Toni Hukkanen

Grossmanin mallin matemaattiset perusteet

Taloustieteen pro gradu -tutkielma

12. syyskuuta 2022

Jyväskylän yliopisto

Kauppakorkeakoulu

Tekijä: Toni Hukkanen

Yhteystiedot: toni.k.hukkanen@jyu.fi

Ohjaaja: Petri Böckerman

Työn nimi: Grossmanin mallin matemaattiset perusteet

Title in English: Grossman's Health Model, a mathematical review

Työ: Pro gradu -tutkielma

Opintosuunta: Taloustiede

Sivumäärä: 58+0

Tiivistelmä: Työssä tarkastellaan Michael Grossmanin vuonna 1972 julkaisemaa terveyden investointimallia. Grossmanin mallin perusajatuksena on, että terveys on valinta, joka suoritetaan investoimalla terveyteen aikaa ja rahaa. Näiden rajallisten resurssien investoimisesta muodostetaan optimointimalli, jonka ratkaisua tarkastelemalla voidaan tehdä havaintoja erilaisten valintojen ja olosuhteiden muutosten vaikutuksista terveyteen. Tässä työssä tutkitaan mallin matemaattisia perusteita ja esitetään Grossmanin julkaisun matemaattisten tulosten yksityiskohtaiset todistukset. Työn tavoitteena on matematiikan kautta syventää ymmärrystä Grossmanin mallin taustalla olevista ideoista sekä samalla pohtia joitakin malliin liittyviä ongelmakohtia.

Avainsanat: terveytaloustiede, Michael Grossman, Grossmanin malli, terveysvaranto, terveyspääoma, terveyden investointimalli, terveyden kysyntä

Abstract: This study examines the health investment model published by Michael Grossman in year 1972. The basic idea behind Grossman's model is that the health is a choice made by investing time and money. Based on the investment of these scarce resources, we can construct an optimization model. By analyzing the solution of this optimization problem, we can make observations how different choices and changes in conditions alter the health capital. The mathematical foundation of the model and the mathematical proofs presented in the Grossman's publication are studied in detail. The aim of the study is to deepen the understanding of Grossman's health model and at the same time consider some problematic aspects of the model.

Keywords: health economics, Michael Grossman, Grossman's health model, health capital, investment in health, demand for health

Sisältö

1 Johdanto

Michael Grosmann julkaisi vuonna 1972 taloustieteellisen mallin, jossa terveyttä tarkasteltiin uudesta näkökulmasta (Grossman 1972a). Grossmanin mallissa terveyttä ajateltiin perittynä pääomana, joka vähitellen katoaa pois luonnollisen kuluman kautta. Terveyspääomaa voidaan kuitenkin mallin mukaan lisätä investoimalla terveyteen aikaa ja rahaa. Nämä molemmat ovat rajallisia resursseja, joten ongelmaksi muodostuu miten jakaa nämä optimaalisesti toisaalta terveyden, mutta toisaalta myös muiden käyttötarkoitusten kesken. Yhdessä toisen samana vuonna julkaisemansa teoksen (Grossman 1972b) kanssa Grossman loi perustan terveystaloustieteen haaralle, joka on tuottanut runsaasti uusia tutkimuksia ja keskustelua aina näihin päiviin saakka.

Ennen Grossmanin työtä terveystaloustieteen tutkimus pohjautui lähinnä Kenneth Arrow'n julkaisuun "Uncertainty and the welfare economics of medical care" (Arrow 1963). Tämän työn lähtökohta oli kuitenkin hyvin erilainen kuin Grossmanin mallissa. Arrow tarkasteli työssään lähinnä terveydenhuollon järjestämistä kilpailullisessa markkinatilanteessa. Terveyttä itsessään Arrow ei julkaisussaan varsinaisesti käsitellyt. Grossmanin mallin lähtökohdat olivat tähän nähden varsin erilaiset ja suorastaan radikaalit; terveyttä ei aiemmin oltu käsitelty taloustieteellisenä elementtinä ja pääomana, joka määräytyy suoraan kuluttajan omien investointien ja valintojen pohjalta. Kysynnän ja tarjonnan lakeja noudattava terveys, jossa kuluttaja voi itse valita terveytensä, oli ajatuksena jotain ennennäkemätöntä. Tämä uusi näkökulma loi Arrow'n julkaisuun pohjautuneen tieteellisen tutkimuksen rinnalle uuden terveystaloustieteen tutkimuslinjan.

Grossmanin julkaisut saivat uudella ja aiemmasta varsin poikkeavalla otteellaan osakseen myös huomattavaa kritiikkiä. Osassa kritiikistä kiinnitettiin huomiota mallin matemaattisiin puutteisiin, mutta osassa kritiikistä kyseenalaistettiin jopa koko mallin tausta-ajatus. Grossmanin katsottiin yksinkertaistavan terveyden määräytymistä liikaa ja jättävän huomiotta esimerkiksi terveyteen liittyvät satunnaistekijät. Mallin katsottiin olevan liian vahvasti ristiriidassa joidenkin empiiristen havaintojen sekä vallitsevan ajattelutavan kanssa. Grossman itse on julkaissut vuosien varrella useita tarkennuksia ja laajennuksia malliinsa, erityisesti koulutuksen ja terveyden välisestä korrelaatiosta. Lisäksi Grossman on ottanut varsin vahvasti kantaa saamaansa kritiikkiin ja puolustanut omia näkemyksiään esimerkiksi julkaisuissaan “The demand for health, 30 years later: a very personal retrospective and prospective reflection” (Grossman 2004) ja “The demand for health turns 50: Reflections” (Grossman 2022). Grossmanin malliin liittyvää kritiikkiä on käsitelty laajasti myös julkaisussa “The Grossman model after 40 years” (Zweifel 2012).

Tässä työssä keskitytään erityisesti Grossmanin mallin matemaattisten perusteiden tarkasteluun ja vain suppeamman julkaisun (Grossman 1972a) osalta. Toisessa julkaisussa (Grossman 1972b) laajennettua mallia tai empiiristä tarkastelua ei käsitellä. Työssä käydään tarkasti läpi Grossmanin esittämät matemaattiset perustelut mallilleen ja pohdintaosuuksissa tarkastellaan malliin mahdollisesti liittyviä ongelmakohtia. Kritiikissä keskitytään lähinnä suoraan matemaattisesta tarkastelusta ja mallin oletuksista seuraaviin ongelmiin, mahdollisiin filosofisiin tai empiirisiin epäkohtiin ei tässä puututa sen tarkemmin. Työn matemaattisesta luonteesta johtuen varsinainen laajempi pohdintaosuus ja mallin arviointi myöhempiin julkaisuihin vertautuen tapahtuu vasta työn lopussa. Jotta Grossmanin mallin erityispiirteitä ja vaatimuksia voidaan perusteellisesti analysoida, on ensin muodostettava riittävä käsitys niistä matemaattisista perusteista, joihin Grossmanin alkuperäinen julkaisu pohjautuu.

Käydään vielä lyhyesti läpi tutkielman rakenne. Tämän johdannon jälkeen, toisessa luvussa, esitellään työssä tarvittavat taloustieteen peruskäsitteet. Nämä esitellään lähinnä määritelmällisesti, tarkempaa esittelyä varten viitataan alan peruskirjallisuuteen. Lisäksi kootaan yhteen työssä toistuvasti esiintyviä matemaattisia merkintöjä ja lyhenteitä.

Kolmannessa luvussa esitellään Grossmanin malli siihen liittyvine muuttujineen. Malli esitetään rajoitetun optimointiongelman muodossa ja erityisesti rajoitteiden muodostamisessa pyritään käymään tarkasti läpi mallin taustalla olevia ajatuksia rajallisten resurssien investoimisesta terveyteen. Tässä luvussa esitellään tarkemmin suurin osa toisessa luvussa lueteltuista merkinnöistä.

Neljännessä luvussa alalukuineen esitetään Grossmanin mallin päätulokset todistuksineen ja mallista saatavat ennusteet ja havainnot optimaalisesta terveydestä. Aluksi osoitetaan mallin toteuttavan tietyt taloustieteelliset tasapainoehdot. Tämän jälkeen tarkastellaan erilaisten parametrien muutoksista seuraavia vaikutuksia optimaalisen terveyden kehittymiseen. Neljäs luku on erittäin tekninen ja matematiikkapainotteinen, mutta teknisyyttä on pyritty tasapainottamaan esittämällä tulokset mahdollisimman selväkielisessä muodossa. Alalukujen lopuksi pohditaan myös todistuksista saatavia tuloksia ja niiden järkevyyttä käytännön kannalta tarkasteltuna. Pohdintojen yhteydessä tuodaan esille joitakin matemaattisen tarkastelun yhteydessä havaittuja epäkohtia sekä niihin liittyvää kritiikkiä.

Viimeisessä luvussa esitetään yhteenveto saaduista tuloksista ja kiinnitetään vielä huomiota mallin oletuksiin liittyviin selkeimpiin epäkohtiin sekä mallin yleisimmin kritiikkiä herättäneisiin kohtiin. Tässä yhteydessä verrataan havaittuja ongelmia kohtalaisen uusiinkin tutkimuksiin sekä mainitaan joitakin tutkimuksia, joissa epäkohtiin on pyritty löytämään ratkaisuja.

2 Merkinnät ja käsitteet

Esitellään tässä luvussa tärkeimmät työssä esiintyvät käsitteet ja merkinnät. Nämä käsitteet ovat suurimmalta osaltaan tyypillistä taloustieteen termistöä ja näiden perusmerkitykset oletetaan pääosin ennalta tunnetuiksi. Käsitteet esitellään tässä kuitenkin lyhyesti muistin virkistämiseksi sekä johdatukseksi aihepiiriin. Tarkemmat esittelyt ja määrittelyt ovat löydettävissä useimmista taloustieteen perusteoksista ja oppikirjoista, esim. (Becker 2007) ja (Nicholson ja Snyder 2007).

On syytä huomata, että monet näistä peruskäsitteistä voidaan määritellä hieman erilaisilla tavoilla, vaikka taustalla oleva ajatus olisikin sama. Joitakin näennäisesti erilaisia määritelmiä voidaan myös samaistaa keskenään, jonka vuoksi sama asia saattaa eri yhteyksissä näyttää hieman eri tavalla muotoillulta. Tässä luvussa on pyritty esittämään lähteitä, joissa käsitteet on määritelty mahdollisimman tarkasti samalla tavalla kuin Grossmanin käyttämässä termistössä. Tämän vuoksi lähteistyksessä ei ole voitu tyytyä vain yhteen lähteeseen, vaan viittauksia on esitetty useampiin alan perusteoksiin sekä myös muihin sekalaisempiin lähteisiin.

Lopuksi on esitelty työssä yleisimmin käytettyjä merkintöjä. Työ on joiltain osiltaan varsin tekninen, joten matemaattisen esityksen yksinkertaistamiseksi merkintöjen helppolukuisuus on tärkeässä osassa. Matemaattiset merkinnät kuvastavat kuitenkin usein pitkälti kirjoittajansa omia mieltymyksiä sekä toisaalta kirjoitusajankohdalle tyypillistä esitystapaa. Jotkin Grossmanin alkuperäistekstissä käytetyt merkinnät ovat ajan kuluessa vakiintuneet hieman toiseen muotoon kuin Grossmanin julkaisussa. Tässä työssä on pyritty käyttämään mahdollisimman loogisia ja helposti ymmärrettäviä ja samalla myös nykykäyttöön vakiintuneita merkintöjä. Merkinnät poikkeavat siis joiltain osin alkuperäisjulkaisusta ja työn seuraamisen helpottamiseksi kaikki oleellisimmat merkinnät on koottu yhteen. Merkintöjen tarkemmat selitykset käydään läpi lähinnä luvussa kolme.

2.1 Rajakustannus (marginal cost)

Rajakustannuksella tarkoitetaan tuotantokustannusten kokonaismuutosta, joka syntyy yhden lisäyksikön tuottamisesta. Mikäli kustannusfunktio $C(Q)$ on jatkuva ja differentioituva, voidaan rajakustannus määritellä derivaattana $\frac{\partial C(Q)}{\partial Q}$ tuotantomäärän Q suhteen (Luento 16, Becker 2007).

2.2 Rajatuotos (marginal product)

Rajatuotoksella tarkoitetaan tuotantomäärän muutosta, joka syntyy lisäämällä resursseja yhdellä yksiköllä. Mikäli tuotantofunktio $Y(K)$ on jatkuva ja differentioituva, voidaan rajatuotos määritellä derivaattana $\frac{\partial Y(K)}{\partial K}$ resurssien K (esim. pääoma) suhteen (Luento 24, Becker 2007).

2.3 Rajahyöty (marginal benefit, marginal utility, marginal revenue)

Rajahyöty voidaan määritellä useammallakin eri tavalla, mutta tyypillisesti rajahyödyllä tarkoitetaan suurinta hintaa, jonka kuluttaja on valmis maksamaan yhdestä lisäyksiköstä hyötyä tuottavasta tuotteesta tai palvelusta. Näin ollen rajahyöty kuvastaa hyödyn lisäystä rahallisesti mitattavan suureen kautta.

Mikäli hyötyä ajatellaan jatkuvana suureena, voidaan myös rajahyöty laskea derivaattana $\frac{\partial U}{\partial x}$, missä x kuvaa hyötyä lisäävää suuretta (Luento 11, Becker 2007).

2.4 Rajatuottoaste (marginal rate of return)

Rajatuottoaste määritellään jakamalla yhden tuotteen lisäyksestä saatava hyödyn määrä yhden tuotteen lisäyksestä seuraavalla kustannusten muutoksella. Aiempia määritelmiä hyödyntäen voidaan siis tulkita

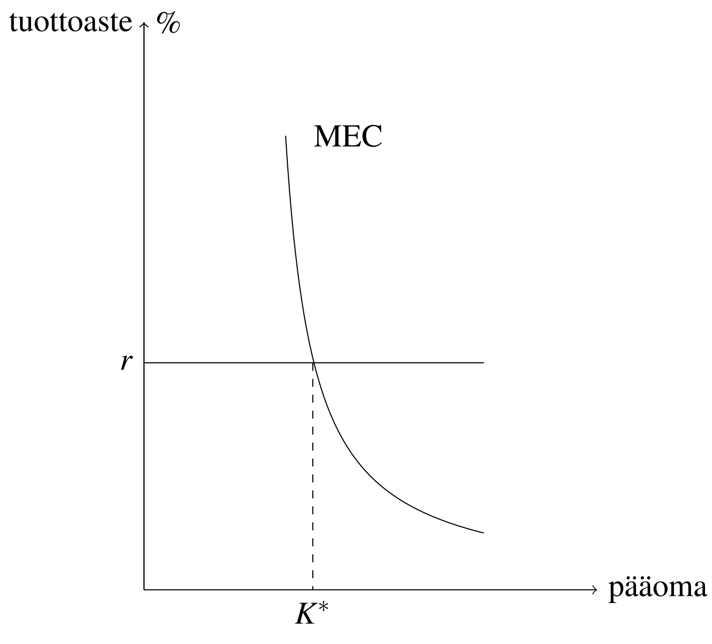
$$\text{Rajatuottoaste} = \frac{\text{rajahyöty}}{\text{rajakustannus}} .$$

Täsmälleen tässä Grossmanin käyttämässä muodossa rajatuottoaste on määritelty esim. lähteissä (“Definition of Marginal Rate of Return” 2019) ja (“How to Calculate Marginal Rate of Return” 2017). Tuottoastetta on esitelty yleisemmin esim. lähteissä (Luku 17, Nicholson ja Snyder 2007) ja (Luku 20, Varian 1992).

2.5 Pääoman rajatehokkuus (MEC, marginal efficiency of capital)

Pääoman rajatehokkuuskäyrä MEC kuvaa rajahyötyä pääoma-tuottoaste -koordinaatistossa. Kyseessä on siis kysyntäkäyrä joka yhdistettynä tarjontakäyrään antaa keinon määrittää optimaalisen markkinatilanteen. Optimaalisessa tilanteessa rajahyöty ja rajakustannus ovat yhtä suuret, toisin sanoen kysyntä- ja tarjontakäyrät leikkaavat.

Pääoman rajatehokkuus tarkoittaa määritelmällisesti sitä diskonttokorkoa, jolla diskontattu odotettu tuottoaste (discounted expected rate of return) vastaa pääomakustannuksia (cost of capital). MEC voidaan samaistaa tuottoasteeseen (sivu 618, Weintraub 1983).



KUVA 1: MEC-käyrä ja optimaalinen pääoma K^*

2.6 Hintajousto (elasticity)

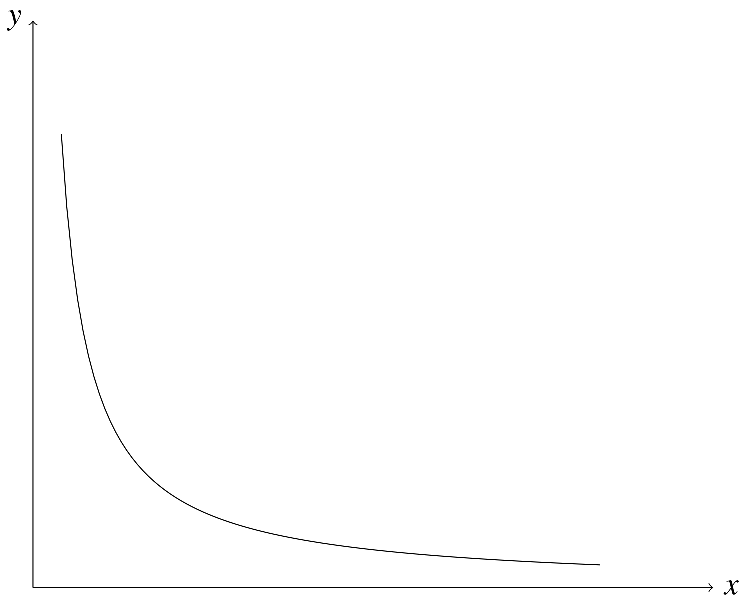
Hintajoustolla kuvataan kysynnän muutosta suhteessa hinnan muutokseen. Funktion $y(x)$ (kysyntä) hintajousto muuttujan x (hinta) suhteen määritellään (ks. esim. sivu 125, Samuelson 1947) matemaattisesti

$$\varepsilon = \frac{d \ln y}{d \ln x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} .$$

Hintajousto voi saada sekä negatiivisia että positiivia arvoja, mutta oleellimmat päätelmät tehdään yleensä hintajouston itseisarvosta. Jos hintajousto on itseisarvoltaan alle 1, kysyntä reagoi suhteessa vähemmän hinnan muutoksiin. Vastaavasti, jos hintajousto on itseisarvoltaan yli 1, on kysynnän muutos suurempaa suhteessa hinnan muutokseen.

Esimerkiksi funktion $y(x) = 1/x$ hintajousto on $\varepsilon = -1$. Tämä nähdään suoralla laskulla, koska nyt

$$\varepsilon = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1/x}\frac{d(1/x)}{dx} = x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1 \ .$$



KUVA 2: Tyypillinen esimerkkikäyrä negatiivisesta hintajoustosta

2.7 Lagrangen funktio

Rajoitettu optimointiongelma voidaan ratkaista ns. Lagrangen menetelmän avulla. Tätä varten muodostetaan Lagrangen funktio

$$L(x_1,...,x_n,\lambda) = f(x_1,...,x_n) - \lambda \cdot g(x_1,...,x_n) \ ,$$

missä f on optimoitava (hyöty)funktio ja g on (budjetti)rajoitefunktio. Tässä λ on ns. Lagrangen kerroin. Lagrangen funktio voidaan yhtä hyvin määritellä myös käyttäen plus-merkkiä, tämä ei vaikuta lopputulokseen.

Ongelma ratkaistaan laskemalla Lagrangen funktion osittaisderivaatat kaikkien muuttujien $x_1, ..., x_n, \lambda$ suhteen ja asettamalla ne nollaksi. Yksittäisen osittaisderivaatan nollakohta $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ kertoo, että kyseessä on ääriarvokohta kyseistä muuttujaa vastaavan akselin suuntaan koordinaatistossa tarkasteltuna. Jotta kyseessä olisi täydellinen ratkaisu, on löydetyn ratkaisun oltava (samanlaatuinen) ääriarvokohta kaikkien muuttujien suuntaan.

Lagrangen kerroin λ kertoo paljonko hyötyfunktion arvo optimaalisessa kohdassa muuttuu, kun rajoite-ehdon annetaan muuttua yhden yksikön verran. Taloustieteellinen tulkinta tälle on, että optimaalisessa kohdassa λ on ns. varjohinta eli tulkintatavasta riippuen joko aiemmin mainittu rajakustannus tai rajahyöty ((Luku 4, Dixit 1990) sekä (Luku 2, Luku 4 ja Luku 10, Nicholson ja Snyder 2007)).

2.8 Eulerin lause

Eulerin lause homogeenisille funktiolle antaa keinon esittää k:nen asteen homogeenisen funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ osittaisderivaattojensa avulla muodossa

$$kf(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \; .$$

Esimerkiksi kahden muuttujan funktiolle, joka on muuttujiensa suhteen ensimmäisen asteen homogeeninen (ns. vakioiset skaalatuotot), pätee

$$f(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \; .$$

Eulerin lause on laajalti tunnettu matemaattinen lause, joka on löydettävissä tässä muodossa todistuksineen useimmista matematiikan perusteoksista. Lauseen alkuperä vie aina 1700-luvulle Eulerin teokseen Institutiones calculi differentialis, joka on myöhemmin käännetty myös englanniksi (Euler 2000). Modernimmassa taloustieteellisessä esitysmuodossa Eulerin lause on löydettävissä esimerkiksi mikrotaloustieteen oppikirjoista (esim. sivu 54, Nicholson ja Snyder 2007)

2.9 Käytettyjä merkintöjä

Kootaan tähän tärkeimpiä ja työssä useimmin esiintyviä merkintöjä. Näiden tarkemmat selitykset tulevat esille myöhemmin.

$n+1$	jaksojen kokonaismäärä, koko elinikä
i	tarkasteltava ikä/jakso
H_0	terveysvaranto alussa/syntyessä
H_i	terveysvaranto tarkastelujakson alussa
H_{min}	terveysvarannon minimiarvo (kuolema)
ϕ_i	terveysvarannon tuottama suhteellinen hyöty, rajatuotos
h_i	terveiden päivien määrä tarkastelujaksolla
I_i	investoinnit terveyteen tarkastelujaksolla
Z_i	muuhun kuin terveyteen liittyvä kulutus
δ_i	kulumisaste jaksolla i
Q_{M_i}	terveyteen käytettyjen hyödykkeiden määrä
P_{M_i}	terveyteen käytettyjen hyödykkeiden hinta
E_i	inhimillinen pääoma
Q_{X_i}	muiden kuin terveyshyödykkeiden määrä
P_{X_i}	muiden kuin terveyshyödykkeiden hinta
W_i	palkkataso
T_{W_i}	työhön käytetty aika
A_0	alkupääoma
r	korkotaso (kiinteä)
T_{W_i}	työhön käytetty aika
T_{S_i}	sairastamiseen käytetty aika
T_{M_i}	terveyshyödykkeisiin (kulutukseen) käytetty aika
T_{X_i}	muihin kuin terveyshyödykkeisiin (kulutukseen) käytetty aika
Ω	kokonaisaika (kiinteä kaikilla jaksoilla)
R	kokonaisbudjetti
C_i	terveysinvestointien kustannukset
C'_i	terveysinvestointien rajakustannus investointien suhteen

$\Delta_{\%}C_i'$	rajakustannusten prosentuaalinen muutos
$\widetilde{H}_i$	suhteellinen muutos
ε	hintajousto

3 Grossmanin mallin esittely

Esitellään nyt Grossmanin mallin hyötyfunktio sekä siihen liittyvät muuttujat ja rajoitteet (Grossman 1972a). Malli esitetään rajoitetun optimointiongelman muodossa. Erityisesti rajoitteiden muodostaminen vaatii huomattavaa tarkkuutta. Rajallisten aika- ja varallisuusresurssien jakautuminen pyritään esittämään mahdollisimman huolellisesti ja tässä yhteydessä esitellään suurin osa työssä käytettävistä matemaattisista merkinnöistä. Merkinnät on selitetty tässä luvussa tarkasti. Merkinnät selityksineen on tiivistetty edellisen luvun lopussa olevaan koosteeseen.

3.1 Hyötyfunktio

Grossmanin mallissa $n+1$ jakopisteen avulla muodostetaan yhteensä n kappaletta tarkasteluvälejä. Jos ajatellaan, että $n+1$ on koko elinikä ja i on tarkasteltava ikä vuosina, niin arvot $i = 0,...,n$ määräävät elinvuoden $(i,\ i+1)$. Tätä elinvuotta kutsutaan jatkossa tarkasteluväliksi tai -jaksoksi i.

Tarkastellaan nyt hyötyfunktiota U muodossa

$$U(\phi_0 H_0, ..., \phi_n H_n, Z_0, ..., Z_n)\ . \tag{3.1}$$

Tässä H_i kuvaa *terveysvarannon suuruutta* tarkasteluvälin i alussa. Näin ollen esim. H_0 kuvaa syntymässä saatua, perintötekijöistä riippuvaa, *perittyä terveysvarantoa*. Toisaalta H_n kuvastaa terveysvarantoa viimeisen tarkastelujakson alussa.

Kerroin ϕ_i on terveysvarannon tuottaman hyödyn määrä jaksolla i suhteutettuna terveysvarantoon H_i. Oletetaan jatkossa, että terveysvarannon tuottama hyöty koostuu ainoastaan jakson *terveenäolopäivistä* h_i. Tällöin

$$\phi_i H_i = h_i\ , \tag{3.2}$$

eli terveenäolopäivien kokonaismäärä jaksolla i.

Terveysvarannon ja siten terveenäolopäivien kerryttäminen ja ylläpitäminen vaatii panostusta terveyteen ja siihen liittyviin hyödykkeisiin ja palveluihin. Virtausmallin mukaan kuluttajan hyötynä saamien terveenäolopäivien virtaus on oltava yhtä suuri kuin niihin liittyvä kulutusvirtaus. Näin ollen $\phi_i H_i$ on toisaalta sama kuin terveyspalveluihin liittyvä kokonaiskulutus jaksolla i.

Muuttujat Z_i puolestaan kuvastavat kaikkeen muuhun kuin terveyteen liittyvien hyödykkeiden ja palveluiden kokonaiskulutusta jaksolla i. Näin ollen hyötyfunktion muuttujat koostuvat kulutuksen eri muodoista ja tätä kulutusta tullaan jatkossa kontrolloimaan erilaisilla rajoitteilla hyödynmaksimoimisongelman muodostamiseksi.

Mallissa on syytä huomata että tarkasteluvälien määrä, eli eliniän pituus, ei ole lähtökohtaisesti ennalta määrätty. Elinikä määräytyy jäljelläolevan terveysvarannon perusteella siten, että terveysvarannolla on jokin tietty minimiarvo, H_{min}, jonka saavuttaminen/alittaminen merkitsee kuolemaa. Tarkastelu siis päättyy siinä vaiheessa, kun $H_{i+1} \leq H_{min}$. Koska mallissa maksimoidaan hyötyfunktiota joka riippuu muuttujista H_i, määräytyy elinikä näin ollen tästä ratkaisusta. Tämä tuo mukanaan mielenkiintoisen kysymyksen hyödyn muodostumisesta; pyritäänkö hyödyn maksimoinnissa mahdollisimman pitkään elinikään vai painotetaanko elämän laatua enemmän kuin pelkkää elämän pituutta?

3.2 Rajoitteet

Hyötyfunktiossa esiintyvän terveysvarannon kerryttämiseen tarvitaan investointeja. Tähän, sekä muuhun kulutukseen, käytetään rajallisia resursseja eli tuloja ja varallisuutta. Näiden avulla voidaan muodostaa ongelmalle rajoitteet. Esitetään seuraavaksi, miten nämä rajoitteet tarkalleen ottaen määritellään.

Terveysvaranto kertyy investoinneista riippuvan määrän mutta toisaalta vähenee luontaisen arvonaleneman kautta. Jos merkitään jakson *i investointifunktiota* I_i ja *kulumisastetta* δ_i, niin saadaan uudeksi terveysvarannoksi

$$H_{i+1} = H_i + I_i - \delta_i H_i = I_i + (1 - \delta_i) H_i \; . \tag{3.3}$$

Ongelmassa pyritään siis ratkaisemaan optimaalisia investointeja terveyteen eri tarkastelujaksoilla. Sen sijaan kulumisasteeseen δ_i ei tässä katsota voitavan vaikuttaa. Arvon alenemiseen vaikuttavat siis vain ulkoiset tekijät, kuten ikä.

Investointeja terveyteen *tuotetaan* sijoittamalla suoraan *terveydenhoitoon* M_i hankkimalla terveyshyödykkeitä määrällä Q_{M_i} sekä käyttämällä terveyteen aikaa T_{M_i}. Lisäksi voidaan sijoittaa epäsuorasti terveyteen vaikuttaviin asioihin, joita kutsutaan jatkossa *inhimilliseksi pääomaksi*, E_i. Inhimilliseen pääomaan lasketaan tyypillisesti kuuluvaksi esimerkiksi yleiset elintavat sekä koulutus. Näitä merkintöjä käyttäen saadaan investointeihin liittyvä tuottofunktio muotoon

$$I_i = I_i(Q_{M_i}, T_{M_i}, E_i) \ .$$

Investointien tuottofunktion oletetaan lisäksi noudattavan vakioisia skaalatuottoja (constant returns to scale) muuttujien Q_M ja T_M suhteen.

Vastaavasti muu kulutus Z_i riippuu muuhun kuin suoraan terveyteen liittyvistä tuotteista X_i sekä muusta kuin terveyteen liittyvästä ajankäytöstä T_{X_i}. Inhimillinen pääoma E_i on otettava huomioon myös yleisessä kulutuksessa. Näin ollen muuhun kuin terveyteen liittyvän kulutuksen tuottofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$Z_i = Z_i(Q_{X_i}, T_{X_i}, E_i) \ .$$

Rajoitukset muodostetaan nyt toisaalta rahalliset ja toisaalta ajalliset resurssit huomioiden. Rahallisten kustannusten suhteen tarkastellaan elinkaaren diskontanttuja tuloja lisättynä alkupääomalla. Ajallisissa kustannuksissa puolestaan huomioidaan ajankulutus työhön sekä sairastamiseen. Muu aika jaetaan terveydenhoidon suhteen joko siihen liittyvään tai siihen liittymättömään aikaan.

Merkitään nyt jakson i *palkkatasoa* W_i ja *työhön käytettyä aikaa* T_{W_i}. Työnteosta saadut resurssit jaksolla i ovat siten $W_i T_{W_i}$. Käytössä olevaa *alkupääomaa* merkitään A_0. Oletetaan yksinkertaistuksen vuoksi koko elinkaaren korkotasoksi kiinteä r, jolloin käytössä olevat kokonaisresurssit alkuhetkeen diskontattuna ovat

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{W_i T_{W_i}}{(1+r)^i} + A_0 \ . \tag{3.4}$$

Rahallisia resursseja käytetään *terveyteen* Q_{M_i} hinnalla P_{M_i} sekä muihin hyödykkeisiin Q_{X_i} hinnalla P_{X_i}. Kun näistä kertyvä diskontattu kulutus yhdistetään edellä todettuihin kokonaisresursseihin, saadaan budjettirajoite

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{P_{M_i} Q_{M_i} + P_{X_i} Q_{X_i}}{(1+r)^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{W_i T_{W_i}}{(1+r)^i} + A_0 \ . \tag{3.5}$$

Kun merkitään lisäksi jaksolla i *sairastamiseen käytettyä aikaa* T_{S_i}, *terveyteen käytettyä aikaa* T_{M_i}, *muuhun kuin terveyteen käytettyä aikaa* T_{X_i} sekä *käytettävissä olevaa kokonaisaikaa* Ω, saadaan lisäksi aikarajoite

$$T_{W_i} + T_{S_i} + T_{M_i} + T_{X_i} = \Omega \ . \tag{3.6}$$

Oletaan tässä, että käytössä oleva kokonaisaika jokaisella jaksolla on kiinteä, esim. päivien määrä vuodessa. Kun aikayksikkönä käytetään päiviä, voidaan aiempia merkintöjä käyttäen sairaspäivät esittää tarvittaessa myös muodossa

$$T_{S_i} = \Omega - h_i \ , \tag{3.7}$$

missä $h_i = \phi H_i$ on terveenäolopäivien lukumäärä.

Ratkaisemalla aikarajoitteesta (3.6) työhön käytetty aika

$$T_{W_i} = \Omega - T_{S_i} - T_{M_i} - T_{X_i} \ ,$$

voidaan kokonaisbudjetti (3.4) kirjoittaa muotoon

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{W_i(\Omega - T_{S_i} - T_{M_i} - T_{X_i})}{(1+r)^i} + A_0 \ .$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (3.5) ja siirtämällä negatiiviset termit yhtälön vasemmalla puolelle, voidaan budjettirajoite lopulta kirjoittaa muotoon

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{P_{M_i} Q_{M_i} + P_{X_i} Q_{X_i} + W_i(T_{S_i} + T_{M_i} + T_{X_i})}{(1+r)^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{W_i \Omega}{(1+r)^i} + A_0 =: R \ . \tag{3.8}$$

Tähän muotoon kirjoitettu budjettirajoite voidaan tulkita siten, että yhtälön oikealla puolen oleva kokonaisbudjetti muodostuu alkupääomasta A_0 sekä diskontatuista eliniän tuloista olettaen, että kaikki aika on käytetty työntekoon. Merkitään tätä *kokonaisbudjettia* jatkossa lyhyesti symbolilla R.

Vasemmalla puolen tätä kokonaisbudjettia kulutetaan rahallisesti terveyspalveluihin sekä muihin hyödykkeisiin. Ajallisesti budjettia kulutetaan sairaspäiviin, terveydenhuoltoon käytettyyn aikaan sekä muuhun ajankäyttöön. Näin saadaan yhdistettyä sekä rahallinen että ajallinen budjetti yhteen kokonaisrajoitteeseen.

Yhdistämällä edellä esitetty hyötyfunktio sekä rajoitteet, voidaan optimointiongelma nyt kirjoittaa kokonaisuudessaan muotoon, jossa halutaan *maksimoida* hyötyfunktio

$$U(\phi_0 H_0, ..., \phi_n H_n, Z_0, ..., Z_n)$$

rajoittein

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{P_{M_i} Q_{M_i} + P_{X_i} Q_{X_i} + W_i (T_{S_i} + T_{M_i} + T_{X_i})}{(1+r)^i} = R \ , \tag{3.9}$$

missä

$$H_{i+1} = I_i + (1 - \delta_i) H_i \ ,$$

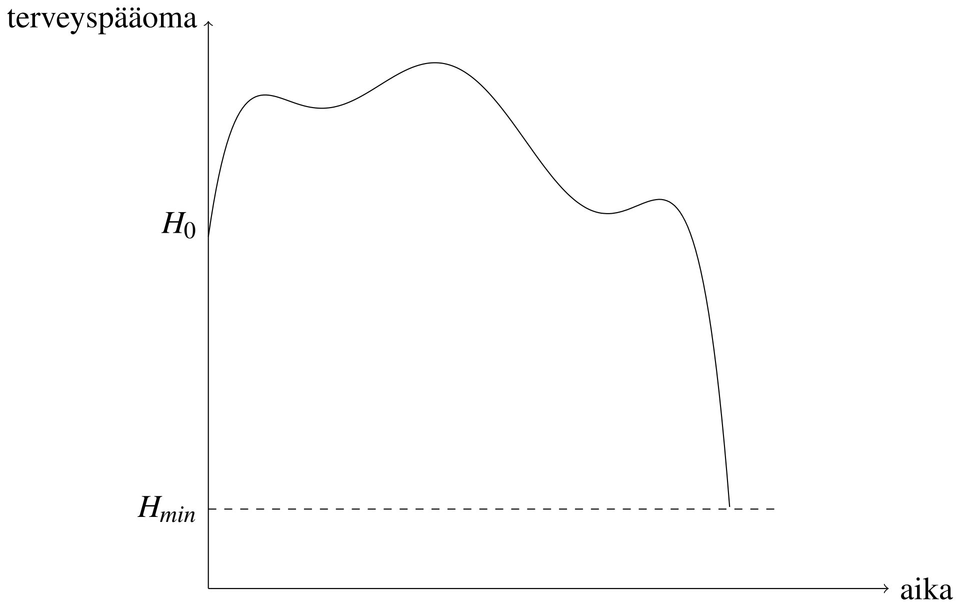
$$I_i = I_i(M_i, T_{M_i}, E_i) \ ,$$

$$Z_i = Z_i(X_i, T_{X_i}, E_i) \ .$$

Lisäksi, tarkastelujaksojen määrä $n+1$ määräytyy ehdosta

$$H_n > H_{min} \geq H_{n+1} \ .$$

Grossmanin mallin mukaista terveysvarannon kehittymistä voidaan havainnollistaa kuvan 3 mukaisesti. Terveysvarannon aloituskohtana on peritty terveysvaranto H_0. Tämän jälkeen terveysvaranto voi investoinneista ja kulumisasteesta riippuen joko nousta tai laskea. Jossain vaiheessa kulumisaste kasvaa iän myötä niin suureksi, että terveysvarannon ylläpitäminen investoinneilla käy liian vaativaksi ja investointien sijaan “valitaan” kuolema. Tällöin terveysvaranto laskee minimiarvoonsa H_{min}, johon tarkastelu päättyy.



KUVA 3: Havainnekuva terveysvarannon mahdollisesta kehittymisestä

4 Tuloksia Grossmanin mallista

Dynaamisen luonteensa vuoksi edellä esitellyn optimointiongelman täydellinen ratkaiseminen on hankalaa. Koska elinikä määräytyy investointien mukaan, ei tarkastelujaksojen määrä n ole lähtökohtaisesti tiedossa. Näin ollen myöskään edellä esitetty budjettirajoite R ei tarkalleen ottaen ole vakio, vaan riippuu ratkaisusta.

Jatkotarkasteluissa tehdään joitakin ongelman tarkastelua helpottavia yksinkertaistuksia. Esimerkiksi budjettirajoite R oletetaan vakioksi, mikä käytännössä tarkoittaa sitä, että elinikä oletetaan ennalta tunnetuksi. Lisäksi tarkastellaan jokaista jaksoa omana kokonaisuutenaan pyrkimättäkään löytämään täydellistä ratkaisua kaikille jaksoille yhtä aikaa. Näin voidaan muodostaa optimaalisuusehdot yksittäiselle tarkastelujaksolle i sen sijaan, että pyrittäisiin määräämään optimaaliset investoinnit kerralla koko eliniän ajaksi. Tämä tarkastelu riittää tuottamaan tietoa niistä periaatteista, joita noudattaen optimaaliset investoinnit tietyllä ajanhetkellä voidaan mallin mukaan muodostaa.

4.1 Tasapainotuloksia

Seuraavien lauseiden perusteella voidaan todeta, että Grossmanin malli toteuttaa tyypilliset taloustieteessä pätevät lainalaisuudet rajakustannusten, rajahyötyjen sekä rajatuotosten välillä.

Lause 4.1 *Grossmanin mallissa optimaaliset investoinnit annetulla ajanjaksolla saavutetaan, kun investointien diskontatut rajakustannukset ovat yhtenevät diskontattujen rajahyötyjen kanssa.*

Todistus: Merkitään terveysinvestointiin I_i liittyviä kustannuksia

$$C_i = P_{M_i} Q_{M_i} + W_i T_{M_i} \ .$$

Rajakustannukset investoinnin I_i suhteen ovat siten $\frac{\partial C_i}{\partial I_i}$.

Hyötyjä investoinneista saadaan kertyvän terveysvarannon H sekä siihen liittyvien terveiden päivien h kautta. Terveysvarannon määrä vaikuttaa hyötyyn ensinnäkin suoraan hyötyfunktion U kautta. Toisaalta, terveysvarannon määrä on verrannollinen terveiden päivien määrään ja vaikuttaa siten hyötyyn terveiltä päiviltä saatavan palkan W kautta. *Rajahyödyt* investoinnin I suhteen ovat siten karkeasti sanoen

$$\frac{\partial U}{\partial I} + W\frac{\partial h}{\partial I} \ .$$

Tarkastellaan seuraavaksi rajakustannusten ja rajahyödyn välistä yhteyttä tarkemmin. Muodostetaan aluksi edellä esitetystä hyötyfunktiosta (3.1) ja siihen liittyvästä rajoiteyhtälöstä (3.9) Lagrangen funktio

$$L = U(\phi_0 H_0, ..., \phi_n H_n, Z_0, ..., Z_n) - \lambda\Big(\sum_{i=0}^{n} \frac{P_{M_i}Q_{M_i} + P_{X_i}Q_{X_i} + W_i(T_{S_i} + T_{M_i} + T_{X_i})}{(1+r)^i} - R\Big) \ .$$

Tarkasteltavan jakson terveysvarantoa on kerrytetty edeltävän jakson terveysinvestointien avulla, joten tarkastellaan ensimmäisen asteen optimaalisuusehtoa tarkastelujaksolla i investoinnin I_{i-1} suhteen. Lasketaan siis Lagrangen funktiolle osittaisderivaatta I_{i-1}:n suhteen ja asetetaan tämä nollaksi. Muuttuja I ei ole suoraan näkyvissä funktiossa, joten derivoitaessa on käytettävä ketjusääntöä I:stä riippuvia muuttujia h (terveet päivät) ja T_S (sairaspäivät) derivoitaessa. Siis

$$\frac{\partial U}{\partial I} = \frac{\partial U}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial I} \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial T_S}{\partial I} = \frac{\partial T_S}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial I} \ . \tag{4.1}$$

Koska terveysinvestointeja on yhtälön (3.3) mukaisesti helpompi tarkastella terveysvarannon H suhteen, niin on hyödyllistä käyttää ketjusääntöä vielä uudestaan, jolloin saadaan lopulta

$$\frac{\partial U}{\partial I} = \frac{\partial U}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial I} \ . \tag{4.2}$$

Derivoitaessa on myös huomattava, että investointi jaksolla $i-1$ vaikuttaa paitsi jakson i terveysvarantoon H_i, niin myös kaikkien tulevien jaksojen terveysvarantoihin H_{i+1}, H_{i+2}, $\ldots$, H_{n+1}. Myös tämä havaitaan yhtälöstä (3.3) , sillä

$$H_i = I_{i-1} + (1-\delta_{i-1})H_{i-1} \ , \tag{4.3}$$

jolloin

$$\begin{aligned} H_{i+1} &= I_i + (1-\delta_i)H_i = I_i + (1-\delta_i)\big(I_{i-1} + (1-\delta_{i-1})H_{i-1}\big) \\ &= I_i + (1-\delta_i)I_{i-1} + (1-\delta_i)(1-\delta_{i-1})H_{i-1} \ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$
\begin{aligned}
H_{i+2} &= I_{i+1} + (1-\delta_{i+1})H_{i+1} \\
&= I_{i+1} + (1-\delta_{i+1})\big(I_i + (1-\delta_i)I_{i-1} + (1-\delta_i)(1-\delta_{i-1})H_{i-1}\big) \\
&= I_{i+1} + (1-\delta_{i+1})I_i + (1-\delta_{i+1})(1-\delta_i)I_{i-1} + (1-\delta_{i+1})(1-\delta_i)(1-\delta_{i-1})H_{i-1}
\end{aligned}
$$

ja näin jatkamalla lopulta

$$
H_n = I_{n-1} + (1-\delta_{n-1})I_{n-2} + \ldots + (1-\delta_{n-1})\ldots(1-\delta_i)I_{i-1} + (1-\delta_{n-1})\ldots(1-\delta_{i-1})H_{i-1}\ . \tag{4.5}
$$

Myös viimeinen terveysvaranto H_{n+1} riippuu aiemmista investoinneista, mutta tämän oletetaan olevan alle minimivarannon, joten tätä ei enää oteta huomioon hyötyfunktiotarkastelussa.

Nämä havainnot huomioiden voidaan nyt laskea osittaisderivaatta

$$
\frac{\partial L}{\partial I_{i-1}} = \frac{\partial U}{\partial I_{i-1}} - \lambda \sum_{k=i-1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} \frac{\partial (P_{M_k}Q_{M_k} + W_k T_{M_k} + W_k T_{S_k})}{\partial I_{i-1}}\ ,
$$

kun muistetaan, että muuhun kuin terveyteen käytetyt investoinnit Q_{X_i} ja T_{X_i} sekä budjettirajoite R eivät riipu terveysinvestoinnista I_{i-i}.

Derivoidaan aluksi ensimmäinen termi edellä mainittua ketjusääntöä (4.2) hyödyntäen. Tällöin saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial I_{i-1}} &= \frac{\partial U}{\partial h_i}\frac{\partial h_i}{\partial H_i}\frac{\partial H_i}{\partial I_{i-1}} + \frac{\partial U}{\partial h_{i+1}}\frac{\partial h_{i+1}}{\partial H_{i+1}}\frac{\partial H_{i+1}}{\partial I_{i-1}} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial h_n}\frac{\partial h_n}{\partial H_n}\frac{\partial H_n}{\partial I_{i-1}} \\
&= \frac{\partial U}{\partial h_i}\phi_i \cdot 1 + \frac{\partial U}{\partial h_{i+1}}\phi_{i+1} \cdot (1-\delta_i) + \ldots + \frac{\partial U}{\partial h_n}\phi_n \cdot (1-\delta_i)\ldots(1-\delta_{n-1})\ ,
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

missä viimeinen sievennys on saatu derivoimalla lausekkeet (4.3) - (4.5) terveysinvestoinnin I_{i-1} suhteen sekä yhtälö (3.2) muuttujan H suhteen, josta saadaan $\frac{\partial h_i}{\partial H_i} = \phi_i$.

Lagrangen funktion summatermissä suoraan terveysinvestointeihin liittyvistä kustannuksista

$$
C_k = P_{M_k}Q_{M_k} + W_k T_{M_k}
$$

ainoastaan ensimmäinen riippuu investoinnista I_{i-1}. Näin ollen

$$
\sum_{k=i-1}^{n} \frac{\partial (P_{M_k}Q_{M_k} + W_k T_{M_k})}{\partial I_{i-1}} = \frac{\partial (P_{M_{i-1}}Q_{M_{i-1}} + W_{i-1}T_{M_{i-1}})}{\partial I_{i-1}} = \frac{\partial C_{i-1}}{\partial I_{i-1}}\ . \tag{4.7}
$$

Sen sijaan sairaspäivät T_S ovat kääntäen verrannollisia terveisiin päiviin h nähden, joten nämä kaikki riippuvat aiemmasta terveysinvestoinnista I_{i-1} samaan tapaan kuin terveysvaranto H edellä. Ketjusääntöä (4.1) käyttäen voidaan nyt derivoida

$$\sum_{k=i-1}^{n} \frac{\partial W_k T_{S_k}}{\partial I_{i-1}} = W_i \frac{\partial T_{S_i}}{\partial H_i} \frac{\partial H_i}{\partial I_{i-1}} + W_{i+1} \frac{\partial T_{S_{i+1}}}{\partial H_{i+1}} \frac{\partial H_{i+1}}{\partial I_{i-1}} + ... + W_n \frac{\partial T_{S_n}}{\partial H_n} \frac{\partial H_n}{\partial I_{i-1}} \ .$$

Termit $\frac{\partial H}{I_{i-1}}$ voidaan sieventää yhtälöiden (4.3) - (4.5) avulla, kuten edellä. Yhtälön (3.7) avulla voidaan puolestaan kirjoittaa

$$T_S = \Omega - h \ ,$$

joten

$$\frac{\partial T_S}{\partial H} = \frac{\partial(-h)}{\partial H} = -\phi \ .$$

Siten

$$\sum_{k=i-1}^{n} \frac{\partial W_k T_{S_k}}{\partial I_{i-1}} = -\phi_i \cdot 1 \cdot W_i - \phi_{i+1}(1-\delta_i)W_{i+1} - ... - \phi_n(1-\delta_{i-1})...(1-\delta_{n-1})W_n \ . \tag{4.8}$$

Yhdistämällä yhtälöt (4.6) - (4.8) , saadaan alussa muodostetun Lagrangen funktion L osittaisderivaataksi

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial I_{i-1}} &= \frac{\partial U}{\partial h_i}\phi_i + \frac{\partial U}{\partial h_{i+1}}\phi_{i+1} \cdot (1-\delta_i) + ... + \frac{\partial U}{\partial h_n}\phi_n \cdot (1-\delta_i)...(1-\delta_{n-1}) \\ &-\lambda \left(\frac{1}{(1+r)^{i-1}} \frac{\partial C_{i-1}}{\partial I_{i-1}} - \frac{\phi_i W_i}{(1+r)^i} - \frac{(1-\delta_i)\phi_{i+1} W_{i+1}}{(1+r)^{i+1}} - ... - \frac{(1-\delta_i)...(1-\delta_{n-1})\phi_n W_n}{(1+r)^n} \right) . \end{aligned}$$

Asettamalla tämä osittaisderivaatta nollaksi ja ratkaisemalla yhtälö rajakustannusten $\frac{\partial C_{i-1}}{\partial I_{i-1}}$ suhteen, saadaan lopulta yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+r)^{i-1}} \frac{\partial C_{i-1}}{\partial I_{i-1}} &= \frac{\phi_i W_i}{(1+r)^i} + \frac{(1-\delta_i)\phi_{i+1} W_{i+1}}{(1+r)^{i+1}} + ... + \frac{(1-\delta_i)...(1-\delta_{n-1})\phi_n W_n}{(1+r)^n} \\ &+ \frac{1}{\lambda} \left(\phi_i \frac{\partial U}{\partial h_i} + (1-\delta_i)\phi_{i+1} \frac{\partial U}{\partial h_{i+1}} + ... + (1-\delta_i)...(1-\delta_{n-1})\phi_n \frac{\partial U}{\partial h_n} \right) . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Tästä nähdään tarkennettu diskontattu muoto todistuksen alussa muotoiltujen rajakustannusten ja rajahyötyjen yhtenevyydelle. Yhtälön vasemmalla puolella on nykyarvoon diskontattu rajakustannus $\frac{\partial C_{i-1}}{\partial I_{i-1}}$. Yhtälön oikealla puolella on kaikilta tulevilta jaksoilta summatut ja ketjusäännön avulla avatut terveistä päivistä työnteon kautta saadut diskontatut rajahyödyt

$\sum W \frac{\partial h}{\partial I}$ sekä hyötyfunktiosta saadut rajahyödyt $\sum \frac{\partial U}{\partial I}$ suhteutettuna Lagrangen funktion kertoimen mukaiseen varallisuudesta R saatuun rajahyötyyn λ. $\square$

Lause 4.2 *Terveysinvestointien kokonaiskustannukset minimoituvat, kun kokonaisinvestointien muutokset suhteessa käytettyihin resursseihin ovat yhtä suuret sekä terveyteen käytetyn ajan että hyödykkeiden määrän suhteen. Nämä suhteet ovat samat kuin rajakustannukset investointien suhteen.*

Todistus: Minimoidaan nyt kokonaiskustannukset $P_M Q_M + W T_M$, kun investointien määrä $I(Q_M, T_M)$ on vakio. Muodostetaan näistä Lagrangen funktio

$$L(Q_M, T_M, \lambda) = P_M Q_M + W T_M - \lambda I(Q_M, T_M)\ .$$

Nyt

$$\frac{\partial L}{\partial Q_M} = P_M - \lambda \frac{\partial I}{\partial Q_M} = 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial L}{\partial T_M} = W - \lambda \frac{\partial I}{\partial T_M} = 0\ ,$$

kun

$$\lambda = \frac{P_M}{\frac{\partial I}{\partial Q_M}} = \frac{W}{\frac{\partial I}{\partial T_M}}\ .$$

Väite seuraa nyt Lagrangen kertoimen λ taloustieteellisestä tulkinnasta, sillä λ voidaan tulkita rajakustannukseksi investointirajoitteen suhteen $\frac{\partial C}{\partial I}$, ks. luku 2.7. $\square$

Sama tulos saadaan myös tulkitsemalla investoinnit terveyshyödykkeiden määrästä Q_M sekä terveyteen käytetystä ajasta T_M riippuviksi tuotantofunktioiksi. Tällöin rajatuotokset terveyshyödykkeiden ja toisaalta ajan suhteen ovat

$$\frac{\partial I}{\partial Q_M} \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial I}{\partial T_M}\ .$$

Rajakustannukset puolestaan ovat määritelmällisesti

$$\frac{\partial C}{\partial I} = \frac{\partial (P_M Q_M + W T_M)}{\partial I}\ .$$

Tarkastellaan aluksi rajakustannuksia terveyshyödykkeiden Q_M suhteen. Tällöin

$$\frac{\partial C}{\partial I} = \frac{\partial P_M Q_M}{\partial I} = P_M \frac{\partial Q_M}{\partial I} = \frac{P_M}{\frac{\partial I}{\partial Q_M}}\ .$$

Toisaalta, sama tarkastelu ajan T_M suhteen antaa tuloksen

$$\frac{\partial C}{\partial I} = \frac{\partial W T_M}{\partial I} = W \frac{\partial T_M}{\partial I} = \frac{W}{\frac{\partial I}{\partial T_M}} \, .$$

Lause 4.3 *Tasapainotilanteessa terveysinvestointien diskonttaamaton rajahyöty vastaa terveysinvestointien tuotantokustannuksia millä tahansa yksittäisellä jaksolla i tarkasteltuna.*

Todistus: Tarkastellaan jaksoa i ja merkitään siihen liittyvää rajakustannusta lyhyesti $C_i' := \frac{\partial C_i}{\partial I_i}$. Soveltamalla yhtälöä (4.9) jaksolle i, voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+r)^i} C_i' = \frac{\phi_{i+1} W_{i+1}}{(1+r)^{i+1}} + \frac{(1-\delta_{i+1})\phi_{i+2} W_{i+2}}{(1+r)^{i+2}} + \ldots + \frac{(1-\delta_{i+1})\ldots(1-\delta_{n-1})\phi_n W_n}{(1+r)^n} \\ + \frac{1}{\lambda}\left(\phi_{i+1}\frac{\partial U}{\partial h_{i+1}} + (1-\delta_{i+1})\phi_{i+2}\frac{\partial U}{\partial h_{i+2}} + \ldots + (1-\delta_{i+1})\ldots(1-\delta_{n-1})\phi_n \frac{\partial U}{\partial h_n}\right) \, .\end{aligned}$$

Vertaamalla tätä yhtälöön (4.9) huomataan, että nämä yhtälöt poikkeavat toisistaan vain rivien ensimmäisten termien suhteen. Näin ollen

$$\frac{1}{(1+r)^{i-1}} C_{i-1}' = \frac{\phi_i W_i}{(1+r)^i} + \frac{1}{\lambda}\phi_i \frac{\partial U}{\partial h_i} + (1-\delta_i)\frac{1}{(1+r)^i} C_i' \, .$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain diskonttaustermillä $(1+r)^i$ ja järjestämällä rajakustannustermit C' samalle puolen yhtälöä, saadaan

$$\phi_i W_i + \frac{1}{\lambda}\phi_i \frac{\partial U}{\partial h_i}(1+r)^i = \frac{(1+r)^i}{(1+r)^{i-1}} C_{i-1}' - (1-\delta_i) C_i' = (1+r) C_{i-1}' - (1-\delta) C_i' \, . \quad (4.10)$$

Tämän yhtälön vasen puoli on jo yhtälön (4.9) tulkinnassa todettu (diskonttaamattomaksi) yhden jakson rajahyödyksi. Näin ollen riittää tutkia yhtälön oikeaa puolta ja näyttää, että tämä voidaan tulkita terveysinvestointien tuotantokustannukseksi jaksolla i.

Tarkastellaan nyt kuinka paljon kustannuksia syntyy terveysvarannon kasvattamisesta yhdellä yksiköllä periodin i aikana. Terveysvarannon hankintakustannus yksikköä kohden saadaan rajakustannuksesta C_{i-1}'. Tämä kasvattaa arvoaan yhden periodin aikana vallitsevan korkotason mukaisesti arvoon $(1+r)C_{i-1}'$. Toisaalta, terveysvarannon kulumisaste periodin i aikana on δ_i, joten kyseisen terveysvarantoyksikön myyntiarvo periodin lopussa olisi $(1-\delta)C_i'$. Terveysinvestointien tuotantokustannus on siis määritelmällisesti näiden erotuksena

$$(1+r) C_{i-1}' - (1-\delta) C_i' \, ,$$

mikä vastaa yhtälön (4.10) oikeaa puolta. □

Huomautus 4.4 Jatkoa ajatellen on hyödyllistä kirjoittaa edellä mainittu tuotantokustannus muotoon, jossa on suoraan näkyvillä vallitseva korkotaso ja kulumisaste. Merkitään tätä varten rajakustannusten prosentuaalista muutosta lyhyesti

$$\Delta_{\%}C_i' = \frac{C_i' - C_{i-i}'}{C_{i-1}'} \ .$$

Optimaalisessa tuotantotilanteessa rajakustannusten muutoksen voidaan olettaa olevan lähellä nollaa, joten erityisesti

$$\delta_i \cdot \Delta_{\%}C_i' \approx 0 \ .$$

Tämän perusteella edelleen

$$\delta_i C_{i-1}' - \delta_i C_i' \approx 0 \ .$$

Koska

$$\delta_i C_{i-1}' - \delta_i C_i' = (1-\delta_i)C_i' - C_i' + \delta_i C_{i-1}' \ ,$$

niin edellä todetut terveysinvestointien tuotantokustannukset voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}
(1+r)C_{i-1}' - (1-\delta)C_i' &\approx (1+r)C_{i-1}' - (1-\delta)C_i' + (1-\delta_i)C_i' - C_i' + \delta_i C_{i-1}' \\
&= (1+r)C_{i-1}' - C_i' + \delta_i C_{i-1}' \\
&= rC_{i-1}' - C_i' + C_{i-1}' + \delta_i C_{i-1}' \\
&= C_{i-1}'\left(r - \frac{C_i' - C_{i-1}'}{C_{i-1}'} + \delta_i\right) \\
&= C_{i-1}'(r - \Delta_{\%}C_i' + \delta_i) \\
&\approx C_{i-1}'(r + \delta_i) \ .
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.1.1 Tulosten arviointia

Tämän luvun tuloksista on syytä huomata heti, että vaikka tulokset on saatu ratkaisemalla sidottu ääriarvo-ongelma Lagrangen menetelmää käyttäen, ei ratkaisu kuitenkaan ole aivan tyypillisen Lagrangen menetelmän mukainen. Tyypillisesti Lagrangen menetelmässä haluttaisiin ratkaista kaikki muuttujat, eli asettaa kaikkien muuttujien suhteen lasketut osittaisderivaatat nolliksi. Tässä tapauksessa tämä tarkoittaisi, että haluttaisiin ratkaista osittaisderivaatat kaikkien ajanjaksojen suhteen ja asettaa ne yhtäaikaisesti nolliksi. Näin saataisiin teoreettisesti ajatellen tuloksena optimaaliset investoinnit kaikille ajanjaksoille ja sitä kautta voitaisiin ennustaa terveysvarannon kehitys tarkasti koko elinkaaren ajaksi.

Tämä lähestymistapa ei kuitenkaan ole järkevä useastakaan syystä. Ensinnäkin, kaikkien jaksojen yhtäaikainen tarkastelu johtaisi yhtälöryhmään, joka olisi erittäin hankala, joskaan ei välttämättä mahdoton (Strulik 2015), ratkaista. Toisekseen, vaikka ongelma saataisiinkin ratkaistua, olisi tämän ratkaisun käytännön tulkinta varsin kyseenalainen. Mallissahan joudutaan yksinkertaistuksen vuoksi olettamaan ajanjaksojen määrä, eli elinikä, ennalta tunnetuksi. Lisäksi oletetaan koko eliniän aikana kertyvät rahalliset resurssit ennalta tunnetuksi. Täydellisessä ratkaisussa olisi lisäksi vaatimuksena, että nämä resurssit olisivat kokonaan käytettävissä millä ajanjaksolla tahansa. Nämä eivät luonnollisestikaan olisi käytännön kannalta tarkastellen järkeviä oletuksia. Mallia ei siis voida suoraan käyttää muodostamaan terveysvarannon kehitystä kuvaavaa käyrää eikä varsinkaan ennustamaan henkilön odotettavissa olevaa elinikää.

Tässä esiteltyjä tuloksia kannattaakin ajatella vain tiettyyn yksittäiseen muuttujaan, eli ajanjaksoon, keskittyviksi poikkileikkauksiksi. Kun tarkastellaan vain yhtä ajanjaksoa kerrallaan, saadaan sinänsä mielenkiintoisia tuloksia vain kyseisen jakson investointeja koskien. Mikäli siirrytään tarkastelemaan jotain toista ajanjaksoa, ei voida kuitenkaan olettaa aiemmin tarkastellun jakson ratkaisun enää olevan sellaisenaan voimassa. Mallin avulla saadaan siis diskreettejä tuloksia ja yleisiä suuntaviivoja siitä, miten optimaaliset investoinnit tiettynä ajanhetkenä määräytyvät ja mitä tästä seuraa.

4.2 Terveys investointina ilman kulutusta

Alussa määritellyssä hyötyfunktiossa (3.1) käsiteltiin terveyttä H suoraan hyötyä tuottavana parametrina. Tämä oli huomioitava edeltävissä tasapainolaskuissa terveyden rajahyötyjen $\frac{\partial U}{\partial h}$ muodossa. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että terveyden voidaan ajatella olevan kulutushyödyke. Terveet päivät tuottavat hyötyä, kun taas sairaanaolopäivät kuluttavat hyötyä.

Jatkotarkasteluita ajatellen yksinkertaistetaan mallia siten, että terveys ei esiinny enää suoraan hyötyfunktiossa. Tällöin terveyden voidaan olettaa olevan suorassa suhteessa pelkästään terveysinvestointeihin, eikä terveyden kulutusnäkökulmaa oteta huomioon ollenkaan.

Siis investointien tuottama rajahyöty on tasapainossa käytettyjen investointien määrän kanssa.

Tämän oletuksen perusteella voidaan nyt tarkastella uudestaan edellisessä luvussa esitettyjä tasapainotuloksia. Nyt erityisesti $\frac{\partial U}{\partial h} = 0$. Yhdistämällä tämä oletus kaavoihin (4.10) ja (4.11), saadaan yhtälö

$$\phi_i W_i = C'_{i-1}(r - \Delta_{\%} C'_i + \delta_i) \ .$$

Jakamalla tämä yhtälö puolittain rajakustannuksella C'_{i-i} saadaan edelleen

$$\frac{\phi_i W_i}{C'_{i-1}} = r - \Delta_{\%} C'_i + \delta_i \ ,$$

joka sievenee optimaalisessa tilanteessa rajakustannusten muutoksen lähestyessä nollaa muotoon

$$\frac{\phi_i W_i}{C'_{i-1}} = r + \delta_i \tag{4.12}$$

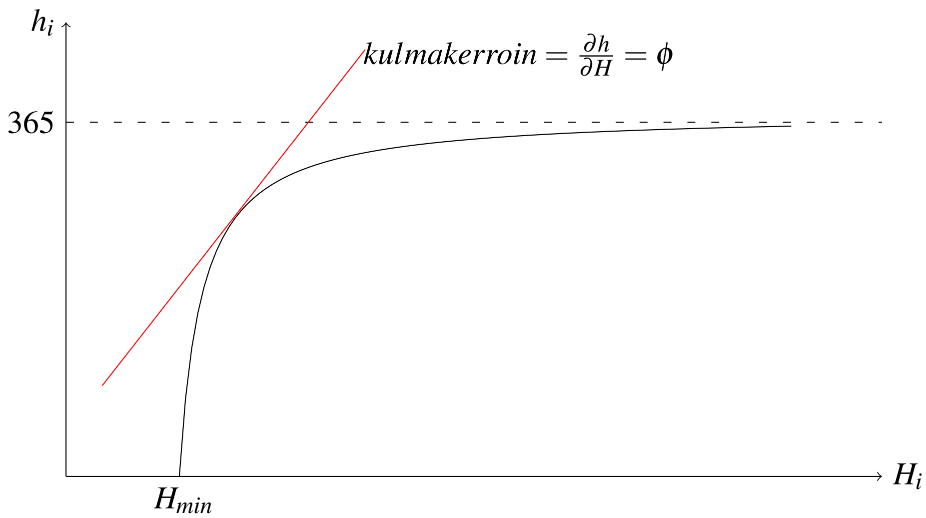
Tässä siis jaettiin jakson i terveysinvestointien rajahyöty $\phi_i W_i$ investointien rajakustannuksilla C'_{i-1}, jolloin saadaan tuloksena määritelmällisesti terveysinvestointien rajatuottoaste (luku 2.4). Tätä muotoa voidaan hyödyntää jatkotarkasteluissa, kun halutaan tarkastella korkotason ja kulumisasteen muutosten vaikutusta terveysvarannon määrään optimaalisessa tilanteessa. Optimitilanteessa terveysinvestointien rajatuottoasteen täytyy olla yhtenevä terveysinvestointien kustannusten kanssa, jota tässä siis kuvataan korkotason r ja kulumisasteen δ summana $r + \delta$. Tarkastelun helpottamiseksi muodostetaan seuraavaksi pääoman rajatehokkuuskäyrä, MEC, ja tulkitaan optimitilanteen määräytymistä graafisesti.

4.3 Rajatehokkuuskäyrän muodostuminen ja siitä johdetut tulokset

Tarkastellaan seuraavaksi rajatehokkuuskäyrää MEC terveysvaranto-rajatuottoaste -koordinaatistossa. Matemaattisen tarkastelun helpottamiseksi mallissa oletetaan, että edellä muodostetussa rajatuottoasteessa $\frac{\phi_i W_i}{C'_{i-1}}$ ainoastaan terveysvarannon rajatuotos $\phi_i = \frac{\partial h_i}{\partial H_i}$ riippuu terveysvarannosta H_i. Tässä tulkitaan siis terveiden päivien lukumäärä terveysvarannosta saatavana tuotoksena, ks. luku 2.2.

Koska terveillä päivillä h_i on luonnollinen yläraja 365 päivää vuodessa, niin on selvää (ks. kuva 4) että terveysvarannon H_i kasvaessa ϕ_i lähestyy asymptoottisesti nollaa, joten

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial H_i} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial H_i \partial H_i} < 0 \; .$$

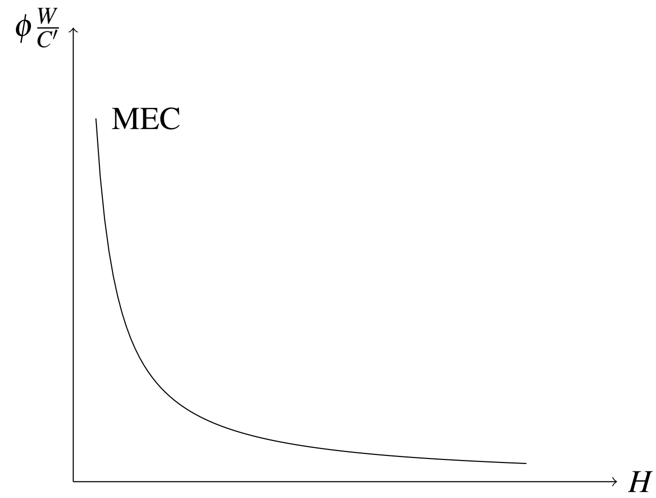


KUVA 4: Terveysvarannon ja terveiden päivien suhde

Näin ollen erityisesti rajatuottoasteelle pätee

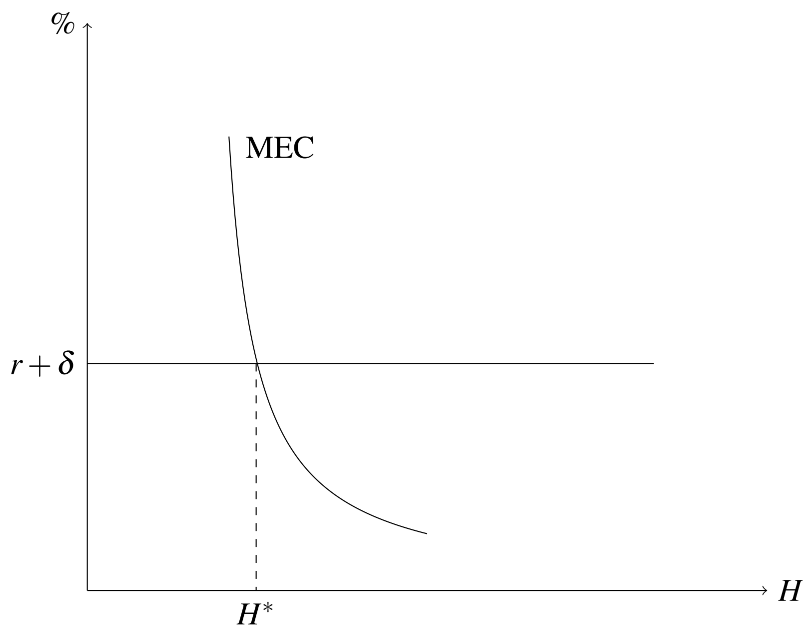
$$\frac{\partial \phi_i}{\partial H_i} \frac{W_i}{C'_{i-i}} < 0$$

eli rajatuottoaste pienenee kun terveysvaranto H_i kasvaa ja siten MEC muodostaa laskevan käyrän.



KUVA 5: MEC-käyrän muoto

Yhdistämällä samaan kuvioon MEC-kysyntäkäyrän lisäksi kustannuksista $r+\delta$ saatavan tarjontakäyrän, voidaan graafisesti päätellä optimaalisen terveysvarannon määrä H^*. Tässä on syytä huomata, että kustannukset $r+\delta$ eivät riipu terveysvarannon H määrästä, joten tarjontakäyrä on vaakasuora.



KUVA 6: Optimaalisen terveysvarannon määräytyminen

Graafisesti on nyt helppo tarkastella, miten eri parametrien muuttaminen vaikuttaa optimaalisen terveysvarantoon. Esimerkiksi kulumisasteen kasvattaminen nostaa tarjontakäyrää ylöspäin, jolloin optimaalisen terveysvarannon määrä H^* pienenee. Toisaalta, jos tarjonta $r+\delta$ pysyy vakiona, mutta MEC-käyrää saadaan sopivilla toimenpiteillä siirrettyä oikealle, optimaalisen terveysvarannon H^* määrä kasvaa.

Muotoillaan näitä havaintoja seuraavaksi tarkemmin matemaattisesti. Matemaattisen tarkastelun helpottamiseksi tarkastellaan vain yhden parametrin muutosta kerrallaan olettaen muut parametrit vakioksi. Mikäli muutettaisiin useampaa parametria yhtäaikaisesti ja muutokset eri parametrien suhteen olisivat keskenään päinvastaisia, ei voitaisi yksikäsitteisesti päätellä parametrien yhteisvaikutuksen suuntaa.

4.3.1 Ikääntymisen vaikutus terveysvarantoon

Seuraavassa lauseessa oletetaan, että iästä riippuvia termejä ovat ainoastaan kulumisaste δ_i sekä rajatuotos ϕ_i. Sen sijaan palkkataso W_i ja rajakustannus C_i' oletetaan iän suhteen vakioiksi. Palkkataso on vahvasti iästä riippuva parametri, mutta tämän vaikutusta terveysvarantoon tarkastellaan myöhemmin erikseen.

Lisäksi jatkossa on oletettava, että nollainvestoinnit terveyteen eivät ole sallittuja. Myös tätä voidaan pitää jossain määrin hyväksyttävänä oletuksena, koska tyypillisesti terveyteen panostetaan läpi elämän vähintäänkin jonkin verran. Tosin tässä joudutaan olettamaan, että terveysinvestoinnit vaikuttavat lähtökohtaisesti terveyteen aina positiivisesti eivätkä koskaan negatiivisesti. Tähän oletukseen liittyviä ongelmia pohditaan myöhemmin.

Lause 4.5 *Jos oletetaan, että kulumisaste δ_i kasvaa iän myötä, niin iän karttuessa terveysvaranto pienenee. Jos kulumisasteen suhteellinen muutos iän myötä on vakio, niin terveysvaranto pienenee iän myötä kiihtyvästi.*

Todistus: Edellä todettu tasapainoyhtälö (4.12) saadaan logaritmimuunnoksella muotoon

$$\ln\left(\frac{\phi_i W_i}{C_{i-1}'}\right) = \ln(r+\delta_i)\ ,$$

joka voidaan logaritmien laskusäännöillä edelleen purkaa muotoon

$$\ln(\phi_i) + \ln(W_i) - \ln(C_{i-1}') = \ln(r+\delta_i)\ .$$

Iän vaikutusta terveysvarantoon voidaan tutkia derivoimalla tätä yhtälöä ajan i suhteen. Edellä todettujen oletusten mukaisesti palkkataso W_i ja rajakustannus C_i' oletetaan iän suhteen vakioiksi, joten nämä termit katoavat derivoitaessa. Jäljelle jää siis

$$\frac{\partial \ln(\phi_i)}{\partial i} = \frac{\partial \ln(r+\delta_i)}{\partial i} \ .$$

Ketjusäännön ja yhdistetyn funktion derivoinnin perusteella

$$\frac{\partial \ln(\phi_i)}{\partial i} = \frac{\partial \ln(\phi_i)}{\partial \ln(H_i)} \frac{\partial \ln(H_i)}{\partial i} = \frac{\partial \ln(\phi_i)}{\partial \ln(H_i)} \frac{\partial H_i}{\partial i} \frac{1}{H_i} \ .$$

Vastaavasti, yhdistetyn funktion derivoinnilla saadaan

$$\frac{\partial \ln(r+\delta_i)}{\partial i} = \frac{\partial \delta_i}{\partial i} \frac{1}{r+\delta_i} \ .$$

Merkitään terveysvarannon aikaderivaatan suhteellista muutosta

$$\frac{\partial H_i}{\partial i} \frac{1}{H_i} =: \widetilde{H}_i \ .$$

Vastaavasti, kulumisasteen suhteellinen muutos on

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial i} \frac{1}{\delta_i} =: \widetilde{\delta}_i \ .$$

Edeltävistä derivaatoista voidaan nyt ratkaista

$$\widetilde{H}_i = \frac{\partial \delta_i}{\partial i} \frac{1}{r+\delta_i} \cdot \frac{\partial \ln(H_i)}{\partial \ln(\phi_i)} = \widetilde{\delta}_i \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \frac{\partial \ln(H_i)}{\partial \ln(\phi_i)} \ , \tag{4.13}$$

kun huomataan, että

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial i} = \frac{\partial \delta_i}{\partial i} \cdot \frac{1}{\delta_i} \delta_i = \widetilde{\delta}_i \delta_i \ . \tag{4.14}$$

Kulumisasteen oletettiin kasvavan iän myötä, joten $\widetilde{\delta}_i > 0$. Myös $\frac{\delta_i}{r+\delta_i} > 0$. Näin ollen suhteellisen aikaderivaatan $\widetilde{H}_i$ merkki riippuu ainoastaan termistä $\frac{\partial \ln(H_i)}{\partial \ln(\phi_i)}$.

Nyt

$$\frac{\partial \ln(\phi_i)}{\partial i} = \frac{\partial \ln(r+\delta_i)}{\partial i} \ ,$$

joten

$$\frac{\partial \ln(H_i)}{\partial \ln(\phi_i)} = \frac{\partial \ln(H_i)}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial \ln(\phi_i)} = \frac{\partial \ln(H_i)}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial \ln(r+\delta_i)} = \frac{\partial \ln(H_i)}{\partial \ln(r+\delta_i)} \ .$$

Tässä

$$\frac{\partial \ln(H_i)}{\partial \ln(r+\delta_i)} = \frac{\partial H/H}{\partial(r+\delta)/(r+\delta)}$$

on MEC-käyrän hintajousto (jatkossa pelkkä jousto). MEC-käyrän muodon perusteella tiedetään, että tämä jousto on merkiltään negatiivinen, joten kaiken kaikkiaan $\widetilde{H}_i < 0$. Siis terveysvaranto pienenee iän myötä.

Tarkastellaan vielä toista derivaattaa

$$\frac{\partial \widetilde{H}_i}{\partial i} =: \widetilde{H}_{ii} \,, \tag{4.15}$$

josta voidaan päätellä onko edellä todettu iän myötä tapahtuva muutos kiihtyvää vai loivenevaa. Mikäli oletetaan MEC-käyrän jousto sekä kulumisasteen suhteellinen muutos $\widetilde{\delta}_i$ vakioiksi, saadaan derivoimalla yhtälö (4.13) uudestaan

$$\widetilde{H}_{ii} = \underbrace{\widetilde{\delta}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{\partial \ln(H)}{\partial \ln(\phi)}}_{<0} \cdot \frac{\partial(\delta_i/(r+\delta_i))}{\partial i} \,.$$

Kun muistetaan, että $\frac{\partial \delta_i}{\partial i} = \widetilde{\delta}_i \delta_i$, niin nyt

$$\frac{\partial(\delta_i/(r+\delta_i))}{\partial i} = \frac{(r+\delta_i)\cdot\frac{\partial \delta_i}{\partial i} - \delta_i \cdot \frac{\partial(r+\delta_i)}{\partial i}}{(r+\delta_i)^2} = \frac{(r+\delta_i)\cdot\widetilde{\delta}\delta_i - \delta_i\cdot\widetilde{\delta}\delta_i}{(r+\delta)^2} = \frac{r\widetilde{\delta}\delta_i}{(r+\delta_i)^2} > 0 \,,$$

joten kokonaisuudessaan $\widetilde{H}_{ii} < 0$. Siten terveysvaranto pienenee kiihtyvästi iän myötä. □

Huomautus 4.6 Edeltävässä lauseessa oletetaan kulumisasteen kasvavan iän myötä. Tämä ei välttämättä ole järkevä oletus koko elinkaaren ajalta. Elinkaaren alkuvaiheessa voi olla tilanteita, joissa kulumisaste välillä pienenee ja välillä kasvaa (esim. yllättävän onnettomuuden vuoksi). Vastaavasti myös terveysvarannon kasvusuunta voi vaihdella. On kuitenkin järkevää olettaa, että jossain vaiheessa elämää kulumisaste on suunnaltaan kasvava johtuen iän mukanaan tuomasta luonnollisesta fyysisestä rappeutumisesta.

Edeltävän lauseen tuloksista voidaan myös päätellä, että jos kulumisaste ei riippuisi iästä (eli olisikin vakio iän suhteen), niin tällöin terveysvarannon suhteellinen muutos olisi nolla. Tämä tarkoittaisi, että optimaalisessa tilanteessa terveysvaranto olisi koko ajan vakio ja näin ollen minimivarantoa eli kuolemaa ei koskaan saavutettaisi. Kulumisasteen kasvaminen iän myötä on siis myös mallin järkevyyden kannalta tärkeä oletus.

Lause 4.7 *Jos rajatehokkuuskäyrän jousto on vakio ja itseisarvoltaan korkeintaan 1 ja on edetty ikävaiheeseen, jossa kulumisasteen suhteellinen muutos $\widetilde{\delta}$ on positiivinen vakio, niin terveysinvestointien määrä kasvaa iän karttuessa.*

Todistus: Halutaan derivoida terveysinvestoinnit I_i ajan suhteen. Aloitetaan ratkaisemalla I_i yhtälöstä (3.3). Nyt

$$I_i = H_{i+i} - H_i + \delta_i H_i \ .$$

Arvioidaan nyt väliä $H_{i+i} - H_i$ ensimmäisen asteen Taylorin polynomilla, jolloin saadaan

$$H_{i+i} - H_i \approx \frac{\partial H_i}{\partial i} \cdot \underbrace{((i+1)-i)}_{=1} = \frac{\partial H_i}{\partial i} \frac{1}{H_i} \cdot H_i = \widetilde{H}_i H_i \ .$$

Siten

$$I_i \approx \widetilde{H}_i H_i + \delta_i H_i = H_i(\widetilde{H}_i + \delta_i) \ .$$

Derivoinnin helpottamiseksi muunnetaan tämä vielä logaritmiseen muotoon

$$\ln I_i \approx \ln H_i + \ln(\widetilde{H}_i + \delta_i) \ .$$

Derivoimalla tämä i:n suhteen saadaan vasemmalle puolen

$$\frac{\partial \ln(I_i)}{\partial i} = \frac{\partial I_i}{\partial i} \frac{1}{I_i} = \widetilde{I}_i$$

ja vastaavasti oikealle puolen

$$\frac{\partial \ln H_i}{\partial i} + \frac{\partial \ln(\widetilde{H}_i + \delta_i)}{\partial i} = \widetilde{H}_i + \left(\frac{\partial \widetilde{H}_i}{\partial i} + \frac{\partial \delta_i}{\partial i} \right) \cdot \frac{1}{\widetilde{H}_i + \delta_i}$$

Merkintöjä (4.15) ja (4.14) hyödyntäen saadaan nyt

$$\widetilde{I}_i = \widetilde{H}_i + \frac{\widetilde{H}_{ii} + \widetilde{\delta}\delta_i}{\widetilde{H}_i + \delta_i} = \frac{\widetilde{H}_i(\widetilde{H}_i + \delta_i) + \widetilde{H}_{ii} + \widetilde{\delta}\delta_i}{\widetilde{H}_i + \delta_i} = \frac{\widetilde{H}_i^2 + \delta_i \widetilde{H}_i + \widetilde{H}_{ii} + \widetilde{\delta}\delta_i}{\widetilde{H}_i + \delta_i} \ .$$

Koska investoinnit eivät voi olla negatiivisia, on

$$I_i = H_i(\widetilde{H}_i + \delta_i) \geq 0$$

ja siten erityisesti jakaja $\widetilde{H}_i + \delta_i \geq 0$. Mallin toimivuuden kannalta on lisäksi oletettava, että myöskään nollainvestoinnit eivät ole sallittuja. Näin saadaan poissuljettua jakajan nollakohta. Näiden havaintojen perusteella investointien muutossuunta riippuu vain edellä lasketun derivaatan osoittajan merkistä.

Merkitään MEC-käyrän vakioksi oletettua joustoa lyhyesti $\varepsilon := \frac{\partial \ln H_i}{\partial \ln \phi_i}$. Nyt

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_i^2 + \delta_i \widetilde{H}_i + \widetilde{H}_{ii} + \widetilde{\delta}\delta_i &= \Big(\widetilde{\delta} \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon\Big)^2 + \delta_i \Big(\widetilde{\delta} \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon\Big) + \widetilde{\delta} \cdot \varepsilon \cdot \frac{r\widetilde{\delta}\delta_i}{(r+\delta_i)^2} + \widetilde{\delta}\delta_i \\ &= \widetilde{\delta}\Big(\widetilde{\delta} \cdot \Big(\frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)^2 \cdot \varepsilon^2 + \delta_i \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \frac{r\widetilde{\delta}\delta_i}{(r+\delta_i)^2} + \delta_i\Big) .\end{aligned}$$

Koska

$$\frac{r\delta_i}{(r+\delta_i)^2} = \frac{r\delta_i + \delta_i^2 - \delta_i^2}{(r+\delta_i)^2} = \frac{\delta_i(r+\delta_i) - \delta_i^2}{(r+\delta_i)^2} = \frac{\delta_i}{r+\delta_i} - \frac{\delta_i^2}{(r+\delta_i)^2} = \frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big(1 - \frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big) ,$$

voidaan toiseksi viimeinen summattava kirjoittaa muotoon

$$\varepsilon \cdot \widetilde{\delta} \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big(1 - \frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big) = \varepsilon \cdot \widetilde{\delta} \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i} - \varepsilon \cdot \widetilde{\delta} \cdot \Big(\frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)^2 ,$$

ja siten termit uudelleen järjestämällä ja yhteisiä tekijöitä ottamalla saadaan

$$\begin{aligned}(\widetilde{H}_i + \delta_i)\widetilde{I}_i &= \widetilde{\delta}\Big(\delta_i + \varepsilon \cdot \widetilde{\delta} \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i} + \delta_i \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon + \widetilde{\delta} \cdot \Big(\frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)^2 \cdot \varepsilon^2\Big) - \varepsilon \cdot \widetilde{\delta}^2 \cdot \Big(\frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)^2 \\ &= \widetilde{\delta}\Big(\Big(\delta_i + \varepsilon \cdot \widetilde{\delta} \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big) + \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon \cdot \Big(\delta_i + \varepsilon \cdot \widetilde{\delta} \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)\Big) - \varepsilon \cdot \widetilde{\delta}^2 \cdot \Big(\frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)^2 \\ &= \widetilde{\delta}\Big(\Big(\delta_i + \varepsilon \cdot \widetilde{\delta} \cdot \frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)\Big(1 + \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon\Big)\Big) - \varepsilon \cdot \widetilde{\delta}^2 \cdot \Big(\frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)^2 \\ &= \widetilde{\delta} \cdot (\widetilde{H}_i + \delta_i)\Big(1 + \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon\Big) - \varepsilon \cdot \widetilde{\delta}^2 \cdot \Big(\frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)^2 .\end{aligned} \tag{4.16}$$

Edellä jo todettiin, että investointien positiivisuusoletuksesta johtuen $\widetilde{H}_i + \delta_i > 0$. MEC-käyrän muodosta johtuen jousto ε on merkiltään negatiivinen, joten myös

$$-\varepsilon \cdot \widetilde{\delta}^2 \cdot \Big(\frac{\delta_i}{r+\delta_i}\Big)^2 > 0 .$$

Myös kulumisasteen suhteellinen muutos korkeassa iässä oletettiin positiiviseksi, $\widetilde{\delta} > 0$. Näin ollen terveysinvestointien derivaatan merkki riippuu ainoastaan termistä $1 + \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon$. Koska $\frac{\delta_i}{r+\delta_i} < 1$ ja lauseen oletuksen perusteella $\varepsilon \geq -1$, niin $\frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon > -1$. Siten

$$1 + \frac{\delta_i}{r+\delta_i} \cdot \varepsilon > 0 ,$$

jolloin $\widetilde{I}_i > 0$ ja väite seuraa tästä. □

Huomautus 4.8 Edeltävistä lauseista seuraa, että myöhäisessä iässä investointien määrä korreloi positiivisesti kulumisasteen kanssa, mutta negatiivisesti terveysvarannon määrän kanssa. Siis iän karttuessa kulumisaste kasvaa ja tästä johtuen terveysvaranto alkaa laskea. Tulos voidaan tulkita niin, että tätä laskua pyritään kompensoimaan terveysinvestointeja kasvattamalla.

Huomautus 4.9 Edeltävistä tuloksista seuraa allaolevan todistuksen mukaisesti myös, että jos jousto ε olisi nolla, niin kulumisasteen aiheuttama terveysvarannon vähentyminen kompensoitaisiin täysin investoinneilla. Tällöin terveysvaranto pysyisi koko ajan vakiona. Tämä ei ole käytännön kannalta järkevää, koska tällöin terveysvarannon minimiarvoa ei koskaan saavutettaisi ja tämä johtaisi ikuiseen elämään. Mallin järkevyyden kannalta voidaan siis olettaa, että joustolle pätee $-1 \leq \varepsilon < 0$.

Nollajoustoa voidaan tarkastella asettamalla $\varepsilon = 0$ yhtälössä (4.16). Tällöin saadaan yhtälö $\widetilde{I_i} = \widetilde{\delta}$ eli

$$\frac{dI_i}{di} \cdot \frac{1}{I_i} = \frac{d\delta_i}{di} \cdot \frac{1}{\delta_i} .$$

Tämä voidaan muokata separoituvaksi differentiaaliyhtälöksi

$$\frac{I_i}{\delta_i} = \frac{dI_i/di}{d\delta_i/di} = \frac{dI_I}{di} \cdot \frac{di}{d\delta_i} = \frac{dI_i}{d\delta_i} ,$$

ja tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on muotoa

$$I_i = C\delta_i$$

jollain vakiolla $C \in \mathbb{R}$. Yhtälön (3.3) mukaisesti tästä saadaan

$$C = \frac{I_i}{\delta_i} = \frac{H_{i+1} - H_i}{\delta_i} + H_i \tag{4.17}$$

jokaisella i. Tämä yhtälö toteutuu selvästi, jos $H_i = C$ kaikilla i. Osoitetaan kuitenkin vielä induktiotodistusta käyttäen, että muita ratkaisuja ei voi olla.

Aloituskohtana induktiossa on se terveysvarannon arvo, josta lähtien tarkastelu aloitetaan. Siis oletetaan, että ollaan niin pitkällä tarkastelussa että aiempien lauseiden oletukset pätevät. Induktiotodistuksen alkuarvo on siten tämä kyseinen terveysvaranto, jota voidaan merkitä vakiolla C.

Tehdään nyt induktio-oletus $H_k = C$ ja tutkitaan, mitä tästä seuraa termille H_{k+1}. Yhtälön (4.17) mukaan

$$\frac{H_{k+1} - H_k}{\delta_k} + H_k = C \, ,$$

joka saadaan induktio-oletuksen avulla muotoon

$$\frac{H_{k+1} - C}{\delta_k} + C = C \, .$$

Tämä yhtälö sievenee muotoon

$$\frac{H_{k+1} - C}{\delta_k} = 0$$

ja tämä voi toteutua vain, kun osoittaja on nolla eli $H_{k+1} = C$. Siispä $H_i = C$ jokaisella i eli terveysvaranto pysyy vakiona jouston ollessa nolla. $\square$

4.3.2 Palkkatason vaihtelusta seuraavat muutokset

Seuraavaksi tarkastellaan palkkatason muutoksen vaikutusta mallin eri osiin, kuten terveysvarantoon. Edeltävissä ikätarkasteluissa oli oletettava palkka iästä riippumattomaksi laskuteknisistä syitä johtuen. Nyt puolestaan tarkastellaan palkkamuutosten vaikutusta iän ollessa kiinteä, toisin sanoen tarkasteluperiodi i on nyt kiinnitetty. Tämän vuoksi seuraavassa esityksessä ei tarkasteltavissa termeissä käytetä alaindeksiä i.

Lause 4.10 *Palkkatason noustessa terveysvaranto kasvaa. Kasvu on sitä suurempaa mitä suurempi rajatehokkuuskäyrän jousto on.*

Todistus: Palkkatason vaikutusta terveysvarantoon voidaan tutkia derivaatan $\frac{\partial H}{\partial W}$ merkkiä tarkastelemalla. Tähän derivaattaan päästään käsiksi yhtälön (4.12) avulla. Tämän yhtälön oikea puoli $r + \delta$ ei riipu palkasta, joten oikean puolen derivaatta palkan suhteen on nolla. Derivoimalla yhtälön (4.12) vasen puoli, saadaan logaritmimuunnosta käyttäen

$$0 = \frac{\partial \frac{\ln(\phi W)}{\ln C'}}{\partial \ln W} = \frac{\partial \ln \phi}{\partial \ln W} + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln W} - \frac{\partial \ln C'}{\partial \ln W} = \frac{\partial \ln \phi}{\partial \ln H} \frac{\partial \ln H}{\partial \ln W} + 1 - \frac{\partial \ln C'}{\partial \ln W} \, .$$

Tästä voidaan nyt ratkaista

$$\frac{\partial \ln H}{\partial \ln W} = \left(\frac{\partial \ln C'}{\partial \ln W} - 1 \right) \cdot \frac{\partial \ln H}{\partial \ln \phi} \, .$$

Tässä $\frac{\partial \ln H}{\partial \ln \phi} = \varepsilon$ on MEC-käyrän jousto ja tämä tiedetään jo aiemman perusteella negatiiviseksi.

Rajakustannuksen C' muutosta palkanmuutoksen suhteen voidaan arvioida miettimällä investoinneista syntyneiden kustannusten koostumusta. Muistetaan, että investointifunktiossa $I(Q_M, T_M)$ panostetaan terveyteen sekä terveyshyödykkeiden Q_M että ajankäytön T_M kautta. Kustannusfunktiossa näistä ainoastaan ajallinen panostus T_M on suoraan yhteydessä palkkatason W kanssa.

Mikäli kustannukset muodostuisivat kokonaisuudessaan pelkästä ajallisesta panostuksesta, muuttuisi rajakustannus tällöin suorassa suhteessa yhden yksikön jokaista palkkamuutosyksikköä kohden. Tällöin muutossuhde eli tarkasteltava derivaatta olisi tasan yksi. Koska kustannuksia syntyy kuitenkin käytännössä muustakin kuin pelkästä ajallisesta panostuksesta, on tämä muutosuhde pienempää kuin yksi. Näin ollen myös

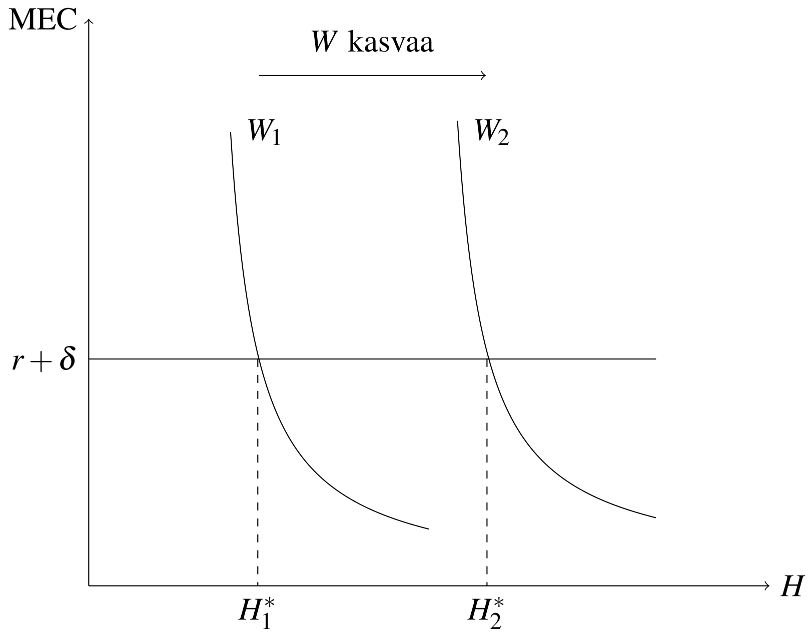
$$\frac{\partial \ln C'}{\partial \ln W} - 1 < 0$$

ja siten kahden negatiivisen termin tulona

$$\frac{\partial \ln H}{\partial \ln W} > 0 \; .$$

Näin ollen palkkatason ja terveysvarannon välisten muutosten korrelaatio on positiivinen, palkkatason kasvaessa myös terveysvaranto kasvaa. Erityisesti kasvusuhde riippuu kertoimesta ε. Mitä suurempi MEC-käyrän jousto (itseisarvoltaan) on, sitä suurempaa on terveysvarannon suhteellinen kasvu palkkatason muutokseen nähden. $\square$

Graafisesti edellisen lauseen tulos voidaan tulkita siten, että palkkatason noustessa MEC-käyrän on siirryttävä oikealle. Tällöin terveysvarannon H optimaalinen arvo kasvaa, ks. kuva 7.



KUVA 7: Palkkatason vaikutus MEC-käyrään ja optimaalisen terveysvarantoon

Seuraavaa kahta lausetta ei ole esitetty täysin samassa muodossa kuin Grossmanin alkuperäisessä paperissa. Tulokset on saatu soveltamalla ja muokkaamalla Grossmanin esittämää todistusta (Appendix, Part C) hieman ylimalkaisemalle tulokselle. Grossman tarkastelee julkaisussaan lähinnä terveyshyödykkeiden määrän sekä terveyteen käytetyn ajan palkkajoustoja ja niiden suhdetta terveysvarannon palkkajoustoon. Seuraavissa lauseissa sen sijaan huomataan, että tutkimalla terveyshyödykkeiden määrän ja terveyteen käytetyn ajan derivaattoja palkkatason suhteen, voidaan tehdä päätelmiä näiden suureiden kasvusuunnista.

Nämä kasvusuunnat tulevat riippumaan investointifunktion muodosta, erityisesti konveksisuudesta tai konkaavisuudesta ko. hyödykkeiden suhteen. Tässä on siis oletettava, että tutkitaan vain jotain tiettyä vaihetta, jolloin investointifunktio toteuttaa ko. ehdot. On syytä huomata, että investointifunktio ei välttämättä toteuta näitä ehtoja koko tarkasteluaikana. Investointifunktio voi muodostaa esimerkiksi S-kirjainta muistuttavan käyrän, jolloin funktio on alkuvaiheessa konveksi ja loppuvaiheessa konkaavi. Seuraavissa lauseissa ei kuitenkaan sinänsä oteta kantaa siihen, mikä on tyypillinen investointikäyrän muoto, vaan vaatimukset konveksisuudesta tai konkaavisuudesta pidetään puhtaasti teoreettisina oletuksina jollekin tarkasteluajankohdalle.

Lause 4.11 *Jos investointifunktio on konkaavi terveyshyödykkeiden määrän Q_M suhteen, niin palkkatason noustessa terveyshyödykkeiden hankinta lisääntyy.*

Todistus: Nyt halutaan tutkia derivaatan $\frac{\partial Q_M}{\partial W}$ merkkiä. Aloitetaan tarkastelu laskemalla aluksi investointifunktion kaikki ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat muuttujien Q_M ja T_M suhteen. Laskujen selkiyttämiseksi merkitään näitä muuttujia jatkossa pelkästään Q ja T.

Koska investointifunktion oletetaan noudattavan vakioisia skaalatuottoja muuttujien Q ja T suhteen, voidaan investointifunktio kirjoittaa esimerkiksi muotoon

$$I = I(Q,T) = Q \cdot I\Big(1, \frac{T}{Q}\Big) =: Q \cdot g\Big(\frac{T}{Q}\Big) .$$

Tällöin

$$\frac{\partial I}{\partial Q} = g\Big(\frac{T}{Q}\Big) - \frac{T}{Q^2} \cdot Q \cdot g'\Big(\frac{T}{Q}\Big) = g\Big(\frac{T}{Q}\Big) - \frac{T}{Q} \cdot g'\Big(\frac{T}{Q}\Big)$$

ja

$$\frac{\partial I}{\partial T} = Q \cdot \frac{1}{Q} \cdot g'\Big(\frac{T}{Q}\Big) = g'\Big(\frac{T}{Q}\Big) .$$

Edelleen,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I}{\partial Q \partial Q} &= \frac{\partial}{\partial Q}\bigg(g\Big(\frac{T}{Q}\Big) - \frac{T}{Q} \cdot g'\Big(\frac{T}{Q}\Big)\bigg) = -\frac{T}{Q^2} \cdot g'\Big(\frac{T}{Q}\Big) - \bigg(-\frac{T}{Q^2} \cdot g'\Big(\frac{T}{Q}\Big) - \frac{T}{Q^2} \cdot \frac{T}{Q} \cdot g''\Big(\frac{T}{Q}\Big)\bigg) \\ &= \frac{T^2}{Q^3} \cdot g''\Big(\frac{T}{Q}\Big) ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I}{\partial T \partial Q} &= \frac{\partial}{\partial T}\bigg(g\Big(\frac{T}{Q}\Big) - \frac{T}{Q} \cdot g'\Big(\frac{T}{Q}\Big)\bigg) = \frac{1}{Q} \cdot g'\Big(\frac{T}{Q}\Big) - \bigg(\frac{1}{Q} \cdot g'\Big(\frac{T}{Q}\Big) + \frac{1}{Q} \cdot \frac{T}{Q} \cdot g''\Big(\frac{T}{Q}\Big)\bigg) \\ &= -\frac{T}{Q^2} \cdot g''\Big(\frac{T}{Q}\Big) ,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial T \partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\bigg(g'\Big(\frac{T}{Q}\Big)\bigg) = \frac{1}{Q} \cdot g''\Big(\frac{T}{Q}\Big) \qquad \text{ja}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial Q \partial T} = \frac{\partial}{\partial Q}\bigg(g'\Big(\frac{T}{Q}\Big)\bigg) = -\frac{T}{Q^2} \cdot g''\Big(\frac{T}{Q}\Big) .$$

Edellä laskettuja toisen kertaluvun osittaisderivaattoja vertailemalla havaitaan nyt erityisesti, että

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I}{\partial Q \partial Q} &= -\frac{T}{Q} \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial Q} \, , \\
\frac{\partial^2 I}{\partial Q \partial T} &= -\frac{T}{Q} \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial T} \, , \\
\frac{\partial^2 I}{\partial T \partial T} &= -\frac{Q}{T} \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial Q} \qquad \text{ja} \\
\frac{\partial^2 I}{\partial Q \partial Q} &= \frac{T^2}{Q^2} \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial T}
\end{aligned}$$

Käytetään jatkolaskuissa lisäksi merkintää

$$\sigma = \frac{\frac{\partial I}{\partial Q} \cdot \frac{\partial I}{\partial T}}{I \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial Q}} \, ,$$

jolloin

$$\frac{\partial^2 I}{\partial Q \partial T} = \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial Q} = \frac{\frac{\partial I}{\partial Q} \cdot \frac{\partial I}{\partial T}}{I \cdot \sigma}$$

ja siten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I}{\partial Q \partial Q} &= -\frac{T}{Q} \frac{\frac{\partial I}{\partial Q} \cdot \frac{\partial I}{\partial T}}{I \cdot \sigma} \qquad \text{ja} \\
\frac{\partial^2 I}{\partial T \partial T} &= -\frac{Q}{T} \frac{\frac{\partial I}{\partial Q} \cdot \frac{\partial I}{\partial T}}{I \cdot \sigma} \, .
\end{aligned}$$

Lopputarkasteluissa σ:n merkki tulee olemaan oleellinen lopputuloksen kannalta. Koska kaikki muut σ:n osat voidaan tässä olettaa positiiviseksi, on merkkitarkastelun kannalta oleellista ainoastaan derivaatan $\frac{\partial^2 I}{\partial T \partial Q}$ merkki. Koska nyt oletetaan investointifunktio konkaaviksi muuttujan Q suhteen, on

$$\frac{\partial^2 I}{\partial T \partial Q} = -\frac{Q}{T} \underbrace{\frac{\partial^2 I}{\partial Q \partial Q}}_{<0} > 0$$

ja siten $\sigma > 0$.

Varsinaiseen ratkaisuun päästään käsiksi kolmea aiemmin todettua yhtälöä derivoimalla. Nämä yhtälöt ovat

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad I = (\widetilde{H}+\delta)H \ , \\
&(2) \qquad W = C' \cdot \frac{\partial I}{\partial T} \qquad \text{ja} \\
&(3) \qquad P = C' \cdot \frac{\partial I}{\partial Q} \ .
\end{aligned}
$$

Näistä yhtälöistä ensimmäinen on todettu Lauseen 4.7. todistuksessa ja kaksi viimeistä seuraavat Lauseesta 4.2.

Aloitetaan laskemalla kokonaisderivaatta yhtälön (1) vasemmalle puolen palkan W suhteen. Nyt

$$\frac{dI}{dW} = \frac{\partial I}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial W} + \frac{\partial I}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial W} \ . \tag{4.18}$$

Yhtälön (1) oikeaa puolta derivoitaessa muistetaan, että tarkastelu on rajoitettu yhteen kiinteään jaksoon. Näin ollen terveysvarannon suhteellinen muutos $\widetilde{H}$ on nyt vakio palkan W suhteen. Siten

$$\frac{\partial(\widetilde{H}+\delta)H}{\partial W} = (\widetilde{H}+\delta) \cdot \frac{\partial H}{\partial W} \ .$$

Tässä tarvittava $\frac{\partial H}{\partial W}$ voidaan ratkaista Lauseen 4.10. todistuksen tapaan yhtälöstä (4.12). Koska yhtälön (4.12) oikea puoli ei riipu palkasta, saadaan

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial W}\Big(\frac{\phi \cdot W}{C'}\Big) = \frac{\partial}{\partial W}(\phi W) \cdot C' - \frac{\partial C'}{\partial W} \cdot \phi W = \Big(\phi + W\frac{\partial \phi}{\partial W}\Big)C' - \frac{\partial C'}{\partial W} \cdot \phi W \\
&= \bigg(\phi + W\Big(\frac{\partial \phi}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial W}\Big)\bigg)C' - \frac{\partial C'}{\partial W} \cdot \phi W \ .
\end{aligned}
$$

Tästä voidaan nyt ratkaista

$$W\Big(\frac{\partial \phi}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial W}\Big) = \frac{\partial C'}{\partial W} \cdot \frac{\phi W}{C'} - \phi$$

ja edelleen

$$\frac{\partial H}{\partial W} = \frac{\frac{\partial C'}{\partial W} \cdot \frac{\phi W}{C'} - \phi}{W} \cdot \frac{\partial H}{\partial \phi} \ .$$

Merkitään vielä $\frac{\partial H}{\partial \phi} = \xi$ ja huomataan samalla, että tämän merkki on sama kuin jouston $\varepsilon = \frac{\partial \ln H}{\partial \ln \phi}$. Siten $\xi < 0$. Näillä merkinnöillä yhtälön (1) derivoitu oikea puoli voidaan lopulta sieventää muotoon

$$\frac{\partial(\widetilde{H}+\delta)H}{\partial W} = (\widetilde{H}+\delta) \cdot \frac{\frac{\partial C'}{\partial W} \cdot \frac{\phi W}{C'} - \phi}{W} \cdot \xi = \frac{H}{H}(\widetilde{H}+\delta)\xi \cdot \Big(\frac{\partial C'}{\partial W} \cdot \frac{\phi}{C'} - \frac{\phi}{W}\Big) = \frac{\phi}{HC'} I\xi \cdot \Big(\frac{\partial C'}{\partial W} - \frac{C'}{W}\Big) \ . \tag{4.19}$$

Yhdistämällä yhtälöt (4.18) ja (4.19) saadaan

$$\frac{\partial I}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial W}+\frac{\partial I}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial W}=\frac{\phi}{HC'}I\xi\cdot\left(\frac{\partial C'}{\partial W}-\frac{C'}{W}\right),$$

ja kertomalla tämä yhtälö puolittain rajakustannuksilla C' saadaan lopulta yhtälöitä (2) ja (3) hyödyntäen

$$-\frac{\phi}{H}I\xi\cdot\frac{\partial C'}{\partial W}+W\cdot\frac{\partial T}{\partial W}+P\cdot\frac{\partial Q}{\partial W}=-\frac{\phi}{H}\frac{I\xi C'}{W}\,. \tag{4.20}$$

Derivoidaan nyt yhtälö (2) puolittain palkan W suhteen. Näin saadaan

$$1=\frac{\partial}{\partial W}\left(C'\cdot\frac{\partial I}{\partial T}\right)=\frac{\partial I}{\partial T}\frac{\partial C'}{\partial W}+C'\left(\frac{\frac{\partial I}{\partial T}}{\partial W}\right)=\frac{\partial I}{\partial T}\frac{\partial C'}{\partial W}+C'\left(\frac{\frac{\partial I}{\partial T}}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial W}+\frac{\frac{\partial I}{\partial T}}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial W}\right).$$

Kerrotaan tämä yhtälö puolittain termillä $I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma$ ja huomataan yhtälöitä (2) ja (3) hyödyntäen, että

$$\frac{\partial I}{\partial T}\cdot I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma=\frac{W}{C'}\cdot I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma=I\cdot\sigma\,,$$

$$\begin{aligned}C'\cdot\frac{\frac{\partial I}{\partial T}}{\partial T}\cdot I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma&=\frac{\partial^2 I}{\partial T\partial T}\cdot C'\cdot I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma=-\frac{Q}{T}\frac{\frac{\partial I}{\partial Q}\cdot\frac{\partial I}{\partial T}}{I\cdot\sigma}\cdot C'\cdot I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma\\&=-\frac{Q}{T}\cdot C'\frac{\partial I}{\partial Q}\cdot\frac{C'\frac{\partial I}{\partial T}}{W}=-\frac{Q}{T}\cdot P\qquad\text{ja}\end{aligned}$$

$$C'\cdot\frac{\frac{\partial I}{\partial T}}{\partial Q}\cdot I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma=\frac{\partial^2 I}{\partial Q\partial T}\cdot C'\cdot I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma=\frac{\frac{\partial I}{\partial Q}\cdot\frac{\partial I}{\partial T}}{I\cdot\sigma}\cdot C'\cdot I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma=C'\frac{\partial I}{\partial Q}\cdot\frac{C'\frac{\partial I}{\partial T}}{W}=P\,.$$

Näin ollen yhtälön (2) derivoitu muoto voidaan lopulta sieventää muotoon

$$I\sigma\cdot\frac{\partial C'}{\partial W}-\frac{Q}{T}P\cdot\frac{\partial T}{\partial W}+P\cdot\frac{\partial Q}{\partial W}=I\cdot\frac{C'}{W}\cdot\sigma\,. \tag{4.21}$$

Derivoidaan vielä lopuksi yhtälö (3) puolittain palkan W suhteen. Nyt

$$0=\frac{\partial}{\partial W}\left(C'\frac{\partial I}{\partial Q}\right)=\frac{\partial I}{\partial Q}\frac{\partial C'}{\partial W}+C'\left(\frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{\partial W}\right)=\frac{\partial I}{\partial Q}\frac{\partial C'}{\partial W}+C'\left(\frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial W}+\frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial W}\right).$$

Kerrotaan tämä yhtälö puolittain termillä $I\cdot\frac{C'}{P}\cdot\sigma$ jolloin huomataan yhtälöitä (2) ja (3) hyödyntäen, että

$$\frac{\partial I}{\partial Q}\cdot I\cdot\frac{C'}{P}\cdot\sigma=\frac{P}{C'}\cdot I\cdot\frac{C'}{P}\cdot\sigma=I\cdot\sigma\,,$$

$$C'\cdot\frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{\partial T}\cdot I\cdot\frac{C'}{P}\cdot\sigma=\frac{\partial^2 I}{\partial T\partial Q}\cdot C'\cdot I\cdot\frac{C'}{P}\cdot\sigma=\frac{\frac{\partial I}{\partial Q}\cdot\frac{\partial I}{\partial T}}{I\cdot\sigma}\cdot C'\cdot I\cdot\frac{C'}{P}\cdot\sigma=C'\frac{\partial I}{\partial T}\cdot\frac{C'\frac{\partial I}{\partial Q}}{P}=W\qquad\text{ja}$$

$$
\begin{aligned}
C' \cdot \frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{\partial Q} \cdot I \cdot \frac{C'}{P} \cdot \sigma = \frac{\partial^2 I}{\partial Q \partial Q} \cdot C' \cdot I \cdot \frac{C'}{P} \cdot \sigma = -\frac{T}{Q} \frac{\frac{\partial I}{\partial Q} \cdot \frac{\partial I}{\partial T}}{I \cdot \sigma} \cdot C' \cdot I \cdot \frac{C'}{P} \cdot \sigma \\
= -\frac{T}{Q} \cdot C' \frac{\partial I}{\partial T} \cdot \frac{C' \frac{\partial I}{\partial Q}}{P} = -\frac{T}{Q} \cdot W \ .
\end{aligned}
$$

Näin ollen yhtälön (3) derivoitu muoto voidaan lopulta sieventää muotoon

$$
I\sigma \cdot \frac{\partial C'}{\partial W} + W \cdot \frac{\partial T}{\partial W} - \frac{T}{Q} W \cdot \frac{\partial Q}{\partial W} = 0 \ . \tag{4.22}
$$

Yhtälöt (4.20) - (4.22) muodostavat nyt kolmen yhtälön ja kolmen tuntemattoman, $\frac{\partial C'}{\partial W}$, $\frac{\partial T}{\partial W}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial W}$, yhtälöryhmän, jonka ratkaisua voidaan tarkastella Cramerin menetelmällä. Cramerin menetelmän jakajaan muodostuu nyt matriisi

$$
A = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{H} I\xi & W & P \\ I\sigma & -\frac{Q}{T} P & P \\ I\sigma & W & -\frac{T}{Q} W \end{bmatrix} ,
$$

jonka determinantiksi saadaan Sarrusin säännöllä

$$
\begin{aligned}
|A| = & -\frac{\phi}{H} I\xi \cdot \left(-\frac{Q}{T} P \right) \cdot \left(-\frac{T}{Q} W \right) + WPI\sigma + PI\sigma W \\
& - I\sigma \cdot \left(-\frac{Q}{T} P \right) \cdot P - WP \cdot \left(-\frac{\phi}{H} I\xi \right) - \left(-\frac{T}{Q} W \right) I\sigma W \\
= & -\frac{\phi}{H} I\xi PW + 2PWI\sigma + \frac{Q}{T} I\sigma P^2 + \frac{\phi}{H} I\xi PW + \frac{T}{Q} I\sigma W^2 \\
= & \, I\sigma \Big(2WP + \frac{Q}{T} P^2 + \frac{T}{Q} W^2 \Big) \ .
\end{aligned}
$$

Kuten edellä jo todettiin, niin I:n konkaavisuudesta Q:n suhteen seuraa $\sigma > 0$, joten $|A| > 0$.

Nyt ollaan kiinnostuneita derivaatasta $\frac{\partial Q}{\partial W}$, joten muodostetaan kolmannen tuntemattoman suhteen apumatriisi

$$
A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{H} I\xi & W & -\frac{\phi}{H} \frac{I\xi C'}{W} \\ I\sigma & -\frac{Q}{T} P & I \frac{C'}{W} \sigma \\ I\sigma & W & 0 \end{bmatrix} .
$$

Tämän determinantiksi voidaan nyt laskea

$$
\begin{aligned}
|A_3| &= 0 + W \cdot I\frac{C'}{W}\sigma \cdot I\sigma + \Big(-\frac{\phi}{H}\frac{I\xi C'}{W}\Big) \cdot I\sigma \cdot W \\
&\quad - I\sigma \cdot \Big(-\frac{Q}{T}P\Big) \cdot \Big(-\frac{\phi}{H}\frac{I\xi C'}{W}\Big) - W \cdot I\frac{C'}{W}\sigma \cdot \Big(-\frac{\phi}{H}I\xi\Big) - 0 \\
&= I\sigma\bigg(I\sigma C' - \frac{\phi}{H}I\xi C' - \frac{Q}{T}\frac{\phi}{H}\frac{P}{W}I\xi C' + \frac{\phi}{H}I\xi C'\bigg) \\
&= I^2\sigma C'\bigg(\sigma - \frac{Q}{T}\frac{\phi}{H}\frac{P}{W}\xi\bigg) .
\end{aligned}
$$

Koska $\sigma > 0$ ja $\xi < 0$, niin myös $|A_3| > 0$. Näin ollen

$$
\frac{\partial Q}{\partial W} = \frac{|A_3|}{|A|} > 0
$$

ja väite seuraa tästä. □

Lause 4.12 *Jos investointifunktio on konveksi terveyteen käytetyn ajan T_M suhteen, niin palkkatason noustessa terveyteen käytetään enemmän aikaa T_M.*

Todistus: Tämä väite seuraa edellisen lauseen todistusta mukaillen. Edellisestä poiketen, nyt halutaan tutkia derivaattaa $\frac{\partial T}{\partial W}$. Muodostetaan tätä varten apumatriisi

$$
A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{H}I\xi & -\frac{\phi}{H}\frac{I\xi C'}{W} & P \\ I\sigma & I\frac{C'}{W}\sigma & P \\ I\sigma & 0 & -\frac{T}{Q}W \end{bmatrix} ,
$$

ja lasketaan determinantti

$$
\begin{aligned}
|A_2| &= -\frac{\phi}{H}I\xi \cdot I\frac{C'}{W}\sigma \cdot \Big(-\frac{T}{Q}W\Big) + \Big(-\frac{\phi}{H}\frac{I\xi C'}{W}\Big) \cdot P \cdot I\sigma + 0 \\
&\quad - I\sigma \cdot I\frac{C'}{W}\sigma \cdot P - 0 - \Big(-\frac{T}{Q}W\Big) \cdot I\sigma \cdot \Big(-\frac{\phi}{H}\frac{I\xi C'}{W}\Big) \\
&= I\sigma\bigg(\frac{\phi}{H}\frac{T}{Q}I\xi C' - \frac{\phi}{H}\frac{P}{W}I\xi C' - \frac{P}{W}I\sigma C' - \frac{\phi}{H}\frac{T}{Q}I\xi C'\bigg) \\
&= \frac{P}{W}I^2\sigma C'\Big(-\frac{\phi}{H}\xi - \sigma\Big) .
\end{aligned}
$$

Koska nyt oletettiin investointifunktio konveksiksi muuttujan T suhteen, on

$$
\frac{\partial^2 I}{\partial T \partial Q} = -\frac{T}{Q}\underbrace{\frac{\partial^2 I}{\partial T \partial T}}_{>0} < 0
$$

ja siten

$$\sigma = \frac{\frac{\partial I}{\partial Q} \cdot \frac{\partial I}{\partial T}}{I \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial Q}} < 0 \, .$$

Koska myös $\xi < 0$, niin

$$-\frac{\phi}{H}\xi - \sigma > 0$$

ja siten $|A_2| < 0$. Myös edellisessä lauseessa laskettu A:n determinantti on nyt σ:n negatiivisuudesta johtuen negatiivinen. Siten

$$\frac{\partial T}{\partial W} = \frac{|A_2|}{|A|} > 0$$

ja väite seuraa tästä. □

4.3.3 Inhimillisen pääoman vaikutukset

Esitetään vielä lopuksi inhimilliseen pääomaan, esimerkiksi koulutukseen, liittyvä tulos. Inhimilliseen pääomaan huomioidaan paljon muitakin tekijöitä, mutta Grossman itse on myöhemmissäkin julkaisuissaan kiinnittänyt huomiota erityisesti koulutuksen ja terveyden väliseen yhteyteen.

Lause 4.13 *Jos inhimillisen pääoman kasvattaminen lisää investointien tuottavuutta, niin inhimillistä pääomaa kasvattamalla voidaan laskea investointien rajakustannuksia.*

Todistus: Koska investointifunktio noudattaa vakioisia skaalatuottoja eli on ensimmäisen asteen homogeeninen funktio sekä terveyspalveluiden määrän Q että terveyteen käytetyn ajan T suhteen, niin Eulerin lauseen (ks. luku 2.8) perusteella investointifunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$I(Q,T) = Q\frac{\partial I}{\partial Q} + T\frac{\partial I}{\partial T} \, .$$

Oletetaan terveyteen käytettyjen resurssien olevan riippumattomia inhimillisestä pääomasta E, jolloin voidaan laskea kokonaisderivaatta

$$\frac{\partial I}{\partial E} = Q\frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{\partial E} + T\frac{\frac{\partial I}{\partial T}}{\partial E} \, .$$

Tarkastellaan nyt investointifunktion osittaisderivaattojen suhteellisia muutoksia muuttujien

Q ja T suhteen. Lauseessa 4.11 esiteltyä merkintää $I = Q \cdot g(T/Q)$ hyödyntäen kirjoitetaan

$$\widehat{g} := \frac{\partial g}{\partial E} \cdot \frac{1}{g} \qquad \text{ja} \qquad \widehat{g'} := \frac{\partial g'}{\partial E} \cdot \frac{1}{g'} = \frac{\frac{\partial I}{\partial T}}{\partial E} \cdot \frac{1}{\frac{\partial I}{\partial T}} = \widehat{\frac{\partial I}{\partial T}} \, ,$$

jolloin

$$\widehat{\frac{\partial I}{\partial Q}} = \frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{\partial E} \cdot \frac{1}{\frac{\partial I}{\partial Q}} = \frac{\partial g - \frac{T}{Q} g'}{\partial E} \cdot \frac{1}{g - \frac{T}{Q} g'} = \frac{g \cdot \frac{\partial g}{\partial E} \cdot \frac{1}{g} - \frac{T}{Q} g' \cdot \frac{\partial g'}{\partial E} \cdot \frac{1}{g'}}{g - \frac{T}{Q} g'} = \frac{g\widehat{g} - \frac{T}{Q} g' \widehat{g'}}{g - \frac{T}{Q} g'} \, .$$

Nyt voidaan laskea

$$\widehat{I} := \frac{\partial I}{\partial E} \cdot \frac{1}{I} = \frac{Q}{I} \frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{\partial E} + \frac{T}{I} \frac{\frac{\partial I}{\partial T}}{\partial E} = \frac{Q}{I} \cdot \left(g - \frac{T}{Q} g'\right) \cdot \frac{g\widehat{g} - \frac{T}{Q} g' \widehat{g'}}{g - \frac{T}{Q} g'} + \frac{T}{I} \cdot g' \cdot \widehat{g'} \, . \tag{4.23}$$

Oletetaan vielä yksinkertaistuksen vuoksi, että suhteelliset muutokset $\widehat{\frac{\partial I}{\partial Q}}$ ja $\widehat{\frac{\partial I}{\partial T}}$ ihmillisen pääoman suhteen ovat yhtäsuuret, jolloin siis

$$\widehat{g'} = \frac{g\widehat{g} - \frac{T}{Q} g' \widehat{g'}}{g - \frac{T}{Q} g'} \, .$$

Tämän oletuksen perusteella voidaan laskea

$$0 = \frac{(g\widehat{g'} - \frac{T}{Q} g' \widehat{g'}) - (g\widehat{g} - \frac{T}{Q} g' \widehat{g'})}{g - \frac{T}{Q} g'} = \frac{g\widehat{g'} - g\widehat{g}}{g - \frac{T}{Q} g'} = \frac{g(\widehat{g'} - \widehat{g})}{g - \frac{T}{Q} g'} \, ,$$

joten $\widehat{g'} = \widehat{g}$. Sijoittamalla tämä kaavaan (4.23) saadaan jälleen Eulerin lausetta hyödyntäen

$$\widehat{I} = \frac{Q \cdot \frac{\partial I}{\partial Q} \cdot \widehat{g} + T \cdot \frac{\partial I}{\partial T} \cdot \widehat{g}}{I} = \frac{Q \cdot \frac{\partial I}{\partial Q} + T \cdot \frac{\partial I}{\partial T}}{I} \cdot \widehat{g} = \frac{I}{I} \cdot \widehat{g} = \widehat{g} \, .$$

Siis

$$\widehat{I} = \widehat{g} = \widehat{g'} \, .$$

Lasketaan nyt suhteelliset rajakustannukset

$$\widehat{C'} = \frac{\partial C'}{\partial E} \cdot \frac{1}{C'} \, .$$

Lauseen 4.2 perusteella $C' = P \cdot (\frac{\partial I}{\partial Q})^{-1}$, joten

$$\frac{\partial C'}{\partial E} = P \cdot \frac{(\frac{\partial I}{\partial Q})^{-1}}{\partial E} = -P \cdot \frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{\partial E} \cdot \left(\frac{\partial I}{\partial Q}\right)^{-2} = -P \cdot \frac{g\widehat{g} - \frac{T}{Q} g' \widehat{g'}}{g - \frac{T}{Q} g'} \cdot \frac{\partial I}{\partial Q} \cdot \left(\frac{\partial I}{\partial Q}\right)^{-2} = -\frac{P}{\frac{\partial I}{\partial Q}} \cdot \frac{g\widehat{g} - \frac{T}{Q} g' \widehat{g'}}{g - \frac{T}{Q} g'} \, .$$

Näin ollen
$$\widehat{C'} = -\frac{P}{\frac{\partial I}{\partial Q}} \cdot \frac{g\widehat{g} - \frac{T}{Q}g'\widehat{g'}}{g - \frac{T}{Q}g'} \cdot \frac{\frac{\partial I}{\partial Q}}{P} = -\frac{g\widehat{g} - \frac{T}{Q}g'\widehat{g'}}{g - \frac{T}{Q}g'} = -\widehat{g'} = -\widehat{I}\,.$$

Tämän perusteella investointien rajakustannusten suhteellinen muutos on suunnaltaan päinvastainen investointien tuottavuuden suhteellisen muutoksen kanssa. Jos siis investointien tuottavuus kasvaa, niin rajakustannukset pienenevät. □

4.3.4 Tulosten arviointia

Tämän luvun tuloksia arvioitaessa on heti tärkeää huomata, että matemaattisen tarkastelun yksinkertaistamiseksi oletettiin vain yksi parametreista kerrallaan muuttuvaksi. Muut parametrit jouduttiin olettamaan kiinteiksi. Tämä on kokonaisuuden kannalta hieman ongelmallinen oletus, koska mallissa käytetyt parametrit riippuvat tunnetusti toisistaan. Esimerkiksi palkkataso liittyy vahvasti ikään, inhimilliseen pääomaan (esim. koulutus) sekä suoraan terveyteen (esim. Afrooz ja Rahim 2010). Tyypillisesti myös ikä ja inhimillinen pääoma ovat toisistaan riippuvia tekijöitä (esim. Klevmarken ja Quigley 1976). Grossman toteaa nämä havainnot itsekin julkaisussaan, mutta toteaa samalla, että tämä ei lopulta ole niin vakava rajoitus kuin voisi olettaa. Grossmanin mukaan esitettyjä tuloksia voidaan käsitellä erillisinä osittaistuloksina, eikä yhteisvaikutuksia suoraan yritetäkään mallintaa. Käydään nyt tarkemmin läpi joitakin havaintoja ja pohdintoja edellä esitettyihin tuloksiin liittyen.

Ikääntymisen aiheuttamien muutosten suhteen jouduttiin tekemään oletuksia kulumisasteesta sekä MEC-käyrän joustosta. Näihin oletuksiin liittyviä havaintoja käsiteltiin jo ko. lauseiden jälkeisissä huomautuksissa. Oleellista oli havaita, että nämä oletukset ovat mallin käytännöllisyyden kannalta hyvin oleellisia. Ilman näitä oletuksia tarkasteltava henkilö voisi teoreettisesti elää ikuisesti, mikä ei luonnollisestikaan ole käytännössä mahdollista. Toisaalta, tämä olisi jopa mallin itsensä kanssa ristiriitaista, koska jo mallia rakentaessa jouduttiin olettamaan elämän pituus tunnetuksi.

Oletukset kulumisasteesta olivat kuitenkin sinänsä varsin loogisia. On järkevää olettaa, että fyysinen rappeutuminen korkeassa iässä johtaa kulumisasteen jatkuvaan kasvamiseen ja sitä kautta terveysvarannon alenemiseen. Ongelmallista päättelyssä on kuitenkin se, että näissä tuloksissa jouduttiin olettamaan palkkataso vakioksi iän suhteen. Tämähän ei kuitenkaan ole käytännön havaintojen mukainen tilanne. Kuten edellä todettiin, palkkataso tyypillisesti korreloi iän kanssa. Palkkataso voi toisaalta muuttua myös ulkoisista tekijöistä johtuen kumpaan tahansa suuntaan. Lisäksi on havaittu kausaalisuutta myös terveydestä palkkaan, hyvä terveys voi nostaa palkkatasoa (Jäckle ja Himmler 2010).

Hankalaksi tilanteen tekee myös se, että iän ja palkkatason muutokset saattavat muuttaa terveysvarantoa eri suuntiin. Näin ollen kokonaisvaikutuksen arviointi ei ole tältä pohjalta mahdollista. Toisaalta, jos jossain tilanteessa sekä iän että palkkatason vaikutukset ovat samansuuntaisia, voidaan tulokset yhdistää toisiaan vahvistaviksi. Periaatteessa näin voisi käydä esim. lauseiden 4.7. ja 4.11. oletusten ollessa yhtä aikaa voimassa. Näidenkin lauseiden oletukset ovat valitettavasti jossain määrin ristiriidassa keskenään. Lauseessa 4.7. oletetaan että tarkastellaan suhteellisen korkeaa ikää, kun taas lauseessa 4.11. oletetaan palkkatason nousevan. Korkeassa iässä siirrytään kuitenkin tyypillisesti eläkkeelle, jolloin palkkataso paremminkin laskee. Lähestyvän eläköitymisen laskeva vaikutus palkkatasoon voi näkyä jopa jo ennen varsinaista eläkkeelle jäämistä (Rupert ja Zanella 2010). Näin ollen päädytään jälleen tilanteeseen, joissa tulosten yhteisvaikutuksen arviointi ei välttämättä ole mahdollista.

Alkuperäisessä julkaisussaan (Grossman 1972a) käsittelee inhimillisen pääoman osuutta mallissaan varsin suppeasti ja ylimalkaisesti. Julkaisussa on kyllä tuotu esille, että kasvuympäristöllä on vaikutusta henkilön persoonallisuuteen ja erityisesti koulutuksella on tyypillisesti positiivinen vaikutus terveydellisiin valintoihin. Matemaattisessa tarkastelussa nämä vaikutukset ovat kuitenkin selkeästi sivuroolissa aiempiin tekijöihin verrattuna.

Myöhemmin kirjoittamassaan artikkelissa (Grossman 2004) Grossman ottaa huomattavasti vahvemmin kantaa inhimillisen pääoman, erityisesti koulutuksen, rooliin henkilön terveysvalinnoissa. Tässä julkaisussaan Grossman tuo esille myöhempiä empiirisiä tutkimuksiaan, joissa on haettu vahvistusta erityisesti koulutuksen ja terveyden väliseen kausaalisuuteen. Koulutuksen ja terveyden välisestä korrelaatiosta on vahvaa näyttöä, mutta kausaalisuudesta on useita toisistaan poikkeavia teorioita. Grossmanin näkemys on, että kausaalisuuden suunta on vahvasti nimenomaan koulutuksesta terveyteen; koulutuksen lisäämisellä on positiivinen vaikutus terveyteen.

Myös poikkeavia näkemyksiä asiasta on esitetty. Erityisesti voitaisiin kysyä, onko sekä koulutustason että terveyden taustalla jokin tekijä, joka selittää näitä molempia. Tällöin koulutuksen ja terveyden välillä ei välttämättä olisikaan suoraa kausaalisuutta vaan pelkkä ulkoisen tekijän kautta syntyvä korrelaatio. Eräs mahdollinen selittävä taustatekijä voisi olla henkilön älykkyys. Älykkyyden ja koulutustason välillä on tutkimuksissa havaittua selkeä korrelaatio (Deary ja Johnson 2010), mikä on myös intuitiivisesti helppo uskoa. Toisaalta, on havaittu korrelaatiota myös älykkyyden ja terveyden välillä (Deary, Weiss ja Batty 2010).

Tämän pohjalta herää kysymys onko älykkyys enemmän geneettinen vaiko opittu ominaisuus. Mikäli älykkyys on lähinnä koulutuksen kautta opittua, saataisiin tästä tukea koulutuksen positiivisesta vaikutuksesta terveyteen. Vaikka ulkoisilla tekijöillä, kuten koulutus ja sosiaalinen ympäristö, on varmasti oma osansa älykkyyden kehittymisessä, on joissakin tutkimuksissa kuitenkin tultu siihen tulokseen, että älykkyys on suurimmalta osaltaan geneettinen ominaisuus ja toisaalta geneettiset ominaisuudet vaikuttavat myös henkilön koulutuksellisiin saavutuksiin (esim. Krapohl ym. 2014). Tällöin syy-seuraus-suhde olisikin enemmän perinnöllisistä tekijöistä älykkyyden ja koulutuksen suuntaan. Tämä havainto puolestaan tukisi teoriaa, jonka mukaan geneettiset ominaisuudet olisivat sekä koulutustason että terveyden taustalla, eikä kausaalisuus koulutuksesta terveyteen välttämättä olisikaan niin vahvaa kuin Grossman esittää.

Luonnollisestikaan ei kuitenkaan voida sanoa, että ainoastaan toinen näistä teorioista selittäisi koko asian. Epäilemättä koulutuksen ja terveyden välisen yhteyden taustalla on molempia tekijöitä. Mielenkiintoinen kysymys onkin lähinnä vaikutusten suuruussuhteessa, eli voidaanko jotain teoriaa pitää dominoivampana kuin toista. Grossmanin näkemys asiaan vaikuttaa olevan vahvasti sen puolella, että nimenomaan kouluttautumalla voidaan vaikuttaa positiivisesti terveyteen ja tämä on dominoiva vaikutussuunta.

5 Yhteenveto

Tässä työssä tarkasteltiin Michael Grossmanin vuonna 1972 julkaisemaa terveysmallia, jossa terveyttä käsiteltiin seurauksena investoinneista. Matemaattisella tarkastelulla todettiin, että malli toteuttaa tietyt taloustieteen perusoletukset ja optimaalisuusehdot ja täyttää siten hyvältä mallilta vaadittavat ominaisuudet. Lisäksi käytiin matemaattisesti läpi Grossmanin mallin pohjalta johdettavissa olevia tuloksia, jotka ennustavat miten terveydentila kehittyy esimerkiksi iän, palkan tai koulutustason muuttuessa. Kaikki nämä tulokset todettiin annettujen oletusten pohjalta matemaattisesti järkeviksi ja loogisiksi tuloksiksi. Malli osoittautui matematiikaltaan varsin elegantiksi, joskin välillä hieman teknisesti vaativaksi, kokonaisuudeksi.

Vaikka malli onkin matemaattisesti toimiva, on muistettava, että tulosten todistamiseksi vaadittiin useita ennakko-oletuksia. Osa näistä oletuksista on varsin ymmärrettäviä ja loogisia, mutta osa oletuksista vaatii hieman syvällisempää pohdintaa. Joiltain osin näitä pohdintoja esitettiin jo aiemmin niihin suoraan liittyvien tulosten yhteydessä. Tarkastellaan nyt vielä lisää joitakin mallin yleisempiä vaatimuksia ja oletuksia, joiden todenmukaisuus ei välttämättä ole täysin itsestäänselvää. Paraskin malli on lopulta oletustensa vanki; mikäli mallin oletukset eivät ole järkevästi perusteltavissa tai eivät vastaa todellisuutta, on myös mallin järkevyyttä pakko näiltä osin kyseenalaistaa.

Eräs kautta linjan mallin taustalla käytetty oletus oli, että terveysinvestointien korrelaatio terveyden kanssa on positiivista. Toisin sanoen, terveysinvestointeja lisäämällä terveysvaranto vain ja ainoastaan lisääntyy. Negatiiviset vaikutukset eivät ole tulosten todistamiseksi sallittuja. Tyypillisesti ajatellen tätä voidaan pitää varsin loogisena ja järkevänä oletuksena. On helppo uskoa, että terveyteen panostaminen esimerkiksi ravinnon, liikunnan ja terveyttä edistävien elämänvalintojen kautta vaikuttaa positiivisesti terveyteen. Myös terveyspalveluiden hankkimista voidaan pitää ainakin tiettyyn rajaan asti terveyttä edistävänä toimintana.

Malli ei kuitenkaan ota huomioon terveydenhoidon negatiivia puolia. On muistettava, että hoitovirheet ovat olleet tyypillisesti esimerkiksi Yhdysvalloissa jo pitkään yksi yleisimmistä kuolemaan johtavista syistä (Anderson ja Abrahamson 2017). Esimerkiksi lääkkeitä voidaan määrätä ja käyttää liikaa, jolloin terveysvaikutukset muuttuvatkin jossain vaiheessa negatiivisiksi. Tyypillisiä esimerkkejä lääkkeiden liikakäytöstä ovat erilaisten kipulääkkeiden liikakäyttö (Warner ym. 2011). Eräs huomattava maailmanlaajuinen uhkakuva liittyy myös antibioottien liikakäyttöön. Antibioottien liiallinen käyttö väestötasolla on johtanut antibioottiresistenttien bakteerien muodostumiseen, jolloin kokonaisvaikutus voi kääntyä yleisellä tasolla negatiiviseksi (Llor ja Bjerrum 2014).

Edellä esitettyjen tulosten todistamiseksi on siis syytä olettaa, että erilaisten terveyspalveluiden käytöllä on olemassa jonkinlainen luonnollinen yläraja. Tämä yläraja ei kuitenkaan välttämättä ole kovin selkeästi määritettävissä. Oletus terveysinvestointien positiivisesta vaikutuksesta on siis oletettava eksplisiittisesti; terveyspalveluita oletetaan käytettävän vain niin paljon, että tarvittava vaatimus vielä täyttyy.

Grossmanin mallin perustava ajatus on, että terveys on seurausta investoinneista. Tämä on toisaalta mielenkiintoinen lähtökohta, mutta toisaalta aiheuttaa omalta osaltaan myös tiettyjä rajoituksia mallin käytännöllisyyteen. Erityisesti perintötekijöiden vaikutus terveyteen jää puhtaassa investointimallissa helposti varsin vähäiselle tasolle. Grossmanin mallissa perintötekijät vaikuttavat lähinnä terveysvarannon alkutilaan, eli perittyyn terveysvarantoon. Tämän jälkeen terveydentilan ajatellaan kehittyvän mallissa lähes puhtaasti henkilön omien toimien seurauksena. Jossain määrin voidaan ajatella myös kulumisasteen ottavan huomioon perinnölliset tekijät, mutta tässä alkuperäisessa mallissa kulumisastettakin tarkastellaan lähinnä ikääntymiseen liittyvänä tekijänä. Grossmanin mallissa siis ajatellaan, että sairastuminen voidaan estää investoimalla terveyteen ja sairastuminen voi johtua lähinnä vain terveysinvestointien puutteesta tai ikääntymisestä johtuvasta luonnollisesta terveyden heikentymisestä. Malli ei huomioi muunlaisia sairauksia tai niiden sairauksien parantamiseen tarvittavaa hoitoa (Eze 2018).

Perintötekijät vaikuttavat kuitenkin nykytiedon mukaan varsin vahvasti terveyteen suoraan esimerkiksi perinnöllisten sairauksien kautta, jotka voivat tulla esille vasta myöhemmälle iällä. Tällaisia sairauksia ovat esimerkiksi erilaiset sydän- ja verenkiertosairaudet (Zdravkovic ym. 2002). Tämän tyyppisiä vaikutuksia ei järkevästi voi ottaa huomioon pelkästään alkupääomaa muuttamalla. Toisaalta, perintötekijät voivat vaikuttaa terveyteen myös epäsuorasti. Kuten aiemmin jo inhimmillistä pääomaa tarkasteltaessa todettiin, geneettiset ominaisuudet voivat vaikuttaa älykkyyteen ja sitä kautta ohjata henkilön elämänvalintoja enemmän, kuin mitä puhdas vapaaseen valintaan pohjautuva investointimalli voi ottaa huomioon. Perinnöllisten tekijöiden jättäminen liian vähälle huomiolle voi siis helposti johtaa malliin, joka ei vastaa riittävästi todellisuutta.

Grossmanin mallia tarkasteltaessa on koko ajan syytä pitää mielessä myös se, että malli ei ole niinkään ennustava, vaan paremminkin kuvaileva malli. Malli siis antaa lähinnä yleisiä suuntaviivoja väestötasolla siitä, mitkä tekijät vaikuttavat terveysvarannon kehitykseen ja miten nämä tekijät terveyteen vaikuttavat. Mallin avulla ei voida konkreettisesti ennustaa terveysvarannon kehitystä yksilötasolla, vaikka kaikki mallin lähtöparametrit olisivatkin tiedossa. Terveyden kehittymiseen yksilötasolla liittyy huomattavan paljon satunnaistekijöitä, joita malli ei mitenkään voi ottaa huomioon.

Lisäksi, vaikka annetun yhtälöryhmän saisikin ratkaistua täydellisesti, voisi ratkaisu johtaa käytännön kannalta mahdottomiin ratkaisuihin. Tämä voisi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että kaikki elinajan odotetut tulot ja varallisuudet tulisi investoida terveyteen heti ensimmäisellä periodilla. Tämä ei luonnollisestikaan olisi käytännössä toteutettavissa oleva ratkaisu. On myös näytetty, että sopivin oletuksin optimointiongelman ratkaisu johtaa ikuiseen elämään (Strulik 2015). Myöskään tämä ei vastaa todellisuutta ja empiirisiä havaintoja.

Mallia on näin ollen syytä tarkastella lähinnä suurten massojen väestötasolla tapahtuvaa käyttäytymistä kuvaavana mallina. Voidaan siis esimerkiksi kuvailla, miten terveystilanne tyypillisesti muuttuu vaikkapa palkkatason tai opiskelun seurauksena. Myös tässä on kuitenkin muistettava, että tyypillisyys viittaa lähinnä keskimääräiseen tilanteeseen. Yksilötasolla poikkeukset ovat aina mahdollisia, eikä täydellisiä ennusteita luonnollisestikaan voida tehdä. Matemaattiset ennustemallit ovat aina lähinnä jatkuvia todennäköisyysmalleja, joissa yksittäisen tapahtuman (tässä tapauksessa yksilön terveys tietyllä ajanhetkellä) todennäköisyys on nolla. Vaikka matemaattisten mallien avulla voidaankin siis arvioida suuria linjoja (eli pidemmän aikavälin tapahtumien todennäköisyyttä), ei parhaankaan mallin avulla ole mahdollista ennustaa tulevaisuutta tarkasti.

Rajoituksistaan huolimatta Grossmanin mallin merkitystä terveystaloustieteen kehityksessä ei tule missään nimessä aliarvioida. Grossmanin malli toimi uranuurtajana ja uuden ajattelutavan luojana terveystaloustieteen alalla. Grossmanin mallin pohjalta on myös aktiivisesti luotu paranneltuja malleja, joissa on pyritty huomioimaan ja kiertämään edellä mainittuja rajoituksia. Eräs tutkimuksen kohde on ollut esimerkiksi edellä mainittu epärealistiseksi koettu tiukasti positiivinen korrelaatio terveyden ja terveydenhuollon välillä (ks. Galamaa ja Kapteyn 2011). Optimointiongelman monimutkaisuudesta huolimatta ongelmalle on myös pyritty ja tietyin oletuksin onnistuttu löytämään suljettu ratkaisu (Strulik 2015). Vaikka tässä työssä ei käsitelläkään tarkemmin näitä mallin myöhempiä laajennuksia ja tarkennuksia, voidaan julkaisujen moninaisuuden ja laajuuden pohjalta pitää selvänä Grossmanin mallin vaikuttavuutta terveystaloustieteen kehitykseen. Kuten edellä mainitut tutkimuksetkin osoittavat, on Grossmanin mallin pohjalta julkaistu vielä vuosikymmenten jälkeenkin säännöllisesti uusia tuloksia. Tutkimusala on siis edelleen aktiivinen ja tuottaa varmasti vielä jatkossakin mielenkiintoisia tuloksia.

Lähteet

Afrooz, A., ja K.B.A. Rahim. 2010. "A review of effects of gender, age, and education on wage and productivity". *International Research Journal of Finance and Economics* 46:71–79. doi:https://www.researchgate.net/publication/287717622_A_review_of_effects_of_gender_age_and_education_on_wage_and_productivity.

Anderson, James G, ja Kathleen Abrahamson. 2017. "Your Health Care May Kill You: Medical Errors". *Stud Health Technol Inform.* 234:13–17. doi:https://ebooks.iospress.nl/publication/46132.

Arrow, Kenneth J. 1963. "Uncertainty and the welfare economics of medical care". *The American Economic Review* 53 (5): 941–973. doi:https://www.jstor.org/stable/1812044.

Becker, Gary S. 2007. *Economic Theory.* 2. painos. New Brunswick: Routledge.

Deary, Ian J, ja Wendy Johnson. 2010. "Intelligence and education: causal perceptions drive analytic processes and therefore conclusions". *International Journal of Epidemiology* 39 (5): 1362–1369. doi:https://doi.org/10.1093/ije/dyq072.

Deary, Ian J., Alexander Weiss ja G. David Batty. 2010. "Intelligence and Personality as Predictors of Illness and Death: How Researchers in Differential Psychology and Chronic Disease Epidemiology Are Collaborating to Understand and Address Health Inequalities". *Psychol Sci Public Interest.* 11 (2): 53–79. doi:https://doi.org/10.1177%2F1529100610387081.

"Definition of Marginal Rate of Return". 2019. Viitattu 18. elokuuta 2022. https://budgeting.thenest.com/definition-marginal-rate-return-25528.html.

Dixit, Avinash K. 1990. *Optimization in Economic Theory.* 2. painos. New York: Oxford University Press.

Euler. 2000. *Foundations of Differential Calculus.* 1. painos. New York: Springer New York.

Eze, Pius C. 2018. “A Critique of an Aspect of Grossmans Model of Demand for Health Care”. *International Journal of Applied Economics, Finance and Accounting* 2 (2): 47–53. doi:https://doi.org/10.33094/8.2017.2018.22.47.53.

Galamaa, Titus, ja Arie Kapteyn. 2011. “Grossman’s Missing Health Threshold”. *Journal of Health Economics* 30 (5): 1044–1056. doi:https://doi.org/10.1016/j.jhealeco.2011.06.004.

Grossman, Michael. 1972a. “On the Concept of Health Capital and the Demand for Health”. *The Journal of Political Economy* 80 (2): 223–255.

———. 1972b. *The Demand for Health: A Theoretical and Empirical Investigation.* 1. painos. New York: Columbia University Press.

———. 2004. “The demand for health, 30 years later: a very personal retrospective and prospective reflection”. *Journal of Health Economics* 23:629–636.

———. 2022. “The demand for health turns 50: Reflections”. *Health Economics Wiley Online Library* 31 (9): 1807–1822. doi:https://doi.org/10.1002/hec.4563.

“How to Calculate Marginal Rate of Return”. 2017. Viitattu 18. elokuuta 2022. https://bizfluent.com/how-7229700-calculate-marginal-rate-return.html.

Jäckle, Robert, ja Oliver Himmler. 2010. “Health and Wages: Panel Data Estimates Considering Selection and Endogeneity”. *The Journal of Human Resources* 45 (2): 364–406. doi:https://www.jstor.org/stable/25703460.

Klevmarken, Anders, ja John M. Quigley. 1976. “Age, Experience, Earnings, and Investments in Human Capital”. *Journal of Political Economy* 84 (1): 47–72. doi:https://www.jstor.org/stable/1830170.

Krapohl, Eva, Kaili Rimfeld, Nicholas G Shakeshaft, Maciej Trzaskowski, Andrew McMillan, Jean-Baptiste Pingault, Kathryn Asbury ym. 2014. “The high heritability of educational achievement reflects many genetically influenced traits, not just intelligence”. *PNAS* 111 (42): 15273–15278. doi:https://doi.org/10.1073/pnas.1408777111.

Llor, Carl, ja Lars Bjerrum. 2014. “Antimicrobial resistance: risk associated with antibiotic overuse and initiatives to reduce the problem”. *NCHS Data Brief.* 5 (6): 229–241. doi:https://doi.org/10.1177/2042098614554919.

Nicholson, Walter, ja Christopher Snyder. 2007. *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions.* 10. painos. United States: South-Western College Pub.

Rupert, Peter, ja Giulio Zanella. 2010. “Revisiting Wage, Earnings, and Hours Profiles”. *SSRN Electronic Journal* 72. doi:http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2424758.

Samuelson, Paul Anthony. 1947. *Foundations of Economic analysis.* 6. painos. Bombay: Oxford University Press.

Strulik, Holger. 2015. “A Closed-form Solution for the Health Capital Model”. *Journal of Demographic Economics* 81 (3): 301–316. doi:http://dx.doi.org/10.1017/dem.2015.4.

Varian, Hal R. 1992. *Microeconomic Analysis.* 3. painos. New York, London: W. W. Norton & Company.

Warner, Margaret, Li Hui Chen, Diane M Makuc, Robert N Anderson ja Arialdi M Minino. 2011. “Drug poisoning deaths in the United States, 1980-2008”. *NCHS Data Brief.* 81:1–8. doi:https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22617462/.

Weintraub, Sidney. 1983. “The Supply Price in the Marginal Efficiency of Capital”. *Journal of Post Keynesian Economics* 5 (4): 618–624. doi:https://www.jstor.org/stable/4537775.

Zdravkovic, S, A Wienke, N L Pedersen, M E Marenberg, A I Yashin ja U De Faire. 2002. “Heritability of death from coronary heart disease: a 36-year follow-up of 20 966 Swedish twins”. *Journal of Internal Medicine* 252 (3): 247–254. doi:https://doi.org/10.1046/j.1365-2796.2002.01029.x.

Zweifel, Peter. 2012. “The Grossman model after 40 years”. *The European Journal of Health Economics* 13:677–682. doi:https://doi.org/10.1007/s10198-012-0420-9.