Relativistinen Navier–Stokes-teoria

Kandidaatintutkielma, 14.6.2022

Tekijä:

Mika Piipponen

Ohjaaja:

Harri Niemi

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

Tiivistelmä

Piipponen, Mika
Relativistinen Navier–Stokes-teoria
Kandidaatintutkielma
Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2022, 45 sivua

Tässä tutkielmassa tutustun hydrodynaamiseen malliin relativistisen viskoosin fluidin kuvaamisessa ja selvitän minkälaiseen fysiikkaan teoria pohjautuu. Suurin käyttökohde relativistiselle hydrodynamiikalle on raskasionitörmäyksissä muodostuvan kvarkki-gluoniplasman tutkiminen. Varhaisen maailmankaikkeuden ja mahdollisesti neutronitähtien ytimien uskotaan koostuvan kvarkki-gluoniplasmasta. Matemaattisessa tarkastelussa rakennan ensin ideaalisen relativistisen hydrodynamiikan yhtälöt perustavanlaatuisten modernin fysiikan- sekä termodynamiikan teorioiden pohjalta ja näytän, että ideaalitapauksessa entropia säilyy. Seuraavaksi tarkastelen viskositeetin aiheuttamia fluidin hiukkas- ja energiadiffuusion vaikutuksia. Lopuksi johdan ideaalisen hydrodynamiikan pohjalta relativistisen Navier–Stokes-teorian liikeyhtälöt määrittelemällä nelinopeuden uudestaan ja vaatimalla entropian kasvun. Relativistiset Navier–Stokes-liikeyhtälöt kuvaavat relativistisen fluidin aikakehitystä, jossa termodynaamisten muuttujien gradientit aiheuttavat sekoitusvirtoja fluidin viskositeetin takia. Viskositeetin pienentyessä yhtälöt redusoituvat kohti ideaalisen hydrodynamiikan yhtälöitä.

Avainsanat: Relativistinen, Navier–Stokes, Hydrodynamiikka, Suhteellisuusteoria

Abstract

Piipponen, Mika
Relativistic Navier–Stokes Theory
Bachelor's thesis
Department of Physics, University of Jyväskylä, 2022, 45 pages.

In this thesis I review a hydrodynamic theory for modeling a relativistic viscous fluid. The main application for relativistic hydrodynamics is studying quark-gluon plasma created in heavy ion collisions. The early universe and possibly the cores of neutron stars are believed to consist of quark-gluon plasma. In the mathematical derivation I first construct the equations for ideal relativistic hydrodynamics using fundamental theories of modern physics and thermodynamics, and show that in the case of ideal fluid, entropy is conserved. Then I consider the effect of particle and energy diffusion induced by fluid viscosity. Finally, by re-defining the four-velocity and stipulating the growth of entropy, I derive the equations of motion of relativistic Navier–Stokes theory from the basis of the ideal hydrodynamics. The relativistic Navier–Stokes equations of motion describe the relativistic fluid's time development, where the gradients of the thermodynamic variables produce dissipative currents. As the viscosity decreases, the equations reduce towards the equations of ideal hydrodynamics.

Keywords: Relativistic, Navier–Stokes, Hydrodynamics, Relativity

Esipuhe

Olin tietoinen ei-relativistisista Navier–Stokes-yhtälöistä jo ennen tämän tutkielman aloittamista. Miettiessäni sopivaa aihetta kandidaatintutkielmalle, huomasin yliopiston kvanttiväridynamiikan tutkimuksen sivuilta tämän itseäni kiinnostavan aiheen. Se vaikutti mielenkiintoiselta ja halusin syventää ymmärrystäni virtausmekaniikasta, joka ei ollut minulle vielä kovin tuttua. Tutustuin aiheeseen monia lähteitä käyttäen. Suomenkielinen lähdetieto relativistisesta hydrodynamiikasta on rajattua ja siksi tarkoitukseni olikin tehdä suomenkielinen johdattelu aiheeseen. Haluan kiittää ohjaajaani yliopistotutkija Harri Niemeä aiheeseen tutustuttamisesta, useista tapaamisista sekä pitkäjänteisestä ohjauksesta.

Kouvolassa 14.6.2022

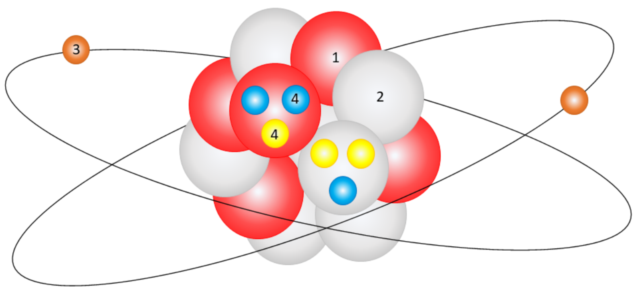
Mika Piipponen

Sisällys

1 Johdanto

Navier–Stokes-yhtälöt ovat virtausmekaniikan kenties tunnetuimpia tuotoksia. Ne ovat ranskalaisen insinöörin C.-L. Navierin ja irlantilais-enlantilaisen fyysikon ja matemaatikon G. G. Stokesin 1800-luvun puolivälissä kehittämä viskoosia fluidia kuvaava teoria. Neuvostoliittolaisfyysikot L. D. Landau ja E. M. Lifshitz johtivat vuonna 1959 relativistiselle fluidille vastaavan teorian, jota kutsutaan relativistiseksi Navier–Stokes-teoriaksi. Kertaan ensin, miksi relativistisesta hydrodynamiikasta ollaan yleensä kiinnostuneita.

Normaali materia koostuu eri alkuaineiden atomeista (Kuvio 1), jotka sisältävät protoneista ja neutroneista koostuvan ytimen, jota ympäröivät elektronit [1]. Kaikki edellä mainitut hiukkaset ovat spin-$\frac{1}{2}$-hiukkasia, eli fermioneja. Elektroni on leptoni ("kevyt"), protoni ja neutroni baryoneja ("raskas") [2]. Baryonit rakentuvat kolmesta kvarkista, joita vahva vuorovaikutus pitää yhdessä. Vahvan vuorovaikutuksen välittäjähiukkasia ovat gluonit, joten baryoneiden nähdään koostuvan kvarkeista ja gluoneista.

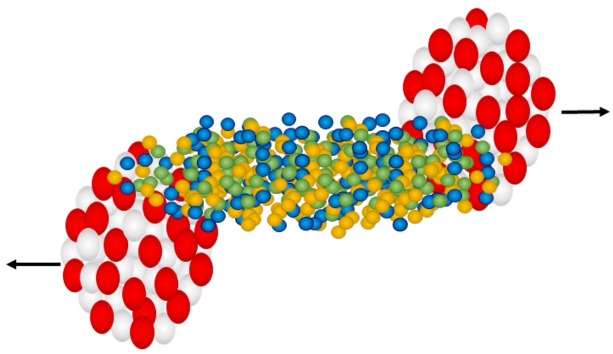


Kuvio 1. Atomit koostuvat protoneista (1), neutroneista (2) ja elektroneista (3). Protoni ja neutroni ovat baryoneja, jotka rakentuvat kolmesta kvarkista (4). (Kuva: Mika Piipponen, 2022)

Yleisesti hiukkasia, jotka koostuvat kvarkeista kutsutaan hadroneiksi. Kvarkit ja elektronit ovat alkeishiukkasia, joilla ei tunneta olevan pienempää rakennetta.

Hiukkaskiihdyttimissä tehtävissä raskasionitörmäyksissä kaksi vastakkaiseen suuntaan lähes valonnopeudella kulkevaa ydintä törmäytetään yhteen. Raskaiden alkuaineiden atomeja, kuten kulta tai lyijy, ionisoidaan poistamalla niiltä elektronit, joka mahdollistaa niiden kiihdyttämisen sähkökentän avulla. Nämä suuresti varautuneet ytimet saadaan kiihdytettyä lähelle valonnopeutta, jolloin niiden sanotaan olevan relativistisia (ja todella lähellä valonnopeutta ultrarelativistisia). Relativistisen hiukkasen kokonaisenergiasta huomattava osa on sen liike-energiassa, eikä massassa.

Relativistisilla nopeuksilla kulkevat ytimet ovat Lorentz-kontraktoituneita, jolloin ne muistuttavat protoneista ja neutroneista koostuvia pannukakkuja. Efektiivisellä törmäysalueella ytimien baryonit käytännössä tunkeutuvat toisiinsa, jolloin energiatiheys kasvaa niin suureksi, että paine ja lämpötila riittävät voittamaan baryoneita koossa pitävän vahvan vuorovaikutuksen (Kuvio 2). Tällöin hetken ajan kvarkit ja gluonit ovat vapaita liikkumaan toistensa suhteen ytimien kokoluokassa. Tätä aineen olomuotoa kutsutaan kvarkki-gluoniplasmaksi (QGP, quark-gluon plasma). Törmäyskohdassa siis syntyy pieni pisara QGP:a. Törmäyksen jälkeen ytimien muu osa jatkaa matkaansa törmäyskohdasta liikeradallaan, jättäen väliinsä laajenevan QGP pilven. Lopulta, kun plasma jäähtyy tarpeeksi, kvarkit yhdistyvät takaisin hadroneiksi muodostaen hadronikaasua törmäyskohdan ympärille [3]. Arvoilta yli 200 MeV:n lämpötilassa tai energiatiheyden ylittäessä 1 GeV/fm^3 aine voi esiintyä ainoastaan QGP:na [4].



Kuvio 2. Ydinten efektiivisellä törmäysalueella energiatiheys on kyllin suuri hajottamaan ytimen vahvan vuorovaikutuksen koossa pitämät protonit ja neutronit kvarkki-gluoniplasmaksi. (Kuva: Mika Piipponen, 2022)

Fysiikassa ollaan kiinnostuneita raskasionitörmäyksissä syntyvistä hiukkasista ja QGP:n ominaisuuksista. Muun muassa varhaisen maailmankaikkeuden uskotaan olleen niin kuuma ja tiheä, että kaikki aine on esiintynyt QGP:na. Myös neutronitähtien ytimissä painovoima saattaa voittaa neutronikaasun degeneraatiopaineen, jolloin se puristuu kyllin tiheäksi QGP:n muodostumiseen [3].

QGP:n aikakehitystä mallintamaan tarvitaan sopiva teoria. Hydrodynamiikan käyttäminen tässä tilanteessa on hyväksyttävää, sillä törmäyksessä vapautuvien alkeishiukkasten määrä on sen verran suuri, että QGP:a voidaan mallintaa fluidina yksittäisten hiukkasten sijaan. Koska QGP:a esiintyy vain äärimmäisissä olosuhteissa, tulee suhteellisuusteorian vaikutukset ottaa huomioon.

Tässä tutkielmassa johdan ensin teoreettisen mallin ideaaliselle relativistiselle fluidille, laajennan tämän kuvaamaan myös viskoosia fluidia Landaun ja Lifshitzin [5] esittämän mallin mukaan ja näytän eksplisiittisesti kuinka liikeyhtälöihin päädytään. Tutkielman rakenne perustuu osin G. S. Denicolin [6] väitöskirjan esitykseen.

2 Teoreettinen tausta

Tässä luvussa kokoan relativistisen hydrodynamiikan käsittelyyn tarvittavia keskeisiä teoreettisia lähtökohtia ja kertaan oleelliset laskusäännöt, joita hyödynnän myöhemmissä luvuissa. Rakennan relativistisen hydrodynamiikan kvanttimekaniikan, termodynamiikan ja suhteellisuusteorian pohjalta.

2.1 Kvanttimekaaniset ja statistiset lähtökohdat

Määritellään ensin mielivaltaisen, laatikkomaisen systeemin hiukkasmäärä. Oletetaan, että hiukkaset eivät vuorovaikuta toistensa kanssa merkittävästi, jolloin hiukkasia voidaan tarkastella erikseen kvanttimekaanisesti 3-ulotteisessa laatikkopotentiaalissa. Valitaan laatikon sijainniksi $0 < r_i < L$. Hiukkasen paikan todennäköisyyttä kuvaava aaltofunktio on laatikossa yleistä muotoa [7]

$$\Psi(\vec{r}) = \prod_{i=1}^{3} \Psi_i(r_i) = \prod_{i=1}^{3} (A \sin k_i r_i + B \cos k_i r_i) \ , \tag{2.1}$$

jossa normituskertoimet $A, B \in \mathbb{R}$, aaltoluku $k_i = \sqrt{2mE_i/\hbar^2}$ ja tässä $\hbar$ redusoitu Planckin vakio. Laatikon reunoilla aaltofunktion jokaisen komponentin arvojen on oltava yhtäsuuret, $\Psi_i(0) = \Psi_i(L)$, josta seuraa

$$B = A \sin k_i L + B \cos k_i L \ . \tag{2.2}$$

Oleellisesti reunaehdoista saadaan yhteys aaltoluvun k_i ja kvanttitilan n_i välille

$$n_i = \frac{L}{2\pi} k_i \ . \tag{2.3}$$

Toisaalta koska liike-energia voidaan ilmaista liikemäärän avulla $E = p^2/2m$, aaltoluvulla ja liikemäärällä on yhteys

$$k_i = \frac{p_i}{\hbar} \ , \tag{2.4}$$

jonka avulla kaavasta (2.3) saadaan

$$n_i = \frac{L}{2\pi\hbar} p_i \ . \tag{2.5}$$

Liikemäärällä $p_i \in [p_i, p_i + dp_i]$ olevien tilojen lukumäärä on siis

$$dn_i = \frac{L}{2\pi\hbar} dp_i \ . \tag{2.6}$$

Statistisen fysiikan näkökulmasta systeemin hiukkasluvun odotusarvo on summa yli mikrotilojen n_i

$$\langle N \rangle = \sum_i \langle n_i \rangle \ . \tag{2.7}$$

Kolmiulotteisessa laatikossa summaa voidaan approksimoida integraalina

$$\langle N \rangle = \int d^3n \ f(x,p) = V \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f(x,p) \ , \tag{2.8}$$

jossa $f(x,p)$ on paikassa $x \in [x, x+dx]$ liikemäärällä $p \in [p, p+dp]$ olevan hiukkasen todennäköisyystiheys ja $V = L^3$ potentiaalikuopan muodostaman laatikon tilavuus.

2.2 Termodynamiikka

Termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö on energian säilyminen, jolloin termodynaamisten tilamuuttujien välillä on oltava yhteys

$$dU = TdS - PdV + \mu_c dN \ , \tag{2.9}$$

jossa U on systeemin sisäenergia, T lämpötila, S entropia, P paine ja μ_c hiukkasten kemiallinen potentiaali.

Termodynamiikan toinen pääsääntö sanoo, että systeemin entropia voi vain kasvaa tai pysyä vakiona. Entropia määritellään tilamuuttujien ekstensiivisenä ja additiivisena funktiona [6]

$$\lambda S = S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) \ , \tag{2.10}$$

jolloin entropia voidaan esittää muodossa

$$S = \frac{\partial(\lambda S)}{\partial \lambda} = \frac{\partial(\lambda S)}{\partial(\lambda U)}U + \frac{\partial(\lambda S)}{\partial(\lambda V)}V + \frac{\partial(\lambda S)}{\partial(\lambda N)}N \ . \tag{2.11}$$

Kaavasta (2.9) saadaan osittaisderivaatat

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \ , \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T} \ , \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\mu_c}{T} \ . \tag{2.14}$$

Nyt arvolla $\lambda = 1$ kaavojen (2.11)–(2.14) avulla saadaan Eulerin relaatio

$$U = TS - PV + \mu_c N \ . \tag{2.15}$$

Tämä yhdessä termodynamiikan ensimmäisen lain kanssa johtaa Gibbs–Duhem-relaatioon

$$VdP = SdT + Nd\mu_c \ . \tag{2.16}$$

Jakamalla kaavat (2.9), (2.15) ja (2.16) puolittain tilavuudella, saadaan termodynaamiset yhtälöt tiheyssuureiden avulla

$$\varepsilon + P = Ts + \mu_c n \ , \tag{2.17}$$

$$ds = \frac{1}{T}d\varepsilon - \frac{\mu_c}{T}dn \ , \tag{2.18}$$

$$dP = sdT + nd\mu_c \ , \tag{2.19}$$

joissa ε, s ja n ovat energia-, entropia- ja hiukkastiheydet.

2.3 Erityinen suhteellisuusteoria

A. Einstein [8] julkaisi vuonna 1905 erityisen suhteellisuusteorian. Edellisellä vuosisadalla J. C. Maxwell [9, 10] oli todistanut valon olevan sähkömagneettista säteilyä ja sähkömagneettisen säteilyn etenevän aina valonnopeudella. Einsteinin teorian mukaan eri havaitsijoiden käsitys ajasta ja samanaikaisuudesta on muututtava koska fysiikan lakien, oleellisesti valonnopeuden, on pysyttävä samana kaikille havaitsijoille.

Näin ollen relativistinen hydrodynamiikka rakennetaan Minkowskin aika-avaruuteen, jossa sijainti ilmaistaan suhteessa aikaan t kolmen avaruudellisen ulottuvuuden x, y ja z lisäksi. Vektorisuureet ovat aika-avaruudessa nelivektoreita, joille käytetään notaatiota $\mu = 0, 1, 2, 3$ ilmoittamaan niiden komponentit. Minkowskin avaruudessa paikka on kontravariantti nelivektori (indeksi ylhäällä)

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) \ , \tag{2.20}$$

jossa c on valonnopeus.

Metrinen tensori $g^{\mu\nu}$ kuvaa avaruuden metriikkaa. Tasaisessa Minkowskin avaruudessa $g^{\mu\nu}$ on symmetrinen toisen kertaluvun tensori, joka kertoo miten etäisyydet kyseisessä avaruudessa tulee mitata. Tässä työssä metriselle tensorille käytetään konventiota

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{2.21}$$

Operoimalla metrisellä tensorilla pystytään muuttamaan, nostamaan tai laskemaan tensorisuureiden indeksejä, esimerkiksi

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \ , \tag{2.22}$$

jossa a_ν on kovariantti nelivektori (indeksi alhaalla). Metrisellä tensorilla voidaan siis muuttaa kovariantteja ja kontravariantteja vektoreita keskenään.

Nelivektoreiden pistetulossa käytetään Einsteinin summausnotaatiota ja se määritellään

$$a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu \ , \tag{2.23}$$

jolloin suoritetaan summaus indeksien μ yli. Tässä tapauksessa kahden tapahtuman välinen etäisyys, eli intervalli ds^2, aika-avaruudessa on

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d(ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ . \tag{2.24}$$

Intervallin määritelmä johtaa itseisajan τ käsitteeseen, joka on kahden tapahtuman välinen aikaero lepokoordinaatistossa (LRF, local rest frame). Intervalli voidaan kirjoittaa itseisajan avulla $ds^2 = d(c\tau)^2$ ja siten kaavan (2.24) avulla huomataan itseisajan ja suhteellisten koordinaatistojen aikojen välinen yhteys

$$dt = \gamma d\tau \ , \tag{2.25}$$

jossa määriteltiin Lorentzin gamma-kerroin

$$\gamma = \left(\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \right)^{-1} \ . \tag{2.26}$$

Tässä $\vec{v}$ on suhteellinen kolminopeus verrattuna LRF:n. Hiukkasen nelinopeus määritellään paikan derivaattana itseisajan suhteen

$$u_p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(ct, \vec{r}) = \gamma(c, \vec{v}) \ . \tag{2.27}$$

Yksittäinen tapahtuma voidaan esittää useassa eri koordinaatistossa. Mielivaltaisesta koordinaatistosta toiseen voidaan siirtyä niin sanotuilla Lorentz-muunnoksilla

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \ , \tag{2.28}$$

$$\vec{r'} = \gamma(\vec{r} - \vec{v}t) = \vec{r} + (\gamma - 1)\vec{r}_{\parallel} - \gamma \vec{v} t \ , \tag{2.29}$$

joissa jaettiin paikkavektori kolminopeuteen nähden kohtisuoraan- ja yhdensuuntaiseen komponenttiin, $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$. Lorentz-muunnokset voidaan esittää matriisimuodossa

$$\Lambda^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_x/c & -\gamma v_y/c & -\gamma v_z/c \\ -\gamma v_x/c & 1 + (\gamma - 1)v_x^2/|\vec{v}|^2 & (\gamma - 1)v_y v_x/|\vec{v}|^2 & (\gamma - 1)v_z v_x/|\vec{v}|^2 \\ -\gamma v_y/c & (\gamma - 1)v_x v_y/|\vec{v}|^2 & 1 + (\gamma - 1)v_y^2/|\vec{v}|^2 & (\gamma - 1)v_z v_y/|\vec{v}|^2 \\ -\gamma v_z/c & (\gamma - 1)v_x v_z/|\vec{v}|^2 & (\gamma - 1)v_y v_z/|\vec{v}|^2 & 1 + (\gamma - 1)v_z^2/|\vec{v}|^2 \end{bmatrix} \ , \tag{2.30}$$

joka tunnetaan Lorentz-puskuna. Suhteellisuusteoriassa käytetään tensorisuureita koska niiden merkitys ja yhtäsuuruudet säilyvät Lorentz-muunnoksissa. Lorentz-puskun avulla tensorisuureille pätee

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu} \ , \tag{2.31}$$

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} A^{\alpha\beta} \ . \tag{2.32}$$

Myös energian ja massan relaatio on kuuluisa suhteellisuusteorian tulos

$$E = \gamma m c^2 \ , \tag{2.33}$$

joka saadaan laajennettua energia-liikemäärä-relaatioksi [11]

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \ . \tag{2.34}$$

Määritellään hiukkasen neliliikemäärä

$$p_p^{\mu} = m u_p^{\mu} = \gamma \left(\frac{E}{c}, m\vec{v} \right) \ . \tag{2.35}$$

Merkitään neligradienttia

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \ . \tag{2.36}$$

Nyt kaikki oleelliset suureet on määritelty ja tästä eteenpäin siirrytään käyttämään luonnollisia yksiköitä asettamalla

$$\hbar = k_B = c = 1 \ , \tag{2.37}$$

jossa k_B on Boltzmannin vakio. Luonnollisissa yksiköissä nelinopeus normittuu seuraavasti

$$u_{\mu} u^{\mu} = 1 \ . \tag{2.38}$$

Esitellään vielä projektio-operaattori $\Delta^{\mu\nu}$, joka palauttaa halutun vektorin u^{μ}:ta vastaan kohtisuoran komponentin

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu} \ , \tag{2.39}$$

jonka ominaisuuksia ovat

$$u_{\mu}\Delta^{\mu\nu} = u_{\nu}\Delta^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.40}$$

$$\Delta^{\mu}_{\alpha}\Delta^{\alpha\nu} = \Delta^{\mu\nu} \ , \tag{2.41}$$

$$\Delta^{\mu}_{\mu} = (g^{\mu}_{\mu} - u_{\mu}u^{\mu}) = 3 \ . \tag{2.42}$$

3 Ideaalinen relativistinen hydrodynamiikka

Tässä luvussa esittelen keskeiset hydrodynaamiset suureet ja johdan ideaalista fluidia kuvaavat liikeyhtälöt. Ideaalisella fluidilla tarkoitetaan sitä, ettei fluidilla ole viskositeettia. Hydrodynamiikassa fluidin liikettä kuvataan tarkastelemalla pientä tilavuutta aika-avaruudessa, jonka sisällä sopivien makroskoopisten suureiden muutoksia monitoroidaan. Sähköisesti neutraalille fluidille nämä suureet ovat energia-, liikemäärä- ja hiukkastiheydet sekä nelinopeus. Määrittelen seuraavaksi relativistisen hydrodynamiikan päämuuttujat eli hiukkasnelivirran N^μ ja energia-liikemäärätensorin $T^{\mu\nu}$. Esittelen myös oleelliset säilymislait, joiden avulla johdan ideaalisen relativistisen fluidin liikeyhtälöt ja näytän, ettei ideaalifluidin entropia kasva.

3.1 Hiukkasnelivirta

Kaavan (2.8) nojalla hiukkastiheys tarkastelutilavuudessa on

$$N^0 = \frac{\langle N \rangle}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(x,p) \ . \tag{3.1}$$

Hiukkasvuo suuntaan i riippuu hiukkastiheydestä ja kolminopeudesta $\vec{v} = p^i/p^0$

$$N^i = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^i f(x,p) \ . \tag{3.2}$$

Kaavoista (3.1) ja (3.2) huomataan, että hiukkastiheys ja hiukkasvuo voidaan ilmaista yleisessä muodossa

$$N^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\mu f(x,p) \ . \tag{3.3}$$

Tätä tensoria kutsutaan hiukkasnelivirraksi.

Ideaalifluidin tapauksessa oletus lokaalista termodynaamisesta tasapainosta jokaisessa fluidielementissä yksinkertaistaa todennäköisyystiheyden $f(x,p)$ määritelmää, jolloin se voidaan ilmaista Bose–Einstein (bosonit) tai Fermi–Dirac-jakauman (fermionit) avulla muodossa

$$f(p) = \frac{1}{e^{(E_{LRF}-\mu_c)/T} \pm 1} = \frac{1}{e^{(p_\mu u^\mu - \mu_c)/T} \pm 1} \ , \tag{3.4}$$

missä $E_{LRF} = p_\mu u^\mu$ on hiukkasen energia fluidin lepokoordinaatistossa. Hiukkasnelivirta riippuu vain skalaarisuureista sekä p^μ:stä ja u^μ:stä. Koska integrointi suoritetaan yli liikemäärien, hiukkasnelivirta ei voi riippua muista tensorisuureista kuin u^μ. Hiukkasnelivirta on siis ensimmäisen kertaluvun tensori eli nelivektori, ja muotoa

$$N^\mu = C_1 u^\mu \ . \tag{3.5}$$

Vakio C_1 määritellään

$$C_1 = u_\mu N^\mu \ . \tag{3.6}$$

Toisaalta tiedetään, että fluidielementin lepokoordinaatistossa sen nelinopeus $u^\mu_{LRF} = (1,0,0,0)$, joka määrää vakiolle C_1 arvon

$$C_1 = N^0_{LRF} \equiv n \ . \tag{3.7}$$

C_1 on siis väistämättä hiukkastiheys n lepokoordinaatistossa ja hiukkasnelivirta muotoa

$$N^\mu = n u^\mu \ . \tag{3.8}$$

3.2 Energia-liikemäärätensori

Määritellään energiatiheys

$$T^{00} = \frac{\langle E \rangle}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^0 f(x,p) \ . \tag{3.9}$$

Liikemäärän tiheys ja energiavuo suuntaan i

$$T^{0i} = T^{i0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^i f(x,p) \ , \tag{3.10}$$

ja i-suuntaisen liikemäärän vuo suuntaan j

$$T^{ij} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^i p^j f(x,p) \ . \tag{3.11}$$

Energian ja liikemäärän suureet voidaan esittää yleisessä tensorimuodossa, joka tunnetaan energia-liikemäärätensorina

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\mu p^\nu f(x,p) \ . \tag{3.12}$$

Myös $T^{\mu\nu}$:n kohdalla $f(x,p)$ voidaan termodynaamisessa tasapainossa korvata Bose–Einstein tai Fermi–Dirac-jakaumalla. Tällöin, koska $T^{\mu\nu}$ riippuu vain skalaarisuureista sekä p^μ:stä, p^ν:stä, u^μ:stä ja integrointi tapahtuu yli liikemäärien, huomataan, että se on toisen kertaluvun tensori eikä voi riippua kuin nelinopeudesta u^μ ja metrisestä tensorista $g^{\mu\nu}$. Kirjoitetaan $T^{\mu\nu}$ sen tensorisuureiden lineaarikombinaationa

$$T^{\mu\nu} = C_2 u^\mu u^\nu + C_3 g^{\mu\nu} \ , \tag{3.13}$$

jossa C_2 ja C_3 ovat skalaarisuureita. Projektio operaattorin $\Delta^{\mu\nu}$ avulla $T^{\mu\nu}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$T^{\mu\nu} = (C_2 + C_3) u^\mu u^\nu + C_3 \Delta^{\mu\nu} \ . \tag{3.14}$$

Suureet C_2 ja C_3 määritellään seuraavasti

$$C_2 + C_3 = u_\mu u_\nu T^{\mu\nu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} u_\mu u_\nu p^\mu p^\nu f(p) \ , \tag{3.15}$$

$$C_3 = \frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} (g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu) p^\mu p^\nu f(p) \ . \tag{3.16}$$

Tarkastellaan jälleen fluidielementtiä lepokoordinaatistossa, joten suure $(C_2 + C_3)$ on väistämättä energiatiheys ε lepokoordinaatistossa.

$$C_2 + C_3 = T^{00}_{LRF} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{LRF} f(p) \equiv \varepsilon \ . \tag{3.17}$$

Energian ja massan relaation (2.34) avulla saadaan ratkaistua C_3, joka nähdään kineettisen teorian nojalla olevan hiukkasten muodostama paine tarkastelutilavuudessa.

$$C_3 = \frac{1}{3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} (m^2 - E^2_{LRF}) f(p) = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3E_{LRF}} f(p) = -P \ . \tag{3.18}$$

Lopulta energia-liikemäärätensori on saatu muotoon

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu - P\Delta^{\mu\nu} = (\varepsilon + P) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} \ . \tag{3.19}$$

3.3 Säilymislait

Jotta teorialla olisi mitään fysikaalista merkitystä, sen täytyy toteuttaa yleiset säilymislait.

Tarkastellaan pientä mielivaltaista aika-avaruuden tilavuutta V_4, jonka sulkee 3-ulotteinen pinta $\mathcal{S}$. Pienen pinnan $d\mathcal{S}$ läpi virtaava hiukkasmäärä on

$$\mathbf{n}_\mu N^\mu d\mathcal{S} \ , \tag{3.20}$$

jossa $\mathbf{n}^\mu$ on pintaelementistä ulospäin osoittava yksikkönormaalivektori. Samaten V_4:n läpi virtaava nettoenergia ja -liikemäärä on

$$\mathbf{n}_\mu T^{\mu\nu} d\mathcal{S} \ . \tag{3.21}$$

Nettohiukkasluvun on säilyttävä. Sama pätee energialle ja liikemäärälle, sillä niitä ei voi muodostua tyhjästä eikä kadota (Kuvio 3). Matemaattisesti tämä merkitsee sitä, että hiukkasvuon ja energia-liikemäärävuon yli koko tilavuuden V_4 sulkeman pinnan $\mathcal{S}$ on oltava nolla

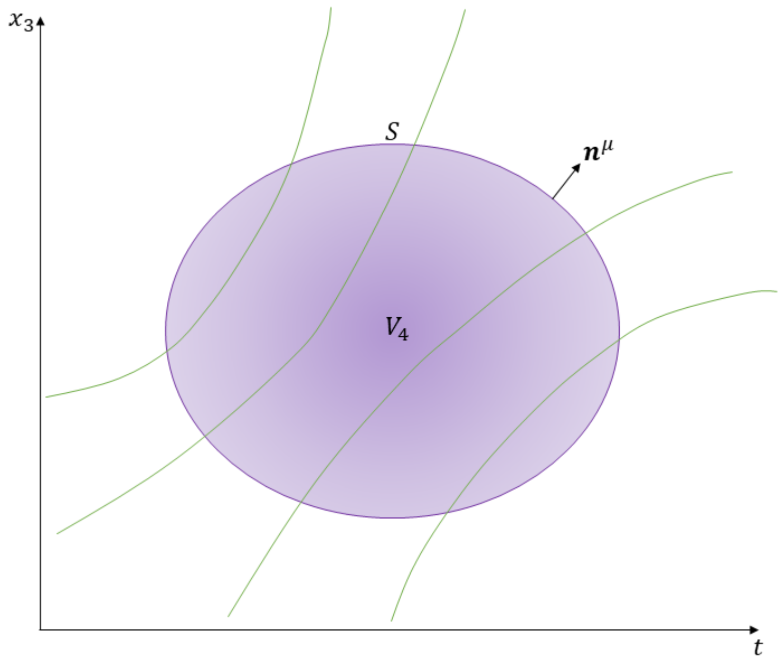
$$\int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \ \mathbf{n}_\mu N^\mu = 0 \ , \tag{3.22}$$

$$\int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \ \mathbf{n}_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{3.23}$$

Gaussin lain mukaan vektorikentän pintaintegraali suljetun pinnan yli voidaan kirjoittaa vektorikentän divergenssin tilavuusintegraalina pinnan sulkeman tilavuuden yli [12], jolloin kaavat (3.22) ja (3.23) saadaan muotoon

$$\int_{V_4} d^4x \ \partial_\mu N^\mu = 0 \ , \tag{3.24}$$

$$\int_{V_4} d^4x \ \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{3.25}$$



Kuvio 3. Tilavuuden V_4 sulkeman pinnan $\mathcal{S}$ läpi virtaavan nettoenergian, -liikemäärän ja -hiukkasluvun on säilyttävä. Fluidielementin lävistävien hiukkasten maailmanviivoja on hahmoteltu vihreällä. (Kuva: Mika Piipponen, 2022)

Säilymislakien on oltava voimassa missä tahansa aika-avaruuden pisteessä, joten hiukkasnelivirran ja energia-liikemäärätensorin divergenssien on oltava nolla. Hiukkasluvun-, energian- ja liikemäärän säilymislait voidaan kirjoittaa siis muodossa

$$\partial_\mu N^\mu = 0 \,, \tag{3.26}$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \,. \tag{3.27}$$

Nyt tiedetään mitä muotoa hiukkasnelivirta ja energia-liikemäärätensori ovat, joten seuraavaksi ratkaistaan saadut yhtälöt.

3.4 Ideaalisen fluidin liikeyhtälöt

Koska N^μ on nelivektori ja $T^{\mu\nu}$ toisen kertaluvun tensori, säilymislaeista saadaan yhteensä viisi (5) yhtälöä. Hiukkasnelivirran säilymislaista (3.26) saadaan (ks. liite A.1)

$$\partial_\mu N^\mu = \frac{dn}{d\tau} + n\partial_\mu u^\mu = 0 \ . \tag{3.28}$$

Tekemällä oletus, että hiukkasmäärä fluidielementissä pysyy vakiona, huomataan että

$$\partial_\mu u^\mu = \frac{1}{V}\frac{dV}{d\tau} \equiv \theta \ , \tag{3.29}$$

joka määritellään fluidielementin tilavuuden laajenemisnopeutena. θ:n avulla kaava (3.28) voidaan kirjoittaa

$$\partial_\mu N^\mu = \frac{dn}{d\tau} + n\theta = 0 \ . \tag{3.30}$$

Tämä voidaan tulkita niin, että hiukkastiheyden muutokset ovat verrannollisia fluidielementin tilavuuden muutoksiin.

Energia-liikemäärätensorin säilymislaeista (3.27) saadaan

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu((\varepsilon + P)u^\mu u^\nu) - \partial_\mu(Pg^{\mu\nu}) = 0 \ . \tag{3.31}$$

Voimme tarkastella nelinopeuden u^μ suuntaista ja sitä vastaan kohtisuoraa komponenttia. Nelinopeuden suuntainen komponentti saadaan ottamalla kaavasta (3.31) sen kanssa pistetulo ja kohtisuora komponentti saadaan operoimalla tähän projektio-operaattorilla $\Delta^{\mu\nu}$ [5, 6].

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{d\varepsilon}{d\tau} + (\varepsilon + P)\theta = 0 \ . \tag{3.32}$$

$$\Delta^\mu_\beta \partial_\alpha T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + P)\frac{du^\mu}{d\tau} - \nabla^\mu P = 0 \ . \tag{3.33}$$

Kaavassa (3.33) määriteltiin 3-gradientti $\nabla^\mu = \Delta^\mu_\beta \partial^\beta = \partial^\mu - u^\mu \frac{d}{d\tau}$. Kaavat (3.30), (3.32) ja (3.33) yhdessä muodostavat ideaalisen relativistisen hydrodynamiikan liikeyhtälöt, jotka ovat käytännössä Eulerin yhtälöiden relativistinen vastine [5]. Säilymislakeja saatiin siis viisi (5) kappaletta, mutta liikeyhtälöissä on yhteensä kuusi (6) riippumatonta muuttujaa: u^μ, n, ε ja P. Koska paine saadaan kuitenkin termodynaamisessa tasapainossa ilmaistua muiden termodynaamisten suureiden avulla,

$P = P(n, \varepsilon)$, ideaalisen relativistisen hydrodynamiikan liikeyhtälöt ovat tällaisenaan suljettu [6]. Ideaalihydrodynamiikassa hiukkasia ja energiaa siirtyy vain konvektiolla eli kulkeutumalla virtauksen mukana, joka aiheutuu paineen gradienteista fluidissa.

3.5 Entropianelivirta

Termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö (2.9) voidaan kirjoittaa hiukkasnelivirran ja energia-liikemäärätensorin avulla vektorimuotoon [5, 6, 13, 14], jolloin voidaan ratkaista entropianelivirta S^μ

$$dS^\mu = \frac{1}{T} u_\nu dT^{\mu\nu} - \frac{\mu_c}{T} dN^\mu \; . \tag{3.34}$$

Perinteinen relaatio (2.18) saadaan palautettua kontraktoimalla tämä nelinopeuden u_μ kanssa. Termodynaamisten relaatioiden vektorimuodot eivät sisällä enempää informaatiota kuin normaalit relaatiot, sillä kontraktoiminen projektio-operaattorin $\Delta^{\mu\nu}$ kanssa palauttaa triviaalit relaatiot $0 = 0$. Entropianelivirralle saadaan kaavasta (3.34) yhtälö

$$\partial_\mu S^\mu = \frac{1}{T} u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} - \frac{\mu_c}{T} \partial_\mu N^\mu \; . \tag{3.35}$$

Säilymislakien (3.26) ja (3.27) avulla tiedetään, että hiukkasnelivirran ja energia-liikemäärätensorin nelidivergenssit ovat nollia, josta seuraa suoraan myös entropian säilyminen ideaalifluidissa. Koska entropia ei kasva, sille saadaan yhtälö

$$\partial_\mu S^\mu = \frac{ds}{d\tau} + s\theta = 0 \; . \tag{3.36}$$

4 Dissipatiivinen relativistinen hydrodynamiikka

Edellinen ideaalifluidin tapaus on yksinkertaistettu tilanne todellisuudesta. Oikeasti yksikään fluidi ei käyttäydy täysin kuten ideaalifluidi. Seuraavaksi tarkastelen tapausta, jossa fluidi on viskoosia ja siinä tapahtuu lämmön johtumista ja sekoittumista. Tämän johdosta hiukkasnelivirta ja energia-liikemäärätensori ovat erilaiset kuin ideaalifluidille luvussa 3. Suljetun yhtälöryhmän saamiseksi esittelen tarvittavat sidosehdot: tasapainotilan valinta, nelinopeuden määritelmä ja entropian kasvu. Niiden avulla näytän, miten päädytään relativistiseen Navier–Stokes-teoriaan, jossa termodynaamiset suureet ja viskositeetti on yhdistetty liikeyhtälöihin.

4.1 Hiukkasnelivirta ja energia-liikemäärätensori

Viskoosin fluidin tapauksessa oletus termodynaamisesta tasapainosta ei ole enää pätevä. Vaikka enää fluidi ei ole termodynaamisessa tasapainossa, halutaan kuitenkin, että kappaleessa 2.2 johdetut termodynaamiset relaatiot ovat voimassa, kuten oltaisiin yhä termodynaamisessa tasapainossa. Määritellään fluidille fiktiivinen tasapainotila (merkitään alaindeksillä 0), jossa hiukkastiheys on n_0 ja energiatiheys ε_0. Entropiatiheys voidaan määritellä tässä tapauksessa

$$s_0 = s_0(\varepsilon_0, n_0) \tag{4.1}$$

ja paine kaavan (2.17) mukaan

$$P_0 = -\varepsilon_0 + T_0 s_0 + \mu_c n_0 \ . \tag{4.2}$$

Koska fluidielementtien välillä vaihtuu hiukkasia ja energiaa, tehdään hiukkasnelivirtaan ja energia-liikemäärätensoriin dissipaatiota kuvaavat lisäykset. Hiukkasnelivirtaan lisätään diffuusiota kuvaava virta δN^μ

$$N^\mu = N^\mu_{(0)} + \delta N^\mu \ , \tag{4.3}$$

$$\delta N^{\mu} = \delta n u^{\mu} + n^{\mu} \ , \tag{4.4}$$

jossa alaindeksillä (0) merkitään tensorin ideaaliosaa. δN^{μ} voidaan jakaa nelinopeuden suuntaiseen ja kohtisuoraan komponenttiin

$$\delta n = u_{\mu} \delta N^{\mu} \ , \tag{4.5}$$

$$n^{\mu} = \Delta^{\mu\nu} \delta N_{\nu} \ . \tag{4.6}$$

δn on epätasapainotilan aiheuttama pieni muutos fluidin hiukkastiheyteen ja n^{μ} nelinopeuteen kohtisuora hiukkasdiffuusiovirta, jolle pätee

$$u_{\mu} n^{\mu} = 0 \ . \tag{4.7}$$

Hiukkasnelivirta muodostetussa fiktiivisessä tasapainotilassa on nyt siis

$$N^{\mu} = (n_0 + \delta n) u^{\mu} + n^{\mu} \ . \tag{4.8}$$

Energia-liikemäärä tensoriin lisätään diffuusiotensori $\delta T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{(0)} + \delta T^{\mu\nu} \ . \tag{4.9}$$

$\delta T^{\mu\nu}$:n nelinopeuden suuntainen komponentti on

$$\delta \varepsilon = u_{\mu} u_{\nu} \delta T^{\mu\nu} \ , \tag{4.10}$$

joka kuvaa epätasapainotilan aiheuttamaa pientä muutosta fluidin energiatiheyteen. Nelinopeuteen kohtisuora komponentti voi koostua skalaarisuureesta, nelivektorista ja toisen kertaluvun tensorista, jotka toteuttavat ehdon (4.10). Luonnollisesti $\Delta^{\mu\nu}$:n verrannollinen, fluidielementin muutoksien aiheuttamaa painetta δP kuvaava skalaarisuure toteuttaa ehdon. Määritellään siis

$$\delta P = -\frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} \delta T^{\mu\nu} = -P_0 - \frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \equiv \Pi \ , \tag{4.11}$$

joka tunnetaan viskoottisena paineena. Katsotaan sitten puhtaasti kokonaisenergian virtaamista kuten kaavassa (4.8) määriteltiin hiukkasille, jolloin energianelivirta voidaan kirjoittaa muodossa

$$u_\nu T^{\mu\nu} = (\varepsilon_0 + \delta\varepsilon)u^\mu + h^\mu \ , \tag{4.12}$$

jossa h^μ on energiadiffuusiovirta, joka on myös kohtisuorassa nelinopeuteen

$$u_\mu h^\mu = 0 \ . \tag{4.13}$$

Energiadiffuusiovirta määritellään

$$h^\mu = \Delta^\mu_\alpha u_\beta \delta T^{\alpha\beta} = \Delta^\mu_\alpha u_\beta T^{\alpha\beta} \ . \tag{4.14}$$

Lisäksi ehdon (4.10) voi toteuttaa toisen kertaluvun tensori $\pi^{\mu\nu}$, jolle täytyy päteä

$$u_\nu \pi^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{4.15}$$

$$\Delta_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} = \pi^\mu_\mu = 0 \ . \tag{4.16}$$

Tensorin $\pi^{\mu\nu}$ on siis oltava jäljetön, symmetrinen ja kohtisuorassa nelinopeuteen. Tätä varten esitellään kaksoissymmetrinen jäljetön projektio-operaattori $\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}$ [6]

$$\Delta^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Delta^{\mu\alpha}\Delta^{\nu\beta} + \Delta^{\mu\beta}\Delta^{\nu\alpha}) - \frac{1}{\Delta^\lambda_\lambda}\Delta^{\mu\nu}\Delta^{\alpha\beta} \ , \tag{4.17}$$

joka toteuttaa ehdot

$$u_\mu \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \ . \tag{4.18}$$

Projektio-operaattorin $\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}$ avulla $\pi^{\mu\nu}$, joka tunnetaan leikkausjännitystensorina, voidaan määritellä

$$\pi^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\delta T^{\alpha\beta} = \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \ . \tag{4.19}$$

Lopulta, vaatimalla symmetrisyys, diffuusiotensori $\delta T^{\mu\nu}$ ja energia-liikemäärätensori saadaan muotoon

$$\delta T^{\mu\nu} = \delta\varepsilon u^\mu u^\nu - \Pi\Delta^{\mu\nu} + h^\mu u^\nu + u^\mu h^\nu + \pi^{\mu\nu} \ , \tag{4.20}$$

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon_0 + \delta\varepsilon)u^\mu u^\nu - (P_0 + \Pi)\Delta^{\mu\nu} + h^\mu u^\nu + u^\mu h^\nu + \pi^{\mu\nu} \ . \tag{4.21}$$

4.2 Landaun sidosehdot

Fiktiivisen tasapainotilan valinta on periaatteessa mielivaltainen, sillä tässä olevilla suureilla ei välttämättä ole suoraa fysikaalista merkitystä [6]. Valitaan tasapainotila siten, että fluidin hiukkas- ja energiatiheydet ovat samat kuin varsinaisen termodynaamisen tilan vastaavat suureet, jolloin laskuissa voidaan käyttää oikeita fysikaalisia suureita n ja ε. Vaaditaan, että on yhä voimassa

$$n = u_\mu N^\mu \ , \tag{4.22}$$

$$\varepsilon = u_\mu u_\nu T^{\mu\nu} \ . \tag{4.23}$$

Sidosehdosta (4.22) nähdään, että on oltava

$$n_0 + \delta n \equiv n \ , \tag{4.24}$$

$$N^\mu = n u^\mu + n^\mu \ . \tag{4.25}$$

Sidosehdosta (4.23) saadaan

$$\varepsilon_0 + \delta\varepsilon \equiv \varepsilon \ , \tag{4.26}$$

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu - (P_0 + \Pi)\Delta^{\mu\nu} + h^\mu u^\nu + u^\mu h^\nu + \pi^{\mu\nu} \ . \tag{4.27}$$

Valitsemalla fiktiiviselle tasapainotilalle $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $\delta\varepsilon = 0$, $n_0 = n$ ja $\delta n = 0$, kappaleessa 4.1 esitellyt termodynaamiset suureet voidaan esittää myös n:n ja ε:n avulla

$$s_0 = s_0(\varepsilon_0, n_0) = s_0(\varepsilon, n) \ , \tag{4.28}$$

$$P_0 = P_0(\varepsilon_0, n_0) = P_0(\varepsilon, n) \ . \tag{4.29}$$

Nyt hiukkasnelivirralla ja symmetrisellä energia-liikemäärätensorilla on yhteensä neljätoista (14) toisistaan riippumatonta komponenttia, mutta u^μ, ε, n, Π, h^μ, n^μ ja $\pi^{\mu\nu}$ sisältävät yhteensä seitsemäntoista (17) riippumatonta komponenttia, eikä näillä tiedoilla kyetä täysin kuvaamaan dissipatiivisen fluidin aikakehitystä.

Fluidissa tapahtuu samalla hiukkasten ja energian siirtymistä ja kohtisuoraa sekoittumista, joten nelinopeus ei ole enää yksikäsitteisesti määritelty kuten ideaalifluidin tapauksessa, sillä ei ole mahdollista määritellä koordinaatistoa, jossa sekä energia- että hiukkasvirtausta ei tapahdu. Älykäs valinta nelinopeudelle on määritellä se kokonaisenergian virtauksen (4.12) mukaan, kuten Landau ja Lifshitz [5] ehdottivat. Määritellään fluidin nelinopeus siis

$$u^\mu = \frac{1}{\varepsilon} u_\nu T^{\mu\nu} \ . \tag{4.30}$$

Tällä nelinopeuden valinnalla energiadiffuusiovirta h^μ on nolla, sillä se sisältyy jo fluidin nelinopeuden suuntaiseen energiavirtaukseen. Tällöin energia-liikemäärätensori on

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P_0 + \Pi) u^\mu u^\nu - (P_0 + \Pi) g^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} \ , \tag{4.31}$$

Vaikka hiukkasnelivirta ja energia-liikemäärätensori ovat dissipatiiviselle fluidille erilaiset kuin ideaalifluidille, pätevät näille luonnollisesti silti yhä kappaleessa 3.3 johdetut säilymislait.

4.3 Dissipatiivisen fluidin liikeyhtälöt

Kun hiukkasnelivirta ja energia-liikemäärätensori ovat kaavojen (4.25) ja (4.31) muotoa, säilymislaeista saadaan yhtälöt (ks. liite A.2)

$$\partial_\mu N^\mu = \frac{dn}{d\tau} + n\theta + \partial_\mu n^\mu = 0 \ , \tag{4.32}$$

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{d\varepsilon}{d\tau} + (\varepsilon + P_0 + \Pi)\theta + u_\nu \partial_\mu \pi^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{4.33}$$

$$\Delta^\mu_\beta \partial_\alpha T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + P_0 + \Pi) \frac{du^\mu}{d\tau} - \nabla^\mu (P_0 + \Pi) + \Delta^\mu_\beta \partial_\alpha \pi^{\alpha\beta} = 0 \ . \tag{4.34}$$

Kaavan (4.33) viimeinen termi voidaan kirjoittaa $\pi^{\mu\nu}$:n kohtisuoruuden (4.15) nojalla muodossa

$$u_\nu \partial_\mu \pi^{\mu\nu} = -\pi^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu \ . \tag{4.35}$$

Termi $\partial_\mu u_\nu$ voidaan jakaa erilaisia fluidielementin fysikaalisia muutoksia kuvaaviin osiin

$$\partial_\mu u_\nu = u_\mu \frac{du_\nu}{d\tau} + \nabla_\mu u_\nu = u_\mu \frac{du_\nu}{d\tau} + \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + V_{\mu\nu} \ , \tag{4.36}$$

jossa määriteltiin fluidielementin leikkausmuutoksia kuvaava $\sigma^{\mu\nu}$, rotaatiota kuvaava $\omega^{\mu\nu}$ ja tilavuuden muodon muutoksia kuvaava $V^{\mu\nu}$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla^\mu u^\nu + \nabla^\nu u^\mu) - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\theta \ , \tag{4.37}$$

$$\omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla^\mu u^\nu - \nabla^\nu u^\mu) \ , \tag{4.38}$$

$$V^{\mu\nu} = \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\theta \ . \tag{4.39}$$

Antisymmetrisen $\omega^{\mu\nu}$:n ja nelinopeuteen kohtisuorassa olevan $V^{\mu\nu}$:n tulo leikkausjännitystensorin $\pi^{\mu\nu}$:n kanssa on nolla, joten kaava (4.33) voidaan ilmaista muodossa

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{d\varepsilon}{d\tau} + (\varepsilon + P_0 + \Pi)\theta - \sigma_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{4.40}$$

4.4 Entropian tuotto

Ideaalifluidille johdettu tasapainotilan entropiavirran kaava (3.35) on yhä voimassa, koska dissipatiivisen fluidin tila on rakennettu kuten fluidi olisi termodynaamisessa tasapainossa. Tässä tapauksessa hiukkasnelivirran ja energia-liikemäärätensorin ideaaliosien divergenssit ovat

$$\partial_\mu N^\mu_{(0)} = \partial_\mu N^\mu - \partial_\mu n^\mu \ , \tag{4.41}$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(0)} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \partial_\mu(\Pi\Delta^{\mu\nu} - \pi^{\mu\nu}) \ . \tag{4.42}$$

Säilymislaeista tiedetään suoraan, että $\partial_\mu N^\mu = 0$ ja $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, joten ideaaliosien divergessit ovat nollasta poikkeavia.

$$\begin{aligned}\partial_\mu S^\mu_{(0)} &= \frac{1}{T_0} u_\nu \partial_\mu (\Pi\Delta^{\mu\nu} - \pi^{\mu\nu}) + \frac{\mu_c}{T_0}\partial_\mu n^\mu \\ &= \frac{1}{T_0}(\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - \Pi\theta) + \partial_\mu \left(\frac{\mu_c}{T_0} n^\mu\right) - n^\mu \partial_\mu \left(\frac{\mu_c}{T_0}\right) \ .\end{aligned} \tag{4.43}$$

Nyt, kuten Landau ja Lifshitz [5] tekivät, muotoillaan kaavasta (4.43) lauseke

$$\partial_\mu \left(S^\mu_{(0)} - \frac{\mu_c}{T_0} n^\mu\right) = \frac{1}{T_0}(\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - \Pi\theta) - n^\mu \partial_\mu \left(\frac{\mu_c}{T_0}\right) \ , \tag{4.44}$$

josta varsinaisen epätasapainotilan entropianelivirta S^μ voidaan määritellä

$$S^\mu = S^\mu_{(0)} - \frac{\mu_c}{T_0} n^\mu \ . \tag{4.45}$$

Termodynamiikan toisen pääsäännön nojalla systeemissä entropian täytyy kasvaa, jolloin entropianelivirran divergenssin (4.44) on oltava positiivinen

$$\partial_\mu S^\mu = \frac{1}{T_0}(\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - \Pi\theta) - n^\mu \partial_\mu \left(\frac{\mu_c}{T_0}\right) \geq 0 \ . \tag{4.46}$$

4.5 Relativistinen Navier–Stokes-teoria

Jotta ehto entropian kasvusta saadaan täytettyä kaikissa tilanteissa, täytyy kaavan (4.46) jokainen yksittäinen termi olla positiivinen. Vaaditaan siis, että termien komponentit ovat lineaarisesti riippuvia siten, että

$$\pi^{\mu\nu} = 2\eta\sigma^{\mu\nu} \ , \tag{4.47}$$

$$\Pi = -\zeta\theta \ , \tag{4.48}$$

$$n^\mu = \kappa \nabla^\mu \left(\frac{\mu_c}{T_0}\right) \ . \tag{4.49}$$

Positiiviset vakiot η ja ζ tunnetaan leikkaus- ja tilavuusviskositeetteina ja κ hiukkasdiffuusiovakiona. Näillä ehdoilla entropian tuotto on kaavan (4.46) nojalla aina positiivinen

$$\partial_\mu S^\mu = \frac{1}{2\eta T_0}\pi_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta T_0}\Pi^2 - \frac{1}{\kappa}n_\mu n^\mu \geq 0 \ , \tag{4.50}$$

sillä symmetrisen tensorin $\pi^{\mu\nu}$ ja skalaarisuureen Π neliöt ovat positiivisia ja paikankaltaisen vektorin n^μ neliö negatiivinen.

Relaatioiden (4.47)–(4.49) avulla liikeyhtälöt (4.32), (4.34) ja (4.40) saadaan muotoon

$$\frac{dn}{d\tau} = -n\theta - \partial_\mu\left(\kappa\nabla^\mu\left(\frac{\mu_c}{T_0}\right)\right) \ , \tag{4.51}$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = -(\varepsilon + P_0 - \zeta\theta)\theta + 2\eta\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \ , \tag{4.52}$$

$$(\varepsilon + P_0 - \zeta\theta)\frac{du^\mu}{d\tau} = \nabla^\mu(P_0 - \zeta\theta) - 2\Delta^\mu_\beta\partial_\alpha(\eta\sigma^{\alpha\beta}) \ . \tag{4.53}$$

Nyt dissipatiivista relativistista fluidia kuvaavat liikeyhtälöt on saatu suljettua, joka oli mahdollista hyödyntämällä Landaun valintaa nelinopeudelle ja termodynamiikan toista pääsääntöä hiukkas-, energia- ja liikemäärän säilymislakien lisäksi.

5 Päätäntö

Yhtälöt (4.51)–(4.53) ovat käytännössä Navier–Stokes-yhtälöiden relativistinen vastine. Liikeyhtälöt on rakennettu niin, että häviävän viskositeetin rajalla (κ, ζ, $\eta \ll 1$) ne redusoituvat ideaalisen hydrodynamiikan yhtälöihin.

Fysikaalisesti yhtälö (4.51) kertoo kuinka fluidielementin tilavuuden muutokset ja dissipatiiviset virrat vaikuttavat sen hiukkastiheyteen, sekä kuinka kemiallisen potentiaalin ja lämpötilan muutokset ajavat hiukkasdiffuusiota. Yhtälön (4.52) mukaan elementin laajeneminen ja leikkausviskositeetin aiheuttama lämpeneminen aiheuttavat energiatiheyden muutoksia. Yhtälö (4.53) vastaa Newtonin toista lakia, fluidielementin kiihtyvyyden aiheuttavat paineen gradientit, joita tilavuusviskositeetti vastustaa. Leikkausviskositeetti puolestaan vastustaa fluidin viereikkäisten kerrosten välistä liikettä.

Huomataan, että relativistinen Navier–Stokes-teoria on luonnostaan epävakaa [15]. Termodynaamisten muuttujien gradientit aiheuttavat välittömästi dissipatiivisia virtoja eli teorian mukaan signaalien etenemisnopeus ylittää valonnopeuden. Klassisessa tapauksessa asia voidaan yleensä sivuuttaa, mutta tämä johtaa kausaalisuuden rikkomuksiin relativistisen fluidin kuten QGP:n mallintamisessa, jossa gradientit ovat lähtötilassa suuria.

Vuonna 1979 M. Israel ja J. M. Stewart [13, 14] kehittivät kausaalisen teorian relativistisen Navier–Stokes-teorian pohjalta. Israel–Stewart-teoria säilyttää kausaalisuuden lisäämällä viskoottisen paineen Π, hiukkasdiffuusiovirran n^μ ja leikkausjännitystensorin $\pi^{\mu\nu}$ luomiin vaikutuksiin sopivan relaksaatioajan, siten että pidemmällä aikavälillä ratkaisut lähestyvät Landaun ja Lifshitzin teoriaa; $\Pi \xrightarrow{\tau_\Pi} -\zeta\theta$, $n^\mu \xrightarrow{\tau_n} \kappa\nabla^\mu(\mu_c/T_0)$ ja $\pi^{\mu\nu} \xrightarrow{\tau_\pi} 2\eta\sigma^{\mu\nu}$. Israel–Stewart-teoria on kausaali ja vakaa, kunhan relaksaatioajat on valittu tarpeeksi suuriksi [16]. Relativistinen Navier–Stokes olettaa relaksaatioaikojen olevan nolla, eikä kuvaa QGP:n käyttäytymistä oikein ainakaan törmäysten alkuvaiheessa [17]. Se ei siis itsessään ole käytännössä kovin hyödyllinen työkalu QGP:n tutkimiseen, mutta oleellinen osa relativistista hydrodynamiikkaa.

Tämän tutkielman avulla olen saanut laajentaa ymmärrystäni relativistisesta hydrodynamiikasta ja osaltaan myös fysiikan historiasta ja tutkimuksesta. Toivon, että aihe kiinnostaisi myös muita fysiikan opiskelijoita.

Lähteet

[1] H. Fritzsch ja K. Heusch. *Elementary Particles: Building Blocks of Matter*, WSPC, 2005. ISBN: 9789812569363.

[2] D. J. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*, Wiley, 1987. ISBN: 0471603864.

[3] W. Busza, K. Rajagopal ja W. van der Schee. "Heavy Ion Collisions: The Big Picture, and the Big Questions". Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 68 (2018) 339–376. DOI: 10.1146/annurev-nucl-101917-020852.

[4] A. K. Chaudhuri. *A short course on Relativistic Heavy Ion Collisions*, IOPP, 2014. ISBN: 9780750310604, DOI: 10.48550/arXiv.1207.7028.

[5] L. D. Landau ja E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics : Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics*, 6. painos, Elsevier, 1987. ISBN: 9781483161044.

[6] G. S. Denicol. "Microscopic Foundations of Relativistic Dissipative Fluid Dynamics". Väitöskirja. Frankfurt: Johann Wolfgang Goethen yliopisto, Fysiikan laitos, 2012.

[7] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics: Pearson New International Edition*, Pearson Education UK, 2013. ISBN: 9781292037141.

[8] A. Einstein. "Zur Elektrodynamik bewegter Körper". Ann. Phys. 322(10) (1905) 891–921. DOI: 10.1002/andp.19053221004.

[9] J. C. Maxwell. "On Physical Lines of Force". Philosophical Magazine 9(1) (2010) 11–23. DOI: 10.1080/14786431003659180.

[10] J. C. Maxwell. "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field". Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155(0) (1865) 459–512. DOI: 10.1098/rstl.1865.0008.

[11] K. S. Krane. *Modern Physics*, 3. painos, Wiley, 2012. ISBN: 9781118061145.

[12] R. A. Adams. *Calculus: a complete course*, 9. painos, Pearson Canada, 2013. ISBN 9780134154367.

[13] W. Israel. "Nonstationary irreversible thermodynamics: A causal relativistic theory". Ann. Phys. 100(1–2) (1976) 310–331. DOI: 10.1016/0003-4916(76)90064-6.

[14] W. Israel ja J. M. Stewart. "Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory". Ann. Phys. 118(2) (1979) 341–372. DOI: 10.1016/0003-4916(79)90130-1.

[15] W. A. Hiscock ja L. Lindblom. "Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories". Phys. Rev. D 31(4) (1985) 725–733. DOI: 10.1103/physrevd.31.725.

[16] S. Pu, T. Koide ja D. H. Rischke. "Does stability of relativistic dissipative fluid dynamics imply causality?". Phys. Rev. D 81(11) (2010) 114039. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.114039.

[17] P. Huovinen ja D. Molnar. "Applicability of causal dissipative hydrodynamics to relativistic heavy ion collisions". Phys. Rev. C 79(1) (2009) 014906. DOI: 10.1103/PhysRevC.79.014906.

A Yhtälöiden johto

Tässä luvussa käyn läpi yksityiskohtaisesti liikeyhtälöiden johdon säilymislaeista, jotka esiteltiin kappaleissa 3.4 ja 4.3.

A.1 Ideaalisen fluidin liikeyhtälöt

Nettobaryoniluvun säilymislaista (3.26) saadaan

$$\begin{aligned} \partial_\mu N^\mu = \partial_\mu(nu^\mu) = u^\mu\partial_\mu n + n\partial_\mu u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial n}{\partial x^\mu} + n\theta \\ &= \frac{dn}{d\tau} + n\theta = 0 \ , \end{aligned} \tag{A.1}$$

jossa määriteltiin $\theta = \partial_\mu u^\mu$ tilavuuden laajenemisnopeutena. Nettoenergian ja -liikemäärän säilymislaeista (3.27) saadaan

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu((\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu}) \\ &= u^\nu u^\mu \partial_\mu(\varepsilon + P) + (\varepsilon + P)u^\mu\partial_\mu u^\nu + u^\nu(\varepsilon + P)\partial_\mu u^\mu - g^{\mu\nu}\partial_\mu P - P\partial_\mu g^{\mu\nu} \\ &= u^\nu\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial(\varepsilon + P)}{\partial x^\mu} + (\varepsilon + P)\partial_\mu u^\mu\right) + (\varepsilon + P)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} - \partial^\nu P - 0 \\ &= u^\nu\left(\frac{d(\varepsilon + P)}{d\tau} + (\varepsilon + P)\theta\right) + (\varepsilon + P)\frac{du^\nu}{d\tau} - \partial^\nu P = 0 \ . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Tarkastellaan kaavan (A.2) nelinopeuden suuntaista ja tähän kohtisuoraa komponenttia kontraktoimalla se nelinopeuden ja projektio-operaattorin kanssa. Nelinopeuden suuntainen komponentti on

$$\begin{aligned} u_\nu\partial_\mu T^{\mu\nu} = u_\nu u^\nu\left(\frac{d(\varepsilon + P)}{d\tau} + (\varepsilon + P)\theta\right) &+ (\varepsilon + P)u_\nu\frac{du^\nu}{d\tau} - u_\nu\partial^\nu P \\ = \frac{d(\varepsilon + P)}{d\tau} &+ (\varepsilon + P)\theta + 0 - \frac{dP}{d\tau} \\ = \frac{d\varepsilon}{d\tau} &+ (\varepsilon + P)\theta = 0 \ , \end{aligned} \tag{A.3}$$

ja nelinopeuteen kohtisuora komponentti

$$\begin{aligned}
\Delta^\mu_\beta \partial_\alpha T^{\alpha\beta} &= (g^\mu_\beta - u^\mu u_\beta) u^\beta \left(\frac{d(\varepsilon + P)}{d\tau} + (\varepsilon + P)\theta \right) \\
&+ (\varepsilon + P)(g^\mu_\beta - u^\mu u_\beta) \frac{du^\beta}{d\tau} - (g^\mu_\beta - u^\mu u_\beta)\partial^\beta P \\
&= (u^\mu - u^\mu) \left(\frac{d(\varepsilon + P)}{d\tau} + (\varepsilon + P)\theta \right) + (\varepsilon + P) \left(\frac{du^\mu}{d\tau} - 0 \right) - \left(\partial^\mu - u^\mu \frac{d}{d\tau} \right) P \\
&= (\varepsilon + P)\frac{du^\mu}{d\tau} - \nabla^\mu P = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

jossa määriteltiin 3-gradientti $\nabla^\mu = \partial^\mu - u^\mu \frac{d}{d\tau}$.

A.2 Dissipatiivisen fluidin liikeyhtälöt

Tehdään samanlainen tarkastelu säilymislaeille, kun kappaleessa A.1. Säilymislait saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\partial_\mu N^\mu &= \partial_\mu (n u^\mu + n^\mu) \\
&= \frac{dn}{d\tau} + n\theta + \partial_\mu n^\mu = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu ((\varepsilon + P_0 + \Pi) u^\mu u^\nu - (P_0 + \Pi) g^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}) \\
&= u^\nu u^\mu \partial_\mu (\varepsilon + P_0 + \Pi) + (\varepsilon + P_0 + \Pi) u^\mu \partial_\mu u^\nu + u^\nu (\varepsilon + P_0 + \Pi) \partial_\mu u^\mu \\
&- g^{\mu\nu} \partial_\mu (P_0 + \Pi) - (P_0 + \Pi) \partial_\mu g^{\mu\nu} + \partial_\mu \pi^{\mu\nu} \\
&= u^\nu \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial(\varepsilon + P_0 + \Pi)}{\partial x^\mu} + (\varepsilon + P_0 + \Pi) \partial_\mu u^\mu \right) \\
&+ (\varepsilon + P_0 + \Pi) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} - \partial^\nu (P_0 + \Pi) - 0 + \partial_\mu \pi^{\mu\nu} \\
&= u^\nu \left(\frac{d(\varepsilon + P_0 + \Pi)}{d\tau} + (\varepsilon + P_0 + \Pi)\theta \right) + (\varepsilon + P_0 + \Pi) \frac{du^\nu}{d\tau} - \partial^\nu (P_0 + \Pi) + \partial_\mu \pi^{\mu\nu} \\
&= 0 \ .
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Nelinopeuden suuntainen komponentti on

$$
\begin{aligned}
u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= u_\nu u^\nu \left(\frac{d(\varepsilon + P_0 + \Pi)}{d\tau} + (\varepsilon + P_0 + \Pi)\theta \right) \\
&\quad + (\varepsilon + P_0 + \Pi) u_\nu \frac{du^\nu}{d\tau} - u_\nu \partial^\nu (P_0 + \Pi) + u_\nu \partial_\mu \pi^{\mu\nu} \\
&= \frac{d(\varepsilon + P_0 + \Pi)}{d\tau} + (\varepsilon + P_0 + \Pi)\theta + 0 - \frac{d(P_0 + \Pi)}{d\tau} - \pi^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu \\
&= \frac{d\varepsilon}{d\tau} + (\varepsilon + P_0 + \Pi)\theta - \sigma_{\mu\nu} \pi^{\mu\nu} = 0 \ ,
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

jossa voitiin sanoa $u_\nu \partial_\mu \pi^{\mu\nu} = -\pi^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu = -\sigma_{\mu\nu} \pi^{\mu\nu}$ leikkausjännitystensorin $\pi^{\mu\nu}$ ja nelinopeuden u^μ kohtisuoruuden perusteella. Säilymislaista saatava nelinopeuteen kohtisuora komponentti on

$$
\begin{aligned}
\Delta^\mu_\beta \partial_\alpha T^{\alpha\beta} &= (g^\mu_\beta - u^\mu u_\beta) u^\beta \left(\frac{d(\varepsilon + P_0 + \Pi)}{d\tau} + (\varepsilon + P_0 + \Pi)\theta \right) \\
&\quad + (\varepsilon + P_0 + \Pi)(g^\mu_\beta - u^\mu u_\beta) \frac{du^\beta}{d\tau} - (g^\mu_\beta - u^\mu u_\beta) \partial^\beta (P_0 + \Pi) + \Delta^\mu_\beta \partial_\alpha \pi^{\alpha\beta} \\
&= (u^\mu - u^\mu) \left(\frac{d(\varepsilon + P_0 + \Pi)}{d\tau} + (\varepsilon + P_0 + \Pi)\theta \right) \\
&\quad + (\varepsilon + P_0 + \Pi) \left(\frac{du^\mu}{d\tau} - 0 \right) - \left(\partial^\mu - u^\mu \frac{d}{d\tau} \right) (P_0 + \Pi) + \Delta^\mu_\beta \partial_\alpha \pi^{\alpha\beta} \\
&= (\varepsilon + P_0 + \Pi) \frac{du^\mu}{d\tau} - \nabla^\mu (P_0 + \Pi) + \Delta^\mu_\beta \partial_\alpha \pi^{\alpha\beta} = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$