JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu-tutkielma

Perronin ja Frobeniuksen lause

Tuukka Huupponen

10. toukokuuta 2023

Tekijä
Tuukka Huupponen

Otsikko
Perronin ja Frobeniuksen lause (engl. Perron-Frobenius theorem)

Tutkinto-ohjelma
Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä	**Sivumäärä**
10. toukokuuta 2023	39

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa perehdytään matriisiteoriaan. Tarkastelu keskittyy neliömatriiseihin, niiden ominaisarvoihin ja niitä vastaaviin ominaisvektoreihin. Tarkastelu rajataan kahteen osaan, joista toiseen esitetään käytännönsovellus, jossa tarkastellaan Googlen hakukoneen toiminnan matemaattista taustaa.

Vaadittavien lineaarialgebran esitietojen jälkeen tarkastellaan positiivisia neliömatriiseja. Ensin esitellään aputuloksia liittyen positiivisiin matriiseihin, sekä niiden itseisarvoltaan suurimpaan ominaisarvoon eli spektraalisäteeseen ja tätä ominaisarvoa vastaavaan ominaisvektoriin. Näiden aputulosten tarkastelun jälkeen esitellään Perronin lause ja sille esitetään todistus. Perronin lause toteaa, että positiivisella neliömatriisilla on itseisarvoltaan suurin ominaisarvo, joka on aidosti suurempi kuin mikään muu matriisin ominaisarvojen itseisarvoista. Lisäksi lause toteaa, että tämän itseisarvoltaan suurimman ominaisarvon algebrallinen kertaluku on 1 ja sitä vastaava ominaisvektori on positiivinen.

Perronin lauseen todistuksen jälkeen perehdytään verkkoteoriaan, jonka avulla havainnollistetaan graafisesti tutkielman sovellusta. Verkkoteoriaan liittyvien määritelmien ja tulosten esittämisen jälkeen tarkastellaan differenssiyhtälöitä. Differenssiyhtälöissä ajan hetki t liitetään ajanhetkeen $t+1$ lineaarisesti siten, että $Av_t = v_{t+1}$, missä neliömatriisia A kutsutaan siirtymämatriisiksi.

Differenssiyhtälöissä keskitytään Markovin ketjuihin, jotka ovat todennäköisyyksiä kuvaavia differenssiyhtälöitä. Tällaisten differenssiyhtälöiden siirtymämatriisit ovat stokastisia matriiseja, jotka ovat ei-negatiivisia matriiseja ja niiden jokainen sarake summautuu luvuksi yksi. Stokastisten matriisien lisäksi Markovin ketjuissa esiintyvät vektorit v_i ovat todennäköisyysvektoreita eli ei-negatiivisia vektoreita, joiden alkiot summautuvat luvuksi yksi.

Markovin ketjujen teoria toimii teoriapohjana Googlen Pagerank-algoritmille, jossa sovelletaan Perronin lausetta. Määritellään Google-matriisi, joka on positiivinen stokastinen matriisi. Perronin lause takaa, että tämän matriisin spektraalisäde on luku 1 ja sen virittää positiivinen ominaisvektori, jota kutsutaan tasapainotilavektoriksi. Pagerank-algoritmissa tarkastellaan Markovin ketjua, jonka määrää Google-matriisi G ja tasapainotilavektori w. Tällöin Markovin ketjun $Gv_t = v_{t+1}$ avulla saadaan internetin nettisivujen tärkeysjärjestys eli järjestys, jossa hakutulokset tulevat näkyviin hakukoneessa. Tämän tärkeysjärjestyksen kertoo Markovin ketjun vektori v_{t+1}.

Tutkielman lopuksi tarkastellaan Perronin lauseen yleistystä eli Perronin ja Frobeniuksen lausetta. Tämä lause antaa vastaavat tulokset kuin Perronin lause, koskien ei-negatiivisia redusoitumattomia matriiseja.

Tarkoituksena on esitellä Perronin ja Frobeniuksen lauseen yleinen versio. Tämän jälkeen esitellään ja todistetaan kyseisen lauseen erikoistapaus, jossa tarkastellaan ei-negatiivisia redusoitumattomia neliömatriiseja, joiden jokin positiivinen kokonaislukupotenssi on positiivinen neliömatriisi. Tämä erikoistapaus toteaa vastaavat tulokset, kuin yleinen Perronin ja Frobeniuksen lause.

Sisällys

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehtyä matriisiteoriaan ja tarkastella positiivisia ja ei-negatiivisia neliömatriiseja. Tullaankin havaitsemaan, että kyseisten matriisien ominaisarvoilla ja niitä vastaavilla ominaisvektoreilla on erityisiä ominaisuuksia. Nämä erityiset ominaisuudet toimivat matemaattisena teoriapohjana esimerkiksi Googlen hakukoneen toiminnassa.

Ensimmäisessä luvussa tarkastellaan tutkielman kannalta oleellisia lineaarialgebran peruskäsitteitä ja tuloksia. Luvussa 1.1 keskitytään neliömatriisien ominaisarvoihin ja niitä vastaaviin ominaisvektoreihin. Luvussa annetaan seuraava tärkeä määritelmä:

Määritelmä 1.2. *Neliömatriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ spektraalisäde on*

$$\lambda_{\mathrm{P}} := \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|\} \in \mathbb{C}.$$

Tutkielmassa keskitytään erityisesti tarkastelemaan neliömatriisin spektraalisädettä ja sitä vastaavaa ominaisvektoria. Luvun 1.1 tiedot voit löytää lähteistä [3],[5] ja [6].

Luvussa 1.2 tarkastellaan positiivisia ja ei-negatiivisia neliömatriiseja. Positiivinen neliömatriisi on matriisi, jonka jokainen alkio on positiivinen reaaliluku. Vastaavasti ei-negatiivinen neliömatriisi on matriisi, jonka jokainen alkio on ei-negatiivinen reaaliluku. Näiden neliömatriisien määritelmien jälkeen todistetaan kaksi aputulosta liittyen positiivisen neliömatriisin ja vektorin tuloon liittyen. Kyseinen luku perustuu lähteeseen [1].

Tämän jälkeen luvussa 1.3 tarkastellaan vektorinormeja ja matriisinormeja. Tutkielman kannalta oleellisia määritelmiä ovat vektoreiden ja matriisien 1-normien määritelmät, jotka esitellään luvussa. Lisäksi esitellään Gelfandin kaava, jonka avulla neliömatriisin spektraalisäde liitetään sitä vastaavan neliömatriisin 1-normiin. Normien tarkastelussa on käytetty lähdettä [3, § 5].

Luvussa 2 keskitytään positiivisiin neliömatriiseihin ja niiden spektraalisäteisiin. Luvussa esitellään ensin näihin käsitteisiin liittyviä tuloksia, joiden avulla luvun lopuksi todistetaan Perronin lause eli tutkielman päätulos. Perronin lause muotoillaan seuraavasti:

Lause 2.6. *Olkoon $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ positiivinen neliömatriisi. Tällöin matriisilla A on positiivinen ominaisarvo λ_{P}, jolle pätee*

(1) $\lambda_{\mathrm{P}} > \lambda$ kaikilla matriisin A ominaisarvoilla $\lambda_{\mathrm{P}} \neq \lambda$.

(2) Ominaisarvon λ_{P} algebrallinen kertaluku on 1 ja sitä vastaava ominaisvektori on positiivinen.

Tästä tuloksesta saadaan erityisesti, että ominaisarvoa λ_{P} vastaava ominaisavaruus on 1-ulotteinen, jonka virittää positiivinen ominaisvektori. Luvun 3 tulokset nojaavat tähän lauseeseen. Luku 2 perustuu lähteeseen [1].

Luvussa 3.1 perehdytään verkkoteoriaan, joka toimii Perronin lauseen sovelluksen graafisen havainnollistuksen työvälineenä. Käsitellään suunnattuja verkkoja ja annetaan määritelmä suunnatun verkon naapurimatriisille, joka liittää verkkoteorian matriisiteoriaan. Verkkoteoriaan liittyvät määritelmät ja tulokset löydät lähteestä [2].

Tämän jälkeen luvussa 3.2 perehdytään differenssiyhtälöihin ja stokastisiin matriiseihin. Differenssiyhtälöissä ajanhetki t liitetään ajanhetkeen $t+1$ lineaarisesti siten, että $Av_t = v_{t+1}$. Tässä neliömatriisia A kutsutaan siirtymämatriisiksi. Differenssiyhtälön määritelmästä tehdään havainto

$$v_t = Av_{t-1} = A^2 v_{t-2} = \cdots = A^t v_0.$$

Tällöin siis differenssiyhtälön tila ajanhetkellä t voidaan määrittää siirtymämatriisin A potenssin A^t ja alkutilavektorin v_0 avulla.

Keskitytään tarkastelemaan differenssiyhtälöitä, joiden muuttujat tulkitaan todennäköisyyksiksi eli Markovin ketjuja. Matriiseja joiden alkiot kuvaavat todennäköisyyksiä kutsutaan stokastisiksi matriiseiksi ja ne ovat Markovin ketjujen siirtymämatriiseja. Stokastiset matriisit yhdessä todennäköisyysvektoreiden kanssa määräävät Markovin ketjut.

Luvussa tullaan osoittamaan, että stokastisella matriisilla on ominaisarvo $\lambda = 1$, joka on stokastisen matriisin spektraalisäde. Perronin lause takaa, että ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori eli tasapainotilavektori on positiivinen ja se virittää 1-ulotteisen ominaisavaruuden. Luvun lopuksi todistetaan seuraava tärkeä tulos:

Lause 3.24. *Olkoon $P \in \mathbb{R}_{n\times n}$ positiivinen siirtymämatriisi ja $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$ todennäköisyysvektori. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} P^n \boldsymbol{\pi} = \alpha,$$

missä α on tasapainotilavektori.

Tämä tulos vastaavasti tarkoittaa sitä, että Markovin ketjun siirtymämatriisia kerrottaessa oikealta todennäköisyysvektorilla, on tulon suppeneminen riippumaton alkutilavektorin valinnasta.

Differenssiyhtälöihin ja stokastisiin matriiseihin perehtymisen jälkeen luvussa 3.3 tarkastellaan tutkielman sovellusta eli Googlen Pagerank-algoritmia, joka hyödyntää Luvun 3.2 tuloksia eli Markovin ketjujen teoriaa.

Pagerank-algoritmissa siirtymämatriisin avulla määritellään Google-matriisi, jonka tasapainotilavektorin alkiot kertovat jokaisen nettisivun tärkeyden. Tällöin siis suurimman tärkeyden omaava nettisivu on hakutuloksien ensimmäisenä oleva nettisivu. Luvussa 3 pääasiallisena lähteenä on käytetty teosta [6] ja Markovin ketjuihin liittyvästä teoriasta voit lukea lähteestä [4].

Luvussa 4 tarkastellaan Perronin lauseen yleistystä ei-negatiivisille redusoitumattomille neliömatriiseille. Tätä yleistystä kutsutaan Perronin ja Frobeniuksen lauseeksi (Lause 4.4). Kyseinen yleistys antaa samat tulokset, kuin Perronin lause, mutta ei-negatiivisille redusoitumattomille neliömatriiseille. Luvun 4 lopuksi tarkastellaan Perronin ja Frobeniuksen lauseen erikoistapausta, joka muotoillaan seuraavasti:

Lause 4.5. *Olkoon A ei-negatiivinen neliömatriisi siten, että jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee $A^n > 0$. Tällöin $\lambda_{\mathrm{P}} := \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_m|\}$ on matriisin A yksinkertainen ominaisarvo, jota vastaava ominaisvektori on positiivinen. Lisäksi pätee $\lambda_{\mathrm{P}} > |\lambda_i|$, kaikilla $\lambda_i \neq \lambda_{\mathrm{P}}$.*

Lause 4.5 yleistää Luvussa 3.2 saatavat tulokset pätemään säännöllisille stokastisille matriiseille eli stokastisille matriiseille, joiden jokin positiivinen kokonaislukupotenssi on positiivinen neliömatriisi. Luvun 4 lähteinä on käytetty lähteitä [3] ja [1].

1 Esitietoja lineaarialgebrasta

Tässä luvussa käydään läpi hyödyllisiä tuloksia tutkielman kannalta. Aihepiiri käsittelee matriisiteoriaa ja ensimmäisenä käsitelläänkin neliömatriisin ominaisarvoja ja niitä vastaavia ominaisvektoreita. Tämän jälkeen tarkastellaan positiivisia ja ei-negatiivisia vektoreita sekä matriiseja. Luvun lopuksi käsitellään vektorinormeja ja matriisinormeja.

Osa tutkielman tuloksista pätee sekä reaalisissa että kompleksisissa vektoriavaruuksissa. Käytetään merkintää $\mathbb{K}$ tarkoittamaan kuntaa $\mathbb{R}$ tai kuntaa $\mathbb{C}$. Oletetaan tunnetuksi vektoreiden, matriisien ja kompleksilukujen peruslaskusäännöt. Näihin liittyvään teoriaan voi tutustua lisää esimerkiksi lähteissä [3], [5] ja [6].

1.1 Ominaisarvoista ja ominaisvektoreista

Määritelmä 1.1. Olkoon $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ neliömatriisi. Jos on olemassa vektori $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{\overline{0}\}$ ja luku $\lambda \in \mathbb{K}$ siten, että

$$Ax = \lambda x,$$

niin lukua λ sanotaan matriisin A *ominaisarvoksi* ja vektoria x sitä vastaavaksi *ominaisvektoriksi.*

Määritelmä 1.2. Neliömatriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ *spektraalisäde* on

$$\lambda_{\mathrm{P}} := \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|\} \in \mathbb{C}.$$

Spektraalisäde määrää siis pienimmän mahdollisen origo-keskisen kiekon säteen siten, että kyseinen kiekko sisältää matriisin A kaikki ominaisarvot. Tutkielmassa käytetään merkintää λ_{P} neliömatriisin spektraalisäteelle, kun on selvää, minkä matriisin spektraalisäteestä puhutaan. Tarvittaessa tarkennetaan merkinnällä $\lambda_{\mathrm{P}}(C)$ tarkoittamaan tietyn neliömatriisin C spektraalisädettä.

Lause 1.3. *Olkoon $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ neliömatriisi. Tällöin luku $\lambda \in \mathbb{K}$ on matriisin A ominaisarvo jos ja vain jos*

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Todistus. Katso [6, § 5.2, s. 253]. □

Determinantti $\det(\lambda I - A)$ on n-asteinen polynomi. Tätä polynomia kutsutaan matriisin A *karakteristiseksi polynomiksi* ja sen juuret ovat neliömatriisin A ominaisarvot.

Huomautus 1.4. Merkinnällä I_n tarkoitetaan *identtistä matriisia* eli matriisia, jonka diagonaalialkiot ovat ykkösiä ja kaikki muut alkiot ovat nollia. Kun on selvää, mikä on vektoriavaruuden ulottuvuus, merkitään I. Matriisi I on siis muotoa

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 1.5. Määritetään matriisin $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot.

Matriisin A karakteristinen polynomi on muotoa

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 0.2 & -0.3 & -0.4 & -0.1 \\ -0.2 & \lambda - 0.3 & -0.2 & -0.2 \\ -0.3 & -0.1 & \lambda - 0.1 & -0.5 \\ -0.3 & -0.3 & -0.3 & \lambda - 0.2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^4 - 0.8\lambda^3 - 0.21\lambda^2 + 0.008\lambda + 0.002. \end{aligned}$$

Matriisin A ominaisarvot ovat siis yhtälön

$$\lambda^4 - 0.8\lambda^3 - 0.21\lambda^2 + 0.008\lambda + 0.002 = 0$$

ratkaisut. Nyt matriisin A ominaisarvoiksi saadaan

$$\det(\lambda I - A) = 0 \iff \lambda = 1, \lambda = -\frac{1}{5}, \lambda = -\frac{1}{10} \text{ tai } \lambda = \frac{1}{10}.$$

Lause 1.6. *Olkoot $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ jokin sen ominaisarvo. Tällöin λ^k on matriisin A^k ominaisarvo.*

Todistus. Osoitetaan väite todeksi induktion avulla. Nyt neliömatriisilla A on ominaisarvo λ ja sitä vastaava ominaisvektori v eli $Av = \lambda v$. Oletetaan, että väite pätee, kun $k = s$.

1° : Kun $k = 1$, niin selvästi nähdään, että väite pätee.

2° : Oletetaan nyt, että väite pätee, kun $k = s$. Tällöin saadaan

$$A^{s+1}v = AA^s v = A\lambda^s v = \lambda^s Av = \lambda^s \lambda v = \lambda^{s+1} v.$$

Väite pätee siis kaikilla s. □

Reaalisten neliömatriisien ominaisarvot eivät välttämättä aina ole reaalisia, vaan ne voivat myös olla kompleksisia. Kiertomatriisit ovat hyvin yleinen esimerkki reaalisista neliömatriiseista, joilla on kompleksisia ominaisarvoja.

Esimerkki 1.7. Tarkastellaan kiertomatriisia A, joka kiertää kulman $\frac{\pi}{2}$ verran vastapäivään. Kyseinen matriisi on muotoa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan seuraavaksi kyseisen matriisin ominaisarvot etsimällä matriisin karakteristinen polynomi.

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Voidaan huomata, että kyseisellä polynomilla ei ole reaalisia nollakohtia, mutta kompleksisia löydetään. Nyt

$$\det(\lambda I - A) = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i.$$

Tällöin siis matriisin A ominaisarvot ovat i ja $-i$.

Huomautus 1.8. Neliömatriisin karakteristinen polynomi voidaan kirjoittaa auki seuraavanlaisessa muodossa:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Karakteristinen polynomi on siis astetta $n \geq 1$ oleva polynomi, jonka nollakohdat ovat kyseisen matriisin ominaisarvot. Algebran peruslauseen mukaan jokainen polynomi voidaan hajottaa ensimmäisen asteen tekijöihin.

Lause 1.9 (Algebran peruslause)**.** *Olkoon*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

astetta $n \geq 1$ oleva polynomi. Tällä polynomilla on täsmälleen n juurta, moninkertaiset juuret huomioiden. Tällöin polynomi voidaan kirjoittaa ensimmäisen asteen tekijöiden tulona seuraavasti:

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n),$$

missä $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{K}$ ovat polynomin juuret.

Todistus. Katso [7, Thm. V.3.8 ja Thm. V.3.9]. □

Seuraus 1.10 (Algebran peruslause). *Neliömatriisin $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ karakteristinen polynomi kirjoitettuna ensimmäisen asteen tekijöiden tulona on*

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

missä λ_i kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$ ovat matriisin A ominaisarvot.

Todistus. Katso [6, Appendix A, s. 411]. □

Esimerkki 1.11. Esimerkin 1.5 matriisille A löydettiin neljä ominaisarvoa

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{5}, \lambda_3 = -\frac{1}{10} \text{ ja } \lambda_4 = \frac{1}{10}.$$

Tällöin karakteristinen polynomi voidaan Seurauksen 1.10 nojalla kirjoittaa muodossa

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4).$$

Tällöin siis saadaan

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \lambda^4 - 0.8\lambda^3 - 0.21\lambda^2 + 0.008\lambda + 0.002 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{5})(\lambda + \frac{1}{10})(\lambda - \frac{1}{10}).\end{aligned}$$

Tiedetään, että neliömatriisin A ja sen transpoosin A^T determinantit ovat yhtä suuret [3]. Tästä seuraakin, että neliömatriisilla ja sen transpoosilla on sama karakteristinen polynomi ja täten samat ominaisarvot.

Lemma 1.12. *Neliömatriisilla $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ ja sen transpoosilla A^T on samat ominaisarvot $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{K}$.*

Todistus. Tiedetään, että identtinen matriisi on symmetrinen eli identtisen matriisin I transpoosille pätee $\mathrm{I} = \mathrm{I}^T$. Tällöin pätee $(\lambda\mathrm{I} - A)^T = (\lambda\mathrm{I} - A^T)$. Lisäksi neliömatriisille pätee $\det A = \det A^T$, jolloin saadaan

$$\det(\lambda\mathrm{I} - A) = \det((\lambda\mathrm{I} - A)^T) = \det(\lambda\mathrm{I} - A^T).$$

Matriisien A ja A^T karakteristiset polynomit ovat siis samat, jolloin matriiseilla on samat ominaisarvot $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. □

Neliömatriisin ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit virittävät aliavaruuden, jota kutsutaan ominaisarvoa vastaavaksi ominaisavaruudeksi.

Määritelmä 1.13. Olkoon $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ neliömatriisi ja $\lambda \in \mathbb{K}$ jokin sen ominaisarvoista. Tällöin ominaisarvoa λ vastaava *ominaisavaruus* on

$$E(\lambda) = E_A(\lambda) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = \lambda x\}.$$

Edellä oleva määritelmä yhdistää neliömatriisin ominaisarvot niitä vastaaviin ominaisavaruuksiin. Ominaisarvoa vastaavan ominaisavaruuden dimensio vastaavasti saadaan ominaisarvon kertaluvusta.

Määritelmä 1.14. Olkoon $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ neliömatriisi ja $\lambda \in \mathbb{K}$ sen ominaisarvo. Tällöin ominaisarvon λ

(1) *geometrinen kertaluku* $\mathrm{geom}(\lambda)$ on ominaisarvoa vastaavan ominaisavaruuden dimensio. Eli $\mathrm{geom}(\lambda) = \dim E(\lambda)$.

(2) *algebrallinen kertaluku* $\mathrm{alg}(\lambda)$ on ominaisarvon λ kertaluku karakteristisen polynomin $\det(\lambda I - A) = 0$ juurena.

Huomautus 1.15. Ominaisarvoa λ_i kutsutaan *yksinkertaiseksi*, jos sille pätee $\mathrm{alg}(\lambda_i) = 1$.

Geometrisen kertaluvun selvittämiseen voidaan käyttää apuna algebrallista kertalukua. Seuraavan tuloksen avulla voidaan arvioida geometrisen kertaluvun suuruutta. Kun tarkoituksena on osoittaa, että ominaisavaruuden dimensio on 1, niin voi olla helpompi osoittaa, että kyseisen ominaisarvon algebrallinen kertaluku on 1, jolloin tuloksesta seuraa suoraan geometrisen kertaluvun suuruus.

Lause 1.16. *Matriisin $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ jokaiselle ominaisarvolle λ_i pätee*

$$1 \leq \mathrm{geom}(\lambda_i) \leq \mathrm{alg}(\lambda_i).$$

Todistus. Katso [3, Thm. 1.4.10]. □

Huomautus 1.17. Jokaisella neliömatriisilla $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on algebrallinen kertaluku huomioiden n kappaletta kompleksisia ominaisarvoja.[6, § 5.5.1]

Palautetaan vielä tämän luvun loppuun lukijoille mieleen muutama hyödyllinen määritelmä matriiseille. Matriisien similaarius on usein varsin toimiva työkalu, varsinkin kun tarkastellaan matriisien ominaisarvoja. Similaariuden avulla voidaan määrittää halutulle neliömatriisille diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat alkuperäisen matriisin ominaisarvot.

Määritelmä 1.18. Neliömatriisit A ja B ovat *similaareja*, jos on olemassa kääntyvä neliömatriisi P siten, että $B = P^{-1}AP$.

Lause 1.19. *Similaareilla matriiseilla on sama karakteristinen polynomi ja samat ominaisarvot.*

Todistus. Katso [6, § 5.3.3, s. 274]. □

Määritelmä 1.20. Neliömatriisi A on *diagonalisoituva, jos se on similaari jonkin diagonaalimatriisin kanssa.*

1.2 Positiiviset vektorit ja matriisit

Tutkielman aihepiirissä rajoitutaan tarkastelemaan positiivisia ja ei-negatiivisia neliömatriiseja ja vektoreita. Määritellään seuraavaksi nämä käsitteet ja esitellään niiden merkinnät. Tämän jälkeen käydään läpi hyödyllisiä tuloksia kyseisiin matriiseihin ja vektoreihin liittyen.

Määritelmä 1.21. Vektori $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on

(1) *ei-negatiivinen*, kun $x_i \geq 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin merkitään $x \geq 0$.

(2) *positiivinen*, kun $x_i > 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin merkitään $x > 0$.

Määritelmä 1.22. Olkoon $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ neliömatriisi. Matriisi A on

(1) *ei-negatiivinen*, jos sen jokaiselle alkiolle pätee $a_{ij} \geq 0$. Tällöin merkitään $A \geq 0$.

(2) *positiivinen*, jos sen jokaiselle alkiolle pätee $a_{ij} > 0$. Tällöin merkitään $A > 0$.

Huomautus 1.23. Jos vektoreiden $\psi, \psi' \in \mathbb{R}^n$ erotus $\psi - \psi'$ on ei-negatiivinen vektori, niin merkitään $\psi \geq \psi'$.

Tarkastellaan seuraavaksi positiivisen neliömatriisin ja vektorin tuloa. Todistetaan tähän liittyen kaksi aputulosta.

Lemma 1.24. *Olkoot $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ positiivinen neliömatriisi ja vektori $\psi \in \mathbb{C}^n$. Tällöin $A\,|\psi| \geq |A\psi|$.*

Todistus. Kolmioepäyhtälöstä saadaan jokaiselle $1 \leq k \leq n$, että

$$|A\psi|_k = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\psi_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}\psi_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\,|\psi_j| = (|A|\,|\psi|)_k.$$

Matriisin A positiivisuudesta seuraa, että $|A| = A$, jolloin yllä oleva epäyhtälö saadaan muotoon

$$|A\psi|_k \leq (|A|\,|\psi|)_k = (A\,|\psi|)_k.$$

Epäyhtälö pätee kaikilla $1 \leq k \leq n$, jolloin saadaan $|A\psi| \leq A\,|\psi|$. □

Lemma 1.25. *Olkoot matriisi $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ positiivinen ja vektori $\psi \neq \overline{0}$ ei-negatiivinen. Tällöin $A\psi > 0$. Lisäksi, jos $\psi \geq \psi'$ ja $\psi \neq \psi'$, niin $A\psi > A\psi'$.*

Todistus. Jos vektori ψ on ei-negatiivinen ja $\psi \neq \overline{0}$, niin sen jonkin komponentin täytyy olla positiivinen. Olkoon tämä positiivinen komponentti ψ_j. Tällöin

$$(A\psi)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\psi_j \geq A_{ij}\psi_j > 0,$$

kaikille $1 \leq i \leq n$, koska matriisi A on positiivinen eli $a_{il} > 0$ kaikille $1 \leq i, l \leq n$ ja valittu vektorin ψ komponentti ψ_j on myös positiivinen.

Jos $\psi \geq \psi'$ ja $\psi \neq \psi'$, niin $\psi - \psi'$ on ei-negatiivinen ja nollasta poikkeava. Nyt alkuosan nojalla $A\psi > 0$, josta saadaan $A(\psi - \psi') > 0$ eli $A\psi > A\psi'$. $\square$

1.3 Normeista

Tarkastellaan tässä luvussa hieman teoriaa liittyen vektorinormeihin ja matriisinormeihin. Määritellään ensimmäiseksi ehdot, jotka funktion täytyy täyttää, jotta se määrittelee vektorinormin.

Määritelmä 1.26. Funktio $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ määrittelee *vektorinormin*, jos kaikille $x, y \in \mathbb{K}^n$ ja kaikille $c \in \mathbb{K}$ pätee

(1) $\|x\| \geq 0$ (Ei-negatiivisuus)

(2) $\|x\| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$ (Positiivisuus)

(3) $\|cx\| = |c| \, \|x\|$ (Homogeenisuus)

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Kolmioepäyhtälö)

Määritelmä 1.27. Vektorin $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ 1-normi on sen komponenttien itseisarvojen summa eli

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Jotta funktio voi määritellä matriisinormin, täytyy sen täyttää tietyt ehdot, kuten vektorinorminkin. Matriisinormin määrittelevän funktion ehdot ovat hyvin pitkälti samat, kuin vektorinormin tapauksessa. Määritellään seuraavaksi ehdot, joiden täytyy täyttyä, jotta funktio määrittelee matriisinormin.

Määritelmä 1.28. Funktio $\|\cdot\| : \mathbb{K}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ määrittelee *matriisinormin*, jos kaikille neliömatriiseille $A, B \in \mathbb{K}_{n\times n}$ pätee seuraavat viisi ominaisuutta

(1) $\|A\| \geq 0$ (Ei-negatiivisuus)

(2) $\|A\| = 0$ jos ja vain jos $A = 0$ (Positiivisuus)

(3) $\|cA\| = |c| \, \|A\|$ kaikille $c \in \mathbb{C}$ (Homogeenisuus)

(4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Kolmioepäyhtälö)

(5) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (Submultiplikatiivisuus)

Voidaankin havaita, että vektorinormin ja matriisinormin neljä ensimmäistä ehtoa ovat samat. Kuitenkin, jotta funktio voi määritellä matriisinormin, täytyy sen täyttää yksi ehto lisää eli ehto (5).

Jokaista vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ normia $\|\cdot\|$ vastaa matriisinormi $|||\cdot|||$, jonka normi $\|\cdot\|$ indusoi seuraavan määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 1.29. Olkoon $\|\cdot\|$ vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ vektorinormi. Tällöin kuvaus $|||\cdot||| : \mathbb{K}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ on

$$|||A||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Vektorinormin indusoimaa matriisinormia kutsutaan myös *operaattorinormiksi*. Voidaankin osoittaa, että vektorinormi ja sen indusoima matriisinormi ovat yhteensopivat. Tätä ominaisuutta kutsutaan *sopeutuvuudeksi*.

Lause 1.30. *Olkoon funktio $|||\cdot|||$ kuten Määritelmässä 1.29. Tällöin funktio $|||\cdot|||$ on matriisinormi ja kaikilla $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ ja kaikilla $x \in \mathbb{C}^n$ pätee*

$$\|Ax\| \leq |||A|||\, \|x\|.$$

Todistus. Katso [3, Thm. 5.6.2]. □

Huomautus 1.31. Vektoreiden 1-normin indusoidessa matriisien 1-normin, tarkoitetaan tällä seuraavaa yhtäsuuruutta

$$|||A|||_1 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Katso [3, Thm. 5.6.18].

Neliömatriisien 1-normi määritellään hieman eri tavalla kuin vektoreiden 1-normi. Neliömatriisien 1-normissa tarkastellaan niiden sarakevektoreiden 1-normeja, jolloin matriisien 1-normi on operaattorinormi.

Lause 1.32. *Neliömatriisin $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ 1-normi on vektorien 1-normin indusoima normi seuraavasti*

$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Todistus. Katso [3, Kohta 5.6.4]. □

Matriisin spektraalisäde ja matriisinormi voidaan liittää toisiinsa Gelfandin kaavan avulla. Kyseinen kaava pätee kaikille matriisinormeille, mutta tutkielmassa hyödynnetään ainoastaan matriisin 1-normille pätevää tulosta.

Lause 1.33 (Gelfandin kaava)**.** *Jos $A \in \mathbb{K}_{m\times m}$ on neliömatriisi ja λ_{P} sen spektraalisäde, niin tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|||A^n|||_1} = \lambda_{\mathrm{P}}.$$

Todistus. Tehdään lisäoletus ja todistetaan tulos sen avulla. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{r^n} = 0_{m\times m}$ kaikille $r \in \mathbb{R}_+$, joille $r > \lambda_\mathrm{P}$.

Olkoon lisäksi ψ matriisin A ominaisvektori ja λ sitä vastaava ominaisarvo siten, että $|\lambda| = \lambda_\mathrm{P}$. Tällöin $A^n\psi = \lambda^n\psi$ ja kun tästä yhtälöstä otetaan puolittain 1-normi saadaan:

$$\|A^n\psi\|_1 = \|\lambda^n\psi\|_1 = |\lambda^n|\,\|\psi\|_1 = \lambda_\mathrm{P}^n\|\psi\|_1.$$

Toisaalta Lauseen 1.30 nojalla saadaan seuraava epäyhtälö kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$|||A^n|||_1\,\|\psi\|_1 \geq \|A^n\psi\|_1 = \lambda_\mathrm{P}^n\|\psi\|_1 \iff |||A^n|||_1 \geq \lambda_\mathrm{P}^n.$$

Nyt ollaan saatu seuraava arvio 1-normille:

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|||A^n|||_1} \geq \lambda_\mathrm{P}.$$

Toisaalta oletuksen $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{r^n} = 0_{m\times m}$ $(r > \lambda_\mathrm{P}, r \in \mathbb{R}_+)$ nojalla saadaan $|||A^n|||_1 \leq r^n$, kun n on tarpeeksi suuri. Tällöin siis $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|||A^n|||_1} \leq r$, joka pätee kaikille $r > \lambda_\mathrm{P}$, jolloin saadaan, että

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|||A^n|||_1} \leq \lambda_\mathrm{P}.$$

Ylläolevat arviot yhdistämällä saadaan

$$\lambda_\mathrm{P} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|||A^n|||_1} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|||A^n|||_1} \leq \lambda_\mathrm{P}.$$

Tästä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|||A^n|||_1} = \lambda_\mathrm{P}$.

Gelfandin kaavan voi todistaa ilman todistuksen alussa tehtyä lisäoletusta. Ilman lisäoletusta todistus on kuitenkin huomattavasti pidempi. Tämä versio todistuksesta löytyy lähteestä [1, Thm. 11] tai [3, Cor. 5.6.14.]. $\square$

2 Perronin lause

Tässä luvussa on tarkoituksena esittää todistus Perronin lauseelle, joka käsittelee positiivisten neliömatriisien spektraalisäteitä ja niitä vastaavia ominaisvektoreita. Kyseisen lauseen todistus tullaan esittämään luvun lopuksi, mutta sitä ennen käydään läpi todistukseen vaadittavia aputuloksia.

Lemma 2.1. *Olkoon $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ positiivinen neliömatriisi ja olkoon λ_{P} matriisin spektraalisäde. Jos on olemassa ominaisarvo λ siten, että $|\lambda| = \lambda_{\mathrm{P}}$ ja ψ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, niin $A\,|\psi| = \lambda_{\mathrm{P}}\,|\psi|$.*

Todistus. Olkoon $\Psi := |\psi|$. Lemman 1.24 nojalla $A\,|\psi| \geq |A\psi|$, jolloin

$$A\Psi = A\,|\psi| \geq |A\psi| = |\lambda\psi| = \lambda_{\mathrm{P}}\Psi. \tag{$\star$}$$

Osoitetaan nyt, että $A\Psi = \lambda_{\mathrm{P}}\Psi$. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että pätee $A\Psi \neq \lambda_{\mathrm{P}}\Psi$. Nyt epäyhtälöstä ($\star$) saadaan $A\Psi \geq \lambda_{\mathrm{P}}\Psi$ ja oletuksen nojalla $A\Psi \neq \lambda_{\mathrm{P}}\Psi$. Tällöin kerrottaessa positiivisella matriisilla A, Lemman 1.25 nojalla saadaan

$$A \cdot A\Psi > A \cdot \lambda_{\mathrm{P}} A \iff A^2\Psi > \lambda_{\mathrm{P}} A\Psi.$$

Lisäksi voidaan valita luku $r \in \mathbb{R}_+$ siten, että $r > \lambda_{\mathrm{P}}$ ja $A^2\Psi \geq rA\Psi$. Positiivisella matriisilla kertominen säilyttää epäyhtälön, koska molemmat vektorit ovat ei-negatiivisia.

Kerrotaan nyt epäyhtälöä termeillä $A^{n-1}, rA^{n-2}, \ldots, r^n$ eli ensin kerrotaan epäyhtälöä $A^2\Psi \geq rA\Psi$ matriisilla A^{n-1}, jolloin saadaan epäyhtälö $A^{n+1}\Psi \geq rA^n\Psi$, sitten kerrotaan samaa epäyhtälöä matriisilla rA^{n-2}, josta saadaan $rA^n\Psi \geq r^2A^{n-1}\Psi$. Jatkamalla tätä saadaan

$$A^{n+1}\Psi \geq rA^n\Psi \geq \ldots \geq r^nA\Psi.$$

Otetaan epäyhtälöiden vasemmasta ja oikeasta puolesta 1-normi, jolloin saadaan $\|A^{n+1}\Psi\|_1 \geq r^n\|A\Psi\|_1$. 1-normitetulle epäyhtälölle pätee Lauseen 1.30 nojalla

$$|||A^n|||_1\,\|A\Psi\|_1 \geq \|A^{n+1}\Psi\|_1 \geq r^n\|A\Psi\|_1.$$

Tästä epäyhtälöstä saadaan erityisesti, että $|||A^n|||_1 \geq r^n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Edelleen tästä saadaan, että $\sqrt[n]{|||A^n|||_1} \geq r > \lambda_{\mathrm{P}}$ kaikilla n. Tämä on kuitenkin ristiriita, koska Gelfandin kaavan nojalla $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|||A^n|||_1} = \lambda_{\mathrm{P}}$. Tällöin täytyy siis olla $A\Psi = \lambda_{\mathrm{P}}\Psi$. □

Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että matriisin spektraalisädettä vastaavalle ominaisvektorille on vaihtoehtoinen esitystapa.

Lemma 2.2. *Jos $\lambda \in \mathbb{C}$ on positiivisen neliömatriisin $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ ominaisarvo siten, että $|\lambda| = \lambda_{\mathrm{P}}$ ja ψ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, niin on olemassa $\theta \in \mathbb{R}$ siten, että $\psi = e^{i\theta}|\psi|$.*

Todistus. Lemman 2.1 nojalla pätee $|A\psi| = A|\psi|$. Tällöin erityisesti molempien vektoreiden ensimmäinen koordinaatti on sama. Saadaan siis

$$\sum_{j=1}^{n} A_{1j}|\psi_j| = \left|\sum_{j=1}^{n} A_{1j}\psi_j\right|.$$

Olkoon nyt $\theta \in \mathbb{R}$ siten, että $\left|\sum_{j=1}^{n} A_{1j}\psi_j\right| = e^{-i\theta}\sum_{j=1}^{n} A_{1j}\psi_j$. Nyt ensimmäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$0 = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}|\psi_j| - \left|\sum_{j=1}^{n} A_{1j}\psi_j\right| = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}(|\psi_j| - e^{-i\theta}\psi_j).$$

Nyt $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ ja kompleksiluvun reaaliosalle $\mathrm{Re}(z)$ pätee $\mathrm{Re}(z) \le |z|$. Tällöin saadaan seuraava epäyhtälö

$$\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\psi) \le \left|e^{-i\theta}\psi\right| = \sqrt{\cos(\theta)^2 + (-i\sin(\theta))^2}\,|\psi| = 1\cdot|\psi| = |\psi|\,.$$

Erityisesti saadaan, että $\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\psi_j) \le |\psi_j|$, jolloin lausekkeen $|\psi_j| - e^{-i\theta}\psi_j$ reaaliosa on ei-negatiivinen ja se on nolla ainoastaan, kun $|\psi_j| = e^{-i\theta}\psi_j$.

Yhtälön

$$0 = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}(|\psi_j| - e^{-i\theta}\psi_j)$$

nojalla summa on nolla, jolloin jokaisen summattavan termin reaaliosan täytyy olla nolla. Tällöin kaikilla $1 \le j \le n$ pätee $|\psi_j| = e^{-i\theta}\psi_j$, josta saadaan, että $\psi = e^{i\theta}|\psi|$. □

Tämän vaihtoehtoisen esitystavan avulla voidaankin osoittaa, että positiivisen matriisin spektraalisäde on täsmälleen jokin matriisin ominaisarvoista, eikä ainoastaan ominaisarvon itseisarvo.

Seuraus 2.3. *Jos λ on positiivisen neliömatriisin A ominaisarvo siten, että $|\lambda| = \lambda_{\mathrm{P}}$, niin $\lambda = \lambda_{\mathrm{P}}$.*

Todistus. Olkoon ψ ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Tällöin Lemman 2.1 nojalla ominaisarvoa λ_{P} vastaava ominaisvektori on $|\psi|$ ja Lemmasta 2.2 saadaan, että myös $\psi = e^{i\theta}|\psi|$ on ominaisarvoa λ_{P} vastaava ominaisvektori. Vektori ei voi olla kahden eri ominaisarvon ominaisvektori, jolloin täytyy olla $\lambda = \lambda_{\mathrm{P}}$. □

Seuraus 2.4. *Lemman 2.1 vektori $|\psi|$ on positiivinen ja lisäksi $\lambda_P > 0$.*

Todistus. Lemman 1.25 nojalla $\lambda_P |\psi| = A|\psi| > 0$. Koska λ_P ja $|\psi|$ ovat ei-negatiivisia, niiden tulo voi olla positiivinen ainoastaan silloin, kun $\lambda_P > 0$ ja vektori $|\psi|$ on positiivinen. □

Viimeiseksi ennen Perronin lauseen todistusta on hyvä osoittaa, että spektraalisäteen geometrinen kertaluku on 1 eli sitä vastaava ominaisavaruus on 1-ulotteinen.

Lemma 2.5. *Jos λ_P on positiivisen neliömatriisin $A \in \mathbb{K}_{n\times n}$ ominaisarvo, niin* $\mathrm{geom}(\lambda_P) = 1$.

Todistus. Seurauksessa 2.4 osoitettiin, että jos ψ on ominaisarvoa λ_P vastaava ominaisvektori, niin $|\psi| > 0$. Tällöin mikään ominaisvektorin ψ koordinaateista ei ole nolla ja erityisesti $\psi_1 \neq 0$.

Oletetaan nyt, että ominaisarvolla λ_P on kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria ψ ja ψ'. Tarkasteltaessa näiden vektoreiden erotusta $\psi_\delta := (\psi'_1/\psi_1)\psi - \psi'$, saadaan uusi ominaisvektori λ_P:lle. Nyt kuitenkin vektorin $|\psi_\delta|$ ensimmäinen koordinaatti on nolla, mikä on ristiriidassa Seurauksen 2.4 kanssa. Tällöin ominaisarvoa λ_P vastaavan ominaisavaruuden virittäjävektoreita on täsmälleen yksi eli $\mathrm{geom}(\lambda_P) = 1$. □

Lause 2.6 (Perron)**.** *Olkoon $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ positiivinen neliömatriisi. Tällöin matriisilla A on positiivinen ominaisarvo λ_P, jolle pätee*

(1) $\lambda_P > |\lambda|$ kaikilla matriisin A ominaisarvoilla $\lambda_P \neq \lambda$.

(2) Ominaisarvon λ_P algebrallinen kertaluku on 1 ja sitä vastaava ominaisvektori on positiivinen.

Todistus. Spektraalisäteen määritelmän nojalla on olemassa ainakin yksi ominaisarvo $\lambda : |\lambda| = \lambda_P$ origo-keskeisellä ympyrällä. Tällöin Lemman 2.1 ja Seurauksen 2.4 nojalla λ_P on matriisin A ominaisarvo ja sillä on positiivinen ominaisvektori Ψ. Seurauksen 2.3 nojalla ympyrällä ei ole muita ominaisarvoja eli $\lambda_P > |\lambda|$ kaikille matriisin A ominaisarvoille $\lambda_P \neq \lambda$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathrm{alg}(\lambda_P) = 1$. Koska $A > 0$, niin $A^T > 0$ ja matriisin A ominaisarvot $\{\lambda_1, \dots, \lambda_P\}$ ovat matriisin A^T ominaisarvot Lemman 1.12 nojalla. Tällöin matriisille A^T on olemassa positiivinen ominaisvektori Π, jota vastaava ominaisarvo on λ_P. Olkoon tämän ominaisvektorin ortogonaalinen hypertaso $\Pi^\perp := \{x : \Pi^T x = 0\}$. Nyt ehdosta $x \in \Pi^\perp$ seuraa, että $Ax \in \Pi^\perp$, koska

$$\Pi^T A x = (A^T \Pi)^T x = (\lambda_P \Pi)^T x = \lambda_P \Pi^T x = \lambda_P \cdot 0 = 0.$$

Valitaan nyt aliavaruuden $\Pi^\perp$ kannaksi $\{x_2, \dots, x_m\}$. Kun tähän kantaan lisätään mikä tahansa vektori, joka on lineaarisesti riippumaton kannan vektoreiden kanssa, saadaan koko avaruuden kanta. Huomataan, että $\Pi^T \Psi > 0$, koska Π ja Ψ ovat positiivisia vektoreita. Siis $\Psi \notin \Pi^\perp$, jolloin lisäämällä tämä vektori kantaan $\{x_2, \dots, x_m\}$, saadaan uusi kanta. Tällöin $A\Psi = \lambda_\mathrm{P}\Psi$ ja $Ax_2, \dots, Ax_m \in \Pi^\perp$. Olkoon tätä uutta kantaa vastaava matriisi muotoa $X = \begin{bmatrix}\Psi & x_2 & \dots & x_m\end{bmatrix}$. Koska matriisin X sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, on matriisi täten kääntyvä ja sen avulla matriisi A saadaan lohkodiagonaalimuotoon seuraavasti:

$$\begin{aligned} X^{-1}AX &= \begin{bmatrix}\Psi & x_2 & \dots & x_m\end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix}\Psi & x_2 & \dots & x_m\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\Psi & x_2 & \dots & x_m\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}A\Psi & Ax_2 & \dots & Ax_m\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\Psi & x_2 & \dots & x_m\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\lambda_\mathrm{P}\Psi & Ax_2 & \dots & Ax_m\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\lambda_\mathrm{P} & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{$\circledast$}$$

missä B on jokin tuntematon matriisi. Yhtälön viimeinen yhtäsuuruus johtuu siitä, että $X^{-1}\lambda_\mathrm{P}\Psi = \lambda_\mathrm{P}e_1$, missä $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Vastaavasti vektori Ax_k on vektorin x_k lineaarikombinaatio kaikilla $2 \leq k \leq m$. Tällöin saadaan $X^{-1}(Ax_k) \in \langle e_2, e_3 \dots, e_m\rangle$ kaikilla $2 \leq k \leq m$.

Koska matriisi A saadaan kääntyvän matriisin X avulla lohkodiagonaalimuotoon, on matriisi A similaari matriisin $X^{-1}AX$ kanssa. Tällöin Lauseen 1.19 nojalla matriiseilla A ja $X^{-1}AX$ on sama karakteristinen polynomi. Matriisin A karakteristinen polynomi saadaan siis lauseen 1.9 nojalla kirjoitettua ensimmäisen asteen tekijöiden tulona muodossa:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_\mathrm{P})(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m) = (\lambda - \lambda_\mathrm{P}) \det(\lambda I - B).$$

Oletetaan, että $\mathrm{alg}(\lambda_\mathrm{P}) \neq 1$. Tällöin λ_P täytyy olla tulon

$$(\lambda - \lambda_\mathrm{P}) \det(\lambda I - B)$$

molempien tekijöiden juuri, jolloin λ_P on myös matriisin B ominaisarvo. Tällöin on olemassa ominaisarvoa λ_P vastaava ominaisvektori $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, jolloin pätee yhtälö $By = \lambda_\mathrm{P}y$.

Tarkastellaan nyt vektoria $\begin{bmatrix}0 \\ y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, jolloin yhtälön $\circledast$ avulla saamme

$$AX\begin{bmatrix}0 \\ y\end{bmatrix} \overset{\circledast}{=} X\begin{bmatrix}\lambda_\mathrm{P} & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ y\end{bmatrix} = X\begin{bmatrix}0 \\ By\end{bmatrix} = X\begin{bmatrix}0 \\ \lambda_\mathrm{P}y\end{bmatrix} = \lambda_\mathrm{P}X\begin{bmatrix}0 \\ y\end{bmatrix}.$$

Tämän laskun perusteella vektori $X\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$ on matriisin A ominaisarvoa λ_{P} vastaava ominaisvektori. Lisäksi voidaan huomata, että

$$\begin{aligned}
\Pi^T X\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m}\\ \psi_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\Pi^T\psi & \Pi^T x_2 & \cdots & \Pi^T x_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\Pi^T\psi & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Tällöin siis $X\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix} \in \Pi^{\perp}$, eli vektorit $X\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$ ja Ψ ovat lineaarisesti riippumattomat. Tällöin ominaisarvoa λ_{P} vastaa kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, mikä on ristiriita Lemman 2.5 kanssa. Täytyy siis olla $\mathrm{alg}(\lambda_{\mathrm{P}}) = 1$. $\square$

3 Sovellus

Ennen tutkielman päätuloksen eli Perronin lauseen sovelluksen käsittelyä on hyvä perehtyä hieman siihen liittyvään teoriaan. Käsitellään ensimmäisenä hieman verkkoteoriaa, jonka avulla tutkielman sovellusta havainnollistetaan. Tämän jälkeen käydään läpi teoriaa liittyen differenssiyhtälöihin ja stokastisiin matriiseihin, joka antaa teoriapohjan tutkielman sovellukselle. Verkkoteorian osalta lähteenä on käytetty kirjaa [2] ja lukujen 3.2 ja 3.3 pääasiallisena lähteenä on käytetty lähdettä [6, § 5.6].

3.1 Verkkoteoriaa

Verkkoteoriassa asioiden välisiä suhteita voidaan kuvata graafisesti verkkojen ja suunnattujen verkkojen avulla. Verkot kertovat ainoastaan, että ovatko kaksi asiaa millään tavalla sidoksissa toisiinsa. Suunnatut verkot ovat tavallisia verkkoja tarkempia, koska ne kertovat kahden asian välisen vuorovaikutussuhteen luonteen.

Tästä voidaan käyttää esimerkkinä Instagram-sovelluksen kahden käyttäjän välistä seuraajasuhdetta. Tavallinen verkko ei ota kantaa siihen, että seuraavatko molemmat käyttäjät toisiaan, vaan kertoo, että jonkinlainen seuraajasuhde on heidän välillään. Suunnattu verkko puolestaan kertoo, että seuraavatko molemmat käyttäjät toisiaan vai seuraako ainoastaan toinen käyttäjä toista käyttäjää.

Tässä tutkielmassa hyödynnetään suunnattujen verkkojen teoriaa, joten käydään läpi hieman teoriaa liittyen siihen. Määritellään ensin, mitä tarkoitetaan suunnatulla verkolla.

Määritelmä 3.1. *Suunnattu verkko* $D = (V, E)$ on äärellinen ja epätyhjä joukko joukon V alkioita eli *kärkiä* ja joukon E alkioita, jotka ovat joukon V pareja (v_i, v_j) eli *nuolia*.

Verkoille voidaan myös määrittää aste ja koko. Määritellään seuraavaksi mitä nämä käsitteet tarkoittavat.

Määritelmä 3.2. Verkon $D = (V, E)$ *aste* on sen kärkien lukumäärä eli joukon V alkioiden lukumäärä.

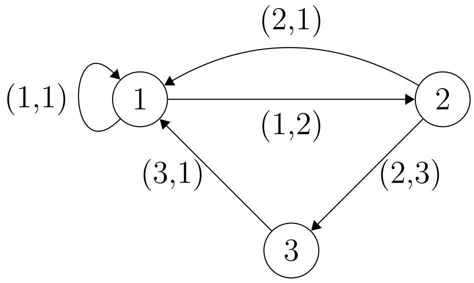
Määritelmä 3.3. Verkon $D = (V, E)$ *koko* on sen nuolien lukumäärä eli joukon E alkioiden lukumäärä.

Havainnollistetaan seuraavan esimerkin avulla sitä, kuinka suunnattu verkko muodostuu, kun tiedetään joukot V ja E. Määritetään lisäksi kyseisen suunnatun verkon aste ja koko.

Esimerkki 3.4. Olkoot nyt

$$V = \{1, 2, 3\} \text{ ja } E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Joukon V sisältäessä 3 alkiota, suunnatun verkon D aste on 3. Vastaavasti joukon E sisältäessä 5 alkiota, suunnatun verkon D koko on 5. Suunnattu verkko $D = (V, E)$ voidaan esittää seuraavasti:



Suunnatut verkot voidaan yhdistää matriisiteoriaan siten, että tietyn matriisin N alkio n_{ij} kertoo, onko kärkien i ja j välillä nuoli.

Määritelmä 3.5. Olkoon $G = (V, E)$ astetta n ja kokoa m oleva suunnattu verkko, missä $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ja $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Tällöin verkon G *naapurimatriisi* on $n \times n$-matriisi $A = [a_{ij}]$, missä

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } (v_i, v_j) \in E(G), \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Esimerkki 3.6. Määritetään Esimerkin 3.4 suunnatulle verkolle naapurimatriisi. Nyt siis Määritelmän 3.5 mukaan suunnatun verkon naapurimatriisi on muotoa

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 3.7. Verkon *kävely* on jono verkon kärkiä siten, että peräkkäiset kärjet ovat naapureita.

Huomautus 3.8. Verkon kävelyä sanotaan q-kävelyksi, jos se sisältää $q + 1$ kappaletta kärkiä.

Suunnatun verkon eri mittaisia kävelyitä voidaan tarkastella naapurimatriisin avulla. Naapurimatriisin avulla voidaan tukeutua laskennalliseen tapaan havaita eri mittaisia kävelyitä verkolla. Erityisesti, jos käsitellään verkkoja, jotka sisältävät paljon kärkiä, voi olla hyvinkin vaikeaa löytää kaikki mahdolliset kävelyt verkolla. Seuraava lause antaa laskennallisen tavan tarkastella eri pituisia kävelyitä halutulla verkolla.

Lause 3.9. *Olkoot $D = (V, E)$ verkko, missä $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ja sitä vastaava naapurimatriisi $A = [a_{ij}]$. Tällöin matriisin A^q, missä $q \in \mathbb{N}$, alkio a_{ij} kertoo eri q-kävelyiden lukumäärän kärkien v_i ja v_j välillä verkolla D.*

Todistus. Katso [2, Thm. 2.13]. □

Määritelmä 3.10. Suunnattu verkko G on *yhtenäinen*, jos jokaisesta verkon kärjestä v on kävely verkon kärkeen w.

3.2 Differenssiyhtälöistä ja stokastisista matriiseista

Tarkastellaan tässä luvussa differenssiyhtälöitä. Tietyn asian tilaa ajanhetkellä t voidaan kuvata vektorin v_t avulla. Vastaavasti tämän kyseessä olevan asian tila ajanhetkellä $t + 1$ voidaan liittää lineaarisesti ajan hetkeen t *siirtymämatriisin* A avulla siten, että $v_{t+1} = Av_t$. Määritellään seuraavaksi tällaiset yhtälöt.

Määritelmä 3.11. Olkoot $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ neliömatriisi ja vektorit $v_i \in \mathbb{R}^n$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin *differenssiyhtälö* on muotoa:

$$v_{t+1} = Av_t$$

Differenssiyhtälöiden avulla voidaan siis arvioida jonkin muuttujan pitkäaikaista käyttäytymistä. Differenssisysteemejä, joissa differenssiyhtälöiden muuttujat kuvaavat todennäköisyyksiä, kutsutaan Markovin ketjuiksi. Tällaisien differenssisysteemien tarkastelu paljastuukin ominaisarvo-ongelmaksi, koska Määritelmän 3.11 mukaan voidaan tila ajanhetkellä t ilmaista seuraavasti

$$v_t = Av_{t-1} = A^2 v_{t-2} = \cdots = A^t v_0.$$

Markovin ketjujen todennäköisyystulkinnan johdosta vain tietynlaiset siirtymä matriisit voivat määrätä tällaisia differenssiyhtälöitä. Tällaisten siirtymämatriisien alkiot ovat Markovin ketjun siirtymätodennäköisyyksiä. Kun tarkastellaan jotakin Markovin ketjun tilaa, siirtymämatriisin alkiot kertovat millä todennäköisyydellä siirrytään tästä tilasta toiseen. Määritellään tällaiset matriisit seuraavaksi.

Määritelmä 3.12. Neliömatriisia $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ kutsutaan *stokastiseksi matriisiksi*, jos pätee $A \geq 0$ ja $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$ siten, että kaikilla $1 \leq i, j \leq n$ pätee $a_{ij} \geq 0$.

Edellä olevasta määritelmästä havaitaan, että stokastiset matriisit ovat ei-negatiivisia matriiseja. Määritellään vielä seuraavaksi stokastiset matriisit, joiden jokin positiivinen kokonaislukupotenssi tuottaa positiivisen stokastisen matriisin.

Määritelmä 3.13. *Säännöllinen stokastinen matriisi* on stokastinen neliömatriisi A, jolle $A^n > 0$ jollakin $n \geq 1$.

Huomautus 3.14. Myös matriiseja joiden jokaisen rivin alkiot summautuvat yhdeksi voidaan kutsua stokastisiksi matriiseiksi. Tällaiset matriisit ovat tarkemmin ilmaistuna rivistokastisia matriiseja. Yllä olevassa määritelmässä stokastisiksi matriiseiksi määriteltiin sellaiset matriisit, joiden jokaisen sarakkeen alkiot summautuvat yhdeksi eli kyseiset matriisit ovat tarkemmin ilmaistuna sarakestokastisia matriiseja.

Sarakestokastisten matriisien ja rivistokastisten matriisien kanssa kannattaa olla tarkkana lukiessa kirjallisuutta. Valinta perustuu täysin kirjoittajan omaan valintaan ja stokastisuutta käytettäessä tuloksien todistuksissa, eroavat näiden todistusten yksityiskohdat riippuen valinnasta, minkälaisia stokastisia matriiseja käytetään.

Siirtymämatriisin ominaisuuksien lisäksi Markovin ketjuissa olevat vektorit omaavat tiettyjä ominaisuuksia. Näissä vektoreissa komponentit tulkitaan myös todennäköisyyksiksi, jolloin saadaan *todennäköisyysvektorit*. Määritellään seuraavaksi tällaiset vektorit.

Määritelmä 3.15. Vektori $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ on *todennäköisyysvektori*, jos $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ja kaikilla $1 \leq i \leq n$ pätee $p_i \geq 0$.

Nyt aiemmin määritellyt stokastiset matriisit ja todennäköisyysvektorit määräävät Markovin ketjut.

Määritelmä 3.16. Olkoon A sarakestokastinen $n \times n$-matriisi. Matriisin A määräämä *Markovin ketju* on differenssiyhtälö $\mathbf{p}_{k+1} = A\mathbf{p}_k$, $k \in \mathbb{N}$, missä $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$ on todennäköisyysvektori.

Huomautus 3.17. Todennäköisyysvektori $\mathbf{p}_0 = (p_1, p_2, \ldots, p_j)$ on Markovin ketjun *alkutilatodennäköisyysvektori*, joka kertoo todennäköisyydenjakauman sille, että systeemi alkaa tilasta j.

Markovin ketjut ovat Markovin prosesseja, jotka puolestaan ovat stokastisia prosesseja. Stokastisten prosessien osalta aihetta käsitellään kirjassa [4]. Markovin ketjujen tarkastelussa aiemmin tutkielmassa todistettu Perronin lause onkin kriittisessä asemassa. Perronin lauseen avulla voidaan ennustaa Markovin ketjujen käyttäytymistä. Kun tarkastellaan differenssiyhtälön pitkäaikaista käyttäytymistä, kyseessä on ominaisarvo-ongelma. Stokastisilla matriiseilla on muihin matriiseihin verraten erityisiä ominaisuuksia, joiden avulla käytöksen ennustaminen onnistuu.

Lemma 3.18. *Olkoon matriisi A stokastinen. Tällöin*

(1) 1 on matriisin A ominaisarvo.

(2) jos $\lambda \in \mathbb{K}$ on matriisin A ominaisarvo, niin $|\lambda| \leq 1$, jolloin $\lambda_{\mathrm{P}} = 1$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että 1 on neliömatriisin A ominaisarvo. Nyt oletuksen nojalla matriisille A pätee $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Tällöin matriisin A^T jokainen rivi summautuu yhdeksi.

Tästä seuraakin, että

$$\begin{aligned} A^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{in} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Tämän perusteella matriisin A^T ominaisarvona on luku 1 ja siten Lemman 1.12 nojalla luku 1 on myös matriisin A ominaisarvo.

Osoitetaan seuraavaksi, että stokastisen matriisin A kaikille ominaisarvoille $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee $|\lambda| \leq 1$. Olkoon nyt λ mikä tahansa matriisin A ominaisarvo. Tällöin λ on myös matriisin A^T ominaisarvo Lemman 1.12 nojalla. Olkoon lisäksi vektori $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ neliömatriisin A^T ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, jolloin pätee $\lambda x = A^T x$. Tämän yhtälön j:s komponentti on

$$\lambda x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i.$$

Valitaan nyt itseisarvoltaan suurin x_j siten, että $|x_i| \leq |x_j|$ kaikilla i. Tällöin saadaan, että

$$|\lambda| \cdot |x_j| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot |x_j| = 1 \cdot |x_j|.$$

Yllä olevan yhtälön perusteella pätee $|\lambda| \leq 1$. $\square$

Markovin ketjuissa tilan $t+1$ vektorin komponenttien täytyy myös kuvata todennäköisyyksiä. Tällöin on siis hyvä osoittaa, että siirtymämatriisin ja todennäköisyysvektorin tulo todella on todennäköisyysvektori. Osoitetaan tämä seuraavaksi.

Lemma 3.19. *Olkoot $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ stokastinen matriisi ja $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ todennäköisyysvektori. Tällöin $A\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ on todennäköisyysvektori.*

Todistus. Nyt matriisi A on stokastinen matriisi, jolloin erityisesti pätee $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ kaikilla $j = 1,\dots,n$. Lisäksi $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}^T$ on todennäköisyysvektori eli pätee $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Tarkastellaan nyt tuloa Ap:

$$A\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n \\ \vdots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \cdots + a_{nn}p_n \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi vektorin Ap 1-normia ja hyödynnetään stokastisen matriisin ja todennäköisyysvektorin ominaisuuksia:

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{p}\|_1 &= (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n) + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n) + \dots \\ &\quad + (a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \cdots + a_{nn}p_n) \\ &= (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1})p_1 + (a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2})p_2 + \dots \\ &\quad + (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn})p_n \\ &= p_1 + p_2 + \cdots + p_n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Koska matriisi A ja vektori $\mathbf{p}$ ovat ei-negatiivisia, on vektorin $A\mathbf{p}$ jokainen alkio ei-negatiivinen. Lisäksi yllä havaittiin, että $\|A\mathbf{p}\|_1 = 1$. Tällöin siis stokastisen matriisin ja todennäköisyysvektorin tulo on todennäköisyysvektori. □

Tutkielman sovellus keskittyy erityisesti stokastisen matriisin ominaisarvoa 1 vastaavaan ominaisvektoriin. Määritellään seuraavaksi tämä vektori ja sen ominaisuudet.

Määritelmä 3.20. Stokastisen matriisin $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ *tasapainotila* on ominaisvektori $w \in \mathbb{R}^n$, jonka ominaisarvo on 1 siten, että jokaiselle sen komponentille pätee $w_i \geq 0$ kaikilla $1 \leq i \leq n$ ja $\|w\|_1 = 1$.

Esimerkki 3.21. Tarkastellaan nyt Esimerkin 1.5 matriisia A, joka on stokastinen matriisi. Aikaisemmin määritettiin kyseisen matriisin ominaisarvot, jotka ovat

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{5}, \lambda_3 = -\frac{1}{10} \text{ ja } \lambda_4 = \frac{1}{10}.$$

Määritetään nyt suurinta ominaisarvoa $\lambda_1 = 1$ vastaava ominaisvektori. Täytyy siis selvittää mitkä vektorit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\overline{0}\}$ toteuttavat yhtälön $Ax = 1 \cdot x$ eli $(1 \cdot I - A)x = 0$.

$$(1 \cdot I - A)x = 0 \iff \begin{bmatrix} 1-0.2 & -0.3 & -0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 1-0.3 & -0.2 & -0.2 \\ -0.3 & -0.1 & 1-0.1 & -0.5 \\ -0.3 & -0.3 & -0.3 & 1-0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\iff \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.7 & -0.2 & -0.2 \\ -0.3 & -0.1 & 0.9 & -0.5 \\ -0.3 & -0.3 & -0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\iff x_1 = \frac{293}{324}, x_2 = \frac{22}{27}, x_3 = \frac{307}{324} \text{ ja } x_4 = 1$$

Eli ominaisarvoa $\lambda_1 = 1$ vastaava ominaisvektori on $x = (\frac{293}{324}, \frac{22}{27}, \frac{307}{324}, 1)$. Tällöin siis stokastisen matriisin A tasapainotila on ominaisvektori x.

Aiemmin on osoitettu, että luku 1 on stokastisen matriisin ominaisarvo. Lisäksi määriteltiin tätä vastaava ominaisvektori eli matriisin tasapainotila. Nyt aiemmin tutkielmassa todistettu Perronin lause takaa, että tasapainotilavektorin virittämä ominaisavaruus on 1-ulotteinen.

Lause 3.22. *Positiivisen stokastisen neliömatriisin $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ ominaisavaruus $E_A(1)$ on suora, jonka matriisin A tasapainotilavektori virittää.*

Todistus. Matriisin A ollessa positiivinen, on sillä Lauseen 2.6 nojalla ominaisarvo λ_P, jolle pätee $\lambda_\mathrm{P} > |\lambda|$ kaikilla matriisin ominaisarvoilla, joille $\lambda_\mathrm{P} \neq \lambda$. Lisäksi tälle ominaisarvolle pätee $\mathrm{alg}(\lambda_\mathrm{P}) = 1$. Koska matriisi A on stokastinen, niin Lemman 3.18 nojalla matriisilla on ominaisarvo $\lambda_1 = 1$ ja kaikille matriisin ominaisarvoille pätee $|\lambda| \leq 1$. Tällöin siis täytyy olla $\lambda_\mathrm{P} = \lambda_1 = 1$.

Nyt Määritelmän 3.20 nojalla ominaisarvoa λ_P vastaava ominaisvektori on tasapainotilavektori w. Tällöin tasapainotilavektori w virittää ominaisavaruuden $E_A(\lambda_\mathrm{P})$ ja kyseinen avaruus on 1-ulotteinen, koska $\mathrm{alg}(\lambda_\mathrm{P}) = 1$. □

Siirtymämatriisin määräämä ominaisavaruus onkin riippumaton vektorista, jota siirtymämatriisilla kerrotaan. Tämä tarkoittaa sitä, että valittiinpa mikä tahansa todennäköisyysvektori, niin lähestytään aina ominaisavaruutta, jonka tasapainotilavektori virittää. Tämän osoittamiseen tarvitaan kuitenkin siirtymämatriisin ja vektorin tulon, jossa vaakavektoria kerrotaan neliömatriisilla oikealta puolelta, maksimialkioon ja minimialkioon liittyvää tulosta.

Lause 3.23. *Olkoot $P \in \mathbb{R}_{n\times n}$ positiivinen siirtymämatriisi ja ϵ matriisin P pienin alkio. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$, jonka maksimialkio on M_0 ja minimialkio on m_0. Lisäksi valitaan vektorin xP maksimialkioksi M_1 ja minimialkioksi m_1. Tällöin $M_1 \leq M_0, m_1 \geq m_0$ ja*

$$M_1 - m_1 \leq (1 - 2\epsilon)(M_0 - m_0).$$

Todistus. Olkoon x' vektori, jossa vektorin x kaikki alkiot paitsi yksi m_0 muutetaan alkioksi M_0. Tällöin $x' \geq x$. Lisäksi jokainen vektorin $x'P$ alkio on muotoa

$$a \cdot m_0 + (1 - a) \cdot M_0 = M_0 - a(M_0 - m_0),$$

missä $a \geq \epsilon$, koska ϵ valittiin matriisin P pienimmäksi alkioksi. Tällöin jokainen vektorin $x'P$ komponentti on

$$M_0 - a(M_0 - m_0) \leq M_0 - \epsilon(M_0 - m_0).$$

Epäyhtälöstä $x \leq x'$ saadaan Lemman 1.25 nojalla, että

$$M_1 \leq M_0 - \epsilon(M_0 - m_0).$$

Kun tätä tulosta käytetään vektorille $-x$, niin saadaan

$$-m_1 \leq -m_0 - \epsilon(-m_0 + M_0).$$

Tarkastellaan nyt erotusta $M_1 - m_1$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} M_1 - m_1 &\leq M_0 - m_0 - 2\epsilon(M_0 - m_0) \\ &= (1 - 2\epsilon)(M_0 - m_0). \end{aligned}$$

□

Lause 3.24. *Olkoon $P \in \mathbb{R}_{n\times n}$ positiivinen siirtymämatriisi ja $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$ todennäköisyysvektori. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} P^n \boldsymbol{\pi} = \alpha,$$

missä α on tasapainotilavektori.

Todistus. Osoitetaan ensin, että siirtymämatriisin potenssi P^n lähestyy matriisia A, jonka sarakkeet ovat tasapainotilavektori α, kun $n \to \infty$.

Olkoot nyt $\epsilon = \min\{p_{ij}\}$ ja e_i standardikantavektori. Nyt matriisin P^n rivin i maksimi- ja minimialkiot ovat

$$M_n = \max_{1\leq j\leq n}(e_i^T P^n)_j \in]\,0,1\,[\text{ ja } m_n = \min_{1\leq j\leq n}(e_i^T P^n)_j \in]\,0,1\,[\,.$$

Nyt, koska $e_i^T P^n = e_i^T P^{n-1} P$, niin Lauseen 3.23 nojalla M_n on vähenevä lukujono ja m_n on kasvava lukujono. Tällöin

$$M_n - m_n \leq (1 - 2\epsilon)(M_{n-1} - m_{n-1}).$$

Merkitään nyt $d_n = M_n - m_n$, jolloin saadaan

$$d_n \leq (1 - 2\epsilon)^n \cdot d_0 = (1 - 2\epsilon)^n.$$

Tällöin d_n raja-arvoksi saadaan $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} (1 - 2\epsilon)^n = 0$, koska $(1 - 2\epsilon) < 1$. Tällöin M_n ja m_n lähestyvät samaa lukua. Olkoon tämä raja-arvo a_i, jolle pätee $a_i \in]0, 1[$, koska $m_n \leq a_i \leq M_n$ kaikilla n. Tällöin saadaan

$$\lim_{n\to\infty} (e_i^T P^n) = \begin{bmatrix} a_i & a_i & \cdots & a_i \end{bmatrix}.$$

Nyt siis matriisin P^n i:s rivivektori on vektori, jonka kaikki alkiot ovat samoja. Tällöin siis

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_i & a_i & \cdots & a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \end{bmatrix} = A.$$

Matriisin P ollessa sarakestokastinen, täytyy sen raja-arvon eli matriisin A olla myös sarakestokastinen. Matriisin A sarakevektoreiden ollessa samat, voidaan se kirjoittaa vektorin $\xi := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ avulla muodossa

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \alpha\xi.$$

Osoitetaan nyt, että kerrottaessa matriisilla P^n mitä tahansa todennäköisyysvektoria $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$ lähestytään tasapainotilavektoria α. Nyt, koska $\boldsymbol{\pi}$ on todennäköisyysvektori, niin $\xi\boldsymbol{\pi} = 1$. Tällöin saadaan, että

$$A\boldsymbol{\pi} = \alpha\xi\boldsymbol{\pi} = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Halutaan siis saada, että $\lim_{n\to\infty} P^n\boldsymbol{\pi} = \alpha$. Tarkastellaan seuraavanlaista raja-arvoa:

$$\lim_{n\to\infty} (P^n\boldsymbol{\pi} - \alpha) = \lim_{n\to\infty} (P^n\boldsymbol{\pi} - A\boldsymbol{\pi}) = \lim_{n\to\infty} ((P^n - A)\boldsymbol{\pi}) = (A - A)\boldsymbol{\pi} = 0.$$

Tällöin yllä olevan yhtälön nojalla pätee raja-arvo $\lim_{n\to\infty} P^n\boldsymbol{\pi} = \alpha$. Lisäksi Lauseen 2.6 nojalla α on yksikäsitteinen. $\square$

Esimerkki 3.25. Olkoot todennäköisyysvektori $\boldsymbol{\pi} = (0.1, 0.4, 0.3, 0.2)$ ja positiivinen siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.15 & 0.2 \\ 0.05 & 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.4 & 0.25 & 0.4 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan nyt matriisin P potensseja:

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.168786 & 0.167947 & 0.168309 & 0.168081 \\ 0.347216 & 0.349141 & 0.348303 & 0.349529 \\ 0.275598 & 0.274512 & 0.274988 & 0.27431 \\ 0.2084 & 0.2084 & 0.2084 & 0.20808 \end{bmatrix}$$

ja

$$P^{12} = \begin{bmatrix} 0.168216 & 0.168216 & 0.168216 & 0.168216 \\ 0.348668 & 0.348668 & 0.348668 & 0.348668 \\ 0.274783 & 0.274783 & 0.274783 & 0.274783 \\ 0.208333 & 0.208333 & 0.208333 & 0.208333 \end{bmatrix}.$$

Voidaan havaita, että matriisin P potenssi P^{12} suppenee matriisiin, jonka jokainen sarakevektori on sama. Tarkastellaan seuraavaksi raja-arvo matriisin $\lim_{n\to\infty} P^n$ ja todennäköisyysvektorin $\boldsymbol{\pi}$ tuloa

$$\lim_{n\to\infty} P^n \boldsymbol{\pi} = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.15 & 0.2 \\ 0.05 & 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.4 & 0.25 & 0.4 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.05 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168216 \\ 0.348668 \\ 0.274783 \\ 0.208333 \end{bmatrix}.$$

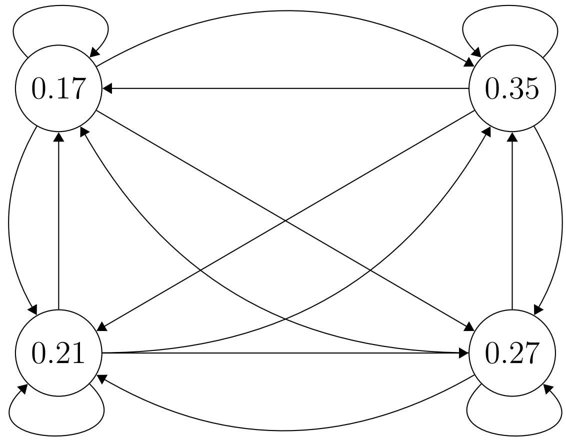
Voidaankin havaita, että tulo suppenee vektoriin, joka on raja-arvo matriisin $\lim_{n\to\infty} P^n$ mikä tahansa sarakevektori, kuten Lauseessa 3.24 osoitettiin.

Tarkastellaan vielä esimerkin vuoksi raja-arvo matriisin $\lim_{n\to\infty} P^n$ ja todennäköisyysvektorin $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = (1, 0, 0, 0)$ tuloa.

n	$P^n\tilde{\boldsymbol{\pi}}$
1	(0.3, 0.05, 0.4, 0.25)
2	(0.205, 0.29, 0.305, 0.2)
3	(0.17625, 0.32725, 0.2865, 0.21)
4	(0.170575, 0.344013, 0.277413, 0.208)
5	(0.168786, 0.347216, 0.275598, 0.2084)
6	(0.168377, 0.348325, 0.274978, 0.20832)
12	(0.168216, 0.348668, 0.274783, 0.208333)

Taulukko 1: Tulon $P^n\tilde{\pi}$ aikakehitys eri n arvoilla.

Taulukossa siis laskettiin Markovin ketjun aikakehitystä, josta voidaan havaita, että todennäköisyysvektorin valinnalla ei ole merkitystä aikakehityksen kannalta. Alkuperäisen matriisin P alkioiden todennäköisyyksiä, jotka tasapainotila antaa, voidaan kuvata suunnatun verkon avulla seuraavasti:



3.3 PageRank

Ennen Googlen PageRank-algoritmin keksimistä hakukoneet järjestivät hakutulokset sen mukaan, kuinka useasti haettu sana löytyi nettisivulta. Näin ollen, jos halusit, että tiettyä sanaa haettaessa nettisivusi olisi ensimmäisenä hakutuloksissa, tarvitsi ainoastaan sisällyttää haluttu sana nettisivulle useampaan kertaan kuin yhdelläkään muulla nettisivulla. Tämä kuitenkin johti hakukoneen väärinkäyttöön ja sivustot, joilla ei ollut mitään tekemistä esimerkiksi leipomisen kanssa saattoivat sisällyttää leipomiseen liittyvää sanastoa sivullensa siten, että kyseinen sivu oli hakutuloksissa ensimmäisenä, vain saadakseen nettisivun kävijämäärän korkealle.[6, § 5.6.3]

Tämä kuitenkin muuttui, kun Larry Page ja Sergey Brin kehittivät tavan, jossa hakutulokset järjestettiin merkittävyyden mukaan. Perehdytään seuraavaksi siihen, kuinka tämä algoritmi toimii. [6, § 5.6.3]

Jokaisella nettisivulla on sille määräytyvä tärkeys. Tämä tärkeys on siis positiivinen luku, joka määräytyy seuraavaksi esiteltävän ehdon mukaisesti. [6, § 5.6.3]

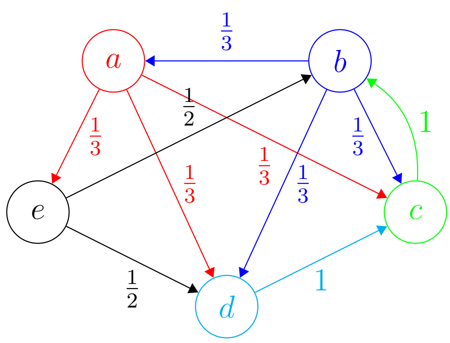
Määritelmä 3.26 (Tärkeyden määräävä sääntö)**.** Jos nettisivu P linkittää sivullensa n eri sivustoa $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, niin jokainen sivu Q_i perii $\frac{1}{n}$ määrän nettisivun P tärkeydestä.

Määritelmästä seuraa siis, että tärkeän sivun linkittäessään toisen sivun omalle sivulleen, tulee linkitetystä sivusta myös tärkeä. Kuitenkin olettaen, että tärkeä sivu ei ole linkittänyt todella montaa muuta sivua omalle sivulleen, jolloin perittävä tärkeys pienenee. Lisäksi, jos todella suuri määrä epätärkeitä sivustoja linkittää sivusi omille sivuilleen, niin sivustoasi pidetään tärkeänä. Kuitenkin, jos tuntematon tai epätärkeä sivusto linkittää sivustosi omille sivuilleen, ei se tee sivustostasi tärkeää.[6, § 5.6.3]

Määritelmä 3.27. Oletetaan, että internetissä on n-kpl nettisivuja. Tällöin *tärkeysmatriisi* on matriisi $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$, missä alkion a_{ij} suuruus on sivun j antaman tärkeyden suuruus sivulle i.

Voidaankin huomata, että tärkeysmatriisi on stokastinen. Oletetaan, että jokainen sivusto sisältää linkin toiselle sivulle. Tällöin, jos sivu i sisältää m-kpl linkkiä niin tällöin sarake i sisältää luvun $\frac{1}{m}$, m-kertaa ja loppujen alkioiden suuruus on 0. [6, § 5.6.3]

Esimerkki 3.28. Tarkastellaan internettiä, joka sisältää 5 eri nettisivua. Kuvataan sivujen välisiä yhteyksiä suunnatulla verkolla.



Tärkeyden määräävän säännön nojalla esimerkiksi nettisivulla e on 2 linkkiä, joten se antaa $\frac{1}{2}$ tärkeydestään nettisivulle b ja nettisivulle d. Tällöin tärkeysmatriisi on muotoa

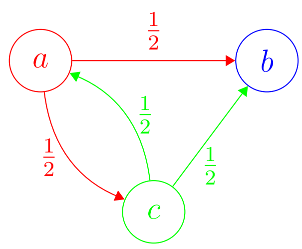
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usein tärkeysmatriisin tasapainotilaa eli ominaisarvoa 1 vastaavaa ominaisvektoria kutsutaan *arvovektoriksi.*

Tarkastellaan seuraavaksi kahta ongelmaa liittyen Pagerank-algoritmiin ja esitetään niille Larry Pagen ja Sergey Brinin ratkaisu. Ensimmäisenä ongelmana on ei-negatiiviset stokastiset matriisit. Harvoin, kun tarkastellaan tärkeysmatriisia, jokainen sen alkioista on nollasta eroava. Tällöin voidaan päätyä ongelmaan, jossa tärkeysmatriisilla ei olekaan ominaisarvoa 1. Toisena ongelmana on ei-negatiivisen tärkeysmatriisin ominaisarvoa 1 vastaavat ominaisvektorit. Joissakin tapauksissa voi käydä siten, että ominaisarvon 1 geometrinen kertaluku ei olekaan yksi, jolloin kyseistä ominaisarvoa vastaakin useampi lineaarisesti riippumaton ominaisvektori. Tällöin päädytään tilanteeseen, jossa yksikäsitteistä arvovektoria ei ole ollenkaan tai löydetään useampi arvovektori. Esitellään seuraavaksi ratkaisu kyseiseen ongelmaan. [6, § 5.6.3]

Määritelmä 3.29. Jos tärkeyden määräävässä matriisissa on sarake, joka sisältää ainoastaan nollia, korvataan tämän sarakkeen alkiot luvulla $\frac{1}{n}$, missä n on nettisivujen lukumäärä.

Esimerkki 3.30. Tarkastellaan internettiä, joka sisältää kolme nettisivua. Kyseinen internetti on suunnatun verkon avulla kuvattuna seuraavanlainen:



Nyt tärkeysmatriisi on muotoa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan seuraavaksi yllä olevan matriisin ominaisarvot. Matriisin karakteristinen polynomi on muotoa:

$$\det(\lambda I - A) = \det(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \lambda \end{bmatrix}) = \cdots = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{4}.$$

Tällöin matriisin ominaisarvot ovat

$$-\lambda^3 + \frac{\lambda}{4} = 0 \iff \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2} \text{ tai } \lambda_3 = 0.$$

Voidaankin huomata, että luku 1 ei ole matriisin A ominaisarvo, jolloin arvovektoria ei ole olemassa.

Nyt Määritelmän 3.29 avulla edellisen esimerkin tärkeyden määräävä matriisi voidaan muokata sellaiseen muotoon, että se on stokastinen matriisi.

Esimerkki 3.31. Muokataan Esimerkin 3.30 tärkeysmatriisi Määritelmän 3.29 avulla. Tällöin siis

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ saadaan muotoon } A' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Määritellään seuraavaksi Google-matriisi, jonka avulla nettisivujen tärkeysjärjestys määritetään Googlen hakukoneessa.

Määritelmä 3.32 (Google-matriisi)**.** Olkoon A tärkeysmatriisi sellaiselle internetille, joka sisältää n-kappaletta nettisivuja. Olkoon lisäksi A' muokattu tärkeysmatriisi. Tällöin Google-matriisi on muotoa:

$$M = (1-p) \cdot A' + p \cdot B,$$

missä $p \in]0,1[$ on *vaimennuskerroin* ja B on neliömatriisi, joka on muotoa

$$B = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Yleisesti käytetty vaimennuskerroin on $p = 0.15$. Voidaan myös havaita, että Google-matriisi on aina positiivinen stokastinen matriisi. Kun määritetään jokaisen sivun tärkeys siten, että tärkeydet summautuvat yhdeksi, saadaan *Pagerank vektori*, joka on siis Google-matriisin tasapainotilavektori. Perronin lause takaa, että tällainen vektori on olemassa. Suurin ongelma on kuitenkin löytää kyseinen vektori oikeassa elämässä, koska nettisivuja on miljardeja. [6, § 5.6.3]

Esimerkki 3.33. Määritetään nyt Esimerkin 3.28 internetille arvovektori. Kyseisessä esimerkissä määritettiin viisi nettisivua sisältävän internetin tärkeysmatriisi, joka on muotoa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Muodostetaan nyt Google-matriisi kyseiselle internetille. Voidaan havaita, että matriisilla A ei ole yhtään saraketta, jossa esiintyy ainoastaan nollia, jolloin $A = A'$. Käytetään Google-matriisin muodostamiseen vaimennuskerrointa $p = 0.15$. Määritelmän 3.32 nojalla Google-matriisiksi saadaan

$$M = 0.85 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.15 \cdot \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0.03 & 0.313333 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 & 0.88 & 0.03 & 0.455 \\ 0.313333 & 0.313333 & 0.03 & 0.88 & 0.03 \\ 0.313333 & 0.313333 & 0.03 & 0.03 & 0.455 \\ 0.313333 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \end{bmatrix}.$$

Matriisin M ollessa stokastinen matriisi, on sillä Lemman 3.18 nojalla ominaisarvo $\lambda = 1$. Määritetään nyt tätä vastaava ominaisvektori eli Pagerank vektori w. Tällöin siis haluttu vektori toteuttaa yhtälön $Mw = 1 \cdot w$. Tämän yhtälön toteuttava vektori on

$$w \approx \begin{bmatrix} 1.88266 \\ 4.99793 \\ 4.831 \\ 2.84108 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pagerank vektorin 1-normin täytyy määritelmän nojalla olla 1 eli vektori w

täytyy jakaa sen alkioiden summalla. Pagerank vektoriksi saadaan siis

$$w' \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} w_i} \cdot \begin{bmatrix} 1.88266 \\ 4.99793 \\ 4.831 \\ 2.84108 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.121051 \\ 0.321355 \\ 0.310622 \\ 0.182675 \\ 0.0642976 \end{bmatrix}.$$

Tarkastelemalla Pagerank vektorin alkioita, voidaan kertoa nettisivujen tärkeysjärjestys. Tässä tapauksessa nettisivu b on tärkein ja sen tärkeyden suuruus on 0.321355. Vastaavasti voidaan havaita, että nettisivu e on vähiten tärkeä tärkeydellä 0.0642976.

Yleisesti ottaen vaimennuskerroin halutaan pitää pienenä. Jos vaimennuskertoimen arvo valitaan hyvin läheltä lukua 1, voidaan havaita, että tärkeysmatriisin vaikutus Google-matriisin katoaa, jolloin Google-matriisi lähestyy matriisia B, jossa jokainen nettisivu vastaanottaa ja antaa saman määrän tärkeyttä muille nettisivuille. Google-matriisissa vaimennuskerroin p tulkitaan todennäköisyydeksi, jolla internetissä oleva käyttäjä päätyy sattumanvaraiselle nettisivulle ([6, s. 335]). Alla olevaan taulukkoon on laskettu Esimerkin 3.28 nettisivulle arvovektoreita eri vaimennuskertoimen arvoilla.

p	Pagerank vektori
0.05	(0.117003, 0.337905, 0.321637, 0.176404, 0.047051)
0.10	(0.11889, 0.329633, 0.316203, 0.179607, 0.0556669)
0.15	(0.121051, 0.321355, 0.310622, 0.182675, 0.0642976)
0.20	(0.123491, 0.313089, 0.304896, 0.185594, 0.0729308)
0.25	(0.126214, 0.304855, 0.299029, 0.188349, 0.0815534)
0.50	(0.144148, 0.264887, 0.267762, 0.199179, 0.124025)
0.60	(0.153318, 0.249889, 0.254501, 0.201849, 0.140442)

Taulukko 2: Eri painokertoimilla saadut Pagerank vektorit.

Havaitaan, että nettisivujen tärkeysjärjestys muuttuu, kun $p \geq 0.5$. Kyseisessä esimerkissä nettisivusta c tulee tärkein ja nettisivusta b tulee toiseksi tärkein, kun $p \geq 0.5$. Lisäksi voidaan havaita, että nettisivujen tärkeyksien ero pienenee, mikä kertoo siitä, että termin $p \cdot B$ merkitsevyys Google-matriisissa kasvaa.

4 Perronin ja Frobeniuksen lause

Käsitellään tutkielman lopuksi Perronin lauseen yleisempää versiota, jonka Frobenius muotoili alkuperäisestä lauseesta. Huomattava ero näillä on se, että Perronin lause koskee positiivisia neliömatriiseja, kun taas Frobenius laajensi kyseisen tuloksen pätemään ei-negatiivisille sieventymättömille eli redusoitumattomille matriiseille. Tarkastellaan kuitenkin ennen Perronin ja Frobeniuksen lauseen yleisen version esittelyä ja sen erikoistapauksen todistusta hieman teoriaa liittyen ei-negatiivisiin neliömatriiseihin ja näiden matriisien yhteyttä verkkoteoriaan.

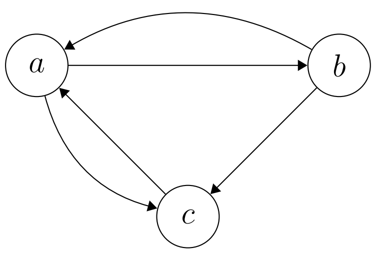
Määritelmä 4.1. Jos A on ei-negatiivinen neliömatriisi, jolle pätee kaikilla $1 \leq i, j \leq n$, että $l(i,j) \geq 1$ siten, että $(A^l)_{ij} > 0$, niin sanotaan, että matriisi A on *sieventymätön* tai *redusoitumaton*.

Yllä oleva matriisin redusoitumattomuuden määritelmä on havainnollinen, mutta varsin epäkäytännöllinen matriisin redusoitumattomuuden tarkastelemiseen laskennallisesti. Seuraava aputulos antaa laskennallisesti helpomman tavan tarkastella redusoitumattomuutta.

Lemma 4.2. *Olkoon $A \in \mathbb{K}_{n \times n}$ ei-negatiivinen. Tällöin matriisi A on redusoitumaton jos ja vain jos $(I + A)^{n-1} > 0$. Katso [3, Thm. 8.4.1].*

Luvussa 3.1 havaittiin, että verkkoteoria ja matriisiteoria liittyvät toisiinsa suunnatun verkon naapurimatriisin kautta. Seuraavassa esimerkissä tullaan näyttämään, että suunnatun verkon yhtenäisyys voidaan havaita tarkastelemalla suunnatun verkon naapurimatriisin redusoitumattomuutta.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan seuraavanlaista suunnattua verkkoa:



Voidaan havaita, että verkon jokaisen kärjen välillä on kävely, sillä löytyy kävelyt (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (c, a, b) ja (b, a, c). Määritelmän 3.10 nojalla suunnattu verkko on siis yhtenäinen. Kyseistä suunnattua verkkoa vastaava naapurimatriisi on muotoa

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi laskutoimistusta $(I+N)^{n-1}$. Lasketaan ensin $I+N$:

$$I + N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin saadaan

$$(I + N)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Havaitaan, että $(I + N)^2 > 0$ eli Määritelmän 4.2 nojalla matriisi N on redusoitumaton.

Esimerkissä havaitsimme, että suunnatun verkon naapurimatriisin ollessa redusoitumaton, on suunnattu verkko yhtenäinen. Vastaavasti pätee myös toisinpäin eli suunnattun verkkon olessa yhtenäinen, on sitä vastaava naapurimatriisi redusoitumaton.

Muotoillaan seuraavaksi luvun alussa mainittu Perronin ja Frobeniuksen lauseen yleinen versio, joka koskee ei-negatiivisia redusoitumattomia neliömatriiseja, niiden spektraalisäteitä ja näitä vastaaviä ominaisvektoreita.

Lause 4.4 (Perron ja Frobenius)**.** *Olkoon $A \geq 0$ redusoitumaton neliömatriisi. Tällöin matriisilla A on positiivinen ominaisarvo λ_{P}, jolle pätee*

(1) $\lambda_{\mathrm{P}} > |\lambda|$ kaikilla matriisin A ominaisarvoilla $\lambda_{\mathrm{P}} \neq \lambda$.

(2) Ominaisarvon λ_{P} algebrallinen kertaluku on 1.

(3) On olemassa yksikäsitteinen reaalinen ja positiivinen vektori $x = [x_i]$ siten, että $Ax = \lambda_{\mathrm{P}}(A)x$ ja $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

(4) On olemassa yksikäsitteinen reaalinen ja positiivinen vektori $y = [y_i]$ siten, että $y^T A = \lambda_{\mathrm{P}}(A)y^T$ ja $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 1$.

Todistus. Katso [3, Thm. 8.4.4]. □

Matriisin spektraalisädettä kutsutaan Perronin juureksi. Lisäksi ominaisarvoa λ_{P} vastaavaa ominaisvektoria x kutsutaan matriisin A (oikeanpuoleiseksi) Perronin vektoriksi ja vektoria y kutsutaan vasemmanpuoleiseksi Perronin vektoriksi. [3, § 8.4, s. 534]

Perronin ja Frobeniuksen lauseesta on olemassa myös toinen versio, joka on hieman heikompi versio yllä olevaan verraten, mutta hyvin hyödyllinen. Muotoillaan ja todistetaan kyseinen tulos vielä tämän luvun lopuksi.

Lause 4.5. *Olkoon A ei-negatiivinen neliömatriisi siten, että jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee $A^n > 0$. Tällöin $\lambda_{\mathrm{P}} := \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|\}$ on matriisin A yksinkertainen ominaisarvo, jota vastaava ominaisvektori on positiivinen. Lisäksi pätee $\lambda_{\mathrm{P}} > |\lambda_i|$, kaikilla $\lambda_i \neq \lambda_{\mathrm{P}}$.*

Todistus. Olkoon matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ itseisarvollisesti vähenevässä järjestyksessä ja kertaluku huomioiden. Tällöin positiivisen neliömatriisin A^n ominaisarvot itseisarvollisesti vähenevässä järjestyksessä ovat Lauseen 1.6 nojalla $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_m^n$.

Lauseen 2.6 nojalla λ_1^n ja sitä vastaava ominaisvektori Ψ ovat positiivisia, koska matriisi A^n on positiivinen matriisi. Lisäksi jokainen ominaisarvo $\lambda_i^n \neq \lambda_1^n$ kaikilla $i = 2, \ldots, m$ on itseisarvollisesti pienempi kuin kyseinen ominaisarvo λ_1^n, jolloin voidaan kirjoittaa $\lambda_1^n > |\lambda_2|^n \geq \cdots \geq |\lambda_m|^n$. Kun jokaisesta epäyhtälön jäsenestä otetaan n:s juuri, saadaan $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_m|$. Epäyhtälöstä voidaan havaita, että $|\lambda_1|$ on yksinkertainen ja $|\lambda_1| = \lambda_{\mathrm{P}}$.

Tarkastellaan seuraavaksi ominaisavaruutta $E(\lambda_1) = \{\psi : A\Psi = \lambda_1\psi\}$. Ominaisavaruuden $E(\lambda_1)$ täytyy sisältyä ominaisarvoa λ_1^n vastaavaan ominaisavaruuteen $E(\lambda_1^n) = \{\psi : A^n\psi = \lambda_1^n\psi\}$. Ominaisavaruus $E(\lambda_1^n)$ on Lemman 2.5 nojalla yksiulotteinen, jolloin saadaan, että $E(\lambda_1) = E(\lambda_1^n)$ ja $A\Psi = \lambda_1\Psi$. Tällöin $\lambda_1\Psi = A\Psi > 0$ ja $\lambda_1 > 0$. □

Kun tarkastellaan Perronin ja Frobeniuksen lauseen erikoistapausta, voidaan havaita, että kyseinen lause antaa tulokset koskien säännöllisiä stokastisia matriiseja. Tätä kautta saadaan Luvun 3.2 tulokset pätemään myös säännöllisille stokastisille matriiseille. Erityisesti Lause 3.22 ja Lause 3.24 yleistyvät säännöllisille stokastisille matriiseille Lauseen 4.5 seurauksena.

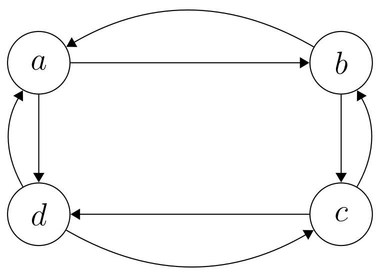
Esimerkki 4.6. Voidaan havaita, että Esimerkin 4.3 naapurimatriisilla N on Lauseessa 4.5 vaadittava ominaisuus, sillä

$$N^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4 = \cdots = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} > 0.$$

Tämä voidaan tulkita Lauseen 3.9 nojalla suunnatun verkon kävelyinä siten, että jokaisen naapurimatriisia N vastaavan suunnatun verkon kärjen välillä on 4-kävely.

Vaikka Lause 4.5 antaakin tulokset redusoitumattomille ei-negatiivisille matriiseille, on se yleistä Perronin ja Frobeniuksen lausetta heikompi versio, sillä kaikille ei-negatiivisille redusoitumattomille matriiseille $C \in \mathbb{R}_{n\times n}$ ei ole olemassa potenssia $n \in \mathbb{N}$ siten, että C^n on positiivinen matriisi. Seuraava esimerkki kuvaa juuri tällaista tilannetta.

Esimerkki 4.7. Tarkastellaan seuraavanlaista suunnattua verkkoa:



Nyt suunnattua verkkoa vastaava naapurimatriisi on muotoa

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tälle matriisille ei kuitenkaan päde $N^n > 0$ millään $n \in \mathbb{N}$. Kuitenkin esimerkiksi

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \cdots = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ja

$$N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voidaankin havaita, että suunnatun verkon kaikkien kärkien välillä on esimerkiksi joko 2-kävely tai 3-kävely Lauseen 3.9 nojalla. Tällöin siis kyseinen suunnattu verkko on yhtenäinen eli sitä vastaava naapurimatriisi on redusoitumaton.

5 Merkintöjä

Viitteet

[1] Hannah Cairns: *Perron's theorem in an hour.* Amer. Math. Monthly, 128(8):748– 752, 2021. https://doi.org/10.1080/00029890.2021.1944755.

[2] Gary Chartrand: *A first course in graph theory.* Dover Publications, Mineola, N.Y., 2012. https://archive.org/details/firstcourseingra0000char.

[3] Roger A. Horn ja Charles R. Johnson: *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.

[4] John G. Kemeny ja James L. Snell *Finite Markov chains.* Princeton, N.J., Van Nostrand 1960. https://archive.org/details/finitemarkovchai0000unse/page/68/mode/2up.

[5] Jörg Liesen ja Volker Mehrmann: *Linear algebra.* Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2015.

[6] Dan Margalit ja Joseph Rabinoff: *Interactive linear algebra.* Georgia Institute of Technology 2019. https://textbooks.math.gatech.edu/ila/index.html.

[7] Bruce P. Palka: *An introduction to complex function theory.* Springer-Verlag, New York, 1991. https://archive.org/details/introductiontoco0000palk/page/168/mode/2up.