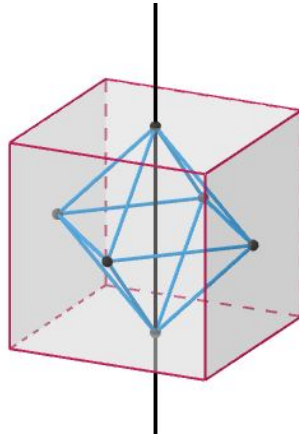
Viimeinen monitahokkaista on ikosaedri, joka koostuu kahdestakymmenestä tasasivuisesta kolmiosta. Vastakkaisten tahkojen keskipisteiden läpi kulkee kolminkertainen kiertoakseli, kuten kuvassa 4.6a. Tahkoja on ikosaedrissa 20, joten kiertoakseleita on kymmenen. Alkioita on yhteensä näiden kiertoakseliin suhteen 20. Ikosaedrin vastakkaisten kärkien kautta kulkee viisinkertainen kiertoakseli, kuten kuvassa 4.6b. Ikosaedrissa on kärkiä 12, joten kärkipareja on kuusi. Tällöin alkioita näiden suhteen on 24. Lopulta myös ikosaedrissa on kahden vastakkaisen särmän keskipisteen kautta kulkeva kaksinkertainen kiertoakseli kuvassa 4.6c, ja koska särmiä ikosaedrissa on 30, on kiertoakseleita yhteensä 15, kuten myös alkioita niiden suhteen. Neutraalialkio mukaanlaskettuna ikosaedrin kiertosymmetriaryhmän kertaluku on 60, kuten dodekaedrin tapauksessa.



Kuva 4.6: Ikosaedrin kiertoakselit.

Tarkastellaan lähemmin sekä pareja kuutio ja oktaedri, että dodekaedri ja ikosaedri. Esimerkiksi kuution ja oktaedrin tapauksessa havaitaan, että molemmilla on täsmälleen yhtä monta kaksin-, kolmin- ja nelinkertaista kiertoakselia. Kun vaihdetaan oktaedrin kulmat kuution tahkoiksi, ja vastaavasti oktaedrin tahkot kuution kulmiksi, voidaankin ajatella, että kuution ja oktaedrin kiertosymmetriaryhmät ovat yksi ja sama *oktaedriryhmä*, jota merkitään  $O$ . Tätä voidaan havainnollistaa kuvalla 4.7, jossa kuution sisään on asetettu oktaedri. Kuvassa on myös oktaedriryhmän eräs nelinkertainen kiertoakseli.

Vastaava havainto pätee dodekaedrille ja ikosaedrille, ja kutsummekin tätä kiertosymmetriaryhmää *ikosaedriryhmäksi*,  $I$ . Vastaavaa ajattelua voidaan myös soveltaa kahdelle tetraedrille, jolloin toisen tetraedrin kulmat vastaavat toisen tahkoja. Tetraedrin kiertosymmetriaryhmää kutsutaan vähemmän

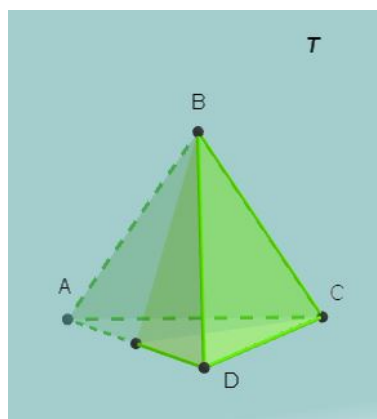


Kuva 4.7: Kuution sisään asetettu oktaedri sekä 4-kertainen kiertoakseli.

yllättäen *tetraedriryhmäksi*  $T$ .

Tässä vaiheessa tutkielmaa on puhuttu pelkästään säännöllisten monita-  
hokkaiden kiertosymmetriasta. Näillä kappaleilla on kuitenkin enemmänkin  
symmetria-alkioita. Tarkastellaan asiaa lyhyesti tetraedrin tapauksessa.

**Esimerkki 4.2.** Tetraedrilla on siis 12 symmetria-alkiota kiertojen suhteen,  
kun neutraalialkio on laskettu mukaan. Tetraedrilla on kuitenkin lisäksi ole-  
massa kuusi peilaustasoa, jotka kaksi kiertoakselia virittävät. Esimerkiksi  
kuvan 4.2 kiertoakselit  $r$  ja  $s$  virittävät kuvan 4.8 tason  $T$ . Peilatussa  $T$ :n  
suhteen tetraedrin kärjet  $B$  ja  $C$  pysyvät paikallaan, mutta kärjet  $A$  ja  $D$   
vaihtavat paikkaa. Yhteensä tällaisia peilaustasoja on 6 jokaisen tetraedrin  
särmän kautta.



Kuva 4.8: Tetraedrin peilaustaso  $T$ .

Lisäksi tetraedrin tapauksessa on olemassa 6 eräänlaista kierron ja pei-

lauksen yhdistettyä kuvausta. Nämä symmetria-alkiot ikään kuin pyöräytävät koko tetraedrin avaruudessa siten, että kaikki kärjet vaihtuvat toisiksi kärjiksi. Näitä alkioita on kuitenkin hyvin hankala havainnollistaa piirtämällä tasoja tai suoria. Sen sijaan nämä yhdisteet on helpoin esittää permutaatioiden avulla. Esimerkiksi eräs symmetria-alkiota vastaava permutaatio on  $(ADCB)$ , mikä siis kuvaa kärjen  $A$  kärjeksi  $D$ ,  $D$ :n kärjeksi  $C$ ,  $C$ :n kärjeksi  $B$  ja  $B$ :n kärjeksi  $A$ . Loput symmetria-alkiot ovat permutaatiot  $(ADBC)$ ,  $(ABCD)$ ,  $(ABDC)$ ,  $(ACBD)$  ja  $(ACDB)$ . (Katso kuva 4.8)

Edellä olevasta esimerkistä havaittiin, että peilaukset mukaan laskettuna tetraedrilla on yhteensä 24 symmetria-alkiota. Alkioita on siis kaksi kertaa niin paljon kuin tetraedriryhmässä. Tämä havainto pätee jokaiselle säännölliselle monitahokkaalle.

*Huomautus 4.3.* Säännöllisten monitahokkaiden kiertosymmetriaryhmät ovat isomorfisia joidenkin algebrasta tuttujen ryhmien kanssa. [7, §4] Ryhmille pätee

$$T \cong A_4, O \cong S_4 \text{ ja } I \cong A_5.$$

## 4.2 Kvaternioiden yhteys säännöllisiin monitahokkaisiin

Tässä aliluvussa perehdytään Hamiltonin kvaternioiden multiplikatiivisen ryhmän  $\mathbb{H}^\times$  aliryhmiin sekä säännöllisten monitahokkaiden kuvautumiseen luvun 3.3 kuvauksilla  $\Phi_a$ , joillain  $a \in S^3$ .

Ryhmäteorian parissa tutkitaan monesti erilaisten ryhmien aliryhmiä ja niiden ominaisuuksia. Seuraava lause antaa tuloksen, minkä mukaan jokaisen äärellisen kunnan aliryhmä on syklinen.

**Lause 4.4.** *Olkoon  $K$  äärellinen kunta ja olkoon  $G$  multiplikatiivisen ryhmän  $K^\times$  aliryhmä. Tällöin  $G$  on syklinen.*

*Todistus.* Katso [5, §9 Proposition 18]. □

Kuten jo aiemmin on mainittu, Hamiltonin kvaterniot muodostavat ensimmäisen löydetyn vinon kunnan. Luonnollista olikin ryhtyä tutkimaan kvaternioiden aliryhmiä. Lauseen 4.4 mukaan äärellisen kunnan tapauksessa tulos on selkeä, mutta vinon kunnan tapauksessa käy niin, että aliryhmiä on enemmän ja niiden löytäminen huomattavasti haasteellisempaa. Hamiltonin kvaternioiden suhteen ongelma ratkesikin kunnolla vasta noin sata vuotta niiden löytymisen jälkeen, vuonna 1940 britti Harold Scott MacDonald Coxeterin toimesta. [8, §6]

Ennen varsinaista päätulosta mainitaan kuitenkin tunnettu tulos koskien erityisen ortogonaaliryhmän  $SO(3)$  aliryhmiä.



**Lause 4.5.** *Euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  erityisen ortogonaaliryhmän  $SO(3)$  äärelliset aliryhmät ovat sykliset ryhmät, diedriryhmät  $D_n$  ja säännöllisten monitahokkaiden kiertosymmetriaryhmät  $T$ ,  $O$  ja  $I$ .*

*Todistus.* Katso [1, §19 Theorem 19.2]. □

Erityisesti ryhmän  $SO(3)$  alkioit ovat kiertoja. Monitahokkaiden tapauksissa kiertoja on tarkasteltu luvussa 4.1.

**Määritelmä 4.6.** Säännöllisten monitahokkaiden sekä diedriryhmien alkukuvia kuvauksilla  $\Phi : S^3 \rightarrow SO(3)$  kutsutaan *binaarisiksi monitahokasryhmiiksi*. Näitä ryhmiä merkitään  $2T$ ,  $2O$ ,  $2I$  ja  $2D_n$ .

*Huomautus 4.7.* Binaaristen ryhmien kertaluvulle pätee  $|2G| = 2|G|$ , missä  $G$  on jokin ryhmistä  $T$ ,  $O$ ,  $I$  tai  $D_n$ .

**Lause 4.8** (Coxeterin lause). *Ryhmällä  $\mathbb{H}^\times$  on seuraavat äärelliset aliryhmät:*

- *äärelliset sykliset ryhmät*
- *binaariset diedriryhmät*
- *binaarinen tetraedriryhmä*
- *binaarinen oktaedriryhmä ja*
- *binaarinen ikosaedriryhmä.*

Lauseen todistamista varten on tutkittava, miten kuvaus  $\Phi$  kuvaa binaariset ryhmät, joten se on tehty tässä tutkielmassa erillisenä osiona seuraavaksi Esimerkissä 4.9. Coxeter on kuvannut artikkelissaan [3] tarkasti, miten hän on päätenyt näihin ryhmiin ja kuinka ne voidaan esittää yksikkökvaternioiden muodostamina ryhminä, johon ei tässä tutkielmassa paneuduta sen syvällisemmin. Käsitellään binaarisia ryhmiä kuitenkin vastaavasti kvaternioiden avulla, kuten Coxeterkin käsitteli. Kaikissa käsiteltävissä tapauksissa ryhmään liittyvä monitahokas asetetaan kolmiulotteiseen avaruuteen  $\text{Im } \mathbb{H}$  sopivasti. Esimerkiksi tetraedri asetetaan siten, että sen kärkien koordinaatit ovat  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 1)$  ja  $(-1, 1, 1)$ .

**Esimerkki 4.9.** (a) Tarkastellaan aluksi, miten kuvaus  $\Phi$  kuvaa binaarisen diedriryhmän  $2D_n$ . Binaarisen diedriryhmän virittävät yksikkökvaterniot  $e^{\frac{\pi i}{n}}$  ja  $\mathbf{j}$ , siis

$$2D_n = \langle e^{\frac{\pi i}{n}}, \mathbf{j} \rangle = \left\langle \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}, \mathbf{j} \right\rangle.$$

Kuvaukselle  $\Phi$  pätee siis  $\Phi_a(u) = au\bar{a}$  kaikilla  $u \in \text{Im } \mathbb{H}$ , kun  $a \in S^3$ . Tutkitaan, kuinka kuvaus  $\Phi_{\mathbf{j}}$  kuvaa peruskvaterniot  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$ . Selvästi  $\bar{\mathbf{j}} = -\mathbf{j}$ . Peruskvaternioiden laskusäännöistä (2.2) saadaan

- $\Phi_{\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = \mathbf{j}\mathbf{i}(-\mathbf{j}) = -\mathbf{k}(-\mathbf{j}) = -\mathbf{i}$ ,
- $\Phi_{\mathbf{j}}(\mathbf{j}) = \mathbf{j}\mathbf{j}(-\mathbf{j}) = -\mathbf{1}(-\mathbf{j}) = \mathbf{j}$  ja
- $\Phi_{\mathbf{j}}(\mathbf{k}) = \mathbf{j}\mathbf{k}(-\mathbf{j}) = -\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{k}$ .

Kuvaus  $\Phi_{\mathbf{j}}$  on siis kierto kolmiulotteisessa vektoriavaruudessa  $j$ -akselin ympäri kulman  $\pi$  verran.

Seuraavaksi tarkastellaan, kuinka kuvaus  $\Phi_{e^{\frac{\pi i}{n}}}$  puolestaan kuvaa peruskvaterniot. Huomaa, että  $e^{\frac{\pi i}{n}} = e^{-\frac{\pi i}{n}}$ .

$$\Phi_{e^{\frac{\pi i}{n}}}(\mathbf{i}) = e^{\frac{\pi i}{n}} \mathbf{i} e^{-\frac{\pi i}{n}} = \mathbf{i} e^{\frac{\pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i}{n}} = \mathbf{i} e^{\frac{\pi i}{n} - \frac{\pi i}{n}} = \mathbf{i}.$$

Kuvaus  $\Phi_{e^{\frac{\pi i}{n}}}$  siis pitää  $i$ -akselin paikallaan. Kuvataan seuraavaksi kvaterniot  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$ . Hyödynnetään edelleen peruskvaternioiden laskusääntöjä (2.2), sekä sinin ja kosinin kaksinkertaisten kulmien kaavoja.

$$\begin{aligned} \Phi_{e^{\frac{\pi i}{n}}}(j) &= \left( \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \right) \mathbf{j} \left( \cos \frac{\pi}{n} - i \sin \frac{\pi}{n} \right) \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{n} \mathbf{j} + \mathbf{i}\mathbf{j}(-\mathbf{i}) \sin^2 \frac{\pi}{n} + \mathbf{i}\mathbf{j} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} - \mathbf{j}\mathbf{i} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{n} \mathbf{j} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \mathbf{k}\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\mathbf{j} \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \\ &= \left( \cos^2 \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) \mathbf{j} + 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \mathbf{k} \\ &= \cos \frac{2\pi}{n} \mathbf{j} + \sin \frac{2\pi}{n} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

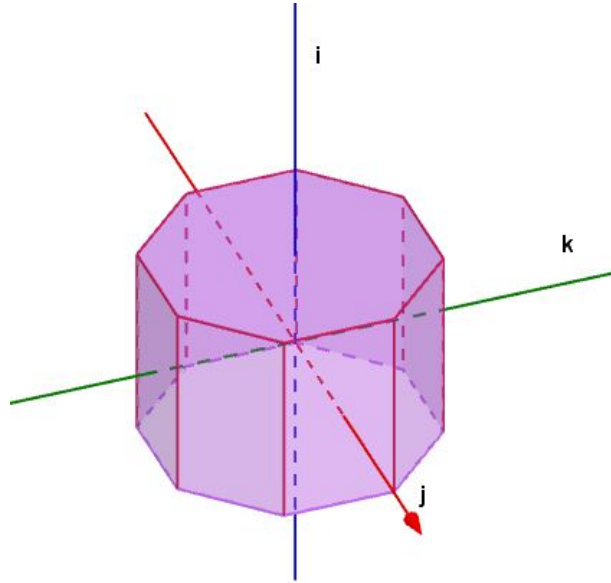
Vastaavalla laskulla

$$\Phi_{e^{\frac{\pi i}{n}}}(\mathbf{k}) = \cos \frac{2\pi}{n} \mathbf{k} - \sin \frac{2\pi}{n} \mathbf{j} = \cos \left( -\frac{2\pi}{n} \right) \mathbf{k} + \sin \left( -\frac{2\pi}{n} \right) \mathbf{j}.$$

Kuvaus  $\Phi_{e^{\frac{\pi i}{n}}}$  on siis kolmiulotteisessa vektoriavaruudessa  $jk$ -tason kierto kulman  $\frac{2\pi}{n}$  verran, joko myötä- tai vastapäivään.

Mutta nyt havaitaan, että kuvaukset  $\Phi_{\mathbf{j}}$  ja  $\Phi_{e^{\frac{\pi i}{n}}}$  ovat itse asiassa säännöllisen  $n$ -kulmion, tai tarkemmin  $n$ -kulmiopohjaisen prisman, symmetriaoperaatioita. Esimerkiksi kuvassa 4.9 on 8-kulmainen prisma, jolle kuvaus  $\Phi_{\mathbf{j}}$  vaihtaa prisman vastakkaisten kärkien paikkaa, kääntäen koko prisman  $j$ -akselin

suhteen  $\pi$  radiaania. Kuvaus  $\Phi_{e^{\frac{\pi i}{n}}}$  on puolestaan  $jk$ -tason kierto kulman  $\frac{\pi}{n}$  verran, jossa prisman kansi ja pohja pysyvät paikallaan. Lisäksi  $\{\pm \mathbf{1}\} \supset 2D_n$ , sillä  $(e^{\frac{\pi i}{n}})^n = -1$  ja  $(e^{\frac{\pi i}{n}})^{2n} = 1$ . Siispä  $\Phi(2D_n) = D_n$ , ja  $|2D_n| = 2|D_n| = 4n$ .



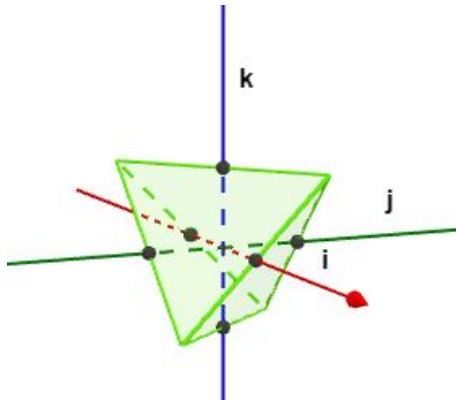
Kuva 4.9: 8-kulmainen prisma.

(b) Tarkastellaan seuraavaksi binaarista tetraedriryhmää  $2T$ , joka voidaan esittää kvaternioiden avulla muodossa

$$2T = \left\{ \pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}, \frac{1}{2}(\pm \mathbf{1} \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}) \right\}.$$

Vastaavaan tapaan kuin binaarisen diedriryhmän kanssa,  $\Phi_{\mathbf{i}}$ ,  $\Phi_{\mathbf{j}}$  ja  $\Phi_{\mathbf{k}}$  ovat kiertoja  $\pi$  radiaania  $i$ -,  $j$ - ja  $k$ -akselien ympäri. Koordinaattiakselit ovat siis tetraedrin kaksinkertaiset kiertoakselit, kuten kuvassa 4.10. Sama pätee myös kvaternioille  $-\mathbf{i}$ ,  $-\mathbf{j}$  ja  $-\mathbf{k}$  johtuen kuvauksen  $\Phi$  ominaisuudesta  $\Phi_a = \Phi_{-a}$ . Lisäksi Lauseen 3.32 todistuksessa osoitettiin, että  $\Phi_{\mathbf{1}}(u) = u = \Phi_{-\mathbf{1}}$  kaikille  $u \in \text{Im } \mathbb{H}$ . Siispä kuvaukset  $\Phi_{\mathbf{1}}$  ja  $\Phi_{-\mathbf{1}}$  pitävät koordinaattiakselit paikallaan.

Käsitellään seuraavaksi kvaterniota  $\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \in 2T$ . Kvaternioiden



Kuva 4.10: Tetraedrin kierto koordinaattiakselien suhteen.

laskusäännöillä (2.2) saadaan

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})^2 &= (\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})(\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\
 &= \mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{1} + \mathbf{k} - \mathbf{j} \\
 &\quad + \mathbf{j} - \mathbf{k} - \mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{k} + \mathbf{j} - \mathbf{i} - \mathbf{1} \\
 &= -2 + 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\
 &= -2(\mathbf{1} - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \\
 &= -2(\overline{\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Jakamalla luvulla 4, saadaan

$$\left( \frac{\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{2} \right)^2 = -\frac{(\overline{\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}})}{2}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{2} \right)^3 &= \left( \frac{\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{2} \right)^2 \cdot \frac{(\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{2} \\
 &= -\frac{(\overline{\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}})}{2} \cdot \frac{(\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{2} \\
 &= \frac{(-\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{2} \cdot \frac{(\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{2} \\
 &= \frac{-4}{4} \quad (\star) \\
 &= -\mathbf{1},
 \end{aligned}$$

missä kohdassa  $(\star)$  on sievennetty tulo kuten kohdassa (4.1). Näin ollen  $(\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}))^3 = -\mathbf{1}$ .

Vastaavasti esimerkiksi kvaterniolle  $-\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}})$  pätee

$$\left(-\frac{\overline{\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}}{2}\right)^3 = \mathbf{1}.$$

Laskemalla saadaan selville, että kaikki kvaterniot  $\frac{1}{2}(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$  ovat kertaluvultaan joko 3 tai 6. Tällöin kuvaus  $\Phi$  näillä kvaternioilla  $\frac{1}{2}(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$  vastaa kolminkertaista kiertoa. Näitä alkioita on yhteensä 16, joten niiden kuvat kuvauksella  $\Phi$  vastaavat tetraedrin kiertoryhmän  $T$  kolminkertaisten kiertoakseleiden alkioita. Siispä edellisten laskujen perusteella  $\Phi(2T) = T$ .

(c) Binaariseen oktaedriryhmään sisältyy ryhmä  $2T$ , jonka lisäksi siihen sisältyy seuraavat 24 yksikkökvaterniota:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{i}), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{j}), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{k}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathbf{j} \pm \mathbf{k}), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathbf{k} \pm \mathbf{i}), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathbf{i} \pm \mathbf{j}) \end{array} \right\}.$$

Näistä ensimmäiset 12 kvaterniota,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{i})$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{j})$  ja  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{k})$ , vastaavat kuvauksella  $\Phi$  nelinkertaisia kiertoja. Esimerkiksi

$$\left(\frac{\mathbf{1} + \mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\mathbf{1} + \mathbf{i} + \mathbf{i} - \mathbf{1}}{2} = \frac{2\mathbf{i}}{2} = \mathbf{i},$$

jolloin

$$\left(\frac{\mathbf{1} + \mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}.$$

Loput 12 kvaterniota vastaavat kaksinkertaisia kiertoja, sillä esimerkiksi

$$\left(\frac{\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\mathbf{j}^2 + \mathbf{jk} + \mathbf{kj} + \mathbf{k}^2}{2} = \frac{-\mathbf{1} + \mathbf{jk} - \mathbf{jk} - \mathbf{1}}{2} = -\mathbf{1}.$$

Siispä  $\Phi(2O) = O$ .

(d) Viimeisenä käsiteltävänä on binaarinen ikosaedriryhmä. Kuten tetraedrin ja oktaedrin tapauksessa, myös ikosaedrilla binaarinen ryhmä kuvautuu kiertojen ryhmäksi  $\Phi(2I) = I$ . Binaariseen tetraedriryhmään kuuluu binaarinen tetraedriryhmä  $2T$ , jonka alkioiden lisäksi siihen sisältyy seuraavat 96 yksikkökvaterniota:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\pm\mathbf{1} \pm \tau^{-1}\mathbf{i} \pm \tau\mathbf{j}), \quad \frac{1}{2}(\pm\mathbf{1} \pm \tau\mathbf{i} \pm \tau^{-1}\mathbf{k}), \quad \frac{1}{2}(\pm\mathbf{1} \pm \tau^{-1}\mathbf{j} \pm \tau\mathbf{k}) \\ \frac{1}{2}(\pm\mathbf{i} \pm \tau\mathbf{j} \pm \tau^{-1}\mathbf{k}), \quad \frac{1}{2}(\pm\tau \pm \mathbf{i} \pm \tau^{-1}\mathbf{j}), \quad \frac{1}{2}(\pm\tau \pm \tau^{-1}\mathbf{i} \pm \mathbf{k}), \\ \frac{1}{2}(\pm\tau \pm \mathbf{j} \pm \tau^{-1}\mathbf{k}), \quad \frac{1}{2}(\pm\tau\mathbf{i} \pm \tau^{-1}\mathbf{j} \pm \mathbf{k}), \quad \frac{1}{2}(\pm\tau^{-1} \pm \tau\mathbf{i} \pm \mathbf{j}), \\ \frac{1}{2}(\pm\tau^{-1} \pm \mathbf{i} \pm \tau\mathbf{k}), \quad \frac{1}{2}(\pm\tau^{-1} \pm \tau\mathbf{j} \pm \mathbf{k}), \quad \frac{1}{2}(\pm\tau^{-1}\mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \tau\mathbf{k}) \end{array} \right\},$$

missä  $\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ . Luku  $\tau$  tunnetaan yleisesti kultaisen leikkauksen suhteena.

Vastaavilla laskuilla kuin tetraedrin ja oktaedrin tapauksessa, näistä kvaternioista saadaan kuvauksella  $\Phi$  viisin-, kolmin- ja kaksinkertaisten kiertoakselien alkioita. Itse laskeminen on kuitenkin tässä tutkielmassa sivuutettu, mutta hieman vastaavan tuloksen voi katsoa esimerkiksi [8, §7 Example 7.6]. Siispä  $\Phi(2I) = I$ .

*Huomautus 4.10.* On tunnettua, että kvaternioryhmä  $Q_8 = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$  on eräs ryhmän  $\mathbb{H}^\times$  aliryhmä. Kuitenkin tarkastelemalla binaarista diedri-ryhmää

$$2D_2 = \langle e^{\frac{\pi \mathbf{i}}{2}}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle$$

havaitaan, että itse asiassa  $2D_2 = Q_8$ . Tällöin  $\Phi(Q_8) = D_2$ , joka on isomorfinen Kleinin neliryhmän  $K_4$  kanssa.

Lopulta, kun kaikki binaariset ryhmät on käsitelty, saadaan viimein todistus Coxeterin lauseelle 4.8.

*Todistus.* Olkoon  $G$  multiplikatiivisen ryhmän  $\mathbb{H}^\times$  äärellinen aliryhmä. Koska  $G$  on äärellinen, jokaiselle  $a \in G$  pätee  $|a| < \infty$ . Tällöin on oltava  $G \subset S^3$ . Jos  $G$  on syklinen, niin tapaus on selvä.

Oletetaan, että  $G$  ei ole syklinen. Tällöin  $|G|$  on parillinen. Jos  $|G|$  olisi pariton, niin  $-1 \notin G$ . Lauseen 3.32 kuvaus  $\Phi$  olisi tällöin injektio, jolloin Lauseen 1.11 kohdan (3) nojalla  $G \cong \Phi(G) \subseteq \text{SO}(3)$ . Erityisesti  $\Phi(G)$  on ryhmän  $\text{SO}(3)$  aliryhmä Lauseen 1.11 kohdan (2) perusteella. Mutta tällöin  $G$  olisi syklinen, sillä ainoat ryhmän  $\text{SO}(3)$  Lauseessa 4.5 esitellyt aliryhmät, joiden kertaluku on pariton, ovat syklisiä.

Ryhmän  $G$  kertaluku on siis parillinen. Tällöin on olemassa  $a \in G$ , jolle  $|a| = 2$ . [5, §1.1 Exercise 31] Lauseen 2.16 perusteella ainoat kvaterniot, joiden neliö on  $\mathbf{1}$ , ovat kvaterniot  $\mathbf{1}$  ja  $-\mathbf{1}$ . Tästä seuraa, että  $\{\pm \mathbf{1}\} \subseteq G$ . Tällöin aliryhmän  $G$  kuvajoukko kuvauksella  $\Phi$  on isomorfinen joko diedri-ryhmän  $D_n$  tai jonkin kiertosymmetriaryhmän  $T, O$  tai  $I$  kanssa, sillä edelleen Lauseen 1.11 (2) nojalla  $\Phi(G)$  on ryhmän  $\text{SO}(3)$  aliryhmä. Ottamalla  $\Phi(G)$ :n alkukuva, nähdään Esimerkistä 4.9, että  $G$  on isomorfinen jonkin ryhmän  $2D_n, 2T, 2O$  tai  $2I$  kanssa.  $\square$

Tämän tuloksen myötä voidaan todeta, että kvaternioilla on monia ominaisuuksia, ja erityisen mielenkiintoisia ne ovat geometrian tutkimuksessa.

Tutkimusta olisi mahdollista jatkaa esimerkiksi tutkimalla, miten Lauseen 3.34 kuvaus  $\Psi$  kuvaa avaruuden  $\mathbb{R}^4$  koordinaattiakseleita, ja siten neliulotteisia säännöllisiä monitahokkaita. Toinen mielenkiintoinen tutkimuskohde olisivat *oktoniot*, jotka ovat kompleksilukujen 8-ulotteinen laajennus. Kun kvaternioiden kanssa jouduttiin tyytymään kertolaskun ei-kommutatiivisuuteen,

niin oktonioiden tapauksessa kertolaskulta puuttuu myös assosiativisuusominaisuus.

## Merkintöjä

<i>Merkintä</i>	<i>Selitys</i>
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Kokonaislukujen joukko $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Rationaalilukujen joukko
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{R}_+$	Positiivisten reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko
$ G $	Ryhmän $G$ kertaluku



## Viitteet

- [1] M. A. ARMSTRONG *Groups and symmetry*. Undergraduate Text in Mathematics Springer-Verlag, New York, 1988
- [2] M. R. BRIDSON ja A. HAEFLINGER *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer-Verlag, New York
- [3] H. S. M. COXETER: The binary polyhedral groups, and other generalizations of the quaternion group. *Duke Math. J.*, 7:367–379, 1940.
- [4] JOHN H. CONWAY ja DEREK A. SMITH: *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*. A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2003.
- [5] DAVID S. DUMMIT ja RICHARD M. FOOTE: *Abstract algebra*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, third edition, 2004.
- [6] H.-D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH, M. KOECHER, K. MAINZER, J. NEUKIRCH, A. PRESTEL ja R. REMMERT: *Numbers*, volume 123 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1991. With an introduction by K. Lamotke, Translated from the second 1988 German edition by H. L. S. Orde, Translation edited and with a preface by J. H. Ewing, Readings in Mathematics.
- [7] FREDERICK M. GOODMAN: *Algebra: Abstract and concrete*. SemiSimple Press, Iowa city <http://homepage.divms.uiowa.edu/~goodman/algebrabook.dir/book.2.6.pdf>
- [8] T. Y. LAM: Hamilton’s quaternions. In *Handbook of algebra, Vol. 3*, volume 3 of *Handb. Algebr.*, pages 429–454. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2003.
- [9] N. MUKUNDA: *Sir William Rowan Hamilton*. Resonance 21 (2016), no. 6, 493-510.
- [10] M. SAARIMÄKI: Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa. Luentomoniste 65, Jyväskylän yliopisto, 2012
- [11] MacTutor History of Mathematics Archive. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton/>
- [12] MacTutor History of Mathematics Archive. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Plato/>