

Ensimmäisen luokan matematiikan oppikirjojen tarjoamia keinoja kielentämiseen matemaattisen ajattelun rakentajana
Milja Vuoristo

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
Syyslukukausi 2022
Kokkolan yliopistokeskus Chydenius
Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Vuoristo, Milja. 2022. Ensimmäisen luokan matematiikan oppikirjojen tarjoamia keinoja kielentämiseen matemaattisen ajattelun rakentajana. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Kokkolan yliopistokeskus Chydenius. 68 sivua.

Tutkimukseni tarkoituksena oli selvittää, millaisista tehtävätyypeistä ensimmäisen luokan matematiikan kirjat koostuvat, kuinka nämä tehtävät ohjaavat oppilasta monipuoliseen matematiikan ilmaisuun ja miten havaittavat tehtävät rakentavat oppilaan matemaattista ajattelua. Tutkimukseni teoreettisessa viitekehityksessä on tarkasteltu alkuopetuksen matematiikan opetusta. Pedagogisena lähestymistapana on tarkasteltu matematiikan kielentämistä: Kielentäminen toteuttaa monipuolisesti niin alkuopetuksen kuin yleisesti peruskoulun matematiikan opetussuunnitelman oppisisältöjä ja tavoitteita. Koulumatematiikan ympärillä pyörivän keskustelun ja opetussuunnitelman tavoitteiden törmäyskurssi sai minut kiinnostumaan aiheesta. Tutkimuksessa haettiin vastauksia seuraaviin kysymyksiin:

1. Millaisia lähestymistapoja alkuopetuksen matematiikan oppikirjoissa käytetään?
2. Millaisia kielentämisen tapoja oppikirjojen tehtävissä on erotettavissa?
3. Miten tehtävien rakenne tukee matemaattisen ajattelun rakentumista?

Oppikirjatutkimukseni tarkasteli neljää oppikirjaa sekä määrällisen että laadullisen tutkimuksen keinoin. Analyysin ja tulosten kuvailu on avattu taulukoin ja tehtäväkuvin oppikirjoista. Tuloksista selviää, että oppikirjat painottavat määritelmälähtöisiä tehtäviä, ohjaavat oppilasta suppeaan matematiikan ilmaisuun ja jättävät vain vähän tilaa oppilaan omalle matemaattisen ajattelun rakentumiselle.

Asiasanat: matematiikan kielentäminen, matemaattinen ajattelu, alkuopetus

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkistettu Turnit Originality Check-ohjelmalla.

SISÄLTÖ

TIIVISTELMÄ.....	2
SISÄLTÖ	3
1 JOHDANTO	5
2 ALKUOPETUKSEN MATEMATIIKAN OPETUKSEN LÄHTÖKOHTIA	7
2.1 Alkuopetuksen matematiikan opetuksessa painottuvat konkretia ja ajattelun kehittäminen.....	7
2.2 Matemaattisen ajattelun ja taitojen rakentumisesta.....	12
2.3 Matematiikan oppikirjan merkityksestä alkuopetuksessa	17
3 MATEMATIIKAN KIELENTÄMINEN PEDAGOGISENA LÄHESTYMISTAPANA	21
3.1 Kielentämisen osa-alueiden tarkastelua.....	21
3.2 Kielentämisen merkityksestä matematiikan opetuksessa ja oppimisessa	24
4 TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET	27
5 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS.....	28
5.1 Teoriaohjaava sisällönanalyysi oppikirjatutkimuksessa.....	28
5.2 Tutkimusaineistona matematiikan oppikirjat	32
5.3 Tutkimusaineiston analyysi	34
5.4 Tutkimuksen eettisyys ja luotettavuus	47
6 OPPIKIRJA-ANALYYSIN TULOKSET.....	50
6.1 Matematiikan oppikirjojen tehtävien luonne	50
6.2 Kielentäminen matematiikan oppikirjoissa ja tehtävärakenteiden tuki matemaattisen ajattelun kehittymiselle	52
7 POHDINTA.....	56
7.1 Tulosten tarkastelu ja johtopäätökset.....	56
7.2 Tutkimuksen arviointi ja jatkotutkimusaiheita	59

LÄHTEET	61
----------------------	-----------

1 JOHDANTO

Omat muistoni alakoulun matematiikan tunneilta ovat värittyneet mekaanisesta hiljaisesta työskentelystä yksin, sen jälkeen, kun opettaja oli taululla näyttänyt uuden asian. En voi sanoa, että muistot olisivat positiivisia tai innostavia, tai että ikävät muistot johtuisivat ainoastaan oppimisvaikeudestani. En osannut itse pyytää apuvälineitä työskentelyyn, eikä niitä muistikuvieni mukaan tarjottu. En muista myöskään, että vaihtoehtoista työskentelytapaa olisi tarjottu tai opetustapaa käytetty: ei ongelmalähtöistä oppimista, projekteja tai tutkielmia, ei ryhmä- tai parikeskusteluja. Kuitenkin silloisen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan näitä pedagogisia lähestymistapoja olisi pitänyt käyttää, sillä juuri minun koulupolkuni alussa oli vuoden 1994 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden tietokäsitys muuttanut oppilaan tiedon vastaanottajasta tiedon prosessoijaksi ja aktiiviseksi tiedonkäsittelijäksi (Järvinen, 2011). Puolivälissä 1990-lukua julkaistu Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 1994) korostivat tiedon suhteellisuutta sekä oppilaan kykyä etsiä ja luoda uutta tietoa, arvioida ja soveltaa sitä. Niin ikään oppilas nähtiin aktiivisessa roolissa näiden tietorakenteidensa jäsentäjänä ja opettaja oppilaan tukijana, kannustajana sekä ohjaajana.

Vuonna 2022 oppilaat saavat opetusta Opetushallituksen vuonna 2014 julkaiseman opetussuunnitelman mukaisesti. Vuoden 2014 opetussuunnitelman perusteissa oppilas nähdään aktiivisena toimijana ja tiedon rakentajana myös matematiikan oppimisympäristöissä (Opetushallitus 2014, s. 130, 236). Kuitenkin katsottaessa Suomen Pisa-tutkimuksen tuloksia, oppilaiden matemaattinen koulumenestys ei viime vuosina ole ollut nousujohteista (Vanhala, 2021) ja matematiikan opetuksen katsotaan olevan jonkin asteisessa kriisissä (Sipola, 2022). Tutkimukseni ei kuitenkaan vertaile hakien parempaa visiota. Tutkimukseni tarkoituksena on tutkia tässä opetuksen oppikirjapainotteisessa ajassa (mm. Perkkilä 2002; Joutsenlahti & Vainiopää, 2010, s. 137), kuinka monipuolista matemaattisen osaamisen pohjaa oppikirja tarjoaa, erityisesti kielentämisen avulla.

Matemaattiset taidot muodostuvat monesta erilaisesta osatekijästä: numeerisesta tiedosta, eli kyvystä asettaa luvut järjestykseen ja tunnistaa numerot; aritmeettisten yhdistelmien, esimerkiksi lisäämisen ja vähentämisen muistamisesta; matemaattisten käsitteiden ja periaatteiden ymmärtämisestä; menetelmätietoudesta, eli tiedosta ja taidosta, millä tavoin ja kuinka voidaan laskea sekä soveltaa näitä laskustrategioita; ja kyvystä tunnistaa matemaattinen ongelma ja tehdä suunnitelma sen ratkaisemiseksi. (mm. Koponen, 2008; Aunio, 2006; Dowker, 1998.) Tutkijoiden erittely kuvaa täsmällisesti, kuinka monitahoisesta ja kompleksisesta kokonaisuudesta matemaattisten taitojen rakentumisessa on kyse. Edellä mainittu avaa valmistuvan opettajan näkökulmastani kysymyksiä ja perusteita monipuoliselle ja tarkoituksenmukaiselle matematiikan opetukselle.

Aunola ja Nurmi (2018, s. 54, 57) toteavat, kuinka matemaattisten taitojen kehitys on kumuloituvaa, jolloin aikaisempi osaaminen helpottaa uuden oppimista, peräti kiihdyttää sitä. Mitä vahvempi osaamisen pohja luodaan varhaiskasvatuksessa ja alkuopetuksessa, sitä varmemmin ehkäistään oppimisen haasteet tulevaisuudessa. Tämä ongelmanasettelu sai minut kiinnostumaan tutki- maan ensimmäisen luokan matematiikan kirjoja ja niiden valmiuksia ohjata oppilasta kielentämään matematiikkaa. Matematiikan kielentäminen auttaa oppilaita rakentamaan omaa matemaattista ajatteluaan sekä ymmärtämään monipuolisesti opittavien käsitteiden sisältöä ja kuvaamaan tehtävien ratkaisuprosesseja (Perkkilä & Joutsenlahti, 2022). Tutkimuksen kohteena on neljän oppikirjasarjan ensimmäisen luokan syksyn matematiikan oppikirjat. Oppikirjasarjoja on tarkasteltu niiden rakenteisiin liittyvien lähestymistapojen näkökulmista ja kirjasarjojen tehtäviä on tutkittu kielentämisen osa-alueiden lähtökohdista. Kielentäminen tarkoittaa matemaattisen ajattelun esille tuomista suullisesti, kirjallisesti, kuvin sekä konkreettisella toiminnalla (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Tutkimuksen tuloksista on luettavissa, että tutkimuksen kohteena olleet matematiikan kirjat ohjaavat hyvin suppeasti oppilasta kielentämään matematiikkaa muulla kuin symbolisella matematiikan kielellä.

2 ALKUOPETUKSEN MATEMATIIKAN OPETUKSEN LÄHTÖKOHTIA

Matemaattisten taitojen kehitys on kumuloituvaa: uuden oppiminen edellyttää aikaisempaa tietojen ja taitojen hallintaa. Käsitteiden kehitys etenee myös hierarkkisesti syventyen, jolloin peruskäsitteet tarjoavat alustan monimutkaisemmille taidoille sekä tehtäväjoukkojen hallinnalle. (Aunola & Nurmi, 2018, s. 54–55). Tästä syystä voidaan nähdä, että viimeistään alkuopetuksessa luodaan pohjaa koko koulu-uran matematiikan oppimiselle. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 2014) nostavat esille alkuopetuksen keskeisiä painotuksia niin yleisesti alkuopetuksessa kuin matematiikassa sekä matematiikan sisältöjä, joita oppilaiden tulisi sisäistää alkuopetuksen ensimmäisenä syksynä. Opetussuunnitelman näkökulmasta merkityksellisiä lähtökohtia tutkimukselleni ovat laaja-alaisen opetuksen tavoitteet sekä matematiikan opetuksen yleiset tavoitteet opetukselle, työtavoille sekä oppimisympäristöille, joiden yhteyttä tarkastelen matemaattisen ajattelun rakentumiseen alkuopetuksessa. Konkretian, kommunikoinnin ja monipuolisten työtapojen noustessa edellä mainituista oleelliseksi, tuon esille myös matemaattisen ajattelun rakentumista sekä oppikirjojen lähtökohtia alkuopetuksessa.

2.1 Alkuopetuksen matematiikan opetuksessa painottuvat konkretia ja ajattelun kehittäminen

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ovat velvoittava ohjenuora opettajalle liittyen opetuksen laatuun, sen tavoitteisiin ja kuinka oppimista arvioidaan. Opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus, 2014, s. 9) yleiseksi tarkoitukseksi on kirjattu kasvun, kehityksen sekä oppimisen hyvät edellytykset tasa-arvoisesti jokaiselle. Tämä kasvatuksen ja koulutuksen asiakirjakokonaisuus luo perustan opetukselle ja koko toimintakulttuurille. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014, s. 98) määritellään yhdeksi alkuopetuksen tehtäväksi oppilaiden yhteistoimijuuteen ohjaamisen ja

pääsääntöisiksi työtavoiksi havainnollisuuden ja toiminnallisuuden, leikin ja pe-
lillisyyden sekä mielikuvituksen ja tarinallisuuden. Tämä on hyvin linjassa al-
kuopetusikäisen lapsen kehityksen kanssa. Piaget`n (1988) ajattelun mukaisesti
lapsuuden kognitiivinen kehitys käy läpi neljä vaihetta: sensomotorisen kauden
kaksivuotiaaksi asti, esioperationaalisen kauden, kahdesta seitsemään vuotta,
konkreettisten operaatioiden kauden seitsemästä ikävuodesta yhteentoista sekä
formaalisten operaatioiden kauden, 11-vuotiaasta ylöspäin. Jari Lakka (2014, s.
24) tuo esille väitöskirjatutkimuksessaan konkreettisten välineiden käytön tär-
keyden kouluopetuksessa, koska käsin kosketeltava ja tutkittava materiaali ke-
hittää lapsen ajattelua. Tämä on tärkeää erityisesti ennen ajattelun kehittymistä
formaalisten operaatioiden kaudelle.

Opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014, s. 129–130) al-
kuopetuksen matematiikan sisältöalueita ovat luvut ja laskutoimitukset; algebra
suhteiden, säännönmukaisuuksien ja lukujonojen osalta; geometria; mittaami-
nen sekä tietojenkäsittely ja tilastointi. Opetussuunnitelmassa (Opetushallitus,
2014) sisältöalueita ei arvoteta paremmuusjärjestykseen, mutta Hannula ja Le-
pola (2006, s. 149) kuitenkin täsmentävät, että ilman vankkaa ja monipuolisen
harjoittelun tuottamaa ymmärrystä lukujonoista ja kymmenjärjestelmästä, on
koulutulokkaan erittäin vaikeaa oppia vähennys- ja yhteenlaskuja. Tässä näkyy
Aunolan ja Nurmen (2018) esitys niin koulu- kuin tiedematematiikan hierarkki-
sesta rakenteesta.

Opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2014) alkuopetuksen laaja-alaisen
osaamisen työskentelyn lähtökohtana ovat oppilaiden aktiivinen toimijuus: pää-
piirteinä ovat uteliaisuus ja ihmettely, oppilaiden omat kokemukset, havainnot
sekä kysymykset, jotka johtavat myönteiseen vuorovaikutukseen, yhdessä oival-
tamiseen sekä uuden löytämiseen ja keksimiseen. Oppilaita kannustetaan ha-
vainnoimaan ja etsimään tietoa, kysymään ja kuuntelemaan sekä tuottamaan ja
kehittelemään yhdessä ideoita ja esittämään työnsä tuloksia. Tämä osuu myös
sveitsiläisen kehityspsykologin mukaiseen ajatteluun: Piaget (1988, s. 106) esittää
alkuopetusikäisen lapsen ajattelun olevan esioperationaalisella ja konkreettisella

kaudella, jolloin ajattelu on hyvin kontekstisidonnaista, mutta yksilölle kehittyy kyky loogisten johtopäätösten tekemiseen tietoja yhdistelemällä.

Oppilaita rohkaistaan itseilmaisuun erilaisia tapoja käyttäen. Heitä innostetaan yhdessä pohtimaan, milloin työskentelyssä on onnistuttu ja mistä sen tietää. Oppilaiden opintoihin liittyvistä valinnoista keskustellaan ja autetaan heitä näkemään erilaisten vaihtoehtojen merkitys. (Opetushallitus, 2014, s. 98–100.) Näen tämän liittyvän sekä opintoihin yleensä että myös oppiaineiden sisällä käytäviin keskusteluihin, mitkä työtavat ja oppimisen muodot oppilas on kokenut hyödyllisiksi itselleen ja mitkä ei.

Opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) alkuopetuksen laaja-alaisen osaamistavoitteissa monilukutaidon tavoitteena on ohjata oppilaita monilukutaitoisiksi: sanallisten, kuvallisten auditiivisten, numeeristen sekä kinesteettisten symbolijärjestelmien tulkitsijoiksi, tuottajiksi sekä arvioijiksi. Opetuksessa näitä teksteiksi nimettyjä eri kokonaisuuksia ohjataan tarkastelemaan, kokeilemaan, käyttämään ja tuottamaan sekä kannustetaan oppilaita ilmaisemaan itseään niiden avulla monipuolisesti. Monilukutaidon tavoitteessa painotetaan, kuinka monipuoliset tilaisuudet kysyä ja ihmetellä, esittää näkemyksiä, kertoa tarinoita ja jakaa kokemuksiaan erilaisia välineitä sekä ilmaisun keinoja käyttäen, ovat oleellinen osa monilukutaitajaksi kehittymistä. (Opetushallitus, 2014, s. 100–101.) Nämä edellä mainitut laaja-alaisen oppimisen tavoitteet vaikuttavat painottavan monipuolisia työtapoja, kommunikointia sekä oppilaan omaa aktiivisuutta läpi tekstin erinäisin sanankääntein. Tähän sopii Häggblomin (2004, s. 48) esittämä tärkeä huomio oppilaan osallisuudesta ja opettajan roolista: Opettajan esittämällä malliesimerkillä ei ole samaa vaikutusta kuin oppilaan omakohteisella kokemukseen perustuvalla toiminnalla, ihmettelyllä ja kokeilulla.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) alkuopetuksen matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää oppilaiden luovaa ja loogista matemaattista ajattelua. Tekstissä esitetään, kuinka konkreettinen ja toiminnallinen opetus kehittää oppilaiden kykyä ilmaista ja esittää matemaattista ajatteluaan suullisesti, kirjallisesti, piirtäen, konkreettisin välinein sekä tulkiten kuvia, luoden näin vahvan pohjan lukukäsitteen ja kymmenjärjestelmän

ymmärtämiseksi. Tavoitteena on kannustaa oppilaita tarkastelemaan matemaattisia ongelmia erilaisista näkökulmista, tekemään havaintoja sekä esittämään ratkaisujaan. Alkuopetuksessa huolehditaan, että oppilaat taitavat lukumäärän, lukusanan ja numeromerkinnän välisen yhteyden, toisin sanoen lukukäsitteen perustan. Konkretian avulla opetellaan kymmenjärjestelmän periaate sekä harjoitellaan lukujonotaitoja. (Opetushallitus, 2014, s. 128–129.) Häggblomin (2004, s. 44–45, 48) mukaan konkreettiset toimintamateriaalit tai kuvalliset piirustukset selventävät oppilaan ajattelua opiskeltaessa uutta matemaattista käsitettä sekä auttavat oppilaita oppimisprosessissa sitouttaen heidän ajatteluun, kieltään ja kehoaan. Konkreettiset välineet ovat lapselle kuin työkaluja, joilla hän voi kokeilla, ymmärtää ja kommunikoida matematiikkaa. Piirtäessään matemaattista tehtävää itselleen lapsi selventää ajatteluunsa. Häggblom täsmentää, että kertoessaan piirustuksestaan lapsi sitoo konkreettisen materiaalin abstraktiin ajatteluunsa.

Myös Fuson (1992, s. 248; vrt. Aunio 2006) esittää tutkimuksessaan lukujonotaitojen karttumisen kehittymistä: Hänen mukaansa lapsen lukukäsite kehittyy lukusanojen luettelemisen, esineiden laskemisen lukusanoja vastaavasti sekä lukusanojen jonomaisen käytön myötä. Lapsen kehityksessä Fuson näkee ketjun kehitysvaiheita, jotka kulkevat ensin lapsen lorumaisesta lukusanojen luettelusta kykyyn erotella lukusanat sekä edelleen kykyyn yhdistää lukusanat laskemisen kohteisiin. Tämän jälkeen lapsi oppii viimeiseksi sanottavan lukusanan tarkoittavan lukumäärää, jonka jälkeen hän oppii aloittamaan lukujonolaskemisen mistä tahansa luvusta. Fusonin näkemyksen mukaisesti tämä kehitys tapahtuu tavallisesti ennen kouluikää. Näin ollen alkuopetusikäinen lapsi on Fusonin ajattelun mukaisesti vaiheessa, jossa hahmottaa molempiin suuntiin liikkuvan lukujonon sekä lukusanoilla laskemisen, jossa jokainen lukusana on itsenäinen yksikkö, joka oman paikkansa lisäksi yhdistyy edelliseen sekä seuraavaan numerosanaan järjestyksellisesti.

Piaget'n (1988) mukaan juuri ennen kouluikää lapselle kehittyy ymmärrys lukumäärän säilyvyydestä, jolloin ajattelu ja päättely ei tukeudu ainoastaan näköhavaintoon. Piaget tutki lukumäärän säilyvyyden ymmärrystä kahdella

kolikkojonolla. Tehtävän alkutilanteessa lapsen tulee havaita, että rinnakkain asetetuissa jonoissa kolikoita on yhtä monta. Toista jonoa venytettäessä pidemmäksi, tulee lukumäärän säilyvyyden ymmärtävän lapsen huomata, että kolikoita on edelleen jonoissa sama määrä. Alkuopetusikäisen lapsen kyky ymmärtää kolmiulotteista maailmaa, erilaisia malleja ja symboleja kehittyy nopeasti. Kiinnostus esineiden tai asioiden luokitteluun niiden yhteisten ominaisuuksien tai eroavaisuuksien perusteella heräilee juuri alkuopetuksen aikoihin. (Nurmi ym., 2014.) Piaget (1988) liittyy lukumäärän säilyvyyden ymmärtämiseen lukukäsitteen vaiheittaisen syntymisen hierarkkisesti loogisten luokitusten, sarjojen sekä niihin liitettävien lukujonojen ja operaatioiden seurauksena.

Opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus, 2014, s. 128–130) matematiikan opetuksen tavoitteeksi on kirjattu kehittää oppilaiden omaa kykyä käyttää, hyödyntää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti, työskennellen sekä yksin että yhdessä. Matematiikan oppimisympäristössä opiskellaan toiminnallisesti ja välineiden avulla, vaihtelevin ja monipuolisin työtavoin. Oppimisen ja itseoivaltamisen ilon tueksi tarjotaan sopivia välineitä ja riittävästi aikaa harjoitella. Matematiikan opetuksen perustana tulee olla oppilaita kiinnostavat aiheet sekä ongelmat, jolloin opetus ohjaa ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyttä omassa elämässä. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, s. 410) esittävät, että tällaista opetussuunnitelman tavoitteiden mukaista merkityksellisyyttä sekä hyödyllisyyttä voidaan luoda joustavalla luonnollisen kielen, kuviokielen sekä matematiikan symbolikielen käytöllä, jolloin oppilas avaa matemaattista ajatteluaan sekä itselleen että muille.

Perusopetuksen alkuopetuksessa jokaisen oppilaan edistymistä seurataan huolellisesti ja systemaattisesti, sillä on erityisen tärkeää huolehtia oppilaan edellytyksistä opinnoissa etenemiseen. On tärkeää selvittää, millainen taitotaso oppilailla on, mitä he jo osaavat. Tätä matematiikan ymmärtämisen ja osaamisen tasoa voidaan selvittää niin alkukartoituksessa kuin opetuksen edetessä puheen, välineiden ja piirtämisen tai kirjallisen työskentelyn avulla, sillä oppilailla tulee olla mahdollisuus osoittaa edistymistään eri tavoin. Pelkkien tehtäväratkaisujen oikeellisuuden lisäksi tarkastellaan tekemisen tapaa sekä sujuvuutta.

(Opetushallitus, 2014, s. 98, 130.) Ajatellen erityisesti ensimmäisen luokan syksyä, jolloin oppilaat ja opettaja ovat toisilleen tuntemattomia, on tärkeää, että alkuopetuksen opetussuunnitelman tavoitteissa painotetaan ja muistutetaan kommunikoinnin, konkreettisten työtapojen, oppilaan oman ajattelun kehittämisen sekä formatiivisen arvioinnin merkityksestä opettajan työn ja oppilaan oppimisen tukena. Näin myös matematiikan oppikirjoissa tulisi näkyä ohjausta edellä mainittuihin asioihin.

2.2 Matemaattisen ajattelun ja taitojen rakentumisesta

Joutsenlahti (2005) toteaa väitöskirjassaan, että matemaattisen ajattelun määrittely on vaativaa. Sternberg (1996) puolestaan on tuonut esille, että matemaattista ajattelua voi lähestyä niin monin tavoin, ettei yksinkertainen ja yhteen vetävä määrittely ole mielekästä. Sternberg (1996) päätyi tutkimaan matemaattista ajattelua triarkkisen älykkyyden kolmen komponentin näkökulmasta. Hän löysi matemaattisen ajattelun ominaispiirteiden perusteella viisi matemaattisen ajattelun tarkastelutapaa: psykometrisen lähestymistavan (*psychometric approach*), antropologisen lähestymistavan (*anthropological approach*), pedagogisen lähestymistavan (*pedagogical approach*), tiedematematiikan lähestymistavan (*mathematical approach*) sekä tiedon prosessoinnin lähestymistavan (*computational approach*). Väitöskirjassaan Joutsenlahti (2005) puolestaan esittää matemaattista ajattelua kuvaavan viitekehyksen, jossa matemaattiseen ajatteluun nähdään keskeisinä vaikuttamina myös viisi kokonaisuutta: uskomukset, kulttuuri, matemaattiset kyvyt, ongelmanratkaisu sekä informaation prosessointi. Nämä Joutsenlahden esittämät lähtökohdat ovat niitä, joiden avulla voidaan matemaattista ajattelua ymmärtää ja kuvata. Lisäksi ne vaikuttavat oleellisesti ajatteluprosessiin. (Joutsenlahti, 2005, s. 51–65) Joutsenlahden esittämien piirteiden taustalla on vahvasti yhteys Sternbergin (1996) esittämiin matemaattisen ajattelun tarkastelutapoihin. (ks. Joutsenlahti, 2005, s. 65–66.) Pehkonen ja Rossi (2018, s. 58–59) esittävät samaa linjaa: matemaattisen ajattelun käsitettä käytetään paljon, mutta merkitys vaihtelee, eikä yhteneväistä linjaa ole. Heidän mukaansa tutkijat käyttävät

käsitettä kuvaamaan ajattelua matematiikan avulla taikka käsittävät matemaattisen ajattelun olevan ajattelua matematiikasta. Sternberg (1996) on omissa tutkimuksissaan viitannut matemaattisen ajattelun määrittelyn vaikeuteen. Hänen mukaansa tämä vaikeus johtunee erilaisista tutkimuslähtökohdista.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) matemaattista ajattelua ei määritellä, vaikka opetuksen tehtäväksi määritellään matemaattisen ajattelun kehittäminen. Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018, s. 410) artikkelissa matemaattinen ajattelu nähdään metakognitioiden ohjaamana konseptuaalisen, proseduraalisen sekä strategisen tiedon prosessointina. Pehkonen ja Rossin (2018, s. 58–59; ks. Pehkonen, 2011) määritelmä käsittää matemaattisen ajattelun koostuvan sekä luovan että loogisen ajattelun operaatioista ja prosesseista. Leppäaho (2007) esittää, että useat tutkijat pitävät juuri ongelmanratkaisua matemaattisen ajattelun keskiössä. Tarkasteltaessa asiaa niin edellä mainittujen tutkimusten kuin opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus 2014) lähtökohdista, tulisi myös matematiikan oppikirjoissa näkyä matemaattisen ajattelun kehittäminen ja ongelmanratkaisun painotus.

Ongelmanratkaisu nähdään keskeisenä työtapana matematiikan opiskelussa (Sternberg, 1996; Joutsenlahti 2005; Pehkonen, 2011). Ongelmanratkaisutehtävät, joita ei voi selvittää muutamassa minuutissa, harjoittavat matemaattista ajattelua parhaiten. Matemaattisten taitojen kehitys rakentuu kerrostuen: monimutkaisten tietojen ja taitojen oppiminen edellyttää peruskäsitteiden ja -taitojen pohjaa. (Aunola & Nurmi, 2018, s. 54–55.) Aunola ja Nurmi (2018) myös toteavat, että erityisesti lukujonotaitojen hyvä hallinta on todettu merkitykselliseksi matemaattisten taitojen oppimisessa ja kehittymisessä. Kuten edeltä käy ilmi, lukujonotaitojen vahva haltuunotto, on huomioitu perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus, 2014) matematiikan alkuopetuksen tavoitteissa. Näissä opetussuunnitelman (2014) tavoitteissa on otettu huomioon myös edellä mainittu kerroksellisuus: Jo alkuopetuksessa ohjataan esiymmärrykseen jakolaskusta sekä kerto- ja jakolaskun yhteydestä että murtoluvun käsitteen esiymmärrykseen. Näin ollen matematiikan opetuksen edetessä edellä mainitut käsitteet ja asiat eivät tule täysin uusina asioina. Vainionpää ym. (2004, s. 295)

täsmäntävät lukujonojen osaamisen merkitystä peruslaskutoimitusten, erityisesti yhteen- ja vähennyslaskun osalta seuraavasti: oppilaan on hankalaa ratkaista yksinkertaisiakaan yhteen- tai vähennyslaskuja oikein, jos hän ei omaa ymmärrystä lukujen paikasta ja suhteista lukujonolla. Tärkeimpänä yksittäisenä osataitona lukukäsitteen ja laskutaidon perustalle pidetään lukujonotaitojen kehittymistä. Myös matematiikan oppikirjojen rakenteissa tulisi näkyä ohjausta käsitteiden välisiin yhteyksiin sekä painotusta matematiikan perustaitojen oppimiseen (mm. lukujonoihin ja lukupaikkajärjestelmän oppimisen tärkeyteen).

Aunola ja Nurmi (2018, s. 55, 57) ovat laatineet taulukon (Taulukko 1) lapsen matemaattisesta kehityksestä aiempien tutkimusten perusteella, josta ilmenee myös selkeästi heidän esittämä ajatus matemaattisten taitojen lumipalloefektimäisestä oppimisesta, jolloin uusi tieto rakentuu vanhan tiedon päälle. Myös Yrjönsuuri (2004) on esittänyt, kuinka ehdotonta peruskäsitteiden ja -taitojen hallintaa on matematiikan oppimisessa: Oppilaan kyetessä omin sanoin selittämään tehtävän itselleen ja näin ollen konstruoimaan tiedon uudelleen omalle ajattelulle ominaisesti, hän pystyy yleistämään tarvittavan matemaattisen säännön. Vasta tämän jälkeen oppilas kykenee suoriutumaan soveltavasta tehtävästä. Taulukosta yksi voidaan nähdä matemaattisen kehityksen kumulatiivisuus. Olisi todella tärkeää, että oppikirjat toisivat vahvasti tätä esille koulumatematiikan rakenteen näkökulmasta.

Taulukko 1

Tasoja lapsen matemaattisessa kehityksessä mukaillen Nurmen, Ahosen, Lyytisen, Lyytisen, Pulkkisen ja Ruoppilan laatimaa taulukkoa 2014 (Aunola & Nurmi 2018, 559)

Ikä, keskimäärin	Esimerkkejä siitä, mitä lapsi hallitsee
alle 1kk	Pystyy tekemään erotteluja lukumäärien välillä, kun niiden suhteellinen ero on riittävän suuri.
4kk	Osa ajatuksellisesti lisätä ja vähentää joukosta yhden.
1v 5kk	Alkaa oppia lukusanoja.
2v	Alkaa oppia lukusanojen järjestystä. Osa sanoa yksi – yhteen vastavuuden tehtävässä, jossa jaetaan esineitä.
2v 6kk	Havaitsee, että lukusanat merkitsevät myös yhtä suurempia lukuja (yksi vs. monta).
3v	Osa laskea pienen määrän esineitä.
3v 6kk	Osa lisätä ja vähentää joukosta yhden esineillä ja lukusanoilla. Ymmärtää, että esineitä on niin monta, kuin viimeksi lueteltu lukusana ilmoittaa.
4v	Osa käyttää sormia apuna yhteenlaskuissa.
5v	Tunnistaa arabialaiset numerot.
5v 6kk	Osa luetella lukusanat oikein 40:en saakka.
6v	Ymmärtää lukumäärän säilyvyyden.
6v 6kk	Ymmärtää yhteenlaskun ja vähennyslaskun olevan komplementaarisia eli toisiaan täydentäviä.
7v	Osa palauttaa joitain aritmeettisiä faktoja muistista laskematta niitä (esimerkiksi $1+3=4$).
8v	Lukusuoran ymmärtäminen: yli puolet 8-vuotiaista osaa vastata oikein kysymykseen, kuinka monta numeroa on kolmen ja yhdeksän välillä.
9v	Lapsi alkaa oppia kertotauluja. Sormien käyttö laskemisen apuna vähentyy selvästi; joillain lapsilla ääneen laskeminen säilyy edelleen.
10v ja vanhemmat	Abstraktin järjelyn ja työmuistin kehittyminen tekevät mahdolliseksi erilaisten algoritmien käytön, eli lapsi oppii sääntöjä, joiden perusteella laskutoimituksia voidaan suorittaa mahdollisimman vähillä vaiheilla. Lukusuoran ymmärtäminen: lapsi osaa vastata oikein kysymykseen, kuinka monta numeroa on kolmen ja yhdeksän välillä.

Vygotskin (1978) sekä monen muun tutkijan hänen jälkeensä (mm. Hannula & Lepola, 2006; Mattinen, Hannula & Lehtinen, 2006; Hannula-Sormunen, Mattinen, Räsänen & Ruusuvirta, 2018) mukaan lapsi omaa matemaattista kokemusta jo paljon ennen kouluopintojen alkua, kiinnittämällä huomioita määriin sekä kokoon, jakamalla, lisäämällä ja vähentämällä. Kuten perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) korostuu oppiminen vuorovaikutuksessa toisten kanssa, niin myös Vygotski (1978) painottaa, uranuurtavaa tutkimusta yhteisöllisestä ja vuorovaikutuksessa tapahtuvasta oppimisesta tehneenä. Vygotski nimittää lähikehityksen vyöhykkeeksi (*zone of proximal development*) vaihetta, jolloin lapsi voi osata ratkaista ongelman yhdessä taitavamman vertaisen kanssa tai aikuisen ohjauksessa. Lähikehityksen vyöhykkeellä lapsi voi vuorovaikutuksessa ja yhteistyössä saavuttaa niitä taitoja, jotka ovat vasta kypsässä. Tässä Vygotski painottaa erityisesti ohjauksen ja vuorovaikutuksen merkitystä. Jos edellä mainittua tarkastellaan oppikirjojen näkökulmasta, niin opettajan rooli oppimisen ohjaajana ja erilaisten työmuotojen sallijana nousee oppikirjoja merkittävämmäksi juuri vuorovaikutuksen ansiosta.

Alan Schoenfeldin (1994, s. 55–56) näkemyksen mukaisesti matematiikka koostuu puhtaasta matematiikasta, matematiikan opiskelusta sekä matematiikan tekemisestä (*doing*). Paljolti esimerkiksi ongelmanratkaisua ja matemaattista ajattelua tutkineena, hän esitti matematiikan tekemisen erityisesti sosiaalisena tapahtumana: Matematiikan opiskelun tulisi olla taktiilista, kokeilevaa sekä vahvasti kommunikointiin perustuvaa. Tämä kommunikointi lisääntyy, kun matemaattisia ongelmia ratkotaan yhdessä ratkaisuja pohtien. Tässä Schoenfeld (1994) painotti matemaattisen ajattelun voimaa: Yhdessä pohtien, kokeillen ja kommunikoiden jokainen kielentää matemaattista ajatteluaan. Edelleen hänen mukaansa matematiikan opetuksen tavalla on suuresti merkitystä oppilaiden matemaattiseen ajatteluun: yksipuolinen ja epämotivoiva opetus jättää oppilaille juuri yksipuolisen ja lannistuneen kuvan. Tässä tutkimuksessa näen matemaattisen ajattelun olevan oppilaan matemaattisen tiedon ajattelua, käsittäen niin käsitteet kuin toimintaperiaatteet.

2.3 Matematiikan oppikirjan merkityksestä alkuopetuksessa

Moninaisten tutkimusten perusteella suomalainen opetus on hyvin oppikirjasidonnaista. (mm. PIRLS, 2011; TIMSS, 2015; Ahtineva, 2000; Joutsenlahti & Vainionpää, 2008.) Vaikka perusopetuksen opetussuunnitelma luo raamit opetukseen, on Perkkilä (2002, s. 48) hyvin tiivistänyt oppimateriaalin asemaa: voidaan ajatella, että käytettävä oppimateriaali ilmentää koulun ja sen opettajien pedagogista ajattelua, ohjaten ja kontrolloiden näin omalla tavallaan opetustapahtumia sekä oppimisprosessia. Perkkilä, Joutsenlahti ja Sarenius (2018, s. 345) ovat kirjoittaneet, että oppikirjan merkitys on oppilaalle suuri, mutta opettajalle se voidaan nähdä peräti opetussuunnitelman asemassa. He näkevät oppimateriaalin tavoitteena opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisen oppimisen. Ahtineva (2000, s. 23) puolestaan painottaa oppikirjan tavoitetta yhdistää tieteellistä tietoa ja arkitietoa: oppikirjan tehtävänä on välittää tieteenalan tietoa tavalla, joka auttaa oppilasta ymmärtämään tämän merkitystä myös omassa elämässään. Myös Niiniluoto (1994, s. 8–9) täsmentää, että oppikirjat ovat kuin tietokirjoja, jolloin niiden tulee perustua viimeisimpään tieteelliseen tietoon, kuitenkin esittäen asian niin, että oppilas kykenee korvaamaan havainnoilla tekemänsä arkitiedon tieteelliseksi tiedoksi. Kuten ei tietokirjaa, ei myöskään oppikirjaa voi nähdä neutraalina. Tämän Perkkilä (2002) tiivistää väitöskirjassaan: Oppikirjan sisällöt ja painotukset määrittelevät lukijalleen sen, mitä pidetään tärkeänä oppiaineksenä. Lisäksi oppikirja opettaa kuvin, tekstein ja tehtäviensä ominaisuuksin lukiensa oppimaan tietyllä tavalla sekä käytettäessä kontrolloi opetustapahtumaa. (Perkkilä 2002, s. 48.)

Havaintojen tekeminen ja tiedon prosessointi ovat oppimisen edellytyksenä, jolloin opettajan on perustettava opetusjärjestelyt niin, että oppilaiden mielenkiinto ja huomio keskittyy asioihin, joista heidän halutaan tekevän havaintoja (Ahtineva 2000, s. 24). Jos oppikirjan yleinen tavoite on yhdistää oppilaan arkitieto tieteelliseen tietoon, on Ahtineva (2000, s. 41) nähnyt tehtävien tavoitteeksi

ohjata oppilas tiedon hankintaan, tulkintaan ja käsittelyyn, sen vertailuun, soveltamiseen sekä muokkaamiseen, jolloin tehtävät täydentävät ja laajentavat oppilaan käsityksiä. Kuten tutkimukset (mm. Perkkilä 2002, Perkkilä ym., 2018) antavat ymmärtää, esimerkiksi matematiikan oppimateriaaleilla on vahva ohjaava vaikutus opettajaan, oppilaaseen sekä toteutettavaan opetukseen, on äärimmäisen tärkeää, että nämä oppimateriaalit ovat ennen kaikkea täysin linjassa opetussuunnitelman kanssa ja näin niiden tulisi tukea myös Ahtinevan (2000) esille tuomia yhteyksiä tieteellisen tiedon ja arkitiedon välillä. Edellisen seurauksena oppimateriaalien tulee tarjota sisällöltään monipuolista, erilaiset oppijat huomioon ottavaa sekä oppilaiden omaan elämään sidoksissa olevaa, mielenkiintoista sisältöä. Oppikirjojen käsikirjoitusten tarkastusmenettely on kuitenkin poistettu Suomesta vuonna 1990, jonka jälkeen kustantajat ovat itse saaneet määritellä sisällöt ja sen etenemistahdin. (mm. Perkkilä, 2002; Perkkilä ym. 2018). Tämä saa varmasti jokaisen pedagogin pohtimaan oppikirjojen sisällön laatua sekä pohtimaan, millaista oppimisen kulttuuria kukin kirja tarjoaa. Perkkilä ym. (2018, s. 347) muistuttavat artikkelissaan oppimisympäristöjen vaihtelevuudesta ja siitä, että oppimista tulisi tapahtua myös muilla tavoin kuin kirjajohtoisesti. Cantell (2015, s. 84–85) esittää, kuinka ajattelun taitojen kehittämiseen ja käsitteiden ymmärtämiseen tarvitaan toiminnallista opetusta. Erityisesti opettajalta vaaditaan kykyä huomioida opetuksen kontekstuaalispedagoginen ulottuvuus: oppilaiden kokemusmaailmaan liitetty oppiaine sekä ikätasoisesti huomioitu oppimateriaali.

Erilaiset lähestymistavat matematiikan oppikirjoissa opettamisen lähtökohtina

Perkkilän ym. (2018, s. 347) mukaan opettajan toiminnallisista ja monimuotoisista ihanteista huolimatta opetus on käytännössä usein oppikirjoihin tukeutuvaa ja pahimmassa tapauksessa oppikirjapainotteista urakkaa, josta tulee suoriutua itsenäisesti ja sen jälkeen tarkistaa vastauskirjasta oikeat vastaukset. Perkkilän (1999; 2002) tutkimuksissa nousi esille oppilaan oppikirjojen rakenne, joka painottaa samankaltaisten harjoitustehtävien toistuvuutta sekä mekaanista harjoituskeskeisyyttä. Perkkilän ym. (2018) tutkimuksessa käy ilmi, että

määritelmälähtöisen sekä symbolisen lähestymistavan esitykset ovat vahvimmin esillä artikkelissa esitettyjen tutkimusten mukaan matematiikan oppikirjoissa.

Määritelmälähtöisessä tehtävässä lähtökohtana on pitkälti matematiikan symbolikieli. Määritelmälähtöisellä tavalla voidaan tarkoittaa esimerkiksi mekaanista toistavaa harjoitustapaa ja keinoja uuden käsitteen opettamiseen. Määritelmälähtöistä tehtävää määrittää usein myös suljetun tehtävän ominaisuudet. (Perkkilä ym., 2018, s. 352, 354.) Pehkonen (1995, s. 61–62) esittää suljetun tehtävän määrittelyksi sellaisen, jossa alku- ja lopputilanne on valmiiksi määritelty yksiselitteisesti. Avoimista tehtävistä taasen puhutaan silloin, kun lähtö- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritelty, jolloin oppilaalle on jätetty vapautta tehtävän ratkaisussa. Käytännössä tämä tarkoittaa, että saman ryhmän oppilaat saattavat päätyä erilaisiin, mutta yhtä oikeisiin tuloksiin riippuen heidän ratkaisuprosessien aikana tekemistään valinnoista. (Pehkonen 2011, s. 21–22.)

Van den Heuvel-Panhuizenin ja Drijversin (2020) mukaan realistisessa tehtävyytyypissä opittavaa asiaa lähestytään oppilaiden arkielämän esimerkkien kautta ja erityisesti sellaisten ongelmien kautta, joita oppilaat osaavat itse kuvitella. Perkkilän ym. (2018) mukaan nämä tilanteet toimivat mielenkiinnon lähteenä matemaattisten käsitteiden ja konseptien, proseduurien sekä matematiikan työkalujen kehittämiseen, joita opiskelijat voivat myöhemmin soveltaa, jolloin näistä tiedoista tulee vähemmän kontekstisidonnaisia. Realistisessa tehtävässä on parhaimmillaan lähtökohtana toiminnallinen taso. Kun oppilaan ymmärrys toiminnallisella tasolla kasvaa, voidaan vähitellen siirtyä tarkastelemaan tehtävää kuvallisella ja symbolisella tasolla. Tavoitteena on, että oppilaat voivat soveltaa oppimaansa arkielämän tilanteissa, heidän löytäessä oman kokemusmaailmansa kautta yhteyden opittavaan asiaan. (Perkkilä ym. 2018, s. 352 van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Freudenthal, 1973 mukaan.) Realistisessa lähestymistavassa oppilaat voivat lähestyä matemaattisia ilmiöitä niistä lähtökohdista, joita heillä on. Näin oppilas saa kehittää omaa ajatteluaan oman ymmärryksensä kautta.

Haapasalon (2011) määritelmän mukaisesti ongelmalähtöinen tehtävä vaatii oppilaalta uuden tiedon tuottamista: Tässä lähestymistavassa oppilas pyrkii

käyttämään, arvioimaan ja soveltamaan uutta tietoaan. Haapasalo (2011) esittää matematiikkaa konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisesti verkkomaisena rakenteena. Verkon rakentamiseksi oppijan on oman toimintansa ja kokemustensa pohjalta löydettävä ja muodostettava matemaattisten objektien välisiä yhteyksiä, sääntöjä sekä proseduureja. Näin ongelmalähtöisessä lähestymistavassa oppimista voidaan tarkastella konkreettisen ja abstraktin välillä liikkumisena, jolloin oppilas liikkuu toiminnalliselta tasolta symboliselle ja takaisin. (Haapasalo 2011, s. 137.)

Vuorinen (2009, s. 179) esittää toiminnallisuuden määrittelyksi fyysisen aktiivisuuden, jossa oppilaan oppiminen tapahtuu oman tekemisen ja osallistumisen kautta. Vuorisen mukaan toiminnallisuuden käsite on kuitenkin haastava määrittellä, sillä toiminnallisuuden käyttäminen opetuksessa voi olla moninaista, eikä tällöin yhtä oikeaa vastausta toiminnallisuuden käsitteen käyttöön ole. Norrena (2016, s. 14) esittää toiminnallisen oppimisen oppilaan aktiivisena ajattelemisena ja toimimisena oppimisprosessin aikana. Toiminta on vuorovaikutteista, jolloin oppilas saa oppimisprosessissa kokemuksia sekä elämyksiä ja oivaltaa yhdessä vertaistensa ja ohjaajiensa kanssa. Toiminnallisuus asettaa haastetta matematiikan oppikirjoille tai vähintäänkin opettajan tulisi huomioida oppilaan ikävaihe ja tarjota hänelle mahdollisuuksia rakentaa matemaattista ajatteluaan oman toimintansa kautta.

3 MATEMATIIKAN KIELENTÄMINEN PEDAGOGISENA LÄHESTYMISTAPANA

Vygotski (1978) on painottanut sosiaalista vuorovaikutusta oppimisessa: Hänen näkemyksensä mukaisesti uuden oppiminen ei ole sisäistä vaan ennemminkin sosiaalisena muotoutuvia kognitiivisia kykyjä sekä rakentuvaa kapasiteettia. Kielen hän näki tämän kapasiteetin kasvamisen avainasemassa. Kieli luo mahdollisuuden sosiaaliseen kanssakäymiseen. Vygotski (1978) esittää teoriassaan, kuinka ulkoisten operaatioiden myötä sisäisen ajattelun rakenteet alkavat muodostua ja kuinka ihmistenvälisestä ajattelusta alkaa muodostua sisäistä ajattelua. Tällainen yhteisöllisen rakennusprosessin ajattelutapa näkyy hyvin tämän ajan perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden sosiaaliskonstruktivistisessä oppimiskäsityksessä. Pedagogisena lähestymistapana kielentäminen avaa mahdollisuuksia tiedon rakenteluun yhteisöllisesti.

3.1 Kielentämisen osa-alueiden tarkastelua

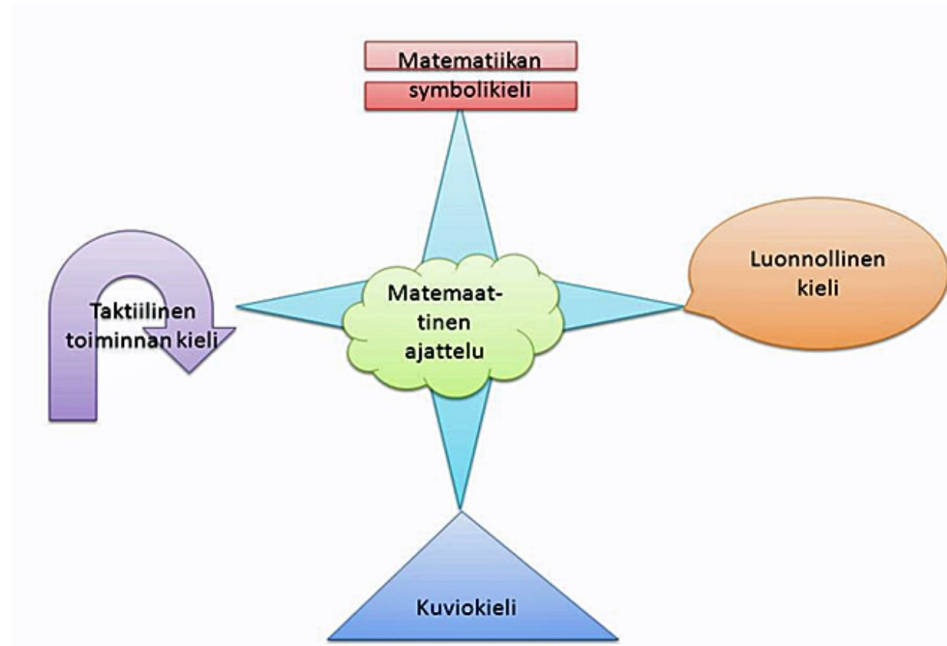
Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) ovat korostaneet kielellisen sosiaalisen kanssakäymisen merkitystä erityisesti esi- ja alkuopetuksen matematiikkakasvatuksessa, sillä esimerkiksi lukumääristä ja kappaleiden ominaisuuksista puhuttaessa yhdessä, lapsi rakentaa omia tietorakenteitaan käsitteiden ominaisuuksista. Myös Aunio, Hannula ja Räsänen (2004) ovat esittäneet kuinka kieli on erittäin keskeisessä asemassa lasten lasku- ja lukujonotaitojen kehityksessä: kun lapsi oppii hahmottamaan pieniä lukumääriä silmäyksellä, mahdollistaa se yhdistämään tähän lukusanan. Tämän jälkeen luettelemalla laskeminen avaa hänelle lukusanojen idean, jossa jokainen sana sarjassa lisää kasvavaan jonoon myös yhden lisää.

Matematiikan esittämisessä on kysymys ajattelusta sekä kommunikaatiosta, jolloin matematiikka voidaan nähdä omana kielenään (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Jorma Joutsenlahti on tutkinut kielentämistä muun muassa Kuljun (2017), Perkkilän (2022) sekä Rättyän (2015) kanssa. He ovat esittäneet matematiikan

kielentämisen olevan matemaattisen ajattelun ilmaisemista kolmen semioottisen järjestelmän avulla: puheen ja kirjoituksen käsittävällä luonnollisella kielellä, piirroksella, kuvat ja grafiikat käsittävällä kuviokielellä sekä matematiikan symbolikielellä. Tähän lisäksi he ovat liittäneet tärkeänä taktiilisen toiminnan kielen, jolloin ajattelua voidaan esittää kehollisesti ja välineillä (Kuvio 1).

Kuvio 1.

Matemaattisen ajattelun ilmaisu matematiikan neljän kielen avulla: symbolikielellä, luonnollisella kielellä, kuviokielellä sekä taktiilisella toiminnan kielellä Joutsenlahden ja Rättyän (2015) mukaan.



Kuviossa yksi esitetty neljä kieltä ovat omia järjestelmiään, mutta niissä on yhteisiä alueita ja ne täydentävät toisiaan. Matematiikan symbolikieli on universaali, kehittynyt merkkijärjestelmä, joka mahdollistaa tiiviin, mutta yksiselitteisen ilmaisun. Symbolikielen matemaattiset merkit kuten numerot, laskumerkit ja grafiikat sisältävät tietyn normiston. Arjessa puhumme esimerkiksi numeroista ja laskumerkeistä, ja näin ollen symbolikieli on toimivaa esimerkiksi ilmaistaessa määrien muutoksia. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 414, 415)

Luonnollinen kieli on usein äidinkielemme, puhumamme kieli, joko suullisesti tai kirjallisesti käytettynä. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, s. 415) esittävät luonnollisen kielen olevan täsmällinen ilmaisemaan käsitteen ominaisuuksia.

Luonnollinen kieli voi olla mielensisäistä puhetta itselle, puhuttua kieltä jollekin toiselle tai myös kirjoitettua luonnollista kieltä. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, 416; Joutsenlahti & Rättyä, 2015, s. 47, 52.)

Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 422) ovat määritelleet kuviokielen esimerkiksi numeroiden ja määrien hahmottamisen kuvioiden avulla, mutta se sisältää myös niistä erilliset grafiikat sekä piirrokset. Matematiikan universaaliudesta johtuen kuviokieli on äidinkielestä riippumatta kaikille sama: Kolmio näyttää kolmiolta joka puolella maailmaa ja paraabeli piirtyy koordinaatistoon aina matemaattisen lausekkeen mukaisesti. Erityisesti kuviokieli toimii esi- ja alkuopetusikäisille lapsille tarkasteltaessa lukumäärää ja lukumääriin liittyviä muutoksia visuaalisuuden kautta: Alku- ja lopputuloksen ollessa piirrettynä voidaan harjoitella näitä muutoksia, jolloin oppilas voi kielentää luonnollisella kielellä ajatuksiaan esille ja kertoa kuvioiden välisistä suhteista (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 422.)

Taktiilinen viittaa tuntoaistiin. Matematiikan kielentämisessä se on välinein tai kehollisesti tehtävää ja konkreettista. Taktiilisella toiminnan kielellä pystytään havainnollistamaan abstrakteja käsitteitä ja jälleen, erityisesti esi- ja alkuopetusikäisille lapsille asioiden konkreettinen käsittely, siirtely ja esimerkiksi rakentelu auttaa sekä syventää ymmärrystä. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, s. 414, 422.)

Yrjönsuuri (2004, s. 112-113) on esittänyt, kuinka matemaattiset käsitteet voivat abstraktiudessaan olla lapsille vaikeita käsittää. Avainasemaan tässä nousee avuksi hänen mukaansa konkreettisten mallien tarjoaminen sekä usean ja monipuolisen toiston tärkeys, erityisesti mitä nuoremasta oppijasta on kyse. Matematiikan soveltamisen perustana on siirtyminen luonnollisesta kielestä ja reaali maailmasta symboliseen matematiikan kieleen ja päinvastoin, jolloin tämä edellyttää matematiikan rakenteiden ymmärtämistä. Matematiikan kielentämisessä opettaja ohjaa pedagogisin järjestelyin oppilasta prosessiin, joka toisaalta kehittää oppilaan matemaattista ajattelua mutta myös avaa oppilaan ajattelua uudelle ymmärryksen tasolle: Matemaattisen ajattelun sekä kirjoitetun ja puhutun kielen kehä mahdollistaa laajan ja monipuolisen kielellisen kuvaamisen

kautta oppijalle uusia ajatuksia ja ahaa-elämyksiä (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, s. 416–417).

3.2 Kielentämisen merkityksestä matematiikan opetuksessa ja oppimisessa

Perkkilän (1998) lisensiaatintutkimuksessa nousi esille matematiikan oppikirjoissa tehtävärakenteet, jotka painottavat toistensa kanssa samanlaisia laskuharjoituksia. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) ovat huomioineet, kuinka opetus suunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) kielen merkitys on ensisijaisena matemaattisen ajattelun esittämisen välineenä muille. Tutkijat nostavat esiin, ettei kielen merkitys näissä opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) niinkään painotu matemaattisen tiedon rakentajana yhteisöllisesti tai oppijan oman ajattelun jäsentäjänä. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) kuitenkin painottavat, että oppilaita tulisi johdattaa ymmärtämään kielen merkitystä itselleen ja seuraamaan omaa ajatteluaan. Määritelmälähtöinen kirjaurakointi sekä edellä mainittu kielentämisen näkeminen vain muille hyödylliseksi on kuitenkin ristiriidassa opetussuunnitelman tavoitteiden kanssa, jotka painottavat omakohtaista tiedon rakentamista muun muassa kommunikoiden ja yhdessä pohtien.

Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, s. 425) esittävät, että juuri oppimisen näkökulmasta erilaisten havaintojen sekä tulkintojen tekeminen on kielentämisen ydintä, samoin oman ajattelun jäsentäminen: Oppilaan kertoessa ääneen tai esittäessä muulla tavoin miten on saanut tehtävän ratkaistua, hän joutuu jäsentämään asian itselleen ensin selkeäksi ja vielä sen jälkeen kertomaan yleisiä matematiikan termejä ja sanoja käyttäen asian muille. Näin ollen kielentäessään oppilas muodostaa oman ajattelunsa ja muille esittämisen välille vuorovaikutuksen jäsentäen omaa ajatteluaan ja omaksuen matemaattisia käsitteitä monitahoisemmin ja syvällisemmin. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 417, 428; Joutsenlahti & Rättyä, 2015, s. 54.) Tällaisessa ajatustenvaihdossa jokainen ryhmän oppilas joutuu refleктоimaan omaan ajatteluaan ja peilaamaan omia strategioitaan joko vahvistaen jo olemassa olevaa käsitystä mielessään tai luoden uutta tietorakennetta. Käyttäessään kielentämistä työkaluna matematiikan opettamisessa ja

oppimisessa, opettaja siis toteuttaa opetussuunnitelmaa niin matematiikan tavoitteiden kuin laaja-alaisten tavoitteiden kohdalta, mutta myös toisintaa sitä oppimisen kulttuuria, mitä opetussuunnitelma pyrkii todentamaan.

Matemaattisille käsitteille ja operaatioille voidaan rakentaa matematiikan symbolikielen, luonnollisen kielen sekä kuviokielen avulla monitahoisia merkityksiä, ja liikkumista näiden kielten välillä pidetään omana taitonaan: liikkumista kielten välillä voidaan nähdä koodinvaihtona. Oppilas voi liikkua eri kielten välillä sen mukaan, mikä auttaa häntä omalle ajattelulleen tarkoituksenmukaisesti ratkaisemaan ongelman tai esittämään ratkaisuprosessia muille selkeään ja ymmärrettävään muotoon. Näin oppilas koodaa ajatuksensa oman kokemusmaailmansa pohjalta. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 415, 422.) Opettaja voi ohjata oppilaita luovimaan eri kielten välillä painottamalla avoimia tehtävänantoja, jolloin mahdollistuu kielentämisen eri vaiheiden monipuolinen käyttö.

Perkkilä ym. (2018, s. 349) huomauttavat, kuinka opetussuunnitelman perusteissa painotetaan ymmärtävää matematiikan oppimisprosessia, mikä tarkoittaa oppilaan kehitysvaiheen huomioon ottamista matematiikan toteutuksessa. Erilaisia oppijoitahan on yhtä monta kuin on oppilaitakin. Tästä syystä matematiikan opettamisessa opettajan olisi tärkeää päästä oppilaiden matemaattisen ajattelun sisälle sekä antaa jokaiselle oppilaalle aikaa ymmärtää ja selvittää matemaattiset ongelmat sekä mahdollisuus kertoa, miten hän on ratkaisunsa tai umpikujaan päätenyt. Tässä nousee esille kielentämisen monipuoliset mahdollisuudet: joku oppilas kokee parhaakseen piirtää ja kirjoittaa ratkaisuprosessinsa, toinen oppilas haluaa esittää ainoastaan symbolikielellä vastauksen ja kolmannelle konkreettisten välineiden käyttö tuntuu tarkoituksenmukaisimmalta. Kulju ja Joutsenlahti (2015, s. 72) kuitenkin muistuttavat, että moni oppilas käyttää sujuvasti useita keinoja selittäessään ratkaisunsa ja olisikin toivottavaa, että oppilaat osaisivat koodinvaihdot kielentämisen eri osa-alueiden välillä.

Oppilaan esittäessä matemaattista ajatteluaan muille, saattavat myös oppilaan uskomukset käsitteestä paljastua (Joutsenlahti & Rättyä, 2015, s. 46). Näin paljastuu myös opettajalle tärkeää tietoa oppilaan osaamis- ja matemaattisen ajattelun tasosta. Opettajan nähdessä ainoastaan oppilaan kirjoittaman

matematiikan tehtävän virheellisen symbolikielisen vastauksen, ei tällöin opettajalla ole kuin tulkintoja, miten ja missä oppilas on tehnyt virheen. Tällöin voi auttaa kysymys ”kuinka tämän ajattelit?” oppilaalle. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, s. 417) myös esittävät, kuinka opettajan tulisi rohkaista oppilaita eri matematiikan kieliä yhdistävään yksilölliseen puheeseen niin ikään opettajan työtä hyödyntävästä näkökulmasta: Oppilaan esittäessä matemaattista ajatteluaan saa opettaja äärimmäisen tärkeää tietoa oppilaan osaamisesta, mikä helpottaa opetuksen suunnittelua sekä arviointia. Oppilaantuntemuksen parantuessa työn suunnittelu tarkoituksenmukaistuu, ja tämä palvelee myös eriyttämisen näkökulmaa.

Perkkilä sekä Joutsenlahti (2022) toteavat artikkelissaan, kuinka matemaattisen ajattelun monipuolinen ilmaisu kuvion yksi kielten avulla johdattaa oppilasta saavuttamaan ymmärtävää oppimista riippumatta ajattelijan iästä ja matemaattisen sisällön vaativuudesta. Oppilaan kuvaillessa tehtävän ratkaisua omin ajatuksin ääneen tai kuvin, hän esittää, kuinka ratkaisu ja siihen liittyvät edellytykset on ymmärretty. Perkkilän ja Joutsenlahden (2022) tutkimuksista on tullut esille useiden oppilaiden kokevan kielentämisen mielekkääksi työtavaksi matematiikan opiskelussa, sillä kielentäessä matemaattiset käsitteet ja proseduurit rakentuvat aktiivisesti opiskelijan ajattelulle ominaisiksi. Näin matematiikan opetus, hyödyntäessään kielentämistä, eriyttää oppimispolkuja arjessa. Järvilehto (2014, s. 18, 185) ei kuitenkaan poissulje oppikirjaa tästä yhtälöstä: kiinnostusta herättävä oppisisältö kannustaa ja sitouttaa oppilaita oppimisprosessiin sekä tekee mahdolliseksi tarkoituksenmukaisen oppimisen. Oppikirjan roolia tulisikin pitää ohjaavana, ei johdattavana työkaluna. Tässä tutkimuksessa halutaan matemaattisen ajattelun rakentumisen ohjaus ymmärtää siten, että oppilasta ohjataan kuvaamaan tehtävien ratkaisuja kielentämisen eri osioiden avulla: taktiilisesti, piirtäen, luonnollisella kielellä ja symbolisesti. Näin saataisiin monipuolisia ajattelutapoja esille.

4 TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET

Valtakunnallinen opetussuunnitelma painottaa alkuopetuksessa ja erityisesti matematiikassa konkreettista tekemistä, ihmettelyä ja pohdintaa eli vaihtelevia toimintatapoja ja välineitä työskentelyn apuna. Lukuisat tutkijat ovat esittäneet, että lapsen matemaattinen ajattelu kehittyy monipuolisilla menetelmin ja konkreettisilla kokeiluilla, jolloin lapsi saa itse luoda itselleen uutta tietoa. Tähän eräänlaisena vastauksena toimii matematiikan kielentäminen: Lapsen käyttäessä monipuolisesti matematiikan kaikkia neljää kieltä; symbolista kieltä, kuviokieltä, luonnollista kieltä sekä taktiillista toiminnan kieltä, luo hän samalla monipuolista matemaattista tietorakennetta aivoihinsa. Kielentäessään matematiikkaa oppilas jäsentää omaa ajattelua itselleen, mutta myös auttaa vertaisia kuuntelijoita peilaamaan omia matemaattisia tietorakenteitaan. Tämän lisäksi opettaja saa oppilaan kielentäessä tärkeää tietoa lapsen osaamisesta, matemaattisesta ajattelusta sekä taitotasosta. Tulevana luokanopettajana minua kiinnostaa, kuinka matematiikan oppikirja ohjaa oppilasta kielentämään matematiikkaa sekä rakentamaan matemaattista ajatteluaan monipuolisesti. Tätä oppimateriaalitutkimusta ohjaavat seuraavat tutkimuskysymykset:

1. Millaisia lähestymistapoja alkuopetuksen matematiikan oppikirjoissa käytetään?
2. Millaisia kielentämisen tapoja oppikirjojen tehtävissä on erotettavissa?
3. Miten tehtävien rakenne tukee matemaattisen ajattelun rakentumista?

Tarkastelen tutkimuksessani neljää erilaista alkuopetuksen matematiikan kirjan syysosaa kielentämisen näkökulmasta. Tutkimuksessani lähtökohtana on oppikirjan tuomat mahdollisuudet oppilaan matemaattiseen kielentämiseen.

5 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Lähestyn tutkimusaiheittani laadullisen tutkimuksen keinoin. Lähtökohtana laadulliseen tutkimukseen on todellisen, mutta moninaisen elämän kuvaaminen. Tämä tarkoittaa kohteen mahdollisimman kokonaisvaltaista kuvaamista. Laadullisen tutkimuksen tarkoituksena on paljastaa uusia näkökulmia tutkittavasta asiasta, jonka takia tutkimuksessa käytetään induktiivista analyysia, jossa teorian tai hypoteesin testaamisen sijaan lähtökohtana on aineiston syvälinen tarkastelu. Tapauksia ja aineistoa käsitellään laadullisessa tutkimuksessa ainutlaatuisina, jolloin aineistoa tulkitaan sen mukaisesti. (Hirsjärvi ym., 2007, s. 157, 160.) Alasuutari (2011, s. 41) esittää, että laadullisen tutkimuksen pyrkimyksenä on löytää koko aineiston kattavia säännönmukaisuuksia.

Laadullista tutkimusta kuvailaan prosessiksi: Aineiston kerääjänä ja analyysin tekijänä toimii itse tutkija, jonka takia tutkimusprosessin edetessä aineistoon liittyvät näkökulmat ja tulkinnat kehittyvät edelleen. Tästä syystä myös aineisto tai tutkimustehtävät saattavat muotoutua läpi tutkimuksen. Laadullisen tutkimuksen ominaispiirteinä pidetäänkin tutkimusmenetelmällisten ratkaisujen täydentymistä samanaikaisesti, kun tutkittavaan tapaukseen liittyviä seikkoja vähitellen ilmenee. (Kiviniemi 2018, s. 73). Sekä Alasuutari (2011, s. 40) että Kiviniemi (2018, s. 76, 81) nostavat laadullisen tutkimuksen tärkeäksi piirteeksi aineiston rajaamisen sekä tutkimusnäkökulman: tutkimusaineiston rajaaminen on lähtöisin niistä näkökulmista, joita tutkija haluaa korostaa ja tutkia. Tällöin tutkimuksen rajaaminen on tulkinnallista. Näin myös näkökulmaa vaihtamalla saadaan samasta aineistosta erilaista tietoa. Tässä oppimateriaalitutkimuksessa olisi erilaista tietoa tuottanut esimerkiksi määrällinen analyysitapa erilaisten lähtökohtien sekä kielentämistapojen esiintyvyydestä.

5.1 Teoriaohjaava sisällönanalyysi oppikirjatutkimuksessa

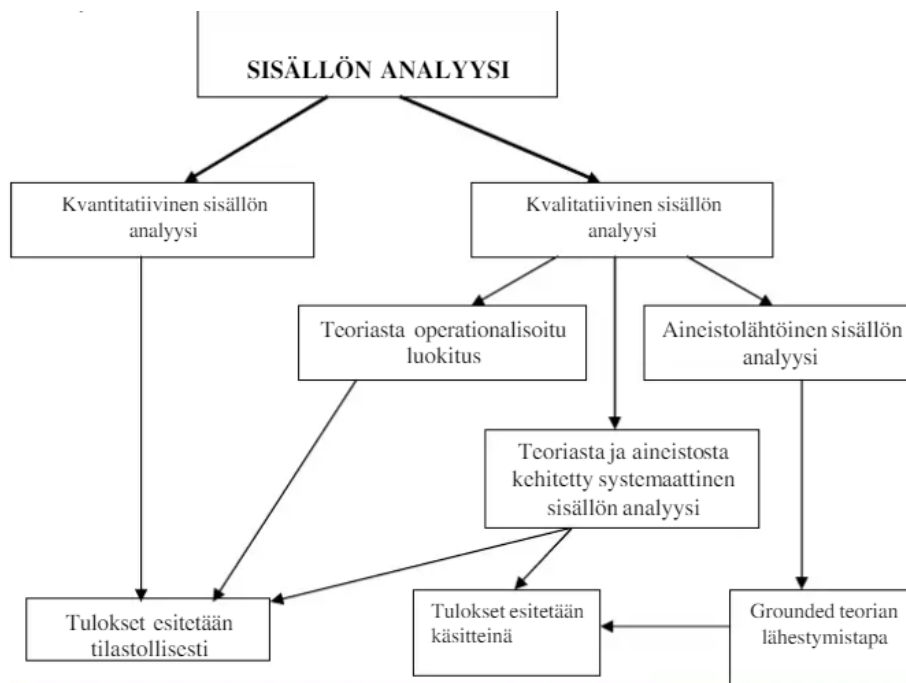
Tähän tutkimukseen olen valinnut tutkimusmenetelmäksi teoriaohjaavan sisällönanalyysin, sillä se soveltuu hyvin oppimateriaalitutkimukseen ja sen avulla

voidaan kategorisoiden erotella aineistosta tutkimusongelmaan sisältyvät asiat, joihin halutaan keskittyä (Tuomi & Sarajärvi, 2009 s. 92). Näkemykseni mukaan matematiikan oppikirjan tehtävien analyysi onnistuu parhaiten ja tarkoituksenmukaisesti omilla, teoriajohdetuilla kategorioilla. Sisällönanalyysi on tutkimusmetodi ja laadullisen analyysin muoto, jonka avulla tutkittavasta aineistosta voidaan tuottaa kategorioita ja luokkia (Margolis & Zunjarwad, 2018 s. 620; Tuomi & Sarajärvi, 2009).

Sisällönanalyysissä tekstiä analysoidaan samoin kuin diskurssianalyysissä, mutta näiden menetelmien erona nähdään se, että diskurssianalyysissä analysoidaan, kuinka merkityksiä tuotetaan tekstissä ja sisällönanalyysissä taas etsitään tekstin merkityksiä. Sisällönanalyysissä pyritään kuvaamaan aineistoa sanallisesti, jolloin se on mahdollista tehdä aineistolähtöisesti eli induktiivisesti, tai teorialähtöisesti eli deduktiivisesti. Aineisto- ja teorialähtöisen analyysin välinen ero on sekä analyysin että luokittelun tukeutuminen joko teoriaan tai aineistoon. Teoriaohjaavassa analyysissä teoreettinen viitekehys toimii kategorioiden ja analyysin pohjana, jolloin analysoitavat kategoriat pohjautuvat aineistoon, ja kategorioiden ryhmittelyä tai tulkintaa ohjaa teoria, ei niinkään tutkijan mielenkiinnon kohteet. (Tuomi & Sarajärvi, 2009 s. 98, 106–107, 116–117.) Seuraavassa kuviossa 2 on esitetty Seitamaa-Hakkaraisen (2014, s. 2) laatima kuvio sisällönanalyysin rakenteesta niin laadullisen kuin määrällisen tutkimuksen lähtökohdista.

Kuvio 2

Seitamaa-Hakkarainen (2014, 2) on selventänyt sisällönanalyysin rakennetta niin laadullisen, kuin määrällisen tutkimusotteen kannalta.



Laadullisen tutkimuksen ollessa ymmärrykseen ja selittämiseen pyrkivää, viitataan siinä teoreettiseen viitekehykseen sekä muihin saman aihepiirin tutkimuksiin. Laadullisissa tutkimuksissa aineisto yksinkertaistetaan tutkimukselle olennaisiksi ryhmyksiksi eli kategorioiksi. (Alasuutari, 2011, s. 51.) Tuomi ja Sarajärvi (2009, s. 105–107) täsmentävät, kuinka teoriaohjaavassa sisällönanalyysissä tutkittavasta ilmiöstä pyritään teoreettisten kytkentöjen kautta saamaan kuvaus tiivistetyssä ja yleisessä muodossa etsien tekstin merkityksiä. Kuviossa kaksi (Seitamaa-Hakkarainen, 2014 s. 2) esittää, kuinka laadullisen sisällönanalyysin tulokset voidaan esittää käsitteinä. Pyrin laadullisella sisällönanalyysillä tutkimusaineistoni selkeyttämiseen, tiivistetyllä, totuudenmukaisella ja täsmällisellä analyysillä, johtaen mahdollisesti uuden tiedon tuottamiseen (Tuomi & Sarajärvi, 2009).

Teoriaohjaavassa sisällönanalyysissä (ks. Kuvio 2) analyysirungon sisälle muodostetaan valitusta aineistosta erilaisia teemoja, luokituksia tai kategorioita, joihin on poimittu aineistosta analyysirungon kannalta oleellisia asioita. (Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 113.) Tutkimuksessani aineistona toimii tutkimuksen

sisältämien oppilaan oppikirjojen tehtävät. Sekä Seitamaa-Hakkarainen (2014), Schreier (2012) että Vuori (2022) täsmentävät sisällönanalyysin kategorisoinnin systemaattisuuden tärkeyttä läpi aineiston. Schreier (2012, s. 1) esittää kuinka tämä kategorisointi on sisällönanalyysin ydin. Vuori (2022) täsmentää, kuinka tämä kategorisointi on kuitenkin vasta sisällön kuvauksen työvaihe analyysille: Aineiston sisällöistä pyritään tekemään johtopäätöksiä, jotka kertovat tutkimuksen kannalta oleellisesta tiedosta.

Tuomi ja Sarajärvi (2009, s. 93) erittelevät, kuinka sisällönanalyysille on tyyppillistä aineistosta löydettävien asioiden teemoittelu, luokittelu tai tyyppittely. Edellä mainitut tavat nähdään varsinaisina sisällönanalyysin analyysitekniikkoina. Teemoittelussa laadullinen aineisto ryhmitellään ja jaotellaan aihepiirien mukaan, korostaen sitä, mitä kustakin teemasta ilmenee tai on sanottu. Tämän analyysimenetelmän tarkoituksena on etsiä aineistosta tutkimuksen teemaa kuvaavia näkemyksiä. Luokittelua pidetään useimmiten osana määrällistä sisällönanalyysiä (ks. Kuvio 2), sillä siinä aineistosta määritellään luokkia ja tarkastellaan, kuinka monta kertaa kyseiset luokat aineistossa esiintyy, jolloin luokitellut voidaan esittää myös taulukkona. Tyyppittelyssä aineisto taas jaotellaan oleellisiksi tyypeiksi niin, että aineistosta esitetään samojen aihealueiden sisällä oleville näkemyksille yhteisiä ominaisuuksia muodostaen näistä yhteisistä ominaisuuksista yleistys, josta näin ollen voidaan nostaa tyyppiesimerkki. Tällainen erittely näkyy selkeästi kuvioista 2, Seitamaa-Hakkaraisen (2014, s. 2) jaottelusta aineistolähtöiseen ja teoriasta johdettuun analyysiin sekä näiden analyysitulosten raportointiin.

Schreier (2012, s. 2) esittää, ettei tutkimuksessa useinkaan voida ajatella saadulla tiedolla olevan tiettyä merkitystä tai ”tiedon puhuvan puolestaan”, sillä vastaanottaja rakentaa itse merkityksiä näkemästään tai kuulemastaan. Näin ollen asioiden merkitys ei ikinä ole annettua, joskin tietyt merkitykset voivat olla kiinnitetympiä kuin toiset. Niin ikään Seitamaa-Hakkarainen (2014, s. 3) esittää laadullisen tutkimuksen luonteen olevan syklistä, jolloin laadullisten aineistojen analyysia ei yleisesti nähdä tutkimusprosessin viimeisenä vaiheena, vaan aineiston analysointi alkaa aineiston keruun yhteydessä koko aineiston lukemisella,

jolloin siitä saadaan yleiskuva. Kvalitatiivisessa sisällönanalyysissä luokittelukategoriat ovat joustavia työkaluja, ne kehittyvät ja voivat muuttua analyysiprosessin aikana, auttaen aineiston kokonaisvaltaista hahmottamista.

Tässä tutkimuksessa luokittelukategoriat muokkautuivat jokaisen oppikirjan kohdalla, luoden joustavan ja kattavan luokan kaikille tehtävätyypeille. Analyysin kerrostuneisuudesta johtuen prosessi oli elastinen ja läpi tutkimuksen muovautuva. Schreier (2012, s. 3–4) esittää kuinka tutkimuskysymys määrittää analyysin näkökulman ja Seitamaa-Hakkarainen (2014, s. 3, 5) täsmentää, ettei systemaattisen ja kokonaisvaltaisesti aineistoa katsovan analyysin kuitenkaan tulisi olla jäykkä ja etukäteenmääritellyjä luokitusluokkia tiukasti noudattava. Tutkimuksen luonteesta ja lähtökohdista riippuen, uusia kategorioita saattaa syntyä analyysin edetessä aineiston vertailu- ja vastakkainasettelussa.

Kussakin tutkimuksessa määritellään erikseen käytettävä aineiston kategorisointitapa, sillä nämä luokat ovat aina aineisto- ja tutkimussidonnaisia. Tutkimusteema- sekä ongelmat määrittelevät sisällönanalyysin luokittelujärjestelmän, mutta analyysin aloitus on samankaltainen luokittelujärjestelmästä huolimatta: aineisto pelkistetään, ryhmitellään ja abstrahoidaan. Laadullisen sisällönanalyysin hyviä puolia, on juuri materiaalin kategorisoiminen, jolloin informaatiotulvan luokittelu estää hämmennystä. (Schreier, 2012, s. 59.)

5.2 Tutkimusaineistona matematiikan oppikirjat

Tässä kappaleessa avaan hankkimiani kahden kustantamon matematiikan oppikirjoja. Molempien kustantamojen kaikki neljä oppikirjaa sisältävät omat etenemissuunnitelmat ensimmäisen vuosiluokan syys- ja kevätlukukausille. Oppikirjat poikkeavat toisistaan sisällöllisesti esimerkiksi opetustavoissa, aikataulutuksessa sekä aiheiden käsittelyn järjestyksessä. Tutkimukseni tarkoitus on tarkastella oppikirjojen tarjoamia lähestymistapoja matematiikan oppimiseen sekä kielentämisen mahdollisuuksia, ei asettaa eri oppimateriaaleja paremmuusjärjestykseen.

Joutsenlahti ja Vainionpää (2010, s. 138) esittävät, että painettu oppimateriaali on erityisesti matematiikan opetuksessa huomattavassa asemassa. Samoin kuten Perkkilän ym. (2018, s. 346) artikkelissa korostuu oppikirjan rooli matematiikan opetuksessa niin, että matematiikan oppitunnin rakennetta sanelee hyvin pitkälti oppikirjan sisällöt ja struktuuri. Tästä syystä tutkimukseni aineisto koostuu kahden suomalaisen kustantajan matematiikan oppikirjoista: Sanoma Pro Oy:n 1. luokan Kymppi-syysosa (Rinne ym., 2021) ja 1. luokan Milli -syysosa (Häkkinen ym., 2021) sekä Otava Oy:n 1. luokan Tuhattaituri -syysosa (Forsback ym., 2014) sekä 1. luokan Oivaltaja -syysosa (Rautio ym. 2020). Lähestyin kustantamoja sähköpostitse, esittelin itseni sekä tutkimusaiheeni ja pyysin tutkimuskäyttöäni ensimmäisen luokan matematiikan oppikirjoja tutkimukseeni. Rajasin sähköisen materiaalin sekä opettajanoppaat pois tutkimusaineistostani, keskittäen tutkimukseni oppilaan näkökulmaan.

Tuhattaituri, syyslukukausi a-osa

Tutkimukseni kohdentui ensimmäisen luokan syyslukukauden oppikirjoihin eli analyysin kohteena oli Tuhattaituri oppikirjasarjan a-osa, joka on tarkoitettu kustantajan ohjeistuksen mukaisesti syyslukukaudelle. A-osan sisällöt on jaettu kuuteen jaksoon: Lukukäsitteen jaksoon, yksinkertaisiin yhteen- ja vähennyslaskun jaksoon, edellä mainittujen yhteyteen, pitkiin yhteen- ja vähennyslaskuihin, puuttuvan yhteenlaskettavan tai vähentäjän jaksoon sekä tutkimustehtäväjaksoon.

Milli, syyslukukausi a-osa

Tutkimukseni kohdentui ensimmäisen luokan syyslukukauden oppikirjoihin eli analyysin kohteena oli Milli oppikirjasarjan a-osa, joka on tarkoitettu kustantajan ohjeistuksen mukaisesti syyslukukaudelle. Milli-sarja on jaettu teemoittain jaksoihin: matematiikan maailma -jaksoon, lukujen 0-5 jaksoon, yhteen- ja vähennyslaskun jaksoon lukualueella 0-6, lukujen 7-10 sekä ohjelmoinnin jaksoon.

Kymppi 1, syyslukukausi

Tutkimukseni kohdentui ensimmäisen luokan syyslukukauden oppikirjoihin eli analyysin kohteena oli Kymppi oppikirjasarjan syksy-osa. Kymppi-oppikirja on jaettu teemoittain jaksoihin alkaen lukukäsitteen ja lukujen 0–4 käsittelystä, jatkuen jaksoilla yhteen- ja vähennyslaskujen käsittelyyn sekä lukuihin 5 ja 6, 7–10 lukujen jaksoon, eurojen ja lukujen 11–12 jaksoon sekä koodauksen ja kertauksen jaksoihin.

Oivaltaja syyslukukausi 1a

Tutkimukseni kohdentui ensimmäisen luokan syyslukukauden oppikirjoihin eli analyysin kohteena oli Oivaltaja oppikirjasarjan a-osa, joka on tarkoitettu kustantajan ohjeistuksen mukaisesti syyslukukaudelle. Oivaltaja-oppikirja on jaettu 7 jaksoon: ajatteluntaitojen harjoitteluun, luvut 0–6, kahteen oivallus -jaksoon, yhteen- ja vähennyslaskun, luvut 7–9 sekä geometria -jaksoon.

5.3 Tutkimusaineiston analyysi

Tässä tutkimuksessa sisällönanalyysi alkoi aineiston läpikäynnillä muutamaan kertaan, jotta muodostuisi kokonaiskuva jokaisesta kirjasarjasta ja syntyisi alkukäsitys kategorioiden luomiseksi. Tämän jälkeen analyysi jatkui pilkkomalla aineisto eli tehtävät osiin. Analysointi jatkui ryhmittelemällä sekä abstrahoimalla tehtävät ensimmäisen tutkimuskysymyksen näkökulmasta kategorioiden mukaisesti määritelmälähtöisiin, realistisiin, ongelmalähtöisiin sekä toiminnallisiin tehtäviin. Sijoitin tehtävät taulukkoon, jotta kokonaiskuva siitä, millä tavalla nämä lähestymistavat ovat oppikirjoissa painottuneet, tulisi esille. Toisen tutkimuskysymyksen ”*millaisia kielentämisen tapoja tehtävissä näkyy oppilaille ja miten tehtävien rakenne tukee matemaattisen ajattelun kehittymistä?*” näkökulmasta analyysi jatkui uudella oleellisen tiedon erottelulla ryhmittelyyn sekä abstrahoinnin keinoin.

Tarkastelin tutkimukseni aineiston kirjasarjoista oppilaan oppikirjoja seuraavasti: avasin ominaispiirteitä sekä etsin jokaisesta kirjasarjasta tyypillisiä

esimerkkejä jaotteluni mukaisista tehtävistä. Ensimmäisen tutkimuskysymyksen osalta oppikirjojen esimerkkitehtävät on valittu teoreettisesta viitekehuksesta nousseeseen luokittelurunkoon, jossa olen luokitellut aineiston ensin kolmeen kategoriaan: määritelmälähtöiseen, realistiseen sekä ongelmalähtöiseen tehtävään Perkkilän ym. (2018, s. 352) mallin mukaisesti. Tähän luokittelurunkoon olen lisännyt vielä toiminnallisten tehtävien kategorian. Nämä kategoriat on avattu luvussa 2.2. Tämän edellä mainitun luokittelurungon mukaisen tehtävien luokittelun on tarkoitus vastata ensimmäiseen tutkimuskysymykseeni. Edellä kuvatun luokittelun jälkeen erittelin näissä kategorioissa havaittavat kielentämisen keinot tarkastelemalla matemaattisen ajattelun rakentumisen tukemista toisen tutkimuskysymyksen mukaisesti. Matemaattisen ajattelun kehittymistä tarkastelin tehtävärakenteiden näkökulmasta kiinnittämällä huomiota seuraavaan: Onko tehtävien rakenteissa ohjausta kielentämisen eri osa-alueisiin ja siten monipuoliseen matemaattisen ajattelun kehittämiseen.

Oppikirjojen lähestymistapojen analysointi

Tutkimusprosessin aineiston analyysivaiheessa tutkija pyrkii selvittämään, minäkalaisia vastauksia aineisto antaa tutkimuskysymyksiin. Tämän takia aineistonkeruu, analyysin suunnittelu ja toteuttaminen ovat erittäin tärkeässä asemassa. (Hirsjärvi ym., 2007, s. 221.) Tutkimukseni analyysissä oppikirjoista oli erotettavissa neljä päälähestymistapaa: määritelmälähtöinen, realistinen, ongelmalähtöinen sekä toiminnallinen. Taulukossa 2 on esitetty tutkimuksen kohteena olevien oppikirjojen tehtävien jakautuminen edellä mainittujen päälähestymistapojen mukaisesti. Kaikissa tutkimuksen aineiston oppikirjoissa tehtävät on numeroitu etenevin numeroin: osa tehtävistä sisältää pilkottuja osia, joista osa on merkitty kirjaimin a, b, c, ja niin edelleen. Nämä tehtävät on laskettu yhtenä tehtävänä etenevän numeroinnin perusteella, sillä tehtävälaji ei näissä pienemmissä osatehtävissä muutu. Tuhattaituri- kotitehtävätösin tehtävät eivät ole numeroitu, jolloin tehtävät on kuitenkin laskettu johdonmukaisesti niin, että tehtävänanto määrittää kunkin tehtävän. Milli-oppikirjan Millimittaritehtäviä ei ole numeroitu, jolloin ne on laskettu niin, että tehtävänanto määrittää kunkin

tehtävän. ”Projekti”- kappaleen jokainen tehtävä on erikseen laskettu, näistä edellä mainituista laskutavoista on esimerkit liitteessä 2. En ole huomionnut analysoinnissani Milli-kirjan ”Katsastus”-aukeaman itsearviointia, Oivaltajan Minä ja matematiikka- itsearviointiosiota tai Tuhattaituri-kirjan itsearviointilaatikkoja.

Näkemykseni mukaan määrällinen taulukointi vastaa tutkimuskysymyksiin tarkoituksenmukaisesti ja täsmällisesti laadullisen tutkimuksen ohella. Ensimmäistä tutkimuskysymystä havainnollistaa taulukko 2 oppikirjojen tehtävätyyppien painotuksista. Tulososiossa tuon esille oppikirjojen lähestymistapojen painotuksia sekä niissä näkyviä kielentämisen keinoja.

Taulukko 2

Tutkimuksen kohteena olevien matematiikan oppikirjojen tehtävien jakautuminen neljän päälähestymistavan mukaisesti sekä suhteelliset prosenttiosuudet tarkastelluista oppikirjojen tehtävistä neljän päälähestymistavan mukaisesti

Tehtävä- tyyppi	Määritelmälähtöinen	Realistinen	Ongelmalähtöinen	Toiminnallinen	Yhteensä
Milli	361 (85.8 %)	12 (2.9 %)	28 (6.7 %)	20 (4.8 %)	421
Tuhattaituri	346 (85 %)	7 (1.7 %)	44 (10.8 %)	10 (2.5 %)	407
Oivaltaja	359 (84.3 %)	10 (2.4 %)	39 (9.2 %)	18 (4.2 %)	426
Kymppi	336 (90.6 %)	10 (2.7 %)	19 (5.1 %)	6 (1.6 %)	371

Kuten Perkkilä ym. (2018) totesivat, määritelmälähtöisessä lähestymistavassa pääsääntöinen esitystapa on matematiikan symbolikieli. Analyysissäni määritelmälähtöisiä tehtäviä määritteli symbolisen lisäksi kuvallinen esitystapa sekä suljetun tehtävän ominaisuudet. Perkkilän (1998, 2002) tutkimusten nostojen mukaisesti analyysissä määritelmälähtöisiä tehtäviä määritti myös mekaaniset ja toistuvat harjoitusmuodot. Esimerkiksi Lakka (2014) sekä Cantell (2015) esittivät konkretian ja toiminnallisuuden tärkeyden yhtymäkohdiksi oppilaan monimuotoisen matemaattisen ajattelun rakentumiselle, jolloin

määritelmälähtöinen tehtävä on melko lailla vastakohta Lakan (2014) ja Cantellin (2015) esityksille.

Luokitteluesimerkkejä tehtävistä neljän päälähestymistavan perusteella
Kuvassa 1 on esitetty jokaisesta tutkimuksenkohteena olevasta kirjasarjasta määritelmälähtöinen tehtäväsarja. Määritelmälähtöisiksi tehtäviksi luokiteltiin sellaiset tehtävät, joissa esiintyi matematiikan kielellä merkitty laskulauseke. Joihinkin näistä tehtävistä yhdistyi myös kuvallisia esityksiä.

Kuva 1

Esimerkkejä määritelmälähtöisiksi tehtäviksi luokitelluista tehtävistä Tuhattaituri 1a (s.80), Oivaltaja 1a (s.111), Milli 1a (s.179) ja Kymppi 1 syksy (s.109)

Milli 1a


4. Las-ke. Kirjoita kirjain lu-ku-suo-ralle.

10 - 7 = M 10 - 2 = I
 10 - 6 = P 10 - 4 = L
 10 - 1 = N 10 - 9 = R
 10 - 5 = O 10 - 3 = I

T A I

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Näytä vastaukset




Kymppi 1 syksy


4. Las-ke.

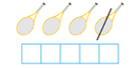
$7 + 2 =$ <input type="text"/>	$4 + 5 =$ <input type="text"/>	$3 + 3 + 3 =$ <input type="text"/>
$6 + 2 =$ <input type="text"/>	$3 + 5 =$ <input type="text"/>	$5 + 2 + 2 =$ <input type="text"/>
$8 + 1 =$ <input type="text"/>	$5 + 4 =$ <input type="text"/>	$9 - 2 - 1 =$ <input type="text"/>
$6 + 3 =$ <input type="text"/>	$2 + 6 =$ <input type="text"/>	$9 - 5 - 2 =$ <input type="text"/>


Oivaltaja 1a


3. Merkitse ku-va-sta vä-hen-nys-las-ku. Las-ke e-ro-tus.














Merkitse ensin kuinka monta on aluksi.

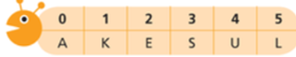
Merkitse sitten kuinka monta otetaan pois.

Tuhattaituri 1a

2. ras-ti

Las-ke. Etsi kirjain.

$5 - 4 =$ <input type="text"/>	$4 - 3 =$ <input type="text"/>
$3 - 3 =$ <input type="text"/>	$3 - 1 =$ <input type="text"/>
$5 - 2 =$ <input type="text"/>	$2 + 3 =$ <input type="text"/>
$2 + 1 =$ <input type="text"/>	$1 + 4 =$ <input type="text"/>
$5 - 3 =$ <input type="text"/>	$4 - 0 =$ <input type="text"/>
	$3 + 1 =$ <input type="text"/>



0 1 2 3 4 5
A K E S U L

Analyysissäni realistisen lähestymistavan tehtäviä määritteli van den Heuvel-Panhuizenin (2020) määritelmän mukaisesti oppilaiden arkielämän esimerkit ja sellaiset tehtävät, joita oppilaat itse voisivat kuvitella. Realistisessa lähestymistavassa analyysin kannalta erottelun määritelmälähtöiseen teki luonnollisen kielen mahdollisuus: Tämän takia analyysissä realistista lähestymistapaa määrittä sellaisen tehtävän ominaisuudet, joissa oppilas voisi luonnollisen

kielen kautta suorittaa tehtävän tarkoituksenmukaisesti. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018.) Kuvassa 2 on esitelty tutkimuksen kohteena olevista kirjoista esimerkkejä realistista lähestymistapaa noudattavista tehtävistä.

Kuva 2

Esimerkkejä realistisen lähestymistavan tehtäviksi luokitelluista tehtävistä *Tuhattaituri 1a* (s.54), *Oivaltaja 1a* (s.52), *Milli 1a* (s.4–5) ja *Kymppi 1 syksy* (s.82)

Milli 1a

Matematiikan maailma

- Harjoitellaan lukumäärien laskemista ja vertausta.
- Harjoitellaan ennen ja jälkeen lukien havaitsemista, jäsennystä ja muistamista.

1. Missä asioita näet kuvassa? Lasko, kuinka monta niistä on.
2. Ovatko ne kaikki samanlaisia? Perustele.

Tuhattaituri 1a

1. Kerro kuvista tarina. Tee yhteenlasku.

$3 + 2 = \square$

$\square + \square = \square$

$\square + \square = \square$

Oivaltaja 1a

6. Kuinka monta tavaraa parillasi on mukana koulussa?

- Merkitse luku määrä.
- Väritä pylväsdiagrammi.

Kymppi 1 syksy

Toimitaan yhdesä

1. Kerro jokaisesta kuvasta yhteenlasuktarina. Tee lasuku-kortteilla.

2. Kerro jokaisesta kuvasta vähenyslasuktarina. Tee lasuku-kortteilla.

Ongelmalähtöistä lähestymistapaa analyysissäni määritti Haapasalon (2011) sekä Pehkosen (2011) esitykset uuden tiedon tuottamisesta sekä avoimesta tehtävänannosta. Kuvassa 3 on esitetty tutkimuksen kohteena olevista kirjoista esimerkkejä ongelmalähtöistä lähestymistapaa noudattavista tehtävistä.

Kuva 3

Esimerkkejä ongelmalähtöisiksi tehtäviksi luokitelluista tehtävistä Tuhattaituri 1a (s.153), Oivaltaja 1a (s.151), Milli 1a (s.37) ja Kymppi 1 syksy (s.131)

Kymppi 1 syksy

5. Mi-kä lu-ku so-pii ku-van pai-kal-le?

$9 - \heartsuit - \heartsuit = \heartsuit$
 $10 - \text{flower} = \text{flower}$
 $\heartsuit + \text{flower} = \text{apple}$

$\star + \star + \star = 9$
 $\star + \star = \text{apple}$
 $\text{apple} - \heartsuit - \heartsuit = \heartsuit$

$\heartsuit = \square$
 $\text{apple} = \square$

$\text{flower} = \square$
 $\star = \square$
 $\text{apple} = \square$
 $\heartsuit = \square$

Oivaltaja 1a

9. Päät-te-le. Mi-tä lu-ku-a ku-vat tarkoit-ta-vat?

$6 - \text{fish} - \text{fish} = \text{fish}$
 $\text{turtle} + \text{turtle} + \text{turtle} = 9$
 $\text{bird} - \text{fish} = \text{frog} - \text{turtle}$

	=	
	=	
	=	
	=	

Milli 1a

9. Mi-kä nu-me-ro-sar-ja on pii-los-sa? Päät-te-le ja mer-kit-se.

--	--	--	--	--

Tuhattaituri 1a

6. Ratkai-se lin-tu-jen ni-met.
Kuvissa on Toto, Aa-tu, Lu-lu, Tassu, Til-li ja Lil-li.

9	9
U	

X	X	X	X
---	---	---	---

●	▲	●	▲
---	---	---	---

●	▼	★	9
---	---	---	---

X	X	X	X
---	---	---	---

▼	▼	●	9
---	---	---	---

Toiminnallista lähestymistapaa määrittä tutkimukseni analyysissä Vuorisen (2009) sekä Norrenan (2016) määrittelytavat toiminnallisen lähestymistavan määrittelyyn, ottaen huomioon myös Pehkosen (2011) avoimen tehtävän näkökulman. Kuvassa 4 on esitelty tutkimuksen kohteena olevista kirjoista esimerkkejä toiminnallista lähestymistapaa noudattavista tehtävistä

Kuva 4

Esimerkkejä toiminnallisiksi tehtäviksi luokitelluista tehtävistä Tuhattaituri 1a (s.121), Oivaltaja 1a (s.73), Milli 1a (s.36) ja Kymppi 1 syksy (s.134)

Tuhattaituri 1a

Yh-des-sä

Muis-ti-pe-li

Peli-ohje:

- Kortit laitetaan numero-puoli alas-päin pöydälle.
- Kum-pikin pe-laaja kääntää vuo-rol-laan kaksi kort-tia. Mikä-li kää-netyis-sä kor-teissa on lu-vun 8 ha-jo-tus-pa-ri (esi-mer-kiksi 1 ja 7), pe-laaja saa pa-rin ja uu-den kääntö-vuo-ron.
- Voit-taja on se, jol-la on e-nem-män pa-re-ja, kun kaik-ki kort-tit on kää-net-ty.

Ryh-män ko-ko:
2 pe-laaja

Tar-vik-keet: kah-det nu-me-ro-kort-tit 0–8

Milli 1a

6 PYYDYSTÄ KALA

Pe-li 1



Pe-la-a-ji-a: 2

Vä-li-neet: 

Piir-rä vuo-rol-la-si 1, 2 tai 3 vaa-ka- tai pys-ty-suo-raa vii-vaa pis-tees-tä pis-tee-seen. Ka-lan ym-pä-ril-le saa ve-tää vii-meisen vii-van vas-ta, kun muut mah-dol-li-set vii-vat on ve-det-ty. Ka-lan ym-pä-ril-le vii-meisen vii-van ve-tänyt voi-ttaa pe-lin.

Oivaltaja 1a

5

Pe-la-a Val-taus-pe-li-ä.

- Pe-la-a pa-rin kans-sa yhteen kir-jaan.
- Hei-tä nop-paa vuo-rol-la-si.
- A-se-tä vä-ri-kie-ko sen kuvan pääl-le, jossa on sama lu-ku-määrä kuin nop-passa.
- Pe-lin voi-ttaa pe-laaja, joka saa pe-li-lau-dalle eni-ten vä-ri-kie-ko-ja.



Kymppi 1 syksy

Toi-mi-taan yh-des-sä

1. Kuin-ka mon-ta nap-pi-a o-tin?



2. Ta-pu-ta puut-tu-vat ker-rat.



Opet-ta-ji-lle: **Tehtä-väs-sä 1** lai-teta-n pöy-däl-le 5–10 nap-pia. Las-ke-taan ne yh-dessä. Sil-ten toi-nen kää-n-ty sel-in ja pa-ri ot-taa osan nap-ei-sta pois. Toi-nen päät-telee, kuin-ka mon-ta nap-pia on ot-ettu. Tar-kis-teta-n vas-taus las-ke-mal-la kä-dessä ol-levat nap-pit.
Tehtä-väs-sä 2 toi-nen taput-taa kä-si-sään 1–9 ker-taa. Pa-ri las-kee ja taput-taa sil-ten ne ker-rat, jot-ta puut-tu-vat kym-men-estä. Voi-daan my-ös koput-taa pöy-dän pin-taan, pa-rin kä-m-meneen tai hy-p-pää, käy-dä kyy-lyssä yms.

Toiminnallisen lähestymistavan tehtävissä näkyi esimerkiksi vuorovaikutteisuus, itse oivaltaminen, fyysinen aktiivisuus sekä tehtävän avoimuus.

Kielentämisen tapojen analysointi oppikirjojen tehtävistä

Tässä tutkimuksessa halutaan matemaattisen ajattelun rakentumisen ohjaus ymmärtää siten, että oppilasta ohjataan kuvaamaan tehtävien ratkaisuja kielentämisen eri osioiden avulla: taktiilisesti, piirtäen, luonnollisella kielellä ja symbolisesti. Näin saataisiin oppilaalta monipuolisia ajattelutapoja esille. Toisen tutkimuskysymyksen mukainen analysointi alkoi ensimmäisen tutkimuskysymyksen kategorioinnin jälkeen: Yleiskäsityksen saamiseksi analysoin ja abstrahoin määritelmälähtöiset, realistiset, ongelmalähtöiset sekä toiminnalliset tehtävät eri kielentämisen osa-alueiden esille saamiseksi. Tämän jälkeen tarkastelin kategorioita erikseen, mitä kielentämisen tapoja kussakin kategoriassa näkyy. Tämän jälkeen analyysi jatkui syventymällä tehtäviin, jotka ohjaavat oppilasta esittämään ajatteluaan monipuolisesti useammalla kuin yhdellä kielentämisen muodolla. Kategorioidessani oppikirjojen tehtäviä määritelmälähtöisten tehtävien kategoriaa on määritellyt paljolti juuri symbolinen tai kuvallinen esitystapa, minkä takia taulukossa edellä mainitut kielentämisen osa-alueet ovat yhdistetty. Taulukosta 3 on luettavissa tehtävien määrä oppikirjojen mukaan, millä tavalla kukin kielentämisen osa-alue painottuu kussakin oppikirjassa.

Taulukko 3

Tutkimuksen kohteena olevien matematiikan oppikirjojen tehtävien jakautuminen kielentämisen osa-alueiden mukaisesti sekä tehtävien suhteelliset prosenttiosuudet oppikirjojen tarkastelluista tehtävistä kielentämisen osa-alueiden mukaisesti

Oppikirja	Symbolinen ja/tai kuvallinen	Luonnollinen kieli	Taktiilinen	Useampi kuin yksi	Yhteensä
Milli	396 (94.1 %)	6 (1.4 %)	8 (1.9 %)	11 (2.6 %)	421
Tuhattaituri	395 (97.1 %)	3 (0.7 %)	4 (1 %)	5 (1.2 %)	407
Oivaltaja	408 (95.8 %)	2 (0.5 %)	3 (0.7 %)	13 (3.1 %)	426
Kymppi	362 (97.6 %)	4 (1.1 %)	2 (0.5 %)	3 (0.8 %)	371

Taulukosta on luettavissa, että symbolinen ja kuvallinen esitystapa oli vahvasti esillä tutkimuksen kohteena olleissa oppikirjoissa, muiden kielentämisen osa-alueiden jäädessä vähäisiksi.

Luokitteluesimerkkejä tehtävistä kielentämisen osa-alueiden mukaisesti







Seuraavassa kuvassa 5 on esitelty tutkimuksen kohteena olevista kirjoista esimerkkejä tehtävistä, joissa on nähtävillä symbolinen ja/ tai kuvallinen esitystapa. Tämä kielentämisen osa-alue oli vahvimmin nähtävillä kaikissa tutkimuksen kohteena olevissa oppikirjoissa.

Kuva 5

Esimerkkejä tehtävistä, joissa on näkyvillä symbolinen ja/ tai kuvallinen esitystapa. Tuhattaituri 1a (s.9), Oivaltaja 1a (s.16), Milli 1a (s.48) ja Kymppi 1 syksy (s.40)



Tuhattaituri 1a

5. Kuinka monta? Ympyröi luku.

 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

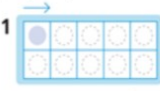
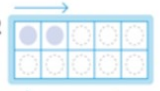
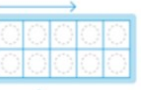
Milli 1a


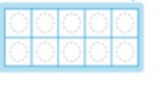
8. Kuinka monta puutuu täydestä?
täysi

	
---	---

Oivaltaja 1a

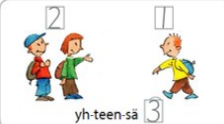
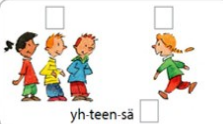
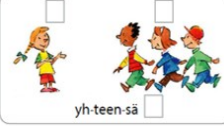



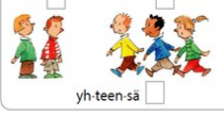
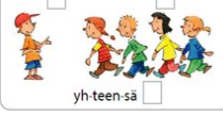
2. Väri-tä lu-vun o-soit-ta-ma mää-rä ympyröi-tä oi-ke-as-sa jär-jes-tyk-ses-sä.

1  2  3 

4  5 

Kymppi 1 syksy

1. Merkitse luku-määrät.

 yh-teen-sä <input type="text"/>	 yh-teen-sä <input type="text"/>
 yh-teen-sä <input type="text"/>	 yh-teen-sä <input type="text"/>
 yh-teen-sä <input type="text"/>	 yh-teen-sä <input type="text"/>
 yh-teen-sä <input type="text"/>	 yh-teen-sä <input type="text"/>

Luonnollisen kielen tehtäviä oli usein oppikirjojen jaksosten päättävissä aukeamissa, joissa tehtävätyyli oli usein muusta jaksosta selvästi poikkeavaa. Kuussa 6 on esitelty tutkimuksen kohteena olevista kirjoista esimerkkejä tehtävistä, joissa oppilasta ohjataan luonnollisen kielen käyttöön.

Kuva 6

Esimerkkejä tehtävistä, joissa on näkyvillä luonnollisen kielen esitystapa. Milli 1a (s.18), Oivaltaja 1a (s.52), Kymppi 1 syksy (s.34) ja Tuhattaituri 1a (s.59)

Milli 1a

OL-LIN OI-VAL-LUK-SET

Luo-ki-tel-laan!

- Jo-kai-nen va-lit-see yh-den a-si-an pul-pe-tis-ta, luo-kas-ta tai pi-hal-ta ja tuo sen o-pet-ta-jal-le.
- Tut-ki-taan tuo-tu-ja a-si-oi-ta yh-des-sä.
- Luo-ki-tel-laan a-si-at. Kuin-ka mon-ta e-ri-lais-ta ta-paa kek-sit-te?



Kymppi 1 syksy

Oivaltaja 1a

6 Kuin-ka mon-ta ta-va-raa pa-ri-lasi on mu-ka-na kou-lus-sa?

- Mer-kit-se lu-ku-mää-rä.
- Vä-ri-tä pyl-väs-di-a-gram-mi.



Tuhattaituri 1a

Toi-mi-taan yh-des-sä



2. Koi-ra-pe-li

Ryh-män ko-ko: 2 pe-laa-jaa
Tar-vik-keet: koi-ra-kor-tit Tu-hat-tai-tu-rin kuo-res-ta

Peliohje
Toinen pelaajista laittaa koira-kortteja pulpetille. Pelaajat laskevat koirien lukumäärän yhdessä. Pelaaja peittää kädellään haluamansa määrän koiria toisen pelaajan ollessa kääntyneenä selin. Kääntyneenä ollut pelaaja päättelee, kuinka monta koiraa on piilossa.

Mi-ten to
Vä-ri-tä ser-mu-kaan, r

Opettajalle: Kysytään ensin koko luokalta "Mikä on?" -kysymyksiä. Esimerkiksi "Mikä on alemmalla hyllyllä koiran ja pupun välissä?" Käytetään kiitettävästi edessä, takana, yläpuolella, alapuolella, keskellä, välissä. Jatketaan kysymistä vuorotellen parin kanssa.

Taktiliset toiminnan tehtävät olivat useimmiten pelejä, jolloin kategoriaa määrittä paljolti nopan heiton aktiivisuustaso. Useimpia pelejä oli mahdollista pelata yksin, tai parin kanssa ilman tarvetta luonnolliselle kielelle, toisin sanoen

puhumiselle. Taktiilista toiminnan kieltä sisältävissä tehtävissä puuttui muutamaa tehtävää lukuun ottamatta oppivälineiden tai konkreettisten tavaroiden apuna käyttö. Kuvassa 7 on esitelty tutkimuksen kohteena olevista kirjoista esimerkkejä tehtävistä, joissa on nähtävillä taktiilinen toiminnan kieli.

Kuva 7

Esimerkkejä tehtävistä, joissa on näkyvillä taktiilisen toiminnan kielen esitystapa. Tuhattaituri (s. 102), Oivaltaja 1a (s.60), Kymppi 1 syksy (s. 35) ja Milli 1a (s. 74)

Tuhattaituri 1a

15 Toimintatunti

1. Tangram

Tarvikkeet: tangram-palot

Milli 1a

AN-NOO-NAN AS-KAR-TE-LUT

Ha-jotus-ko-ne

- Hae pii-pun-ras-si.
- Pu-jo-ta sii-hen 5 hel-me-ä.
- Hae pah-vi-nen ker-tä-käyt-tö-mu-ki ja piir-rä sii-hen e-si-mer-kik-si hah-mon pää.
- Pyy-dä ai-kuis-ta te-ke-mään mu-kin poh-jaan 2 rei-kää.
- Pu-jo-ta pii-pun-ras-sin päät mu-kin si-sä-puo-lel-le.
- Tai-ta pii-pun-ras-sin päät mu-kin si-sä-puo-lel-la.

Voit ha-jot-taa ko-neel-la e-ri lu-ku-ja vaih-ta-mal-la hel-mi-en lu-ku-mää-rää.

Oivaltaja 1a

9 Pe-laa Jump-pa-pe-li-ä.

- Pe-laa yks-in tai pa-rin kans-sa yh-teen kir-jaan.
- Hei-tä nop-paa vuo-rol-lasi ja siir-ry sil-mä-lu-vun ver-ran e-teen-päin.
- Tee ruu-dussa o-le-va lii-ke 6 ker-taa.
- Voit pe-la-ta mon-ta kier-rosta.

Läh-tö

Kymppi 1 syksy

Tai-ku-ri-pe-li

Tar-vi-taan

Maa-li

Läh-tö

Oh-je

1. Hei-tä nop-paa.
2. Kun py-säh-dyt -ruu-tuun, saat jat-kaa vas-ta, kun o-let saa-nut jom-man kum-man lu-vuis-ta.
3. En-sin maa-liin pääs-syt voit-taa.

Lopuksi tuon esille niitä tehtäviä (kuvat 8–11), joissa oli nähtävillä useampaa kuin yhtä kielentämisen osa-aluetta. Tässä ei ole tarkasteltu tehtäviä, joissa näkyy yhtäaikaaisesti symbolinen ja kuvallinen esitystapa, sillä ne ovat olleet yhdistettynä jo määritelmälähtöisten tehtävien kategoriassa.

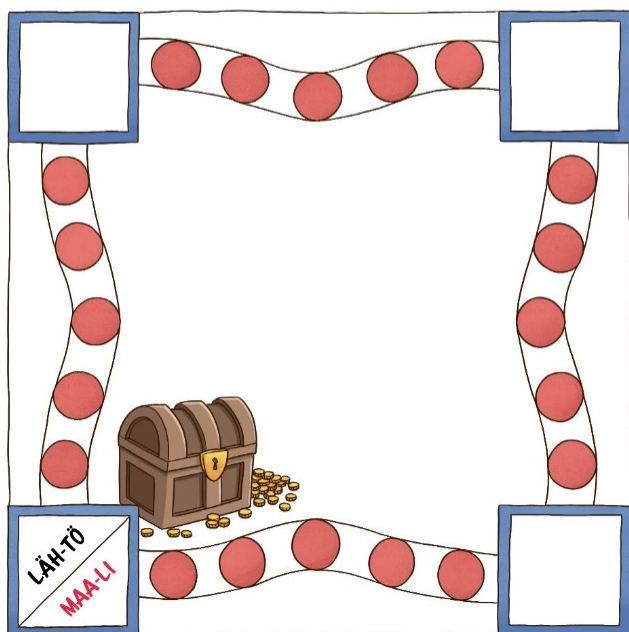
Kuva 8

Milli 1a (s.74) tehtävässä tunnistettavissa sekä taktiilinen että luonnollinen kieli. Tehtävän ratkaisumahdollisuudet ovat avoimia.

EE-NAN E-RI-TYI-SET

Aar-re-pe-li


- Suun-nit-te-le o-ma aar-re-pe-li.
- Keksi, mitä ta-pah-tu-ma-ruu-duis-sa ta-pah-tuu.
- Ko-ris-te-le ta-pah-tu-ma-ruu-dut ha-lu-a-mal-la-si ta-val-la.
- Ker-ro pe-li-si sään-nöt pa-ri-lle.
- Pe-lat-kaa pe-li!



Kuva 9



Kymppi 1 syksy (s. 179) tehtävässä nähtävillä taktiilisuuus sekä symbolikielinen esitys.

Ka-ru-sel-li-pe-li

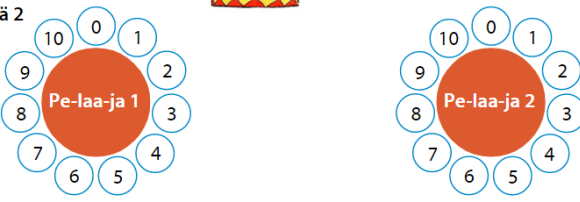
Tarvitaan 

- Hei-tä kah-ta nop-paa.
- Las-ke pis-teet yh-teen tai vä-hen-nä toi-sis-taan.
- Vä-ri-tä vas-ta-us ka-ru-sel-lis-ta-si.
- Vuo-ro siir-tyy pa-ril-le.
- En-sin kaik-ki lu-kun-sa val-lan-nut voit-taa e-rän.

E-rä 1

E-rä 2



Kuva 10

Oivaltaja 1a (s.73) nähtävissä taktiilisuuus, symbolinen ja kuvallinen esitystapa.

4 Pe-laa Ma-tik-ka-jump-pa-pe-li-ä.

- Pe-laa pa-rin kans-sa yh-teen kir-jaan.
- Hei-tä nop-paa vuo-rol-la-si ja siir-ry sil-mä-lu-vun ver-ran e-teen-päin.
- Toi-sta lu-ku-mää-rän o-soit-ta-ma lii-ke oh-jeen mu-kaan.
- Kel-taisessa ruu-dussa mo-lem-mat pe-laa-jat lii-ku-vat.
- Pe-lin voit-taa pe-laa-ja, jo-ka pää-see ens-im-mäi-se-nä maa-liin.




Kuva 11

Tuhattaituri 1a (s. 85) tehtävässä nähtävillä taktiisuus sekä symbolikieli.

Yh-des-sä

Noppa-peli

Ryhmän ko-ko: 2 pe-laa-ja
Tar-vik-keet: 1 nop-pa

Oh-je:

- Pe-la-taan toi-sen op-pi-laan kir-jaan. Pe-laa-jat heit-tä-vät vuo-ro-tel-len nop-paa.
- Pe-laa-ja vä-rit-tää ri-vil-tään no-pan sil-mä-lu-ku-a vas-taa-van nu-me-ron.
- Jos nu-me-ro on jo vä-ri-tet-ty, vuo-ro siir-tyy toi-sel-le pe-laa-jal-le.
- Pe-laa-ja, jo-ka saa en-sim-mäi-se-nä o-mat nu-me-ron-sa vä-ri-tet-ty-ä, voi-ttaa pe-lin.

Pe-laa-ja 1: _____ Pe-laa-ja 2: _____

1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6

Oppikirjoista oli löydettävissä suppeasti tehtäviä, joissa olisi tullut monipuolisesti erilaisia kielentämisen osa-alueita esille samanaikaisesti, kategoriaa määritti pitkälti noppapelit.

5.4 Tutkimuksen eettisyys ja luotettavuus

Olen tutkimuksessani pyrkinyt noudattamaan hyvän tieteellisyyden käytäntöjä noudattaen Tutkimuseettisen neuvottelulautakunnan (2021) ohjeita. Tiedeyhteisön tunnustamat toimintatavat ovat rehellisyys, huolellisuus sekä tarkkuus niin tutkimustyössä kuin tulosten tallentamisessa, esittämisessä ja arvioinnissa. Edellytys kriittiselle arvioinnille sekä tieteen edistymiselle on tieteen avoimuus. Elo ym. (2014, s. 2) tähdentävät, että luotettavuuden takaamiseksi koko tutkimusprosessin läpinäkyvyys on erityisen tärkeää, mihin tulee pyrkiä kaikissa kvalitatiivisesti toteutetuissa tutkimuksissa, kuten myös tässä tutkimuksessa. Mustajoki (2018) täsmentää, kuinka tutkimusmenetelmiä, -aineistoja ja -tuloksia avoimesti

jaettaessa, tutkimustulosten luotettavuus ja niiden validius tulee osoittaa tar-koilla analyysiprosessien kuvauksilla, mikä edesauttaa luottamuksen syntymistä tutkimusprosessia ja sen tuloksia kohtaan. Matematiikan oppikirjat, jotka on tässä tutkimuksessa analysoitu, esitellään keskittyen oppikirjojen rakenteeseen ja sisältöön. Näin ollen oppikirjasarjojen vertailu tai paremmuusjärjestykseen aset-taminen ei ollut tarkoituksenmukaista. Tutkimustani on ohjannut kysymykset siitä, millaisia lähestymistapoja oppikirjoissa on havaittavissa ja millaisia kielen-tämisen tapoja näissä lähestymistavoissa on oppilaan näkökulmasta ja miten teh-tävien rakenne tukee oppilaan matemaattisen ajattelun rakentumista.

Tutkimukseni luotettavuutta tukevat ne ajatusrakennelmat, jotka saavat vahvistusta toisista vastaavaa ilmiötä tarkastelluista tutkimuksista. Aineistoläh-töisen sisällönanalyysini tukena on teoriaohjaava menetelmä, jonka avulla olen kiinnittänyt huomiota tutkimuskysymysten kannalta oleelliseen teorian tietoon, kuten alkuopetuksen oppilaan matemaattisiin valmiuksiin, lukukäsitteen raken-tumiseen, kielentämisen lähtökohtiin sekä oppimateriaalin rooliin opetuksessa. (Eskola & Suoranta 2005, s. 210–213.)

Tutkijan on oleellista tarkastella tutkimuksensa tuloksia tasapuolisesti ja objektiivisesti, jotta aineiston analyysi ei kärsi ja tutkijan ilmaisut ovat näkymät-tömissä. Tutkijan tulee tavoitella kokonaisvaltaista objektiivisuutta tutkimusta tehdessään, vaikkei se ole aina kovin yksiselitteistä. (Hirsjärvi ym., 2007, s. 310.) Laadullisen tutkimuksen sekä sisällönanalyysin luotettavuuteen vaikuttavat tut-kimukseen ja analyysiin valmistautuminen, toiminnan organisointi sekä tulosten raportointi. Sisällönanalyysissä luotettavuudesta puhutaan, kun luokittelu ja analyysi tuottavat totuudenmukaista tietoa (Schreier, 2012.) Sisällönanalyysin luotettavuuden kyseenalaistaminen on tarpeellista: Analyysin toteutustapa vai-kuttaa siihen, mitkä ovat tutkimuksen lähtökohdat ja miten tutkimustuloksiin on päädytty sekä miten ne esitetään. Sisällönanalyysiin valmistautuminen tarkoittaa induktiivisesti toteutetussa analyysissä tarkastelua aineiston sopivuuteen, ai-neiston läpikäyntiä ja sen kategorioimista tutkimuskysymyksen mukaisesti luok-kiin. (Elo ym., 2014 s. 1–2.) Tutkimuksessani oppikirjojen tehtävien analysoinnin määrittelyn ja kategorisoinnin tekeminen oli toisinaan hankalaa ja tutkimuksen

toistettavuutta määrittävät valintani tutkijana tässä kategorioinnissa. Olen pyrkinyt avaamaan analyysiprosessia luvussa 5 tutkimukseni luotettavuuden parantamiseksi.

Olen käyttänyt tutkimukseni analyysia avatessa kuvia apuna oppimateriaalien tehtävistä luvuissa 5 ja 6. En julkaise näitä tehtäväkuvia missään muussa yhteydessä kuin tutkimuksessani. Tutkimuksen julkaisun jälkeen tuhoan kuvat tietoturvallisesti. Olen sopinut sähköpostitse oppimateriaalikustantajien Sanoma Pron sekä Otavan kanssa, että toimitan valmiin tutkimuksen heille luettavaksi.

6 OPPIKIRJA-ANALYYSIN TULOKSET

Tässä luvussa avaan tutkimuskysymysten mukaisesti tutkimukseni tuloksia. Ensimmäisessä alaluvussa tarkastelen, millaisia painotuksia alkuopetuksen oppikirjojen tehtävistä on löydettävissä ja toisessa alaluvussa millaisia kielentämisen osa-alueita näissä tehtävissä on nähtävillä ja miten tällaiset tehtävätyypit rakentavat lapsen matemaattista ajattelua. Tulokset pohjautuvat laadulliseen sisällön analyysiin, johon olen teoriaohjatulla analyysillä johtanut aineistostani kategorioita (Tuomi & Sarajärvi, 2009.) Tutkimuksen analyysiin sisältyi myös tehtävälaatuojen määrällisen esiintymisen esille tuonti, sillä näkemykseni mukaan tämä oli tarkoituksenmukaista oppikirjojen tehtävien painotusten esille saamiseksi.

6.1 Matematiikan oppikirjojen tehtävien luonne

Aineistoni oppikirjoissa painottui lähtökohtaisesti määritelmälähtöiset tehtävät. Yhteensä oppikirjoissa oli 1625 tehtävää ja niistä määritelmälähtöisiä oli 1402, eli 86 % kaikista tutkituista tehtävistä. Seuraavaksi suurin osuus tehtävistä oli ongelmalähtöisillä tehtävillä, joita oli 130 kappaletta, eli 8 % kaikista tutkituista tehtävistä. Ero näiden kahden välillä on valtaisa. Kolmanneksi suurin osuus oli toiminnallisilla tehtävillä, joita oli 54, eli 3 % kaikista tutkituista tehtävistä. Pienin osuus oli realistisilla tehtävillä, joita oli oppikirjoissan yhteensä vain 39 kappaletta, eli 2 % kaikista tutkituista tehtävistä. Erittelyt tehtävämääristä ja niiden jakautumisesta eri oppikirjojen välillä ovat luettavissa taulukosta 4.

Taulukko 4

Tutkittujen kirjasarjojen tehtävien painottuminen neljän päälähestymistavan mukaisesti sekä tehtävien suhteelliset prosenttiosuudet kaikista tarkastelluista tehtävistä päälähestymistapojen mukaisesti

Tehtävätyyppi	Määritelmälähtöinen	Realistinen	Ongelmalähtöinen	Toiminnallinen
Milli	361	12	28	20
Tuhattaituri	346	7	44	10
Oivaltaja	359	10	39	18
Kymppi	336	10	19	6
Tehtäviä yht.	1402	39	130	54
Suhteellinen osuus	86 %	2 %	8 %	3 %

Perkkilä (2002) esitti väitöskirjassaan, että oppikirjan painotukset määrittävät lukijalleen sen, mitä pidetään tärkeänä oppiaineena. Samalla tavalla kuin jo Perkkilän (1998; 2002) tutkimuksissa, tämän aineiston tyypillisin tehtävä on määritelmälähtöinen, tehtävä perustuu symboliseen sekä kuvalliseen esitykseen ja näyttäytyy mekaanisena tehtäväpatteristona. Näitä määritelmälähtöisiä tehtäviä on määrittäneet suljetun tehtävän ominaisuudet. (Perkkilä ym., 2018, s. 352, 354.) Pehkonen (1995, s. 61–62) täsmentää suljetun tehtävän olevan sellainen, jossa alku- ja lopputilanne on valmiiksi määritelty hyvin yksiselitteisesti.

Perkkilän ym. (2018) mukaan tavoitteena realistisen lähestymistavan tehtävissä on, että oppilaat voivat soveltaa oppimaansa arkielämän tilanteissa, heidän löytäessä oman kokemusmaailmansa kautta yhteyksiä opittavaan asiaan. Nämä tilanteet toimivat mielenkiinnon lähteenä matemaattisten käsitteiden ja konseptien, proseduurien sekä matematiikan työkalujen kehittämiseen, joita opiskelijat voivat myöhemmin soveltaa, jolloin näistä tiedoista tulee vähemmän kontekstisidonnaisia. (Perkkilä ym. 2018, s. 352 van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Freudenthal, 1973 mukaan.) Aineistossa realistiset tehtävät olivat pienemmässä

osassa. Tätä tehtäväkategoriaa määrittä luonnollisen kielen läsnäolon mahdollisuus sekä realistiset tapahtumat, joita lapset itse voisivat kohdata arjessaan.

Aineiston tyypillinen ongelmanratkaisutehtävä perustuu loogiseen päättelykykyyn. Avoimessa tehtävänannossa kaksi muuttujaa on jätetty avoimiksi, jolloin oppilaan on käytettävä päättelyä ratkaistakseen tehtävän. Tällainen tehtävä määrittyy Haapasalon (2011) määritelmän mukaisesti, jossa nähdään ongelmalähtöinen tehtävä sellaisena, mikä vaatii oppilaalta uuden tiedon tuottamista.

Tutkijat kuten Schoenfeld (1994), Häggblom (2004), Lakka (2014), Yrjönsuuri (2004) sekä Cantell (2015) ovat tutkimuksissaan painottaneet matematiikan oppimisen apuna käytettävän konkretiaa ja välineitä, toiminnallisuutta ja käsillä tutkimista sekä kommunikaatiota. Vuorinen (2009) esitti toiminnallisen tehtävän määrittelyksi fyysisen aktiivisuuden. Tämän tutkimuksen toiminnalliset tehtävät olivat aineistossa usein pelejä, jolloin ongelmanratkaisun ja toiminnallisuuden elementtejä yhdistyi. Tutkittavien oppikirjojen pelien fyysinen aktiivisuus jäi kuitenkin useimmiten nopan heiton tasolle.

Tutkimuksen kohteena olleissa oppikirjoissa painottuivat määritelmälähtöiset tehtäväsarjat, joita oli 86 % kaikista tehtävistä. Painotusero seuraavaksi isoimpaan kategoriaan, eli ongelmalähtöisiin tehtäviin, oli suuri, sillä ongelmalähtöisiä tehtäviä oli ainoastaan 8 % kaikista tehtävistä. Norrena (2016) huomioi toiminnallisuuden asettavan haastetta matematiikan oppikirjoille, mutta esittää että opettajan tulisi huomioida oppilaan ikävaihe ja tarjota hänelle mahdollisuuksia rakentaa matemaattista ajatteluaan oman toimintansa kautta. Toiminnalliset ja realistisen lähestymistavan tehtävät jäivät kuitenkin tämän tutkimuksen kohteena olleissa oppikirjoissa hyvin vähälle.

6.2 Kielentäminen matematiikan oppikirjoissa ja tehtävärakenteiden tuki matemaattisen ajattelun kehittymiselle

Aineistoni oppikirjojen tehtävissä painottui pääsääntöiseksi kielentämisen osaluokaksi symbolinen sekä kuvallinen esitystapa, joita yhteensä 1625 tehtävästä oli 1561 eli 96 % kaikista tehtävistä. Luonnollinen kieli, taktiilinen toiminnan kieli

sekä useamman kuin yhden kielen esiintyminen jakautuivat hyvin tasaisesti. Useampaa kuin yhtä kielentämisen osa-aluetta yhdistäviä tehtäviä oli 37, eli 2 % kaikista tutkituista tehtävistä. Taktiilisia tehtäviä oli oppikirjoissa yhteensä 17 kappaletta, eli 1,1 % kaikista tutkituista tehtävistä ja luonnolliseen kieleen ohjaavia tehtäviä oli 15, eli 0,9 % kaikista tutkituista tehtävistä. Erittelyt tehtävämääristä ja niiden painotuksista on luettavissa taulukosta 5.

Taulukko 5

Tutkittujen kirjasarjojen tehtävien jakautuminen kielentämisen osa-alueittain sekä tehtävien suhteelliset prosenttiosuudet kaikista tarkastelluista tehtävistä kielentämisen osa-alueitten mukaisesti

Oppikirja	Tehtäviä yht.	Symbolinen ja/tai kuvallinen	Luonnollinen	Taktiilinen	Useampi kuin yksi
Milli	421	396	6	8	12
Tuhattaituri	407	395	3	4	6
Oivaltaja	426	408	2	3	15
Kymppi	371	362	4	2	4
Tehtäviä yht.	1625	1561	15	17	37
Suhteellinen osuus		96 %	0.9 %	1.10 %	2 %

Symbolinen ja kuvallinen esitystapa oli vahvimmin esillä kaikissa aineiston oppikirjoissa. Kuten Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, s. 414–415) esittivät, symbolikielellä ilmaisu mahdollistaa tiiviin ja yksiselitteisen ilmaisun. Tämä mahdollistaa oppikirjoissa suuret, esimerkiksi koko sivun kokoiset patteristot mekaanista tehtävärakennetta.

Useampaa kuin yhtä kielentämisen osa-aluetta yhdistäviä tehtäviä oli kirjoissa yhteensä 37 kappaletta. Yrjönsuuri (2004, s. 416–417) nosti esille matemaattisen abstraktiuden vaikeuden selättämiseksi alkuopetuksessa konkreettisuuden ja monipuolisen toiston lisäämisen. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) nostivat esille tutkimuksessaan monipuolisen kielentämisen luovan prosessin, joka mahdollistaa oppilaan matemaattisen ajattelun kehityksen sekä ahaa-elämykset.

Myös Perkkilä ja Joutsenlahti (2022) esittävät oppilaan monipuolisen kielentämisen johtavan ymmärtävään oppimiseen.

Pelkästään taktiilisuutta esille tuovia tehtäviä oli 17 kappaletta. Kuten Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, s. 414, 422) erityisesti alkuopetusikäisille oppilaille konkretia ja toiminnallisuus havainnollistavat abstraktin käsitteen ymmärrettävään muotoon (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018; Cantell, 2015; Lakka, 2014). Luonnollisella kielellä kielentämiseen ohjaavia tehtäviä oli oppikirjoissa vähiten, yhteensä 15 kappaletta. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) esittivät, että luonnollisen kielen sekä matemaattisen ajattelun luoma kehä mahdollistaa laajan ja monipuolisen kielellisen kuvaamisen kautta oppijalle sekä mahdollisesti vertaisille, uusia ajatuksia ja ahaa-elämyksiä. Kielentäminen, sisäinen puhe matematiikasta tai muille ajatusten ilmaisu, jäsentää oppijan ajattelua ja syventää käsitteiden sisäistämistä.

Tutkimuksen kohteena olleiden oppikirjojen tehtävissä painottui matematiikan symbolikieli tai kuvallinen esitystapa. Tätä kielentämisen osa-aluetta oli yhteensä 96 % kaikista lasketuista tehtävistä. Luonnollisen kielen, taktiilisen toiminnan kielen sekä useamman kuin yhden kielentämisen osa-alueen esiintyminen oli tasaista mutta hyvin vähäistä. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) esittivät, että matematiikan esittämisessä on kyse ajattelusta ja kommunikaatiosta. He korostavat kielellisen sosiaalisen kanssakäymisen merkitystä erityisesti esi- ja alkuopetuksen matematiikkakasvatuksessa, sillä lapsi rakentaa matemaattisia valmiuksiaan, omia tietorakenteitaan käsitteiden ominaisuuksista, lukumääristä ja kappaleiden ominaisuuksista yhdessä puhuttaessa.

Joutsenlahti (2005) esittää Sternbergin (1996) ajatusten taustoilta matemaattista ajattelua kuvaavan viitekehyksen, jossa matemaattiseen ajatteluun nähdään keskeisinä vaikuttimina viisi kokonaisuutta: uskomukset, kulttuuri, matemaattiset kyvyt, ongelmanratkaisu sekä informaation prosessointi. Tutkijat kuten Sternberg (1996), Joutsenlahti (2005), Pehkonen sekä Rossi (2018) ja Leppäaho (2007) esittävät matemaattisen ajattelun kehityksen olevan hyvin monitahoinen prosessi, mutta juuri ongelmanratkaisu nähdään keskeisessä roolissa matemaattisen ajattelun kehittymisessä. Tutkimukseni tuloksista on nähtävissä, että

erityisesti ongelmanratkaisutehtävät ovat suppeasti esillä tutkimuksen kohteena olleissa oppikirjoissa. Määritelmälähtöisten tehtävien kategoriaa määrittä Pehkonen (1995) määrittely suljetusta tehtävästä. Näin ollen tutkimukseni tuloksista on nähtävissä määritelmälähtöisten, suljettujen tehtävien suuresta määrästä johtuva avoimien tehtävien pieni määrä. Pehkonen (2011) mukaan avoimessa tehtävässä oppilaalle on jätetty vapautta tehtävän ratkaisussa, jolloin oikeisiin ratkaisuihin tehtävässä voidaan päästä erilaisia ratkaisuprosesseja käyttäen. Pehkonen (1995) täsmentää, että avoimia tehtäviä ovat esimerkiksi arkielämän tehtävät, ongelman määrittäminen, ongelmakentät tai -jonot, ongelmat, joissa ei ole kysymystä, erilaiset ongelmien muunnokset, projektityöt sekä tutkimustehtävät.

Matematiikan kielentämisessä opettaja ohjaa pedagogisin järjestelyin oppilasta prosessiin, joka toisaalta kehittää oppilaan matemaattista ajattelua mutta myös avaa oppilaan ajattelua uudelle ymmärryksen tasolle. Matemaattisille käsitteille ja operaatioille voidaan rakentaa monipuolisella kielentämisellä, matematiikan symbolikielen, luonnollisen kielen sekä kuviokielen avulla monitahoisia merkityksiä. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018.) Tämän tutkimuksen tuloksista on kuitenkin nähtävissä, että tutkimuksen oppikirjojen tehtävissä monipuoliseen kielentämiseen ohjaaminen jää suppeaksi.

Joutsenlahti (2005) sekä Pehkonen (2011) nostivat esille matematiikan ymmärryksen olevan työskentelyä vaativa prosessi. Perkkilä sekä Joutsenlahti (2022) toteavat artikkelissaan, kuinka matemaattisen ajattelun monipuolinen ilmaisuus matematiikan eri kielten avulla johdattaa oppilasta saavuttamaan ymmärrettävää oppimista riippumatta ajattelijan iästä ja matemaattisen sisällön vaativuudesta. Van den Heuvel-Panhuizen ja Drijvers (2020, 531) tiivistävät tämän päivän ongelmaa esittäen, että vaikka matematiikan opetuksen kirjallisuudessa on paljon esillä realistisen matematiikan opetuksen hyötyjä, ei realististen käytäntöjen käyttö kuitenkaan yletä suoraan matematiikan opetukseen.

7 POHDINTA

7.1 Tulosten tarkastelu ja johtopäätökset

Tutkimuksessa tarkasteltiin oppikirjojen luomia mahdollisuuksia oppilaan matematiikan kielentämiseksi ja sitä kautta matemaattisen ajattelun rakentumiselle. Tuloksista on luettavissa, että oppikirjat pohjautuvat pääsääntöisesti määritelmälähtöisiin tehtäviin, tarjoavat varsin suppeat mahdollisuudet monipuoliseen matematiikan kielentämiseen sekä näin ollen suppeat mahdollisuudet oppilaan aktiiviselle ja monipuoliselle matemaattisen ajattelun rakentumiselle. Aineistolähtöisen sisällönanalyysini tukena on teoriaohjaava menetelmä, jonka avulla olen kiinnittänyt huomiota tutkimuskysymysten kannalta oleelliseen teorian tietoon, kuten alkuopetuksen oppilaan matemaattisiin valmiuksiin, kielentämisen lähtökohtiin sekä oppimateriaalin rooliin opetuksessa.

Tutkimuksessaan Perkkilä jo vuonna 1999 toteaa, että pääsääntöisesti oppikirjojen tehtävien rakenteessa näkyy yhteen oikeaan ratkaisuun pyrkiminen, oikein suoritettujen laskutoimitusten korostuminen sekä samakaltaisten tehtävien toistuminen. Tällöin oppilaan tekeminen, toimiminen ja konkretia jäävät mekaanisten tehtävien varjoon. Gracin (2018, s. 1003, 1020) tutki oppikirjojen tehtäviä tiivistäen monipuolisuuden huomioimisen hyvin oppilaan näkökulmasta esittämällä, että matematiikan kirjojen tehtävien laatu vaikuttanee oppilaiden ajatteluun. Tällöin tehtävien tulisi tarjota tasaisen monipuolisesti erilaisia tehtäviä. Hän kuitenkin esittää tutkimuksessaan, ettei tällainen monipuolisuus tule oppikirjoissa esille. Tämän tutkimuksen tulos on linjassaan niin Gracinin (2018) kuin Perkkilän (1998) tutkimusten kanssa: oppikirjojen tehtävänä olisi tarjota monipuolisia tehtäviä rakentamaan oppilaan matemaattista ajattelua monitahoisesti. Tässä kuitenkin oppikirjat eivät näytä onnistuvan.

Piaget (1988) esitti lapsen olevan ajattelussaan esioperationaalisen ja konkreettisen ajattelun kausien välillä alkuopetusikäisenä. Hän liitti lukumäärän säilyvyyden ymmärtämiseen lukukäsitteen vaiheittaisen syntyminen hierarkkisesti loogisten luokitusten, sarjojen sekä niihin liitettävien lukujonojen ja

operaatioiden seurauksena. Useat tutkijat (mm. Leppäaho, 2007; Pehkonen, 2011; Joutsenlahti, 2005; Lakka, 2014; Schoenfeld, 1994) ovat painottaneet ongelmanratkaisua, taktiillisuutta sekä sosiaalista tiedon rakentelua esimerkillisenä monimuotoisen matemaattisen ajattelun rakentajana. Oppikirjojen vahvat painotukset symbolikieleen sekä kuvalliseen esitykseen, eivät yllä tutkijoiden esittämään monipuolisuuteen.

Tutkimusten tulokset eivät ole linjassa liioin perusopetuksen opetussuunnitelman (Opetushallitus 2014) kanssa, joka painottaa alkuopetuksen matematiikan opetuksessa konkretiaa, monipuolisia työtapoja sekä sitä kautta lapsen oman ajattelun monipuolisen ajattelun kehittämisen tukemista. Kuten Perkkilä ja Joutsenlahti (2022) artikkelissaan toteavat, matemaattisen ajattelun monipuolinen ilmaiseminen eri kielentämisen osa-alueiden kautta auttaa ymmärtävään oppimiseen. Näin vahvasti esillä olevat symbolinen sekä kuvallinen esitystapa tukevat yksipuolisesti oppilaan matemaattisen ajattelun rakentumista. Esimerkiksi opetussuunnitelman (Opetushallitus, 2014) tavoite, jossa oppilas esittää matemaattista ajatteluaan suullisesti, kirjallisesti, konkreettisin välinein sekä piirtäen ja tulkiten kuvia, ei toteudu oppikirjapainotteisessa opetuksessa kuin pieneltä osin. Perusopetuksen opetussuunnitelman (Opetushallitus 2014, s. 98–99) painottaessa yhteistoimijuutta myönteisessä vuorovaikutuksessa, oppilaan aktiivisuutta sekä yhdessä oivaltamista ja ideoimista, saa nämä määritelmälähtöisten, symbolielisten ja kuvallisten oppikirjatehtävien painotukset pohtimaan, kuinka nämä asiat kohtaavat. Opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 2014) ohjaavat opettajaa oppimisympäristöjen organisoinnissa ja työtapojen valinnassa. Näin ollen olisi oletettavaa, ettei opetus olisi oppikirjapainotteista, kuten monet tutkimukset (Perkkilä, 2002; Joutsenlahti & Vainiöppää, 2010) osoittavat.

Ylioppilastutkinnon matematiikan sekä lyhyen että pitkän oppimäärän kokeissa hyvästä suorituksesta näkyy, miten kokelas on päätenyt vastaukseen (Ylioppilaslautakunta, 2019.) Näin ollen jään pohtimaan, missä kohtaa kielentämisen harjoitteluun paneudutaan, jollei sitä aloiteta heti alkuopetuksesta lähtien? Perkkilä ym. (2018, s. 354) totesivat, että alkuopetuksen matematiikan kirjoissa ongelmalähtöistä tehtävämallia vielä näkyy, mutta kuudennen luokan

matikankirjoista tällainen esitystapa on lähes hävinnyt. Tarkoittanee huonoa myös monipuolisen kielentämisen mahdollisuuksien esiintymiseen.

Useissa aineistoni oppikirjoissa useamman kuin yhden kielentämisen osa-alueen näkyminen tarkoitti oppilaalle symbolikielisen numeron ilmaisua luonnollisella kielellä. Esimerkiksi taktiillisissa peleissä, luonnollinen kieli näkyi vain tällaisena mahdollisuutena. Useissa tehtävissä lapsen matemaattisen ajattelun ilmaisun monipuolistamista voisi yksinkertaisesti lisätä lisäämällä oppilaan tehtävään kysymyksen ”Miksi? Selitä parille”. Tällaiseen luonnollisella kielellä kielentämiseen Hannula ja Holm (2018) esittävät opettajan näkökulmasta tärkeän seikan. Opettajan olisi syytä ymmärtää oppilaan suhtautumista matematiikkaan riittävän laajasti, jotta hän voi tukea oppimista parhaalla mahdollisella tavalla ja tukea oppilaan positiivista tunnesuhdetta matematiikkaan, matikkakuvaan.

Omat negatiiviset matikkakokemukseni alakoulussa pohjautuvat luultavimmin negatiiviseen matikkakuvaani. Hannula ja Holm (2018, 140) täsmentävät, että matematiikan kokemukset vaikuttavat oppilaan matematiikkakuvan muodostumiseen: Positiiviset kokemukset lisäävät uskoa omaan kykyihin ja innostavat oppimaan uutta. Toisaalta jatkuvat epäonnistumiset ja vaikeudet matematiikan oppimisessa aiheuttavat negatiivisia tunteita ja oppilas menettää uskoaan omaan kykyihinsä. Tutkijat nostavat myönteisen oppiasenteen luomiseksi keskiöön kannustamisen, tukemisen sekä tavoitteiden luomisen sellaisiksi, että oppilas pystyy onnistumaan. Tässä nousee esille kielentämisen monipuoliset mahdollisuudet oppilaiden ajatusten ilmentäjänä. Oppilaan kielentäessä matematiikkaa opettaja saa tärkeää tietoa oppilaan osaamistasosta, ja oppilaan uskomukset käsitteestä saattavat paljastua (Joutsenlahti ja Tossavainen, 2018, s. 417; Joutsenlahti & Rättyä, 2015, s. 46). Kulju ja Joutsenlahti (2015, s. 72) muistuttavat, että moni oppilas käyttää sujuvasti useita keinoja selittäessään matemaattista ajatteluaan auki ja olisikin toivottavaa, että oppilaat osaisivat koodinvaihdot kielentämisen eri osa-alueiden välillä. Tutkimukseni kohteena olleet oppikirjat eivät luo monipuolisia mahdollisuuksia tällaiseen matematiikan kielten koodinvaihtoon.

7.2 Tutkimuksen arviointi ja jatkotutkimusaiheita

Tutkimukseni luotettavuutta ja toistettavuutta arvioitaessa on erityisesti huomioitava tutkijan tapa kategorisoida oppikirjojen tehtävät sekä tulkita kielentämiseen ohjaavia tehtäviä ja harjoitteita eri oppikirjoissa. Hirsjärvi ym. (2007, s. 232) esittävät, kuinka tutkijan on huolehdittava, että tutkimuksen vaiheet on toteutettu ja selostettu erityistä tarkkavaisuutta ja huolellisuutta noudattaen. Oppikirjojen tehtäviä laskettaessa on otettava huomioon, että kategoriat ovat nousseet teorian ja aineiston yhteisvaikutuksesta. Tällöin on huomioitava tulkinvaraisuus tutkijan asemassani siitä, onko kategorioiden määrittely ollut tarkkarajaista ja johdonmukaista: Olen pyrkinyt kategorisoinnissa noudattamaan määrittelyjä tehtävätyyppien tunnusmerkkien mukaisesti, mutta toisinaan tehtävien tarkkarajainen luokittelu oli hankalaa, jolloin toistettavuuteen vaikuttaa vahvasti tutkijan oma näkökulma. Uskon kuitenkin, ettei mahdolliset pienet laskuvirheet vaikuta tutkimukseni kokonaiskuvaan ja tuloksiin merkitsevästi.

Tulosten soveltuvuus käytäntöön on suora, oppilaan oppikirja ei ohjaa oppilasta monipuoliseen kielentämiseen, eikä näin ollen rakenna monipuolista matemaattisen ajattelun pohjaa. Tutkimuksen rajoituksena näen opettajanoppaan ja sähköisen materiaalin poissulkemisen. Nämä materiaalit olisivat lisänneet aineiston volyymia valtavasti, joten poisjättäminen oli tutkimuksen rajaamisen sekä oppilaan näkökulmaan keskittymisen puolesta oleellista. Eskola ja Suoranta (2005) ovat todenneet, että aineisto alkaa saavuttaa saturaation eli kylläntymisen, kun uutta tietoa ei enää synny. Perinteisten oppikirjojen lisääminen olisi tuskin muuttanut saatuja tutkimustuloksia. Rajoituksena tälle tutkimukselle näen myös tehtävien kategorisoinnin: Esimerkiksi taktiilisen toiminnan kielen määrittelyyn katsoin nopan heiton olevan riittävää. Kuitenkin kokonaiskuvaa tarkastellessa taktiilisuuteen opetussuunnitelmankin (Opetushallitus, 2014) mukaan liittyy paljon merkittävämpää oppilaan fyysistä aktiivisuutta.

Tutkimuksen subjektiivisuustarkasteluun nostaa Hirsjärvi (2007, s. 310) tärkeän huomion tutkijan tavoiteltavasta objektiivisuudesta ja tavoitteesta pitää tulosten tulkinta puolueettomana ja tasapuolisena. Oman negatiivisen

matematiikanoppija kuvani tiedostaen pyrin näkemään aineiston, luomaan kategoriat ja tulkitsemaan tehtäviä ainoastaan tutkimuksen objektiivisesta näkökulmasta.

Jatkotutkimusnäkökulmaksi olisi mielenkiintoista nostaa pohdintaan, että miksi oppilaan oppikirjat ovat näin määritelmälähtöisiä ja jättävät ahtaan tilan oppilaan omalle ajattelulle. Aineiston yhden kirjan opettajan oppaassa oli paljon materiaalia erilaiseen toiminnallisuuteen niin oppilaalle yksilönä kuin ryhmille ja luonnollisella kielellä kielentämiseen, mutta oppilaan kirja itsessään oli muutamia poikkeuksia lukuun ottamatta täynnä symbolista ja kuvallista esitystä. Tämä sai minut pohtimaan jatkotutkimusmahdollisuutta: Vertailu opettajanoppaan ja oppilaan oppikirjan välillä, millaisia mahdollisuuksia molemmat oppilaalle luovat ja kuinka nämä opettajanoppaan antamat mahdollisuudet näkyvät oppilaalle. Jatkotutkimusaiheeksi nousi myös motivaation näkökulma: Kuinka erilaiset tehtävätyypit motivoivat oppilasta matematiikan opiskeluun ja voiko esimerkiksi oppilaan negatiivista matikkakuvausta ehkäistä monipuolisen kielentämisen keinoin. Oppilaat minunlaisellani taustalla, voisivat saada apua oppimiseen tämänkaltaisista lähestymistavoista.

LÄHTEET

- Ahtineva, A. (2000). *Oppikirja - tiedon välittäjä ja opintojen innoittaja? Lukion kemian oppikirjan - Kemian maailma 1 - tiedonkäsitys ja käyttökokemukset* (Annales Universitatis Turkuensis C 164) [Väitöskirja, Turun yliopisto]. Kasvatustieteiden tiedekunta, Turun opettajankoulutuslaitos.
- Alasuutari, P. (2011). *Laadullinen tutkimus 2.0*. (4. uudistettu painos). Vastapaino.
- Aunio, P., Hannula, M. M., & Räsänen, P. (2004). Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. In P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen, & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (198-221). Niilo Mäki Instituutti.
- Aunio, P., Niemivirta, M., Hautamäki, J., Van Luit, J., Shi, J & Zhang, M. (2006). Young Children's Number Sense in China and Finland. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 50 (5), 483-502. <https://doi.org/10.1080/00313830600953576>
- Aunola, K. & Nurmi, J-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluikässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s.54-68). Niilo Mäki Instituutti.
- Cantell, H. (2015). Ympäristöoppi – Ensi askel tieteiden integraatioon. Teoksessa: H. Ruuska, M. Löytönen & A. Rutanen (toim.), *LAATUA! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 81-90). Suomen tietokirjailijat.
- Dowker, A. (1998). Individual differences in normal arithmetical development. Teoksessa C. Donlan, (toim.), *The development of mathematical skills* (s.275-302). Taylor & Francis.
- Elo, S., Kääriäinen, M., Kanste, O., Pölkki, T., Utriainen, K. & Kyngäs, H. (2014). Qualitative Content Analysis: A Focus on Trustworthiness. *Sage Journals*. <http://journals.sagepub.com/doi/full/10.1177/2158244014522633>
- Eskola, J. & Suoranta, J. (2005). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. (7. painos) Vastapaino.
- Fuson, K. C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. Teoksessa D. A. Grouws (toim.), *Handbook of Research on Mathematics*

Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics (s.243-275). MacMillan.

Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49 (7), 1003-1024. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849>

Haapasalo, L. (2011). *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu*. Medusa.

Hannula, M. & Holm, M. (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H Silfverberg & P Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s.54-68). Niilo Mäki Instituutti.

Hannula, M. & Lepola, J. (2006). Matemaattisten taitojen kehittyminen esi- ja alkuopetuksen aikana: Mitkä tekijät ennakoivat aritmeettisten taitojen kehitystä? Teoksessa Lepola, J. & Hannula, M. (toim.), *Kohti kouluakielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys* (Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja A: 205, s. 129-153). Turun yliopisto.

Hannula-Sormunen, M., Mattinen, A., Räsänen, P. & Ruusuvirta, T. (2018). Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s.158-183). Niilo Mäki Instituutti.

Hirsjärvi, S., Remes, P., & Sajavaara, P. (2007). *Tutki ja kirjoita*. (13. osin uudistettu painos). Tammi.

Hägglom, L. (2006). Use of manipulatives in instruction and learning. Teoksessa E. Pehkonen, G. Brandell & C. Winslow (toim.), *Nordic Presentations. Proceedings of the section Nordic Presentations at ICME-10, July 12, 2004 in Copenhagen (Denmark)* (Research report 265, s.) Helsingin yliopisto.

Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisten tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä* [väitöskirja, Tampereen yliopisto].

<https://trepo.tuni.fi/handle/10024/105891/browse?type=author&value=Joutsenlahti%2C+Jorma>

- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2015). Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä. Teoksessa T. Kaartinen (toim.), *Monilukutaito kaikki kaikessa* (s. 57–76). Tampereen yliopiston normaalikoulu.
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2017). Multimodal languaging as a pedagogical model - a case study of the concept of division in school mathematics. *Education Sciences*, 7 (1), 1–9. <https://doi.org/10.3390/educsci7010009>
- Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. (2019). Sustainability Development in Mathematics Education: A case study of what kind of meaning do prospective class teachers find for the mathematical symbol “ $2/3$ ”? *Sustainability* 11 (2), 457. <https://doi.org/10.3390/su11020457>
- Joutsenlahti, J., & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen, & M. Tarnanen (toim.), *Rajaton tulevaisuus: kohti kokonaisvaltaista oppimista* (Ainedidaktisia tutkimuksia 8, s. 45–62). Suomen ainedidaktinen tutkimusseura. <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/153212>
- Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410–430). Niilo Mäki Instituutti.
- Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2008). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa. Teoksessa E.K. Niemi & J. Metsämuuronen. (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen 2008* (Koulutuksen seurantaraportit 2010:2, s. 137–148). Opetushallitus.
- Joutsenlahti, J & Vainiopää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen*

- vuosiluokan jälkeen vuonna 2008 (Koulutuksen seurantaraportit 2010:2, s. 138-146). Opetushallitus.
- Järvilehto, L. (2014). *Hauskan oppimisen vallankumous*. PS-kustannus.
- Järvinen, M-L. (2011). *Konstruktivistinen oppimiskäsitys opettajan pedagogisena työvälineenä alkuopetuksessa*. Tampereen yliopisto.
- Kiviniemi, K. (2018). Laadullinen tutkimus prosessina. Teoksessa R. Valli (toim.), *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2*. (5. uudistettu ja täydennetty painos, s. 73–87). PS-kustannus.
- Koponen, T. (2008). *Calculation and Language. Diagnostic and Intervention Studies*. [Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto].
<https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/18653>
- Lakka, J. (2014). Yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden rakentaminen alkuopetuksen matematiikassa : Yhden luokan oppilaiden erilaiset oppimispolut tehokkaiisiin strategioihin [Väitöskirja, Helsingin yliopisto].
<https://helda.helsinki.fi/handle/10138/135692>
- Leppäaho, H. (2007). *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi* [Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/13384>
- Margolis, E. & Zunjarwad, R. (2018). Visual Research. Teoksessa N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (toim.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (5.painos, 600-662). SAGE.
- Mattinen, A., Hannula, M. M. & Lehtinen, E. (2006). Katsotaanpas kuinka monta jalkaa tällä toukalla on! - Lapsen ohjaaminen lukumäärien havaitsemiseen ja käsittelemiseen. Teoksessa J. Lepola & M. M. Hannula (toim.), *Kohti koulua. Kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys* (s. 155–187). Turun yliopisto.
- Metsämuuronen, J. (2009). *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä*. (4. laitos, 1. painos). Gummerus.
- Mustajoki, H. (2018). *Avoin tiede ja tutkimusetiikka*.
<https://vastuullinentiede.fi/fi/tutkimustyö/avoin-tiede-ja-tutkimusetiikka>

- Niiniluoto, I. (1994). *Järki, arvot ja välineet*. Helsinki: Otava.
- Norrena, J. (2016). *Ryhmä oppimaan! Toiminnallisia työtapoja ja tehtäväkehyyksiä*. PS-kustannus.
- Nurmi, J-E., Ahonen, T., Lyytinen, H., Lyytinen, P., Pulkkinen, L. & Ruoppila, I. (2014). *Ihmisen psykologinen kehitys*. PS-kustannus.
- Opetushallitus (1994). *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet*. Opetushallitus.
- Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Määräykset ja ohjeet 96. Opetushallitus.
- Pehkonen, E. (1995). Introduction: Use of Open-ended Problems. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 27(2), s. 55–57.
- Pehkonen, E. (2011). Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen. Teoksessa E. Pehkonen (toim.), *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista* (Tutkimuksia 328, s.11–28). Helsingin yliopisto.
- Pehkonen, E. & Rossi, M. (2018). *Hyvää matematiikan opetusta etsimässä*. MFKA.
- Perkkilä, P. (1999). *Kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirjan didaktinen analyysi*. [Lisensiaatintutkimus, Jyväskylän yliopisto].
- Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa* [väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/42025>
- Perkkilä, P. & Joutsenlahti, J. (2022, 20. Tammikuuta). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ymmärtävän oppimisen perustana. *Dimensio*. <https://dimensiolehti.fi/matemaattisen-ajattelun-kielentaminen-ymmartavan-oppimisen-perustana/>
- Perkkilä, P., Joutsenlahti, J., & Sarenius, V-M. (2018). Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. In J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (Eds.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (pp. 344-367).
- Piaget, J. (1988). *Lapsi maailmansa rakentajana* (suom. S. Palmgren; [suom.tark. Klaus Helkama].) WSOY.
- PIRLS (2011) *Progress in International Reading Literacy Study*. International Results in Reading (suomen aineisto). [sähköinen tutkimusaineisto]. <https://timssandpirls.bc.edu/>

- Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on Doing and Teaching Mathematics. Teoksessa A. Schoenfeld (toim.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (53-70). Routledge.
- Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. SAGE.
- Seitamaa-Hakkarainen, P. (2014). *Kvalitatiivinen sisällönanalyysi*. https://www.academia.edu/589363/Kvalitatiivinen_sis%C3%A4ll%C3%B6n_analyysi.
- Sipola, T. (16. lokakuuta 2022). Opettajat ovat voimattomia matematiikan opetuksen kriisissä – ratkaisuja on tiedossa, mutta koulu ei pysty kaikkiin niihin yksin. *Yle*. <https://yle.fi/uutiset/74-20001408>
- Statista PISA student performance in Finland from 2000 to 2018: Suomen aineisto [sähköinen tutkimusaineisto]. https://www.statista.com/statistics/986919/pisa-student_performance-by-field-and-score-finland/
- Stenberg, R. (1996). What is mathematical thinking? Teoksessa R. Stenberg & T. Ben-Zeev (toim.), *The nature of mathematical thinking* (s. 303–318). Erlbaum.
- TIMSS (2015). *Timss encyclopedia, Finland*. Suomen aineisto [sähköinen tutkimusaineisto]. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/countries/finland/>
- TIMSS (2019). *Trends in International Mathematics and Science Study*. Suomen aineisto [sähköinen tutkimusaineisto] <https://timss2019.org/reports/achievement/>
- Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2009). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. (5.painos). Tammi.
- Tutkimuseettinen lautakunta (2020). <https://tenk.fi/fi/ohjeet-ja-aineistot>
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. Teoksessa Lerman, S. (toim.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

- Vanhala, A. (31. Joulukuuta 2021). Suomi pärjää edelleen, mutta kirkkain kärki on karkaamassa – Miksi suomalainen koulujärjestelmä ei enää menesty kuten ennen? Suomen menestys Pisa-tutkimuksessa on laskenut tasaisesti jo yli vuosikymmenen. *Ilta-Sanomat*. <https://www.is.fi/kotimaa/art-2000008508985.html>
- Vainionpää, T., Mononen, R. & Räsänen, P. (2004.) Matemaattiset valmiudet. Teoksessa Siiskonen, T., Aro, T., Ahonen, T., Ketonen, T. (toim.), *Joko se puhuu? Kielenkehityksen vaikeudet varhaislapsuudessa* (s. 292–301). PS-kustannus.
- Vuori, J. (2022, syyskuu). Laadullinen sisällönanalyysi. Teoksessa J. Vuori (toim.), *Laadullisen tutkimuksen verkkokäsikirja*. Yhteiskuntatieteellinen tietoaarkisto. [Laadullinen sisällönanalyysi - Tietoaarkisto \(tuni.fi\)](https://tietoaarkisto.tuni.fi/laadullinen-sisallönanalyysi)
- Vuorinen, I. (2009). *Tuhat tapaa opettaa–menetelmäopas opettajille, kouluttajille ja ryhmän ohjaajille* (8. painos). Resurssi.
- Vygotski, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. (toim. M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & Souberman, alkuperäisteos julkaistu 1938). Harvard University Press.
- Ylioppilaslautakunta (8.5.2019). Matematiikan digitaalisen kokeen määräykset.
- Yrjönsuuri, R. (2004). Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P., Kupari, T., Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 123–137). Niilo Mäki instituutti.

Tutkimusaineistolähteet

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A. & Waneus, M-L. (2022). *Tuhattaituri 1a*.

Otava.

Häkkinen, K., Kaleva, T., Similä, M. & Sohlman, L. (2021). *Milli 1a*. Sanoma Pro.

Rautio, H-K., Salminen, M., Stenberg, H. & Vehmas, H-R. (2020). *Oivaltaja 1a*.

Otava.

Rinne, S., Sintonen, A-M., Uus-Leponiemi, M., & Sanoma Pro (2021). *Kymppi 1,*

syksy. Sanoma Pro.