Kuratowskin lause

Julius Kultalahti

Matematiikan kandidaatin tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2022

Sisällys

1. Johdanto

Diskreetin matematiikan tuloksista Kuratowskin lause on vahva työkalu luoda ja tarkastella tasoverkkoja ja niiden osia. Lauseen yksinkertaisuudessa piilee kuitenkin hankala todistus, jonka toteutukseen tarvitaan tarkat määritelmät ja apulauseet. Todistuksen ensimmäisessä suunnassa tarkastellaan Kuratowskin verkkoja $K_{3,3}$ ja K_5 Eulerin kaavan avulla ja todetaan, että kumpikaan verkoista ei ole tasoverkko. Toista suuntaa todistettaessa määritelmiä ja lauseita tarvitaan enemmän. Kuratowskin lauseen tarkka käsittely vaatii melko paljon esitietoja verkkoteorian perusteista. Kuratowskin lauseen määrittelyyn vaadittavat esitiedot käydään läpi tutkielman luvuissa 2—4. Luvut 5 ja 6 käsittelevät tarkempia tuloksia ja tekniikoita. Aloitetaan verkkojen ja niiden ominaisuuksien määritelemisellä.

2. Verkot

Diskreetissä matematiikassa verkoksi kutsutaan kärjistä ja niiden välisistä sivuista muodostuvia joukkoja. Verkon tasoesitykseksi kutsutaan verkon esittämistä piirtämällä sen kärjet ja sivut tasoon. Luku pohjautuu luentomonisteeseen [2].

Määritelmä 2.1 (Verkko)**.** Olkoon V epätyhjä äärellinen joukko ja E kokoelma joukon V alkiopareja. Tällöin paria

$$G = (V, E)$$

kutsutaan *verkoksi* tai *graafiksi*. Joukon V alkioita kutsutaan *kärjiksi* ja joukon E alkioita kutsutaan *sivuiksi*. Jos sama sivu ei sisälly verkkoon useamman kerran, eikä verkossa esiinny *silmukoita* eli muotoa

$$\{v, v\} \in E, \quad \text{jollekin} \quad v \in V,$$

olevia sivuja, niin verkkoa kutsutaan yksinkertaiseksi.

Määritelmä 2.2 (Aliverkot)**.** Verkko $G_1 = (V_1, E_1)$ on verkon $G = (V, E)$, aliverkko jos $V_1 \subset V$ ja $E_1 \subset E$

Verkon kävelyksi kutsutaan sellaista kärjistä muodostuvaa jonoa, jossa peräkkäisten kärkien välillä on sivu. Polku on sellainen kävely, joka sisältää jokaisen kävelyn kärjen tasan yhden kerran.

Määritelmä 2.3 (Kävelyt ja polut)**.** Verkon $G = (V, E)$ *kävely* on sellainen jono

$$(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m})$$

verkon G kärkiä, jossa peräkkäisten kärkien väliltä löytyy sivu. Kävelyä kutsutaan

(1) *suljetuksi*, jos sen ensimmäinen kärki on sama kuin sen viimeinen kärki.

(2) *poluksi*, jos sen jokainen kärki esiintyy kävelyssä yhden kerran. Polkua kärjestä v kärkeen w merkitään jatkossa $v - w$.

(3) *triviaaliksi*, jos se sisältää vain yhden kärjen.

Kärkien u_0 ja u_n välisen kävelyn $K = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ pituus on

$$\ell(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n) = n.$$

Yhtenäisen verkon kahden kärjen u ja v välinen lyhin mahdollinen etäisyys määritellään asettamalla

$$d(v,w) = \min\{\ell(P), P \text{ on } \quad v - w \quad \text{polku}\}$$

Määritelmä 2.4 (Alikävely)**.** Verkon G kävelyn

$$(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$$

alikävelyllä tarkoitetaan kävelyä

$$(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}, \dots, v_{i_m}),$$

missä $1 \leq k \leq m \leq n$.

Määritelmä 2.5 (Kierros)**.** Suljettu kävely on *kierros*, jos sen ensimmäinen ja viimeinen kärki ovat sama kärki ja sen kaikki muut kärjet esiintyvät kävelyssä yhden kerran. Kierros on *triviaali*, jos se sisältää tasan kaksi kärkeä. Kierros on *epätriviaali*, jos se ei ole triviaali.

Verkko on yhtenäinen, jos verkolta voidaan valita kaksi mielivaltaista kärkeä ja niiden välille löydetään aina kävely. Kaikki verkot eivät ole yhtenäisiä. Verkko voi sisältää kärkiä ja sivuja, jotka eivät ole yhdistettävissä keskenään. Tälläisiä erillisiä kärkien ja sivujen kokonaisuuksia kutsutaan verkon komponenteiksi.

Määritelmä 2.6 (Yhtenäisyys)**.** Verkkoa $G = (V, E)$ kutsutaan *yhtenäiseksi*, jos jokaisen kahden kärjen $u \in V$ ja $v \in V$ välille löytyy kävely. Verkko on *epäyhtenäinäinen*, jos se ei ole yhtenäinen.

Määritelmä 2.7 (Kärjen tai sivun poistaminen verkolta)**.** Verkolta G voidaan poistaa kärki v, jolloin jäljelle jäävää verkkoa merkitään $G - v$. Kärjen poisto poistaa myös siihen yhdistyvät sivut verkolta. Jos verkolta G poistetaan jokin sivu $\{v, u\}$, niin jäljelle jäävää verkkoa merkitään $G - \{v, u\}$. Sivun poistaminen ei poista siihen liittyviä kärkiä.

Määritelmä 2.8 (2-yhtenäisyys)**.** Yhtenäistä verkkoa

$$G = (V, E)$$

kutsutaan *2-yhtenäiseksi*, jos verkko $G - v$ on edelleen yhteinäinen jokaiselle $v \in V$.

Määritelmä 2.9 (Verkon komponentti)**.** Olkoon verkko $G = (V, E)$ sellainen, että se muodostuu erillisistä aliverkoista K_i seuraavasti:

$$G = K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n, \quad K_i = (V_i, E_i) \quad K_j = (V_j, E_j), \quad \text{joille}$$

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{kaikilla} \quad i \neq j.$$

Tällöin aliverkkoja K_i kutsutaan verkon G komponenteiksi.

3. Puut

Yhtenäistä ja yksinkertaista verkkoa, joka ei sisällä yhtään epätriviaalia kierrosta, kutsutaan puuksi. Puilla on tiettyjä ominaisuuksia, jotka eivät päde yleisimmille verkoille. Kappaleessa käytetään pohjamateriaalina Markku Vilppolaisen johdatus diskreettiin matematiikkaan luentomonistetta [3].

Määritelmä 3.1 (Puut)**.** Yksinkertaista yhtenäistä verkkoa kutsutaan puuksi, jos se ei sisällä yhtään epätriviaalia kierrosta.

Lemma 3.2. *Mielivaltaiselle puulle*

$$P = (V, E)$$

on voimassa seuraavat ominaisuudet:

(i) *Jokaista puun P kahta kärkeä yhdistää tasan yksi polku*

(ii) *Minkä tahansa sivun poistaminen jakaa puun P täsmälleen kahdeksi puuksi.*

(iii) *Puun P kärjille ja sivuille on voimassa $|E| = |V| - 1$.*

Todistus.

(i) Oletetaan, että kärjestä $v \in V$ kärkeen $z \in V$ löydetään kaksi erillistä polkua

$$P_1 = (w_0, w_1, \dots, w_k) \quad \text{ja} \quad P_2 = (u_0, u_1, \dots, u_i).$$

Tällöin siis

$$z = w_k = u_i \quad \text{ja} \quad v = u_0 = w_0.$$

Asetetaan lisäksi

$$j_0 = \min\{j \mid w_i \neq u_i\} \quad \text{ja} \quad j_1 = \min\{j \mid w_j = u_k, \text{ jollakin } k \geq j_0\}.$$

Valitaan indeksi n siten, että $u_{j_1} = w_n$. Tällöin kävely

$$K = (u_{j_0-1}, u_{j_0}, \dots, u_{j_1} = w_n, w_{n-1}, \dots, w_{j_0}, w_{j_0-1} = u_{j_0-1})$$

on kierros, koska indeksin j_1 valinnalle pätee

$$u_j \neq w_m, \quad \text{kun} \quad m \in \{j_0+1, j_0+2, \dots, n-1\} \quad \text{ja} \quad j_0 < j < n.$$

Tästä saadaan ristiriita, sillä puilla ei ole epätriviaaleja kierroksia. Tästä seuraa $P_1 = P_2$, eli jokaista kärkeä yhdistää tasan yksi polku.

(ii) Olkoon

$$P = (V, E)$$

puu. Poistetaan puusta nyt yksi sivu $\{v, w\}$. Tällöin syntyy uusi verkko

$$\tilde{P} = P - \{v, w\},$$

josta on poistettu sivu $\{v, w\}$. Kohdasta (i) seuraa, että saatu verkko $\tilde{P}$ on epäyhtenäinen, sillä poistettu sivu on polulla, joka yhdistää kärjet v ja w. Nimetään yhtenäiset komponentit nimillä P_v ja P_w siten, että kärki v kuuluu komponenttiin P_v ja vastaavasti kärki w komponenttiin P_w. Koska alkuperäisessä puussa P ei ole epätriviaaleja kierroksia, sen mikään aliverkko ei sisällä epätriviaaleja kierroksia. Komponentit P_v ja P_w eivät siis sisällä epätriviaaleja kierroksia, eli ne ovat puita.

Tarkastellaan vielä, ovatko P_v ja P_w verkon ainoat komponentit. Olkoon $z \in V$ ja olkoon K se yksikäsitteinen polku, joka yhdistää kärjet z ja v. Nyt jos sivu $\{v, w\}$ ei kuulu polkuun K, niin kärki z on osa samaa komponenttia kuin kärki v. Jos sivu kuuluu polkuun K sen täytyy olla polun viimeinen sivu, eli

$$K = (z, \dots, w, v).$$

Tällöin kärki z kuuluu samaan komponenttiin kärjen w kanssa ja täten $\tilde{P} = P_v \cup P_w$.

(iii) Olkoon P on puu, jolla on $|V|$ kärkeä. Todistetaan väite induktiolla.

1. Alkuaskel: Jos $|V| = 1$ niin $|E| = 0$, joten väite pätee.

2. Induktio-oletus: Oletetaan, että väite pätee, kun $|V| = n$.

3. Induktioaskel: Olkoon $|V| = n+1$. Poistetaan yksi sivu puusta P, jolloin kohdan (ii) nojalla jäljelle jää täsmälleen kaksi puuta, eli

$$P_1 = (V_1, E_1) \quad \text{ja} \quad P_2 = (V_2, E_2).$$

Puut P_1 ja P_2 sisältävät nyt enintään n kappaletta kärkiä, joten induktio-oletuksen nojalla

$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = |V| - 1,$$

mistä väite seuraa.

□

4. Tasoverkot

Tässä kappaleessa käsitellään tasoverkkoja, jotka tullaan myöhemmin karakterisoimaan Kuratowskin lauseella. Verkko on abstrakti joukko kärkiä ja niiden välisiä sivuja. Verkkoja voidaan havainnollistaa piirtämällä kärjet tasoon ja yhdistämällä halutut kärjet toisiinsa sivuja vastaavilla poluilla. Tätä verkon havainnollistamista kutsutaan verkon tasoesitykseksi. Tasoverkko on sellainen verkko, jolle löydetään tasoesitys siten, että sen sivut eivät risteä keskenään. Tasoverkon tasoesityksen sivujen rajaamia yhtenäisiä alueita kutsutaan verkon tahkoiksi. Tasoverkon kärkien, sivujen ja tahkojen välillä on algebrallinen riippuussuhde, jota kutsutaan Eulerin kaavaksi. Kappale pohjautuu Ville Tengvallin johdatus diskreettiin matematiikkaan luentomonisteeseen [2].

Määritelmä 4.1 (Yksinkertaisten verkkojen isomorfisuus)**.** Yksinkertaiset verkot

$$G_1 = (V_1, E_1) \quad G_2 = (V_2, E_2)$$

ovat *isomorfiset* keskenään, jos on olemassa bijektio

$$f : V_1 \to V_2$$

siten, että

$$\{f(v), f(w)\} \in E_2, \quad \text{jos ja vain jos} \quad \{v, w\} \in E_1.$$

Yllä olevaa kuvausta f kutsutaan *isomorfismiksi* verkolta G_1 verkolle G_2.

Lemma 4.2. *Olkoot verkot*

$$G_1 = (V_1, E_1), \quad G_2 = (V_2, E_2) \quad \textit{ja} \quad G_3 = (V_3, E_3)$$

yksinkertaisia verkkoja, joiden välille on olemassa isomorfismit

$$f : V_1 \to V_2 \quad \textit{ja} \quad g : V_2 \to V_3.$$

Tällöin on olemassa isomorfismi h verkolta G_1 verkolle G_3.

Todistus. Olkoot f ja g lemman mukaisia isomorfismeja ja määritellään

$$h : V_1 \to V_3, \quad h = g \circ f.$$

Koska f ja g ovat bijektioita, myös niiden yhdistetty kuvaus h on bijektio. Lisäksi pätee

$$\begin{aligned} \{h(v), h(w)\} \in E_3, \quad &\iff \quad \{g(f(v)), g(f(w))\} \in E_3 \\ &\iff \quad \{f(v), f(w)\} \in E_2 \\ &\iff \quad \{v, w\} \in E_1, \end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. □

Määritelmä 4.3 (Yksinkertaisen verkon tasoesitys)**.** Olkoon verkko

$$G = (V, E)$$

yksinkertainen. Yksinkertaiselle verkolle voidaan luoda havannollistus tasossa esittämällä sen kärjet tason $\mathbb{R}^2$ pisteinä

$$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad v \in V,$$

ja sen sivut injektiivisinä polkuina

$$\gamma : \quad]0, 1[\to \mathbb{R}^2, \quad \text{joille} \quad \gamma(]0, 1[) \cap v = \emptyset \quad \text{kaikilla} \quad v \in V,$$

missä merkinnällä

$$\gamma(]0, 1[)$$

tarkoitetaan polun jälkeä tasossa. Tätä esitystä kutsutaan verkon *tasoesitykseksi*. Verkon tasoesitys on isomorfinen alkuperäisen verkon kanssa.

Määritelmä 4.4 (Tasoverkko)**.** yksinkertaista verkkoa

$$G = (V, E)$$

kutsutaan *tasoverkoksi*, jos sille löytyy tasoesitys siten, että

$$\gamma_1(]0, 1[) \cap \gamma_2(]0, 1[) = \emptyset, \quad \text{kaikille} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in E.$$

Tasoverkko jakaa tason yhtenäisiin alueisiin, joita kutsutaan *tahkoiksi*. Tasoverkon sivujen ulkopuolelle jäävä tyhjä tason osa on myös yksi verkon tahkoista, jota kutsutaan jatkossa verkon ulkopuoliseksi tahkoksi. Jatkossa merkitään

$$R(G) = \text{"verkon } G \text{ tahkojen lukumäärä".}$$

Lemma 4.5. *Jos verkko G ei ole tasoverkko ja se on isomorfinen jonkin verkon F kanssa, myöskään verkko F ei ole tasoverkko.*

Todistus. Oletetaan, että verkko G ei ole tasoverkko ja olkoon verkko F isomorfinen verkon G kanssa. Olkoon F' verkon F kanssa isomorfinen verkko. Isomorfisuuden transitiivisuudesta seuraa että verkko F' ja G ovat isomorfiset keskenään. Tällöin verkko F' ei myöskään ole tasoverkko. Tällöin verkon F' mielivaltaisesta valinnasta seuraa, että verkko F ei ole tasoverkko, sillä muuten verkoksi F' oltaisiin voitu valita verkon F sellainen tasoesitys, jonka sivut eivät risteä keskenään. □

Lause 4.6 (Eulerin kaava)**.** *Yhtenäiselle tasoverkolle $G = (V, E)$ pätee seuraava identiteetti*

$$|V| + R(G) - |E| = 2$$

Todistus. Jos verkosta G löytyy epätriviaali kierros, poistetaan verkon epätriviaalilta kierrokselta yksi sivu siten, että jäljelle jäävä verkko on edelleen yhtenäinen tasoverkko. Olkoon

$$G_1 = (V_1, E_1)$$

näin saatu tasoverkko. Tällöin voidaan todeta, että:

$$|V_1| + R(G_1) - |E_1| = |V| + (R(G) - 1) - (|E| - 1) = |V| + R(G) - |E|.$$

Jatketaan sivujen poistamista, kunnes kaikki epätriviaalit kierrokset on poistettu ja päädytään verkkoon

$$G_n = (V_n, E_n),$$

joka on nyt puu, jolle on edelleen voimassa

$$|V_n| + R(G_n) - |E_n| = |V| + R(G) - |E|.$$

Sovelletaan nyt lemmaa 3.2 sekä tietoa, että puilla on täsmälleen yksi tahko, ja saadaan

$$|V| + R(G) - |E| = |V_n| + R(G_n) - |E_n| \; = |V_n| + 1 - (|V_n| - 1) \; = 2\,.$$

□

Seuraus 4.7. *Olkoon*

$$G = (V, E) \quad (\textit{jolle } |V| \geq 3)$$

yhtenäinen, yksinkertainen tasoverkko. Tällöin

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Jos G ei lisäksi sisällä kierroksia, joiden sivujen lukumäärä on 3, niin saadaan

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

Todistus. Aloitetaan todistamalla $|E| \leq 3|V| - 6$. Voidaan olettaa, että $|E| \geq 3$. Tällöin jokaiselle tahkolle löytyy vähintään kolme rajoittavaa sivua ja jokaista sivua vastaa tasan kaksi tahkoa. Tästä saadaan

$$3R(G) \leq \sum_{T \text{ tahko}} |\{e \in E : e \text{ rajoittaa tahkoa } T\}| = 2|E|. \tag{4.1}$$

Toisaalta Eulerin kaavalla saadaan

$$3|V| + 3R(G) - 3|E| = 6,$$

eli toisin sanoen

$$3R(G) = 3|E| - 3|V| + 6. \tag{4.2}$$

Käytetään nyt tietoa (4.1) ja yhtälöä (4.2) saadaan

$$3|E| - 3|V| + 6 \leq 2|E|,$$

eli

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Tämä todistaa ensimmäisen väitteen.

Todistetaan tilanne, jossa kierrosten sivujen lukumäärä on aina suurempi kuin kolme, eli

$$4R(G) \leq \sum_{T \text{ tahko}} |\{e \in E : e \text{ rajoittaa tahkoa } T\}| = 2|E|.$$

Tämä estimaatti voidaan kirjoittaa muodossa

$$2R(G) \leq |E|. \tag{4.3}$$

Toisaalta Eulerin kaavan nojalla

$$2R(G) = 2|E| - 2|V| + 4.$$

Muokkaamalla edellistä yhtälöä ja käyttämällä tietoa (4.3) saadaan

$$2|E| - 2|V| + 4 \leq |E|.$$

Tästä seuraa, että

$$|E| \leq 2|V| - 4,$$

mikä todistaa toisen väitteen. □

Lause 4.8. *Verkko G on tasoverkko, jos ja vain jos sen jokainen aliverkko on tasoverkko.*

Todistus.

”$\Rightarrow$”: Olkoon verkko $G = (V, E)$ tasoverkko ja olkoon $G_a = (V_a, E_a)$ sen mielivaltainen aliverkko. Olkoon $\tilde{G}$ verkon G sellainen tasoesitys, jonka sivut eivät risteä keskenään tasossa. Valitaan nyt tasoesitykseltä $\tilde{G}$ sellainen aliverkko $\tilde{G}_a = (\tilde{V}_a, \tilde{E}_a)$, joka on isomorfinen verkon G_a kanssa. Tällöin verkko $\tilde{G}_a$ muodostaa verkon G_a tasoesityksen, jonka sivut eivät risteä keskenään.

”$\Leftarrow$”: Verkon G kaikki aliverkot ovat tasoverkkoja ja koska verkko G on itsensä aliverkko, niin myös verkko G on tasoverkko. □

5. Leikkauskärkiä ja blokkeja

Verkkojen leikkauskärjet määritetään tarkastelemalla, miten eri kärkien poistaminen vaikuttaa verkon komponenttien lukumäärään. Jos kärjen poistaminen kasvattaa verkon komponenttien lukumäärää, sanotaan kärkeä verkon *leikkauskärjeksi.* Vastaavasti, jos jonkin sivun poistaminen kasvattaa verkon komponenttien lukumäärää, sanotaan kyseistä sivua verkon *sillaksi.* Kappale pohjautuu lähteeseen [1, 26–116].

Määritelmä 5.1 (Leikkauskärki)**.** Verkon G kärkeä v kutsutaan leikkauskärjeksi, jos sen poistaminen verkolta lisää verkon komponenttien lukumäärää.

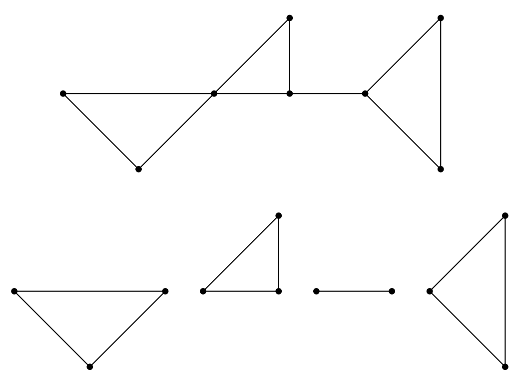
Määritelmä 5.2 (Separoituvuus)**.** Yhtenäistä verkkoa G kutsutaan *separoituvaksi*, jos se sisältää jonkin leikkauskärjen v. Yhtenäistä verkkoa kutsutaan *separoitumattomaksi*, jos se ei sisällä yhtään leikkauskärkeä.

Määritelmä 5.3 (Yksinkertaisten verkkojen suuruus)**.** Olkoon verkko G yksinkertainen. Verkon G separoitumaton aliverkko G_2 on suurempi kuin verkon G separoitumaton aliverkko G_1, jos aliverkko G_1 on aliverkon G_2 aliverkko. Tällöin merkitään

$$G_1 \leq G_2.$$

Relaatio $\leq$ määrittelee annetun verkon G separoitumattomille aliverkoille osittaisen järjestyksen. Separoitumatonta aliverkkoa G_2 kutsutaan maksimaaliseksi, jos sille ei löydy suurempaa separoitumatonta aliverkkoa verkolta G.

Määritelmä 5.4 (Blokki)**.** Verkon G maksimaalisia separoitumattomia aliverkkoja kutsutaan verkon blokeiksi. Verkkoa G kutsutaan itsessään blokiksi, jos se on yhtenäinen, eikä se sisällä yhtään leikkauskärkeä.



Kuva 1. Verkon blokit

Annetaan seuraavaksi verkon leikkauskärjille ja blokeille käyttökelpoiset karakterisoinnit. Näitä karakterisointeja tullaan tarvitsemaan Kuratowskin lauseen todistuksessa.

Lause 5.5. *Olkoon v jokin kärki, joka sijaitsee yhtenäisellä verkolla*

$$G = (V, E).$$

Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:

(i) *Kärki v on verkon G leikkauskärki.*

(ii) *On olemassa kärjet $u \neq v$ ja $w \neq v$ siten, että leikkauskärki v löytyy jokaiselta polulta $u - w$.*

(iii) *On olemassa kärkien $V - v$ ositus alijoukkoihin U ja W siten, että mille tahansa kärjille $u \in U$ ja $w \in W$, leikkauskärki v löytyy jokaiselta polulta $u - w$.*

Todistus.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Olkoon v on verkon G leikkauskärki. Tällöin verkko $G - v$ sisältää vähintään kaksi komponenttia. Muodostetaan kärkien $V - v$ ositus siten, että U muodostuu yhden komponentin kärjistä ja W kaikkien muiden komponettien kärjistä. Nyt mitkä tahansa kaksi kärkeä $u \in U$ ja $w \in W$ ovat osa verkon $G - v$ eri komponentteja, eli niiden välille ei löydetä mitään polkua. Tästä seuraa, että kaikki polut jotka kulkevat kärkien u ja w välillä verkolla G sisältävät aina leikkauskärjen v.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Tämä seuraa suoraan kohdasta (iii), sillä kohta (ii) on yksittäinen kärkipari kaikista kärkien osituksista U ja W.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Jos kärki v on jokaisella polulla $u - w$, ei ole olemassa polkua, joka yhdistää kärjet u ja w verkolla $G - v$. Verkko $G - v$ on nyt epäyhtenäinen eli kärki v on verkon G leikkauskärki. □

Lause 5.6. *Olkoon*

$$G = (V, E) \quad (|V| \geq 3)$$

yhtenäinen verkko. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:

(i) *Verkko G on blokki.*

(ii) *Verkon G mielivaltaiset kärjet u ja v sisältyvät molemmat verkon johonkin epätriviaaliin kierrokseen.*

Todistus.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Olkoon verkko G blokki ja olkoon u verkon jokin kärki. Olkoon U sellainen joukko kärkiä, joka ei sisällä kärkeä u ja jonka kärjet ovat osa samaa epätriviaalia kierrosta kärjen u kanssa. Verkko G sisältää vähintään kolme kärkeä, eikä sillä ole leikkauskärkiä. Tällöin verkolla G ei ole myöskään siltoja. Kaikki kärjen u viereiset kärjet siis sisältyvät joukkoon U, eli joukko ei ole tyhjä joukko. Olkoon $v \neq u$ kärki, joka ei sisälly joukkoon U. Olkoon w sellainen kärki joukosta U, jolle etäisyys

$$d(w, v) = \min\{\ell(P), P \text{ on } \quad w - v \quad \text{polku}\}$$

on lyhin mahdollinen. Kiinnitetään lisäksi mielivaltaisesti valittu kierros Y, joka sisältää kärjet u ja w. Olkoon polku

$$P_0 = (w, \ldots, v)$$

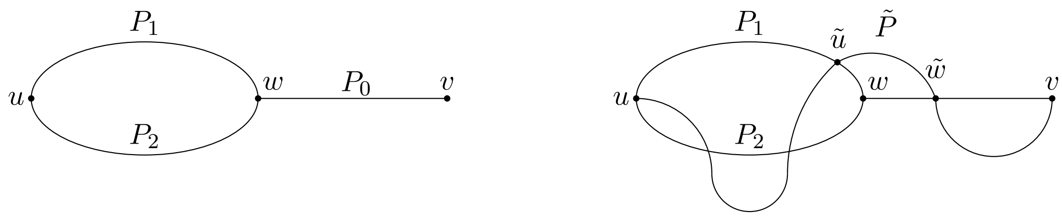
lyhin mahdollinen $w - v$ polku. Olkoot lisäksi polut P_1 ja P_2 kärkien u ja w välisen kierroksen Y alipolut, siten että

$$Y = (P_1, P_2).$$

Kärki w ei ole leikkauskärki, eli on olemassa polku

$$\tilde{P} = (u, \ldots, v),$$

joka ei sisällä kärkeä w. Olkoon kärki $\tilde{w}$ osa polkuja $\tilde{P}$ ja P_0 ja lisäksi sellainen, että se on kärkeä u lähinpänä oleva kärki etäisyyden $d(\ldots, \ldots)$ suhteen. Kärki $\tilde{w}$ löydetään polulta P_0, sillä polujen $\tilde{P}$ ja P_0 leikkaus on epätyhjä. Olkoon kärki $\tilde{u}$ taas viimeinen polun $\tilde{P}$ alipolun $u-\tilde{w}$ kärki, joka on osa joko polkua P_1 tai P_2. Tälläinen kärki löydetään alipolulta $u - \tilde{w}$, sillä kärki u kuuluu kaikkiin edellä mainituista poluista.



Kuva 2. Blokin polut

Oletetaan ensin, että kärki $\tilde{u}$ on osa polkua P_1. Olkoon

$$Q_1 = (u, \tilde{u}, \tilde{w})$$

polku kärkien u ja $\tilde{w}$ välillä, joka koostuu polun P_1 alipolusta $u-\tilde{u}$ ja polun $\tilde{P}$ alipolusta $\tilde{u} - \tilde{w}$. Olkoon

$$Q_2 = (u, w, \tilde{w})$$

polku kärkien u ja $\tilde{w}$ välillä, joka koostuu polusta P_1 ja polun P_0 alipolusta $w - \tilde{w}$. Polut Q_1 ja Q_2 ovat erilliset ja muodostavat yhdessä kierroksen joihin kärjet u ja $\tilde{w}$ kuuluvat. Kärki $\tilde{w}$ kuuluu siis joukkoon U. Kärki $\tilde{w}$ on osa lyhintä polkua $w - v$, joten selvästi

$$d(\tilde{w}, v) < d(w, v),$$

mistä seuraa ristiriita, sillä kärki w valittiin kärjen v lähimmäksi kärjeksi. Kärjen $\tilde{u}$ ollessa osa polkua P_2, tehdään sama päättely eri alipoluilla, joten väite on todistettu.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Tiedetään, että verkon G kaksi mitä tahansa pistettä ovat samalla epätriviaalilla kierroksella. Todistetaan väite epäsuoralla päättelyllä, eli oletetaan että verkko G ei ole blokki. Verkolta G löytyy nyt leikkauskärki v. Tällöin lauseen 5.5 nojalla löydetään kärjet u ja w siten, että

$$u \neq v \quad \text{ja} \quad w \neq v$$

ja kärki v löytyy jokaiselta polulta $u - w$. Tämä on kuitenkin ristiriita oletuksen (ii) kanssa sillä, jos jokainen polku $u - w$ sisältää kärjen v ei ole olemassa kierrosta kärkien u ja w välillä. $\square$

6. Yksinkertaisten verkkojen yhdenmuotoisuus

Tasoverkkojen tasoesitykset voidaan esittää monilla eri tavoilla siten, että niiden sivut eivät risteä keskenään. Erityisesti jokaiselle tasoverkolle löytyy tasoesitys, jossa verkon mielivalaltainen tahko voidaan esittää verkon ulkopuolisena tahkona. Tämä tullaan näkemään lauseessa 6.1. Lisäksi luvussa käsitellään verkkojen homeomorfisuutta, joka on isomorfisuutta vahvempi ominaisuus. Kappale pohjautuu lähteeseen [1, 26–116].

Lause 6.1. *Jokaiselle yhtenäiselle tasoverkolle G löydetään tasoesitys siten, että sen mikä tahansa tahko f on verkon ulkopuolinen tahko.*

Todistus. Olkoon verkko
$$G = (V, E)$$
yhtennäinen tasoverkko ja olkoon $\tilde{G}$ verkon G sellainen tasoesitys, jonka sivut eivät risteä keskenään. Olkoon f sellainen tasoesityksen $\tilde{G}$ tahko, joka ei ole sen ulkopuolinen tahko ja olkoon a tahkon f määräämän tason rajoitetun alueen jokin piste. Tällöin
$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad g(x) = \frac{x - a}{||x - a||^2}$$
määrittää homeomorfismin ja tuottaa uuden verkon $\tilde{G_1}$, joka on isomorfinen verkon $\tilde{G}$ kanssa. Uudesta verkosta huomataan, että tahko $g(f)$ rajoittaa nyt verkon ulkopuolista tahkoa. $\square$

Seuraus 6.2. *Jokaiselle yhtenäiselle tasoverkolle löydetään tasoesitys siten, että mikä tahansa verkon sivu on osa sen ulkopuolista tahkoa.*

Määritelmä 6.3 (Kaksiasteisten apukärkien lisääminen)**.** Verkon
$$G = (V, E)$$
vierekkäisten kärkien välisille sivuille voidaan lisätä kaksiasteisia apukärkiä. Merkitään verkon kahden vierekkäisen kärjen määräämää sivua $\{v, u\}$. Lisätään nyt tähän sivuun uusi kärki w jolloin sivu $\{v, u\}$ korvataan sivuilla $\{v, w\}$ ja $\{w, u\}$. Uusi verkko sisältää uuden kärjen w sekä kaksi sivua $\{v, w\}$ ja $\{w, u\}$, jotka korvaavat sivun $\{v, u\}$. Näin saatu uusi verkko on muotoa
$$G_1 = (V_1, E_1),$$
missä
$$V_1 = (V \cup \ \{w\}) \quad \text{ja} \quad E_1 = (E \setminus \{v, u\}) \cup \{\{v, w\}, \{w, u\}\}.$$

Määritelmä 6.4 (Yksinkertaisten verkkojen homeomorfisuus)**.** Verkko G on homeomorfinen verkon F kanssa, jos on olemassa verkko D, jolle pätee seuraavat ominaisuudet:

(i) Lisäämällä verkkoon D kaksiasteisia apukärkiä saadaan verkko G', joka on isomorfinen verkon G kanssa.

(ii) Lisäämällä verkkoon D kaksiasteisia apukärkiä saadaan verkko F', joka on isomorfinen verkon F kanssa.

Lause 6.5. *Jos verkko G ei ole tasoverkko ja se on homeomorfinen jonkin verkon F kanssa, myöskään verkko F ei ole tasoverkko.*

Todistus. Tehdään antiteesi olettamalla, että on olemassa jokin tasoverkko F, joka on homeomorfinen verkon G kanssa. Tällöin on olemassa verkko D siten että

(i) Lisäämällä verkkoon D kaksiasteisia apukärkiä saadaan verkko G', joka on isomorfinen verkon G kanssa.

(ii) Lisäämällä verkkoon D kaksiasteisia apukärkiä saadaan verkko F', joka on isomorfinen verkon F kanssa.

Tällöin myös verkko D on tasoverkko. Olkoon $\tilde{D}$ verkon D sellainen tasoesitys, jonka sivut eivät risteä keskenään. Lisätään apukärjet tasoesitykseen $\tilde{D}$ siten että saadaan verkon G' kanssa isomorfinen tasoesitys $\tilde{G}'$ ja huomataan että sen sivut eivät risteä keskenään. Verkko G' on isomorfinen verkon G kanssa, joten niiden tasoesitykset ovat isomorfisia keskenään. Tästä seuraa ristiriita sillä verkolle G löydetään tasoesitys $\tilde{G}$, jonka sivut eivät risteä keskenään. □

7. Kuratowskin lause

Kuratowskin lauseella saadaan karakterisoitua kaikki olemassa olevat tasoverkot. Lauseen mukaan sellaiset verkot, jotka eivät ole tasoverkkoja, ovat hyvin samankaltaisia keskenään, sillä jokainen niistä sisältää aliverkon joka on homeomorfinen Kuratowskin verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa. Kappaleessa esiintyvä Kuratowskin lauseen todistus pohjautuu lähteeseen [1, 26–116]. Käydään seuraavaksi läpi lauseen todistuksen molemmat suunnat.

Lause 7.1 (Kuratowskin lause)**.** *Verkko G on tasoverkko, jos ja vain jos se ei sisällä aliverkkonaan verkkoa, joka on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa.*

Kuratowskin lauseessa on kaksi suuntaa, jotka tullaan todistamaan seuraavaksi. Aloitetaan helpommasta suunnasta toteamalla, että jos verkolla G on aliverkkonaan verkko, joka on homeomorfinen joko Kuratowskin verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa, niin silloin verkko G ei ole tasoverkko. Toisessa suunnassa todistetaan, että jos verkko G ei ole tasoverkko, niin se sisältää aliverkkonaan homeomorfisen verkon Kuratowskin verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa.

7.1. **Lauseen helpompi suunta.**

Lause 7.2 (Kuratowskin lause oikealta vasemmalle)**.** *Verkko G on tasoverkko vain jos se ei sisällä aliverkkonaan verkkoa, joka on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa.*

Todistus. Olkoon G tasoverkko. Tehdään antiteesi olettamalla, että G sisältää aliverkkonaan verkon, joka on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa. Käsitellään nämä tapaukset erikseen.

Tapaus 1: Oletetaan ensin, että verkolla G on olemassa aliverkko, joka on homeomorfinen yhtenäisen ja yksinkertaisen verkon

$$K_{3,3} = (V, E)$$

kanssa. Oletetaan, että kyseinen aliverkko on myös tasoverkko, sillä muuten G ei voisi olla tasoverkko lauseen 4.8 nojalla. Tällöin seurauksen 4.7 nojalla pitäisi olla voimassa

$$|E| \leq 2|V| - 4 \quad\iff\quad 9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \quad\iff\quad 9 \leq 8,$$

mistä seuraa ristiriita. Täten verkko $K_{3,3}$ ei voi olla tasoverkko ja lauseen 6.5 nojalla myöskään mikään sen kanssa homeomorfinen verkko ei ole tasoverkko. Tällöin G ei ole tasoverkko.

Tapaus 2: Oletetaan seuraavaksi, että verkolla G on olemassa aliverkko, joka on homeomorfinen yhtenäisen ja yksinkertaisen verkon

$$K_5 = (V, E)$$

kanssa. Oletetaan lisäksi, että K_5 on tasoverkko. Tällöin seurauksen 4.7 nojalla sille pitäisi olla voimassa

$$|E| \leq 3|V| - 6 \quad \iff \quad 10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \quad \iff \quad 10 \leq 9,$$

mistä seuraa ristiriita. Täten verkko K_5 ei voi olla tasoverkko ja lauseen 6.5 nojalla myöskään mikään sen kanssa homeomorfinen verkko ei ole tasoverkko. Tällöin G ei ole tasoverkko. □

7.2. **Lauseen vaikeampi suunta.** Lauseen toinen suunta väittää, että kaikki verkot, jotka eivät ole tasoverkkoja sisältävät aliverkkonaan verkon, joka on homeomorfinen K_5 tai $K_{3,3}$ kanssa. Oletetaan, että on olemassa verkko

$$G = (V, E),$$

joka on lauseen vastainen. Oletetaan lisäksi, että verkolla G on niin vähän sivuja kuin mahdollista. Tämä oletus tehdään, jotta voidaan tarkastella pienimpiä mahdollisia lauseen vastaisia aliverkkoja. Tällöin verkon G on oltava blokki, jonka sivujen lukumäärälle on voimassa $|E| \geq 3$. Jos verkko G ei olisi blokki, olisi olemassa leikkauskärki w, jossa vähintään kaksi blokkia yhdistyisivät keskenään. Huomataan kuitenkin, että nämä blokit olisivat molemmat tasoverkkoja verkon G minimaalisuuden nojalla ja niiden yhdistäminen leikkauskärjessä w ei riko verkon G tasoverkko oletusta. Olkoon

$$x_0 = \{u_0, v_0\}$$

jokin verkon G sivu. Tällöin verkon G minimaalisuuden nojalla verkko

$$F = G - x_0 \tag{7.1}$$

on tasoverkko. Jatkossa oletetaan, että verkko F vastaa edellämainitun verkon tasoesitystä, jonka sivut eivät leikkaa toisiaan. Jatketaan tarkentamalla verkon F ominaisuuksia seuraavan lemman avulla.

Lemma 7.3. *Edellä määritellyllä verkkolla $F = G - x_0$ on olemassa kierros Z, joka kulkee kärkien u_0 ja v_0 kautta.*

Todistus. Oletetaan, että tälläistä kierrosta Z ei ole olemassa. Tällöin u_0 ja v_0 eivät voi olla osa samaa verkon F blokkia lauseen 5.6 mukaan. Verkolla F on siis vähintään kaksi erillistä blokkia. Verkko G on blokki, joten kärkien u_0 ja v_0 välille löytyy kierros verkolla G. Tästä seuraa, että on olemassa verkon F leikkauskärki w, jolle pätee lauseen 5.5 nojalla, että se sijaitsee verkon F jokaisella polulla $(u_0, \ldots, v_0)$, sillä kärkien u_0 ja v_0 oletettiin kuuluvan eri blokkeihin verkolla F. Muodostetaan nyt verkko F_0 lisäämällä verkkoon F sivut $\{w, u_0\}$ ja $\{w, v_0\}$, jos ne eivät ole jo osa verkkoa F. Kutsutaan blokkeja, joihin sivut on lisätty nimillä B_1 ja B_2. Näillä blokeilla on yhteinen kärki w. Nyt molemmilla blokeilla on enintään sama lukumäärä sivuja kuin verkolla F, sillä uudessa verkossa F_0 on enintään kaksi uutta sivua. Blokki B_1 saadaan poistamalla blokin B_2 sivut ja kaikki muut kärjet lukuunottamatta kärkeä w. Tällöin blokilla B_1 on enintään sama lukumäärä sivuja kuin verkolla F. Tästä seuraa, että blokki B_1 on tasoverkko. Sama päättely pätee blokille B_2.

Seurauksen 6.2 mukaan blokki B_1 voidaan piirtää nyt tasoon siten, että sivu $\{w, u_0\}$ on osa sen ulkopuolista tahkoa. Tehdään sama päättely myös blokille B_2 ja sivulle $\{w, v_0\}$. Olkoon $\tilde{F_0}$ verkon F_0 se tasoesitys, missä blokit B_1 ja B_2 on esitetty edellä mainutulla tavalla ja ne yhdistyvät leikkauskärjessä w. Verkkolle F_0 löytyy siis tasoesitys siten, että sivut $\{w, u_0\}$ ja $\{w, v_0\}$ ovat osa verkon F_0 ulkopuolista tahkoa. Tällöin lisättäessä sivu x_0 verkolle F_0 ja huomataan, että sivu $x_0 = \{u_0, v_0\}$ voidaan lisätä ilman, että se leikkaa mitään verkon F_0 sivua, jolloin verkko $F_0 + x_0$ on edelleen tasoverkko. Tästä seuraa ristiriita, sillä verkko G on tasoverkon $F_0 + x_0$ aliverkko, joten lauseen 4.8 nojalla myös G on tasoverkko.

□

Määritellään seuraavaksi ominaisuuksia verkolle F ja lemman 7.3 mukaiselle kierrokselle Z. Tärkein tulos seuraavista tulee olemaan lemma 7.11.

Määritelmä 7.4. Olkoon verkko

$$F = G - x_0$$

kohdassa (7.1) määritelty verkko ja kierros Z lemman 7.3 mukainen kierros, joka kulkee kärkien u_0 ja v_0 kautta. Kierroksen Z ulkopuolella tarkoitetaan jatkossa aliverkkoa verkosta F, jonka virittävät sivut ja kärjet, jotka jäävät kierroksen Z ulkopuolelle, katso huomautus 7.6. Kierroksen Z sisäpuolella tarkoitetaan vastaavasti aliverkkoa verkosta F, jonka virittävät sivut ja kärjet, jotka jäävät kierroksen Z sisäpuolelle.

Määritelmä 7.5. Olkoon verkko

$$F = G - x_0$$

kohdassa (7.1) määritelty verkko ja kierros Z lemman 7.3 mukainen kierros. Kierroksen Z ulkopalalla tarkoitetaan jatkossa yhtenäistä aliverkkoa verkosta F, joka muodostuu vähintään yhdestä kärjestä kierroksen Z ulkopuolella, katso huomautus 7.6. Ulkopala voi myös muodostua yhdestä sivusta, joka kiinnittyy kierrokseen Z kahdessa sen kärjessä, sekä jää kierroksen Z ulkopuolelle. Kierroksen Z sisäpalalla tarkoitetaan vastaavasti yhtenäistä aliverkkoa verkosta F, joka muodostuu vähintään yhdestä kärjestä kierroksen Z sisäpuolella. Sisäpala voi myös muodostua yhdestä sivusta, joka kiinnittyy kierrokseen Z kahdessa sen kärjessä, sekä jää kierroksen Z sisäpuolelle.

Huomautus 7.6. Ulko- ja sisäpuoleen kuuluvat myös kierroksen Z ne kärjet, joissa ulko- tai sisäpala yhdistyy kierrokseen Z. Sama pätee myös kierroksen Z ulko- ja sisäpaloille.

Määritelmä 7.7. Olkoon verkko

$$F = G - x_0$$

kohdassa (7.1) määritelty verkko ja kierros Z lemman 7.3 mukainen kierros. Olkoon kierros Z lisäksi sellainen, että sen sisäpuolelle jää mahdollisimman monta tahkoa. Jatkossa merkinnällä $Z[u_0, v_0]$ tarkoitetaan alipolkua, joka kulkee kierrosta Z pitkin kärjeltä u_0 kärkeen v_0. Merkinnällä $Z(u_0, v_0)$ tarkoitetaan alipolkua, joka kulkee kierrosta Z pitkin kärjeltä u_0 kärkeen v_0 ja josta on poistettu päätekärjet u_0 ja v_0. Vastaavasti kuljettaessa kärjestä v_0 kärkeen u_0 voidaan määritellään merkinnät $Z[v_0, u_0]$ ja $Z(v_0, u_0)$.

Määritelmä 7.8. Olkoon verkko

$$F = G - x_0$$

kohdassa (7.1) määritelty verkko ja kierros Z lemman 7.3 mukainen kierros, joka kulkee kärkien u_0 ja v_0 kautta. Kierroksen Z ulko- tai sisäpalaa kutsutaan jatkossa (u_0-v_0)-separoituvaksi, jos se yhdistyy sekä alipolkuun $Z(u_0, v_0)$, että alipolkuun $Z(v_0, u_0)$. Huomatuksena, että sisä- tai ulkopala ei voi olla (u_0-v_0) separoituva, jos u_0 ja v_0 ovat naapureita kierroksella Z.

Lemma 7.9. *Olkoon verkko F kohdassa (7.1) määritelty verkko. Verkon F kaikki ulkopalat ovat kiinni kierroksessa Z tasan kahdella kärjellä ja ovat (u_0-v_0)-separoituvia.*

Todistus. Koska F on yhtenäinen verkko, jokaisen ulkopalan on yhdistyttävä kierrokseen Z. Verkolla F ei ole leikkauskärkiä, joten jokaisen ulkopalan on yhdistyttävä kierrokseen Z vähintään kahdessa kärjessä. Ulkopalat eivät voi myöskään yhdistyä alipolkuihin $Z(u_0, v_0)$ ja $Z(v_0, u_0)$ useammalla kuin yhdellä kärjellä, sillä muuten olisi olemassa kierros, joka sisältää kärjet u_0 sekä v_0 siten, että tällä kierroksella olisi enemmän tahkoja sen sisäpuolella kuin kierroksella Z. Tästä seuraisi ristiriita, sillä kierros Z määriteltiin siten, että sen sisäpuolella on suurin mahdollinen määrä tahkoja. Samalla päättelyllä mikään ulkopala ei voi olla kiinni kärjissä u_0 tai v_0. Tästä seuraa, että jokainen ulkopala on kiinni kierroksessa Z tasan kahdessa kärjessä ja kaikki ulkopalat ovat (u_0-v_0)-separoituvia. □

Huomautus 7.10. Verkolta F on poistettu sivu x_0, joka yhdistää kärjet u_0 ja v_0. Järjestetään verkko F siten, että sillä on mahdollisimman monta tahkoa sen sisäpuolella, joten jos sivu x_0 lisättäisiin takaisin verkkoon F sen täytyy leikata verkon jotain toista sivua, jotta verkko $G = F + x_0$ ei ole tasoverkko. Tämä sivu on siis välttämättä osa verkon jotain sisäpalaa.

Lemma 7.11. *Olkoon O kohdassa (7.1) määritellyn verkon*

$$F = G - x_0$$

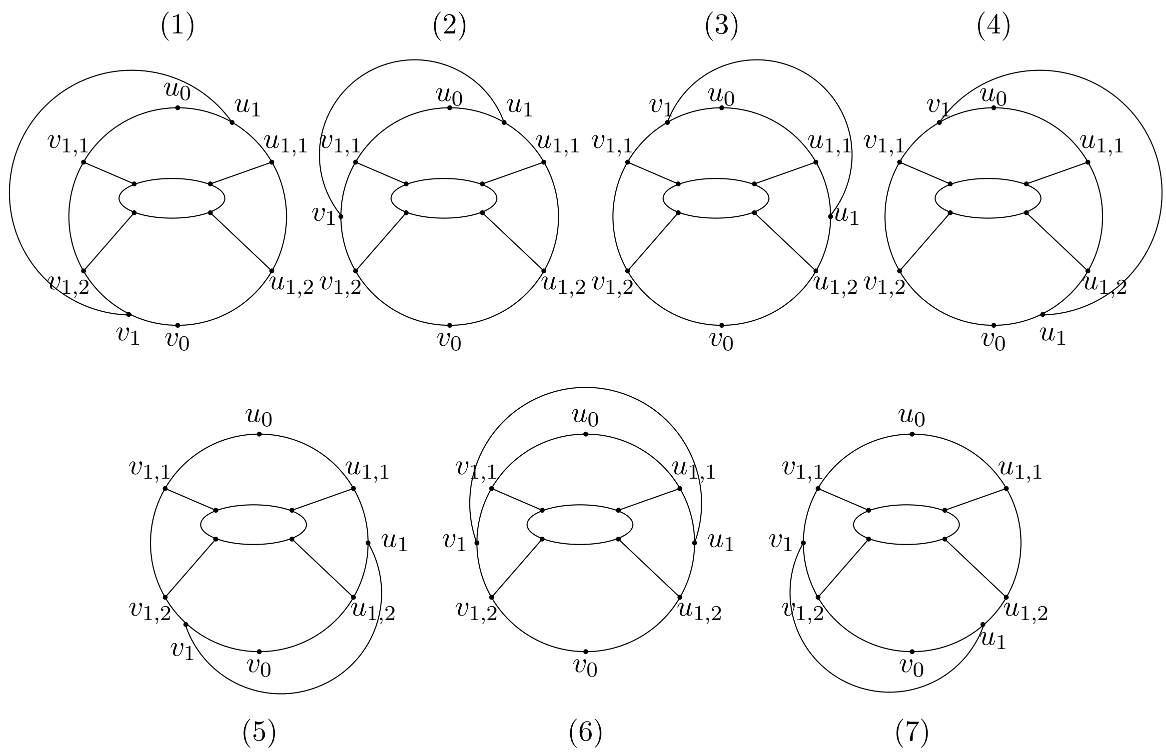
(u_0-v_0)-separoituva ulkopala, joka yhdistyy alipolkuun $Z(u_0, v_0)$ kärjessä u_1 sekä alipolkuun $Z(v_0, u_0)$ kärjessä v_1. Tällöin on olemassa sisäpala, joka on sekä (u_0-v_0)-separoituva että (u_1-v_1)-separoituva.

Todistus.

Kiinnitetään ulkopala O. Tällöin lemman 7.9 nojalla ulkopala O on (u_0-v_0)-separoituva ulkopala, jolla on tasan kaksi yhteistä kärkeä kierroksen Z kanssa. Ulkopala O yhdistyy alipolkuun $Z(u_0, v_0)$ kärjessä u_1 sekä alipolkuun $Z(v_0, u_0)$ kärjessä v_1. Oletetaan lemman väitteen vastaisesti, että ei ole olemassa sisäpalaa, joka on sekä (u_0-v_0)-separoituva että (u_1-v_1)-separoituva. Jokaisen sisäpälan tulee yhdistyä kierokseen Z molemmilla alipoluilla $Z(u_0, v_0)$ ja $Z(v_0, u_0)$ vähintään yhdellä kärjellä, sillä muuten sivu x_0 voitaisiin lisätä verkkoon F siten, että verkko G olisi tasoverkko.

Sisäpalojen nimeäminen. Verkolla F on vähintään yksi (u_0-v_0)-separoituva sisäpala. Sisäpaloja voi olla myös useampi joten luodaan niille seuraava järjestys: Kierrettäessä alipolkua $Z(u_0, v_0)$ myötäpäivään löydetään aluksi kärki $u_{1,1}$, joka on lähinnä kärkeä kärkeä u_0 ja joka kuuluu johonkin sisäpalaan. Olkoon I_1 kärjen $u_{1,1}$ sisältävä sisäpala. Jatketaan tämän jälkeen kierroksen Z kulkemistä myötäpäivään kunnes saavutaan viimeiseen sisäpalan I_1 sisältämään kärkeen $u_{1,2}$ alipolulla $Z(u_0, v_0)$. Kierretään seuraavaksi kierrosta Z vastapäivään kunnes kohdataan ensimmäinen kärki $v_{1,1}$, joka kuuluu sisäpalaan I_1. Jatketaan kiertämistä vastapäivään kunnes saavutaan sisäpalan I_1 sisältämään viimeiseen kärkeen $v_{1,2}$.

Nimetään sisäpala I_2 kiertämällä alipolkua $Z(u_0, v_0)$ myötäpäivään kärjestä $u_{1,2}$ lähtien, kunnes saavutaan ensimmäiseen kärkeen $u_{2,1}$, joka kuuluu sisäpalaan I_2. Jatketaan myötäpäivään kulkemista, kunnes saavutaan kärkeen $u_{2,2}$, joka on sisäpalan I_2 viimeinen kärki alipolulla $Z(u_0, v_0)$. Kierretään seuraavaksi kierrosta Z vastapäivään, kunnes kohdataan ensimmäinen kärki $v_{2,1}$, joka kuuluu sisäpalaan I_2. Jatketaan kiertämistä vastapäivään, kunnes saavutaan sisäpalan I_2 sisältämään viimeiseen kärkeen $v_{2,2}$. Jatketaan sisäpalojen nimeämistä vastaavaan tapaan, kunnes on nimetty kaikki sisäpalat $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

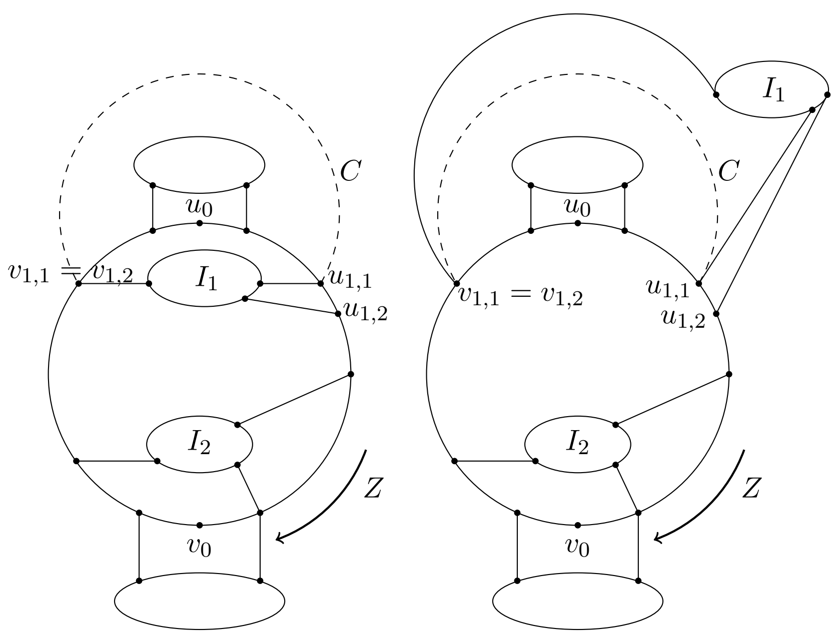


Kuva 3. Antiteesin vastaiset (u_1-v_1)-separoituvat ulkopalat

Ulkopalan kärkien paikat. Olkoon I_1 edellä määritelty ensimmäinen (u_0-v_0)-separoituva sisäpala, joka yhdistyy kierrokseen Z kärjissä $u_{1,1}, u_{1,2}, v_{1,1}$ ja $v_{1,2}$. Molempien ulkopalan O kärkien u_1 ja v_1 on nyt oltava joko alipolulla $Z(v_{1,1}, u_{1,1})$ tai alipolulla $Z(u_{1,2}, v_{1,2})$. Jos näin ei olisi, niin yhden seuraavista tapauksista tulisi olla voimassa:

(1) $u_1 \in Z(u_0, u_{1,1})$ ja $v_1 \in Z(v_0, v_{1,2})$
(2) $u_1 \in Z(u_0, u_{1,1})$ ja $v_1 \in Z(v_{1,2}, v_{1,1})$
(3) $u_1 \in Z(u_{1,1}, u_{1,2})$ ja $v_1 \in Z(v_{1,1}, u_0)$
(4) $u_1 \in Z(u_{1,2}, v_0)$ ja $v_1 \in Z(v_{1,1}, u_0)$
(5) $u_1 \in Z(u_{1,1}, u_{1,2})$ ja $v_1 \in Z(v_0, v_{1,2})$
(6) $u_1 \in Z(u_{1,1}, u_{1,2})$ ja $v_1 \in Z(v_{1,2}, v_{1,1})$
(7) $u_1 \in Z(u_{1,2}, v_0)$ ja $v_1 \in Z(v_{1,2}, v_{1,1})$

Jokaisessa edellä mainitussa tapauksessa sisäpala I_1 olisi (u_0-v_0)-separoituva sekä (u_1-v_1)-separoituva, mikä nähdään kuvasta 3. Jatketaan olettamalla, että jokainen yksittäinen ulkopala yhdistyy molemmilla kärjillään alipolkuun $Z(u_{1,2}, v_{1,2})$ tai alipolkuun $Z(v_{1,1}, u_{1,1})$.



Kuva 4. Sisäpalojen siirtäminen kierroksen Z ulkopuolelle

Sisäpalojen siirtäminen kierroksen Z ulkopuolelle. Olkoot $I_1, I_2, \ldots, I_n$ edellä määritellyt sisäpalat. Aloitetaan sisäpalojen siirtäminen kierroksen Z ulkopuolelle aloittaen sisäpalasta I_1. Kierroksen Z ulkopuolelle voidaan lisätä käyrä C, joka yhdistää kärjet $v_{1,1}$ sekä $u_{1,1}$ siten, että käyrä ei leikkaa mitään verkon F sivua. Näin saatu verkko on edelleen tasoverkko. Sisäpalan I_1 voi nyt siirtää käyrän C ulkopuolelle ilman, että se leikkaa mitään verkon F sivua tai käyrää C, kuten kuvassa 4. Tehdään sama siirto kaikille (u_0-v_0)-separoituville sisäpaloille järjestyksessä $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Tällä tavalla päädytään verkkoon F_1, joka on edelleen tasoverkko.

Lisäämällä sivu x_0 verkkoon F_1 saadaan verkko $G_1 = F_1 + x_0$. Verkko G_1 on tasoverkko, sillä sivua x_0 aikaisemmin leikkaavat sisäpalat saatiin kaikki siirrettyä kierroksen Z ulkopuolelle. Verkko G on isomorfinen jonkin verkon G_1 aliverkon kanssa, jolloin verkko G on myös välttämättä tasoverkko lauseen 4.8. Tästä seuraa ristiriita, sillä verkko G ei ole määritelmän mukaan tasoverkko. $\square$

Lemmat 7.3 ja 7.11 kertovat millainen antiteesin mukaisen verkon $G = F + x_0$ täytyy olla. Aloitetaan tarkastelemalla verkon $G = F + x_0$ kaikkia mahdollisia variaatioita näiden lemmojen valossa. Näin tekemällä tullaan huomaamaan, että jokainen näistä variaatioista sisältää aliverkon, joka on homeomorfinen joko verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa.

Lause 7.12 (Kuratowskin lause vasemalta oikealle)**.** *Olkoon G verkko, joka ei sisällä aliverkkonaan verkkoa, joka on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa. Tällöin G on tasoverkko.*

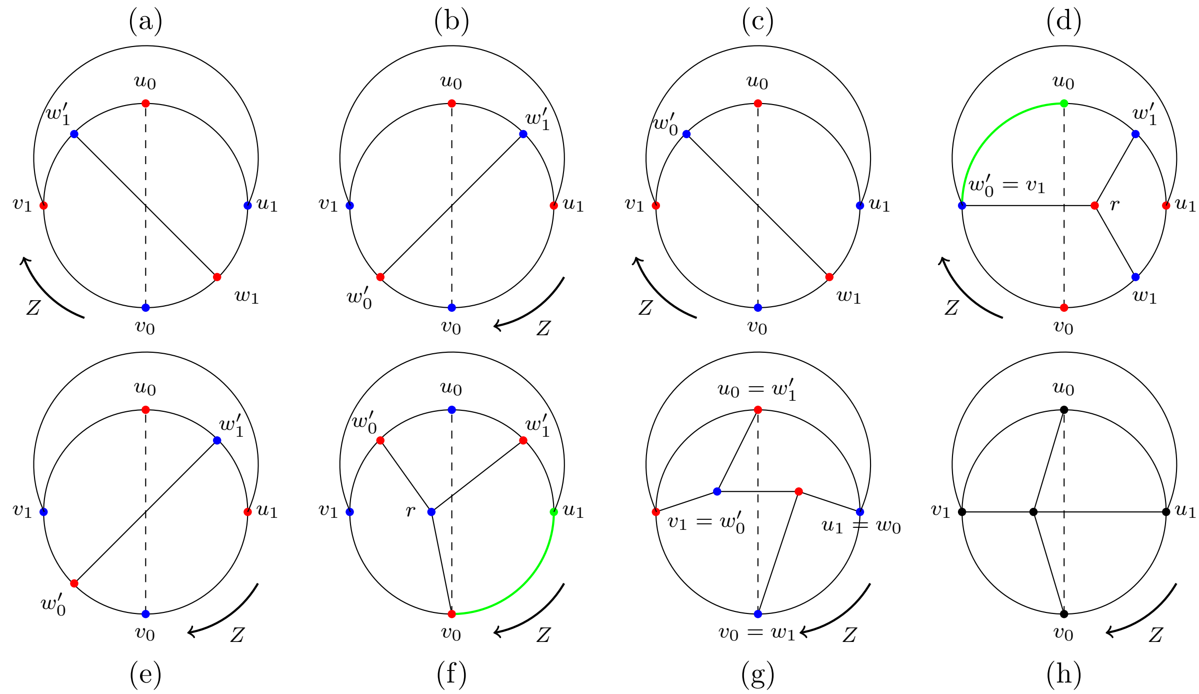
Todistus. Olkoon G verkko, joka ei sisällä aliverkkonaan verkkoa, joka on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa. Jos G olisi tasoverkko, väite olisi todistettu. Oletetaan siis, että G ei ole tasoverkko. Olkoon verkko

$$F = G - x_0$$

kohdan (7.1) määräämä verkko. Verkolta F löytyy lemman 7.3 mukainen kierros Z, joka kulkee kärkien u_0 ja v_0 kautta. Olkoon I lemman 7.11 mukainen verkon F sisäpala joka on sekä (u_0-v_0)-separoituva että (u_1-v_1)-separoituva. Kierrokselta Z löydetään nyt kärjet

$$w_0 \in Z(u_0, v_0), \quad w_0' \in Z(v_0, u_0), \quad w_1 \in Z(u_1, v_1) \quad \text{ja} \quad w_1' \in Z(v_1, u_1),$$

joissa sisäpala I yhdistyy alipolkuihin $Z(u_0, v_0)$, $Z(v_0, u_0)$, $Z(u_1, v_1)$, $Z(v_1, u_1)$. Käydään läpi kaikki mahdolliset kärkien w_0, w_0', w_1 ja w_1' paikat. Lopuksi lisätään sivu x_0, jolloin saadun verkon ei pitäisi olla homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ tai K_5 kanssa. Piirretään selkeyden vuoksi kuva kaikista kärkien paikoista. Kuvassa käytetään punaisia ja sinisiä pisteitä havainnollistamaan verkon $K_{3,3}$ kanssa homeomorfisia aliverkkoja. Vihreillä kärjillä tarkoitetaan kärkiä, jotka poistaessa verkolta saadaan aliverkko, joka on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa. Vastaavasti vihreällä merkityt sivut poistettaessa saadaan aliverkko joka on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa. Vihreällä merkityt kärjet voidaan poistaa sivujen jälkeen, sillä poistaessa kärki saadaan homeomorfinen verkko alkuperäisen verkon kanssa.



Kuva 5. Antiteesin kaikki mahdolliset aliverkot

Tapaus 1:

(a) Olkoot

$$w_1 \in Z(u_0, v_0) \quad \text{ja} \quad w_1' \in Z(v_0, u_0) \quad \text{tai} \quad w_1 \in Z(v_0, u_0) \quad \text{ja} \quad w_1' \in Z(u_0, v_0).$$

Riittää tarkastella vaihtoehdoista ensimmäistä, sillä vastaavalla päättelyllä saadaan myös toinen tapaus. Tässä erikoistapauksessa lisättäessä sivu $x_0 = \{u_0, v_0\}$ huomataan, että verkko G on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa.

Tapaus 2:

Jos on voimassa

$$w_1 \in Z(u_0, v_0) \quad \text{ja} \quad w_1' \in Z(u_0, v_0) \quad \text{tai} \quad w_1 \in Z(v_0, u_0) \quad \text{ja} \quad w_1' \in Z(v_0, u_0),$$

niin riittää jälleen tarkastella ensimmäistä tapausta, sillä toinen tapaus saadaan vastaavalla päättelyllä. Tarkastellaan miten kärjet w_0 ja w_0' voidaan asettaa kierrokselle Z.

(b) Jos $w_0' \in Z(u_1, v_1)$, niin verkko on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa.

(c) Jos $w_0' \in Z(v_1, u_1)$, niin verkko on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa.

(d) Jos $w_0' = v_1$, niin sisäpalan I täytyy sisältää kärki r, joka ei kuulu kierrokseen Z. Jos kärkeä r ei olisi olemassa niin sisäpala I ei olisi $(u_1\text{-}v_1)$-separoituva. Tälle kärjelle r löydetään erilliset polut kärkiin w_1, w_1' ja v_1, sillä muuten sisäpala I ei olisi $(u_1\text{-}v_1)$ -separoituva. Tässä tapauksessa G on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa.

Tapaus 3:

Oletetaan seuraavaksi, että

$$w_1 = v_0 \quad \text{ja} \quad w_1' \neq u_0 \quad \text{tai} \quad w_1 \neq v_0 \quad \text{ja} \quad w_1' = u_0.$$

Riittää tarkastella vain tapaus $w_1 = v_0$ ja $w_1' \neq u_0$, sillä toinen tapaus saadaan samalla päättelyllä. Voidaan olettaa, että $w_1' \in Z(u_0, v_0)$, sillä muuten kärjelle w_0' ei olisi yhtään mahdollista paikkaa. Saadaan kaksi vaihtoehtoa kärjen w_0' sijaintia suhteen.

(e): Oletetaan ensin, että $w_0' \in Z(v_0, v_1)$. Tällöin joko $w_1' \in Z(u_0, u_1)$ tai $w_1' \in Z(v_1, u_0)$. Voidaan olettaa, että $w_1' \in Z(u_0, u_1)$, sillä toinen tapaus menee lähes vastaavaan tapaan. Tässä erikoistapauksessa verkko G on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa.

(f) Oletetaan, että $w_0' \in Z(u_0, u_1)$. Tällöin joko $w_1' \in Z(u_0, u_1)$ tai $w_1' \in Z(u_1, u_0)$. Voidaan olettaa, että $w_1' \in Z(u_0, u_1)$. Tällöin saadun verkon täytyy sisältää kärki r, joka yhdistää kärjet w_1', w_0' ja $w_0 = v_0$. Tällöin löydetään verkon $K_{3,3}$ kanssa homeomorfinen aliverkko. Myös toisessa tapauksessa löydetään aliverkko, joka on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa, mutta päättely ei ole aivan identtinen.

Tapaus 4:

Viimeisessä tapauksessa tarkastellaan tilannetta jossa

$$w_1 = v_0 \quad \text{ja} \quad w_1' = u_0.$$

Voidaan olettaa, että

$$w_0 = u_1 \quad \text{ja} \quad w_0' = v_1,$$

sillä kaikki muut tapaukset palautuvat kohdissa 1–3 käsiteltyihin tapauksiin. Olkoon P_0 lyhin $u_0 - v_0$ polku sisäpalassa I ja vastaavasti P_1 lyhin $u_1 - v_1$ polku. Poluilla P_0 ja P_1 on oltava vähintään yksi yhteinen kärki, sillä muuten sisäpala I eivät olisi (u_0-v_0)-separoituvia ja (u_1-v_1)-separoituva. Saadaan kaksi mahdollista vaihtoehtoa.

(g) Jos poluilla on useampi kuin yksi yhteinen kärki, verkko on homeomorfinen verkon $K_{3,3}$ kanssa.

(h) Jos poluilla on tasan yksi yhteinen kärki, verkko on homeomorfinen verkon K_5 kanssa, kuten kuvassa 5.

□

Lähdeluettelo

[1] Frank Harary, Graph theory. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London 1969.

[2] Ville Tengvall: Johdatus diskreettiin matematiikkaan, syksy 2022 kurssimoniste.

[3] Markku Vilppolainen: Johdatus diskreettiin matematiikkaan, Kesä 2007 kurssimoniste.