

LAUTAPELIT

ENNEN JA NYT

Jorma Kyppö

URN:ISBN:978-951-39-9350-4
ISBN 978-951-39-9350-4 (PDF)

Jyväskylän yliopisto, 2022

ISBN 978-951-39-7572-2

Kuin nappuloilla meillä pelataan:
yö-päivä-ruutuisella laudallaan
Hän sinne-tänne siirtää meitä... shakkaa
ja syö ja sysää syrjään: rasiaan..

Omar Khaijam
(Suom. Toivo Lyy)

Kansikuvat

Ylhäällä shakin maailmanmestari Anatoli Karpov pelaa kolmishakkia Jyväskylässä elokuussa 1996. Kuvan otti sanomalehti Keskisuomalaisen kuvaaja Matti Turpeinen.

Alhaalla vasemmalla on tekijän kuva Hneftafl-pelistä eli viikinkishakista. Kuva on otettu Islannin kansallismuseosta hankitusta 1200 vuotta vanhan pelin tarkasta rekonstruktioista.

Alhaalla oikealla on tekijän kuva kreetalaisesta 4000 vuotta vanhasta Faistoksen kiekosta tulkittuna lautapeleksi. Kuvassa on Kreetalta tuotu näköiskopio kiekosta.

ESIPUHE

Tämän kirjan alkuosa tarjoaa niillekin, jotka ovat perehtyneet vähemmän matematiikkaan ja peleihin, hyvän ikkunan muutamiin perusasioihin sekä informaatiopakettien lukuista lautapeleistä, joista suurin osa on tänä päivänä harvinaisia tai täysin tuntemattomia. Alkuosa sopii myös nuoremmille lukijoille. Kirjan jälkiosa taas tarjoaa moniulotteisia matemaattisia malleja, jotka saattavat innostaa niistä kiinnostuneita uusiin luoviin, ajatuksiin ja toivon mukaan myös uudenlaisiin innovaatioihin.

Ensimmäiset viisi lukua käsittelevät peliteorian perusasioita, topologista geometriaa ja verkkoteoriaa geometriaa sekä muuta myöhemmin kirjassa tarvittavaa matematiikkaa. Lukijalle helpoiten omaksuttavia ovat shakin ja monien muiden lautapelien historiaa käsittelevät neljäs ja viides luku. Pelit ja niiden luonne on esitelty lyhyesti runsaalla kuvituksella. Sääntöjen yksityiskohtiin ei ole menty, mutta mikäli kiinnostus joihin peliä kohtaan herää, niin säännöt on varsin helposti löydettävissä lähdeaineiston avulla tai Internetin kautta. Yhteensä on esitelty 35 erilaista peliä kuvineen. Kuudennessa ja seitsemännessä luvussa on useita tekijän itsensä kehittämiä shakin muunnelmia, jotka luovat pohjan lopulliselle kahdeksannessa luvussa esiteltävälle moniulotteiselle shakille. Monista näistä muunnelmista on tehty myös konkreettisia pelattavia pelejä, joita ollut esillä useissa paikoissa, mm. Senaatin torilla, Kaapelitehtaalla ja Oulun Tietomaassa. Näiden pelien sääntöjä löytyy myös kirjasta. Tutkimuksen päätulos oli moniulotteinen monen eri pelaajan pelimalli, joka noudattaa shakin sääntöjä. Malli on jossain mielessä eräänlainen *lasihelmipeli*, Herman Hessen tunnettua romaania mukaillen. Viimeinen, yhdeksäs, luku käsittelee puolestaan matemaattisia innovaatioita, joihin perehtyminen voi innostaa lukijan jatkotutkimukseen. Kirjan lopussa on vielä suomalaisten ja englanninkielisten termien hakemisto sivunumeroineen.

Kirja perustuu englanninkieliseen väitöskirjaan ja on myös sisällöltään sen lähes identtinen suomenkielinen versio. Englanninkieliseen versioon voi tutustua Jyväskylän yliopiston verkkosivujen kautta. Seuraavalta sivulta alkava johdanto-osa kertoo väitöskirjan taustalla vaikuttaneet asiat ja ensimmäisessä luvussa esitellään väitöstutkimuksen rakenne.

Lopuksi tekijä toivoo, että kirja avaa lukijoille matematiikan kiehtovaa maailmaa, tuottaa uusia ajatuksia ja herättää henkiin useita jo unohtuneita mielenkiintoisia lautapelejä!

Jyväskylässä 19.9. 2018
Jorma Kyppö

JOHDANTO

Tämä kirjan taustalla on englanninkielinen väitöskirjatutkimus, joka tarkastettiin vuonna 2016 nimellä *The N-dimensional N-person Chesslike Game Strategy Analysis Model* eli suomeksi *N -ulotteinen, N-pelaajan shakinomainen pelistrategioiden analysointimalli*. Tutkimuksessa rakennettiin matemaattinen, shakkiin pohjautuva n-pelaajan symmetrinen pelimalli. Mallia käsitellään 8. luvussa. Symmetrisyydellä tarkoitetaan tässä pelaajien asemaa toisiinsa nähden. Siirtojärjestys luonnollisesti rikkoo symmetrisyyden, mutta siihenkin on löydettävissä ratkaisu. Motiivi pelimallin rakentamiseen lähti siitä, että monen pelaajan pelien kohdalla on muuttuvia tekijöitä niin paljon, että niiden kohdalla optimaalisten strategioiden löytäminen matemaattisesti on liki mahdotonta. Paras tapa löytää parhaat toimintatavat on simulointi. Tämän vuoksi oli mielekästä kehittää malli, jota voi hyödyntää peliteoreettisissa asetelmissä simuloimalla. Kun malli on kerran rakennettu, niin sitä voidaan soveltaa monella tavalla malliin pohjautuvien laskennallisten algoritmien avulla. Shakki on tässä vain perusrakenne, joka antaa selkeän pohjan. Eri pelaajien painotusarvoa voidaan muuttaa samoin kuin pelaajien nappuloiden painotusarvoja, jolloin mallilla voi peilata erilaisia tosielämän tilanteita. Peli, ja erityisesti shakki, antaa mielikuvan lautapelistä, mutta pelien kohdalla on kyse useiden eri toimijoiden keskinäisestä vuorovaikutuksesta. Peli, voi olla osa politiikan pelikenttää, metsän ekologiaa tai sään ennustamista. Tutkimuksen aikana syntyi lukuisia huomioita ja sivutuloksia.

Tutkielma, johon kirja pohjautuu on rakentunut oman hiljaisen tutkimuksen parissa, sen taustalla ovat kuitenkin vaikuttaneet monet tahot joko tietäen tai tietämättään. Merkittävin vaikutus on ehdottomasti ollut professori ja dekaani Pekka Neittaanmäen tuella työn eri vaiheissa. Työn loppuvaiheiden tuki on selvä, mutta aikanaan Pekka on ollut persoonallaan vaikuttamassa ratkaisevasti asian eteenpäin menoon jo vuosia sitten tekijän perusopintovaiheessa. Toinen tärkeä henkilö on tekijän kollega, ystävä ja väitöskirjan alkuvaiheen ohjaaja professori Frank Harary aina vuonna 2005 tapahtuneeseen menehtymiseensä saakka ja hänen poismenonsa se vei työn pitkäksi aikaa tuuliajolle tekijän siirtäessä työnsä painopisteen opetukseen. Harary oli syntynyt samana vuonna kuin isäni, Ensio Kyppö, jonka innostava ote loi jo ikuisuuksia sitten perustan tutkimustyölleni.

Erittäin keskeinen henkilö on myös professori Seppo Puuronen. Seppo on käynyt tutkielman läpi tapansa mukaan tarkalla silmällä ja hän on myös opiskeluaikainen opettajani, jota ilman en olisi ehkä koskaan tullut työskentelemään tietojenkäsittelytieteiden laitokselle. Professori Vesa Savolaisen kautta tutustuin verkkoteoriaan ja hän ohjasi myös lisensiaattityöni. Vesan merkitys on tämän työn kannalta paradoksaalisesti kaksijakoinen: Vesa esitteli minulle klassisen, mutta liian koukuttavan, karttojen neliväriongelman, jonka vuoksi menetin

kolmisen vuotta opiskeluni, mutta löysin tien verkkoteoriaan ja tutkimustyöhön. Vesa oli myös isäni tavoin erittäin innostava, molemmat uskoivat minusta enemmän kuin oli tarpeen, mikä oli loppujen lopuksi ihan hyvä asia.

Itse tutkimusaiheen kannalta keskeisiä henkilöitä on kolme. Neittaanmäen ja Hararyn rinnalla kolmas on Esko Peltonen, joka aikanaan toimi Jyväskylän Teknologiakeskuksen innovaatiojohtajana. Tämä tutkielma rakentuu sen monipuolisen ja eri yhteiskunnan aloille työntyneen työn pohjalle, jota hänen avustuksellaan tehtiin shakkiin liittyvien innovaatioiden parissa.

Itse tutkielman kirjoittamisen kannalta merkittävä tukija, keskustelukumppani ja kollega on ollut professori Jari Veijalainen ja MineSocMed Suomen akatemiaprojekti. MineSocMed -projekti on ollut erittäin mielenkiintoinen myös sosiaalisiin verkkoihin liittyvän tutkimuksen näkökulmasta.

Edellisten lisäksi haluan kiittää myös Nyyssösen säätiötä työn alkuvaiheessa saadusta strategisesti merkittävästä tuesta, sekä tutkijakoulu Comasia työn edistymiselle tärkeiden konferenssimatkojen rahoituksesta. Henkilöistä voin mainita vielä Steve Legrandin, joka paitsi tarkasti työn englanninkielisen kieliasun, niin antoi myös hyviä kommentteja sen yksityiskohdista. Toinen kiitoksen ansaitseva henkilö on ilman muuta aurinkoinen toimistosihiteerimme Seija Paaananen, joka piti tapana mukaan tehokkaasti huolen siitä, että työympäristöni ulkoiset puitteet pysyivät kunnossa.

Lisäksi kiitoksen ansaitsevat väitöskirjan englanninkielisen version esitarkastajat ja siitä perinpohjaisen lausunnon antaneet Gennadi Leonov ja Hajo Broersma, sekä tietenkin vastaväittäjäni Steve Hedetniemi.

Erityisesti haluan myös kiittää tietojenkäsittelytieteiden laitosta, jotka oli pitkään yksi yliopistomme innovatiivisimpia ja myös demokraattisimpia työympäristöjä. Rakenteet muuttuvat, mutta ihmiset säilyvät, joten, jotta kukaan ei tulisi unohdetuksi, haluan aivan erityisesti kiittää erästä paikkaa kaikkien organisaatioiden ulkopuolelle: tietojenkäsittelytieteiden laitoksen kahviota ja kaikkia siellä vuosien varrella istuneita innostavista keskusteluista.

Lopuksi kiitän, jotain mikä tuntuu joskus itsestään selvältä eli omaa kotiväkeäni, joka on kaiken perusta ja joka antoi minun puuhailla tämän tutkielman loppuun saakka maaseudun rauhassa tarvitsematta huolehtia monista käytännön asioista, vaikka aina välillä vaikutti siltä, että mitään ei ole tapahtumassa.

Jyväskylässä 4.12.2016 ja 19.9.2018
Jorma Kyppö

SISÄLLYSLUETTELO

1	TUTKIMUKSEN TAUSTA JA RAKENNE.....	12
1.1	Tutkimuksen lähtökohtia	13
1.1.1	Tutkimuksen tausta	13
1.1.2	Tutkimuksen tavoite.....	16
1.2	Tutkimuskysymykset.....	18
1.3	Keskeiset käsitteet.....	19
1.4	Tulokset.....	20
1.5	Tutkielman rakenne	21
1.6	Työn suhde muihin julkaisuihin	22
2	PELITEORIA JA N-PELAAJAN ASETELMAT	23
2.1	Peliteorian taustahistoriaa	24
2.2	Kahden pelaajan pelit.....	25
2.2.1	Kahden hengen nollasummapeli	25
2.2.2	Kahden hengen vakiosummapeli	27
2.2.3	Kahden hengen ei-vakiosummapelit	29
2.3	N-pelaajan pelit.....	31
2.4	Yhteenveto	35
3	TILAN PALOITTELU ERI ULOTTUVUUKSISSA.....	37
3.1	Käsitteitä.....	37
3.2	Pinnan tasainen täyttäminen.....	39
3.3	Kolmiulotteisen tilan tasainen täyttäminen.....	41
3.4	N-ulotteisen tilan täyttäminen.....	43
3.4.1	Monipinnat eli polytoopit	44
3.4.2	Schläflin symboli	45
3.4.3	Hunajakennot.....	47
3.4.4	Suuteluluku	48
3.4.5	Pakkausongelmat	51
3.5	Yhteenveto	54
4	SHAKIN HISTORIA JA ESIHISTORIA	55
4.1	Shakille rinnakkaisia vanhoja strategiapelejä.....	55
4.1.1	Neljä juoksupeliä.....	56
4.1.1.1	Mehen, muinainen n-pelaajan peli.....	56
4.1.1.2	Senet.....	58
4.1.1.3	Urin kuninkaallinen 20-ruutua peli	59
4.1.1.4	Ashtapada.....	60
4.1.1.5	Yhteenveto.....	61
4.1.2	Tafl pelit, Latrunculi ja Petteia	61

4.1.2.1	Hneftafl ja muut tafl pelit	61
4.1.2.2	Latrunculi.....	64
4.1.2.3	Petteia	65
4.1.3	Seega, tammi ja alquerque	66
4.1.3.1	Seega	66
4.1.3.2	Tammi	67
4.1.3.3	Alquerque	68
4.1.3.4	Yhteenveto	69
4.1.4	Go ja liubo	69
4.1.4.1	Go.....	70
4.1.4.2	Liubo.....	71
4.1.5	Konane ja Agon	72
4.1.5.1	Konane	72
4.1.5.2	Agon	75
4.1.6	Yhteenveto.....	75
4.2	Alkushakki ja pelin synty	75
4.2.1	Shaturanga.....	77
4.2.2	Neljän pelaajan shaturanga.....	78
4.2.3	Bysanttilainen kehäshakki	79
4.2.4	Kiinalainen shakki eli xiangqi	80
4.2.5	Japanilainen shakki eli shogi	81
4.2.6	Taikaneliöistä.....	82
4.2.7	Eri käsityksiä shakin alkulähteistä	84
4.3	Kolme näkemystä liittyen lautapelien kehityshistoriaan	87
4.3.1	Kommentti pelien evoluutiosta.....	87
4.3.2	Oliko Faistoksen kiekko peli?.....	88
4.3.3	Fjögratafl, teoreettinen neljän pelaajan tafl -peli	94
4.4	Yhteenveto	94
5	SHAKIN MUUNNELMIA MYÖHEMMILTÄ AIKAKAUSILTA	96
5.1	Historiallisia usean pelaajan shakkeja	96
5.1.1	Kolme kuningaskuntaa ja kolme ystävää pelit	97
5.1.2	Seitsemän armeijaa peli	98
5.1.3	Neljän vuodenajan shakki.....	98
5.2	Muunnelmia 1700-luvulta 1900-luvun alkuun.....	99
5.2.1	Marinellin kolmen pelaajan shakki	100
5.2.2	Neljän pelaajan ristimallisia shakkeja Euroopasta	101
5.2.3	Galapeli	102
5.2.4	Erikoisia n-pelaajan shakkeja 1800-luvulta	103
5.2.5	Siegmund Wellischin kolmen pelaajan shakki	105
5.2.6	Glinskin heksagonaalishakki.....	106
5.2.7	Hexagonia-peli.....	106
5.3	Nykyaikaisia muunnelmia	107
5.4	Yhteenveto	109

6	UNIVERSAALIN SHAKIN MALLI	110
6.1	Teoria alkushakista.....	111
6.1.1	Ratsun polku ja tämän tutkielman kolmishakin tausta.....	111
6.1.2	Pelialusta.....	116
6.1.3	Vyöhykkeet ja sektorit erilaisilla alustoilla.....	120
6.2	Kolmishakki.....	121
6.2.1	Heksagonaalilauta.....	121
6.2.2	Heksagonaalilaudan pelinappulat.....	125
6.2.3	Heksagonaalisen kolmishakkilaudan numerointijärjestelmä	127
6.2.4	Kolmishakki pelinä	128
6.3	Epäsymmetrinen nelishakki.....	137
6.4	Laudaton shakki.....	138
6.4.1	Pelialue ja nappulat.....	139
6.4.2	Yksittäisten nappuloiden siirtäminen alustalla	142
6.4.3	Pelin kulkuun liittyvät säännöt	144
6.5	Yhteenveto	145
7	UNIVERSAALIN SHAKIN LAAJENNUS	147
7.1	Shakin laajennus laudan koon mukaan tasopinnalla.....	147
7.1.1	Suurikokoiset shakkipelit neliöruutuisilla tasoilla.....	148
7.1.2	Yleistetyt pienet shakkipelit neliöruutuisilla tasoilla.....	154
7.2	Shakin laajennus ulottuvuuteen N.....	158
7.2.1	Kolmiulotteinen shakki kuutiolaudalla	160
7.2.2	Neliulotteinen shakki.....	162
7.2.3	N-ulotteinen kahden pelaajan shakki	166
7.3	Kolme universaalien shakin reunatapausta	169
7.3.1	Laudaton kolmishakki.....	169
7.3.2	Kolmioshakki	170
7.3.3	Fullereenishakki	170
7.4	Yhteenveto	172
8	SYMMETRINEN N-PELAAJAN SHAKKI.....	173
8.1	Mahdolliset mallit symmetriselle n-osapuolen pelialustalle.....	173
8.1.1	Hyperkuutiomalli.....	175
8.1.2	Tetraedrimalli	176
8.1.3	Suutelulukumalli.....	177
8.1.4	Multinomikaavaan perustuva malli	178
8.1.5	Yhteenveto.....	178
8.2	Shakkipelin upottaminen simpleksi-alustalle	179
8.2.1	Pascalin sääntö	179
8.2.2	Kolmen pelaajan malli upotettuna Pascalien kolmioon	180
8.2.3	Multinomikaava ja n-simpleksi	181
8.2.4	Symmetrinen 4 pelaajan malli 3-simpleksi-alustalla.....	182
8.2.5	Pelialusta ja hyperupseerityypit	186
8.2.6	Koordinaattien määräytyminen simpleksi-alustalla.....	187
8.2.7	Symmetrinen 5 pelaajan malli 4-simpleksi-alustalla.....	190

8.2.8	Symmetrinen 6-pelaajan malli 5-simpleksi-alustalla	193
8.2.9	Symmetrinen n-pelaajan malli n-1 simpleksialustalla	194
8.3	Pascalin säännön laajennus	195
8.3.1	Laajennus tavallisessa Pascalin kolmiossa	195
8.3.2	Pascalin säännön laajennus 3-ulotteisessa mallissa	197
8.4	Pelaajien määrän vaikutus sääntöihin	197
8.5	Yleinen simpleksishakki	199
8.5.1	Ensimmäinen puolustusvyöhyke eri ulottuvuuksissa	199
8.5.2	Tornin liikeradat n-simpleksi-alustalla	200
8.5.3	Toisen puolustusvyöhykkeen upseerit n-simpleksi-alustalla	202
8.5.4	Seuraava vaihe	202
8.6	Yhteenveto	203
9	LOPPUHUOMAUTUKSIA	204
9.1	Verkon lukuarvo	204
9.1.1	Verkon nimiöinnistä	205
9.1.2	Yhtenäinen suuntaamaton verkko	205
9.1.3	Suunnattu verkko	207
9.2	Pienten shakkipelien strategiaverkot	211
9.3	Euler-Poincaren kaava ja yleistetty genus	214
9.3.1	Taustaa	214
9.3.2	Euler-Poincaren karakteristikan yleistys genuksen suhteen ..	217
9.3.3	Aukkojen määrittäminen k-simpleksissä	221
9.3.4	Johtopäätöksiä	222
9.4	Parilliset ja parittomat euklidiset ulottuvuudet	223
9.4.1	Yleistetty Pii	226
9.4.2	Pii ja Neperin luku	230
9.4.3	Yhteenveto	231
9.5	Fibonaccin sarjan yleistyksiset	231
9.5.1	Yleistyksiset tasolla	232
9.5.2	Yleistyksiset korkeammassa ulottuvuuksissa	233
9.5.3	Fibonaccin polynomit ja joitain niiden laajennuksia	234
9.5.4	Yhteenveto	236
9.6	Muita loppuhuomautuksia	237
9.6.1	Aikaansaadut kehät Pascalin monipinnoilla	237
9.6.2	Hallitsevuusluvusta eräissä shakin muunnelmissa	238
10	YHTEENVETO	239
	ENGLISH SUMMARY	241
	HAKEMISTO	242
	LÄHTEET	246
	LIITE -1 SÄHKÖPOSTIT KOLMISHAKIN SYNTYPROSESSISTA	258

LIITE -2 EPÄSYMMETRISEN NELJÄN PELAAJAN SHAKIN SÄÄNNÖT	266
KUVIOT JA TAULUKOT	269

1 TUTKIMUKSEN TAUSTA JA RAKENNE

Shakki pelinä on ollut tunnettu jo noin kaksi tuhatta vuotta ja pelin kantamuotoa, jossa nappuloiden liikkeet poikkesivat huomattavasti nykyisistä, kutsuttiin shaturangaksi. Peli saapui Eurooppaan noin 1000 jKr. ja saavutti lukuisten muutosvaiheiden jälkeen nykyisen asunsa. Jo noista ajoista lähtien yksi kiinnostavimmista nappuloista on ollut ratsu. Ratsun liiketavan omalaatuisuus ja arvelut sen mahdollisesti sisältämästä numerosymboliikasta ovat olleet yhtenä syyinä hypoteeseille liittämään shakin rakenne ja alkuperäinen idea muinaisintialaisiin uskonnollisiin rituaaleihin liittyen lukuteoriaan ja alkulukuihin.

Ratsun liikkumistapaa laudalla voidaan kuvata myös polulla. Siinä liikeradat esitetään verkkoina, joissa solmut ovat pelilaudan ruutuja ja välit kuvaavat ratsujen siirtymistä ruuduilta toisille. Ratsun polku on eräs verkkoteorian alueeseen kuuluva klassinen ongelma ja erikoistapaus tunnetusta Hamiltonin polun ongelmasta.

Tätä ongelmaa voidaan yleistää esimerkiksi ruutujen määrää muuttamalla, mutta myös vaihtamalla ruutujen muotoa. On olemassa tarkalleen kolme erilaista tapaa ruuduttaa ääretön kaksiulotteinen tasopinta säännöllisillä monikulmioilla mistä seuraa, että tavanomaisen neliöruutuisen shakkilaudan lisäksi on mahdollista muodostaa myös tasasivuisista kolmioista tai kuusikulmioista koostuvia shakkilautoja, joilla ratsun liikkeet voidaan määrittää.

Miksi ratsu liikkuu pelilaudalla niin omituisesti? Kuvitellaan, että joku on ollut joskus muinaisina aikoina kehittämässä shakinomaista peliä neliöruutulaudalle. Myöhemmin luvussa 6 esiteltävässä päättelyketjussa päädytään 8x8-ruutuisella laudalla pelattavaan neljän joukkueen peliin. Tutkittaessa shakin historiaa löydetään useita mainintoja, missä eräät tutkijat ovat arvelleet, että shakin alkumuoto on todella saattanutkin olla neljän pelaajan peli.

Shakkipeli voidaan myös yleistää käyttämällä erimuotoisia - kolmi- tai kuusikulmaisia - ruutuja tai laajentamalla peliä kolmi- tai useampiulotteiseksi käyttäen kuutioita ja hyperkuutioita. Kaikissa näissä muunnelmissa voidaan selke-

ästi määrittää myös ratsun liikkeet. Paitsi, että pelilaudan koko ja muoto voidaan yleistää, niin samoin voidaan tehdä myös ratsun liikkumiselle. Tässä tutkielmassa tullaan käyttämään uusia käsitteitä *hyperratsu*, *hyperlähetti* ja niiden yhteisnimitystä *hyperupseeri* upseereille, joita ovat n-ulotteisilla erimuotoisilla shakkilaudoilla. Myös näiden liikeradat voidaan esittää verkkoina, joissa solmut ovat pelilaudan ruutuja ja välit kuvaavat upseerien siirtymistä ruuduilta toisille.

1.1 Tutkimuksen lähtökohtia

Tämän tutkimuksen taustahistoria juontaa jo kirjoittajan opiskeluaikaiseen yritykseen ratkoa kuuluisa karttojen neliväriongelma (4CC), joka nykyään kulkee nimellä karttojen neliväriteoreema (4CT). Tuohon salakavalaan ongelmaan lankeivat yli sadan vuoden aikana lukuisat tutkijat, mutta samalla tämä vuonna 1878 syntynyt ongelma vei verkkoteorian tutkimusta eteenpäin. Tämänkin kirjoittajalta aiheeseen tuhlautui muutama vuosi, mutta tuloksena syntyi sentään jotain, ei ratkaisua, mutta gradututkielma ja suuntautuminen verkkoteoriaan, erityisesti topologiseen verkkoteoriaan.

Verkkoteorian alueella työn lähtökohtana olivat alkujaan tutkimukset, jotka koskivat edellä mainittuja ratsun polkuja. Ratsun polkujen yleistysten myötä syntyivät säännöt ns. abstraktille shakille ja sen sääntöjen pohjalta kehittyi uusia shakkipelejä. Samoilla reunaehdoilla kuin normaali 64-ruutuisella laudalla pelattava kahden hengen shakki syntyi myös toinen peli, 87-ruutuisella kuusiokulmioista eli heksagoneista koostuvalla laudalla pelattava kolmen pelaajan shakki. Juuri pelaajien lukumäärän vuoksi peli tarjosi uusia mielenkiintoisia strategisia ulottuvuuksia, joilla ei ole suoraa yhteyttä nappuloiden liikkeisiin. Nappuloiden liikkeet puolestaan pyrkivät myötäilemään, abstraktin shakin idean pohjalta, mahdollisimman tarkoin tavanomaisen shakin sääntöjä. Tämä johti edelleen muihin, samoin periaattein rakennettuihin, erikoisshakkeihin, joita esitellään tutkielman 6. ja 7. luvussa.

1.1.1 Tutkimuksen tausta

Tutkimustyön vetovoima perustuu ihmisen sisälle rakennettuun luontaiseen uteliaisuuteen, tahtoon löytää alati uutta huolimatta siitä, että tietouden rajojen tavoittaminen on toivoton tehtävä, äärettömyys ja ikuisuus eivät tunne sääliä. Jotain kiehtovaa on kuitenkin ihmiskunnan tietämyksen laajentamisessa, tarve kävellä vielä yksi sfäärien kadunväli, käydä kurkistamassa vielä yhden nurkan taakse mitä sieltä mahtaakaan löytyä.

Uuden löydön tekeminen on tässä maailmassa todella vaikeaa. Jokainen ajatus, jokainen idea, jokainen teoria, löytyykin jonkun toisen tekemänä. Kun tieteellinen kulttuuri etenee tasolta toiselle, niin samalla syntyy edellytykset uusille löydöille ja keksinnöille. Ei ole kyse siitä löydetäänkö ne vaan kuka sen

tekee ja milloin? Aina kun uusi löydös tehdään, niin kulttuurimme nousee tiedonportailta hieman korkeammalle ja taas avautuvat mahdollisuudet aivan uudellaisille saavutuksille. Harvemmin kuitenkin saadaan kokonaisen askelman mittainen tulos, useimmiten tieteellinen työ on pienen pienien harmaiden kivienmurusten muuraamista yhdelle tasolle. Ja tavallista on, että useampi tutkija tarjoaa samalle paikalle omaa pikkuruista variaatiotaan uudesta murusta.

Tämän työn tekijän päätavoite aikanaan yliopistoon opiskelemaan tullessa oli tavoittaa jossain vaiheessa raja, jolla tietämys kohtaa tuntemattomuuden. Se antaisi mahdollisuuden astua uudelle alueelle ja näin ehkä viedä omalta pieneltä osaltaan tiedettä eteenpäin. Aikaa myöten kuitenkin havaitsee, että jopa tuo raja on niin sumea, että sen löytäminen on ollut enemmän kuin vaikeaa. Aina silloin tällöin on saavinaan hienonkin oivalluksen, jota kuvittelee ennen tekevänsä, mutta aikaa myöten kirjallisuuteen tutustuminen paljastaa karun oikean laidan. Tulos saattaakin olla julkaistu jo vuosisata sitten tai olla vasta vain muutaman vuoden vanha. Kaikissa näissä tilanteissa voi tietysti aina lohduttautua sillä että suunta tuntuu olevan oikea.

Jyväskylässä oli 90-luvulla seminaari, "Graphs and Knots", jossa vieraili verkko-teoriaan erikoistunut professori Frank Harary. Vierailun yhteydessä otettiin puheeksi muutama peliteoreettinen ongelma, joista sukeutui sähköpostitse tapahtunut kirjeenvaihto. Tuloksena oli todistusrakennelma eräälle toiselle, verkoteorian alueelle kuuluvalla, ongelmalle koskien shakkilaudalla ratsun polun yleistystä. Yleistys pohjautui klassiseen ongelmaan, jossa haetaan ratsulle Hamiltonin polkuja shakkilaudalla. Tälle ongelmalle esitti ensimmäisen tunnetun todistuksen Leonhard Euler 1700-luvulla. Uuden todistuksen rakentaminen sujui nopeasti ja pian oli jäljellä enää muutama erikoistapaus. Todistuksen ollessa tässä vaiheessa toinen tutkimusryhmä julkaisi kuitenkin oman todistuksensa samaan ongelmaan hieman eri tekniikalla ja näin työ jäi kesken.

Tutkimus tuotti kuitenkin sivutuloksen, sillä ratkaisuprosessin aikana mietittiin voisiko ongelmaa mahdollisesti yleistää? Tämä johti edelleen pohtimaan miksi ratsu itse asiassa liikkui erikoisella tavalla verrattuna muihin shakkinaappuloihin? Muutamia vuosia aiemmin tämän kirjoittaja oli eri lähtökohdistta pohtinut samaa ongelmaa ja päätynyt outoon johtopäätökseen, jonka mukaan shakki olisikin alkujaan ollut mahdollisesti neljän osapuolen peli. Päätelmä perustui ainoastaan ratsun liiketapaan ja pelilaudan kokoon, mutta varsin pian selvisi, että näin saattoi asiainlaita todella olla eräiden historiantutkijoiden mukaan (Benton & Benton 1977, Bidev 1986, Bird 2004, Bornet 2012).

Tästä seurasi jatkokehittäely, jonka seurauksena shakkipeli jakaantui "alkutekijöihin" ja tästä prosessista syntyivät säännöt edellä mainitulle abstraktille shakille. Seuraavassa vaiheessa peli koottiin uudelleen alkutekijöistään ottamalla kuitenkin samalla huomioon shakissa tapahtuneet sääntömuutokset sen vuosituhantisella matkalla Intiasta, Persian ja Arabian kautta Eurooppaan. Uudelleen kokoamisen tuloksena syntyi perinteisen shakin rinnalle kaksi uutta peliä. Näistä toinen oli kuitenkin abstraktin shakin säännöillä pelattavaksi kelpaamaton, kolmioruutuiselle laudalle sijoitettu, teoreettinen malli, mutta toinen, 87

kuusikulmiosta koostuvalla laudalla pelattava kolmen pelaajan shakki, osoitautui hyvin toimivaksi.

Koska näin sivutuotteena syntynyt peli tuntui kuitenkin mielenkiintoiselta, niin oli tarkoituksenmukaista tarkentaa sen sääntöjä yksityiskohtaisemmiksi. Taivoitteena oli kuitenkin pysyä ehdottoman uskollisena perinteisen shakin säännöille sillä tuo peli on vuosituhantisen historiansa aikana hioutunut niin täydelliseksi, että pienetkin muutokset aiheuttaisivat aikaa myöten ikäviä yllätyksiä. Joidenkin sääntöjen projisioiminen uuteen peliin oli helppoa, mutta aina silloin tällöin tuli eteen tilanne, jossa oli valittava sopivin sääntö useammasta vaihtoehdosta. Tällaisessa tilanteessa tuli avuksi edellä kolmioruutuiselle laudalle sijoitettu malli, jonka tutkiminen ja vertaaminen perinteiseen shakkiin kanssa nosti esille säännöistä sen vaihtoehtoon, jossa isomorfisuuden vaatimus parhaiten toteutui. Peli syntyi kahdessa viikossa ja nimettiin *kolmishakiksi*. Englanninkielisen nimen *Trichess*, antoi Frank Harary.

Seuraava vaihe oli selvittää, minkälaisia pelejä oli aiemmin kehitetty. Selvisi, että vastaavanlaisia pelejä oli tehty aiemminkin. Jo vuonna 1912 luonnosteli itävaltalainen insinööri *Siegmund Wellisch* alkeellisen kolmen pelaajan shakin 91-ruutuiselle kuusikulmiolaudalle. Alkeellisen siksi, että pelistä puuttuivat lähetit ja ratsut liikkuvat kuten kolmishakin lähetit. Itse asiassa nappuloiden liikkeet muistuttivat kolmishakin ensimmäisiä, päättelyvirheeseen perustuneita, versioita. Kuuluisin vastaavanlainen peli lienee kuitenkin ns. puolalainen shakki eli Glinskin shakki, jonka kehitti *Wladyslaw Glinski* 1936. Tuota peliä pelataan myös 91-ruutuisella kuusikulmiolaudalla, mutta peli ei ollut kolmen pelattava, vaan tarkoitettu kahdelle pelaajalle. Nappuloiden liikkuminen vastasi siinä kolmishakin nappuloiden liikkeitä. Tässä myös, heksagonaalisen shakin, nimellä kulkevassa pelissä on 80-luvulta lähtien pelattu myös maailmanmestaruuksista. (Gik & Määttänen 1988)

Näiden pelien esittelyn jälkeen on kuitenkin syytä täsmentää, että ns. mielikuvitusshakkeja on kautta aikain kehitelty tavaton määrä. Kolmishakki poikkesi näistä peleistä ennen kaikkea syntytapansa vuoksi, sitä ei koskaan kehitetty tarkoituksena synnyttää uusi peli, vaan se syntyi sivutuotteena tutkittaessa shakkipelin matemaattista rakennetta.

Ensimmäisiin testipeleihin, joiden pohjalta syntyi vielä yksi sääntömuutos, osallistui veljekset *Pasi* ja *Harri Halttunen* Laukaasta, sekä hieman myöhemmin hyvää kansallista tasoa oleva shakinpelaaja, *Risto Nevanlinna* Jyväskylästä, yhdessä tietojenkäsittelytieteiden laitoksen opettajan, *Heikki Saastamoisen*, kanssa. Näin peli oli valmis.

Sen jälkeen se siirtyi kolmen vuoden ajaksi pöytälaatikkoon, kunnes se vuonna 1995 tuli palkituksi *Tuli95* ideakilpailussa. Tämä johti pelin kaupallistamiseen, mutta sen ohessa myös jatkokehittelyyn, jonka seurauksena syntyi shakkipelin laajempi yleistys eli ns. universaalinen shakin malli.

Universaalin shakin malli, ja sen myötä tämä tutkielma, ei olisi kuitenkaan ehkä koskaan syntynyt ellei idean patentointiprosessiin olisi tullut sen alkuvaiheissa ongelmia. Jo aiemmin, idean kehitysvaiheessa, tekijä löysi edellä mainitun Wellichin kolmen pelaajan variaation, joka myös esitellään tuonnempänä tässä tutkimuksessa. Patentointivaiheessa kuitenkin ilmeni, että Dana Rewega niminen henkilö oli saanut Yhdysvalloissa, vain muutamaa kuukautta ennen kolmishakin syntyä, patentin (Rewega 1992) pelille, joka oli lähes samanlainen kuin kolmishakki. Tämä vei pohjan pelin suoralta patentoinnilta, ei kuitenkaan sen tuotekehittelyltä ja markkinoinnilta.

Mielenkiintoista Rewegan pelissä oli se, kuinka jotkin ideat syntyvät eri paikoissa samoihin aikoihin. Rewegan patentti oli hyväksytty vuoden 1992 lopussa ja kolmishakin idea syntyi toukokuussa 1993. Idean syntyprosessi on dokumentoitu sen tekijän ja Frank Hararyn väliseen sähköpostikirjeenvaihtoon (Liite 1.) Syntyprosessi on selvitetty seikkaperäisemmin kohdassa 6.1.1. Kuinka Rewega päätyi omaan malliinsa on edelleen arvoitus sillä tästä henkilöstä ei ole muuta merkintää kuin tämä sittemmin rauennut patentti.

Tämän jälkeen tutkittiin voisiko pelin kuitenkin patentoida jollain tavoin osittain. Ensin rakennettiin patentti koskien laudatonta shakkia (Kyppö 1997). Laudaton shakki pohjautui kolmishakin idean taustalla olleeseen malliin. Tämän jälkeen syntyi markkinoille tuotavaa peliä kehitettäessä vielä patentti laudan numerointijärjestelmästä (Kyppö 1999). Muita vastaavia kehitelmiä ei enää löytynyt, mutta pelin laajempi patentointi Suomen rajojen ulkopuolelle olisi vaatinut tuekseen myös selkeän markkinointisuunnitelman. Pelistä jätettiin kuitenkin kansainvälinen patenttihakemus, mutta sen eteenpäin viemiselle ei ollut järkeviä taloudellisia perusteita ilman selkeitä, tiedossa olevia, markkinoita. Kokemus oli mielenkiintoinen, koska se valaisi sitä kuinka vaikea ideoita on julkaista tietosuojatusti.

Laudattoman shakin kehittäminen liittyi kuitenkin osana universaalin shakin ideaan, joka lähti liikkeelle juuri kolmishakin patentointiongelmasta. Kolmishakki syntyi sivutuotteena kun oli tarkoitus ratkaista eräs shakkiin liittyvä verkkoteoreettinen ongelma. Tavallaan siis patentointiprosessin ongelmat johtivat siihen, että kehitystyö ei jäänyt kolmen pelaajan kolmishakkiin, vaan jatkui pelin syntyyn johtaneiden päättelyketjujen jatkokehittelyyn, mikä edelleen johti ideaan universaalista shakista. Ja lopulta vei tähän tutkimukseen.

1.1.2 Tutkimuksen tavoite

Tutkielman tavoitteena on rakentaa malli moniulotteisesta shakkiin pohjautuvasta pelistä, jota voitaisiin käyttää n-osapuolen pelitilanteiden simulointiin, analysointiin ja pelistrategioiden luontiin. Mallin tarkoitus on olla symmetrinen eli pelaajat ovat samanlaisessa asemassa toisiinsa nähden. Vaikka tutkimuksen tuloksia voidaan käyttää ensisijaisesti monen pelaajan strategiapelien tekoälyjen rakentamiseen ja ymmärtämiseen, voidaan niitä mahdollisesti soveltaa

myös muiden useamman osapuolen systemien ymmärtämiseen ja simuloimiseen.

Motivaationa tälle tavoitteelle on se, että peliteoriassa n -pelaajan asetelmille ei ole löydettävissä yksinkertaisia matemaattisia ratkaisumalleja. Tavoitteena onkin luoda matemaattinen malli, joka voisi toimia pohjana simulaatiomallille. Simulaatiomallin merkitys taas pohjautuu siihen, että peliteoriassa n -pelaajan asetelmille paras tulos haetaan erilaisilla simulointialgoritmeilla. Shakki sopii hyvin mallin pohjaksi, koska sillä on selkeät säännöt, se ei perustu satunnaisuuteen ja sillä on äärellinen määrä ratkaisuja. Tosin shakkipelin ratkaisujen määrä on niin suuri, että sitä ei ole voitu peleissä hyödyntää. Tässä tutkielmassa esitellään kuitenkin myös muutamia shakin pienoismuotoja, joiden kohdalla täydellinen päätöspuurakenne on mahdollista esittää. Useamman pelaajan shakkien kohdalla pelit on näissä säännöissä määritelty yhteistoiminnallisiksi eli niissä on mahdollista liittoutua, mikä osaltaan lisää ratkaisumallien monimutkaisuutta.

Shakki- ja tammipelejä pelaa kaksi ihmistä, joilla on rajallinen määrä strategioita kummallekin pelaajalle. Kumpikin pelaaja tietää toisen pelaajan siirrot, eikä sattumalle ole sijaa. Kun arvioidaan pelejä, joissa on enemmän kuin kaksi pelaajaa, yksi lukuarvo ei enää riitä ratkaisuksi. Yhteistoiminnallinen peli on sellainen, jossa viestintä ja liittoumat sallitaan pelaajien välillä. Koalitio on n pelaajan osajoukko, jossa pelaajien välillä on sitova sopimus. Sellaisille yhteistoimintapeleille, joille on annettu tietty koalition rakenne, \max^1 löytää tasapainonpisteen mahdollisena ratkaisuna pelille ja määrittelee näin strategian koalitiolle. (Luckhart & Irani 1986)

N -osapuolen pelit eroavat kahden hengen nollasummapeleistä siinä, että ne pysyvät määrittelemättömässä tilassa. Pääongelmana näyttääkin olevan selkeän määrittelyn muodostaminen tällaisten pelien ratkaisuille. Ponnistelut tähän suuntaan voidaan jakaa kahteen ryhmään, yhteistoiminnallisiin peleihin, joissa pelaajien odotetaan muodostavan liittoutumia ja ei-yhteistoiminnallisiin, joissa liittoumat on kielletty. (Gale 1953)

Tällä hetkellä ei tiedetä voidaanko Nashin tasapainoa laskea tehokkaasti. Kahden pelaajan pelien tunnetuissa algoritmeissa on pahimmillaan joko eksponentiaalinen laskuaika tai sitten ei tiedetä voidaanko ne laskea polynomiaalisessa ajassa. Kolmen pelaajan pelien kohdalla ongelma näyttää olevan vielä vaikeampi. Kun kahden pelaajan pelejä voidaan esittää lineaarisena vastavuoroisuusongelmana (LCP), niin kolmen pelaajan pelit ovat epälineaarisia vastavuoroisuusongelmia. Usean pelaajan pelien tasapainokohtaa hakevien algoritmien uskotaan myös olevan eksponentiaalisia. Nashin tasapainon laskeminen on ollut ongelmana keskeinen kiinnostuksen kohde tietojenkäsittelytieteen tiedeyh-

¹ Artikkelissa esitelty algoritmi

teisössä ja sitä on kutsuttu yhdeksi keskeisistä avoimeksi ongelmaksi laskennallisen monimutkaisuuden ongelmissa. (Lipton, Markakis & Mehta 2003)

N-osapuolen pelien ratkaisumalleilla on käyttöä usealla tieteen- ja yhteiskunnan alalla aina matematiikasta, taloustieteeseen, meteorologiaan ja politiikkaan. Yksi esimerkki on Kioton kokous, jota Dementieva kuvaa seuraavanlaisesti: Ilmastonmuutos ykkösenä sivilisaatiota uhkaavien globaalien ympäristöongelmien joukossa. Tässä tutkimuksessa käsitellään tosielämän yhteistoimintamalleja. Esimerkkitapauksessa on kolme pelaajaa: Euroopan Unioni, Venäjä ja uudet Euroopan Unionin jäsenmaat. (Dementieva 2004)

Tässä tutkimuksessa selvitetään onko shakkipeli tai jokin muu vastaava monimutkainen strategiapeli on yleistettävissä samoilla selkeillä säännöillä eri ulottuvuuksiin ja pinnan/tilan jaotustapoihin? Syynä tähän on se, että tasossa enintään kolme pelaajaa ja tilassa enintään neljä pelaajaa, on mahdollista sijoittaa symmetrisesti suhteessa toisiinsa eli siten, että jokainen pelaaja on samassa asemassa suhteessa muihin pelaajiin. Korkeammissa ulottuvuuksissa kuitenkin tilan jaotustavat ovat rajallisempia. Mikäli sopiva rakenne löytyy, niin tämän jälkeen on tavoitteena rakentaa malli, jonka pohjalta on mahdollista saada aikaan simuloiva peliohjelmisto. Tutkimus rajataan shakkiin, koska se on laajalti tunnettu peli, jolla on selkeät säännöt ja jota on myös perinteisessä muodossaan käytetty strategioiden luontiin politiikassa, sodassa, liike-elämässä ja muilla alueilla.

1.2 Tutkimuskysymykset

Tässä tutkimuksessa on tavoitteena luoda strategiapeli, jossa on n kpl toisiinsa nähden symmetrisesti sijoitunutta pelaajaa. *Symmetrialla* tarkoitetaan tässä sitä, että jokaisen pelaajan asema suhteessa toiseensa on sama. Tutkimuksen ydinkysymys voidaan esittää muodossa:

Onko mahdollista luoda strategiapeli, jossa n pelaajaa on sijoitettu toisiinsa nähden täysin symmetrisesti?

Riippumatta pelialustan muodosta ei perinteisellä 2-ulotteisella tasolla ole mahdollista sijoittaa kuin kaksi tai kolme pelaajaa symmetrisesti toisiinsa nähden. Symmetrisyydellä tarkoitetaan tässä pelaajien strategista asemaa toisiinsa nähden. Kaksi tai kolme pelaajaa voi asettaa tasossa siten, että ne ovat samassa strategisessa asemassa toisiinsa nähden. Neljälle tai useammalle pelaajalle se ei ole mahdollista. Vastakkaiset pisteet ovat toisiinsa eri asemassa kuin vierekkäiset riippumatta siitä millainen pelialusta valitaan.

Neljännän pelaajan mukaan ottaminen vaatii jo kolmiulotteisen pelialustan ja yleisesti ottaen n pelaajan pelialustan on oltava $n+1$ -ulotteinen. Neljä pistettä

on symmetrisesti kolmiulotteisessa tilassa, kolme tasolla ja yksi niiden yläpuolella. Alustan perusmuoto on n -simpleksi eli n -ulotteinen hypertetraedri. Ongelma syntyy kun suoritetaan pelialustan jaotus "ruutuihin" sillä tilan tasainen palastelu (tiling) on tasoa korkeammassa ulottuvuudessa mahdollista ainoastaan hyperkuutioilla (honeycombs), jotka ovat erimuotoisia kuin hypertetraedrit. Tämä tarkoittaa sitä, että hypertetraedrejä käyttämällä saadaan haettu pelilaudan muoto, mutta toimivaan laudan sisärakenteeseen tarvitaan puolestaan hyperkuutioita. Näiden kahden mallin yhteensovittaminen on ongelmallista.

Toisena tavoitteena on rakentaa pelille shakkiin perustuvat nappuloiden liikeradat, koska tätä peliä on laajasti käytetty strategioiden tutkimiseen ja sillä on säännöt, jotka ovat hioutuneet toimiviksi parin tuhannen vuoden aikana.

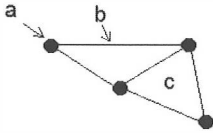
Deep Blue oli ensimmäinen shakkitietokone, joka voitti hallitsevan maailmanmestarin sääntöjen mukaisessa ottelussa. Järjestelmän menestystä edesauttoi lukuisten eri tekijöiden hyödyntäminen tietokannasta, joka käsitti 700 000 suurmestarien välistä peliä. Deep Blue otti erilaisen lähestymistavan käyttäessään tietouttaan eri avaustekniikoista. Sen sijaan, että se olisi keskittynyt yksityiskohtaiseen analyysiin muutamasta valitusta asemasta, se loi lisätietokannan, jota kutsuttiin "laajennetuksi kirjaksi". Tämä laajennetun kirjan menetelmä tarjosi järjestelmälle mahdollisuuden aiempaa suurmestarikokemusta useisiin miljooniin avausasetelmiin pelitietokannassaan. Deep Blue käyttää suurmestaripeleistä poimittua tietoutta parantaakseen suoritustaan pelitilanteissa. Laajennetun kirjan tekniikka yhdistettynä inhimillisten päätösten poikkeamiin antaa lisäarvoa ei-shakkimaisten alueiden asiantuntijapäätösten laajoihin tietokantoihin, kuten muihin peleihin, lääketieteellisiin diagnooseihin, osakemarkkinoille. Näin erityisesti kun on olemassa sopivan samanlainen mittari eri tilanteisiin annettuna alueella. (Campbell, Hoane & Hsu 2002)

Aiemmassa tutkimuksessa olemme jo sovittaneet shakin säännöt yksi yhteen kolmen pelaajan malliin mikä tarjoaa hyvän lähtökohdan jatkaa n -pelaajan malliin. Edellä mainittu Deep Bluen laajennetun kirjan tekniikka ei olisi kuitenkaan sellaiseen malliin suoraan istutettavissa, koska vastaavaa tietokantaa turnauksista ei ole. Mutta sääntöjen yhteneväisyyden vuoksi samoja menetelmiä voitaneen käyttää osittain aliohjelmassa. Mikäli symmetrinen malli on toimiva, niin sitä voidaan jatkossa muuntaa erilaisiin reaali maailman peliasetelmiin esimerkiksi pelaajien vahvuuksia muuttamalla.

1.3 Keskeiset käsitteet

Peliteoria, verkkoteoria, shakki, strategiapelit, kombinatoriikka, aritmeettinen kolmio, pintojen ja tilojen palastelu, hyperkuutiot, simpleksi. Luonnollisesti yksi keskeisimmistä käsitteistä on verkko eli graafi. Verkkoon liittyvät kolme pe-

ruskäsittettä, solmu (a), väli (b) ja alue (c), ilmenevät kuviosta 1. Kirjallisuudessa solmua kutsutaan myös pisteeksi ja väliä kaareksi.



KUVIO 1 Verkon eli graafin perusosat

Muita tässä tutkielmassa mainittuja yksinkertaisia peruskäsitteitä ovat *solmun asteluku*, *alueen asteluku*, *tasoverkko*, *duaaliverkko* ja *suunnattu verkko eli digraafi*. Asteluvusta käytetään merkintää *deg*, solmun asteluku, $\text{deg}(v)$, on siihen liittyvien välien määrä ja alueen asteluku, $\text{deg}(f)$, on aluetta ympäröivien välien määrä. Esimerkiksi kuviosta 1 nähdään, että $\text{deg}(a) = 2$ ja $\text{deg}(c) = 3$.

Suunnattu verkko, eli digraafi, on verkko, jonka väleille on määritelty suunnat. (Gross et al. 2004) Suunnat esitetään tavallisesti nuolina.

Tasoverkko on verkko, joka voidaan piirtää kaksiulotteiselle tasolle siten, että mitkään sen välit eivät leikkaa toisiaan. Tätä kutsutaan verkon *upottamiseksi* (embed) tasolle. Tasoverkolle voidaan piirtää duaaliverkko. Duaaliverkko saadaan kun jokaiselle alueelle, mukaan lukien verkon ulkopuolinen alue, asetetaan solmu ja sen jälkeen solmut yhdistetään uusilla väleillä siten, että jokainen verkon G jokainen väli on ylitetty tasan yhden kerran.

Tarkemmin määriteltynä verkko on upotettu pinnalle S jos se on piirretty pinnalle S siten, että yksikään väli leikkaa tooistaan. Verkko on tasoverkko jos se voidaan upottaa tasolle. Tasoverkolla on myös duaaliverkko. Annetulle tasoverkolla G muodostetaan sen geometrinen duaali G^* siten, että sijoitetaan solmu jokaiselle G :n alueelle, mukaan lukien ulkopuolinen alue. Näitä alueita erotettava väli on x leikataan kummankin alueen solmuja yhdistävällä välillä x^* . Tuloksena on aina *epäverkko* eli *pseudoverkko*. 2-yhtenäisellä tasoverkolla on duaalina aina moniverkko, kun taas 3-yhtenäisen verkon duaali on aina verkko. Moniverkko on verkko, jossa ei ole silmukoita, mutta useampi väli voi yhdistää kaksi solmua. Jos silmukat ja monivälit on sallittu, niin kyseessä on pseudoverkko. Silmukka on väli, joka yhdistää solmun itseensä. Verkon G yhtenäisyysluku $\kappa(G)$ on minimimäärä solmuja, joiden poistaminen verkosta johtaa epäyhtenäiseen verkkoon. Verkko G on n -yhtenäinen $\kappa(G) \geq n$. (Harary 1969)

1.4 Tulokset

Tutkimuksen päätulos on *symmetrinen n -pelaajan strategiapelimalli*, joka esitellään 8. kappaleessa. Eri kappaleissa on kuitenkin lukuisia sivutuloksia. Kappaleessa 4 esitetään *teoria kuuluisan Faistoksen kiekon alkuperästä* Kreetalla. Samassa kappaleessa 4 esitellään myös *hypoteettinen neljän pelaajan tafl peli fjögratafl*. Kappale 6

sisältää joitain tekijän aiempia ideoita ja innovaatioita mukaan lukien *kolmishakki*, *bridgeshakki* ja *laudaton shakki*. Myös kaikki pelimallit, mukaan lukien suuri shakki ja neliulotteinen shakki kappaleessa 7 ovat tekijän omia. Jotkin tämän kappaleen rakennelmat on julkaistu aiemmin tai patentoitu. Kappaleessa 8 on päätulos, mutta sen lisäksi myös pieni huomio koskien *Pascalin säännön yleistystä*. Kappale 9 sisältää joitakin spin-off tuloksia jatkotutkimusta ajatellen sisältäen *Euler-Poincarén karakteristikan yleistyksen*, sekä joitain *Fibonacci sarjojen yleistyksiä*, *pienen shakkipelien strategiaverkkoja*, *Pascalin monipintojen virittäviä kehiiä*, sekä joitain *huomioita parittomista ja parillisista euklidisista avaruuksista* sisältäen Eulerin karakteristikan, Piin ja *kultaisen leikkauksen yleistyksen*.

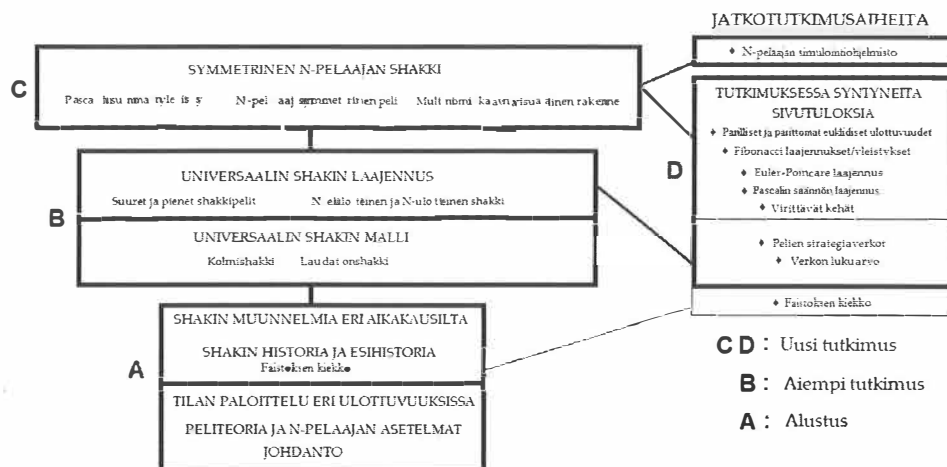
1.5 Tutkielman rakenne

Tutkielma jakaantuu rakenteeltaan neljään pääjaksoon, joissa edetään yleisestä taustateoriasta omien aiempien tulosten kautta varsinaiseen tutkimusongelmaan, jolle esitetään ratkaisu. Tutkielmaan loppuun on, ennen johtopäätösosaa lisätty yksi luku loppuhuomautuksille, johon on kerätty työn aikana syntyneitä sivutuloksia. Ne ovat myös mahdollisia jatkotutkimusaiheita.

Luvuissa 2 ja 3 annetaan työkalut mallin rakentamiseen. Luvuissa 4 ja 5 kerrotaan lautapeliin ja shakkipelien lukuisten muunnelmien historiaa antamaan taustaa tälle tutkimukselle. Luvuissa 6 ja 7 selvitetään tämän tekijän aikaisempaa tutkimusta tällä alueella ja luvussa 8 esitetään haettu ratkaisumalli. Lyheen 9. lisälukuun on kerätty tutkimuksen aikana syntyneet sivutulokset, jotka toimivat samalla tulevina jatkotutkimusaiheina.

Luvuittain edellä esitetty rakenne on seuraavanlainen. Luvut 2, 3, ja 4 luovat työlle pohjaa eli sen perustuksen, jonka päälle tutkimus rakentuu. Luvussa 2, *Peliteoria ja n-pelaajan asetelmat*, selvitetään sitä problematiikkaa ja motiiveja, jotka johtivat aiheen tutkimukseen. Luvussa 3, *Tilan paloittelu eri ulottuvuuksissa*, käsitellään taustateoriaa, jota 7. luvussa tarvitaan mallin rakentamiseen. Luvussa 4, *Shakin historia ja esihistoria*, selvitetään lautapeliin shakkiin johtavaa esihistoriaa ja luvussa 5, *Shakin muunnelmia myöhemmiltä aikakausilta*, erilaisia shakin variaatioita eri aikakausilta. Luvuista 4 ja 5 onkin sitten suora jatkumo luvuissa 6, 7 ja 8 tehtyihin pelikehitelmiin. Luku 6, *Universaalien shakin malli*, käsittelee omia aikaisempia julkaistuja tuloksia ja luku 7, *Universaalien shakin laajennus*, käsittelee omia aiempia julkaisemattomia tuloksia. Luvussa 8, *Symmetrinen N-pelaajan shakki*, esitellään haettu malli ja tutkimusongelman ratkaisu. Viimeistä edellisessä luvussa 9, *Johtopäätelmät*, käsitellään joitakin erillisiä tutkimuksen aikana syntyneitä sivutuloksia ja niiden mahdollista käyttöä jatkotutkimukseen. Luvussa 10, *Yhteenveto*, tarkastellaan vielä lyhyesti tutkimusta kokonaisuutena ja päätuloksen jatkotutkimusmahdollisuuksia.

Tiivistetysti voisi sanoa, että 2. ja 3. luku on se maaperä, josta tutkimus kasvaa, luvut 4 ja 5 muodostavat sen juuret, 6. ja 7. luku työn rungon, 8. luku sen latvuksen ja 9. luku puun muun oksiston.



KUVIO 2 Työn rakenne

Työn rakenne ja sen eri lukujen liittyminen toisiinsa on esitetty graafisesti kuviossa 2. Lukujen yhteyden on laatikoiden sisälle lisätty omia tuloksia. Sivutuloksia käsittelevää lukua esittävään laatikkoon on lisäksi yhdysviivoin näytetty missä osassa työtä sivutulokset ovat syntyneet.

1.6 Työn suhde muihin julkaisuihin

Tämä tutkielma on monografia, jonka ongelman ratkaisua pohjustavasta sisällöstä osa pohjautuu tekijän aiempiin julkaisuihin tai patentteihin. Tutkielma liittyy löyhästi pikkupatentteihin ja tuotesuojoihin *Peli erityisesti shakkipeli (Game especially chess)* ja *Pelilauta kolmea pelaajaa varten (The numbering system of Game board)* (Kyppö 1997, Kyppö 1999). Työllä on liittymäpintoja myös tekijän lisensointityöhön (Kyppö 1994), mutta vain peruskäsitteiden esittelyn yhteydessä. Osa lisensointityöstä sisältyy lukuun 6, joka käsittelee tilan paloittelua eri ulottuvuuksissa.

2 PELITEORIA JA N-PELAAJAN ASETELMAT

Peliteoria on matemaattinen teoria, joka käsittelee yksilöiden välisiä vuorovaikutuksia yleensä konfliktitilanteissa. Kullakin yksilöllä on erilaisia valintamahdollisuuksia ja yleensä pelin lopputulema riippuu pelaajien valinnoista. Tämä puolestaan määrittelee pelaajien palkkiot tai pisteet. Jokaisella pelaajalla on näin ollen jonkinlainen vaikutus pelin lopputulokseen ja siihen palkkioon, jonka hän saa. Keskeisin piirre kaikkein kiinnostavimmissa peleissä on se, että paras yksittäisen pelaajan valintavaihtoehto on riippuvainen muiden pelaajien tekemistä valinnoista. Tämä on myös asia, joka erottaa peliteorian optimointiteoriasta. (Broom & Rychtar 2013)

Jokainen joutuu tekemään päätöksiä jatkuvasti ja päätösten on perustuttava johonkin. Päätöksenteko epävarmuuden vallitessa on matemaattisesta näkökulmasta monimutkainen prosessi, jonka ratkomiseen on luotu valtaisa määrä erilaisia menetelmiä ja teorioita. Kaikkia näitä yhdistää se, että kyse on yhden osapuolen päätöksenteosta monimutkaisessa ympäristössä, jonka muut osapuolet ovat kuitenkin ainoastaan muuttujia, jotka eivät itse tee päätöksiä. Tässä ympäristössä päätöksentekijä pyrkii vain löytämään optimaalisen ratkaisun päätökselleen.

Tilanne muuttuu huomattavasti, mikäli päätöksentekijän on huomioitava myös toisen tai jopa useamman muun päätöksentekijän ratkaisut. Tällaisessa tilanteessa siirrytään peliteorian alueelle.

Peliteoria on matematiikan osa-alue, jolla on liittymäkohtia myös yhteiskunta- ja käyttäytymistieteisiin. Peliteoria tutkii kahden tai useamman osapuolen välistä vuorovaikutusta ja päätöksentekoa tilanteissa, joissa heidän etunsa ja tavoitteensa ovat yleensä vastakkaisia, mutta usein myös yhdensuuntaisia joko osittain tai täysin, tai useamman osapuolen peleissä ristiriitaisia tai yhteisiä vain joidenkin osapuolten kesken.

Päätöksenteon tukena käytettävä peliteoria muodostaa laajan operaatiotutkimuksen osa-alueen. Peliteorian ero operaatiotutkimuksen optimointiongelmiin on siinä, että tarkasteltavana on kaksi tai useampi päätöksentekijä, joilla on toisilleen vastakkaiset etunäkökohdat. Tarkastellaan seuraavaksi muutamia peliteorian perusasetelmia.

2.1 Peliteorian taustahistoriaa

Pelejä on pelattu ihmiskunnan aamuhämäristä, mutta kuinka pelien analysointi alkoi teoreettisesti?

Babylonialainen Talmud on muinainen lakikokoelma, joka tehtiin ensimmäisten viiden vuosisadan aikana jKr. Yksi kokoelmassa käsitelty aihe on omaisuuden jako-ongelma avioliitossa. Miehellä on kolme vaimoa, jotka saavat miehen kuoleman jälkeen omaisuutta 100, 200 ja 300 yksikköä tässä järjestyksessä. Talmud antaa keskenään ristiriitaisia suosituksia. Jos miehen kuoleman jälkeen hänen jaettava omaisuutensa on vain 100 yksikköä, niin Talmud suosittelee tasajakoa. Kuitenkin jos omaisuuden arvo on 300 yksikköä, niin Talmud suosittelee sen jakamista suhteessa 50, 100 ja 150 yksikköä, mutta omaisuuden ollessa 200 yksikköä onkin jakosuhde toinen eli 50, 75 ja 75 yksikköä. Mitään perusteluja Talmud ei tarjoa näille ratkaisuille ja mysteeri on mietityttänyt tutkijoita jo pari tuhatta vuotta. Vuonna 1985 havaittiin, että Talmud ennakoii jo nykyaikaisia yhteistoimintapelejä. Jokainen ratkaisu korreloi määritellyn pelin "tuman" (nucleolus) kanssa (Walker 1995). *Nucleolus-menetelmä* on yksi peliteorian menetelmiä, jonka selvittämiseen ei tässä yhteydessä ole kuitenkaan aihetta puuttua (Balog et al. 2012).

Shakin kaltaisia pelejä, jossa pelaajat tekevät siirtoja vuorotellen, mutta joissa on äärellinen määrä siirtovaihtoehtoja, on määritelty paras lopputulos peliin. Shakin kohdalla se on tavallisesti patti eli tasapeli. Mikäli pelaaja on riittävän älykäs, niin hän pystyy saavuttamaan parhaan pelin. Tämä on muotoiltu peliteorian alkuperäisessä Ernst Zermelon teoriassa. Zermelo (1913) määritteli, shakissa voittaa joko Musta tai Valkea tai tulos on patti. (Broom & Rychtar 2013).

Pokeri on myös strateginen peli, mutta siinä peliin vaikuttaa korttien sekoittaminen ja näin ollen myös sattuma. Shakki eroaa korttipelieistä siinä, että pelaaja valitsee kaikki siirrot ilman ulkopuolista sattumatekijää. Saksalainen Zermelo rajoittikin teoriansa vain puhtaisiin strategiapeleihin. Zermelon teoria shakista hämmensi aluksi sillä toistoraportit olivat usein epämääräisiä ja jopa ristiriitaisia. Näytti kuitenkin siltä, että hän yritti todistaa, että jos Valkoinen saa nappulansa edulliseen asemaan, niin peli olisi mahdollista lopettaa vähemmällä siirroilla kuin on shakkilaudan mahdollisten asemien lukumäärä. Edullista asemaa Zermelo kutsui "voittavaksi konfiguraatioksi", mikä tarkoitti tilannetta jossa valkoinen voittaa varmasti, mikäli ei tee typeriä siirtoja. Väitteensä Zermelo todisti käyttäen joukko-oppia. (Siegfried 2006)

Nykyaikainen peliteoria syntyi luultavasti vuonna 1944, kun John von Neumann ja Oskar Morgenstern julkaisivat teoksensa *Pelien ja taloudellisen käyttäytymisen teoria*. Tämä kirja oli suurelta osalta perustana modernille peliteorialla, käsittäen myös yhteistoiminnalliset pelit. Jo ennen tätä Emile Bore esitti vuonna

1920 selkeän selvityksen kahden pelaajan pelien minimax ratkaisusta. Klassinen vangin dilemma peli ilmestyi vuonna 1950 Melvin Dresherin ja Merrill Floodin toimesta. Pelin nimen ja siihen liittyvä tarinan keksi kuitenkin Albert W. Tucker vasta vuonna 1980. (Broom & Rychtar 2013).

2.2 Kahden pelaajan pelit

Kahden pelaajan pelejä pelaa ainoastaan kaksi pelaajaa. Enenn kuin menemme n-pelaajan peleihin, niin katsotaan muutamia klassisia kahden pelaajan pelejä.

Kahden pelaajan pelien suosio ei liity suoraan niiden suhteelliseen yksinkertaisuuteen, vaan myös niiden laajaan sovellettavuuteen. (Broom & Rychtar 2013)

2.2.1 Kahden hengen nollasummapeli

Kahden hengen nollasummapeli on yksinkertaisin pelimalli. John von Neumann ja Oscar Morgenstern kehittivät teorian siitä, kuinka nollasummapeliä tulisi pelata. Pelaajia on vain kaksi, toinen on rivipelaaja ja toinen on sarakepelaaja. Kummallakin on valittavanaan useita strategioita, joista rivipelaajalla on strategiat $1, \dots, m$ ja sarakepelaajalla strategiat $1, \dots, n$. Kunkin strategian käyttö tuo suhteessa toisen pelaajan käyttämään strategiaan jonkin palkkion. Nollasumma-peli saa nimensä siitä, että näiden palkkioiden summa on nolla kaikilla strategioilla. (Winston 1994) Matriisissa nollasummaisuus tarkoittaa sitä että palkkiot kuvaavat rivipelaajan voittoja ja sarakepelaaja häviää vastaavan summan. Kuviossa 3 on esimerkki nollasummapelin palkkiomatriisista. Tässä rivipelaajalla x on viisi strategiaa ja sarakepelaaja y :llä kuusi strategiaa.

		Pelaaja Y					Riviminimi
		1	2	3	4	5	
Pelaaja X	1	5	2	8	5	3	2
	2	6	2	7	2	2	2
	3	2	7	5	0	4	0
	4	5	3	7	1	3	1
	5	4	1	3	3	2	1
	6	8	9	6	6	9	6
Sarakemaksimi		8	9	8	6	9	

KUVIO 3 Nollasummapelin voittomatriisi

Ratkaisuun nollasummapelissä päästään hakemalla ensin rivipelaajan jokaiselta strategiariviltä pienin palkkio, joka merkitään viimeiseen sarakkeeseen nimellä riviminimi. Sen jälkeen - vaikka järjestyksellä ei tässä olekaan merkitystä - haetaan sarakepelaajan palkkiosarakkeilta kustakin suurin arvo ja sijoitetaan se riville sarakemaksimi. Tämän jälkeen rivipelaaja valitsee riviminimisarakkeelta

suurimman arvon eli riviminimin maksimin ja valitsee sen osoittaman strategian. Esimerkkikuvassa (kuvio 3) rivipelaaja valitsee 6. strategian. Rivipelaaja valitsee siis kustakin strategiasta sen palkkion, minkä asianomaisella strategialla vähintäänkin voittaa ja sijoittaa sen kyseisen strategiarivin kohdalle sarakkeeseen matriisin oikealle puolelle. Tältä sarakkeelta sarakepelaaja sitten valitsee strategioista sen, missä tämä voitto on suurin. Seuraavaksi sarakepelaaja hakee vastaavasti sarakemaksimirivin minimiarvon ja valitsee sen strategiakseen. Näin koska sarakepelaajan arvot ovat tappioita, jotka hän pyrkii minimoimaan. Hän siis valitsee kunkin strategian vaihtoehdoista huonoimman ja lopuksi sen strategian, missä huonoin vaihtoehto on vähiten huono. Tässä tapauksessa valituksi tulee 4. strategia. Kun kaikki palkkiot ovat tässä esimerkissä positiivisia, niin sarakepelaaja näyttää aina häviävän enemmän tai vähemmän, esimerkin lukuarvot ovat kuitenkin suhteutettuja. Matriisi näyttäisi mielekkäämmältä, mikäli jokaisesta palkkiosta vähennettäisiin esimerkiksi viisi, jolloin osa luvuista olisi negatiivisia. Tuolloin negatiiviset luvut olisivat rivipelaajan tappioita, mutta sarakepelaajan voittoja.

Mikäli riviminimin maksimi saa saman arvon kuin sarakemaksimin minimi eli on voimassa $\min\{\text{sarakemaksimi}\} = \max\{\text{riviminimi}\}$, niin pelillä sanotaan olevan *satulapiste*. Satulapisteessä on samalla pelin arvo rivipelaajalle. Satulapisteen puuttuessa ei pelin arvoa voi laskea. Kuvion 2 esimerkissä on satulapiste sillä $\min\{8,9,8,6,9\} = 6 = \max\{2,2,0,1,1,6\}$. Satulapistettä voidaan ajatella myös pelin tasapainopisteenä (*equilibrium point*) eli tilanteena, jossa kummankaan pelaajan ei kannata yksipuolisesti vaihtaa strategiaansa ilman, että tulos huonontuu. (Winston 1994)

Jos pienennetään X:n palkkiota pisteessä $(X,Y) = (\text{strategia 6, strategia 3})$ yhdellä eli viiteen, niin tilanne muuttuu siten, että pelaajat valitsevat edelleen samat strategiat (kuvio 4). Satulapiste kuitenkin katoaa eli $\min\{8,9,8,6,9\} = 6 \neq 5 = \max\{2,2,0,1,1,5\}$.

	1	2	3	4	5	Riviminimi
1	5	2	8	5	3	2
2	6	2	7	2	2	2
3	2	7	5	0	4	0
4	5	3	7	1	3	1
5	4	1	3	3	2	1
6	8	9	5	6	9	5
Sarake maksimi	8	9	8	6	9	

KUVIO 4 Esimerkki nollasummapelistä, jossa ei ole satulapistettä

Tällaisessa tilanteessa voitaisiin lähteä myös spekuloidaan kuinka pelaajat käyttäytyisivät jos arvaisivat minkä strategian toinen valitsee. Tällainen "ketjuarvailu" ("jos X tietää Y:n tietävän") asettuu kuitenkin jo muutaman askeleen

jälkeen luuppiin, jonka ulkopuolelle jääviä strategioita ei kumpainenkaan pelaaja valitsisi. Tilanne, jossa kahden hengen nollasummapelillä ei ole satulapistettä, ratkaistaan eliminoimalla ensin ns. dominoivia strategioita ja lopuksi ratkaisemalla tehtävä joko graafisesti tai LP-ongelmana.

On myös sen luonteisia pelejä, joissa ei ole mahdollista löytää sen enempää sarakemaksimin minimiä kuin riviminimin maksimiakaan koska kumpiakin on useita kappaleita. Tyypillinen esimerkki tällaisesta pelistä on lasten suosima ns. Kivi-paperi-sakset-peli, jossa pelaajat pitävät käsiään piilossa selän takana ja tuovat ne sitten näkyville täsmälleen yhtä aikaa. Kummallakin pelaajalla on valittavanaan kolme strategiaa, jotka esitetään käden asennolla (paperi: kämmen auki, sakset: kaksi sormea ojossa, kivi: käsi nyrkissä). Palkkiomatriisi saadaan muodostettua kun tiedetään että kivi rikkoo sakset, joka leikkaa paperin, joka voi kääriä sisäänsä kiven. Tämän seurauksena palkkiomatriisi näyttää sellaiselta kuin kuviossa 5.

	k	p	s	min
kivi	0	-1	+1	-1
paperi	+1	0	-1	-1
sakset	-1	+1	0	-1
max	+1	+1	+1	

KUVIO 5 Esimerkki kivi-, paperi-, sakset- pelistä

Tehtävä voidaan ratkaista lineaarisena optimointiongelmana eli LP-ongelmana, jolloin jokainen strategia saa painoarvon $1/3$. Pelin arvoksi saadaan nolla. Pelitilanteiden ratkaisemiseen LP-ongelmana ei tässä tutkielman alustuksessa ole kuitenkaan aiheellista perehtyä syvemmin, koska sillä ei ole merkitystä nyt käsitellä olevan tutkimusongelman kanssa.

2.2.2 Kahden hengen vakiosummapeli

Kahden hengen vakiosummapelin periaate on sama kuin nollasummapelin, mutta palkkioiden summa ei välttämättä ole nolla vaan vakio c . Vakiosummapelissä siis pelaajien saaman voiton summa on jokin vakio c , kun se nollasummapelissä oli aina nolla. Toisin sanoen nollasummapeli on vakiosummapeli, jossa $c = 0$. Palkkiot ja strategiat esitetään samoin kuin nollasummapelissä palkkiomatriisin avulla. Tässäkin matriisissa palkkiot kuvaavat rivipelaajan voittoja ja sarakepelaaja häviää vastaavan summan. Mikäli kaikki arvot ovat positiivisia, niin sarakepelaaja aina häviää enemmän tai vähemmän.

Myös pelin ratkaisutapa on samanlainen kuin edellä nollasummapelissä eli haetaan jokaiselta riviltä riviminimi ja jokaiselta sarakeelta sarakemaksimi. Sitten haetaan riviminimien maksimi ja vastaavasti sarakemaksimien minimi. Nämä

tulokset antavat optimaalisen strategian kumpaisellekin pelaajalle. Valitaan se vaihtoehto jossa on "paras huono tulos". Perusoletus pelissä on että pelataan aina parhaalla mahdollisella tavalla ja vastustaja tuntee tämän strategian. Kuviossa 6 on esimerkki vakiosummapelistä.

		Sarakepelaaja				Min
		A	B	C	D	
Rivipelaaja	A	720	250	480	440	250
	B	670	550	600	630	550
	C	370	270	330	450	270
	D	560	510	590	610	510
Max		720	550	600	630	

KUVIO 6 Esimerkki vakiosummapelistä

Tässä peliesimerkissä kaksi kuvitteellista poliitikkoa, kuvassa sarakepelaaja ja rivipelaaja, kamppailee miljoonan äänestäjän äänistä. Pelimatriisissa olevat luvut on kerrottava tuhannella eli esimerkiksi 720 tarkoittaa 720 000 äänestäjää. Luvut perustuvat vaaleja ennen tehtyihin gallup-kyselyihin. Vaalikamppailussa on esillä neljä mahdollisesti painotettavaa vaaliteemaa, jollaisen valinta on samalla ehdokkaan vaalistrategia. Kummankin ehdokkaan on mietittävä painotus- ja kampanjansa strategiaan A, B, C tai D.

Matriisiin luvut tarkoittavat nimenomaan rivipelaajan äänestäjiä. Jos kumpikin pelaaja valitsee strategian A, niin sen seurauksena rivipelaaja saa taakseen 720 000 äänestäjää ja sarakepelaaja $1\,000\,000 - 720\,000 = 280\,000$ äänestäjää. Kumpikin pelaaja pyrkii hakemaan nollasummapelin tavoin strategian, jossa pienin mahdollinen voitto on suurin. Niinpä rivipelaaja listaa kullakin strategialla huonoimman mahdollisen tuloksen, joka on kuvan matriisissa merkitty oikeanpuoleisimpaan Min -sarakeeseen. Näistä rivipelaaja valitsee suurimman eli tässä tapauksessa strategian B, joka on 550 000 äänestäjää. Sarakepelaaja toimii tahollaan samoin, mutta päinvastoin. Koska sarakepelaajan ovat matriisissa sitä huonompia mitä suurempia ne ovat, valitsee hän kultakin sarakeelta suurimman arvon, joka on merkitty matriisin alimmalle Max -riville. Näistä luvuista sarakepelaaja valitsee pienimmän, joka on 550 000 äänestäjää strategian B kohdalla. Sarakepelaajan kohdalla tämä tarkoittaa sitä, että hän saa $1\,000\,000 - 550\,000 = 450\,000$ äänestäjää. Koska rivipelaaja siis valitsee strategian B, kuten myös sarakepelaaja ja rivipelaaja edustava poliitikko voittaa vaalit äänin 550 000 vastaan 450 000. Toki sarakepelaaja olisi voinut valita myös jonkin muun strategian, mutta kaikissa niissä tappio olisi ollut suurempi tilanteessa jossa rivipelaaja valitsee strategian B. Jos taas rivipelaaja olisi valinnut jonkin muun strategian tilanteessa jossa sarakepelaaja valitsee strategian B, niin hän olisi hävinnyt niistä kahdessa eli A:ssa ja C:ssä ja voittanut D:ssä, mutta vähemmän kuin valitsemassaan strategiassa. Lisäksi tässä pelissä Max (Riviminimi) = 550 = Min (Sarakemaksimi) eli pelissä oli myös satulapiste ja 550 oli näin samalla pelin arvo rivipelaajalle. (Winston 1994)

2.2.3 Kahden hengen ei-vakiosummapelit

Useimmat liike-elämän pelimallit eivät ole vakiosummapelejä, vaan ei-vakiosummapelejä, koska liike-elämässä osapuolet ovat harvemmin täydessä konfliktissa toisiaan vastaan (Winston 1994).

Kahden hengen ei-vakiosummapelit voidaan jakaa ns. yhteistoiminnallisiin (cooperative) ja ei-yhteistoiminnallisiin (non-cooperative) peleihin. Tarkastellaan esimerkkinä pientä ei-yhteistoiminnallista peliä eli peliä jossa pelaajat eivät saa suunnitella strategiaansa yhdessä sekä mitä tapahtuu kun pelistä tulee yhteistoiminnallinen. Palkkiomatriisi poikkeaa nollasummapelin palkkiomatriisista s.e. valittujen strategioiden tuottamat palkkiot ilmoitetaan lukuparina (x,y) , missä vasemmanpuoleinen luku antaa rivipelaajan palkkion ja oikeanpuoleinen sarakepelaajan palkkion. Koska annetut luvut ovat nyt voittoja molemmille pelaajille, niin sen seurauksena lasketaan myös sarakepelaajalle maksimipalkkio minimipalkkioiden joukosta eikä päinvastoin.

Otetaan jälleen esimerkin kohteeksi poliitikot. Kaksi eri puolueen ministeriä, A ja B, taistelevat vallasta hallituksen sisällä ja kummallakin on kaksi päästrategiaa: oman vallan lisääminen likaisella taustapelillä toisen kustannuksella (X) tai konsensus vastapuolen kanssa (Y). Kummankin strategian tuotto on arvioitu siten, että kaikkien valtaoikeuksien kerääminen itselle antaa viisi pistettä lisääntyneen vallan tuomina etuina, mutta samalla pyrkimys siihen tuo kaksi miinus-pistettä ryvettyneen poliittisen maineen ja todennäköisen hallituksen hajoamisen tuomina ikävinä seurauksina. Vastaavasti oman valta-aseman menetyks tuo kolme miinus-pistettä. Konsensus vastapuolen kanssa säilyttää hallitusrauhan eikä tuo sen enempää pisteitä kuin aiheuta pistemenetyksiäkään.

Näillä tiedoilla saadaan muodostettua palkkiomatriisi (kuvio 7, vasemmalla), missä A on rivipelaajana ja B sarakepelaajana. Huomataan, että jos molemmat valitsevat hyökkäävän strategian X, niin hallitus hajoaa ja molemmat häviävät. Mikäli kumpikin valitsee konsensuksen, niin hallitus säilyy ja tilanne säilyy entisellään. Voitolle pääsee, vain mikäli itse valitsee hyökkäävän strategian, mutta vastapuoli ei samaan aikaan näin tee ja joutuu samalla tappiolle. Matriisista havaitaan kuitenkin, että tässä tapauksessa tasapainopiste ei kuitenkaan ole kohdassa, jossa hallitus säilyy, vaan siinä missä kumpikin valitsee hyökkäävän strategian X ja menettää samalla poliittisia pisteitä. Tämä on todellisen tilanteen pohjalta tulkittu ja muokattu esimerkki kertoo tapauksesta, jossa voimatasapaino voi johtaa lopulta negatiiviseen lopputulokseen valtion kokonaistilanteen kannalta.

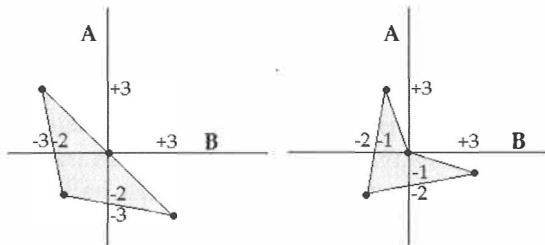
		Rivipelaajan Min		
		X	Y	
Sarakepelaajan Min	X	<u>$(-2, -2)$</u>	$(+3, -3)$	-2
	Y	$(-3, +3)$	$(0, 0)$	-10 ← Max
		-2	-10	
		↑ Max		

		Rivipelaajan Min		
		X	Y	
Sarakepelaajan Min	X	$(-2, -2)$	<u>$(+3, -1)$</u>	-2
	Y	$(-1, +3)$	$(0, 0)$	-1 ← Max
		-2	-1	
			↑ Max	

KUVIO 7 Esimerkki ei-vakiosummapelistä

Mikäli peli muutettaisiin yhteistoiminnalliseksi, niin pelaajat valitsisivat todennäköisesti strategian, joka antaa kokonaisuuden kannalta edullisimman lopputuloksen eli hallituksen säilymisen ilman kummankaan osapuolen merkittävää voittoa tai tappiota.

Jos arvioidaan eri strategioiden tuomia pistemääriä, niin huomataan, että tasapaino piste säilyy samana myös tilanteessa jossa voiton tuoma pistemäärä kasvaa. Sen sijaan jos tappion eli valta-aseman menetyksen tuoma haitta vähenee kolmesta yhteen pisteeseen, muuttuu myös tasapainopiste hallituksen säilymistä tukevaksi (kuvio 7, oikealla). Kuviossa 8 on samaa pelitilannetta tarkasteltu myös graafisesti koordinaatistossa, myös siitä voidaan havaita tasapainopisteen muutos. Tasapainopiste sijaitsee kuvion 8 monikulmioiden painopisteessä.



KUVIO 8 Ei-vakiosummapelin esimerkin tarkastelu koordinaatistossa

Klassinen esimerkki edellisen kaltaisesta kahden pelaajan e-vakiosummapelistä, jossa yhteistoiminta ei ole sallittua, on tunnettu *vangin pulma* (*prisoner's dilemma*). Siinä kaksi vankia, jotka pakenivat ja osallistuivat ryöstöön, joutuivat uudelleen kiinni odottamaan uutta oikeudenkäyntiä. Vaikka he ovatkin molemmat syyllisiä, niin oikeusistuimella ei ole riittävästi todisteita heidän tuomitsemiseensa. Lisäksi vangit ovat keskenään sopineet, että kumpikaan ei tunnusta. Heidät yritetäänkin saada todistamaan toisiaan vastaan seuraavalla ehdotuksella: jos vain toinen teistä tunnustaa ja todistaa toveriaan vastaan, nyt tunnustanut päästetään vapaaksi ja toinen, joka ei tunnustanut, saa 20 vuoden vankilatuomion. Mikäli tunnustatte molemmat, niin kumpikin saa 5 vuoden vankilatuomion. Jos taas kumpikaan ei tunnusta, niin saatte molemmat yhden vankilatuomion. Kumpikin vanki kuulee ehdotuksen erikseen, eivätkä he voi enää sopia taktiikan muutoksesta.

		vanki 1	
		tunnusta	älä tunnusta
vanki 2	tunnusta	(-5,-5)	(0,-20)
	älä tunnusta	(-20,0)	(-1, -1)

KUVIO 9 Vangin pulma

Kummallakin vangilla tunnusta-strategia on dominoiva ja siinä mielessä houkuttava, että parhaassa tapauksessa "vasikoiva" vanki vapautuu. Peliangelman tasapainopiste (equilibrium point) onkin (-5,-5) kuviossa 9 sillä siinä dominoivat strategiat leikkaavat toisensa ja jos kumpi tahansa vangeista muuttaa strategiaansa, niin hänen tuloksensa huononee -5:stä -20:een. Kuitenkin kumpikin vanki pärjäisi paremmin pisteessä (-1, -1). (Winston 1994)

Engelman paradoksi on siinä, että mikäli kumpikin päättää valita dominoivan strategian eli tunnustaa, niin vankien yhteinen lopputulos on huonompi kuin tilanteessa, jossa he olisivat päättäneet pitäytyä alkuperäisessä suunnitelmassa olla tunnustamatta.

Engelman paradoksaalisuus selittää osittain tehtävän kiehtovuutta, mutta merkittävä syy on puhtaasti käytännöllinen. Tuloksemme yhteiskunnallisessa elämässä ovat usein vähemmän mitä toivomme ja vankien pulma on yksi mahdollinen avain tämän ymmärtämiseen.

On houkuttelevaa ajatella, että ongelma syntyy ainoastaan, koska vangit eivät voi kommunikoida keskenään. Jos he voisivat, niin he huomaisivat helposti, ettäärkevintä olisi olla tunnustamatta. Mutta kommunikointi ei ole kaikki, mitä tarvitaan. Kumpikin kohtaa kuitenkin valintatilanteen, jossa pitää päättää pysyykö sopimuksessa olla tunnustamatta. Onko kummankaan osapuolen etu olla tunnustamatta? Paras strategia näyttää silti olevan tunnustaminen. (Heargrave Heaps & Varoufakis 1995)

2.3 N-pelaajan pelit

Useimmissa peli- ja kilpailutilanteissa pelaajia on enemmän kuin kaksi. Peli, jossa on n kpl pelaajia, on siis n-pelaajan peli. Aloitetaan sitaateilla alkaen aina vuodesta 1950.

N-pelaajan peli voidaan määritellä käsitteenä, jossa jokaisella pelaajalla on rajallinen määrä selkeitä strategioita ja määritelty joukko n pelaajan palkkioita on suhteessa jokaisen selkeisiin strategioihin jokaisessa n-monikossa, joista jokaiselle pelaajalle otetaan yksi strategia. Sekastrategioille, jotka ovat todennäköisyysjakaumia selkeistä strategioista, tuottofunktiot saadaan pelaajien odo-

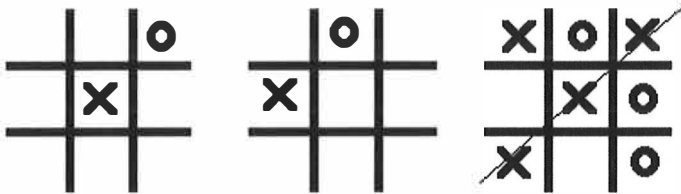
tuksista. Näin syntyy monien lineaarifunktioiden muodostamia yhdistelmiä (polylineaarisuus) todennäköisyyksineen. Näissä eri pelaajat pelaavat vaihtelevilla selkeillä strategioilla. (Nash 1950)

Tarvittavan matemaattisen työn monimutkaisuus nousee varsin nopeasti pelin monimutkaisuuden kasvaessa. Näin ollen parhaiten näyttäisi toimivan aproksimoivien laskennallisten menetelmien käyttö. Vähemmän ilmeinen sovellustyyppi on yhteistoiminnallisten pelien tutkiminen. Yhteistoiminnallinen peli tarkoittaa tilannetta, jossa joukko pelaajia, joilla on selkeät strategiat ja tavanomaiset tuotot, voivat tehdä, ja tekevätkin, yhteistyötä. Tämä tarkoittaa, että pelaajat voivat kommunikoida ja muodostaa yhteenliittymiä, jotka vahvistetaan jonkun välimiehen toimesta. (Nash 1951)

Yleinen n -pelaajan peli, vastakohtana kahden pelaajan nolla-summapelille, on pysynyt ratkaisemattomana. Pääongelmana näyttää olevan sopivan määrittelyn löytäminen sellaisten pelien ratkaisulle. Määrittely-yritykset jakaantuvat kahteen ryhmään, yhteistoiminnalliseen teoriaan, missä pelaajien odotetaan muodostavan liittoutumia, ja ei-yhteistoiminnallisiin, missä liittoutumia ei ole sallittu. Yleisin n -pelaajan pelejä koskeva teoria kirjallisuudessa määrittelee, että kaikki sellaiset omaavat selkeitten strategioidensa välissä tasapainopisteen. Tämä tasapainopiste ei ole yksikäsitteinen, eikä sellaisia pelejä voida ratkaista siinä mielessä kuin Nash on esittänyt. (Gale 1953)

Jos peliteorian tavoitteena on ollut paljastaa tehokkaita strategioita eturistiriitatilanteissa, niin tutkimukset ovat keskittyneet pelipuun rakentamiseen ja tarkastelemaan tuloksia useiden pelaajien strategioiden kombinaatioista. Tällä saralla kohdataan melkoisia ongelmia. Otetaan esimerkiksi eräs kaikkein yksinkertaisimmista strategiapeleistä eli *jätäkänshakki* ja katsotaan miten sen pelaamisvaihtoehdoille voidaan rakentaa pelipuu. Juurisolmusta lähtee 9 haarautumisväliä, jotka esittävät siis pelaajille 9 eri vaihtoehtoa. Jokaisesta näiden vaihtoehtojen päätesolmusta lähtee jälleen 8 uutta haarautumisväliä. Tätä välien kasvattamisprosessia pitää jatkaa ainakin 5 siirron ajan sillä mikään peli ei voi päättyä ennen viidettä siirtoa. Siinä vaiheessa kun on päädytty viidenteen siirtoon, on saatu syntymään jo $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$ haarautumisväliä. Tätä määrää voidaan kuitenkin pienentää radikaalisti ottamalla huomioon jätäkänshakin symmetrisyys. Esimerkiksi pelaajalla 1 on ensimmäisellä vuorollaan 3 vaihtoehtoa: keskiruutu, kulmaruutu tai sivuruutu. Jos valinnaksi osuu keskiruutu, niin pelaajalla 2 on periaatteessa käytössään kaksi vaihtoehtoa: kulmaruutu tai sivuruutu. Jos pelaaja 1 taas valitsee sivuruudun, niin pelaajalla 2 on periaatteessa viisi vaihtoehtoa jne. Siitä huolimatta, vaikka symmetrisyyskin otettaisiin huomioon, niin pelipuusta tulisi varsin suuri ja vaikka haarautumisvälien määrää vähentämällä säästettäisiin työtä, niin lisätyötä aiheuttaisi sen selvittäminen mitä siirrot todella ovat symmetrisiä keskenään. (Rapoport 1970)

Kuviossa 10 on vasemmalla kaksi tilannetta, joissa pelaaja 1 (x) valitsee keski-ruudun tai sivuruudun. Pelaaja 2 (o) valitsee tässä kulmaruudun ja sivuruudun. Oikeanpuolimmainen kuvio esittää tilannetta, jossa pelaaja 1 on voittanut pelin. Tämä yksinkertainen peli ja sen pelipuun rakentamiseen liittyvä problematiikka on vastaavaa mihin palataan tämän tutkielman aliluvussa 9.2., joka käsittelee pieniä shakin kaltaisia pelejä ja niiden strategiaverkkoja.



KUVIO 10 Jätkänskakki

Kun kyseessä on tosielämän tilanteet, niin alustava ongelma on ratkaista ennen kuin pelipuu rakennetaan eli täytyy selvittää "säännöt pelille". Keskeisenä asiana on rajata eri vaihtoehdot ja tilanteet, joita pelaaja saattaa kohdata. Jos mahdollisten vaihtoehtojen ja siis siirtojen määrä on suhteellisen pieni, niin on mahdollista listata jokaisen pelaajan strategiat. Pelin esittämistä strategioiden avulla kutsutaan *normaalimuotoiseksi* esitykseksi. Kun peli on saatu kertaalleen esitettyä normaalimuodossa muuttuvat sen säännöt epäolennaisiksi. Sääntöjen merkitys on ainoastaan siinä, että ne määrittelevät pelipuun rakenteen, jonka kautta käytössä olevat strategiat ja lopputulemat voidaan yhdistää eri strategiovaihtoehtoihin. Kahden pelaajan pelin normaalimuotoinen esitys on matriisi riveineen ja sarakkeineen. Vastaavan kolmen pelaajan pelin esitysmuoto on kolmiulotteinen hila ja N-pelaajan peli on n-ulotteinen hila, jossa "laatikossa" on voitot esitetty n-monikkona (n-tuple). Kun pelipuu on kerran saatu esitettyä normaalimuodossa, niin pelipuun sijaan pelimatriisi (tai pelihila) tulee matemaattisen tarkastelun kohteeksi. (Rapoport 1970)

Puita käytetään usein tekoälyssä ja peliteoriassa päätöksentekomallien luomiseen. Sääntöjen ja pelin määritelmän pohjalta pelipuu esitys voidaan määrittellä myös n-pelaajan pelille. Koska useimmalla kiinnostuksen kohteena olevilla peleillä on räjähdysmäisesti kasvavat pelipuut, niin tekoälyohjelmat tapaavat analysoida niitä pyrkimällä määrittelemään parhaan siirron.

Pelitoreettiset ratkaisut ei-yhteistoiminnallisille peleille ovat tavallisesti joukko jossain mielessä optimaalisia strategioita jokaiselle pelaajalle. Niissä pelaaja voi odottaa parhaan tuloksenpelin rajoitusten puitteissa olettaen, että muut pelaajat pyrkivät maksimoimaan voittonsa. Ratkaisu n-pelaajan täydellisen informaation pelille on vektori, joka pitää sisällään jokaisen pelaajan strategian. Strategia määrittelee pelaajalle hänen seuraavan siirtonsa, sekä pelaajan kaikki mahdolliset peliasetelmat. (Luckhart & Irani 1986)

On olemassa esimerkkejä pienistä kolmen pelaajan peleistä, joissa on rationaaliset voittomatriisit ja joissa kaikki Nashin tasapainopisteet ovat irrationaalisia. Monen pelaajan pelien tasapainopisteitä arvioivien algoritmien uskotaan olevan eksponentiaalisia. (Lipton, Markakis & Mehta 2003)

On olemassa huikea määrä kirjallisuutta kahden pelaajan peleistä, joissa on N osapuolta. Szilagyin mielestä kuitenkin aidossa N -pelaajan pelissä kaikkien tulisi pelata samanaikaisesti kaikkia pelaajia vastaan. Suorituskykyiset henkilökohtaiset tietokoneet ovat tehneet N -pelaajan pelien mallintamisen ja simuloimisen mahdolliseksi ja on ilmestynyt lukuisa määrä papereita, jotka kuvaavat joidenkin käytännöllisten esimerkkien simulaatioita. (Szilagyi 2012)

Biologian alueella kiinnostuksen puute monen pelaajan peleihin johtuu kahdesta syystä. Ensinnäkin tosielämän konfliktit ovat useimmiten kahden välisiä pelejä ja niitä arvioimalla voidaan oppia paljon. Toiseksi matematiikassa monen pelaajan pelien analysointi on huomattavasti monimutkaisempaa ja yleistettäviä tuloksia on vaikeampi saada. (Broom & Rychtar 2013)

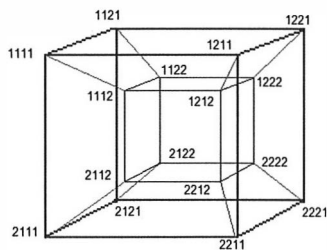
Edellä siteerattiin Rapoportia: "Kahden pelaajan pelin esitys on matriisi ja N -pelaajan peli on n -ulotteinen hila" (kuvio 11). Broom ja Rychtar keskittyivät analysoimaan monen pelaajan pelien biologiassa, mutta nämä säännöt ovat yleisiä. Kolmen pelaajan kahden strategian pelin voitot voidaan esittää seuraavalla tavalla:

$$\begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{pmatrix}$$

Vastaavasti neljän pelaajan kahden strategian pelin esitys on:

$$\begin{pmatrix} a_{1111} & a_{1112} \\ a_{1121} & a_{1122} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1211} & a_{1212} \\ a_{1221} & a_{1222} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{2111} & a_{2112} \\ a_{2121} & a_{2122} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2211} & a_{2212} \\ a_{2221} & a_{2222} \end{pmatrix}$$



KUVIO 11 Neljän pelaajan peli 4-hilassa

Jotkut pelit ovat selkeästi suoraan monen pelaajan pelejä ja jotkut pelit taas voidaan muotoilla helposti sellaisiksi. Miekkavalaiden (*Orcinus Orca*) on havaittu harjoittavan kollektiivista metsästystekniikkaa, niin sanottua karusellimallia. Siinä pieni ryhmä valaita päästää ylös kuplasuihkuja pienellä kehämäisellä alueella lähellä vedenpintaa, minkä jälkeen ne hakkaavat pyrstöillään tainnuttaen yhteen kerääntyneistä kaloista noin 10 - 15 kalaa. Jotta tekniikka onnistuisi, täytyy lukuisten valaiden yhteistoiminnan olla sujuvaa. Tätä voidaan mallintaa monen pelaajan pörssikeinottelupelinä koska kaikki valaat eivät välttämättä innostu yhteistoiminnasta, vaan pyrkivät saamaan saaliin vain itselleen. (Broom & Rychtar 2013)

2.4 Yhteenveto

Peliteoria on laaja alue käsiteltäväksi ja tässä luvussa siitä on raapaistu vain osa. Syy tähän on selvä. Tässä työssä esitellään malli usean pelaajan peliasetelmaan. Peliteorian osuus sen yhteydessä tulee merkittäväksi vasta siinä vaiheessa kun mallia ryhdytään soveltamaan simuloimalla ja hankkimaan tietoa pelin kulusta ja tapahtumista. On kuitenkin aiheellista jo tässä vaiheessa käsitellä peliteorian perusasetelmat erityisesti jatkotutkimusta silmällä pitäen.

Erilaiset pelit, niiden strategiat ja peliteoria muodostavat monimutkaisen kokonaisuuden, mutta sekään ei vielä riitä. Siteerataan ohessa Richard Guyn (1996, sivu 45) ajatuksia peleistä:

Matematiikan ja psykologian välille on vaikea vetää rajaa. On olemassa jopa tapauksia, joissa kannattaa valita huono siirto hyvän sijaan! Usein siirron arvioidaan olevan "hyvä" jos se voittaa ja "huono" jos se häviää. Teoriassa usein riittää etsiä jokin hyvä siirto tai sitten osoittaa ettei sellaista ole. Mutta todellisen elämän peleissä on paljon muitakin kriteerejä valita eri vaihtoehtoista. Mikäli häviää, niin silloin kaikki vaihtoehdot ovat edellä kerrotussa merkityksessä huonoja, mutta käytännössä ne eivät ole samankaltaisia. Saattaa olla mielekästä suosia vaihtoehtoa, joka on opponentille liian mutkikas analysoitavaksi (eli "antaa lisää siimaa" periaate). (Guy 1996)

Edellä olevan kaltainen ajattelutapa voisi toimia esimerkiksi tietokonepeleissä. Tämän kirjoittaja onnistui kerran saamaan yksinkertaisen shakkiohjelman pois tolaltaan yli kymmen siirron ajaksi aloittamalla pelin "typerästi" eli siirtämällä ainoastaan sotilaita laidasta alkaen yksi kerrallaan yhden askelen verran. Ohjelma ei "käsittänyt" mitä oli tapahtumassa.

Edellä on käsitelty lyhyesti erilaisia peliteorian perusasioita koska se oli välttämätöntä tämän työn aihepiirin vuoksi. Tämän työn tarkoituksena on kuitenkin keskittyä esittelemään matemaattinen malli, jolle voidaan sijoittaa useamman kuin kahden pelaajan symmetrisiä pelejä. Symmetriset pelit voi helposti sitten muuntaa myös epäsymmetrisiksi parametrien arvoja vaihtamalla. Tätä

mallia voidaan myöhemmin käyttää tällaisten pelien simuloimiseen. Simuloinnilla taas saadaan esille erilaisia monen pelaajan malliin istutettuja optimaalisia strategiavaihtoehtoja ja niiden lopputulemia. Näiden avulla pelistä saadaan *normaalimuotoinen esitys* (ks. Rapoport 1970, kuvio 11), jota voidaan tutkia peliteorian menetelmin.

3 TILAN PALOITTELU ERI ULOTTUVUUKSISSA

Tässä tutkielmassa on olennaiats keskustella pinnan laaatoituksesta ja tilan paloittelusta, koska niitä molempia tarvitaan kun ryhdytään suunnittelemaan erilaisia pelialustoja ja pelilautoja.

Tämän luvun kolme ensimmäistä alilukua 3.1., 3.2. ja 3.3. perustuvat sisällöllisesti tekijän aiempiin julkaisuihin (Kyppö 1993, Kyppö 1990, Kyppö 1993).

3.1 Käsitteitä

Tasaisen täyttämisen eli laatoittamisen, jossa pinta tai tila jaetaan samanlaisiin osiin, alkuperäiset englanninkieliset ilmaisut ovat tiling (pinnan täyttäminen) tai tessellation (mm. tilan täyttäminen tiilillä) ja paving (kiveäminen), jotka käännetään usein vain ruuduttamiseksi. Tässä yhteydessä kuitenkin ruuduttaminen on aivan liian rajoitettu sana. Myös matematiikassa jonkin verran käytetty termi pinnan laatoittaminen antaa hieman harhaanjohtavan kuvan, jos siirrytään pois tasolta moniulotteisen tilan täyttämiseen. Termi tasainen täyttäminen sen sijaan on looginen jatke säännölliselle ja täysin säännölliselle verkolle. Selvitetään näitä käsitteitä seuraavaksi.

Verkkoa $G=(V,E)$ sanotaan *säännölliseksi*, jos sen kaikki solmut ovat samaa astelukua. G on *täysin säännöllinen*, jos myös sen duaaliverkko G' on säännöllinen (Ore & Wilson 1963)(s. 102). Tämä tarkoittaa sitä, että myös jokaisen G' :n solmun asteluku on sama. Kaikille yhtenäisille verkoille pätee kaava:

$$\sum_{k=2}^n (4-k)v_k + \sum_{r=2}^m (4-r)f_r = 4E(S)$$

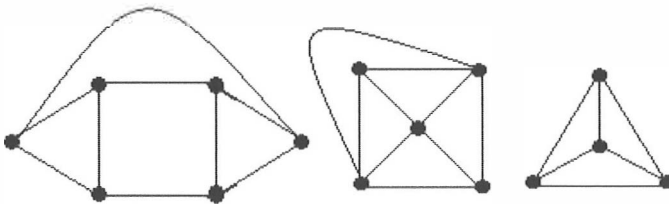
Kaavassa v on solmujen, ja f_r alueiden määrä. Luku k on solmun asteluku ja r alueen sivujen määrä eli siis r -kulmio. $E(S)$ on topologisen pinnan S Eu-

lerin karakteristika Eulerin monitahokkaiden kaavasta ja kun kyseessä on tasopinta, niin $E(S) = 2$. (White 1973)

Voimme kokeilla kaavaa yksinkertaiseen esimerkkiin eli kuvion 1 verkkoon, jossa neljä solmua ja kolme aluetta. Solmuista kaksi on asteluvultaan 2 ja toiset kaksi asteluvultaan 3. Alueita on vain kolme, kaksi astelukua 3 ja yksi (ulkopuolinen alue) astelukua 4. Kaavaan sijoitettuna saadaan: $(4-2)*2 + (4-3)*2 + (4-2)*0 + (4-3)*2 + (4-4)*1 = 4 + 2 + 0 + 2 + 0 = 8 = 4*2 = 4*E(S)$, kun S on tasopinta.

Yhtenäisten verkkojen kaavasta saadaan kaava säännöllisille tasoverkoille, kun annetaan r :lle vain yksi arvo ja saadaan: $\sum_{k=2}^n (4-k)v_k + (4-r)f_r = 4E(S)$. Tämä kaava voidaan johtaa myös muotoon $\sum_{k=2}^n (2r-rk+2k)v_k = 2rE(S)$. Kaavojen johtamiseen ei tässä puututa, mutta kuviossa 12 on vasemmalla esimerkki yksinkertaisesta säännöllisestä tasoverkosta. Verkon kaikki alueet ovat kolmisivuisia, mutta solmujen asteluku vaihtelee. Kuvion keskimmäinen piirros on edellisen duaaliverkko, joka ei ole säännöllinen. Kuvan esimerkki on myös tasolla oleva kolmioverkko, jolloin kaava yksinkertaistuu muotoon $\sum_{k=2}^n (6-k)v_k = 12$. Säännöllisen kolmioverkon kaava tunnetaan myös nimellä Kempen kaava ja sillä on ollut keskeinen rooli kuuluisan karttojen neliväriteoreeman todistuksessa ja todistusyrityksissä (Appel & Haken 1977). Kempen kaavan avulla huomataan, että jos ryhdytään piirtämään säännöllistä kolmioverkkoa siten, että jokaisen solmun asteluku on suurempi kuin 6, niin verkko tihenee reunoiltaan nopeasti mahdottomaksi piirtää. Jos taas asteluku on pienempi kuin 6, niin verkko sulkeutuu säännöllisen monitahokkaan projektioksi tasossa. Näitä projektioita on kaksi, ikosedrin projektiio kun asteluku on 5 ja tetraedrin projektiio, kun asteluku on 3. Mikäli asteluku on tasan kuusi, niin tasopinta jakautuu äärettömään määrään samanlaisia kolmioita, mikä on yksi esimerkki pinnan tasaisesta täyttämisestä.

Täysin säännöllisille verkoille, joissa k ja r ovat kiinteät, kaava yksinkertaistuu muotoon: $(4-k)v_k + (4-r)f_r = 4E(S)$ tai $(2r-rk+2k)v = 2rE(S)$. Kaavat voi helposti todentaa kuvion 12 oikeanpuoleisesta yksinkertaisesta tasoverkosta.

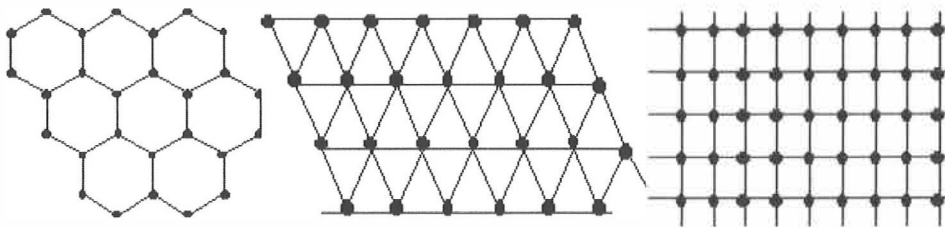


KUVIO 12 Säännöllinen verkko, sen ei-säännöllinen duaali ja täysin säännöllinen verkko

3.2 Pinnan tasainen täyttäminen

Pinnan täyttäminen (tiling) on siis sen jakamista monikulmioihin siten, että monikulmioiden välille ei jää tyhjää tilaa (Grünbaum & Shephard 1987). Pinnan täysin säännölliseksi täyttämiseksi eli *tasaiseksi täyttämiseksi* (regular tiling) kutsutaan tilannetta, jossa tasopinta voidaan jakaa äärettömästi samanlaisiin säännöllisiin monikulmioihin. Tasaisesti täytetyn pinnan välit muodostavat siis edellä esitellyn äärettömän täysin säännöllisen verkon. On vain kolme sellaista monikulmiota, joilla pinnan tasainen täyttäminen on mahdollista. Nämä monikulmiot (kuvio 13) ovat kolmio, neliö ja kuusikulmio eli heksagoni (Maor 1987). Miksi ne ovat juuri nämä, käy selvästi ilmi kun tarkastellaan kaavaa: $(2r-rk+2k)v = 4r$ äärettömille täysin säännöllisille tasoverkoille. Kaavassa r on monikulmion sivujen määrä ja k verkon solmujen asteluku. Kaavasta saadaan solmujen määräksi $v=4r/(2r-rk+2k)$. Nähdään, että kuvion 12 verkkojen solmujen määrä on ääretön, sillä jokaisessa verkossa $2r-rk+2k=0$, jolloin $v=4r/(2r-rk+2k)=\infty$.

Kun $2r-rk+2k=0$ eli $r=2k/(k-2)$. Koska k on kokonaisluku ja $k \geq 3$ niin lauseke $2k/(k-2)$ saa kokonaislukuarvot vain k :n arvoilla 3, 4 ja 6, jolloin vastaavat r :n arvot ovat 6, 4 ja 3. Siis vain näillä monikulmioilla, eli parien (r,k) joukolla $\{(6,3),(4,4),(3,6)\}$, voi solmujen määrä kasvaa äärettömäksi täysin säännöllisissä verkoissa. Parien (r,k) käänteisyydestä voi myös vetää sen havainnon, että verkoista kolmio- ja kuusikulmioverkko ovat toistensa duaaleja ja neliöverkko on itsensä duaali.



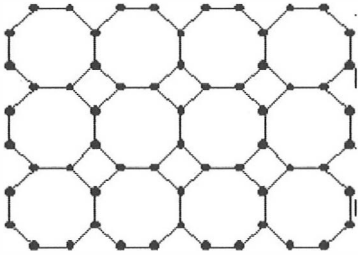
KUVIO 13 Kolme mahdollista tapaa täyttää taso tasaisesti

Toinen tapa löytää kyseiset verkot on tarkastella säännöllisen r -kulmion kulmien suuruutta. Yhden r -kulmion kaikkien kulmien summa on radiaaneissa $(r-2)\pi/2$, jolloin yhden kulman koko on $(r-2)\pi/2r$, jos monikulmio on tasa-asteinen. Siis esimerkiksi kolmioverkossa yhden kolmion kulmien summa on $(3-2)\pi/2 = (3-2)*180^\circ/2 = 90^\circ$. Mikäli tällainen r -kulmioverkko jakaa tason tasaisesti niin jokaisessa rajapisteessä täytyy kulmajaon mennä tasan eli jokainen kulma on yhtä suuri. Koska ympyränkehä on aina $2\pi (=360^\circ)$, niin kaikkien yhden pisteen

ympäri kiertyvien kulmien summa on myös 2π ja näin jokaisessa pisteessä saadaan yhden kulman suuruudeksi $2\pi/((r-2)\pi/r)=2r/(r-2)$. Tämä lauseke saa arvot 6, 4, 3.33..., 3, 2.8, ..., 2 silloin kun $r=3, 4, 5, 6, 7, \dots, \infty$. Jako menee siis tasan vain r :n arvoille 3, 4 tai 6. Esimerkiksi, pentagoneista, säännöllisistä viisikulmioista koostuva verkko ei voi täyttää tasoa tasaisesti, koska yhden kulman koko on $(5-2)\pi/10 = 3 \cdot 360^\circ/10 = 108^\circ$, jolloin samassa pisteessä voi kohdata korkeintaan kolme pentagonia ja väliin jäisi täytettäväksi vielä 36° :en kulma.

Tämä esimerkki antaa vihjeen siitä, että taso voitaisiin ehkä täyttää tasaisesti myös joillakin sopivilla erilaisten säännöllisten monikulmioiden kombinaatioilla. On osoitettu, että seuraavat monikulmiojoukot, kun ne sijoitellaan sopivasti toisiinsa nähden, voivat myös täyttää tason tasaisesti: {4,8}, {4,6,12}, {3,4,6}, {3,12}, {3,4} ja {3,6}. (Maor 1987)

Kuten näkyy, niin tällaisia monikulmiojoukkoja on yhteensä kuusi kappaletta, mutta on osoitettu, että kahdesta jälkimmäisestä joukosta, {3,4} ja {3,5}, voitavan kummastakin muodostaa kaksi erilaista tasaiseen täyttämiseen soveltuva kombinaatiotyyppiä. Näin saadaan tason tasaiseen täyttämiseen soveliaiden monikulmiojoukkojen yhteismääräksi kahdeksan. Näistä yksi {4,8}, neli- ja kahdeksankulmioita käyttävä, on kuviossa 14.



KUVIO 14 Tason täyttö säännöllisillä kahdeksan- ja nelikulmioilla

Lopuksi vielä muutama sana kahden termin, *alue* ja *2-solu*, eroista. Peruskäsitteiden esittelyn yhteydessä määriteltiin solmu, väli ja alue. Kun siirrytään tarkastelemaan monimutkaisemmille topologisille pinnoille upotettuja verkkoja, tulee aiheelliseksi tarkentaa myös alueen määritelmää. Seuraavaksi tarkennetaan alueen määritelmää sekä sitä laajempi käsite 2-solu.

Verkko on *upotettu* pinnalle S jos se voidaan piirtää S :lle siten, että välit voivat leikata toisiaan vain solmuissa ja verkkoa sanotaan tasoverkoksi jos se voidaan upottaa tasolle. *Epäverkko* eli *pseudoverkko* on verkko, joka sallii myös moninkertaiset välit ja lenkit (luupit). Olkoon epäverkko G upotettu pinnalle S . Erotuksen $S - G$:n osia kutsutaan tällöin upotuksen alueiksi. Verkon G upotuksen aluetta kutsutaan 2-soluksi jos se on homeomorfinen avoimen euklidisen avaruuden yksikkökiekon kanssa. Jos upotuksen solu on 2-solu, niin silloin upotuksen sanotaan olevan 2-solu-upotus. (White 1973)

Yksikkökiekko (kehämäinen kiekko) on kehän pinta. Jokaista yksikkökiekon topologista kuviota (kolmiulotteisessa avaruudessa) kutsutaan 2-soluksi. Vastaavasti väliä kutsutaan 1-soluksi ja pistettä 0-soluksi. Verkon G upotusta suljetulle pinnalle S kutsutaan solumaiseksi upotukseksi (2-solu-upotukseksi), jos G jakaa pinnan S ainoastaan 2-soluiksi. (Ringel et al. 1974)

3.3 Kolmiulotteisen tilan tasainen täyttäminen

Siirryttäessä kolmanteen ulottuvuuteen huomataan, että mahdollisuudet tilan tasaiseen täyttämiseen ovat vähäisemmät tilan kuin tason suhteen. Näin siksi, että tasolla se joukko, josta voitiin valita tasaiseen täyttämiseen soveltuvat säännölliset monikulmiot, on ääretön. Säännöllisiä monikulmioita on ääretön määrä ja näistä tasaiseen täyttämiseen soveltuvat kolmio, neliö ja kuusikulmio. Sen sijaan kolmannessa ulottuvuudessa säännöllisiä monitahokkaita on vain äärellinen määrä eli tunnetut viisi Platonin kappaletta. Monitahokkaat ovat kuviossa 16 vasemmalta oikealle tetraedri, kuutio, oktaedri, ikosaedri ja dodekaedri. Tetraedri on itsensä duaali eli jos sen jokaisen tahkon sisäpuolelle asetetaan kärkipiste ja kärkipisteet yhdistetään toisiinsa, niin sisälle syntyy toinen tetraedri. Vastaavasti kuutio ja oktaedri ovat toistensa duaaleja, samoin ikosaedri ja dodekaedri. Monitahokkaiden tahkot ovat ainoastaan kolmioita neliöitä tai viisikulmioita eli pentagoneja.

Pallopinnalla on vain hyvin harvoja (tarkalleen viisi) täysin säännöllisiä verkkoja, jotka saadaan yhtälöstä $(2r-rk+2k)v=4r$. Koska v , k ja r ovat positiivisia kokonaislukuja, niin lausekkeen $2r-rk+2k$ täytyy myös olla positiivinen kuten myös lausekkeen $4r/(2r-rk+2k)$ positiivinen kokonaisluku. Tällöin on voimassa r :lle seuraava ehto:

$$2r-rk+2k>0 \Rightarrow r < 2k/(k-2)$$

Kun $k=2$, niin $r < \infty$ ja verkko on tavallinen monikulmio.

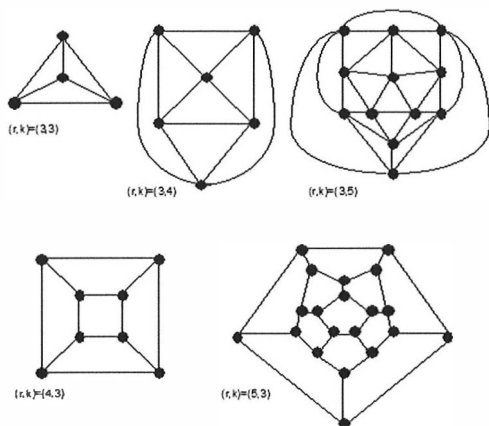
Kun $k>2$ niin $r < 6$ jos $k=3$, jolloin $r < p = 2k/(k-2) = 2/(1-\frac{2}{k}) \rightarrow 2$, kun $k \rightarrow \infty$.

Edellisestä seuraa, että $r \in (2,6) \Rightarrow r \in [3,5]$, kun $k>2$.

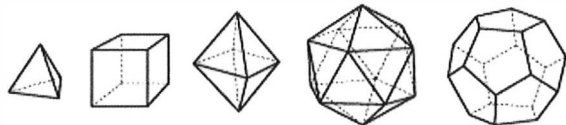
Nämä r :n arvot antavat seuraavat tulokset:

$$v = \begin{cases} 2, & k = 2, \\ \frac{12}{6-k}, & k > 2 \text{ ja } r = 3 \text{ (a)}, \\ \frac{8}{4-k}, & k > 2 \text{ ja } r = 4 \text{ (b)}, \\ \frac{20}{10-3k}, & k > 2 \text{ ajand } r = 5 \text{ (c)}. \end{cases}$$

Mahdolliset positiiviset arvot v :lle ovat $k=3, 4$ ja 5 (a), sekä $k=3$ yhtälöille (b) ja (c). Nämä viisi verkkoa ovat ainoat täysin säännölliset tasoverkot (kuvio 15), kun $k \geq 3$, ja niiden vastaavat kuvaukset (upotukset) pallopinnalle ovat säännöllisiä monitahokkaita muodostaen tunnetut *säännölliset monitahokkaat* (kuvio 16) eli *Platonin kappaleet* (Maor 1987, Grünbaum 1967). Muilla $r:n$ arvoilla, kun $k > 2$, saadaan solmujen lukumääräksi vain negatiivisia tai äärettömiä arvoja.

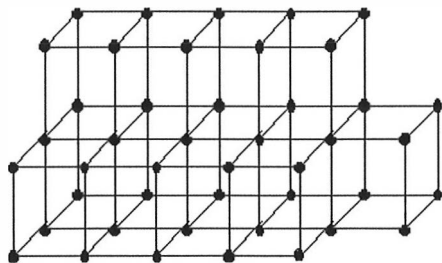


KUVIO 15 Täysin säännölliset tasoverkot



KUVIO 16 Platonin säännölliset monitahokkaat

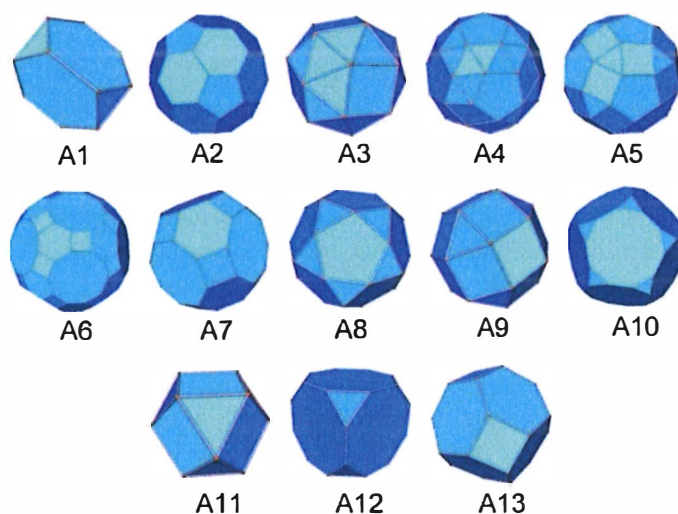
Näistä viidestä kappaleesta vain yksi eli kuutio täyttää tilan tasaisesti (kuvio 17). Tämä tulos voidaan laskea periaatteessa samalla tavalla kuin laskettiin tason täyttäminen, mutta laskutoimitukset mutkistuvat, koska kaava joudutaan rakentamaan aivan uudelta pohjalta. Esimerkiksi yksi kaavan perusilareista, ehto $2e=3f$, ei enää päde kolmiulotteisessa tilassa, kun useita monitahokkaita liitetään toisiinsa.



KUVIO 17 Tilan tasainen täyttäminen kuutioilla

Kuten tasolla, niin on kolmiulotteisessa tilassakin mahdollista löytää erilaisia monitahokkaiden kombinaatioita, jotka jakavat tilan jättämättä väliin tyhjiä tiloja. Tällöin kyse ei kuitenkaan ole tasaisesta täyttämisestä, mikä kolmanteen ulottuvuuteen sovellettuna tarkoittaa sitä, että kaikkien monitahokkaiden on oltava identtisiä, jokaisen tahkon tulee koskettaa samaa määrää muita tahkoja (yleensä yhtä) ja jokaisen kärkipisteellä on oltava sama asteluku.

Mikäli ensimmäinen rajoite (identtiset monitahokkaat) poistetaan eli sallitaan useamman tyyppisiä monitahokkaita, niin löytyy lisää vaihtoehtoja täyttää tila samanlaisilla kappaleilla. Mahdollisuudet tällaiseen kombinatoriseen täyttämiseen ovat rajoitetut suhteessa säännöllisten monitahokastyypien lukumäärään. Esimerkiksi voidaan ottaa 14-tahokas, jonka pinta koostuu kuudesta nelikulmiosta ja kahdeksasta kuusikulmiosta, 36 särmästä ja 24 kärkipisteestä, siten, että kaikkien nelikulmioiden naapurit ovat kuusikulmioita ja kuusikulmioilla joka toinen naapuri on nelikulmio (Maor 1987). Tällaista monitahokasta kutsutaan *tyypistetyksi oktaedriksi* (kuvio 20, A13) ja se on yksi kolmestatoista *Arkhimedeen kappaleesta* (Torquato & Jiao 2009). Tämän tyyppiset rakenteet liittyvät aihepiiriin, joka kulkee nimellä kristallografia.



KUVIO 18 Arkhimedeen kappaleet (Torquato & Jiao 2009)

3.4 N-ulotteisen tilan täyttäminen

Korkeampi ulotteisen tilan täyttämässä on samalla tavoin rajattu määrä vaihtoehtoja kuin kolmiulotteisenkin tilan täyttämässä. N-ulotteisen tilan tasainen täyttäminen, kun $n \geq 3$, on mahdollista ainoastaan hyperkuutioilla. Sen sijaan kombinatoriseen tasaiseen täyttämiseen on hieman enemmän vaihtoehtoja.

Vaihtoehdot selviävät parhaiten tutustumalla Schläflin symboliin. Sitä ennen on kuitenkin selvitettävä käsite *monipinta* eli *polytooppi*.

3.4.1 Monipinnat eli polytoopit

Säännöllisyyden määritelmä vaatii kolme käsitettä: säännölliset tahkot, samanlaiset tahkot ja samanlaiset kiinteät kulmat. On kuitenkin toinenkin määritelmä jossa on mukana vain kaksi käsitettä, mutta joilla on sama vaikutus. Korvataan käsite kiinteät kulmat käsitteellä *pistekuvio* (*vertex figure*). Monikulmion pistekuvio tai piste O on segmentti, joka yhdistää kulman O kaksi sivua (kuvio 19, vasemmalla). Monitahokkaan pistekuvio pisteessä O on puolestaan monikulmio, jonka sivuina ovat kaikki pistettä O ympäröivät pistekuviot, jotka segmentteinä ovat siis janoja (kuvio 19, oikealla). Tältä pohjalta monitahokas on säännöllinen jos sen kaikki tahkot ja pistekuviot ovat säännöllisiä.

Jos kaikkien sivujen keskipisteet, joita katsotaan yhdestä annetsuta solmupisteestä O , sijaitsevat yhdellä hypertasolla, niin nämä keskipisteet ovat $(n-1)$ -ulotteisen monipinnan solmuja ja niitä kutsutaan monipinnan pistekuvioksi O :ssa. Aloittamalla säännöllisistä monikulmioista, kolmiosta, nelikulmiosta, viisikulmiosta, jne..., niin voimme määritellä säännöllisen monipinnan induktiivisesti seuraavalla tavalla. Monipintaa (ulottuvuus $n > 2$) sanotaan säännölliseksi, jos sen alempiulotteiset monipinnat (solut) ovat säännöllisiä, ja jokaisessa solmussa on säännöllinen pistekuvio. (Coxeter 1973) Erilaisia pistekuvioita on esitelty kuvassa 19.

Monikulmio eli polygoni on äärellinen janojen eli sivujen erottama tasokuvio. Säännöllisen monikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja niiden väliset kulmat yhtä suuria. Monikulmiota kutsutaan n -kulmioksi jos siinä on n kulmaa. Sanan englanninkielisessä muodossa, *polygon*, alkuosa poly- tarkoittaa monta ja -gon kulmaa (kreikan sanasta *polugōnon* latinan kautta).

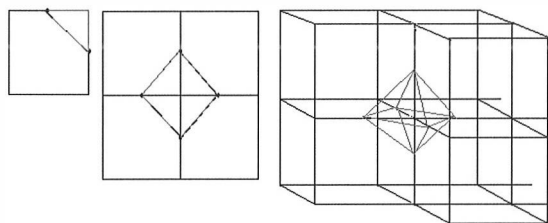
Monitahokas eli polyedri on monikulmioiden eli monitahokkaan tahkojen rajoittama kappale. Tahkoja erottavat toisistaan monitahokkaan sivut eli särmät ja monitahokkaan kärjet. Säännöllisen monitahokkaan kaikki tahkot ovat samanlaisia säännöllisiä monikulmioita. Säännöllisiä monitahokkaita on kaikkiaan täsmälleen viisi, tetraedri, kuutio, oktaedri, dodekaedri ja ikosaedri. Nämä tunnetaan myös nimellä Platonin kappaleet. Sanan englanninkielisessä muodossa, *polyhedron*, tarkoittaa *hedron* kärkeä.

Monipinta eli polytooppi on hypertasojen rajaama äärellinen alue n -ulotteisessa avaruudessa. Monipinta on siis yleisnimitys n -ulotteisille geometrisille kappaleille, joita erottavat ulkopuolisesta avaruudesta $0, 1, 2, \dots, n-1$ ulotteiset monipinnat. N -ulotteinen monipinta on säännöllinen, jossa sitä rajaavat $n-1$ -ulotteiset monipinnat ovat säännöllisiä. Monitahokas on kolmiulotteinen ja monikulmio kaksikulotteinen monipinta.

Käsitteen monipinta esitteli ensimmäisen kerran Reinhard Hoppe saksankielisessä muodossa *polytop* vuonna 1882 (Effenberger 2010). Laajemmin se tuli tun-

netuksi englanninkielisessä muodossa irlantilais-englantilaisen matemaatikon Alicia Boole Stottin esittelemänä (Ball & Coxeter 1987). Stott tarkoitti käsitteellä alun perin neliulotteisia monipintoja. Säännöllisiä neliulotteisia monipintoja, joiden pinnat koostuvat samanlaisista säännöllisistä monitahokkaista, on yhteensä kuusi. Niiden rajapinnat koostuvat 5:stä, 16:sta tai 600:sta tetraedristä tai 24:tä tai 12:stä dodekaedristä tai 8:sta kuutiosta. Sanan englanninkielisessä muodossa, polytope, tarkoittaa *tope* pintaa.

Kuten edellä kerrottiin, niin monitahokkaat ja monipinnat voidaan määrittellä säännöllisiksi täsmällisemmin myös *pistekuvion* avulla. Monikulmion pistekuvio on jana, joka yhdistää solmusta O lähtevän kahden sivun keskipisteet (kuvio 19, vasemmalla). Monitahokkaan pistekuvio on monikulmio, joka syntyy kun solmusta O lähtevien särmien vierekkäiset keskipisteet yhdistetään toisiinsa (kuvio 19, oikealla). Esimerkiksi kuution pistekuvio on kolmio. Monitahokas on säännöllinen jos sen kaikki tahkot ja kaikki pistekuviot ovat säännöllisiä. Vastaavasti n -ulotteisen monipinnan pistekuvio on sen jostain kärkisolmusta O lähtevien sivujen keskipisteiden väliin jäävä $(n-1)$ -ulotteinen monipinta. N -ulotteinen monipinta on säännöllinen jos sitä rajaavat $(n-1)$ -ulotteiset monipinnat ja sen pistekuviot ovat säännöllisiä (Coxeter 1973).



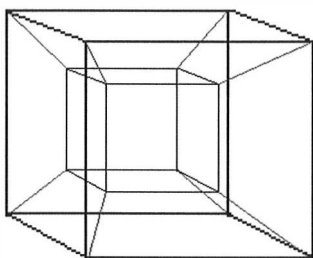
KUVIO 19 Pistekuvioita

3.4.2 Schläflin symboli

Geometriassa Schläflin symbolista käytetään merkintätapaa, joka määrittää säännölliset monipinnat ja säännöllisen täyttämisen. Schläflin symbolilla voidaan määrittellä erilaiset monipinnat ja säännöllinen täyttäminen eri ulottuvuuksissa. Schläflin symbolia käytetään paljon kemian alan tieteellisissä artikkeleissa. Merkintätavan kehitti 1800-luvulla sveitsiläinen matemaatikko Ludwig Schläfli ja se on muotoa $\{p,q,r,\dots\}$, missä attribuuttien määrä kertoo monipinnan ulottuvuuden (Coxeter 1973). Selvitetään merkintää tarkemmin seuraavassa.

Jos Schläflin symboli on vain yksi muuttuja eli $\{p\}$, niin kyseessä on monikulmio, p -kulmio. Esimerkiksi nelikulmio on $\{6\}$. Kun muuttujia on kaksi eli symboli on muotoa $\{p,q\}$, niin kyseessä on monitahokas, jonka tahkot ovat p -kulmioita, joita on yhden kärkipisteen ympärillä q kappaletta. Siis esimerkiksi $\{4,3\}$ on kuutiolla kuution tahkot ovat neliöitä ja sen jokaiseen kärkipisteeseen rajoittuu kolme neliötä. Kun siirrytään neliulotteiselle monipinnalle, niin Schläflin symboli

on muotoa $\{p,q,r\}$, missä p ja q ovat kuten edellä ja r on yhden sivun ympärillä olevien monitahokkaiden lukumäärä. Esimerkiksi neliulotteiselle hyperkuutiolle, eli tesseractille, symboli on $\{4,3,3\}$, missä ensimmäiset luvut 4 ja 3 esittävät kuutiota. Viimeinen numero kolme kertoo, että jokaista särmää ympäröi kolme kuutiota. Kuviossa 20 on neliulotteisen hyperkuution Schlegelin diagrammi. Schlegelin diagrammi kuvaa monipinnat projisioina yhtä ulottuvuutta alempaan tila-avaruuteen eli kuviossa on neliulotteiden hyperkuution projisio kolmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Hyperkuutioiden kohdalla Schläflin symboli jatkuu samalla tavoin eli viisiulotteisen hyperkuution symboli on $\{4,3,3,3\}$ sillä tuossa ulottuvuudessa jokaista viisiulotteisen hyperkuution kaksiulotteista tahkoa ympäröi kolme neliulotteista hyperkuutiota. Yleisesti $\{4, 3^{n-2}\}$ on n -ulotteisen hyperkuution Schläflin symboli². Ensimmäinen lukuarvo kuvaa siis 2-ulotteisen nelikulmion sivujen määrää. Toinen lukuarvo kuvaa sitä kuinka monta 2-ulotteista nelikulmiota rajoittuu monipinnan 1-ulotteisiin osioihin eli kärkipisteisiin. Kolmas lukuarvo kuvaa sitä kuinka monta 3-ulotteista kuutiota rajoittuu 4-ulotteisen hyperkuution 2-ulotteisiin osioihin, siis nelikulmioihin, ja näin edelleen. (Coxeter 1973)



KUVIO 20 Neliulotteisen hyperkuution Schlegelin diagrammi

Toiseksi esimerkiksi voidaan ottaa kolmio, jonka Schläflin symboli on yksinkertaisesti $\{3\}$. Kolmisivuisella pyramidilla, tetraedrilla, on neljä tahkoa, jotka ovat kaikki kolmioita ja jokainen kärkipiste on kosketuksissa kolmeen kolmioon, joten tetraedrin Schläflin symboli on $\{3,3\}$. Edellä esiteltiin (kuvio 16) viisi säännöllistä monitahokasta eli ns. Platonin kappaleet. Niihin kuuluivat myös kuutio ja tetraedri. Muiden kolmen, kuten kuvasta voi päätellä, Schläflin symbolit ovat seuraavat: oktaedri $\{3,4\}$, ikosaedri $\{3,5\}$ ja dodekaedri $\{5,3\}$. (Coxeter 1973, Ball & Coxeter 1987)

Kun kyseessä on pinnan tasainen täyttäminen tai hunajakennot, niin Schläflin symbolin määrittely eroaa hieman. Tämä selvitetään seuraavassa aliluvussa.

² Yläindeksi $n-2$ ei ole tässä yhteydessä potenssimerkintä, vaan tarkoittaa numeroiden 3 lukumäärää.

3.4.3 Hunajakennot

Geometriassa, hunajakkenno tarkoittaa avaruuden täyttämistä tai monitahokkaiden tai korkeampiulotteisten kappaleiden pakkaamista. Hunajakennot ovat eräs esimerkki tasaisesta täyttämisestä eri ulottuvuuksissa.

Hunajakkenno rakenteena tarkoittaa tilaa säästävää rakennelmaa, jonka nimi pohjautuu mehiläisten kuusikulmaiseen kennorakenteeseen. Geometriassa hunajakennorakenteella on kuitenkin yleisempi merkitys. Sillä tarkoitetaan tilan täyttämistä tai pakkaamista, niin ettei väliin jää tyhjiä tiloja, monitahokkailla tai korkeampi ulotteisilla monipinnoilla, siis n -ulotteisen tilan tasaista täyttämistä.

Kolmiulotteinen hunajakkenno on ääretön joukko toisissaan kiinni olevia monitahokkaita, jotka täyttävät tilan siten, että jokaisen monitahokkaan jokainen tahko kuuluu myös toiseen monitahokkaaseen. Hunajakkennoa kutsutaan säännölliseksi jos sen monitahokkaat ovat säännöllisiä ja samanlaisia.

Myös hunajakkennojen rakennetta voidaan kuvata edellä esitetyllä Schläflin symbolilla. Otetaan jälleen esimerkiksi nelikulmio, kuutio ja hyperkuutio. Neliön Schläflin symboli on siis $\{4\}$ ja kuution $\{4,3\}$ koska jokainen kulmapiste rajoittuu kolmeen särmään. Nelikulmioilla voidaan myös täyttää säännöllisesti 2-ulotteinen pinta, jolloin jokaisen nelikulmion ympärillä on sivujen eli särmien suunnassa neljä nelikulmiota ja kulmien suunnassa neljä nelikulmiota. Jokainen nelikulmion kulmapiste on näin kosketuksissa neljään sivuun kolmen sijasta. Tämän johdosta Schläflin symboli saa arvon $\{4,4\}$. Kun jatketaan kolmiulotteiseen tilaan ja täytetään se kuutioilla, niin saadaan arvoksi $\{4,3,4\}$, missä ensimmäiset 4 ja 3 ovat kuution Schläflin symboli. Kolmas luku taas 4 kertoo kuinka moneen kuutioon yksi särmä rajoittuu. Näiden määrä on neljä. Neliulotteisessa tilassa hyperkuutioiden muodostaman hunajakennon Schläflin symboli on $\{4,3,3,4\}$, missä kolme ensimmäistä lukua esittää tesseraktia eli 4-ulotteista hyperkuutiota $\{4,3,3\}$ ja viimeisenä oleva luku 4 kertoo, että neliulotteisessa hunajakennossa yksi nelikulmiotahko rajoittuu neljään neliulotteiseen hyperkuutioon. *Rajoittuminen tarkoittaa nelikulmiotahkon kaksiulotteisen pinnan kosketusta hyperkuutioihin.* Yleisesti $\{4, 3^{n-2}, 4\}$ on n -ulotteisen hyperkuutioista rakentuva hunajakennon Schläflin symboli³. (Coxeter 1973)

Hunajakkennojen, kuten myös monikulmioiden ja monitahokkaiden rakennetta voidaan määrittää myös edellä esitellyn pistekuvion⁴ avulla. Pistekuvio syntyy siis kun monikulmion, monitahokkaan, n -ulotteisen kappaleen tai hunajakennon jokaisesta pisteestä lähtevän välin keskikohdalle asetetaan piste ja tämän jälkeen pisteet yhdistetään toisiinsa. (Coxeter 1973).

Esimerkiksi jokaisen monikulmion pistekuvio on aina kolmio ja kuution pistekuvio on tetraedri. Kaksiulotteisen nelikulmioista koostuvan tasaisesti täytetyn pinnan eli kaksiulotteisen hunajakennon pistekuvio on nelikulmio ja kolmiulotteisen kuutioista koostuvan hunajakennon pistekuvio on oktaedri. Näi-

³ Yläindeksi $n-2$ ei ole tässä yhteydessä potenssimerkintä, vaan tarkoittaa numeroiden 3 lukumäärää

⁴ Vertex figure (engl.)

den kolmen pistekuvion vastaavat Schläflin symbolit ovat $\{4\}$, $\{3,4\}$ ja $\{3,3,4\}$. Kuviossa 19 on vasemmalta oikealle neliön, neliöistä muodostuvan tasaisesti täytetyn pinnan ja kuutioista muodostuvan hunajakennon pistekuviot eli kolmio, neliö ja oktaedri. Neliulotteisen, saman ulotteisista hyperkuutioista muodostuvan, hunajakennon pistekuvio on 16-solu eli hexadecachoron.

Toisin sanoen kaksiulotteisen hunajakennon eli tasaisesti täytetyn pinnan (tesselation) pistekuvio saadaan yhdistämällä sen elementtien pistekuviot toisiinsa. Siis esimerkiksi nelikulmioista koostuvassa hunajakennossa yhdistetään neljä kolmiota (kuvio 19, keskellä) ja kuutioista koostuvassa hunajakennossa yhdistetään toisiinsa kahdeksan tetraedriä (kuvio 19, oikealla). Kolmiulotteinen hunajakennon on ääretön joukko toisissaan kiinni olevia monitahokkaita, jotka täyttävät kaikki tilan siten, että jokaisen monitahokkaan jokainen tahko on myös toisen monitahokkaan yksi tahko. Hunajakennon on säännöllinen, jos kaikki osat ovat säännöllisiä ja samanlaisia. (Coxeter 1973)

Tässä tutkielmassa olennaisinta on juuri hyperkuutioihin pohjautuvan hunajakennomallin selvittäminen sillä se on ainoa n -ulotteisen euklidisen avaruuden jakava hunajakennomalli, joka on säännöllinen eli sen se koostuu samanlaisista osista, jotka ovat alemmissä ulottuvuuksissa nelikulmioita ja kuutioita ja ylemissä ulottuvuuksissa, kun $n > 3$, hyperkuutioita.

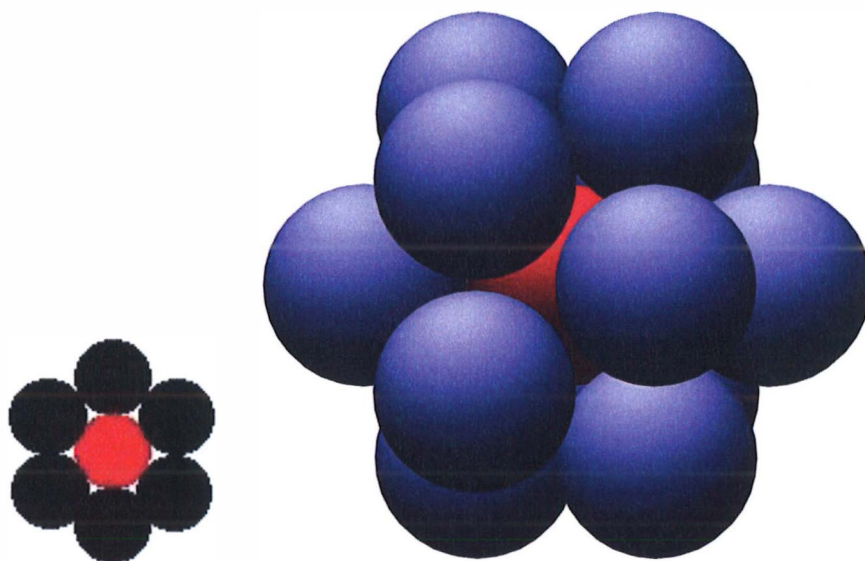
3.4.4 Suuteluluku

Suuteluluku on geometrinen ongelma, joka on saanut nimensä biljardipelistä, jossa pallojen kosketusta toisiinsa kutsutaan englanninkielessä suuteluksi (Pfender & Ziegler 2004). Suutelulukua kutsutaan myös mm. Newtonin luvuksi tai kosketusluvuksi. (Conway & Sloane 1988)

Matematiikassa suuteluluku tarkoittaa sitä määrää n -ulotteisia palloja, joilla voidaan sivuta yhtä samankokoista n -ulotteista palloa. Esimerkiksi 2-ulotteisessa maailmassa suuteluluku on 6 eli ympyrä voidaan reunustaa kuudella samankokoisella ympyrällä. Kolmiulotteisessa euklidisessä avaruudessa luku on 12 ja neliulotteisessa euklidisessä avaruudessa 24. Luku kasvaa ulottuvuuksissa 5, 6 ja 7 vähintään lukuihin 40, 72 ja 126. Korkeammassa ulottuvuuksissa täsmällinen arvo tiedetään vain ulottuvuuksissa 8 ja 24, näissä luvut ovat 240 ja 196560. Geometriassa suuteluluku on määritelty eri ulottuvuuksissa sellaisten ekvivalenttien hypermonipintojen lukumääräksi, jotka voivat koskettaa muita hypermonipintoja leikkaamatta niitä. (Pfender & Ziegler 2004)

Suutelukuongelmassa etsitään suurinta mahdollista suutelukua n -ulotteisissa euklidisissä avaruuksissa. Kaksiulotteinen suuteluluku 6 (kuvio 21 vasemmalla) on triviaali asia ja helppo todeta. Kolmiulotteisessa avaruudessa on myös helppo asetella pallon ympärille 12 samankokoista palloa ja näin todeta, että suuteluluku on vähintään 12. Ongelmaksi muodostui sen todistaminen, että 13. palloa ei saada sijoittumaan niiden joukkoon, sillä tilaa siihen olisi aika paljon. Isaac Newton todisti jo aikanaan 12 pallon mahtuvan yhden pallon ympärille ja lisäksi hänen aikalaisensa David Gregory uskoi 13. pallon myös mah-

tuvan joukkoon. Tämä johti kiistaan pallojen määrästä näiden kahden matemaatikon välille vuonna 1694 (Pfender & Ziegler 2004). Lopullinen todistus määrälle 12 saatiin kuitenkin vasta niin myöhään kuin vuonna 1953. Kuviossa 21 on 12 palloa sijoitettu yhden pallon ympärille, jolloin syntyy eräänlainen ikosaedrimuodostelma (grafiikka: Detlev Stalling, ZIB Berlin) (Pfender & Ziegler 2004). Neliulotteisessa avaruudessa suuteluluku rajautui ajan kanssa kahteen vaihtoehtoon, se oli joko 24 tai 25. Näistä vaihtoehdoista 24 oli selkeä, ainakin se määrä olisi mahdollista sijoittaa neliulotteisen pallon pinnalle ja ongelma kiteytyi hieman samalla tavalla kuin kolmiulotteisessa tapauksessa yhteen kysymykseen: olisiko 25 palloa mahdollista sijoittaa vastaavan samankokoisen neliulotteisen pallon pinnalle. Vastaus on kielteinen, vuonna 2003 Oleg Musin todisti erikoista trikkiä käyttäen, että vastaus on 24 (Musin 2003).



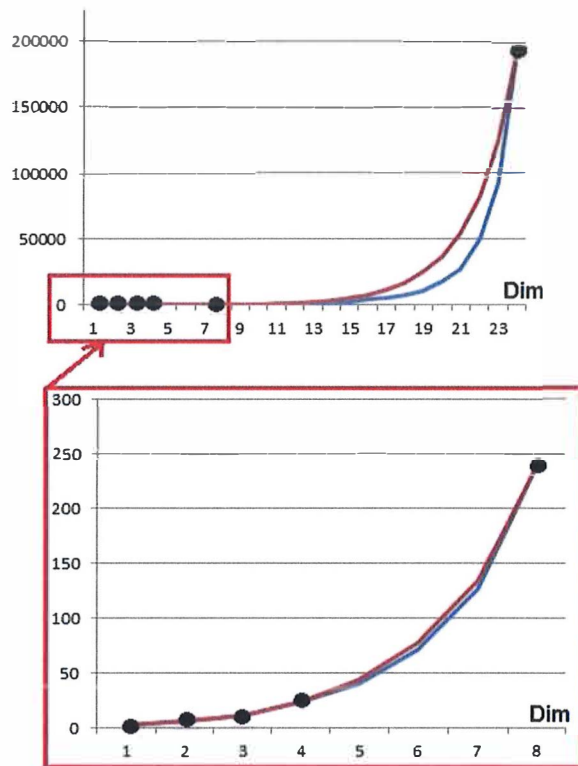
KUVIO 21 Kaksi- ja kolmiulotteinen suuteluluku

Suuteluluvun tarkka arvo on siis tuntematon ulottuvuutta 4 korkeammassa euklidisissa avaruuksissa paitsi kun $n = 8$, jolloin lukua on 240, ja kun $n = 24$, jolloin luku on 196560. Ohessa taulukko, jossa on 24 ensimmäistä suutelulukua (Mittelmann & Vallentin 2010). Tulokset näissä kahdessa ulottuvuudessa liittyvät kahteen vahvasti symmetriseen hilarakenteeseen, jotka tunnetaan nimillä E8 hila ja Leechin hila.

Taulukko 1 Ensimmäiset 24 suutelulukua (Conway & Sloane 1988)

Ulottuvuus	Suuteluluku
1	2
2	6
3	12
4	24
5	ainakin 40 enintään 44
6	ainakin 72 enintään 78
7	ainakin 126 enintään 134
8	240
9	ainakin 306 enintään 364
10	ainakin 500 enintään 554
11	ainakin 582 enintään 870
12	ainakin 840 enintään 1357
13	ainakin 1130 enintään 2069
14	ainakin 1582 enintään 3183
15	ainakin 2564 enintään 4866
16	ainakin 4320 enintään 7355
17	ainakin 5346 enintään 11072
18	ainakin 7398 enintään 16572
19	ainakin 10688 enintään 24812
20	ainakin 17400 enintään 36764
21	ainakin 27720 enintään 54584
22	ainakin 49896 enintään 82340
23	ainakin 93150 enintään 124416
24	196560

Kuviossa 22 on esitetty graafisesti suuteluluvun kasvu eri ulottuvuuksissa. Punainen viiva esittää tunnettua maksimiarvoa ja sininen viiva tunnettua minimiarvoa. Mustat ympyrät taas niitä ulottuvuuksia, joissa täsmällinen arvo on tiedossa.



KUVIO 22 Suutelu-luvun arvot ulottuvuuksissa 1 - 24

3.4.5 Pakkausongelmat

Pakkaamisongelma pitää sisällään hyvin monenlaisia eri alueita, klassinen matkalaukun pakkaamisongelma (knapsack problem) liittyy kombinatorisen optimoinnin alueelle aivan kuten verkkoteorian puolelta kauppamatkustajan ongelma. Matkalaukun pakkaamisongelma, johon liittyy myös pääoman budjetointiongelma, on astian täyttöongelman (bin packing problem) erityistapaus, jossa pyritään maksimoimaan pakattavien esineiden määrä (Dyckhoff 1990).

Aikojen kuluessa pakkausongelmista ja niille rinnakkaisista leikkausongelmista, on käytetty englanninkielisessä kirjallisuudessa hyvinkin vaihtelevia nim, kuten taulukosta 2 (Dyckhoff 1990) selviää. Pakkaus- ja leikkausongelmista käytetään lyhennettä C&P problems (cutting and packing problems).

Taulukko 2 Pakkaus- ja leikkausongelmien nimivariaatioita

Surveys on special aspects of C&P

Author(s)	Year	Notion(s)	Discipline
Brown	1971	Packing, depletion	Computer Science
Salkin/de Kluyver	1975	Knapsack	Logistics
Golden	1976	Cutting stock	Industrial Engineering
Hinxman	1980	Trim loss, assortment	Operational Research
Garey/Johnson	1981	Bin packing	Combinatorial Optimization
Israni/Sanders	1982	Cutting stock, layout	Manufacturing
Rayward-Smith/Shing	1983	Bin packing	Mathematics
Coffman et al.	1984	Bin packing	Computer Science
Dowland	1985	Packing	Operational Research
Dyckhoff et al.	1985	Trim loss	Management
Israni/Sanders	1985	Parts nesting	Production
Berkey/Wang	1987	Bin packing	Operational Research
Dudzinski/Walukiewicz	1987	Knapsack	Operational Research
Martello/Toth	1987	Knapsack	Mathematics
Rode/Rosenberg	1987	Trim loss	Engineering/Production
Dyckhoff et al.	1988	Cutting stock	Production

Tämän tutkielman kannalta mielenkiinto kohdistuu kuitenkin ensisijaisesti geometriseen pakkaamiseen ja siinä erityisesti pallopintojen pakkaamiseen. Pallopintojen (sphere) pakkaaminen tarkoittaa n-ulotteisten pallojen pakkaamista n-ulotteiseen euklidiseen avaruuteen siten, että pallot eivät leikkaa toisiaan. Pallot ovat yleensä kaikki samankokoisia. Pallonpakkausongelmat voidaan myös yleistää erikokoisten pallojen pakkaamiseen, n-ulotteiseen euklidiseen avaruuteen tai epäeuklidisiin avaruuksiin, kuten hyperboliseen avaruuteen pakkaamiseen. Tyypillisessä pallonpakkausongelmassa on tavoitteena löytää asetelma, jossa pallot täyttävät niin suuren määrän tilaa kuin mahdollista. Pallojen täyttämän tilan suhdetta täyttämättömään tilaan osaan kutsutaan pallojen pakkaustiheydeksi.

Tämä pakkaaminen liittyy myös *Keplerin otaksumaan* eli Keplerin konjektuuriin (kuvio 23, oikealla (Mainz & Girolami 2012)), kun kyseessä on kolmiulotteinen euklidinen avaruus, joka pitää täyttää palloilla mahdollisimman tehokkaasti eli saada samaan tilaan mahdollisimman vähän pallojen väistä tyhjää tilaa. Keplerin otaksuma voidaan pukea seuraavaksi teoreemaksi: *Mikään yhteneväisten pallojen pakkaustapa kolmiulotteisessa tilassa ei saavuta suurempaa tiheyttä kuin pintakeskinen kuutiollinen tiivispakkaus, jolloin pakkaustiheys on $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 74\%$.* Keplerin otaksuma on myös 18. järjestyksessä David Hilbertin 23:sta kuuluisasta matemaattisesta ongelmasta. Optimaalisin pakkaustapa on heksagonaalinen tiivispakkaus ja pintakeskinen kuutiollinen tiivispakkaus (kuvio 23, vasemmalla (Hales 2005)), aivan kuten Kepler otaksuikin. Ongelman todisti Thomas Hales ns. "väsytystodistuksella" (proof by exhaustion) eli todistamalla erikseen jokaisen pienen alakohdan ongelmasta. Todistus jäi hieman vajaaksi ja vuonna 2014 Hales vei todistuksen loppuun laajalla tietokoneohjelmalla. (Hales 2005, Hales et al. 2015)

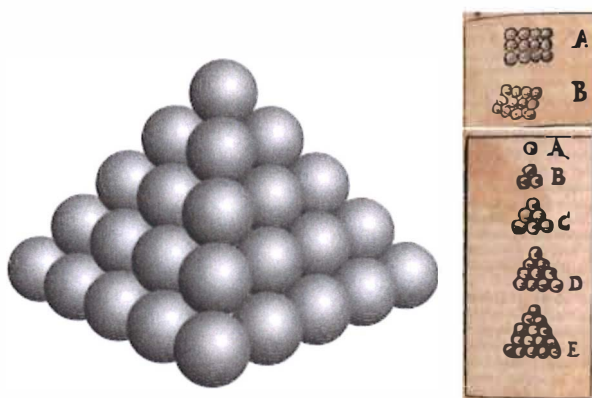
Seuraavassa muutamia Halesin omia huomioita todistuksen kulusta. Kuvauksessa esiintyy käsite *kesy verkko*, jonka varsin pitkään, kahdeksan ehtoa käsittävään määrittelyyn ole tämän tutkielman yhteydessä aiheellista paneutua.

Jokaisen Keplerin otaksunan rajaesimerkin kombinatorinen rakenne on koodattu tasoverkoksi, joka täyttää rajoittavat ehdot. Mitä tahansa verkkoa, joka täyttää nämä ehdot kutsutaan kesyksi. Kaikista isomorfisista kesyistä tasoverkoista on tehty tyhjentävä tietokonehaku. Nämä kesyt tasoverkot koodaavat mahdolliset Keplerin otaksunan reunaesimerkit tasoverkkojen muotoon. Arkisto on tietokoneella tuotettu luettelo kaikista kesyistä verkoista.

Alkuperäinen todistus luokittelee kesyt tasoverkot Javalla kirjoitetun tietoneohjelman avulla. Siksi, muotoilun ensimmäisessä vaiheessa alkuperäinen Java-ohjelma muotoillaan uudelleen kesyjen tasoverkkojen luotteloimiseksi Isabelle/HOL:ille.

Alkuperäisen todistuksen mukana tullut arkisto sisälsi yli 5000 verkkoa. Ensimmäinen muotoilu vähensi arkiston koon 2771 verkkoon.

Tietokonevirhe johti kuitenkin siihen, että kaksi verkkoa puuttui todistushahmotelman varhaisesta vedoksesta. (Hales et al. 2015)



KUVIO 23 Pallojen pakkaaminen ja Keplerin otaksuma

Suoraa todistusta kynällä paperilla ei ole tehty, mutta tulos on tarkistettu myös loogisella HOL -todistusohjelmalla Isabelle. Keplerin ongelma, kuten myös sen ratkaisutapa vertautuu klassiseen karttojen neliväriongelmaan, johon ei myöskään ole löydetty lyhyttä matemaattista todistusta, mutta joka on todistettu samalla tavoin pitkällä tietonekonetodistuksilla lukuisine läpikäytävine konfiguraatioineen ja tarkistettu todistusapurilla. Hales käytti Keplerin otaksunaan Isabelleä, neliväriongelmassa Georges Gonthier ja Benjamin Werner käyttivät vuonna 2004 todistusapuria nimeltä Coq. (Gonthier 2005)

3.5 Yhteenveto

Tässä luvussa on käsitelty tilan paloittelua, pakkaamista ja tasaista täyttämistä tavoitteena hakea malli, jota voitaisiin käyttää pelialustan rakentamiseen eri euklidisissa ulottuvuuksissa siten, että alustan matemaattinen rakenne säilyy samanlaisena. Samanlaisuus tarkoittaa tässä sitä, että malli skaalautuu eri ulottuvuuksissa säännöllisesti, jolloin se on mahdollista yleistää. Luvut 3.1 - 3.3 käsitelivät peruskäsitteitä sekä kaksiulotteisen tason ja kolmiulotteisen tilan tasaista täyttämistä. Luvussa 3.4. siirryttiin yleisratkaisun tarkasteluun n -ulotteisissa euklidisissa avaruuksissa. Luvuissa 3.4.1 ja 3.4.2 käytiin läpi peruskäsitteitä ja tarkasteluun tarvittavia työkaluja eli määriteltiin monipinnat ja selvitettiin Schläflin symboli, jonka avulla monipinnat ja n -ulotteisen tilan tasainen täyttäminen voitiin määritellä ja erotella toisistaan. Luvuissa 3.4.3 ja 3.4.4 selvitettiin suomenkielellä erikoisilta kuulostavat matemaattiset käsitteet eli hunajakennot ja suuteluluku, sekä lopuksi luvussa 3.4.5 pakkausongelmat.

Tämä tässä luvussa käyty käsitteiden taustaselvitys tulee tarpeelliseksi luvussa 8, jossa pyritään hakemaan toimiva malli symmetriselle n -pelaajan pelille. Silloin tarkastelun kohteeksi joutuvat mallit pohjautuvat juuri näihin rakenteisiin.

4 SHAKIN HISTORIA JA ESIHISTORIA

Tässä tutkielmassa käsitellään shakin pohjalta edelleen kehitettyjä pelejä tavoitteena käyttää niitä n-osapuolen peliasetelmien tutkimiseen. Tämän vuoksi on aiheellista katsoa taaksepäin siihen kuinka shakin on aikanaan oletettu syntyneen. Tämä luku jakaantuu kolmeen osaan, joista ensimmäisessä tarkastellaan shakkia vanhempia lautapelejä. Motiivina tälle tarkastelulle on saada käsitys siitä minkälaisista elementeistä ja miten shakki mahdollisesti on kehittynyt. Toisessa osassa tarkastellaan erityisesti shakkipelin syntyvaiheita ja siihen liittyviä eri teorioita. Kolmannessa osassa luodaan vielä katsaus sekä uudempiin, että historiallisiin shakin variaatioihin. Kolmannenosan motiivina on tuoda historiallista ulottuvuutta shakkipelien muunnelmiin ja näin luoda vertauspintaa seuraavissa luvuissa tehtyihin tämän tutkielman muunnelmiin.

Vanhimmat tunnetut lautapelit ovat ainakin 5000 vuotta vanhoja. Yksi vanhimmista ja tunnetuimmista on shakki, jonka juuret ulottuvat liki 2000 vuoden päähän. Aloitetaan tarkastelu shakkia ja sen esimuotoja edeltäneistä lautapeleistä.

Tässä luvussa on myös omia huomioita ja pikkutuloksia, mutta ne on selkeyden vuoksi on sijoitettu yhteenvetolukuun. Näistä huomioista toinen käsittelee kuuluisaa Faistoksen kiekkoa ja toinen lautapelien evoluutiota.

4.1 Shakille rinnakkaisia vanhoja strategiapelejä

Maailman vanhimmat lautapelit voidaan jakaa eri tavoin, yksi tapa on jakaa ne sotapeleihin, kilpajuoksupeleihin (mm. backgammon), asemapeleihin (mm. go), mancalapeleihin (mm. mancala), noppapeleihin ja dominopeleihin (Bell 1979). Tämän päivän peleistä backgammon lienee tunnetuin kilpajuoksupeleistä, shakki ja tammi taas sotapeleistä sekä go asemapeleistä. Tarkastellaan ensimmäisessä aliluvussa neljää vanhimman joukkoon kuuluvaa juoksupeliä, toisessa aliluvussa kolmea vanhaa strategia/sota -peliä ja kolmannessa aliluvussa ase-

mapeleistä go -peliä, sekä lisäksi kahta muuta vanhaa strategiapeliä. Näin sen vuoksi, että kaikilla näillä peleillä saattaa olla jotain tekemistä shakin esihistorian kanssa. Maailman vanhimpiin peleihin kuuluvat myös mancala pelit, jotka ovat mukana ainoastaan mainintana yhteenvetoluvussa. Yhteenvetoluvuissa on myös edellisistä irrallinen huomio muinaisesta Faistoksen kiekosta ja sen mahdollisesta kytkeytymistä ensimmäisessä aliluvussa mainittuihin juoksupelihin.

4.1.1 Neljä juoksupeliä

Tarkastellaan ensin juoksupeljä, joiden joukosta löytyvät myös vanhimmat lautapelit eli egyptiläiset mehen ja senet, sekä sumerilainen Urin kuninkaallinen peli. Neljäntenä juoksupelinä tutustutaan tässä luvussa ashtapadaan, koska se on mahdollinen yhdistävä linkki juoksupelien ja shakin välillä.

4.1.1.1 Mehen, muinainen n-pelaajan peli

Varhaisin maininta muinaisegyptiläisestä pelistä mehen on löydetty Hesy-Ra:n hautakammioista ajalta 2800 - 2600 eKr. Shore (1963) selvittää seuravaksi yksityiskohtia pelilöydöstä.

Kun muinaisen pelin pelilauta ja nappulat tunnetaan ja on trajolla kuvia pelin kulusta, niin uskoisi olevan helppoa rekonstruoida myös pelin säännöt. Yritykset selvittää näin muinaisen Egyptin pelejä eivät ole onnistuneet tyydyttävästi, jos niin sanoun "käärmepelein" kohdalla ei ollut edes mahdollista asettaa pelinappuloita paikoilleen.

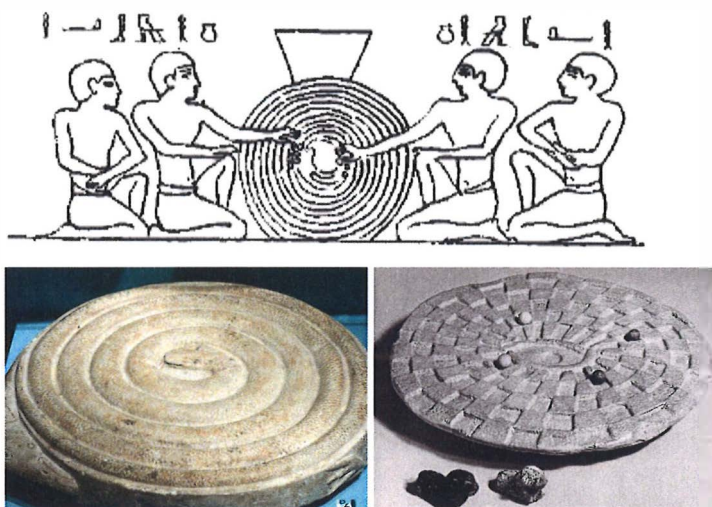
Pelin vaatimat asiat löytyvät seinämaalauksesta Hesy-Ran hautakammiossa, läheltä pyramidia Djoserissa. Pyramidi on kolmannen dynastian ajalta (2800 eaa). Pelilauta on pyöreä, ja sen yläpinta on koristeltu kerälle kiertyneen käärmeen hahmolla. Käärmeen pää on keskellä ja pyrstö reunalla. Käärme on jaettu lähes 400:aan neliöön. Pelinappulat ovat sivulla laatikossa, käsittäen kuuden eläimen joukon (kolme urosleijonaa ja kolme naarasleijonaa) ja kolmekymmentäkuusi värillistä marmorikuulaa. (Shore 1963)

Mehen, jonka käänös on "kiemurainen", oli alkujaan myyttinen egyptiläinen käärmejumala ja niinpä pelilaudalla olevan käärmeen on arveltu esittävän maailmankäärmettä liittyen myyttiseen tarinaan Osiriksen matkasta Manalaan. Maailmankäärme on ympäri maailmaa tunnettu mytologinen symboli, *ouroboros*, renkaan muodossa oleva käärmefiguuri, joka syö omaa häntäänsä. Se tunnetaan myös Pohjoismaissa, viikinkien jumaltaruissa se kulki nimellä *jormungandr* tai *jormagund*. Egyptissä pelin pelaamisella oli uskonnollismyyttistä merkitystä matkalla kuolleiden maahan ja takaisin. Mehenin myyttisyys ilmenee myös aliluvussa 4.1.1.2 esiteltävässä senet pelissä. Benedikt Rothöhler kertoo: "Muinaisegyptiläisiin lautapeleihin liittyi yleensä uskonnollinen symboliikka, vaikka on usein hyvin vaikea löytää sen tarkkaa merkitystä. Egyptin lautapelejä ei voi tutkia ottamatta huomioon tätä taustaa. Symbolismi egyptiläis-

sä lautapelejä, erityisesti mehenissä ja senetissä, on suoraan yhteydessä jumalalisiin merkitysarvoihin” (Schädler 1999, page 10) (Rothöhler 1999).

Itse peli muodostuu siis pyöreästä kiekosta, jonka sisällä on käärme (kuvio 24, alhaalla vasemmalla). Käärmeen pää on, kuten Shore mainitsi, kiekon keskellä ja sen selässä noin 400 lokeroa, oletetusti pelinappuloille. Pelistä on löydetty muitakin versioita, joissa lokeroiden määrä vaihtelee. Lisäksi peliin kuuluvat heittotikut, pelivälineitä, jotka ovat kuulia ja leijonia. Mehenistä ei ole löytynyt sääntöjä, mutta Sudanissa ja joissain arabimaissa pelataan hyeena-peliä, joka on vastaavanlainen ja sen pohjalta on päätelty mehenin säännöt. Koska mehenin pelinappuloihin kuuluu kuusi eriväristä leijonaa, ja kutakin leijonaa kohti kuusi vastaavanväristä kuulaa, siis yhteensä 36 kuulaa, niin mehenin on päätelty olleen kuuden pelaajan peli ja näin **vanhin tunnettu monen pelaajan peli** (Rogersdotter 2011).

Kuviossa 24 on kolme kuvaa mehenistä. Ylhäällä neljä miestä pelaa peliä (Rothöhler 1999). Alhaalla vasemmalla on pelialusta, jossa käärme erottuu selkeästi (Rob Koopman, Mehen, old Egyptian serpent game, <https://creativecommons.org/licenses/by/2.0/>). Oikealla on pelilauta British Museumista. Museon seloste kertoo pelistä: ” Kuvassa on norsunluinen hiipivä leijona, joka tarkoitettu käytettäväksi pelinappulana, figuuri on alun perin veistetty hyvin yksityiskohtaisesti, mutta on nyt melko huonossa kunnossa. Etukäpälät puuttuvat, kuten myös toinen puoli päätä. Lisäksi norsunluun pinta on rapistunut. Joitain piirteitä on silti edelleen havaittavissa, kuten silmät ja harjan yksityiskohdat, sekä hieman avoinna oleva suu hampaineen. Yksityiskohdista on säilynyt myös pieni alue leuan alla leuka ja korva. Leijonan alaosa on kulu- nut sileäksi käytössä.” (British Museum number EA66216)

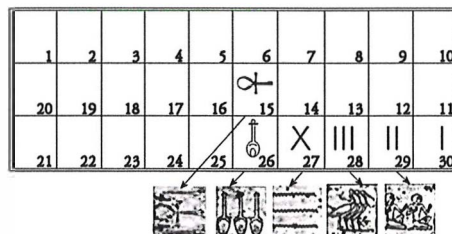


KUVIO 24 Mehen, pelialusta ja pelitilanne

Pelin kulku ja säännöt ovat tiivistetysti seuraavanlaiset. Kukin pelaaja heittää arvontatikkujaan ja saatuaan tietyn lukeman voi pelaaja siirtää ensimmäisen kuulun alkuruutuun eli käärmeen häntään. Sen jälkeen kuulat matkaavat kohti keskustaa, josta kääntyvät takaisin. Kuulan päästyä takaisin lähtöpisteeseen voi pelaaja lähettää liikkeelle leijonan. Kun leijona on päässyt keskellä olevaan käärmeen päähän, niin se kääntyy takaisin. Paluumatkalla leijona voi syödä tielleen osuneet muiden pelaajien kuulat. Pelin voittaa se, joka on syönyt kaikki vastustajien kuulat tai eniten niitä.

4.1.1.2 Senet

Myös senet on vanha egyptiläinen peli ja siitä varhaisin maininta löytyy ajalta 3500 eKr. (Cazaux 2003, Piccione 1980). Senet on juoksupeli kuten mehenkin. Paitsi, että peli on yksi maailman vanhimmista tunnetuista, se ansaitsee tulla mainituksi myös siksi, että pyramidien piirroksista löytyy kuvio, joissa faarao pelaa puolisonsa kanssa senet peliä. Kuviossa 25 ylhäällä vasemmalla on Tutankhamonin hautakammioista löydetty senet-pelilauta nappuloineen ja oikealla kuningatar Nefertari pelaa senetiä hautakammionsa seinällä olevassa maalauksessa, alakuvassa on numeroitu pelilauta, jossa numerot kertovat liikkumisjärjestyksen. Ruuduilla 15 ja 26-30 on erityismerkitys ja laudan alla on esitetty millä kuvioilla ne esitettiin Tutankhamonin hautakammioista löytyneellä laudalla (Hageman 2005). Aikoinaan näiden kuvien perusteella tehtiin myös oletuksia, että peli olisi ollut shakki ja shakin alkuperämaa näin Egypti (Ferlito & Sanvito 1990). Kuvassa näkyvien nappuloiden perusteella on kuitenkin helppo päätellä, että pyramidin kuvassa näkyvä peli on senet. Nappuloita on vain kahdeksan eri tyyppiä.



KUVIO 25 Senet

Pelin kulku on lyhyesti seuraavanlainen. Pelilaudalla on 30 ruutua ja kummallakin pelaajalla viisi nappulaa. Nappuloita siirretään laudalla neljän arpatikun antamin lukemin, eli hieman samoin kuin mehenissä. Arpatikkujen antamat tulokset määräävät myös siirtovuoron vaihtumisen, mutta numeroiden antamia siirtotapoja ei ole tässä yhteydessä aihetta selvittää tarkemmin. Jos nappula osuu ruutuun, jossa on vastustajan nappula, niin tämä joutuu siirtämään sen alkuruutuun. Kuitenkin jos kaksi nappulaa on perättäisissä ruuduissa, niin ne ovat turvassa. Kolme nappulaa perättäisissä ruuduissa taas muodostaa esteen, jota vastustaja ei voi ylittää. Laudan ruudukkoa kierretään "s"-kirjaimen muotoista rataa ensin yhden laidan 10 ruutua, sitten takaisin 10 keskiruutua ja lopuksi toisen laidan 10 ruutua. Laudan viimeiset viisi ruutua ovat symbolein merkityjä erikoisruutuja, joista yhdestä joutuu, pelivälineen siihen osuessa, palaamaan takaisin, laudan keskellä olevaan 15. ruutuun, muut neljä ovat turvaruutuja. Myös 15. ruutu on symbolilla merkitty turvaruutu. Pelin tavoitteena on saada ensimmäisenä omat nappulat pois laudalta. Nappulan saa poistaa jos se osuu tasaluvulla viimeiseen eli 30. ruutuun (Hageman 2005, Botermans et al. 1990).

4.1.1.3 Urin kuninkaallinen 20-ruutua peli

Urin kuninkaallinen peli muistuttaa paljon senetiä sillä se on kilpajuoksupeli, missä pelaajat juoksuuttavat nappuloitaan tietyn kiemuraisen reitin kautta. Pelistä ei kuitenkaan ole säilynyt sääntöjä ja ne onkin päätelty pelilautojen ja nappuloiden pohjalta. Varhaisimmat löydöt tästä pelistä ovat Mesopotamiasta 2600 eKr. ja peli löytyy myöhemmin, 1800 eKr., myös Egyptistä hieman erilaisella laudan muodolla (Cazaux 2003), ks. kuvio 28. Seuraavassa pari tutkijoiden ehdottamaa sääntövaihtoehtoa.

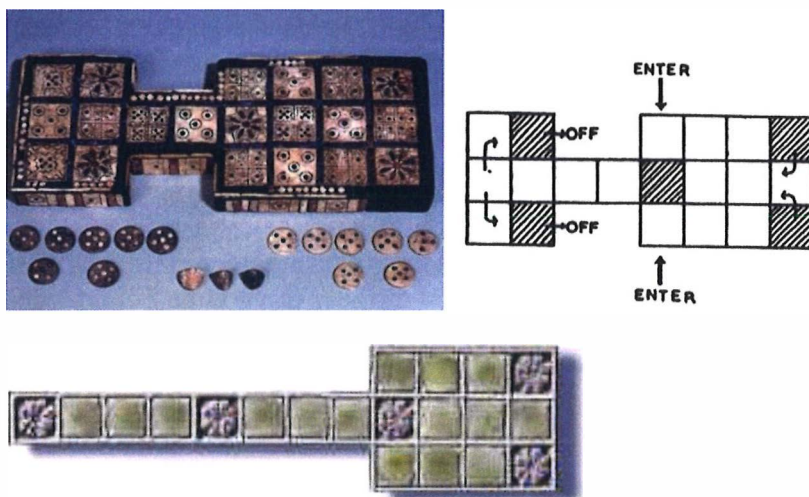
Kummallakin pelaajalla on 7 nappulaa ja liikkuminen ratkaistaan heittämällä pieniä tetraedrin muotoisia noppiä. Pelaajat aloittavat laudan suuremmasta osiosta kukkakuvioista, kumpikin omassa kulmassaan olevasta kukasta (kuvio 26, vasemmalla)⁵. Kuvan 26 laudoilla alempana olevan pelaajan reitti kulkee pitkää reunaa myöten, kapeikon läpi ja kiertää sitten vastapäivään laudan pienemmän osion palaten takaisin keskimmäisiä ruutuja pitkin. Toisen pelaajan reitti on peilikuva tästä. Kuviossa 26 on R.C. Bellin hieman erilainen aloitusehdotelma⁶ (Bell 1979). Kuviossa vasemmalla on British Museumissa oleva alkuperäinen peli, joka on esitetty tässä peilikuvana helpottamaan vertailua kahteen muuhun kuvaan. Kuviossa 26 alimmaisena⁷ oleva lauta on edellä mainittu pelin myöhempi muunneltu versio Egyptistä.

⁵ By BabelStone (Own work), CC0,
<http://mentalfloss.com/article/62089/11-ancient-board-games>
<https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.en>

⁶ Kuvio 26, oikealla

⁷ <http://www.luckydog.pwp.blueyonder.co.uk/games/ur/>

Jos nappula osuu ruutuun, jossa on vastustajan nappula, niin vastustajan nappulan täytyy aloittaa peli alusta. Kukkakuvioiset ruudut ovat turvaruutuja ja niissä voi olla useita nappuloita. Pelin voittaa se, joka saa nappulansa ensin pois laudalta (Bell 1979, Botermans et al. 1990), aivan kuten senetissä.

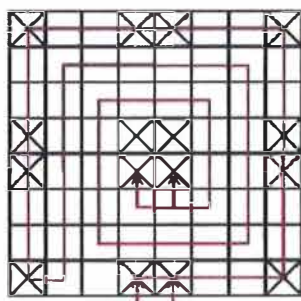


KUVIO 26 Muinainen 20-ruutua -peli eli kuninkaallinen peli Urista

4.1.1.4 Ashtapada

Ashtapada on peli, jonka arvellaan olleen shaturangan⁸ ja siten myös shakin pohjana erityisesti pelilautansa vuoksi. Varhaisin maininta sanasta ashtapada, joka tarkoitti "kahdeksan jalkaa" tai "kahdeksan kenttää", löytyy sanskriitin kielellä ajalta 400 eKr. (Cazaux 2003). Ashtapadaa saattoi pelata 2, 3 tai 4 pelaajaa, joista kullakin oli kaksi nappulaa. Pelaaja toi kaksi nappulaansa peliin oman sivunsa kahden keskimmäisen ruudun kautta (kuvio 27). Nappuloita siirrettiin arpanopan antamien tulosten perusteella kuvaan punaisella linjassa merkittyä reittiä pitkin. Kun nappula pääsi yhteen neljästä keskiruudusta, sen sai poistaa laudalta. Jos nappula osuu ruutuun, jossa on vastustajan nappula, joutuu vastustajan nappula palaamaan alkuun. Merkityt ruudut ovat suojaruutuja, joissa nappulat ovat turvassa vastustajiltaan. Voittaja on nappulansa ensiksi laudalta pois saanut pelaaja. (Botermans et al. 1990)

⁸ Ks. luku 4.2.1 Shaturanga



KUVIO 27 Ashatapada juoksupeli

4.1.1.5 Yhteenveto

On helppo havaita näiden neljän juoksupelin samankaltaisuus, vaikka maantieteellinen etäisyys on pitkä eli Egyptistä Intiaan. Viimeisenä esitelty ashatapada toimii eräänlaisena yhdistävänä linkkinä mehenin ja shakin välillä. Pelin kulku ashatapadassa on kuin mehenissä kilpajuoksu käärmeen selässä, mutta alustana käytetään ruudukkolautaa, joka vastaa nykyistä shakkilautaa.

4.1.2 Tafl pelit, Latrunculi ja Petteia

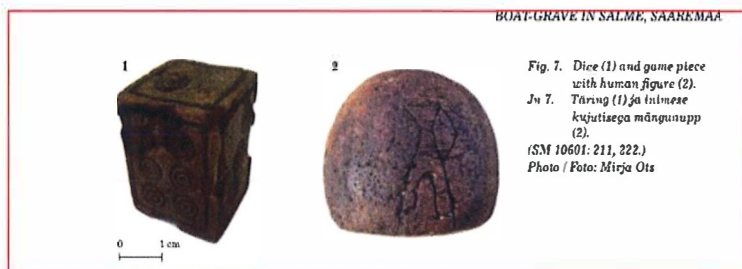
Tafl pelit ovat viikinkien mukana Pohjoismaihin, Brittein saarille ja Venäjälle levinnyt strategiapelityyppi, jolla on arveltu olevan yhteyksiä myös shakin syntyyn koska se liittyy samaan aikakauteen. Pelin alkuperää ei varmuudella tiedetä, se on saattanut olla viikinkien kehittämä, mutta on myös esitetty väitteitä että viikingit olisivat poimineet pelin Brittein saarilta, mahdollisesti pikteilä (Lawrence 2013). Yleinen arvio on, että sen pohjana olisi shakin edeltäjää shaturangaakin vanhempi roomalaisten sotilaiden peli latrunculi. Latrunculin taas on arveltu pohjautuvan kreikkalaiseen petteiaan. Petteialla on puolestaan arvioitu olleen vaikutusta shakin syntyyn. Tämän vuoksi nämä kolme peliä käsitellään tässä omassa kohdassaan.

4.1.2.1 Hneftafl ja muut tafl pelit

Hneftafl on tafl-peleistä vanhin tunnettu, ensimmäiset havainnot ovat jo 600 - 700 -luvulta. Tosin Tanskasta on vanhempikin Vimosen löytö 400-luvulta. Vimosen lauta saattoi kuitenkin olla roomalainen latrunculi -peli. Hneftafl, eli *kuninkaan lauta*, levisi viikinkien mukana 800 - 1000 luvuilla, minkä jälkeen shakki syrjäytti sen. Viimeiset havainnot pelistä ovat Walesista 1587 ja Lapista 1723, näiden pohjalta on päätelty myös pelin säännöt (Page 1969).

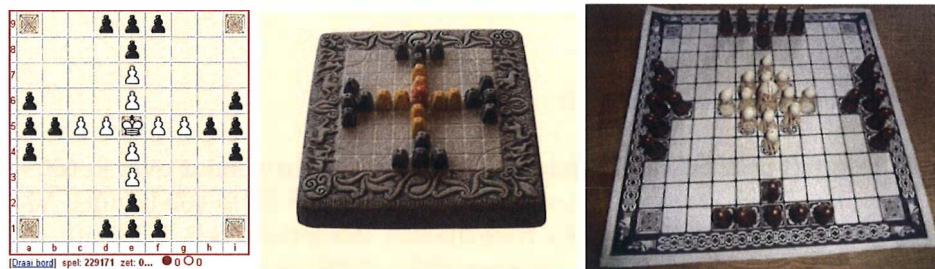
Vanhin varmistettu löytö hneftalista on varsin tuore ja tehtiin vuosina 2008 ja 2011 Viron Salmesta löydetyistä viikinkilaidoista (Konsa et al. 2009, Peets, Allmäe & Maldre 2011). Laivalöydöistä vanhempi on ajoitettu ajalle 650 -

720 jKr., mutta laiva on oletusten mukaan rakennettu jo 600-luvun alussa. Oletettavasti siis kyseinen pelikin on 600 -luvulta. Tiedon mielenkiintoarvo on siinä, että shakin edeltäjänä pidetty shaturanga mainitaan nimenä ensimmäistä kertaa tuolla samalla vuosisadalla. Laivoista ei löytynyt selkeästi pelilaudaksi tunnistettavaa esinettä, mutta vanhemmasta laivasta arpanoppia ja 72 soturinappulaa ja yksi kuningas. Nappuloiden määrä viittaa kahteen peliin sillä hneftaflissa on 36 soturinappulaa. Kuningasnappulaan oli piirretty ihmisen hahmo. Kuviossa 28 (Peets, Allmäe & Maldre 2011) on vasemmalla arpanoppa ja oikealla kuningasnappula vanhemmasta laivasta. Toisesta laivasta löytyi kuningasnappula, jolla oli päässään metallinen kypärää esittävä nappi.



KUVIO 28 Salmesta, Virosta löytyneitä hneftaflin pelivälineitä

Säännöt tunnetaan parhaiten saamelaisten tablut-pelistä, jota pelattiin Carl Linnaeuksen dokumentoinnin mukaan vielä 1700-luvulla Lapissa (Lawrence 2013, Bayless 2005, Helmfriid 2005). Tablutissa on keskelle sijoitettu viikinkien sijasta Ruotsin armeijan sotilaita 1700-luvun univormuissa ja piirittävät joukot ovat venäläisiä sotilaita. Piirittäviä sotilaita on 16 ja keskellä olevaa kuningasta puolustaa 8 sotilasta (kuvi 29, vasemmalla). Mainittakoon, että irlantilaisilla oli vastaavanlainen peli *fidchell*, Bretonin kelteillä *gwezboell* ja Walesissa pelatussa *gwyddbwyll*-pelissä (Niehues 2014) ovat laudan koko ja nappuloiden asemat aivan samat kuin tablutissa.



KUVIO 29 Tablut⁹, gwyddbwyll¹⁰ ja hneftafl

⁹ © Zygomatic, <http://www.yourturnmyturn.com/rules/tablut.php>

¹⁰ Copyright Mentions légale, Design: C.Deldin Store-Factory, <http://www.lecomptoirdesjeux.com/gwezboell-granit-reconstitue.htm>

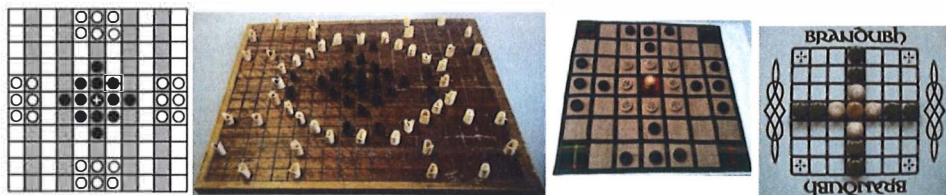
Selvitetään tafl-pelien säännöt kuitenkin vain hneftaflin osalta. Muissa tafl-peleissä ne ovat varsin samankaltaiset, suurimmat erot ovat pelinappuloiden alkuasetelmissa ja laudan koossa. Käytetään sääntöjen selvittämisessä kuvion 29 oikean puoleisen kuvan (itse otettu kuva) peliä, jonka pelilauta on tarkka kopio norjalaisesta Gokstadin viikinkilaivasta löydetystä laudasta (Helmfrid 2005). Pelinappulat puolestaan ovat kopioita Ulko-Hebrideiltä, Skotlannin rannikolla, löytyneistä nappuloista. Tämän pelilaudan on kirjoittaja ostanut vuonna 2014 Islannin Kansallismuseosta seuraavalla informaatiolla: ”Kankaisen pelilaudan ornamentit pohjautuvat Gokstadin viikinkilaivaan, josta viikinkipeli löydettiin. Nappulat puolestaan perustuvat kuuluisiin Lewisin shakkinappuloihin, jotka löydettiin Ulko-Hebrideilta Skotlannin länsipuolelta, alueelta joka oli viikinkivallan alla. (noin 1100 jKr).

Pelin säännöt ovat yksinkertaiset. Pelilauta on 11x11 ruutua. Piirittävällä (musta) osapuolella 24 soturia, kuusi kullakin sivulla kuvan osoittamalla tavalla. Puolustavalla (valkea) osapuolella on kuningas laudan keskimmaisessä ruudussa, jota puolustaa 12 soturia ryhmitettynä kuvan osoittamalla tavalla.

Pelin tavoite poikkeaa valkoisella ja mustalla. Valkoinen voittaa jos sen kuningas onnistuu pakenemaan johonkin turvalinnakkeeseen, jotka on sijoitettu laudan neljään kulmaan. Musta voittaa jos se onnistuu vangitsemaan Valkoisen kuninkaan.

Kaikki nappulat liikkuvat samalla tavoin kuin shakin tornit eli ruutujen sivujen suuntaan. Liikkua voi niin pitkälle kuin on vapaita ruutuja, mutta nappuloiden yli ei voi hypätä. Keskellä oleva ruutu on turvalinnake, jossa kuningas ei ole uhattuna ja johon soturi ei saa pysähtyä. Kuningas on vangittu jos se on jokaiselta neljältä sivultaan vastapuolen soturin tai pelilaudan reunan piirittämä. Soturi on ”syöty” ja poistetaan laudalta jos se on kahdelta vastakkaiselta puolelta vastapuolen soturin piirittämä tai vaihtoehtoisesti toiselta puolen vastapuolen soturin ja toiselta jonkin linnakkeen välissä.

Kuviossa 30 on vielä neljä muuta tawl -pelin versiota. Tawlbwrdd walesilaisten, Alea Evangelii, saksien, Ard Ri (kuva: Cambridge Open Studios, <http://www.camopenstudios.co.uk/games>) skottien ja Brandubh irlantilaisten versio tästä pelistä (Helmfrid 2005).



KUVIO 30 Tawlbwrdd¹¹, Alea Evangelii¹², Ard Ri ja Brandubh¹³

¹¹ (Helmfrid 2005)

¹² (Botermans et al. 1990)

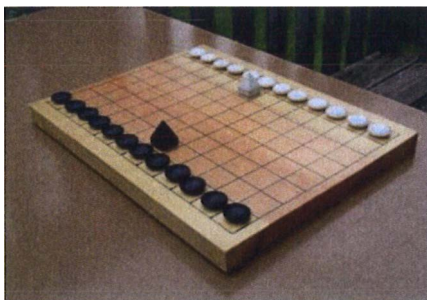
Shakin rantautuessa Eurooppaan se sekoitettiin välillä tafl peleihin. Tämän vuoksi pelejä alettiin erotella alkumääritelmän perusteella kuten tehtiin hneftaflin kohdalla, minkä seurauksena shakkia ryhdyttiin kutsuttuun nimellä Skáktafl. Myös muiden tafl-pelien nimillä oli merkitykset, kuten: hnefatafl oli ”nyrkin lautapeli”, tawlbwrdd ”pitkä pelilaita” and alea evangelií ”Pyhien lautapeli” (Bayless 2005).

Mielenkiintoinen on myös olettaus, että hneftafl olisikin ollut alkuaan piktien kehittämä peli (Lawrence 2013), mikä siirtäisi sen syntyhistorian huomattavasti kauemmaksi. Piktit asuttivat Skotlantia ennen Irlannista tulleita skotteja, joihin he myöhemmin sulautuivat.

4.1.2.2 Latrunculi

Roomalaista lautapeliä latrunculi (*sotilaiden peli tai pikku sotilaat*) on pidetty pelinä, jonka pohjalta syntyivät viikinkien tafl pelit. Vanhin maininta tästä pelistä on Varrolta 116 – 27 e.Kr (Botan & Nuțu 2009). Pelilautoja on erikokoisia, 8x8 neliöruudun koosta kokoon 8x12 ja ehdotetuissa säännöissä on pieniä vivahdeeroja. Yleisesti ottaen säännöt ovat seuraavat:

Jos käytössä on kuvion 31¹⁴ mukainen pelilauta, niin kummallakin pelaajalla on takarivissä 12 sotilasta. Niiden eteen, keskelle asetetaan *dux*, johtaja. Kaikki nappulat liikkuvat sivujen suuntaan niin pitkälle kuin pääsevät eli kuten torni shakissa tai kuten edellä mainitut hnefataflin nappulat. Nappulat myös syödään samoin kuin hnefataflissa eli nappula on syöty jos sen kummallakin puolella on vastustajan nappula. Poikkeus on *dux*, joka tulee piirittää jokaiselta sivultaan. *Dux* liikkuu muuten samoin kuin sotilaat, mutta se saa loikata edessä olevan nappulan yli mitä sotilas ei saa tehdä. Peli päättyy kun *dux* on piiritetty tai toisen armeija on muutoin tuhottu (Perkis 2010).



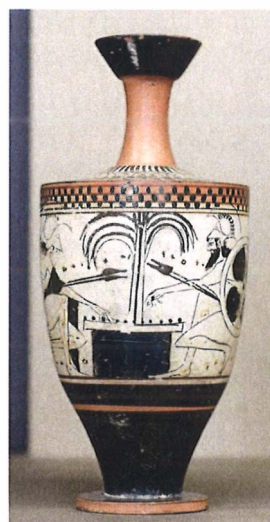
KUVIO 31 Latrunculi -peli

¹³ © Prawa autorskie - Bazgranie | ZnadPlanszy.pl ,
<http://bazgranie.znadplanszy.pl/2015/02/28/tablut-laponski-reprezentant-gier-z-rodziny-tafl/>

¹⁴ Author's Note & Disclaimer: Permission is granted to any and all who wish to link or borrow images and text, they are used under the Internet Fair Use policy for educational resources. Dr. Władysław Jan Kowalski,
www.aerobiologicalengineering.com/wxk116/Roman/BoardGames/latruncu.html

4.1.2.3 Petteia

Petteia on mielenkiintoinen historian arvoitus, peli josta on kuvia kuinka Achilles ja Ajax pelaavat sitä muinaisessa Troijassa. Ruukkujen (kuvio 32)¹⁵ kuvat ovat ajalta 550 - 500 eKr., joten peli on ainakin niin vanha. Noilta ajoilta ovat myös vanhimmat kirjalliset lähteet pelistä, esimerkiksi Platon ja Aristoteles ovat maininneet pelin. Petteia voi olla vanhempikin sillä Troijan hävittänyt sota käytiin todennäköisesti noin 1190 eKr. Kuvat eivät kerro mitään pelilaudan muodosta sillä ne ovat sivusuunnasta (kuvio 32)¹⁶. Pelissä ei käytetä noppaa, vaan se oli puhdas strategiapeli. Onkin heitetty olettamus, että pelin kulkeutuessa kreikkalaisten sotilaiden mukana Aleksanteri Suuren sotaretkillä Intiaan, niin se olisi vaikuttanut siellä tuolloin nopalla pelattavaan shaturangaan ja muuttanut sitä strategiapeliksi antaen näin sysäyksen shakin kehitykselle. Tämä on kuitenkin vain arvelua, sillä petteiasta ei ole säilynyt sääntöjä (Austin 1940, Mark 2007). Pelin sääntöjä on kuitenkin päätelty aika pitkälle ja niiden suhteen se todella muistuttaa aika paljon latrunculia.



KUVIO 32 Petteia

Petteian oletetaan olleen edellä esitellyn roomalaisen latrunculin kaltainen ja jälkimmäisen kehittyneen sen pohjalta? Kreikkalainen filosofi Platon, joka eli 300 - 400 eKr, kirjoitti pelin olevan peräisin Egyptistä. Enemmän tietoa löytyy pelistä nimellä *poleis* (kaupungit) ja välillä nimeä petteia ja poleis (myös polis) on käytetty rinnan. Poleisin avulla on päätelty myös petteian sääntöjä. Pelilauta on yleensä kokoa 8x8 tai 8x12. Laudan vastakkaisille pitkille sivuille on laitettu

¹⁵ <http://www.gamesmuseum.uwaterloo.ca/Archives/Austin/>

¹⁶ Public domain, Workshop of Diosphos Painter - Marie-Lan Nguyen (2011), https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AAchilles_Ajax_dice_Louvre_MNB911.jpg

yhteen riviin pelinappulat. Nappuloita liikutetaan samoin kuin latrunculissa, siis kuin tornia shakissa. Myös vastustajan nappulan syöminen tapahtuu kuin latrunculissa sieppaamalla vastustajan nappula omien nappuloiden väliin. Tässä pelissä ei kuitenkaan ole mitään *johtaja* nappulaa, joten pelin voitti ilmeisesti se, joka on ensin syönyt vastustajan nappulat. Peli on saattanut päättyä myös shakkimaisesti mattiin, sillä eräessä kirjoituksessaan noin 380 eKr. Platon kuvaillee: ”huonot petteian pelaajat, jotka älykkäämmät pelaajat ovat lopulta ahtaneet nurkkaan ja kykenemättömiksi liikuttamaan nappuloitaan”. Siis pelissä olisi ikään kuin ”matitettu” kaikki vastustajan nappulat. Platon käyttää tässä petteia vertauksena hyvistä ja huonoista filosofian opiskelijoista, mutta avaa lauseellaan näin samalla petteian sääntöjä. (Samsin 2002).

4.1.3 Seega, tammi ja alquerque

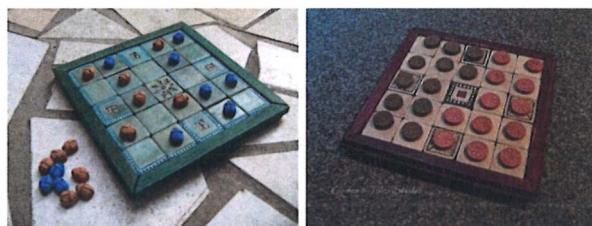
Edellä käsiteltiin jo kilpajuoksupelejä ja sotapelejä. Tämän aliluvun kolme peliä ovat myös strategiapelejä, jotka rakenteeltaan hieman erilaisia. Näissä kolmessa pelissä on kuitenkin yhdistäviä piirteitä, jotka antavat aiheen muutamaa huomioon yhteenveto-osassa.

4.1.3.1 Seega

Seegan säännöt ovat yksinkertaiset, mutta peliä on kuvailtu vaikeustasoltaan, jopa go-peliä monimutkaisemmaksi. Shakin, backgammonin, tammen, othellon ja gon kaltaiset pelit ovat jo kauan olleet tekoälytutkijoiden mielenkiinnon kohteena. Muinainen egyptiläinen lautapeli, seega, on haastava peli ja monin tavoin vaikeampi kuin shakki ja verrattavissa vaikeustasoltaan jopa go-peliin (Abdelbar, Ragab & Mitri 2004). Pelialusta on verraten pieni vain 5x5 neliöruutua käsittävä lauta (kuvio 33, vasen kuva)¹⁷. Toki lautakokoja oli muitakin, aina 9x9 ruutuiseen saakka. Näin ollen pelilauta olikin helppo tehdä minne vain, vaikka piirtää hiekkiaan. Pienimmällä 25 ruudun laudalla kummallakin pelaajalla on 12 nappulaa eli laudalle jää ainoastaan yksi vapaa ruutu, keskimäinen. Pelin alussa pelaajat arpovat aloitusvuoron, minkä jälkeen he asettavat nappulansa vuorotellen kaksi kerrallaan mihin tahansa ruutuun paitsi keskimmäiseen. Kun kaikki nappulat ovat laudalla, niin siirrot aloittaa viimeiset kaksi nappulaa sinne asettanut. Nappulat siirtyvät vaaka- ja pystysuuntaan kuten tornit shakissa. Vastustajan nappulan voi syödä aivan samoin kuin aiemmissa tafl- ja latrunculipeleissä eli saartamalla sen kahden oman nappulan väliin. Nappulaa voi siirtää niin kauan kuin sillä voi syödä. Vastustajan nappulan syöminen on pakollista jos se on mahdollista. Keskimäinen ruutu on turvaruutu. Jos yhtään siirtoa ei voi tehdä, niin vuoro siirtyy vastustajalle. Pelaaja saa ”suuren voiton”,

¹⁷ www.etsy.com/listing/94083139/egyptian-seega-game-board-with-midnight
Etsy has been a Certified B Corporation since 2012.

jos saa syötyä kaikki vastustajan nappulat. Näin ei useinkaan käy ja niinpä usein on tuloksena tasapeli tai ”pieni voitto” eli (Botermans et al. 1990).



KUVIO 33 Seega ja somalialainen seega

Plato oletti kreikkalaisen petteian olevan egyptiläistä alkuperää ja seegaa on verrattu petteiaan (Austin 1940), joten sitä on tarjottu myös Platon mainitsemaksi petteian egyptiläiseksi esikuvaksi. Nykykäsityksen mukaan seega on kuitenkin peräisin myöhemmältä ajalta, Rooman ajan Egyptistä. Seegalla ja petteialla on tosin saattanut olla pohjana jokin tuntematon vanhempi egyptiläinen peli, se johon Plato viittasi. Seega tunnetaan myös nimillä seeja ja siga, joten tilannetta sekoittaa vielä se, että Murray käyttää myös intialaisesta saturankapelistä nimeä siga (Samsin 2002). Mielenkiintoinen on myös seegan mahdollinen yhteys *tammeen*. Tammipelihän eroaa tähän mennessä esitellyistä peleistä siinä, että siinä vastustajan nappulan syöminen ei tapahdu saartamalla, vaan hyppäämällä sen ylitse viistoon samanväriseen ruutuun kuin lähtöruutu. Toki tammestakin on useita eri versioita eri kulttuureissa.

Somaliassa pelataan edelleen seegaa eräin muunnoksina samalla laudalla. Peli on nimeltään *korkeushyppy* (kuvio 33, oikealla)¹⁸ ja se eroaa seegasta siinä, että vastustajan nappula syödään hyppäämällä sen ylitse. Tämä on sallittua kuitenkin vain pysty- sekä vaakasuuntaan, ei viistoon kuten tammessa. Lisäksi laudan keskimmäinen ruutu on ns. turvaruutu. Merkittävä ero on myös, että pelinappulat ovat laudalla valmiissa alkuasemassa. (Bell 1979, Botermans et al. 1990).

4.1.3.2 Tammi

Tammen voi olettaa olevan useimmille erittäin tuttu peli, mutta kokonaisuuden ja sen keskeisen aseman vuoksi sitä on syytä myös käsitellä tässä tutkielmassa. Selvitetään peliä aivan lyhyesti.

Tammipelin oletetaan syntyneen eteläisessä Ranskassa joskus 1000 – 1200 luvuilla (Botermans et al. 1990). Suomenkielinen nimi, kuin myös tammen nimi monilla muilla kielillä onkin johdettu ranskankielisestä ilmaisusta ”jeu de dames” eli naisten tai ”daamien” peli. Englanniksi nimi on muista kielistä poiketen *draughts* tai shakkiin viittaava *checkers*. Tammen historialliset juuret lienevät

¹⁸ www.etsy.com/listing/108300196/seega-game-board-with-greek-geometric
Etsy has been a Certified B Corporation since 2012.

kuitenkin paljon kauempana kuin 1000-luvun Ranskassa. Mahdollisesti se muiden tässä esitelyjen pelien tavoin se saattaa olla muunnelma muinaista antiikin Kreikan tai Egyptin peleistä. Pelistä on eri puolilla maailmaa lukuisia erilaisia hieman toisistaan poikkeavia versioita. Erot liittyvät lähinnä laudan kokoon, nappuloiden alkuasetelmaan tai niiden oikeuteen liikkua taaksepäin. Yleisimpinä tammipeleinä, voidaan pitää *englantilaista tammea* ja *kansainvälistä tammea*. Näistä edellinen on suomalaisissa pelikirjoissa yleisimmin esitelty, mutta kuvataan lyhyesti molemmat.

Englantilaista tammea pelataan 8x8 -shakkilaudalla, jossa kummallakin pelaajalla on 12 nappulaa. Pelin suosioon saattaakin vaikuttaa, että sitä voi pelata shakkilaudalla. Nappulat asetetaan mustille ruuduille siten, että keskellä jää kaksi vapaata riviä. Pelilauta asetetaan siten, että kummankin pelaajan oikeassa nurkassa on valkea ruutu. Musta aloittaa pelin, jossa nappulat liikkuvat viisitoon vain mustilla ruuduilla. Jos edessä on vastustajan nappula, jonka takana on tyhjä ruutu, niin nappulan voi syödä. Jos syönnin jälkeen on edelleen mahdollisuus syödä samalla nappulalla, niin vastustajan nappuloiden syöntiä voi jatkaa siirtovuoron loppuun. Peräkkäin syödessä jokainen nappula on poistettava välittömästi siirtovuoron aikana, ei sen lopussa, ennen seuraavan nappulan syöntiä, koska paikalleen jätetty nappula voi vaikuttaa pelin kulkuun. Nappulat eivät saa syödä tai liikkua taaksepäin. Mikäli nappula saavuttaa vastustajan päädyn, niin siitä tulee kuningas, joka voi liikkua myös taaksepäin. Pelin voittaa se, joka on syönyt kaikki vastustajan nappulat tai saartanut ne niin, etteivät ne voi liikkua. Pelissä on pakko syödä kun siihen on mahdollisuus, jos näin ei tapahdu, niin siihen on määritelty erilaisia seuraamuksia. (Botermans et al. 1990)

Kansainvälistä eli puolalaista tammea pelataan 10x10 ruudun laudalla, jossa kummallakin pelaajalla on 20 nappulaa. Toinen merkittävä ero englantilaiseen tammeen on siinä, että tässä pelissä nappulat voivat alusta alkaen liikkua ja syödä myös taaksepäin. Kuviossa 34 vasemmalla oleva peli on nimenomaan kansainvälinen tammi. (Botermans et al. 1990)

Matemaattiselta ja peliteoreettiselta kannalta mielenkiintoinen tieto on se, että vuonna 2007 tammipelistä, nimenomaan tässä esittelystä englantilaisesta tammesta, onnistuttiin laskelmaan kaikki mahdolliset peliasetelmat, joita löytyi 5×10^{20} kpl. Täydellinen peli sekä mustalla, että valkoisella puolella johtaa tasapeliin. Käytetty tammien variaatio oli edellä esitelty englantilainen tammi. (Schaeffer et al. 2007)

4.1.3.3 Alquerque

Tammipelin edeltäjänä pidetään maurien 1000 -luvulla Espanjaan tuomaa *alquerque* -peliä (kuvio 34, oikealla)¹⁹, jossa nappuloiden syöminen tapahtui lähes

¹⁹ <http://mittelalter-lagerbedarf.de/Spiele/>

samalla tavalla. Alquerqueassa nappula saattoi syödä toisen nappulan, jos sen takana oli vapaa piste. Liikkuminen oli siis mahdollista sekä viistoon, että pysty/vaaka -suuntaan.



KUVIO 34 Tammi ja alquerque

4.1.3.4 Yhteenveto

Kuviossa 33 on vasemmalla seega-lauta ja on helppo havaita myös sen yhdenäköisyys kuviossa 34 oikealla olevaan alquerque lautaan. Seegassa pelaajat asettivat nappulat pelin alussa haluamiinsa ruutuihin, mutta somalialaisessa muunnoksessa ne ovat alkuasetelmassa, joka näkyy kuvion 35 oikeanpuoleisessa kuvassa. Kuten huomataan, niin asetelma on aivan sama kuin alquerqueassa. Nappuloiden alkuasetelma ja nappuloiden syöminen hyppäämällä yli viittaavat siihen, että somalialainen seega voisi olla välimuotoa seegasta alquerqueen ja näin edelleen tammeen.

Vaikuttaa siis siltä, että egyptiläinen seega oli kehittynyt roomalaisesta latrunculista ja seegasta puolestaan kehittyi muunnelmaksi, joka johti alquerqueen ja tammeen. Toisaalta latrunculin on arveltu kehittyneen petteiasta ja tällä olleen esikuvana jokin egyptiläinen lautapeli. Tai sitten tuo peli oli kuitenkin seega, mutta roomalaisaikaan vanhempia todisteita siitä ei ole.

4.1.4 Go ja liubo

Weiqi on länsimaissa tunnettu paremmin sen japanilaisella nimellä go. Liubo on samanaikainen peli weiqille, vaikka jotkut väittävätkin sweiqin olevan jo Shang-dynastian ajalta. (Papineau 2001) Shang-dynastia oli Kiinassa noin 1800–1100 eKr. Tämän yhtäläisyyden vuoksi käsitellään näitä kahta peliä tässä samassa aliluvussa.

4.1.4.1 Go

Go ja seega -peleillä on joitain yllättäviä yhtäläisyyksiä ja siksi myös japanilainen Go on mukana tässä sota-/strategiapelien historiakatsauksessa. Go eroaa edellä esitellyistä strategiapeleistä siinä, että siinä ei pyritä tuhoamaan vastustajan nappuloita, vaan valtaamaan uusia alueita. Go voidaan lukea kombinatoriaalisten pelien ryhmään. Go on pelin nimi japaniksi, peli on kuitenkin alkupe- rältään kiinalainen peli, jonka kiinalainen nimi on weiqi. Peli on tavattoman vanha ja ensimmäiset merkinnät siitä ovat Zuozhuan kirjallisista teksteistä jo 500 luvulta eKr (Papineau 2001). Säännöt ovat yksinkertaiset, mutta itse peli erittäin monimutkainen. Pelin kuvaus on tiivistetysti seuraavassa.

Go, joka tunnetaan myös nimellä Baduk, on toistuvasti arvioitu strategian- sa monimutkaisuudessa olevan vaikeampi kuin mikään muu yliesesti pelattu lautapeli, enemmän kuin jopa shakki. Go-pelissä kaksi pelaajaa, Musta ja Valkoinen, laittavat pelikiviään 19x19 kokoiselle pelilaudalle. Toisin kuin shakissa ja tammessa, pelikivet asetellaan neliöiden nurkkaristeyksiin. Kiviryhmä tarkoittaa samanväristen kivien joukkoa, jossa kivet on yhdistetty toisiinsa. (Johnson 2014)

Pelilauta (kuvio 35)²⁰ on 19x19 viivan ristikko ja pelinappuloita eli kiviä 361. Kiviä on siis täsmälleen yhtä paljon kuin laudassa on viivojen risteyskohtia. Näistä 180 on valkoisia ja 181 mustia. Kaikki nappulakivet ovat muutoin samanlaisia. Pelin alussa lauta on tyhjä, musta aloittaa laittamalla kiven johonkin viivojen risteyspisteeseen mukaan lukien laudan reunalla olevat pisteet. Tämän jälkeen pelaajat laittavat vuorotellen kiven johonkin vapaaseen leikkauspisteeseen. Pelaaja voi jättää myös vuoronsa väliin, eikä pelin aikana jo asetettuja kiviä saa siirtää. Pelin tavoitteena on vallata laudalta alueita, mikä tapahtuu asettamalla kivet laudalle siten, että niiden muodostamien ketjujen sisälle jää mahdollisimman paljon ns. *vapaita pisteitä*. Ketju tarkoittaa samanvärisiä kiviä, jotka on yhdistetty toisiinsa kahden pisteen välisellä viivalla. Kaikki pisteet, joissa ei ole muita kiviä, ovat vapaita. Kiveä tai kiviketjua voidaan uhata valloittamalla niiden ympäriltä vapaita pisteitä. Mikäli myös viimeinen vapaa piste viedään, niin vangitut kivet poistetaan laudalta. Poiston jälkeen kumpikin pelaaja saa sijoittaa kiviään vapautuviin pisteisiin. Strategisesti ketju kannattaakin rakentaa siten, että sisälle jää vain yksittäisiä vapaita pisteitä. Niihin ei vastustaja saa sijoittaa kiviään. Jos vapaita pisteitä on useampia, niin vastustaja voi pyrkiä valtaamaan sisällä olevaa aluetta. Aina ei myöskään ole kannattavaa poistaa saarretuilta kiviltä kaikkia vapauksia. Jos viimeistä vapaata pistettä ei viedä, niin kivi tai kiviketju on *vankina*. Kivet pysyvät laudalla, mutta poistetaan pelin päätyttyä. (Botermans et al. 1990)

²⁰ <https://triangulations.wordpress.com/2010/11/29/life-is-a-game/>

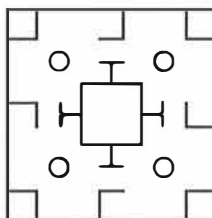


KUVIO 35 Go peli

Pelin päättyessä lasketaan omien alueiden koko eli ketjujen sisälle jääneet vapaat pisteet ja summataan ne poistettujen vastustajan kivien määrään (Botermans et al. 1990). Tämän tarkemmin ei tässä yhteydessä ole mielekäästä tarkentaa pelin sääntöjä.

4.1.4.2 Liubo

Liubo on kiinalainen peli Han dynastian ajalta Noin 200 eKr. - 200 jKr. Liubon nimi koostuu osioista "liu" eli kuusi ja "bo", joka tarkoittaa tikkua tai yleensä arvalla pelattavaa peliä. Peliä on joskus arveltu myös kiinalaisen shakin eli xianqin edeltäjäksi, minkä vuoksi siitä on tässä lyhyt esittely. Tästäkään pelistä ei ole säilynyt selkeitä sääntöjä vaikka peliä edelleen pelataan osittain oletetuilla säännöillä. Se, mitä pelistä tiedetään, on pelilauta (kuvio 36)²¹ ja pelivälineet, kuusi tikkua. Tikkuja käytettiin siirtojen arvonnassa, sekä kummallakin pelaajalla kuusi pelinappulaa. Oletettavasti nappuloita kierrätettiin ympäri pelilautaa, joten liubo kuului kilpajuoksupeleihin. Pelilaudalla oli kaksitoista polkua ja keskellä vesi, mikä yhdistää sen jossain määrin xianqiin, jonka pelilaudan jakaa joki. (Li 1998)



KUVIO 36 Liubopelin lauta

²¹ http://america.pink/liubo_2725490.html

AMERICA.PINK is free online article encyclopedia . All images and text on this site are used legally and does not violate copyright law. Our site is an educational resource and not a commercial.

On esitetty myös väitteitä, että liubo olisi mainittu jo Shang-dynastian aikana eli 1600 eKr. – 1028 eKr. Väitteiden esittäjät kuuluvat siihen joukkoon tutkijoita, jotka pitävät shakin alkuperämaana Kiinaa, josta liubo katosi 500 luvulla xianqin vallattua sen paikan (Li 1998).

4.1.5 Konane ja Agon

Otetaan tähän luvun 4.1 loppuun vielä kaksi varsin erikoista lautapeliä, konane (kuvio 37) ja agon (kuvio 38 (Walker 2014)). Näistä edellinen on kehittynyt varsin eristyksissä olevassa paikassa, Havaijin saarella ja voi kertoa jotain siitä kuin lautapelit ovat syntyneet. Agonin erityisyys taas on heksagonaalilaudassa. Agon lienee vanhin tunnettu tällaisella alustalla pelattu peli. Kummankaan pelin yksityiskohtaisiin sääntöihin ei tässä yhteydessä mennä.

4.1.5.1 Konane

Havaijilta tunnetaan vanha lautapeli nimeltä konane (Ernst 1995, Hearn 2005), joka on lisätty mukaan näiden lautapelien tarkasteluun johtuen pelin mielenkiintoisesta taustasta. Konane eli havaijilainen tammi on peräisin Havaijilta, joka on yksi maailman eristetyimpiä saariryhmiä. Havaijin saaret tulivat muun maailman tietoisuuteen vasta kun kapteeni Cook vieraili saarilla vuonna 1778. Kapteeni Cook kertoi itse pelistä, joka kuvailun perusteella oli juuri konane: ”Yksi heidän peleistään muistuttaa omaa tammipeliämme, mutta ruutujen määrästä johtuen se vaikuttaa paljon monimutkaisemmalta. Laudan leveys on kaksi jalkaa (noin 60 cm) ja se on jaettu 238 ruutuun, jossa on 14 riviä (lautaa on kokoa 14x17). Tässä pelissä käytetään mustia ja valkoisia pikkukiviä, joita liikuttellaan ruudusta toiseen.” (Ernst 1995)

Havaijin saarten syrjäinen sijainti nostaa esille kaksi vaihtoehtoista selitystä pelin syntytavasta, joista kumpikin antaa aiheen mielenkiintoisiin jälkitarkasteluihin. A. Keksittiinkö peli itsenäisesti Havaijilla? B. Toivatko havaijilaiset pelin mukanaan tullessaan saarille? Myönteinen vastaus kumpaan tahansa kysymykseen johtaa mielenkiintoisiin jatkopäätelmiin.

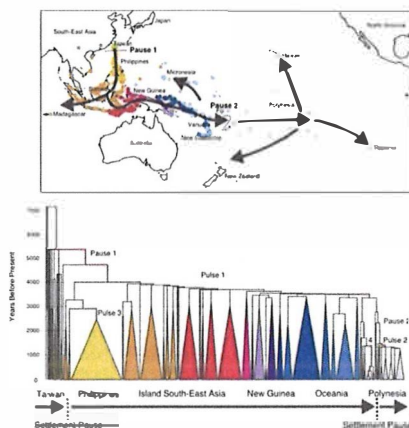
- A. Jos peli keksittiin itsenäisesti Havaijilla, niin se kertoo siitä, että ihmisaivoissa on prosesseja, jotka johtavat samantyyppisten pelien keksimiseen toisistaan riippumattomasti. Tähän kysymykseen voitaisiin löytää vastaus kognitiotieteen alan tutkimuksella.

Toinen vastaavanlainen tapaus on maorien varsin erilainen *mu tore-re* peli Uudessa Seelannissa (Botermans et al. 1990).

- B. Mikäli taas peli tai jokin sen alkumuoto on tuotu jostain muualta, niin se kertoo omaa mielenkiintoista kieltään lautapelien evoluutiosta. Havaiji-

laiset tulivat saarille eteläiseltä Tyyneltä mereltä ilmeisesti Tahitin lähi-alueilta, kahdessa eri aallossa tai vaiheessa. Ensimmäiset ryhmät saapuivat noin 300 jkr ja jälkimmäiset ryhmät noin 1000 jkr. Havaijille polynesiaiset tulivat siis jopa aiemmin kuin lähtöaluetta lähempänä olevaan Uuteen Seelantiin. Viimeisten, vasta vuosina 2003 - 2009 tehtyjen DNA-tutkimusten mukaan polynesiaisten varsinainen lähtöalue oli Kauko-Idässä Filippiinien ja Taiwanin alueella, josta muuttoalto alkoi joskus 5000 vuotta sitten. (Soares et al. 2011, Su et al. 2000) Tämä tarkoittaa samalla sitä, että jos konanea ei keksitty Havaijilla tai jossain tämän vaelluksen varrella, niin pelin alkuperä palautuu Kauko-Itään jopa 5000 vuoden taakse ja se kuuluu yhtenä jäsenenä laajaan lautapeliin perheeseen.

”Muinainen jaavalais/malesialainen peli nimeltä chuki tai tjuki on samanlainen konanen kanssa. Se on eräänlainen tammipeli jota pelataan 60 valkoisella ja 60 mustalla pavulla alustalla, jossa on 120 pistettä ja niiden välillä leikkausviivat [Wilken 1893, 162; Wilkinson 1925, 60].” (Ernst 1995)



KUVIO 37 Konane peli Havaijilta ²² ja Polynesian asuttaminen

²² Vasen kuva, <http://tabtop.blogspot.fi/2009/04/konane.html>

© Ian Henry 2009 Contact via email ianhenry@tbltop.com

Oikeanpuoleinen kuva, <http://www.pricepages.org/Hawaii/week9/>

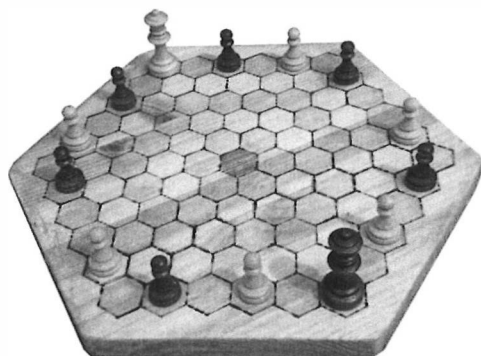
ScienceDaily (January 27, 2009): Tyyni valtameri asutettiin (kuvio 37, alla) Taiwanista käsiin osoittaa kielten evoluutioon perustuva tutkimus. Uusi tutkimus esittää, että suurin osa Polynesian asutuksesta on peräisin 500 vuoden takaa. Aucklandin yliopiston tutkijat ovat käyttäneet kehittyneitä tietokoneanalyysijä 400 Austronesian kielen sanastoista selvittääkseen kuinka Tyyni valtameri asutettiin. ²³

Kysymys Polynesian asuttamisesta on jäänyt ristiriitaiseksi. On olemassa kaksi hypoteesia, joista toinen väittää alkuperäalueeksi Taiwania ja toinen Melanesiaa. Yllättäen juuri yhtään taiwanilaista Y haplotyyppiä ei ole löytynyt Mikronesiasta tai Polynesiasta. Samoin melanesialaisille ominaista haplotyyppiä ei ole löytynyt polynesianlaisilta. Kuitenkin sekä polynesianlaisia, mikronesialaisia ja taiwanilaisia haplotyyppijä löytyy kaakkois-aasialaisista populaatioista. Y-kromosomidata ei siis tue kumpaakaan edellä mainitusta hypoteeseista. Näyttääkin siltä, että Kaakkois-Aasia toimi geneettisenä lähteenä kahdelle toisistaan riippumattomalle muuttoaaltoille, joista toinen suuntautui Taiwanille ja toinen Polynesian. (Su et al. 2000).

On myös muita tapoja tutkia Polynesian asuttamista, rotat. Ihmiset ovat olleet Tyynenmeren saarilla jo yli 40 000 vuotta. Ensimmäiset alueelle saapuneet kuuluivat ensimmäiseen Afrikasta lähteneiden muuttoaaltoon. Joskus noin 60 000 vuotta sitten, aikana, jolloin merenpinta oli paljon matalammalla kuin nykyään, nämä ihmiset todennäköisesti seurasivat rantaviivaa läpi eteläisen Aasian, pitkän Sundan alueen silloista mannerta. Lapita-ihmisten uskotaan olleen polynesianalaisten esi-isiä, useimpien historioitsijoiden mielestä. Lapitat saapuivat ensimmäisinä läntisen Oseanian (Remote Oceania) saarille. Arkeologiset todisteet osoittavat, että nämä maahanmuuttajat siirtyivät Bismarckin saaristosta kohti aiemmin asumattomia saaria läntisen Oseanian saaria joskus noin 3000 vuotta sitten. Lapita-kulttuurin merkkejä on aina Vanuatusta, Uuteen Kaledoniaan, Fidžille, Tongalle, ja Samoalle. Kuten polynesianalaisilla oli tapana, niin lapitat kuljettivat mukanaan heille tuttuja ja tärkeitä elintarvikkeita ja veivät niitä koskemattomille saariympäristöille, joille asettuivat. Eläimistä mukana olivat koira, sika, kana, ja Tyynenmeren rotta. Tyynenmeren rotta, joka tunnetaan myös nimellä kiore, ei kuulu samaan lajiin kuin eurooppalaiset rotat, joiden kanssa ne eivät risteydy. Siksi Tyynenmeren saarilta löytyvät kiorit ovat lapitoiden mukana tulleiden eläinten suoraa jälkeläisiä. Näin ollen polynesianalaisen kiorin (*Rattus exulans*) mitokondriaalisen DNA:n analyysi, kertoo myös miten Polynesia asutettiin. (Matisoo-Smith 2009)

4.1.5.2 Agon

Lautapeli Agon, on otettu tähän esittelyyn ensisijaisesti lautansa muodon vuoksi. Agon on ilmeisesti vanhin tunnettu heksagonaaliruutuisella laudalla pelattu strategiapeli.



KUVIO 38 Agon

Lautapeli Agon lienee 1700-luvulta. Agon on kahden pelaajan peli, josta vanhin havainto on 1780-luvun Ranskasta. Merkittävää tässä pelissä on se että se on vanhimpia heksagonaaliruuduilla pelatuista peleistä ja kilpajuoksupeli, joka perustui taitoon eikä onneen kuten noppapeleissä tapahtuu. Jokaisella pelaajalla on kuningatar ja tämän kuusi vartijaa. Pelaajat kilpailevat siitä kumpi saa ensin kuningattaren vartijoineen laudan keskelle. Pelin nimi tulee vanhasta kreikan kilpailua tai haastetta tarkoittavasta sanasta. (Walker 2014)

4.1.6 Yhteenveto

Vanhoja lautapelejä on lukematon määrä eikä niitä kaikkia ole mielekästä käsitellä tässä tutkielmassa. Tähän alilukuun 4.1. on kuitenkin kerätty joukko pelejä, jotka ovat saattaneet tavalla tai toisella liittyä shakkipelin syntyyn. Seuraavassa aliluvussa 4.2 tarkastellaan pelejä, jotka liittyvät shakin historiaan, kun taas tämän luvun 4.1 pelit liittyvät mahdollisesti shakin "esihistoriaan". Aliluvussa 4.2.5 tehdään johtopäätökset.

4.2 Alkushakki ja pelin synty

Edellä on käsitelty eräitä shakkia varhaisempia lautapelejä, joista osa on saattanut olla sen edeltäjiä. Nyt tehdään katsaus varsinaisen shakkipelin syntyyn eli siirtämään tavallaan shakin esihistoriasta shakin historiaan.

Shakin oletetun perusmuodon, intialaisen shaturangan (kuvio 42) vanhimmat lähteet ovat 500-luvulta, varhaisimpana niistä on pidetty Bhavisya-puranan käsikirjoitusta *Karnamak i Ardeshir i Papakan* eli *Ardershirin pojan Papakin teot*, joka on kirjoitettu Sasanian dynastian aikana eli vuosina 224 – 651 (Mark 2007). Shaturangaa pelattiin laudalla, jota kutsuttiin *ashtapadaksi*, mikä sanskritin kielellä tarkoitti kahdeksaa aselajia ja kertoi laudan koosta ja ruutujen muodosta. Vertaa ashtapada peliin (aliluku 4.1.1.4). ”Shaturanga” tarkoittaa puolestaan sanskritin kielellä neljään osaan jakamista ja sitä käytettiin muinoin kuvaamaan intialaista armeijaa, joka koostui neljästä pääryhmästä, norsuista, sotavaunuista, ratsumiehistä ja jalkaväestä (Hooper & Whyld 1987). Joukkueeseen kuului norsu, sotavaunut, kolme ratsumiestä ja viisi jalkamiestä. Ratsun liikkuvan erikoislaatuisuus ja sen numeerinen symboliikka ovat olleet päätekiäjiä niille teorioille, jotka kytkivät shakin rakenteen ja alkuperän salaisiin muinaisintialaisiin maagisiin ja uskonnollisiin rituaaleihin (Bidev 1986). Forbesin, oletettavasti virheellisen teorian, mukaan shaturanga olisi muodostunut neljän pelaajan shakkipelistä (Hooper & Whyld 1987). Palataan neljän pelaajan shakin teoriaan hieman laajemmin aliluvussa 4.2.2.

Vallitsevan käsityksen mukaan shaturangan perusmuoto kehittyi Intiassa ”shakkimaisempaan” suuntaan ja levisi sieltä ensin Persiaan n. 600 jKr. (shatranj) ja sitten arabimaihin. Oletettavasti vanhimmat shakkinappulat löysi Burjakov vuonna 1977 Afrasiabista Uzbekistanista, läheltä Samarkandia. Nämä pelivälineet, joiden joukossa oli myös jo ratsu, on ajoitettu 700 -luvulle. Kuviossa 39 on Afrasiabista löytyneitä pelinappuloita. Ylhäällä oikealla ovat ratsut, alhaalla oikealla suuremmalla hevosella ratsastava hahmo oli oletettavasti kuningas. (Cazaux 2003, Mark 2007)



KUVIO 39 Afrasiabista löytyneitä shakkinappuloita

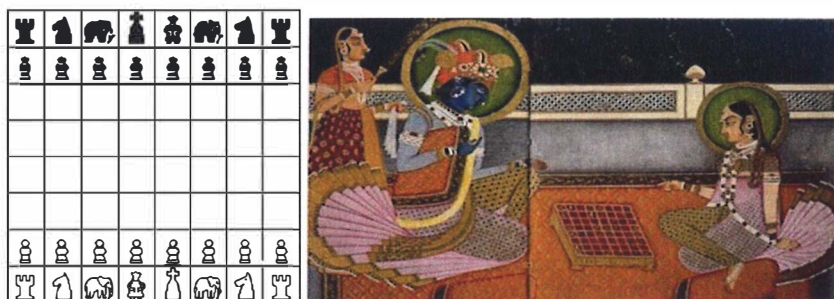
Eurooppaan shakki saapui noin tuhat vuotta sitten, ollen jo liki nykyisessä muodossaan. Viimeisiä perustavanlaatuisia muutoksia tapahtui 1400-luvun lopulla, jolloin mm. Sotilas sai kaksoisaskeleensa ja lähetin sekä kuningattaren liikeradoissa tapahtui huomattavaa vahvistumista. Shakin toinen kehityshaara

levisi Intiasta itään, Kiinaan, jo 400 - 300 eKr. ja kehittyi siellä erilaiseksi shakin variaatioksi, joka tunnetaan nimellä Kiinalainen shakki. Ja kuten edellä jo mainittiin, on tutkijoita, jotka arvelevat shakin mahdollisesti kehittyneen alkuaan Kiinassa. Kiinasta peli levisi edelleen Japaniin, jossa sitä kutsutaan shogiksi.

4.2.1 Shaturanga

Yli tuhannen vuoden vaelluksellaan Eurooppaan shaturanga kehittyi shakiksi ja hioutui suuresti. Esimerkiksi kuningatar, jota kutsuttiin nimellä *firzan* tai *fers*, aivan alussa *mantri*, ei liikkunut shakin varhaisissa muodoissa kuin yhden ruudun kerrallaan viistoon. Lähetti, *fil*, aivan alkujaan *gaja* eli norsu, siirtyi yhden ruudun pidemmälle kuin kuningatar eli viistoon tasan kaksi askelta (Hooper & Whyld 1987). Pelissä käytettiin usein myös arpakuutiota (Gollon 2013).

Katsotaan kaikkien nappuloiden liikkeet. Kuningas eli *raja* liikkui kuten shakin kuningas, yhden askelen jokaisen kahdeksaan naapuriruutuun. Kuningatar eli *firzan* liikkui siis ainoastaan yhden askelen neljään kulmaruutuun. Torni eli *ratha* liikkui kuten nykyinenkin torni, pysty- tai vaakasuuntaan, niin pitkälle kuin pääsi. Lähetti eli *fil* liikkui siis kulmien suuntaan hypäten yhden ruudun yli. Tosin muitakin liikkumistapoja on dokumentoitu. Ratsu eli *asva*, liikkui kuten ratsu nykyisessäkin shakissa. Myös sotilas eli *sippoy* liikkui kuten nykyään eli yhden askeleen eteenpäin. Kuviossa 40 on vasemmalla nappuloiden alkuasetelma ja oikealla Krishna ja Radha pelaamassa shaturangaa.²⁴



KUVIO 40 Shaturanga

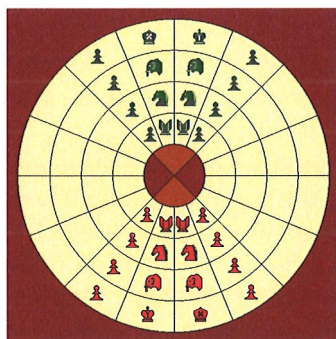
Intiasta peli levisi länteen Persian ja arabimaihin ja nimi sai muodon *shatranj* ja myöhemmin shakki (Cazaux 2003). Palataan tähän pelin kehityskulkuun tarkemmin luvussa 6.

²⁴ <http://learningchess.net/blog/?p=10>
<http://www.globalchessfestival.com/chess/history>

hetti, mutta yhden vain askelen ja hypäten yhden ruudun yli. Siis samalla tavoin kuin kuningatar kahden pelaajan shaturangassa. Pelilaudalla tornia esitti laiva. Sotilaita oli neljä kullakin pelaajalla. Noppien heittäly vaikuttaa siihen mitä nappulaa siirretään. Numerolla 1 voi liikuttaa firzania tai sotilasta, numerolla 2 tornia, numerolla 3 ratsua ja numerolla 4 norsua. Mikäli noppa kääntyy tyhjille sivuille, joilla tavallisessa nopassa on 5 tai 6, niin edellistä vastaa 1 ja jälkimmäistä 4. Pelissä firzanin (kuningas/kuningatar) voi syödä, mutta sitä ei tarvitse poistaa laudalta. Pelin voitto laskettiin syödyistä nappuloista saaduilla pisteillä, jotka olivat 5 firzanista, 4 norsusta, 3 ratsusta, 2 tornista ja 1 sotilaasta. Mikäli pelaaja oli syönyt kaikki kolme muuta firzania, niin hän sai niistä $3 \times 5 = 15$ pistettä jos hän oli menettänyt oman firzaninsa. Jos firzan oli kuitenkin säilynyt, niin kolmesta syödyistä kuninkaasta sai 54 pistettä. (Sachau 1910)

4.2.3 Bysanttilainen kehäshakki

On hyvä lyhyesti mainita myös yksi erikoinen peli, bysanttilainen shakki, jonka laudan muoto oli varsin poikkeava, kehämäinen kuten oheisesta kuvasta (kuvio 42, Cazaux²⁶) näkyy. Tai matemaattisesti lauta on sylinterin muotoinen. Sylinterillä oli neljä sisäkkäistä kehää ja kummallakin pelaajalla 16 pelinappulaa, jotka olivat samoja kuin shaturangassa ja ne myös liikkuiivat samoin paitsi, että sotilaalla oli vain yhden ruudun mittainen alkuaskel eikä se korottunut. Peli-ruutuja oli 64 kuten tavallisessakin shakissa. Nappuloiden liikkeet olivat samanlaiset kuin shatranjissa.



KUVIO 42 Bysanttilainen shakki

Peli tunnettiin Bysantissa 1000-luvulla ja sitä kutsuttiin myös nimellä zatrikion, kehäshakki tai roomalainen shakki. Pelistä on kehitetty myös nykyaikaisia versioita, joista on pelattu maailmanmestaruuksista 90-luvun puolivälistä. (Hooper & Whyld 1987, Khalfine & Troyan 2007, Josten 2001)

²⁶ <http://history.chess.free.fr/byzantine.htm>

4.2.4 Kiinalainen shakki eli xiangqi

Valtaosa tutkijoista pitää shakin alkuperämaana Intiaa, mutta löytyy myös suuri joukko sellaisia, muitakin kuin kiinalaisia (Bidev 1986, Li 1998), jotka katsovat shakin kehittyneen Kiinassa xiangqi pelistä eli kiinalaisesta shakista.



KUVIO 43 Kiinalainen shakki, alkuasetelma

Kiinalaisessa shakissa käytetään pelilautaa, jossa perinteisen shakin 8x8 kokoinen lauta on jaettu kahteen 4x8 kokoiseen alueeseen, joiden välissä on joki. Kun pelinappulat kuitenkin sijoitetaan ruutujen sijasta viivojen leikkauspisteisiin, niin on laudan koko käytännössä 9x10 pelinappulan paikkaa (kuvio 43, <http://history.chess.free.fr/xiangqi.htm>). Lisäksi pelilaudalla on kaksi neliruutua vinoviivoilla merkittyä linnaa, joiden sisällä ovat kuninkaat. (Li 1998)

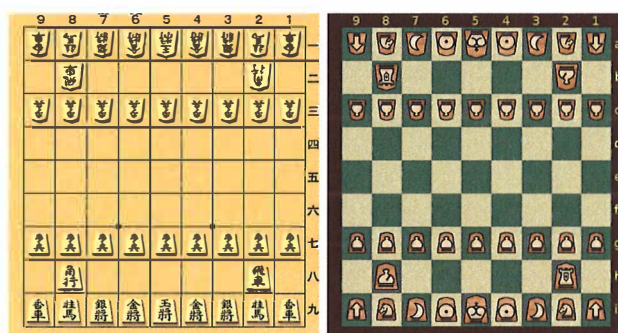
Katsotaan nappuloiden liikkeitä suhteessa perinteiseen shakkiin. Kuningas liikkuu kuten shakin kuningas, mutta ei voi poistua linnastaan. Kuvion 45 laudalla se on alhaalla ja ylhäällä keskimäinen nappula. Kaksi *neuvonantajaa*, jotka ovat kuninkaan vierellä olevat nappulat, on myös sijoitettu linnakkeeseen, josta ne eivät voi poistua. Neuvonantaja voi liikkua vain viistoon. Kaksi lähettiä on sijoitettu alkuasetelmassa neuvonantajien viereen heti linnakkeen ulkopuolelle. Lähetti saa liikkua viistoon tasan kaksi askelta, mutta ei saa ylittää toista nappulaa eikä jokea. Kaksi ratsua on sijoitettu alkuasetelmassa lähettien viereen. Ratsu liikkuu aivan kuten shakin ratsu sillä erolla, että se ei saa hypätä toisen nappulan yli. Alkuasetelmassa kulmiin sijoitetut kaksi tornia liikkuvat täsmälleen samoin kuin shakin tornit. Kaksi *tykkiä* on alkuasetelmassa sijoitettu kolmannelle riville. Tykki liikkuu aivan kuten torni shakissa, mutta tykin erikoisuus liittyy siihen miten se lyö vastustajan nappulan. Tykki voi lyödä ainoastaan hyppäämällä jonkin toisen nappulan ylitse. Tämä toinen nappula voi olla oman tai vastustajan. Kahden tai useamman nappulan yli se ei voi hypätä. Sotilas liikkuu omalla alueellaan yhden askelen eteenpäin ja lyö vastustajan nappulan samalla tavoin. Siirryttyään joen yli se voi liikkua myös vaakasuoraan. Soti-

las ei korotu saavutettuaan viimeisen rivin, mutta voi jatkaa siellä liikkumistaan vaakasuoraan. Se voi myös lyödä takarivillä vaakasuoraan. (Li 1998)

Pelin voittoa tekemällä matin vastustajan kuninkaasta eli saattamalla sen tilanteeseen, jossa se on uhattu, eikä voi purkaa uhkaa. Erona perinteiseen shakkiin on se, että pelin voi voittoa myös tekemällä patin eli saattamalla vastapuolen kuninkaan tilanteeseen, jossa sitä ei uhata, mutta kuningasta tai mitään muutakaan nappulaa ei voi liikuttaa. Kiinalainen shakki päättyy tasapeliin, mikäli kumpikaan pelaaja ei voi enää tehdä mattia tai voittopattia. (Li 1998)

4.2.5 Japanilainen shakki eli shogi

Shogi ("shogi" = "yleinen peli") on hyvin samanlainen kuin shakki, mutta eroaa siitä joiltakin osin. Yksi iso ero on mahdollisuus omia vastustajan nappulat omikseen. Myös laudan koko eroaa, shogia pelataan 9x9 ruutuisella laudalla. Alkuvaiheessa pelistä oli laajempiakin versioita, joista suurin oli 25x25 laudalla pelattu and shogi, jossa pelinappuloita oli 354, joiden joukossa oli useita eri tyyppisiä upseereita. Kuviossa 44 shogilauta²⁷ on vasemmalla alkukielisin ja oikealla shakkiin viittaavin merkinnöin. (Botermans et al. 1990)



KUVIO 44 Shogi

Shogin säännöt ovat tiivistetyksi seuraavat:

Kummallakin pelaajalla on 81 ruudun laudalla 20 pelinappulaa. Kolme ensimmäistä riviä ovat omaa kotialuetta ja vastustajan vihollisaluetta. Kummankin pelaajan nappulat ovat samanvärisiä, nappuloiden haltijan kertoo se mihin suuntaan teräväkärkisten nappuloiden kärki osoittaa. Terävä pää on kohti vastustajaa. Tämä johtuu siitä, että pelin eri vaiheissa pelaaja voi siirtää vastustajan nappuloita omikseen. Upseerit ovat seuraavat. *Kyosha eli peitsimies*, liikkuu kuten shakin torni, mutta ainoastaan suoraan eteenpäin. *Keima eli ratsu* liikkuu kuten shakin ratsu, mutta ainoastaan eteenpäin. *Ginsho eli hopeakenraali* voi liikkua yhden askeleen eteen tai viistoon, mutta ei sivulle tai taakse. *Kinsho eli kul-*

²⁷ <http://www.chessvariants.com/shogi.html>

takenraali voi liikkua yhden ruudun kaikkiin suuntiin paitsi ei takaviistoon, joten sillä on kuusi liikkumissuuntaa. *Osho eli jalokivikenraali eli kuningas* liikkuu täsmälleen kuin shakin kuningas. *Kakugyo eli lähetti* liikkuu aivan kuten lähetti tavallisessa shakissa. *Hisha eli torni* liikkuu aivan kuten torni tavallisessa shakissa. *Fuhyo eli sotilas* liikkuu kuten sotilas tavallisessa shakissa. Erona shakkiin on se, että sotilaalla ei ole alussa kaksoisaskelta ja se syö suoraan edessään olevasta ruudusta eikä viistoon. (Botermans et al. 1990)

Shakin nappuloista puuttuu siis kuningatar ja lisäksi ratsun ja sotilaan liikesuuntia on rajoitettu. Toisaalta shogissa on kolme muuta upseeria eli peitsimies, hopeakenraali ja kultakenraali. Erona on myös korotettavuus, shogissa kaikki muut nappulat, paitsi kuningas ja kultakenraali, voivat korottua. Peitsimies, ratsu, hopeakenraali ja sotilas voivat korottua kultakenraaliksi. Lähetti voi korottua *lohikäärmehevoseksi*, joka voi liikkua kuten kuningas ja lähetti yhdessä. Torni voi korottua *lohikäärmekeininkaaksi*, joka voi liikkua kuten yhdistetty torni ja kuningas. Pelinappula korottuu kun se on saapunut vihollisalueelle eli riveille 7-9 ja liikkuu siellä tai lähtee sieltä. Nappulaa ei tarvitse korottaa heti vaan pelaajalle itselleen sopivalla hetkellä. Kuitenkin jos nappula saavuttaa viimeisen rivin vastustajan puolella, niin sitä ei voi liikuttaa ennen korotusta. (Botermans et al. 1990)

Yksi merkittävimpiä eroja shogin ja shakin välillä on siinä, että pelaaja voi ottaa vastustajaltaan syömänsä nappulan missä pelin vaiheessa tahansa uudelleen käyttöön omana nappulanaan. Tällöin nappula palaa laudalle alkuperäisellä, ei korotetulla arvolla. Se mihin nappulan voi laudalla sijoittaa on vielä määriteltä erikseen, mutta näin yksityiskohtaiseen sääntöjen läpikäyntiin ei tässä yhteydessä ole aihetta. Peli päättyy mattiin kuten perinteinenkin shakki ja nappuloiden alkuasetelma laudalla selviää kuvion 44 oikeanpuoleiselta laudalta. Kuningas on takana keskellä ja sen vieressä järjestyksessä kultakenraalit, hopeakenraalit, ratsut ja peitsimiehet. Lähetti on vasemman ja torni oikean ratsun edessä. (Botermans et al. 1990, Hooper & Whyld 1987)

4.2.6 Taikaneliöistä

Taikaneliöt eivät ole pelejä, mutta shakin nappuloista ratsu antaa aiheen käsitellä tässä shakin syntyvaiheita käsittelevässä kappaleessa myös taikaneliöitä.

Vaikka shakki kuvasikin sotajoukkoja ja niiden yhteenottoja muinaisessa Intiassa niin on esitetty myös arveluja, että ennen tätä pelillä olisi saattanut olla myös jotain uskonnollista, hedelmällisyyskultteihin liittyvää merkitystä, lähinnä numerologian ja mm. arpakuution käytön kautta. (Bidev 1986)

Ajatus ei ole välttämättä kaukaa haettu sillä ratsun liikkeellä shakkilaudalla ja niin sanotuilla taikaneliöillä saattaa olla yhteyksiä. Palaamme tähän asiaan vielä lyhyesti ratsun polkuja käsittelevässä aliluvussa 6.1.1.

Taikaneliöt ilmaantuivat ensin arabialaisiin lähteisiin 900 jKr. ja numerot olivat ruuduissa siten, että numeroiden summa oli sama luku neljään eri suuntaan. Luvut muodostivat hebrealaisia nimiä sillä hebrealaiset konsonantit saivat

kukin jonkin numeerisen arvon kabbalassa, joten jokainennumero voitiin esittää kirjaimena, konsonanttina. (Roos 2008)

Taikaneliöiden rakentaminen perustuu lukuisten erilaisten tapojen. Yksi näistä tavoista on ratsun polku, jossa ratsun liike voi olla ylös ja vasemmalle oikean sijaan tai se voi olla alas joko oikealle tai vasemmalle, sekä myös muihin suuntiin. Todellisuudessa on olemassa kahdeksan eri suuntaa, joihin ratsu voi liikkua.

Edelliseen kytkeytyy toinen, kaksoissylinterimalliin perustuva, menetelmä, jossa sijoitetaan numerot oikeisiin paikkoihinsa. Tämä menetelmä perustuu ns. avustaviin neliöihin, jotka sijaitsevat taikaneliön rajojen ulkopuolella. Avustava neliö on taikaneliön kopio sen vierellä.

Numerot sijoitetaan ensin väliaikaisesti näihin avustaviin taikaneliöihin, minkä jälkeen ne voidaan siirtää vastaavaan kohtaan alkuperäisessä neliössä.

Eli taikaneliö siis tavallaan taivutetaan vuorotellen sekä vaaka-, että pystyasossa sylinteriksi, jolloin ratsun liikesuunta jatkuu reunan ylitse ja loppuruutu on näin laskettavissa sijoittamalla se apuneliöstä alkuperäiseen.

4	9	2	6	32	3	34	35	1	8	58	59	5	4	62	63	1	10	18	1	14	23
3	5	7	7	11	27	28	8	30	49	15	14	52	53	11	10	56	11	24	7	20	5
8	1	6	19	14	16	15	23	24	41	23	22	44	45	19	18	48	17	5	13	21	9
			18	20	22	21	17	13	40	26	27	37	36	30	31	33	23	6	19	2	15
			25	29	10	9	26	12	17	47	46	20	21	43	42	24	4	12	25	8	16
			36	5	33	4	2	31	9	55	54	12	13	51	50	16					
									64	2	3	61	60	6	7	57					

KUVIO 45 Neljä taikaneliötä

Kuvion 45 taikaneliöissä on sama summa jokaisella pysty- ja vaakarivillä sekä lävistäjillä. Vasemmassa taikaneliössä summa on 15 ja keskellä 111. Oikealla keskellä oleva taikaneliö on Merkuriuksen symboli ja rivien summa on 260. Äärimmäisenä oikealla summa on 65. Ruudut on numeroitu alkaen 1 ... n, missä n on ruutujen lukumäärä. Taikaneliöt muodostettiin asettamalla numerot ruutuihin numeerisesti tasapainossa. Esimerkiksi jokaisella riville tulee sama summa ja jos taikaneliö on hyvin tehty, niin myös diagonaaleilla summa on sama. Kun kokonaisluvut liitetään toisiinsa määrättyllä tavalla, niin saadaan neliön ”mestariokuva”. Näiden taikaneliöiden suunnittelun yhteydessä eivät muinaiset kosmologit löytäneet ainoastaan tasapainoisia numeerisia kokonaislukujen järjestyksiä, vaan myös mielenkiintoisia kuvioita, jotka välillä toistuivat muissa taikaneliöissä yhdistäen nämä mystisesti toisiinsa. Jokaista taikaneliötä pidettiin jonkin luvun alueena, niin voitiin johtaa tärkeitä viitteitä numeerisen maailman mystereihin. ”Taikaneliötiede” on saattanut olla tärkeä askel murtolukujen, desimaalilukujen ja neliöjuurien ymmärtämiseen. Mutta ehkä tärkeämpää oli niiden merkitys mittayksiköiden kehittämiseen. Jos työskenteli ympyröiden tai kuusikulmioiden parissa, niin esimerkiksi 6x6 taikaneliö oli käytännöllinen. (Hamilton 2001) Kuuden (6x6) taikaneliötä kutsutaan myös auringon neliöksi ja yksi sellainen on kuvassa 45 toisena vasemmalta.

Näillä taikaneliöillä oli uskonnollinen merkitys muinaisina aikoina ainakin kiinalaisten, arabien ja heprealaisten joukossa. Taikaneliöt paljastivat lukujensa summina planeettojen suvun. Näin ollen yksinkertaisin taikaneliö, jossa summa on 15 joka suuntaan, oli Saturnuksen taikaneliö. Yhteissumma oli 45 eli salainen Saturnuksen luku. Hepreaksi kirjaimet vastasivat eri numeroiden lukuarvoja. Jupiterin taikaneliö koostui neljästä sarakkeesta, joista jokainen antoi arvon 34 ja kokonaissumman 136. Muut taivaankappaleet olivat seuraavat: Mars viisi saraketta, sarakesumma 65, yhteensä 325, Venus seitsemän saraketta, summa 175, yhteensä 1225, Kuu yhdeksän saraketta, joissa summa on 369, yhteensä 3321, Merkurius kahdeksan saraketta, joissa summa on 260, kokonaissumma 2080. Samalla tavoin, auringon taikaneliö, jossa sarakkeiden summa oli 111 ja kokonaissumma 666, antoi kirjainluvun SVRTh, Sorath, joka on auringon demoni eli sama kuin Ilmestyskirjan peto. Numero 111 on myös Nakielin luku, joka puolestaan on mystinen luku, jonka merkitys on huomattava erityisesti arabialaisessa magiikassa. (Bouisson 1985)

Auringon peto, Sorath lausuttiin hebreaksi: Samech, Vau, Resh, Tau, jolloin numeeriseksi arvoksi tuli $60 + 6 + 200 + 400 = 666$. Nakiel, jonka numeerinen arvo oli 111, oli Auringon enkeli. (Roos 2008, Powell 2010)

Numeron kuusi taikaneliötä kutsuttiin siis "Auringon neliöksi". Syynä oli se, että neliön ruutujen sisällä olevat eräät muut luvut voitiin johtaa luvusta 666. Miksi sitten lukua 666 pidetään niin pimeänä ja pahana? Vastaus on yksinkertainen, se liittyy pakanallisiin uskomusjärjestelmiin ja kosmologiaan, jonka omaksui ja paranteli Pythagoraan koulukunta, joka taas on kiistanalainen vielä tänäkin päivänä. (Hamilton 2001)

Lopuksi voidaan vielä todeta, että Merkuriuksen taikaneliö koottiin 64 ruudun "shakkilaudalla". Tosin ei ole mitään mikä osoittaisi, että shakkilaudan koko olisi jotenkin yhdistettävissä Merkuriukseen.

4.2.7 Eri käsityksiä shakin alkulähteistä

Vallitseva käsitys on, että shakin juuret ovat Intiassa ja se pohjautuu edellisessä kohdassa 4.2.1 kuvattuun shaturangaan. Hyde sijoitti pelin syntysijat Intiaan jo vuonna 1694 ja myöhemmin paikka on tarkentunut Intian luoteisosiin. Eri tutkijoilla on kuitenkin pelin alkuperästä hyvinkin erilaisia käsityksiä. Tämän vuoksi edellä onkin selvitetty eräiden muiden shakille sukua olevien pelien sisältöjä ja luonnetta. Pelin alkulähde on sijoitettu Intian lisäksi myös Kiinaan, Persiaan, Afganistaniin, Babyloniaan, ja lukuisin muihinkin maihin (Mark 2007). Näistä edellä mainituista erityisesti Kiina on saanut kannatusta. Väite perustuu teoriaan, että kiinalainen kenraali Han Xin kehitti kiinalaisen shakin eli Xiangqin 204 eaa. kahden toisaan vastaan taistelevan armeijan ollessa talviasemissa ja pohjana olisi ollut toinen vanha kiinalainen peli, edellä aliluvussa 4.1.4.2 esitelty, Liubo (Li 1998). Lin näkemys perustuu Irwinin *The Origin of Chess* paperiin jo vuodelta 1793. Irwinin käsitys taas perustuu hänen kiinalaisen ystävänsä Pan Zhen-guan materiaaliin. Mitään varmempaa näyttöä Linin teorialle ei kuiten-

kaan ole. Kiinalaista alkuperää ovat tarjonneet myös Needham ja Bidev. Näiden kolmen teorian ovat vuosilta 1962 – 2007. (Bidev 1986, Mark 2007)

Kiinalaisen vaikutuksen puolelle ovat asettuneet Needham 1962, Bidev 1986 ja 1987. Erityisesti kiinalaisen alkuperän puolesta on esittänyt väittämiä Li 1998. Persialaista alkuperää ovat ajaneet Bland 1851 ja Yekta 1970. Alkuperää jonnekin Silkkiteiden varrelle Kushanin valtakunnan aikana ehdotti Josten vuonna 2001. (Mark 2007)

Ibn Arabshahin teoksessa Timurin elämästä on kerrottu pelatin vieläkin monimutkaisempaa peliä suuremmalla laudalla ja lukuisilla lisänappuloilla. Peliä pelattiin laudalla, jolla oli 110 ruutua ja 56 nappulaa, kun shakissa on sen tavanomaisessa muodossa 32 nappulaa ja 64 ruutua. Uskotaan, että shakki on keksitty Intiassa ja tuotu Persiaan 500-luvulla. Tälle käsitykselle esittää tämän persialaisen käsikirjoituksen tekijä vastaisen mielipiteen väittäen shakin alkuperäisessä muodossaan keksityn Persiassa ja viedyn sieltä Intiaan, josta se palasi sitten takaisin uudistetussa muodossa. Itseasiassa se oliko pelin alkuperäinen muoto se suurempi vai pienempi, on myös kyseenalaista. (Bland 1851)

Edellisistä poikkeavasti Josten asettui tukemaan 2001 Linderin teoriaa, että peli olisi syntynyt jossain Silkkiteiden varrella tai muinaisessa Kushanin valtakunnassa, joka sijoittui nykyisen Koillis-Intian ja Pakistanin alueelle. Tällöin pelin synty ajoittuisi vuosille 50 eKr. – 200 jKr. Kuviossa 46 on Kushanista löydettyjä esineitä, joiden oletetaan olleen shakkinappuloita. Vasemman puoleisin on norsu. Muinaiset intialaiset aselajithan olivat jalkaväki, ratsuväki, sotavainut ja norsut. Nämä ovat muuntuneet nykyiseen shakkiin sotilaisiksi, ratsuiksi, läheteiksi ja torneiksi. (Mark 2007, Josten 2001) Aiemmin tämän luvun 4.2 alussa, kuviossa 39 esiteltiin, Afrasiabista, nykyisen Uzbekistanin alueelta, löytyneitä nappuloita. Myös Afrasiab kuului aikanaan Kushin valtakuntaan.



KUVIO 46 Oletettuja shakkinappuloita Kushanista (Josten 2001)

Myös edellä, aliluvussa 4.2.2, esiteltyä neljän pelaajan shaturangaa eli chaturajia on siis arveltu shakkipelin varhaisimmaksi muodoksi. Tätä vastaan on kuitenkin se, että pelistä varhaisin maininta on vasta 1000-luvulta. Tähän tulokseen, jonka mukaan neljän pelaajan shaturanga ei kuitenkaan olisi perusmuoto, pääsi myös Kraaijeveld vuonna 2000 mielenkiintoisessa tutkielmassaan, jossa hän vertaili mm. shaturangaa, chaturajia ja kiinalaista shakkia evoluutionäkökulmasta eli listaamalla kaikki nykyisin eripuolilla maapalloa pelattavat shakinomaiset pelit ja tekemällä niille sukupuut samoilla periaatteilla kuin ne on tehty eläimillä ja kasveilla ominaisuuksien mukaan (Kraaijeveld 2000). Käytetty

menetelmä on *fylogeneettinen*. Biologisten eliölajien kohdalla menetelmässä käytetään sukupuita laadittaessa fossiileja ja nykyisin elävien eliöiden ominaisuuksien vertailua.

”Useita shakkipelin muunnelmia on esitetty kaikkien muunnelmien esi-isäksi. Perinteisesti muinaisen Intian shaturangan on nähty olevan ainakin hyvin lähellä esi-shakkia, mutta myös neljän pelaajan shaturangaa on pidetty shakin esimuotona eri aikakausina. Aivan viime aikoina Li (1998) on esittänyt hypoteettisen mallin mahdollisesta kiinalaisen shakin (xiangqi) alkuperäisestä muodosta (proto-xiangqi). Myös muita ideoita shakin kantaisän identiteetistä on ehdotettu, mutta ilman mitään yksityiskohtaisia yksityiskohtia nappuloista, niiden liikkumistavoista tai säännöistä. Siksi fylogeneettiset analyysit tutkimuksessa on suoritettu käyttäen shaturangaa, neljän pelaajan shaturangaa ja proto-Xiangqia hypoteettisena kantaisänä. Vääränlainen esi-isä antaa todistetavasti vääriä tuloksia mitä havainnollistettiin tekemällä analyysi ensin shakin variantille, josta tiedettiin varmasti, että se ei ole oikea: liittovaltioshakille²⁸ eli kolmiulotteiselle fiktiiviselle shakin muunnelmalle televisiosarjassa Star Trek. Kahdesta intialaisesta kantaisäehdokkaasta shaturanga antaa paremman tuloksen historiatietojen pohjalta kuin neljän pelaajan shaturanga. Tämä viittaa siihen, että neljän pelaajan noppa-peli-shaturanga on vähemmän todennäköisesti shakin kantaisä kuin shaturanga. Tämä on sopusuunnassa myös historiallisten lähdetietojen kanssa. Nämä viittaavat siihen, että tämä neljän pelaajan noppa-peli oli paljon myöhempi kokeilu kuin kahden pelaajan peli. Neljän pelaajan shaturangan pienempi todennäköisyys esi-isäkandidaatiksi ei kuitenkaan johdu ainoastaan siitä, että se oli noppapeli. Se ohjataan peliä nopalla vai ei, oli ainoastaan yksi ominaisuus verrattuna 109:stä. Analyysi ottaa huomioon suuren joukon ominaisuuksia keskittymättä vain yhteen.

Vertailu shaturangan, jolla on parempi tulos näistä kahdesta ”Intialähtöisestä pelistä, ja proto-xiangqin välillä osoittaa, että edellinen osuu paremmin historiallisiin tapahtumiin kuin jälkimmäinen. Tämä ei kuitenkaan välttämättä ielä tarkoita, että shakki on peräisin Intiasta.” (Kraaijeveld 2000)

Tiivistetysti yleinen käsitys shakin muunnelmien alkuperästä on seuraavanlainen. Shakin ja shogin väliset yhteydet viittaavat yhteiseen alkuperään, joka on shaturanga, joka syntyi Intiassa noin 7. vuosisadalla jKr. Sieltä shaturanga siirtyi sekä länteen, että pohjoiseen, muuntuen matkansa varrella. Läntisestä haarasta tuli Shatranj Arabiassa ja lopulta shakki Euroopassa. Pohjoisesta haarasta tuli Xiangqi Kiinassa ja Janggi Koreassa. Joskus 10.-12-luvuilla, shakki saapui Japaniin, missä siitä syntyi eri shogiksi kutsuttuja muunnelmia. (Benton & Benton 1977, Cazaux 2003, Lee 2011)

²⁸ Tunnetaan paremmin nimellä Tri_Chess

4.3 Kolme näkemystä liittyen lautapeliin kehityshistoriaan

Seuraavissa kolmessa aliluvussa esitetään kolme näkökulmaa ja ajatusta liittyen lautapeliin, mukaan lukien erityisesti shakki, kehityshistoriaan ja rakenteeseen, sekä esitetään kaksi kokeellista pelimallia.

4.3.1 Kommentti pelien evoluutiosta

Vanhimmat lautapelit, joita edellä esiteltiin, ennen shakkia ja myös ennen shaturangaa, olivat varmuudella egyptiläiset senet (3500 eKr.) ja mehen (2800 eKr.), sekä Urin kuninkaallinen 20-ruutua peli Kaksoisvirtain maassa, Sumerissa (2600 eKr.). Tämä sumerilainen peli tavataan myös myöhemmin Egyptistä (1800 eKr.). Nämä kolme peliä ovat selkeästi maailman vanhimmat tunnetut lautapelit. Seuraavaan ikäryhmään (n. 500 eKr. – n. 500 jKr.) kuuluvat tässä luvussa esitetyistä peleistä petteia, latrunculi, ashtapada, seega, tafl-pelit, go ja liubo.

Tehdään muutamia huomioita. Nuo edellä olevat pelit jakaantuvat kahden pääryhmään ainakin kolmella tavalla, pelialustaltaan kiekkomaisiin ja suorakaiteen muotoisiin, nappulan sijoituspaikan perusteella ”lokeromaisiin” ja neliöruudutettuihin, sekä pelistrategian puolesta sotapeleihin ja juoksupelisiin. Nappulan sijoituspaikan suhteen lokero tai kuoppa on luonnollinen valinta. Maahan voi aina tehdä pienen kuopan, johon pelinappulan, esimerkiksi kiven, voi laittaa. Niin on myös neliöruudutettu alusta, joka on ollut helppo piirtää hiekkään. Mielenkiintoista on, että kuusikulmainen ruutu eli heksagoni, näyttää ilmestyneen peliruudun valinnaksi vasta hieman kaksi tai kolme sataa vuotta sitten. Vanhin tähän tutkielmaan löytynyt heksagonaalilla ruuduilla pelattu peli oli aliluvussa 4.1. esitelty Agon. Seuraavat tällaisella alustalla pelatut pelit näyttävät olleen seuraavassa, 5. luvussa, esitellyt 1900-luvun alun erikoishakit.

Myös pinnan laatoituksessa (tiling) heksagoni näyttää ilmaantuneen mosaiikkiteeseen varsin myöhään, aikaisintaan 1400-1500 -luvuilla (Grünbaum & Shephard 1987). Tämä tuntuu aika erikoiselta siksi, että heksagonimaisia pintoja löytyy malliksi myös luonnossa. Tunnetuin esimerkki on mehiläiskennot.

Vanhimmat lautapelit ovat siis kilpajuoksupeljä ja poikkeavat sekä peli-ideansa, että laudan muotonsa vuoksi täysin shakista ja sen edeltäjistä. Ainoa yhdistävä tekijä on vastustajan nappulan syöminen. Mielenkiintoinen yhteys shakin ja juoksupelien välillä onkin intialainen ashtapada, joka on myös juoksupeli, mutta jota pelataan shakkilautaa vastaavalla 8x8-ruutuisella laudalla. Shakin edeltäjän, shaturangan pelilaudan nimihän on juuri ashtapada, nimi joka juontui sanskritin lukua kahdeksan ilmaisevaan sanaan. Ashatapadan yhdistää juoksupelisiin myös laudan turvaruudut ja juoksureitti, joka muistuttaa mehenin käärmettä.

Pari tuhatta vuotta näitä kilpajuoksupeljä nuoremmat, mutta shaturangaa vanhemmat, tai saman ikäiset, sotapelit petteia, latrunculi ja tafl -pelit Euroopassa, muistuttavat shakkia paitsi laudan muodon, niin myös pelin idean ja nappuloiden liikkumistavan puolesta. Näissä peleissä nappulat liikkuvat kuten shakissa ja myös shaturangassa tornit. Samoin näissä peleissä on yleensä tavoit-

teena vangita kuningasnappula piirittämällä se muilla nappuloilla. Asetelma muistuttaa shakin mattia.

Shaturangaa pidetään yleisimmin siis shakin "esi-isänä", joten edellä mainittuja pelejä kannattaa verrata siihen. Shaturangaa yhdistää meheniin lähinnä pelilauta. Mehenissä pelilauta oli toki kiekko, mutta kiekon pohjana oli käärme, joka esitti Mehen käärmejumalaa. Mehenissä kilpajuoksun välietappi, oli käärmeen pää kiekon keskellä. Shaturangan pelialustana olevaa ashtapada pelilautaa käytettiin aikanaan ja vieläkin täysin vastaavanlaiseen peliin, jossa pelaajien kilpajuoksu alkoi laudan reunalta ja päättyi käärmemäisen kierroksen jälkeen laudan keskipesteeseen (katso edellä kuvio 29). Tässä intialaisessa ashtapadapelissä ainoastaan nappuloiden paikkojen sijainti osoitettiin käärmeen selässä olevien lokosten sijaan ruuduilla ja pelialusta oli kiekon sijaan ruuduilla täytetty 8x8 nelikulmio. Toinen yhtäläisyys mehenin, ashtapadan ja shaturangan välillä oli vastustajan nappuloiden syöminen. Se tapahtui, mikäli nappula meni samaan ruutuun kuin vastustajan nappula.

Shaturangassa peli päättyi, kuten shakissakin mattiin, mikä tarkoitti sitä, että vastustajan kuningas oli tehty liikuntakyvyttömäksi uhkaamalla sitä. Kuningas oli siis ainoastaan vangittu, ei syöty. Vastaavanlainen kuvio on viikinkien levittämässä hneftaflissa. Hneftaflissa peli päättyi, mikäli kuningas oli piirretty neljältä puolelta ja näin vangittu. Lisäksi hneftaflissa sotureiden liikkuminen tapahtui samoin kuin tornin (norsun) shaturangassa. Hneftafl taas mitä ilmeisimmin pohjautui roomalaisten latrunculiin, joka puolestaan pohjautui kreikkalaisen petteiaan. Platon taas otaksui Petteian alkuperän olleen Egyptissä. Tämä avaa milenkoitoisen hypoteesin pelien kehitysketjuista.

Edellisten huomioiden pohjalta shaturanga, ja niin muodoin myös sen kehittyneempi versio shakki, saattaisi olla yhdistelmä, hybridi, kilpajuoksupelien ja sotapelien välillä. Ajatus ei ole vain tässä tutkielmassa esitetty, vaan vastavaa ovat esittäneet muutkin tutkijat.

Shakki on saattanut olla hybridipeli, jossa ovat yhdistyneet kreikkalais-roomalaisista ja intialaista peleistä periytyneet läntiset piirteet joihinkin itäisiin piirteisiin, jotka ovat puolestaan johtaneet xiangqiin, kiinalaiseen shakkiin. Aimeemin on esitetty myös, että sellaisilla lautapeleillä kuin liubo, polis ja ashtapada, on ollut yhteyksiä shakin kehittymiseen. (Cazaux 2003).

4.3.2 Oliko Faistoksen kiekko peli?

Tämän tutkielman kohdassa 4.1.1 käsiteltiin muinaisegyptiläistä mehen lautapeliä. Sen taustatietoja selvitellessä tuli vastaan mielenkiintoinen teoria koskien Kreetalta löytynyttä arvoituksellista Faistoksen kiekkoa. Kuviossa 47²⁹ on vasemmalla kiekon A-puoli ja oikealla B-puoli.

²⁹ By PRA - Own work, CC BY 1.0,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6878117>
<https://unitedcats.wordpress.com/category/archeology/>

Faistoksen kiekon tarkoituksesta on lukuisia määriä teorioita, mutta voisiko se saattanut ollakin lautapeli? Tällaisen huomion ovat tehneet muutamat tutkijat. Faistoksen kiekonhan on ensisijaisesti arveltu sisältävän tulkitsematonta kirjoitusta ja sitä on koitettu avata samoin kuin kuuluisan Rosettan kiven merkkejä, joiden kautta avautui egyptiläisten hieroglyfien merkitys

Rosettan kivi on osa steelaa, pystyssä olevaa monumenttikiveä, joka on pystytetty Ptolemaios V:n kunniaksi. Kiven tärkein merkitys ei kuitenkaan sisälly tekstin sisältöön vaan siihen, että sama teksti on kirjoitettu kolmella eri tavalla, hieroglyfeillä, demoottisella eli kansanomaisella kirjoituksella ja muinaiskreikaksi. Varhaiset itämaisen kulttuurin tutkijat havaitsivat välittömästi kiven mahdollisuudet egyptin hieroglyfien kirjoituskoodin murtamiseen. Thomas Young sai aikaan suuria edistysaskeleita, erityisesti kansanomaisen, demolyytisen, tekstin osalta, mutta Jean-François Champollion oli se, joka teki lopullisen läpimurron vuonna 1822. Näin tehdessään hän teki paljon enemmän kuin mursi kaksi egyptiläistä kirjoitusta: Hän avasi Egyptin kulttuurin kokonaisuudessaan historioitsijoille. (Parkinson 1999).

Faistoksen kiekko on ajoitettu suunnilleen minolaisen kulttuurin ajalle. Minolainen kulttuuri on vanhin tunnettu eurooppalainen korkeakulttuuri, joka alkoi noin 4000 vuotta sitten Kreetan saarella. Kulttuuri on ajalta ennen indoeurooppalaisten saapumista Eurooppaan ja ennen tuntemaamme antiikin Kreikkaa, Ateenaa ja Spartaa. Parhaiten nykypäivänä minolaiset muistetaan Knossoksen palatsin labyrintistä ja Minotauruksesta. Tuolta ajalta Kreetalta tunnettiin kolme eri kirjoitusjärjestelmää, muinaiskreetalainen hieroglyfijärjestelmä, minolainen lineaari-A ja myöhäisimpänä, osin jo minolaisen kauden jälkeen, mykeneläinen lineaari-B, mutta Faistoksen kiekko ei sisällä mitään näistä. Lineaarikirjoitukset ovat hieroglyfeistä kehittyneitä kirjoitusjärjestelmiä, joissa hieroglyfien kuvat on korvattu viivamaisilla merkeillä. Kreetan lineaarijärjestelmistä lineaari-B on saatu tulkittua, mutta lineaari-A:ta ei vielä toistaiseksi. (Whittaker 2013, Castleden 2012)



KUVIO 47 Faistoksen kiekko

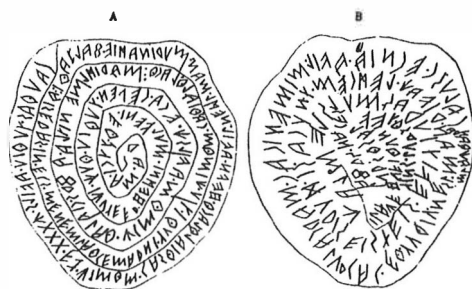
Faistoksen kiekko on ollut tutkijoille houkutteleva kohde ja sitä on yritetty tulkita lukemattomilla tavoilla aina tähtitaivaan kartasta kauppiaan kirjanpitoon ja musiikin nuotteihin. Tulkinta peliksi on vain yksi näistä monista.

Ainoa Faistoksen kiekkoa muistuttava tunnettu esine on etruskilainen *Maglianon kiekko* (kuvio 48) ajalta noin 500 eKr. Sen tiedetään sisältävän kirjoitusta sillä etruskinkielinen teksti on osittain myös tulkittu. Pienellä lyijylevyllä, joka ajoittuu todennäköisesti viidennelle vuosisadalle ennen ajanlaskun alkua, on outo spiraalimainen sisäkirjoitus, joka kulkee ulkokehältä sisälle päin kohti keskusta. Levyllä on noin seitsemänkymmentä sanaa. Sana ”jumalat”, *aïser*, joka esiintyy muuallakin, näyttää viittavan jumalten ryhmään. (De Grummond & Simon 2009)

Maglianon kiekko on kuitenkin noin 1000 vuotta nuorempi kuin Faistoksen kiekko, mutta johtanut mielenkiintoisiin tulkintoihin Faistoksen kiekon mahdollisesta yhteydestä muinaiseen Troijaan, mutta myös epäilyihin, että Faistoksen kiekko voisikin olla huijaus.

Jerome Eisenberg väittää seuraavaa: ”Faistoksen kiekko on pieni savikiekko, jolle on painettu joukko yksilöllisiä ”hieroglyfejä”. Kiekon löysi kaivauksissa Luigi Pernier heinäkuussa 1908 Faistoksen palatsista Kreetan saarelta. Suuren yleisön tuli mieleen tuskin tulee rinnastaa sitä Piltdownin ihmiseen yrityksenä huijata sekä tavallista yleisöä, että suurta joukkoa oppineita tiedemiehiä. Kuitenkin kiekon paljastuminen kuuluisimmaksi kirjoitusvääreennökseksi pitäisi varmasti tehdä loppu pitkäkestoisesta väittelystä sen alkuperästä ja sen kiehtovien hieroglyfien kääntämisestä. Tämän ”löydön” 100-vuotispäivänä kirjoittaja toivoo voivansa tuoda valoa sen epäilyttävään alkuperään. Kirjoitusten tulkinnan skaala kulkee kirjoituksen suhteesta niin muinaisen Kreikan kirjoituksesta sellaisiin kuin esi-ionialaisiin, minoalaisiin, anatolialaisiin (heetiläisiin ja luvialaisiin), kuten myös kaukaa haettuna baskilaisiin, indo-eurooppalaisiin, proto-slaavilaisiin, rhodialaisiin, koptilaisiin, seemiläisiin, esi-hyhliläisiin, tataariturkkilaisiin, sekä Mustanmeren alueen kirjoituksiin (Etelä-Kaukaasia/Georgia, Kartvelia, Colchia, Mingrelian-Laz) ja jopa länsisuomalaisiin, vanhaan vironkieleen, intialaisiin ja polynesianlaisiin kieliin ja kiinaan.” (Eisenberg 2008)

Jerome Eisenberg jatkaa: Luigi Pernier – halunaan kilpaila Federico Halbherrin Gortynan löydösten ja Arthur Evansin Knossoksen löydösten kanssa – saattoi luoda kiekon ja sijoittaa sen löytöpaikalle innostaakseen kaivaustensa sponsoreita ja rohkaistakseen heitä jatkamaan niiden rahoitusta. Dr Jean Faucounau on ystävällisesti lähettänyt tämän kirjoittajalle kopion kirjastaan *Le Déchiffrement du Disque de Phaistos* (1999), josta tämän kirjoittaja oli aiemmin ottanut vain eri kirjoittajien kommentteja. Hän oli kiitollinen saadessaan kuvitettuna useita erinomaisia lähteitä ainakin neljästä eri merkistä. Kilpi muistuttaa läheisesti kilpiä, joita ns. merikansat käyttivät Kadeshin taistelureliefeissä Ramasseumin seinäkuvissa Thebassa. (Eisenberg 2008)



KUVIO 48 Maglianon kiekko³⁰

Kaikkiin näihin ei kuitenkaan ole tässä tutkielmassa syytä perehtyä, joten palataan ajatukseen pelistä. Peter Aleff (Aleff 2002) on listannut useita yhtymäkoh-
tia Faistoksen kiekon ja muinaisten kilpajuoksupelien mehenin ja Urin kunin-
kaallisen pelin välillä. Ensimmäinen ja ilmeisin on luonnollisesti kiekon muoto,
Faistoksen kiekko on muodoltaan samanlainen kuin mehen ja kiekon sisällä
kiertävä silmukka muistuttaa käärmettä. Toinen yhtäläisyys löytyy Urin kun-
kinkaalliseen peliin ja muutamaan muuhun vanhaan peliin. Se on Faistoksen
kiekossa esiintyvä rosette eli kahdeksan terälehteä käsittävä lehtiruusu. Fais-
toksen kiekossa niitä on yhteensä neljä, joista A-puolella kolme, kiemuran alus-
sa reunalla, lopussa keskellä ja hieman ennen keskustaa, sekä B-puolella yksi,
alussa reunalla. Rosette on symbolina erittäin vanha ja löytyy mm. lukuisista
babylonialaisista seinäreliefeistä. Rosetten katsotaan symboloivan elämän alkua,
loppua, sekä Mesopotamiassa Ishtar jumalatarta ja tämän tunnusta, Venus pla-
neettaa. Kaksoisvirtain maan mytologioissa rosetten katsottiin olleen Raamatus-
takin tunnetun Edenin elämänpuun kukka. Rosette löytyy myös peleistä, esi-
merkiksi Urin kuninkaallisessa 20 ruutua pelissä on viisi rosettea, samoin kuin
sen egyptiläisessä muunnoksessa (kuvio 28).

Sumerista, Urin kuninkaallisesta haudasta on löydetty yksi monista peli-
laudoista ajoittuen aikaan 2500 eKr. Näissä "20 neliön peleissä" on kaikissa sa-
manlainen pelipolku, kuin Urin pelissä, mutta yhdessä tyypissä taitettu polku
on korvautunut suoralla linjalla. Tällaiset ilmaantuivat Egyptiin ulkomailta tul-
leiden hyksojen valtiaskaudella, mutta säilyivät suosittuina hyksojen jälkeenkin.
(Aleff 2002)

Mielenkiintoista on, että vanhimmat löydetty rosette-esineet ovat liki
30 000 vuotta vanhoja ja löydetty Moskovan itäpuolelta mammutinmetsästäjien
haudasta. Varhaisin esimerkki ja yksi kauneimmista on kahdeksan terälehtinen
rosette, joka oli kaiverrettu mammutinluiseen kiekkoon 28 000 vuotta sitten. Se
löytyi lapsen haudasta Aurignacin aikaisesta Sungiristä, Venäjältä. Liittyminen

³⁰ (Eisenberg 2008)

hautausesineistöön viittaa siihen, että se on saatettu liittää uudelleensyntymisen ajatuksiin jo tuolloin. (Aleff 2002)

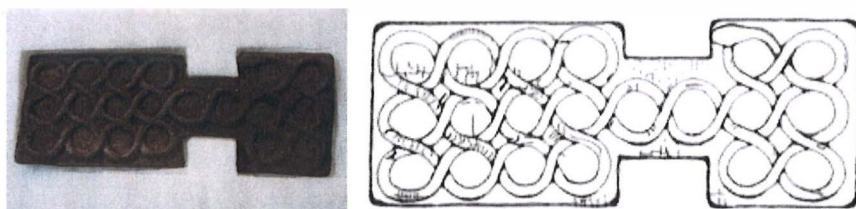
Rosette löytyy myös senet-pelin keskeltä (kuvio 27), se on pelin 15. turvaruudun symboli, joka on toisinaan korvattu myös muinaisegyptiläisellä ankh-symbolilla, jolla oli sama elämää, Venus-planeettaa tai aurinkoa kuvaava symbolinen merkitys kuin rosettellakin. Ankh-symboli tunnetaan nykyään paremmin ns. koptiristinä (Evans 2004). Edelleen rosettella on merkitty myös muinaisegyptiläisen seega-pelin (kuvio 33) keskimmäistä turvaruutua.

Aleffin huomioissa voi olla perää sillä yhdistäviä tekijöitä on muitakin, sellaisia, joita hän ei mainitse. Kreetan minolainen kulttuurihan oli vahvassa yhteydessä aikansa egyptiläiseen kulttuuriin, koska maantieteellinen etäisyys oli pieni. Lisäksi egyptiläisestä mehen pelistä viimeinen havainto on Egyptin keskivaltakunnan ajoilta (2000 - 1400 eKr.) Kyprokselta, Kreetan vierestä. Melko tarkkaan samaan aikaan (2200 - 1300) Kreetalla vallitsi minolainen kulttuuri.

Edelleen Urin kuninkaallisessa pelissä, kuten myös sen egyptiläisessä versiossa, oli rosetten lisäksi toinenkin vastaava kuvio. Faistoksen kiekossa on 17 "kilveksi" kutsuttua rengasta, joiden sisällä on seitsemän reikää, yksi keskellä ja kuusi reunalla. Näistä 15 on A-puolella ja kaksi B-puolella. Urin kuninkaallisessa pelissä taas on seitsemän renkaanmuotoista pelinappulaa, joissa kussakin on keskellä viisi pistettä, yksi keskellä ja neljä reunoilla. Vastaavasti pelilaudassa on viisi ruutua, joissa on samanlaiset pistekuviot. Vastaava pisteiden kuvio esiintyy myös muissa ruuduissa, kahdessa suurempana ja kahdessa muussa neljästi, mutta pienempänä. Yhteensä siis 15 kertaa.

Faistoksen kiekko yhdistyy siis Urin kuninkaalliseen peliin kahden laudalla olevien merkkien (rosette ja "kilpi") suhteen ja meheniin käärmeäisen rakenteensa vuoksi. Huomattavaa on myös, että Mehenissä pelin alkamispiste on käärmeenpyrstö ja kääntymispiste keskellä on käärmeen pää, Urin kuninkaallisessa pelissä pelin alkamis ja lopetusruuduissa on rosette. Vastaavasti Faistoksen kiekon keskellä reunalla kierteen alussa on rosette. Mutta voisiko sitten olla mitään muuta, selkeämpää, mikä liittäisi toisiinsa myös mehenin ja Urin kuninkaallisen pelin?

Kyllä. Aivan vastikään löytyi Iranin itäosista, läheltä Afganistanin rajaa, Shahr-i Sokhtasta noin 5000 vuotta vanha 20-ruutua peli, jossa ruutuen sijaan oli 20 rengasta. Renkaat syntyivät pitkästä käärmeestä, reunusti vastaavanlaisesta kuin egyptiläisessä mehen pelissä (kuvio 49) (Piperno & Salvatori 1983). Tämä peli on itse asiassa 200 - 300 vuotta vanhempi kuin vanhin tähän mennessä löydetty vastaava Urin kuninkaallinen 20-ruutua peli (kuvio 24). Sitä onkin esitelty "maailman vanhimpana backgammon pelinä" (Jarrige, Didier & Quivron 2011, Schädler & Ulrich 2014). Tässä pelissä käärmeen häntä on sen suussa aivan kuten legendaarisella maailmankäärmeellä, *ourobokoksella* (Sheppard 2013).



KUVIO 49 Iranilainen 20-ruutua -peli

Mielenkiintoisinta tässä pelissä on kuitenkin se, että se rakentaa yhteyden mehen pelin ja Urin kuninkaallisen pelin välille. Lisäksi mehenissä käärmeen pää sijaitsi kiekon muotoisen pelilaudan keskellä, paikassa, josta pelaajat kääntyivät takaisin. Shahr-i Sokhtan pelissä käärmeen pää sijaitsee myös kohdassa, joka on Bellin mukaan (kuvio 26) pelin poistumiskohta. Kun katsotaan sumerilaista Urin kuninkaallisen pelin lautaa (kuvio 26), niin huomataan, että kyseisessä ruudussa, jossa siis Shahr-i Sokhtan pelissä on käärmeen pää, on rosette-kuvio.

Lopuksi palaan Faistoksen kiekkoon. Siinä on myös käärmemäisesti kiertävä käytävä, jolloin keskimäinen ruutu olisi mehen -peliin verrattaessa siis käärmeen pää. Kiekon A-puolella keskimäisessä ruudussa onkin rosette-kuvio aivan kuin Urin kuninkaallisen pelin päätösruidussa, jossa Shahr-i Sokhtan versiossa on käärmeen pää.

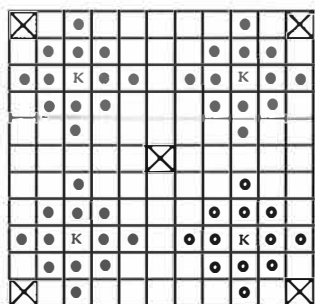
Voisi siis olettaa, että Faistoksen kiekko on todella saattanut olla muinainen kilpajuoksupeli ja sen ruutujen merkinnät ohjeita sitä mitä pelaaja joutuu tekemään nappulan joutuessa asianomaiseen ruutuun. Tämä teoria saisi vahvistusta, mikäli Faistoksesta löytyisi myös pelinappuloita, jotka olisivat seitsemän pistettä sisältäviä pyöreitä kuvioita kuten Faistoksen kiekon kilpikuviot. Näinhän oli Urin kuninkaallisen pelin kohdalla sillä erolla, että pisteiden määrä kilpikuvioissa oli viisi, ei seitsemän. Kuviossa 50 on eräs hahmotelma siitä millaiselta Faistoksen kiekko voisi näyttää pelinä. Pelinappuloina on käytetty seitsemänpisteisiä pyöreitä kiekkoja. Vasemmalla on itse otettu kuva alkuasetelmasta ja keskellä kuvitteellinen pelitilanne. Oikealle on vertailun vuoksi laitettu kuva mehen -pelistä (Robinson 2015).



KUVIO 50 Faistoksen kiekko pelinä sekä mehen -peli

4.3.3 Fjögratafl, teoreettinen neljän pelaajan tafl -peli

Tässä yhteenvedossa on vertailtu muinaisia lautapelejä tavoitteena ymmärtää lautapeliä evoluutiota ja erityisesti shakkiin johtanutta evoluutiokehitystä. Yksi huomio on koskenut shaturangan neljän pelattavaa peliä chaturajia ja toinen shaturangan eurooppalaista aikalaista hneftaflia. Näitä kahta peliä yhdisti neliöruutulauta, merkitty keskialue ja reunoilla olevat neljä joukkuetta. Neljän pelaajan hneftaflia ei tunneta, mutta esittelemme tässä yhteenvedon viimeisessä kohdassa vielä hypoteettinen sellainen peli koska sellainen on teoriassa voinut ollakin olemassa ja koska tämän tutkielman pohjana ollut kolmishakki perustui vastaavanlaiseen päättelykuviioon. Nimetään peli islantilaisen perinteen mukaisesti fjögratafliksi eli nelitafliksi (kuvio 51).



KUVIO 51 Fjögratafl

Fjögrataflin säännöt. Nappulat, soturit ja kuninkaat, liikkuvat aivan samoin kuin hneftaflissakin, siis kuten perinteisen shakin tornit. Tässä pelissä jokaisella soturijoukolla on oma kuningas, jonka vastustajasoturit voivat vangita samalla tavoin piirittämällä neljältä puolelta kuin hneftaflissakin. Myös vastustajan soturit surmataan samalla tavoin piirittämällä kahdelta puolelta. Kuninkaan kuollessa tämän soturit lamaantuvat ja menettävät taistelukykynsä eikä niitä voi liikuttaa, mutta ne voidaan syödä pois laudalta. Mikäli kuninkaan kaikki soturit kuolevat, niin kuningas lamaantuu ja on poistettavissa laudalta syömällä se. Pelin voittaa se joukkue, jonka kuningas on viimeisenä jäljellä tai, jonka kuningas pelastautuu keskellä olevaan turvalinnakkeeseen. Kuningas voi siirtyä turvaan myös kulmalinnakkeeseen väliaikaisesti. Kuninkaan ollessa kulmalinnakkeessa hänen satureitaan ei kuitenkaan saa liikuttaa.

4.4 Yhteenveto

Kuten edellä on käynyt ilmi, niin shakin alkuperästä on useita toisistaan eroavia käsityksiä. Näistä vallitsevana on pelin syntysijaksi Intia ja toiseksi esitetyn syntysijaksi on Kiina. Päättelyt ovat perustuneet erilaisiin kirjoitettuihin lähte-

siin vanhoissa teksteissä, arkeologisiin löytöihin sekä loogisiin päättelyihin vertaamalla eri pelien sääntöjä, pelilaudan kokoa ja pelien kehittymistä eri aikakausina. Tässä historiaa käsittelevässä 4. luvussa on esitelty myös muita vanhoja lautapelejä tarkoituksena pyrkiä arvioimaan alkushakin evoluutiota muista varhemmista lautapeleistä.

Tässä tutkielmassa ei ole tarkoitus osallistua keskusteluun siitä, mikä on oikea vastaus shakin alkuperään vaikka näkemys siitä kuitenkin esitetään. Motiivina tarkastelulle on yritys pyrkiä ymmärtämään pelin kehitystä ja shakkipeelin evoluutiota siksi, että tässä tutkielmassa esitetyt kehitelmät pohjautuvat shakin perusrakenteisiin.

5 SHAKIN MUUNNELMIA MYÖHEMMILTÄ AIKA- KAUSILTA

Erilaisia mielikuvitusshakkeja on aikojen saatossa kehitetty valtaisa määrä. Nykyään tietous niistä kasvaa nopeasti kansainvälisten tietoverkkojen kasvun myötä. Tässä luvussa tarkastellaan vanhoja muunnelmia eli ennen 1900-lukua tehtyjä, sekä uudemmissa muunnelmissa vain muutama parhaiten tunnettu. Lähinnä keskitytään muunnelmiin, joissa on useampi kuin kaksi pelaajaa, koska niillä on merkitystä tämän tutkielman sisällön kannalta. Tässä käydään läpi vain muutamia keskeisiä pelejä, kaiken kaikkiaan pelkästään tätä tutkimusta varten löytyi kirjallisuudesta liki 150 erilaista shakkipelin muunnelmaa.

Mielenkiintoista on kuitenkin ollut havaita, että kaikissa vanhemmissa muunnelmissa on pitäydytty neliöruudutetuilla alustoilla. Näyttää siltä, että heksagoneja tai kolmioita on pelilautojen ruudutuksessa alettu käyttämään laajemmin aikaisintaan vasta 1970- ja 1980- luvuilla. Varhaisin tähän tutkielmaan löydetty heksagonipohjainen shakki on vuodelta 1912 oleva peli (Jelliss 1992). Vieläkin varhaisempi ja ehkä vanhin heksagonilaudalla pelattu peli on *hexagonia*, josta myöhemmin tässä luvussa vielä lyhyt selvitys.

Kappaleessa 5.3 käsitellään muutaman uudemman kolmen pelaajan shakin samankaltaisuuksia ja alkuperää. Tämä käsittely on myös pieni osatulos tässä tutkimuksessa ja luotaustaa väitöskirjassa esitellyille omille pelikehitelmille.

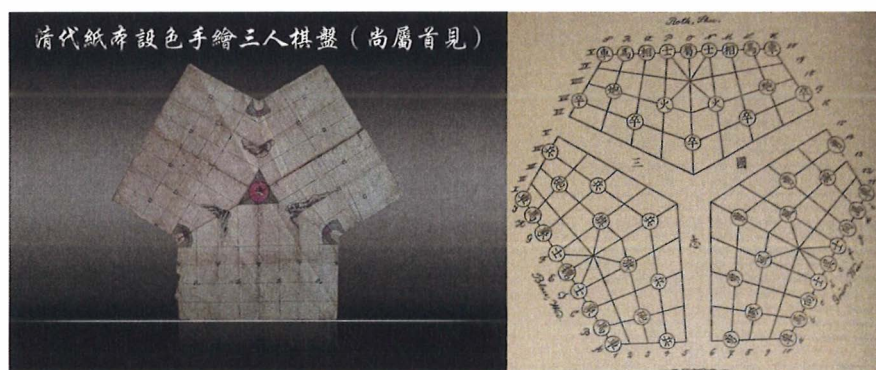
5.1 Historiallisia usean pelaajan shakkeja

Kun tämän tutkielman tekijä kehitti 1993 kolmen osapuolen shakkipelin, niin se tuntui ainutlaatuiselta. Pelin kehittämisvaiheessa löytyi kirjallisuudesta yksi vastaava, jo vuonna 1912 kehitetty pienempi kolmen pelaajan peli (Gik & Määttänen 1988). Kun peli oli julkaistu vuonna 1995, niin maailmalta löytyi pari

muutakin kehittelmää. World Wide Web alkoi kasvaa voimakkaasti juuri tuona samana aikana ja sen myötä yhä useampia shakin muunnelmia alkoi löytyä maailmalta. Tätä tutkielmaa varten oli aihetta perehtyä laajemminkin shakin muunnelmien historiaan ja on hämmästyttävää kuinka varhain esimerkiksi usean pelaajan variaatioita shakista on tehty. Vanhin tätä tutkielmaa tehdessä löydetty merkintä on vuodelta 1762, mutta ensimmäisenä esiteltävä kolme kuningaskuntaa on selvästikin vielä vanhempi vaikka ensimmäinen maininta siitä onkin vasta vuodelta 1876 (Deutsche Gesellschaft für Natur- & Völkerkunde Ostasiens 1876). Pelin arvellaan olevan peräisin jo 1100-luvulta (Li 1998).

5.1.1 Kolme kuningaskuntaa ja kolme ystävää pelit

Kiinasta löytyy kolmen pelaajan kiinalaisen shakki, *san-guo-qi* eli *kolme kuningaskuntaa* (kuviot 52, oikealla) (Deutsche Gesellschaft für Natur- & Völkerkunde Ostasiens 1876), joka on mahdollisesti peräisin jo aivan toisen vuosituhannen alusta.



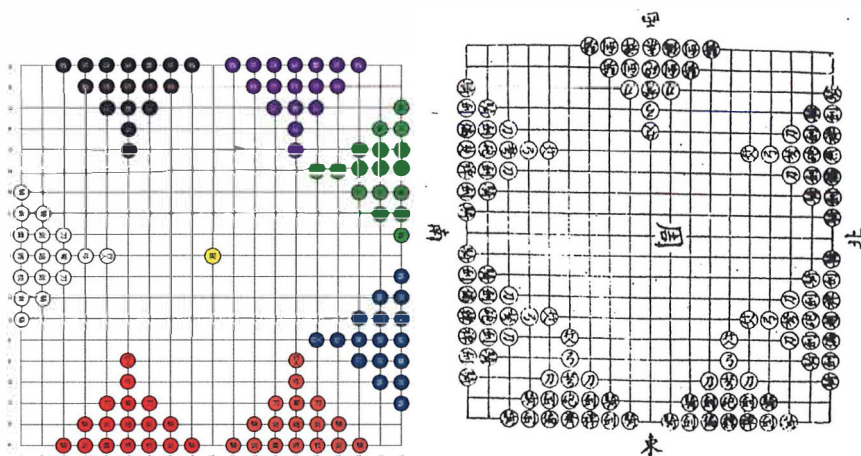
KUVIO 52 Kolme ystävää ja kolme kuningaskuntaa -peli

Tieto tästä pelistä löytyy dr O. von Möllendorfin artikkelista "Schachspiel der Chinesen", vuodelta 1876 (Deutsche Gesellschaft für Natur- & Völkerkunde Ostasiens 1876) ja lähteen, *An diesen Krieg schliesst sich das Spiel genau an*, mukaan pelin idean pohjana on 200-luvulla Kiinassa käydyt kolmen kuningaskunnan väliset sodat. Tuolloin Han-dynastian kaaduttua kolme valtakuntaa, Wei, Shu ja Wu taistelivat Kiinan hallinnasta noin 40 vuotta ja peli on saanut tästä nimensä. Möllendorfin artikkeli ilmestyi vuonna 1800-luvulla, mutta peli mainitaan ensimmäisen kerran jo Yao Kung-wun teoksessa *Notes on Books Read in the Jun Study* vuodelta 1151. (Li 1998) Kolme kuningaskuntaa peli on selkeä muunnelmä kiinalaisesta shakista xiangqista aina pelinappuloita ja pelilaudan jakavaa jokea – tässä tapauksessa kolmeen suuntaan haarautuvaa – myöten. Pelistä on

myös variaatio, *kolme ystävää peli* eli *san-you-qi*, jolle löytyy keksijäkin, Zheng Jinde 1600-1700 lukujen taitteessa (kuvio 52, vasemmalla)³¹.

5.1.2 Seitsemän armeijaa peli

Tämäkin peli on muunnelma kiinalaisesta shakista, nappulat ja säännöt ovat osittain samoja, mutta pelaajia on, kuten nimi kertoo, seitsemän ja peliä pelattiin 19x19 kokoisella weiqi (go-peli) laudalla (kuvio 53). Pelin kehittäjäksi mainitaan Sima Guang 1000-luvun alussa ja sen esikuvana on Kiinassa 400 - 200 eKr. käydyt sotilordien väliset taistelut. Mielenkiintoinen yksityiskohta on, että kuningatar ja lähetti liikkuvat jo tuolloin kuten nykyaikaisessa shakissa. (Lo & Wang 2004) Peli lienee kehitetty vuosina 1071 - 1085 (Li 1998).



KUVIO 53 Seitsemän armeijaa peli³²

5.1.3 Neljän vuodenajan shakki

Alfonso X Viisaan hallituskaudelta 1200-luvun Espanjasta tunnetaan neljän pelaajan shakkipeli, josta käytettiin nimeä *neljä vuodenaikaa*. Peli muistutti neljän pelaajan shaturangaa, mutta erosi siitä nappuloiden asettelun ja joidenkin sääntöjen osalta. Neljän pelaajan shaturangassa (kuvio 41) upseerit oli sijoitettu jonoon sivuja pitkin alkaen kulmista ja sotilaat niiden viereen. Neljän vuodenajan shakissa (kuvio 54)³³ upseerit taas oli sijoitettu kulmiin neliömuodostelmaan ja sotilaat niiden ympärille.

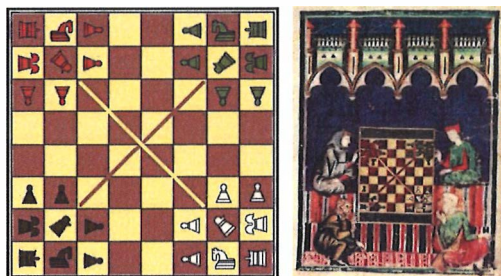
Tavallaan tämä asetelma muistuttaa 1400 - 1600 luvuilla Espanjan armeijan käyttämää ns. espanjalaista neliötä eli terciota. Tercio syntyi vuonna 1493,

³¹ Cazaux, <http://history.chess.free.fr/sanguoqi.htm>

³² <http://history.chess.free.fr/qiguoxiangxi.htm>
(Li 1998)

³³ <http://www.chessvariants.com/historic.dir/4seiz.html>

kun komppania jaettiin neliöihin, ”squadroneihin”, joita johtivat kersantit. Yksi keskeisiä uudistuksen eteenpäin viejiä oli ”suuri kapteeni”, Gonzalo Fernández de Córdoba. (López & López 2012)



KUVIO 54 Neljän vuodenajan shakki

Pelissä kuningas, torni, ja ratsu liikkuvat kuten perinteisessä shakissa. Sotilas myös söi viistoon kuten perinteisessä shakissa. Lähetti liikkui kuten shaturangassa, viistosti hypäten yhden ruudun yli. Kun sotilas saavutti rintamasuuntaansa vastaisen sivun, se korottui kuningattareksi (kenraaliksi) joka liikkui, kuten shaturangan kuningatar, viistoon yhden ruudun. Lähetin ja kuningattaren liikkuminen näin erikoisella tavalla, eli aivan kuten shaturangassa ja shatranjissa, on ymmärrettävää koska peli on peräisin näin varhaiselta aikakaudelta ja on saattanut osittain kehittyä juuri näiden kahden shakin varhaismuodonkin pohjalta. Pelissä kuningas voi joutua mattiin kuten perinteisessä shakissa. Tuolloin kuningas poistettiin laudalta ja matin tehnyt pelaaja sai käyttöönsä matitetun kuninkaan armeijan. Pelissä voitiin käyttää myös yhtä tai kahta noppaa. Peliä saatettiin pelata myös rahasta, jolloin tulokset laskettiin syötyjen nappuloiden mukaan. Nappulat oli pisteytetty niiden arvon mukaan siten, että kuningas oli 6, kuningatar 5, torni, 4, ratsu 3, lähetti 2 ja sotilaat 4 pistettä, 1 piste kukin.

Pelin nappulat olivat aina vihreitä, punaisia, mustia ja valkoisia kuvastaen neljää vuodenaikaa kevättä, kesää, syksyä ja talvea, mutta myös neljää elementtiä, ilmaa, tulta, maata ja vettä. Pelaaja hyökkäsi yleensä oikeanpuoleista vastustajaa kohti vaikka toiseen suuntaankaan hyökkääminen ei ollut kielletty. Tämä kuvasi myös auringon liikettä ja liittyi nappuloiden värien ohella pelin sisältämään symboliikkaan tuona aikana. (Burckhardt 1969, Golladay 2007, Verney 1885)

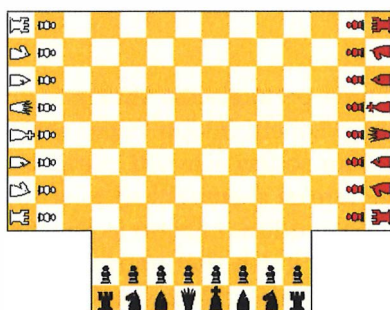
5.2 Muunnelmia 1700-luvulta 1900-luvun alkuun

Tässä alaluvussa esitellään muutamia historiallisia shakin muunnelmia 100 – 300 vuoden takaa liittyen siihen shakin evoluutioon, jonka selvittämistä tässä

tutkielmassa jatketaan. Shakin muunnelmia on tuonakin aikana kehitetty lukuisia, mutta tähän on poimittu historian virstanpylväitä ajatellen merkittävimpiä sellaisia muunnelmia, jotka ovat joko monen pelaajan pelejä tai heksagonaali-ruutuisella laudalla pelattavia pelejä tai molempia. Tässä alaluvussa esiteltävät pelit ovat: Marinellin kolmen pelaajan shakki, neljän pelaajan shakkipelejä 1700-1800 luvuilta, Gala-peli 1800-luvun Saksasta, Wellischin kolmen pelaajan shakki, Glinskin heksagonaalishakki ja Hexagonia-peli.

5.2.1 Marinellin kolmen pelaajan shakki

Varhaisin tunnettu eurooppalainen kolmen pelaajan shakki on Philip Marinellin peli (kuvio 55)³⁴ vuodelta 1722 (Verney 1885).



KUVIO 55 Marinellin kolmen pelaajan shakki vuodelta 1722

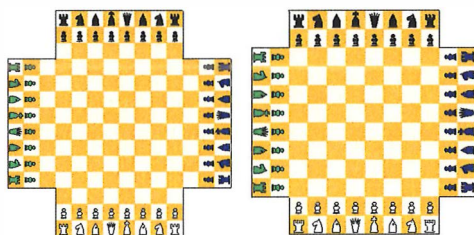
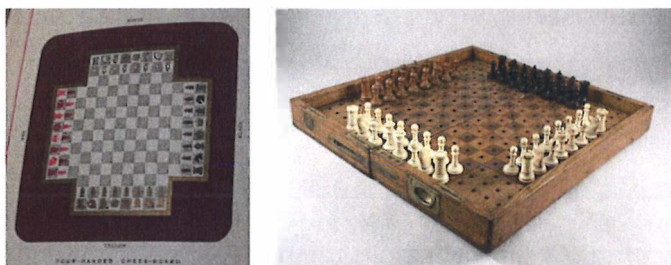
Marinellin peli on laajennettu shakista varsin yksinkertaisella tavalla lisäämällä tavallisen shakkilaudan kolmelle sivulle 3x8 -ruudun ulokkeet, joille on sijoitettu pelaajaa kohti sama määrä nappuloita kuin tavallisessakin shakissa. Jokaisella pelaajalla on kuningatar sijoitettu kuninkaan vasemmalle puolelle. Peli ei ole pelaajien aseman suhteen symmetrinen sillä Musta on eri asemassakuin Valkoinen ja Punainen, koska se on sijoitettu niiden väliin. Lisäksi Mustan sotilaille on lyhyempi matka korottumiseen, joka tapahtuu kuten perinteisessäkin shakissa vastakkaisella sivulla. Pelin voittaa se, joka on tehnyt matin kummastakin vastapelaajasta. Kun ensimmäisestä pelaajasta on tehty matti, niin tämän nappulat jäävät laudalle liikkumattomina. Ne voidaan kuitenkin syödä kuningasta lukuun ottamatta.

Marinellin kolmen pelaajan shakki oli omistettu Savoyn prinssi Eugenelle, joka innostui pelistä ja kehotti Marinellia tekemään sitä tunnetuksi maailmalla (Marinelli 1826). Mielenkiintoista on, että tämä tapahtui siis jo lähes 300 vuotta sitten, mutta edelleenkin vain erilaisia kolmen pelaajan shakkipelejä keksitään uudelleen (Rewega 1992, Verney 1885).

³⁴ <http://www.chessvariants.com/historic.dir/marinelli.html>

5.2.2 Neljän pelaajan ristimallisia shakkeja Euroopasta

Euroopassa esiteltiin useitakin ristimallisia neljän pelaajana shakkipelejä 1700 – 1800 luvuilla. Vanhimpia olivat nimimerkin K.E.G. Dassaussa luoma peli vuodelta 1784 ja vuodelta 1792 Saksan Altenburgista oleva peli. Kutsutaan näitä *Dassaun peliksi* ja *Altenburgin peliksi*. Vanhin peli, jonka säännöt ja pelitapa oli dokumentoitu, oli kapteeni George Hope *Verneyn peli* vuodelta 1881. (Verney 1885) Nämä pelit olivat ulkoasultaan varsin samannäköisiä, kuten kuviosta 58 ilmenee.



KUVIO 56 Neljän pelaajan shakkeja 1700-1800 luvuilta.

Kuviossa 56³⁵ (Verney 1885) pelit ylhäällä on Verneyn shakkipeli, alhaalla vasemmalla Altenburgin ja oikealla Dassaun shakkipeli. Kuten huomataan, niin Altenburgin lauta ja nappuloiden alkuasetelma on identtinen Verneyn pelin kanssa. Dassaun pelissä on ainoastaan reunoilla yksi ruuturivi vähemmän.

Verneyn pelissä (Verney 1885) kaikki eivät pelaa kaikkia vastaan, vaan laudan vastakkaisilla puolilla olevat pelaajat ovat liittolaisia, joiden tavoitteena on tehdä matti kahdelle muulle pelaajalle. Matti pitää tehdä molemmille vastustajien kuninkaille. Keltainen ja Valkoinen pelaavat siis Mustaa ja Punaista vastaan. Kullakin pelaajalla on sama määrä samanlaisia pelinappuloita kuin tavallisessakin shakissa. Siirrot kiertävät myötäpäivään. Pelissä on myös muutamia erikoisia sääntöjä. Liitossa olevat pelaajat eivät saa kommunikoida keskenään ja liittolaispelaajien kuninkaat voi sijoittaa viereisiin ruutuihin, koska ne eivät uhkaa toisiaan. Koska peliin osallistuvat henkilöt ovat taidoiltaan eri vahvuisia, niin on myös erikoissääntö, jonka mukaan peliä aloitettaessa toisena siirtovuorossa olevan joukkueen pelaajat saavat vaihtaa paikkaa. Pelaaja ei myöskään

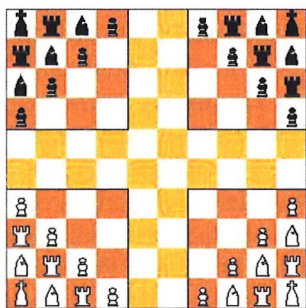
³⁵ <http://www.chessvariants.com/multiplayer.dir/4players.html>
<http://www.thisnext.com/item/9A7C52FA/B9566C41/Victorian-4-Player-Chess-Set>

saa tehdä siirtoa, joka veisi hänen kumppaninsa kuninkaan shakkitilanteeseen. Erikoistilanne syntyy myös kun saman puolen pelaajien sotilaat joutuvat vastakkain. Tällaisessa tapauksessa sotilas saa hypätä liittolaissotilaan ylitse. Tässä pelissä ei sallita linnoittautumista. (Verney 1885) Tämän tarkemmin ei tässä yhteydessä ole sääntöihin syytä paneutua.

Altenburgin peli on periaatteessa varsin samanlainen ja siinäkin vastakkain olevat pelaajat ovat liittolaisia. Kun yhdestä kuninkaasta on tehty matti, niin mitään tämän nappulaa ei enää sen jälkeen saa liikuttaa. Lisäksi tässä pelissä on lukuisa joukko pieniä erikoissääntöjä, joihin tässä ei kuitenkaan ole syytä puuttua. Altenburgin shakissa on kuitenkin linnoittautuminen sallittu. (Verney 1885)

5.2.3 Galapeli

Yksi historiallisista neljän pelattavista shakeista on 1800-luvulla Saksassa kehitetty Galapeli. Gala oli aikanaan jopa varsin suosittu peli Saksassa, erityisesti Schleswig-Holsteinin alueella. Pelilauta oli 10x10 ruutuinen ja pelaajien nappulat oli sijoitettu laudan nurkkiin kuvion 57³⁶ osoittamalla tavalla. Vaikka peli vaikuttaa neljän pelaajan peliltä, niin tässä oli ainoastaan kaksi pelaajaa, joilla kummallakin oli siis kaksi nappularyhmää sisältäen kaksi kuningasta. Nappuloita oli siis vain kaksi väriä. Pelistä puuttuivat kuningattaret ja ratsut. Kuvassa keltaisten ruutujen täyttämällä ristikuviolla olevat ruudut olivat muita ruutuja korkeammalla, siis eri tasolla, pelilaudalla. Syynä tähän oli se, että tälle alueelle siirtyvien nappuloiden kulkusuunta vaihtui. Pelin tavoitteena oli syödä vastapuolen kuninkaat. (Botermans et al. 1990)



KUVIO 57 Gala-peli

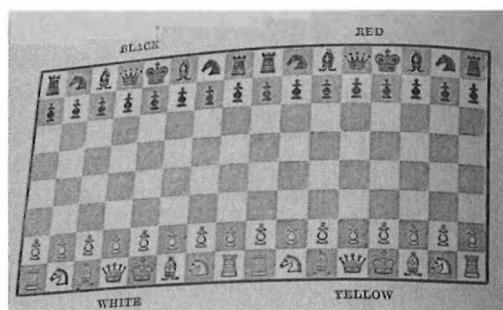
Nappuloiden liikkuminen poikkesi melkoisesti perinteisestä shakista. Sotilaat liikkuivat omalla alueellaan eli kuvassa oranssiruudutettujen 4x4 neliöiden sisällä viistoon samanvärisillä ruuduilla kuten lähetit. Jos sotilas siirtyi alueensa ulkopuolelle, niin se pysähtyi siirtovuorollaan ensimmäiseen keltaruudutetun

³⁶ <http://www.chessvariants.com/historic.dir/gala.html>

alueen ruutuun. Siirryttyään alueensa ulkopuolelle ne saattoivat liikkua jokaiseen naapuriruutuun kuten shakkipelin kuningas. Mikäli sotilas palasi alkupeleille alueelleen, niin sen liikkumistapa palasi entisenlaiseksi. Torni liikkui oranssiruuutuisissa kulmaneliöissä kuten torni shakissa pysty- ja vaakasuoraan, mutta keskialueen keltaruudutetulla alueella kuten shakin lähetti viistoon. Lähetin liikkuminen oli täsmälleen päinvastoin kuin tornin. Se liikkui kulma-alueilla kuten shakin lähetti, mutta keskialueen ristikossa kuten shakin torni. Kuningas liikkui koko alueella kuten shakin kuningas, mutta jos se oli jossain laudan keskellä olevasta neljästä ruudusta, niin sen sai sijoittaa seuraavaksi mihiin tahansa vapaaseen ruutuun paitsi aloitusruutuunsa! Kun pelaaja uhkaa kuningasta hän sanoo "gala". Jos kuningasta ei siirtää turvaan, niin se syödään. Pelaaja, joka oli syönyt vastustajan kuninkaat, on voittaja. Peli päättyi tasan jos kummallakin oli jäljellä vain yksi kuningas. (Botermans et al. 1990)

5.2.4 Erikoisia n-pelaajan shakkeja 1800-luvulta

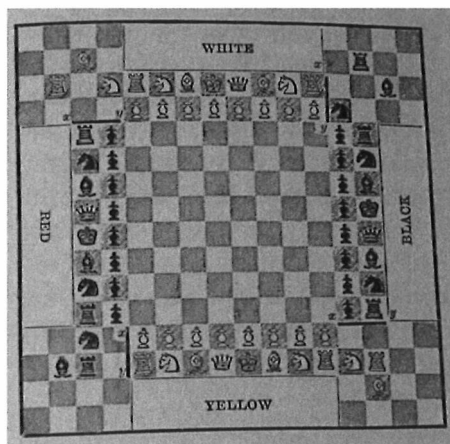
1800-luvun Euroopasta löytyy todella paljon erikoisia shakin muunnelmia edellisten lisäksi. Yksi sellainen on G.R. Neumannin neljän pelaajan shakki vuodelta 1867. Tässäkin pelissä Valkoinen ja Keltainen pelaavat yhdessä Mustaa ja Punaista vastaan, mutta pelilauta on erimuotoinen, 8x16 -ruutuinen, kuin edellä ja kumpikin joukkue on sijoitettu vierekkäin omalle puolelleen lautaa (kuvio 58).



KUVIO 58 G.R. Neumannin 4 pelaajan shakki

Pelin voittaa tässäkin joukkue, joka tekee ensimmäisenä matin kummastakin vastustajan kuninkaasta. Kun yhdelle kuninkaalle on tehty matti, niin nappulat muuttuvat "kuolleiksi", mutta pysyvät laudalla. Joukkueen toinen pelaaja voi kuitenkin "herättää ne henkiin" vapauttamalla kuninkaan matista. Tässäkin pelissä saman puolen kuninkaat voivat olla vierekkäisissä ruuduissa, koska ne eivät uhkaa toisiaan.

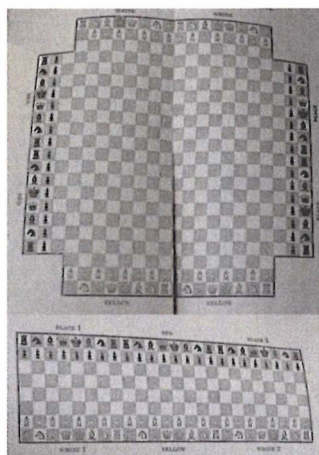
Yksi klassinen 1800-luvun neljän pelaajan peli, joka tässä on myös syytä esitellä, on *venäläinen shakki*, jossa laudan kulmissa on neljä erillistä linnaketta (kuvio 59). Linnakeratkaisu on mielenkiintoinen lähinnä siksi, että universaalien shakin ajatus lähti liikkeelle juuri linnakemallista, vaikkakin hieman eri tavoin toteutetusta.



KUVIO 59 Venäläinen neljän pelaajan linnakeshakki

Tämä venäläinen shakki voi olla vanhempikin, mutta varhaisin maininta siitä löytyy berliiniläisestä shakkilehdestä vuodelta 1850. Tämäkään peli ei ole aidosti neljän pelattava sillä tässäkin vastakkain olevat pelaajat pelaavat yhteen. Valkoinen ja Keltainen pelaavat Mustaa ja Punaista vastaan. Pelin erikoisuus on nurkissa olevat 4x4 -ruutuiset "linnakkeet", joissa pelaajilla on reservissä yksi ratsu, lähetti ja torni. Nämä nappulat pelaaja voi sijoittaa pelin alussa mihin tahansa paikkaan linnakkeen sisällä. Säännöt ovat varsin samanlaiset kuin edelläkin esitetyissä peleissä, mutta kannattaa kiinnittää huomiota kuviossa 59 näytettyyn esimerkinomaiseen pelin alkuasetelmaan. Koska linnakkeissa olevat upseerit eivät ole järjestetty samalla tavoin niin se vaikuttaa pelin etenemiseen. Esimerkiksi Musta voi saada reservissä olevan lähettinsä liikkeelle vain siirtämällä yhtä sotilasta. Muilla pelaajilla lähetin ja tornin saaminen liikkeelle on hitaampaa. (Verney 1885)

Seuraavassa vielä kaksi edellisiä pelejä isompia shakkipelejä, jotka pelillisesti eivät kuitenkaan juuri eroa neljän pelaajan peleistä. Kuviossa 60 on Max Langin kuuden pelaajan shakki vuodelta 1881. Siihen pätevät täysin edellä olleen Neumannin kuuden pelaajan shakin säännöt. Tässä pelissä on tosin myös vain neljän värisiä nappuloita sillä reunalla olevilla pelaajilla on samanväriset nappulat. Tämän ei pelin dokumentin mukaan kuitenkaan pitäisi aiheuttaa sekaannusta (Verney 1885).

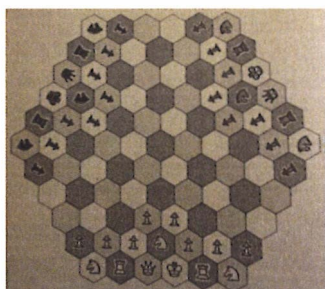


KUVIO 60 Kahdeksan ja kuuden pelaajan shakit 1800-luvulta

Pelaajamäärältään suurista vanhemmista peleistä otetaan vielä Verneyn tekemä laajennus neljän pelaajan pelistään *kahdeksan pelaajan shakiksi* (kuvio 60). Tähän peliin sopivat aivan samat säännöt kuin Verneyn neljän pelaajan shakkiinkin. Yhtymäkohta edelliseen kuuden pelaajan shakkiin on se, että samalla puolen osalla pelaajista on samanväriset nappulat. Pelissä on siis vain neljää eri nappulaväriä. (Verney 1885)

5.2.5 Siegmund Wellischin kolmen pelaajan shakki

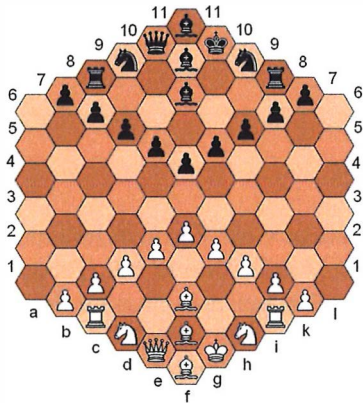
Vuonna 1912 luonnosteli itävaltalainen insinööri Siegmund Wellisch kolmen pelaajan shakin 91-ruutuiselle kuusikulmiolaudalle (kuvio 61), Variant chess julkaisun listalla vuodelta 1992 se oli varhaisin heksagonipohjainen kolmen pelaajan shakki (Jelliss 1992). Wellischin pelistä puuttuivat mm. lähetit ja ratsut liikkuivat kuten lähetit seuraavssa luvussa esiteltävässä Glinskin shakissa ja luvuss 6 esiteltävässä kolmishakissa. Tämän vuoksi pelissä onkin kolme ratsua (Hooper & Whyld 1987).



KUVIO 61 Wellischin heksagonaalishakki vuodelta 1912

5.2.6 Glinskin heksagonaalishakki

Kuuluisin vastaavanlainen peli lienee kuitenkin ns. *puolalainen shakki eli Glinskin shakki*, jonka kehitti Wladyslaw Glinski 50-luvulla (kuvio 62). Tuotakin peliä pelataan 91-ruutuisella kuusikulmiolaudalla, mutta peli ei ollut kolmishakki vaan tarkoitettu ainoastaan kahdelle pelaajalle. Nappuloiden liikkuminen vastasi, seuraavassa luvussa 6 selvitettävän, Kolmishakin nappuloiden liikkeitä muiden kuin sotilaan osalta. Tässä myös *heksagonaalisen shakin* nimellä kulkevassa pelissä on 80-luvulta lähtien pelattu myös jopa maailmanmestaruuksista (Gik & Määttänen 1988, Hooper & Whyld 1987).

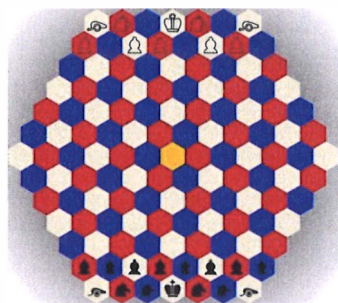


KUVIO 62 Glinskin heksagonaalishakki (Chess, Ramesh & Anand)

5.2.7 Hexagonia-peli

Kaikkein varhaisin heksagonilaudalle tehty shakkipeli vaikuttaisi olevan peli nimeltä hexagonia, joka on jo vuodelta 1862 (kuvio 63)³⁷. Tosin pelin säännöt erosivat pelin päättymisen suhteen olennaisesti shakista. Tässä pelissä kuningasta ei saatettu mattiin, vaan pelin voitti se, joka ensimmäisenä sai kuninkaan laudan keskellä olevaan turvaruutuun. Pelin päättymistavalla on siis mielenkiintoinen yhtymäkohta tafl-peleihin.

³⁷ <https://boardgamegeek.com/image/1931516/hexagonia>



KUVIO 63 Hexagonia

Hexagonian pelilauta koostui 127 heksagonista, jotka olivat sinisiä, punaisia ja valkoisia, paitsi keskimäinen turvaruutu, joka oli kullan värinen. Kummallakin pelaajalla oli kahdeksan sotilasta, neljä ratsua, kaksi tykkiä ja kuningas. Nappuloiden liikeradoista ei ole säilynyt varmaa tietoa. Pelin kehitti brittiläinen John Jacques usean muun pelin ohella (Routledge 1866).

5.3 Nykyaikaisia muunnelmia

Viime vuosina on neliöruutuisella yksi heksagonilaudalla pelattava kolmen pelaajan shakkityyppi levinnyt laajemmin Euroopassa ja löytänyt tiensä Suomeenkin. Pelin tausta on melko värikäs sillä samalle pelille näyttää löytyvän useitakin eri kehittäjiä.

Itse asiassa näiden pelien taustojen selvittäminen vaati aivan oman tutkimuksensa, pienimuotoisen salapoliisityön pelin alkuperäisen kehittäjän selvittämiseksi. Lopputuloksena voidaan pitää NASA:ssa työskennellyttä Robert Zubrinia, mutta ilmeisesti hänkään ei ollut perillä vielä vanhemmista, osin vastaavanlaisista 1800-luvun peleistä (kuvio 65)³⁸ (Verney 1885).

Kuviossa 64 on esitelty neljä muunnelmää, joista vanhin on jo vuodelta 1972, keksijänä Robert Zubrin (Zubrin 1972). Muiden kolmen tekijöinä esiintyvät Anthony Patton, toinen vasemmalta (kirjoittajan oma kuva), sekä Khia Rasmussin ja Christophe Langronier (kaksi oikeanpuoleista kuvaa)³⁹. Kuvassa vasemmalla Zubrinin peli ja siitä oikealle järjestyksessä oikealle Pattonin, Rasmussin ja Langronierin pelit. Nämä kolme ovat peräisin 90-luvun loppupuolelta ja vuoden 2000 jälkeen. Näistä peleistä toisena vasemmalta oleva Pattonin

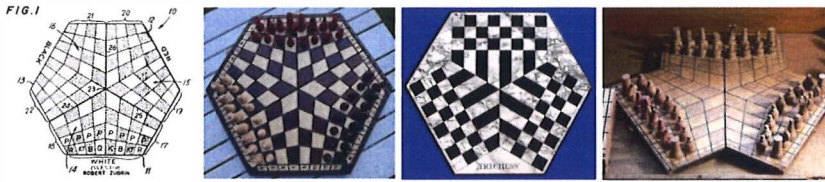
³⁸ <http://www.chessvariants.com/historic.dir/self.html>

³⁹ <https://boardgamegeek.com/image/395516/tri-chess>

By Slip - 3 players chessboard, CC BY 2.0,

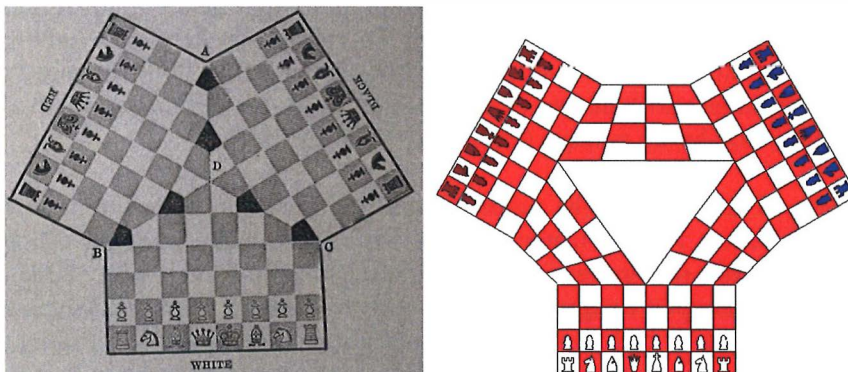
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4433248>
<https://creativecommons.org/licenses/by/2.0/>

pelejä on se, joka on viime vuosina levinnyt laajemmin markkinoilla, myös Suomessa. Tosin pelin kehittäjän nimi ei markkinoilla olevista peleistä selviä, joten sitä voisi kutsua myös "Pattonin" peliksi. Kaikkia neljää peliä yhdistää selkeästi samanlainen rakenne. Peleissä on kullakin kolmella pelaajalla sama määrä sotilaita ja upseereja kuin tavallisessakin shakissa. Pelilaudat on koottu siten, että kolme tavallisen shakkilaudan puolikasta on asetettu vastakkain ja yhdistetty keskeltä siten, että neliöruutuja on taivutettu tai venytetty. Kussakin laudassa on näin $3 \times 32 = 96$ ruutua ja keskellä kuuden ruudun "tähti".



KUVIO 64 96-ruutuisia kolmishakkeja

Edellä olevat pelit ovat nykyaikaisia muunnelmia, mutta eivät paljoakaan poikkea muutamista jo 1800-luvulla kehitellyistä kolmen pelaajan shakkipeleistä (Verney 1885). Ohessa esimerkkinä Waiderin ja Selfin kehittämät pelit (kuvio 65). Waiderin peli on vuodelta 1837 ja Selfin shakki vuodelta 1894. Nämä kaksi peliä eroavat ainoastaan keskialueen ratkaisunsa puolesta, mutta niissäkin on yhdistetty kolme tavallisen shakkilaudan puolikasta aivan kuten edellä esitetyssä neljässä pelissä. Waiderilta esitteli samana vuonna myös neljän pelaajan shakin, joka oli varsin samantyyppinen kuin aiemmin esitetyt saman ajan muut vastaavat pelit.



KUVIO 65 Waiderin ja Selfin kolmen pelaajan shakit vuosilta 1837 ja 1894⁴⁰

⁴⁰ <http://www.chessvariants.com/historic.dir/self.html>
(Verney 1885)

5.4 Yhteenveto

Tässä luvussa on käsitelty joitain lukuisista shakista kehitellyistä variaatioista sekä shakinomaisia pelejä eri aikakausilta aina nykypäivään. Tässä esitellyt muunnelmät ovat perustuneet lähinnä laudan muotoon ja pelaajien määrään. Tämä luo hieman mittakaavaa sille kuinka paljon yleisemmin tuntemattomia innovaatioita alueella on tehty ja myös antaa suhteellisuuden tajua siihen, kuinka vaikea on kehittää täysin uusia peli-ideoita tai ideoita ylipäättään, koska monet asiat on keksitty ja unohdettu jo useasti aiemmin.

Tämän luvun shakin muunnelmät pohjustavat samalla seuraavissa luvuissa esiteltävää universaalien shakin ajatusta, joka johtaa shakin perusominaisuuksien yleistämiseen kehitettäessä sitä eteenpäin kohti laajempaa kaiken kattavaa peliä.

6 UNIVERSAALIN SHAKIN MALLI

Aiemmin kuvatut periaatteet voidaan yleistää "universaalin shakin" säännöiksi. Säännöt pysyvät pääosin samoina poislukien upseerien lukumäärää ja pelilaudan kokoa. Kun pelialustat tehdään suuremmiksi, niin samalla luodaan uusia upseerityyppejä kattamaan laajemmat puolustusvyöhykkeet. Pelialustaa voidaan myös muuntaa korkeampiin ulottuvuuksiin. Myös jos halutaan lisätä pelaajien lukumäärää symmetrisyys säilyttäen, niin ovat korkeammat ulottuvuudet siihen ainoa mahdollisuus, mutta sopivan geometrisen rakenteen löytäminen muodostaa ongelman. Koska ihmisen on vaikea hahmottaa moniulotteista avaruutta, käytetään shakin kolmi- ja nelikulotteisia versioita pääasiassa simuloimaan peliteoreettisia malleja. Ratsu on shakinappuloista se, jonka liikkumistapa näyttää eroavan eniten muiden nappuloiden liikkumistavoista. Yritys ymmärtää tätä liikkumista johti keksintöön kolmen henkilön kuusikulmioista koostuvalla laudalla pelattavaan shakkiin ja myöhemmin universaalin shakin sääntöihin.

Shakkipelin erikoisimmin liikkuvana nappulana on siis yleisesti pidetty Ratsua. Kuten johdantoluvussa kerrottiin, niin tutkielman lähtökohtana olleen tämän tutkielman tekijän kehittämän kolmelle pelaajalle tarkoitetun shakkipelin synty pohjautui juuri pyrkimykseen selvittää miksi Ratsu liikkuu muista shakinappuloista selkeästi eri tavoin. Näistä selvityksistä syntyi kirjoittajan oma *teoria alkushakista* (Honkela 1999), (s. 113), jota tuskin voidaan koskaan todistaa sen enempää oikeaksi, kuin vääräksikään. Tämä teoria mahdollisti kuitenkin shakin jakamisen "alkutekijöihinsä", joista sen saattoi koota uudelleen. Uudelleen kokoamisen seurauksena syntyi kaksi eri peliä: tavallinen 64-ruutuisella laudalla pelattava kahden pelaajan shakki ja 87-ruutuisella laudalla pelattava kolmen pelaajan shakki. Kuinka tämä tapahtui, se selvitetään tässä luvussa. Käytetään tässä ja seuraavissa luvuissa tästä universaalin shakin idean pohjalta kehitetystä kolmen pelaajan shakista, erotukseksi muista vastaavista peleistä, erityisesti nimeä *kolmishakki*.

Kaikki tämän luvun kehitelmät ovat tekijän omia, lähdeviitteet on lisätty kohtiin, joissa on hyödynnetty muualta saatua tietoa. Tässä luvussa olevat kehitelmät on myös aiemmin julkaistu tai patentoitu.

6.1 Teoria alkushakista

Ratsun erikoinen liikumistapa ja sen mahdollinen numerosymboliikka on jo kauan ollut yksi niistä päätekijöistä, jotka ovat kytkeneet shakin alkuperän ja rakenteen salaisiin maagisiin ja uskonnollisiin rituaaleihin muinaisessa Intiassa. Shakin syntytaivoista ja rakenteesta onkin esitetty lukuisia erilaisia teorioita.

Ajatellaan että halutaan luoda peli, jossa valtakunnat tai kuninkaat kamppailevat toisiaan vastaan. Kullakin on oma linnakkeensa ja linnakkeen ulkopuolella alue, jolle ne voivat hyökätä. Lähdetään liikkeelle asetelmasta, että meillä on pelinappulat, joiden liike avoimella kentällä on määritettävä. Jotta nappuloiden paikat voitaisiin määrätä, niin on pelialue jaettava säännöllisiin osiin. Tasopinta voidaan todistetusti, kuten 3. luvussa selvitettiin, jakaa samanlaisiin ja samankokoisiin osiin vain kolmella tavalla: ruutujen on oltava joko kolmioita, neliöitä tai kuusikulmioita.

Tässä luvussa tarkastellaan ensiksi klassista ratsun polun ongelmaa, koska se johti kolmishakin ja näin muodoin myös universaalien shakin idean syntyyn. Taustalla oli tämän tutkielman tekijän ja professori Frank Hararyn pyrkimys ratkaista eräs ratsun polun ongelman yleistys. Tämän jälkeen luvussa selvitetään kolmishakin pelialustan synty, sekä puolustusvyöhykkeet, jotka johtivat upseerien määrittämiseen.

6.1.1 Ratsun polku ja tämän tutkielman kolmishakin tausta

Ratsu erottuu muista shakkinappuloista nykyaikaisessa shakissa ennen muuta erikoisen "suorakulmaisen" askeleensa vuoksi. Tämä onkin saanut monet pohdintaan syitä liikkumistapaan ja usein on selitystä haettu hevosen tai ratsumiehen tavasta liikkua taistelukentällä. "Ratsu on se nappula, jonka liike varmaan ihmetyttää jokaista peliin ensi kerran tutustujaa. Intian kuumassa ilmastossa ratsastajan aseena oli pistokeihäs tai nuija, liikehtiminen laudalla oli jonkinmoista koukkaamista" (Kainulainen 1984). Mutta toisaalta sama kirjoittaja, Kainulainen, jatkaa: "On uumoiltu, että ratsun liike olisi saatu joistakin muista peleistä, ehkä maagisista temppelepeleistä. On löydetty vanhoja ns. maagisia numeroneliöitä, joista voi tulkita ratsun liikeratojakin".

Ratsun polun ongelman perinteisellä 8x8 -laudalla shakissa ratkaisi (kuva 66, alhaalla)⁴¹ jo Leonhard Euler vuonna 1759 (Biggs, Lloyd & Wilson 1986). Ongelma voidaan jakaa kahteen osaan, *ratsun avoimen polun* (knight's path), ja *ratsun polun* (knight's tour) ongelmaan. Jälkimmäisessä päädytään aina lähtöpisteeseen, edellisessä riittää käynti jokaisessa ruudussa. Eulerin todistuksen jälkeen kirjoitettiin lukuisia julkaisuja, joissa laskettiin erilaisia tapoja peittää shakkilauta ratsun poluilla. Ratsun polun ongelma on erikoistapaus *laajemmasta Hamiltonin polun ongelmasta*, joka on puolestaan erikoistapaus lukuisiin käytännön sovelluksiin liittyvästä *Kauppamatkustajan ongelmasta*. Hamiltonin polkuongelmassa tutkitaan voidaanko verkon kaikki solmut käydä läpi. Tarkemmin sanottuna suunnatun verkon hamiltonin polku, eli sen virittävä polku, on polku, joka sisältää kaikki suunnatun verkon solmut. Hamiltonin kehä eli virittävä kehä, on suunnatun verkon kehä, joka sisältää sen kaikki solmut. (Gross et al. 2004) Kauppamatkustajan ongelmassa taas haetaan lyhintä reittiä verkon eri solmujen välillä. Kauppamatkustajan ongelmassakin on kierrettävä kaikki solmut, mutta siinä ei kielletä käymästä useammin kuin kerran yhdessä solmussa, kuten ratsun polussa. Ratsun polun ongelmaa voidaan yleistää shakkilaudan muotoa muuttamalla. Art Schwenk todisti 1991, että $m \times n$ neliöruutuisella shakkilaudalta, jossa $n \geq m \geq 5$, löytyy ratsun avoin polku mikäli m tai n on parillinen. Jos $m < 5$, niin ratsun avoin polku löytyy vain jos $m = 3$ ja $n \geq 10$ ja n on parillinen (Schwenk 1991). Ratsun polku on siis avoin jos se päättyy muuhun kuin aloitusruutuun. Jos polku päättyy aloitusruutuun, niin kyse on suljetusta ratsun polusta tai lyhyesti ratsun polusta. Määritelmät vaihtelevat kirjallisuuden mukaan.

Tämä Schwenkin tulos oli pohjana kun lähdettiin hakemaan luvun alussa mainittua yleistystä. "It seems to me that you may have gone beyond the work of Schwenk. I shall e-write to Allen Schwenk and ask him to airmail to you his pretty paper on Knights move hamiltonian cycles for all even $b \geq 6$. Then we will have a better idea where we can send our article." (Frank Harary, liite 1) Tavoitteena oli todistaa teoreema, jonka mukaan ratsun polku on aina olemassa $m \times n$ neliöruutuisille laudoille joss $m \geq n \geq 5$.

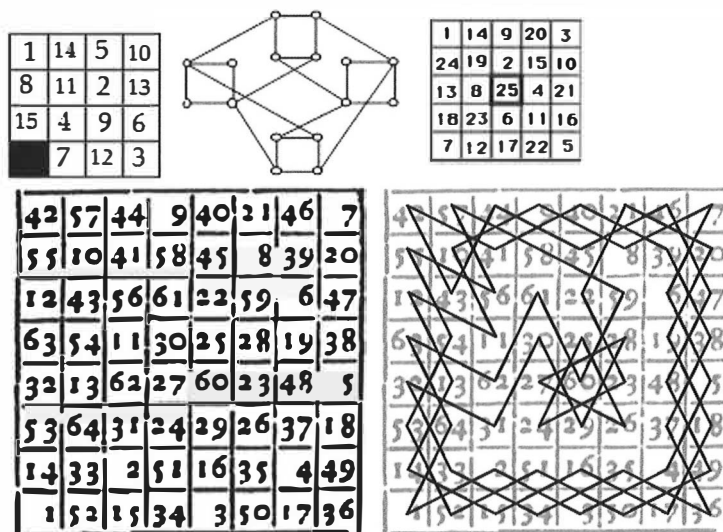
Vuonna 1993 alkanut työ jäi kesken ja julkaisematta, koska samasta teoreemasta julkaistiin toinen, eri tavalla tehty, todistus vuonna 1994. Prosessi johti kuitenkin jo alkuvaiheissaan kohdassa 6.2 esiteltävän kolmishakin syntyyn ja sen johdosta on aiheellisista tarkastella käytettyä todistusmetodia.

Ratsun avoin polku eli tässä KnP (Knights Path) voidaan esittää verkkona. Kuvassa 66 on verkko, josta voidaan hakea polkua KnP₄ eli ratsun avointa polkua kun $m = n = 4$. Kuvan keskellä olevan verkkopiirroksen vasemmalla puolella on 4x4 pelilauta, jossa avoin ratsun polku on jäänyt yhtä ruutua vakaaksi. Tähän on syyensä. Kyseiseltä 4x4 laudalta ei voidakaan löytää ratsun polku ja se voidaan todeta verkosta helposti. Verkko voidaan jakaa kuvan esittämällä tavalla neljään neljän solmun aliverkkoon, joita on kahta tyyppiä. Toisessa solmujen aste-

⁴¹ <http://www.renneslechateau.it/index.php?sezione=studi&id=greatparchment>, © 2016 Mariano Tomatis Antoniono

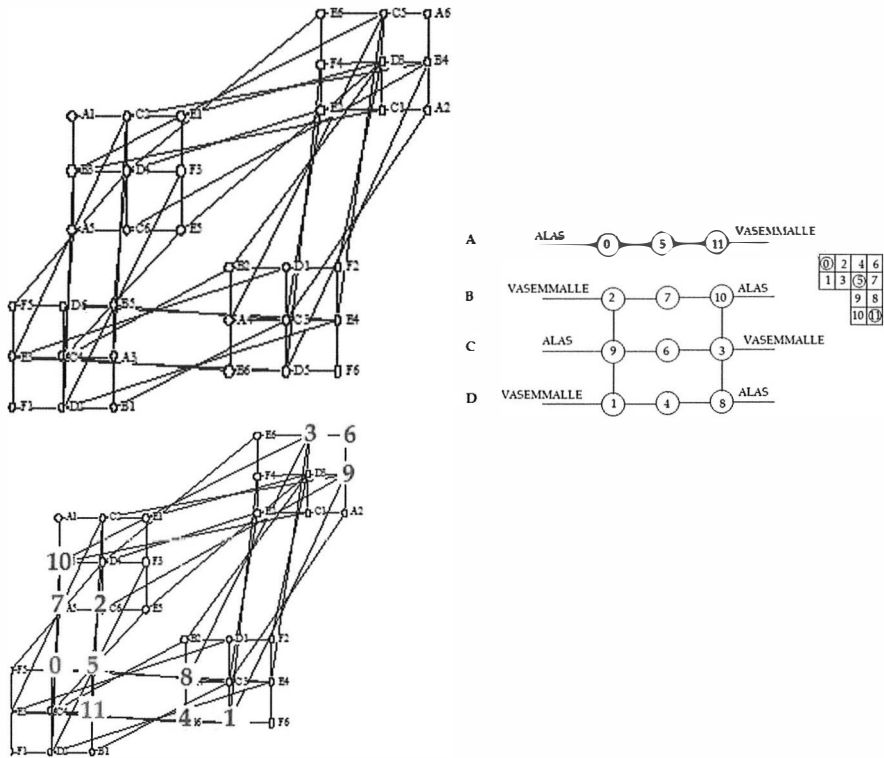
luvut ovat 2 ja 4, toisessa kaikki solmut ovat astelukua 3. Neliöt, joissa on astetta 2 olevat solmut ovat rakenteeltaan sellaisia, että seuraavaan aliverkkoon pääsee ainoastaan niiden solmujen kautta, joiden asteluku on 4. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että kunkin aliverkon molemmat astetta 2 olevat solmut olisi käytävä läpi ennen aliverkosta poistumista. Se taas ei ole mahdollista sillä ainakin toiseen tällaiseen aliverkkoon tullaan neliasteisen solmun kautta, josta voi siirtyä vain kaksiasteiseen solmuun. Toiseen kaksiasteiseen solmuun ei ole enää mahdollista päästä samassa aliverkossa koska poistumistie kulkee sitä edeltävän neliasteisen solmun kautta.

Kuviossa 66 oikealla ylhäällä on esitetty 5x5 laudalla oleva ratsun avoin polku KnP₅ numeroin 1:stä 25:een. Pelilautaa pitkin liikutaan kahden ruudun levyisenä nauhana alkaen jostain kulmasta ja siirtyen spiraalimaisesti kohden keskustaa. Liikkumistapa on helppo hahmottaa seuraamalla laudalla olevia numeroita. Tällä laudalla siis ratsun avoin polku on olemassa.



KUVIO 66 Ratsun avoin polku 4x4 ja 5x5 laudalla, sekä Eulerin ensimmäinen ratkaisu ratsun polkuun

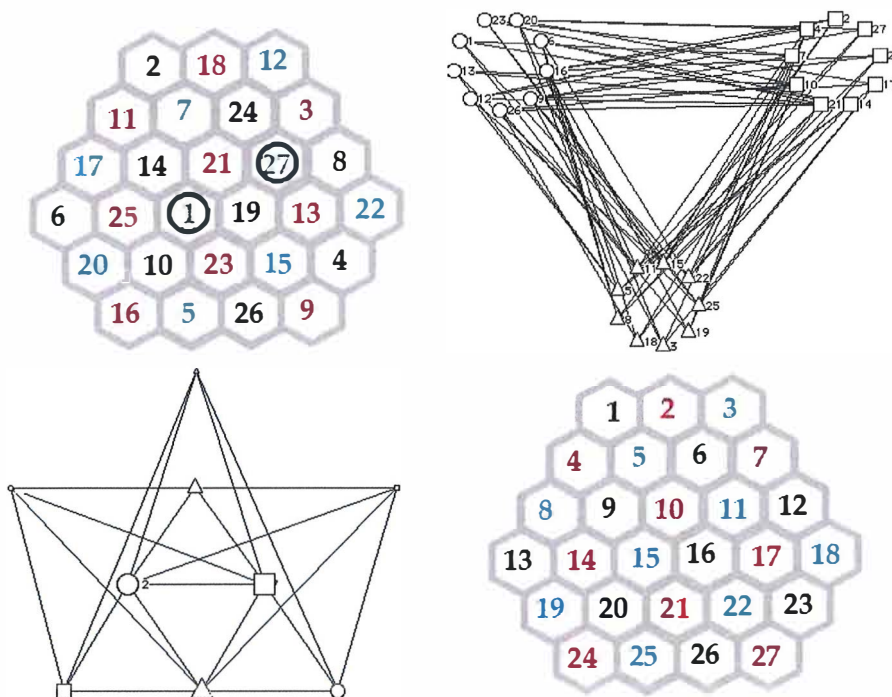
Verkon monimutkaisuus kasvaa nopeasti laudan koon kasvaessa kuten voidaan havaita kuvioista 67, joka esittää 6 x 6 laudan verkkoa KnP₆ (Watkins 2004). Samalla voidaan kuitenkin huomata, että verkossa säilyy samanlainen perusstruktuuri. Siinä Hamiltonin polun hakemisen kannalta mielenkiintoinen aliverkko syntyy jokaiseen laudan kulmaukseen, jossa "vyöhykenauhat" tekevät mutkan. Nämä aliverkot ja niiden rakenne ovat avain yleisempään todistukseen jatkamalla samanlaista päättelyä kuin edellä olleen KnP₄ verkon kohdalla. Juuri tämä verkon rakenne johti tämän tutkielman tekijän yleistämään ongelmaa muille pinnan jaoituksille kuin neliöruudutus.



KUVIO 67 KnP₆ verkko eli ratsun avoin polku 6x6 laudalla

Kuviossa 67 on kuvattu vasemmalla ylhäällä 6x6 ruutuisen shakkilaudan ratsun liikkumista kuvaava verkko ja oikealla yksi laudan kulmista ja näitä kulmaruutuja vastaava aliverkko. Alimmassa kuvan verkossa on osoitettu numeroilla laudan kulmissa olevien ruutujen paikat koko verkossa.

Selvitettäessä verkon rakennetta laudan koon kasvaessa syntyi ajatus yrittää yleistää ongelmaa muillekin kuin neliöruutupohjaisille pelilaudoille ja näin esille nousi kuusikulmioista koostuva heksagonilauta, johon määriteltiin myös ratsun liike. Tämä yleistys ei kuitenkaan vienyt todistusta eteenpäin, mutta johti sivutuloksena kolmen pelaajan shakin syntymiseen noin kahdessa viikossa. Oheisessa kuviossa 68 on vielä esimerkki eräästä ratsun avoimesta polusta pienellä 27 ruudun kuusikulmiolaudalla. Kuinka tällaiseen ratsun liiketapaan päädyttiin, se selviää seuraavista kohdista 6.1.2 ja 6.1.3. Selvitetään seuraavaksi kuvion 70 sisältö.



KUVIO 68 Ratsun avoin polku kuusikulmioruudutetulla laudalla

Kuviossa 68 on ylhäällä vasemmalla yksi ratkaisu, jossa näkyy eräs ratsun avoin polku heksagoni- eli kuusikulmioruudutetulla laudalla. Numeroiden värit kuvaavat kuusikulmaisten ruutujen väriä. Ylhäällä oikealla on vastaavanlainen ratsun liikkumista kuvaava 27 solmun ja 66 välin verkko, joka on tehty kuusikulmioista koostuvalle laudalle samoin kuin kuviossa 67 oli tehty neliöruutulaudalle. Verkossa ympyrät kuvaavat mustia, neliöt punaisia ja kolmiot sinisiä ruutuja. Solmujen numeroita vastaavat ruudut näkyvät verkon alla olevalla kuusikulmiolaudalla. Verkon solmut jakaantuvat 4-, 5- ja 6- asteisiin. Näistä neliasteiset sijaitsevat laudan lyhyillä kolmen ruudun sivuilla. Kuusiasasteiset ovat laudan keskellä olevat solmut 9, 10, 11, 15, 16 ja 21. Loput solmut ovat viisiasteisia. Kuten verkosta nähdään, niin se on kolmijakoinen eli samenväriset ruudut eivät ole toisiinsa yhteydessä ja värejä on kolme. Vasemmalla alhaalla olevassa verkossa on kuvattu vielä eriasteisten ja eriväristen solmuryhmien yhteyttä toisiinsa. Verkossa ympyrät, neliöt ja kolmiot kuvaavat ruutujen väriä. Solmun koko ilmoittaa asteluvun eli esimerkiksi ylhäällä oleva pieni kolmio tarkoittaa kolmen sinisen neliasteiden ruudun joukkoa, sen alla oleva suurempi kolmio neljää sinisen viisiasteisen ruudun joukkoa ja alhaalla oleva suuri kolmio kahta kuuden asteen sinistä ruutua.

Tutkimuksen seuraava vaihe olisi tietysti hakea ratsun polkuja erikokoisilla kuusikulmiolaudoilla, sitten yleistää tulokset ja etsiä yhtäläisyyksiä ja yleisiä sääntöjä ratsun poluille kun laudan ruudutus vaihtelee.

Tässä tutkielmassa käsitellään kuitenkin symmetristä n-pelaajan pelimalia ja ratsun polun ratkaisuponnistusten esittelyn tarkoitus oli selvittää se, kuinka tämä prosessi sai alkunsa. Seuraavaksi selvitetään kuinka kolmihakki syntyi.

6.1.2 Pelialusta

On tarkalleen kolme tapaa jakaa kaksiulotteinen taso samanmuotoisilla ja samankokoisilla monikulmioilla. Suorakulmion muotoisen ja nelikulmioihin pohjautuvan shakkilaudan lisäksi on myös mahdollista muodostaa kolmioista tai kuusikulmioista koostuvat shakkilaudat, joille voidaan myös määrittää ratsun liikkuminen. Joten ei vain shakkilautaa, vaan myös myös ratsun liikkumistapa voidaan yleistää. Tämän seurauksena saadaan useita uusia ratkottavia ongelmia verkko- ja peliteorian alueella. Ongelmia, jotka sijoittuvat erilaisiin shakkilaudan muunnelmiin.

Jos joku muinaisina aikoina lähti luomaan pelialustaa, niin luonnollinen tapa on jakaa kenttä samankokoisiin osiin, alueisiin, jotka ilmoittavat sijainnin. Tulemme näin jälleen pinnan tasaisen täyttämisen eli ruuduttamisen käsitteeseen (tiling) eli sen jakamiseen monikulmioihin siten, että monikulmioiden välille ei jää tyhjää tilaa. Pinnan täysin säännölliseksi eli tasaiseksi täyttämiseksi kutsutaan tilannetta, jossa tasopinta voidaan jakaa äärettömästi samanlaisiin säännöllisiin monikulmioihin. On vain kolme sellaista monikulmiota, joilla pinnan tasainen täyttäminen on mahdollista. Ne ovat kolmio, neliö ja kuusikulmio eli heksagoni (Grünbaum & Shephard 1987).

Tämä voidaan todeta aliluvussa 3.2 käsitellyllä, äärettömiä täysin säännöllisiä tasoverkkoja, joissa solmujen sekä alueiden asteluvut ovat vakioita, esittäväällä kaavalla $v = 4r / (2r - rk + 2k)$, missä k on solmun ja r alueen asteluku. Asteluku tarkoittaa solmun osalta lähtevien välien ja alueiden osalta niitä reunustavien välien määrää. Määritellään seuraavaksi käsitteet *vyöhyke* ja *reviiri*.

Valitaan pelialustaksi neliön muotoinen neliöruutuinen 3×3 taso ja asetetaan sen keskimäinen ruutu (K) Kuninkaan linnakkeeksi. Tällöin *ensimmäiseksi vyöhykkeeksi* määritellään ne 8 ruutua, joiden keskelle jää ruutu, joka on Kuninkaan linnake (kuvio 71, vasemmalla). Siis ne ruudut, jotka koskettavat sivullaan tai kulmallaan Kuninkaan linnakeruutua. Kutsutaan tätä vyöhykettä Kuninkaan *ensimmäiseksi reviiriksi*. Tämän jälkeen otetaan linnakkeeseen kaksi uutta nappulaa, A ja B, jotka voivat siirtyä vyöhykkeelle keskusruudusta eri tavoin, A vaakaa- tai pystysuoraan linnaketta sivuaviin ruutuihin ja B viistosti kulma-ruutuihin. Nämä kaksi nappulaa peittävät keskimäisestä ruudusta lähtiessään kokonaan ensimmäisen tason reviirin. Laajennetaan siirtymisaluetta toisella vyöhykkeellä eli ruuduilla, jotka koskettavat ensimmäistä vyöhykettä. Tälle vyöhykkeelle saadaan ruutuja 16 (kuvio 69, oikealla harmaat ruudut). Vyöhykkeen ruuduista puolet eli 8 voidaan peittää nappuloilla A ja B, jos ne jatkavat suoraan liikesuuntaansa. Peittämättä jää siis vielä 8 ruutua. Näitä ruutuja peittämään tarvitaan uusi nappula, joka on kuvassa merkitty kirjaimella C. Kun katsotaan näiden kolmen nappulan liikeratoja, niin nykyshakissa ne vastaavat tornia (A), lähettä (B) ja ratsua (C). Nämä kolme nappulaa peittävät kokonaan

Kuninkaan *toisen reviiirin* (kuvio 69 oikealla), joka käsittää kaksi ensimmäistä vyöhykettä.

B	A	B	B	C	A	C	B
A	K	A	C	B	A	B	C
B	A	B	A	A	K	A	A
			C	B	A	B	C
			B	C	A	C	B

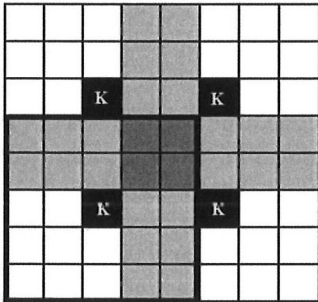
KUVIO 69 Kuninkaan reviiirejä

Jos puolustettava alue on valittu, niin sen ympärillä oleva alue voidaan jakaa eri vyöhykkeisiin etäisyyden mukaan (kuvio 73, a). Kaksiulotteinen tasopinta voidaan täyttää tasaisesti vain kolmella säännöllisellä monitahokkaalla: kolmiolla, neliöllä tai kuusikulmiolla, kuten aiemmin on selvitetty. Kun pohjana ovat neliöt, niin tornia ja lähettä vastaavat nappulatyypit A ja B kattavat vain alimman vyöhykkeen, kuten kuvasta 69 ilmenee. Kun siirrytään toiselle vyöhykkeelle, niin osa ruuduista on edelleen tornin ja lähetin liikesuunnissa, mutta osa niiden ulottumattomissa. Näitä ruutuja varten tarvitaan uusi pelinappula C, siis ratsu (kuvio 69). Tämä tarkoittaa, että ratsun tapainen pelinappula on olennainen keskusruudun puolustukselle. Kutsutaan tätä keskimmäistä ruutua seuraavaksi vaikkapa linnoitukseksi.

Sijoitetaan sitten viereen naapurilinnake, jota myös kiertää kaksi vyöhykettä. Sijoitetaan tämä uusi linnake niin etäälle ettei kummankaan linnakkeen kahden askelen reviiiri ulotu toisen linnakkeeseen, jolloin linnakkeiden keskusruutujen (K) väliseksi etäisyydeksi tulee kaksi ruutua ja ruutujen yhteismääräksi tulee 5x8 eli 40 (kuvio 70). Asetetaan sitten nämä linnoitukset niin lähelle toisiaan, että kullakin on kaksi puolustusvyöhykettä, eikä yksikään linnoitus ole naapurilinnoituksen toisen reviiirin sisällä. Tämä johtaa 8x8 neliöruutuiseen lautaan, joka on siis itse asiassa ashtapada lauta.

KUVIO 70 Kaksi linnaketta

Tehdään seuraavaksi laudasta symmetrinen sijoittamalla kummankin linnakkeen yläpuolelle vielä yksi linnake kahden askelen reviiirin ulkopuolelle. Näin pelialueesta tulee $8 \times 8 = 64$ ruutuinen muinainen intialainen pelilauta *ashtapada* ("kahdeksan ruutua"). On siis syntynyt 64-ruutuisella laudalla pelattava *neljän* linnakkeen pelialusta, jossa on nappuloina shakin perusupseerit, torni, lähetti ja ratsu. Tältä pohjalta voisi arvella, että shakki on saattanut alussa olla neljän peelaajan peli (kuvio 71).



KUVIO 71 Kuninkaiden linnoitusten symmetrinen sijainti

Palataan vielä luvussa 4.2. käsiteltyyn shakkipelin alkuperän pohdiskeluun. Kun tutkitaan shakkipelin historiaa, niin selviää että shakki tuli Eurooppaan 1000-luvulla arabimaista, joissa se tunnettiin nimellä *shatranj* {{91 Ferlito, G 1990; 54 Eales, RG 1985; 92 Mark, Michael 2007}}. Muitakin mahdollisia kulkureittejä on tämän lisäksi ilmeisesti ollut, esimerkiksi idästä Venäjän kautta. Arabit saivat pelin Persiasta (*shatrang*), jonne se tuli 700-luvulla Intiasta. Intiassa peli saattoi kehittyä neljän hengen lautapelistä nimeltä *shaturanga* (käsitelty aliluvussa 4.2.) eli "neljä aselajia", jota pelattiin *ashtapada*-laudoilla. Nämä neljä aselajia olivat ratsuväki (Ratsu), norsut (Norsu, myöh. Lähetti), sotavaunut (myöh. Torini) sekä jalkaväki eli tavalliset sotilaat. "Shaturanga tarkoittaa neljän angan eli neljän aselajin peliä tarkoittaen norsuja, hevosia, taisteluvaunuja ja jalkasotilaita, joiden alkukieliset nimitykset olivat *chariots hasty, aswa, ratha* ja *padatum*. Tämän toi esille ensimmäisenä Thomas Hyde Oxfordista työssään *De Ludus Orientalibus, 1694.*" (Bird 2004)

Nappuloiden liikkeet ovat muuttuneet huomattavasti shakin kehittyessä nykyiseen muotoonsa ja tiedot niiden liikkumisesta pelin varhaisemmissa muodoissa tukevat vyöhykejatittelua. Esimerkiksi *lähetti (fil) kykeni aiemmin vain hyppäämään viistoon yhden ruudun yli*, siis keskusruudusta lähdetessä täsmälleen toiselle vyöhykkeelle. Ensimmäisen vyöhykkeen kulmaruudut peitti *kuningattaren edeltäjä, sitä huomattavasti heikompi, "esiupseeri" (firzan), joka kykeni liikkumaan vain yhden askeleen kerrallaan ja vain viistoon*. Nämä alkushakin nappuloiden liikkeet ovat osittain vielä nykyäänkin säilyneet kiinalaisessa shakissa. Kiinalaisessa

shakissa on lisäksi erikoissääntö, jonka mukaan kuningas ja kaksi esiupseeria eivät voi poistua yhdeksän paikan linnakkeestaan.

Näin tässä esitelty vyöhykelähtöinen ajattelu johti tämän tutkielman tekijän päätelmään, jonka mukaan Ratsun tyyppinen nappula oli välttämätön oletetun keskuslinnakkeen aukottoman puolustuksen kannalta. Kuviossa 72 on näytetty kuinka shaturangan upseerit peittävät keskusruudusta (musta) lähtien kaksi ensimmäistä vyöhykettä eli toisen reviirin. Kuvassa nappulat on merkitty vastaavien nykyisten shakkinappuloiden lyhenteillä. Tämän tapainen ajattelu on voinut olla motiivina ratsun tapaisen nappulan syntyyn eli tarvittiin peliväline, joka peittää ruudut, joita fil, firzan ja torni, alkujaan *ratha*, eivät peittäneet.

L	R	T	R	L
R	D	T	D	R
T	T		T	T
R	D	T	D	R
L	R	T	R	L

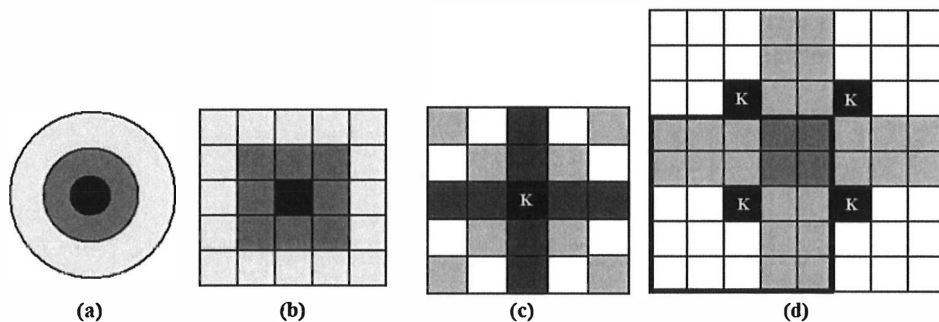
KUVIO 72 Upseerien sijoittuminen vyöhykkeille shaturangassa

Tarkastellaan upseerien liikeratoja seuraavaksi hieman eri näkökulmasta, liikesuuntien pohjalta ja määritellään samalla kaksi uutta käsitettä, linja ja sektori myöhempää tarvetta varten. Linja on näistä kahdesta toki käytössä nykyshakisakin, mutta tässä tutkielmassa sitä käytetään hieman laajemmaksi merkityksessä.

Torni, lähetti ja ratsu voidaan määritellä myös yleisemmällä tavalla *linjojen* avulla. Torni liikkuu linnakkeesta neliön sivujen suuntaan eli suoraviivaisesti neljään eri suuntaan 90° asteen välein eli suuntiin 0° , 90° , 180° ja 270° . Kutsutaan näitä suuntia tornin *linjoiksi* ja näillä linjoilla olevia ruutuja tornin *sektoreiksi*. Kun tornin linjojen puoliväliin vedetään uudet linjat suuntiin 45° , 135° , 225° ja 315° , niin nämä linjat määrittävät lähetin liikesuunnat ja linjat. Linjojen ylittämät ruudut muodostavat lähetin sektorit. Tornin ja lähetin sektorit peittävät kaikki ensimmäisen vyöhykkeen ja toisen vyöhykkeen ruuduista. Kun tornin ja lähetin linjojen väliin vedetään uudet linjat, sellaiset jotka osuvat keskelle kahden askelen toisen vyöhykkeen ruutuja, niin saadaan linjat kulmiin $26.6^\circ + k \cdot 90^\circ$ ja $64.4^\circ + k \cdot 90^\circ$, kun $k=0, 1, 2$ tai 3 . Ruudut, joiden keskipisteen linjat leikkaavat ovat ratsun sektoreita ja ne peittävät jäljelle jääneet kahdeksan kahden askeleen toisen vyöhykkeen ruuduista. Uusia linjoja ja näin uusia upseereja tarvitaan vain jos linnakkeen hyökkäysvyöhykkeitä lisätään. Tällä periaatteella on merkitystä kun seuraavaksi siirrytään erilaisille pelialustoille.

6.1.3 Vyöhykkeet ja sektorit erilaisilla alustoilla

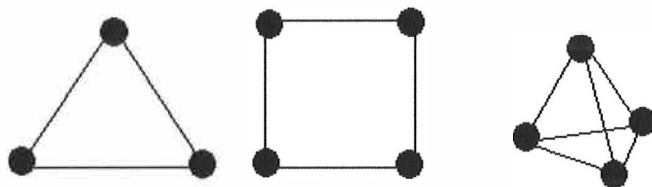
Tämä teoria alkushakista, siis siitä kuinka shakintapainen peli alun alkaen kehitettiin, nosti kirjoittajan mieleen ajatuksen siitä kuinka ratsun liikerata ja 64 ruutuinen shakkilauta olisi voinut kehittyä (kuvio 73), sekä sen että *olisiko jokin shakin esimuoto ollutkin neljän osapuolen peli?*



KUVIO 73 Kahden askelen vyöhyke neliöshakkilaudalla

Pelin kehittyessä neljä valtakuntaa olisi yhtynyt kahdeksi ja kaksi yli jäänyttä kuningasta olisivat voineet muuttuneet kuningattariksi (firzan). Kyse oli kuitenkin vain hypoteesista, eikä ole merkitystä sillä pitikö päättelyketjumme paikkansa myös shakin todellisessa evoluutiokaareissa. Merkittävää oli tämän päättelyn johtaminen jatkokehitelmiin ja uusiin shakin variaatioihin.

Mielenkiintoista kuitenkin on, että sama oletamus on, kuten aiemmin mainittiin, esitetty myös tästä päättelystä irrallaan, historiallisesta näkökulmasta (Bidev 1986). Edelleen shakin edeltäjän sanskritin kielinen nimi, *shaturanga*, tarkoitti neljää joukkoa, tämän tulkitaan kuitenkin yleisesti tarkoittaneen neljää aselajia, joita shakissa edustavat kolme upseeria ja sotilaat. Saksassa tunnetaan vanha shakin variantti, 4. luvussa esitelty Gala-peli, jossa joukkueet on jaettu laudan neljään kulmaan. Kaksiulotteisella pinnalla pelattava neljän joukkueen peli degeneroituu kahden pelattavaksi koska neljää pistettä ei voi asettaa tasossa siten, että ne olisivat kaikki samassa strategisessa asemassa toisiinsa nähden. Naapurit ovat aina toisiinsa nähden erilaisessa asemassa kuin vastakkain olevat pelaajat. Kolmelle pisteelle tämä on mahdollista. Kuviossa 74 on vasemmalla kolme pistettä symmetrisesti tasolla, keskellä neljä pistettä tasolla epäsymmetrisesti ja oikealla neljä pistettä symmetrisesti kolmiulotteisessa tilassa. Symmetrisyydellä tarkoitetaan tässä pisteiden strategista asemaa toisiinsa nähden. Keskimmaisessä kuvassa vastakkaiset pisteet ovat toisiinsa eri asemassa kuin viekkäiset riippumatta siitä millainen pelialusta valitaan.



KUVIO 74 Pisteiden välinen symmetria

6.2 Kolmishakki

Kuten aiemmin, 5. luvussa selvitettiin, on erilaisia shakkipelin muunnelmia kehitelty kautta aikain. Muunnelmien joukossa on myös monia useamman kuin kahden pelaajan shakkipelejä, myös kolmen osapuolen kesken pelattavia. Tässä luvussa esiteltävä kolmishakki perustuu tekijän omaan ideaan, joka syntyi erään matemaattisen ongelman ratkaisuyrityksen seurauksena, kuten tämän tutkielman johdanto-osassa on kerrottu. Pohjana ollut ikivanha matemaattinen ongelma oli aliluvussa 6.1.1 selvitetty ratsun polku. Ideana oli siis yleistää tämä ongelma, jonka vuoksi ikivanha shakkipeli piti jakaa perusosiin. Jäljitimme shakin kehitysvaiheet taaksepäin aina shaturanga-peliin saakka ja sen jälkeen kokosimme pelin uudelleen shakkipelin periaatteiden mukaisesti. Tämän seurauksena löytyi kolme erilaista shakkipeliä: perinteinen shakki, teoreettinen peli, joka koostui kolmioista koottuun lautaan ja kolmen pelaajan shakki jota pelataan kuusikulmioista kootulla laudalla. Kolmen pelaajaa shakin säännöt määriteltiin shakin perussääntöjen pohjalta. Nimeksi tuli Kolmishakki ja englanniksi Trichess. Jälkimmäisen nimen antoi professori Frank Harary toukokuussa 1993.

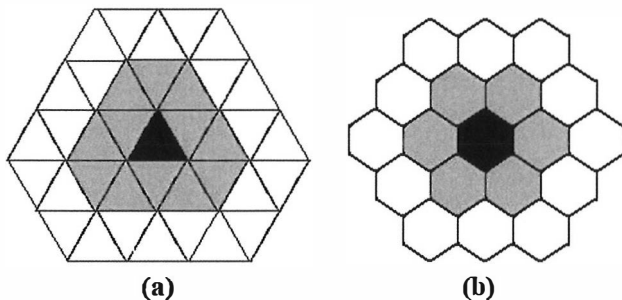
Tavoitteena ei ollut luoda peliä kolmelle pelaajalle, vaan tutkia nappuloiden liikettä muilla kuin neliöruutuisilla alustoilla. Kun alustaksi valikoitui kuusikulmioruutuinen malli kolmio- tai nelikulmiomallin sijaan, niin laudan rakennusperiaate määritteli myös pelaajamäärän kolmeksi. Seuraavaksi selvitetään millä periaatteilla nimenomaisesti tämä kolmen pelaajan shakki rakentui.

Kolmishakkipeli sai innovaatiopalkinnon 1995 Jyväskylän Tekonogikeskuksen ja Jyväskylän yliopiston Tuli95Innovaatiokilpailussa. Vuonna 1998 Mika Vesterholm teki pelille Java-ohjelman ja kuvat 80-81 ja 84-88 ovat tästä ohjelmasta.

6.2.1 Heksagonaalilauta

Linnake/vyöhyke -ajattelun pohjalta voidaan lähteä liikkeelle kuvitellusta alkutilanteesta 2000 vuotta sitten ja rakentaa shakkilauta vastaavasti kolmio- ja heksagoniruudutetulle laudalle, joiden avulla voidaan määritellä nappulan sijainti

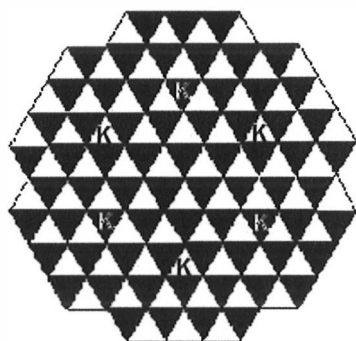
kentällä aivan yhtä hyvin kuin neliöruudutetullakin laudalla. Mikäli linnakkeen ulkopuolisia vyöhykkeitä on kaksi, niin saadaan kuviossa 75 olevat esitykset. Kun linnakkeet kytketään kehäksi samalla tavoin kuin aiemmin neliöruutuisella laudalla kuviossa 73, niin saadaan uudet eri ruudutukseen perustuvat shakkilautojen rakenteet (kuviot 76 and 78).



KUVIO 75 Vyöhykkeet kolmio- ja heksagonaalilaudoilla

On mahdotonta sijoittaa 4 pelaajaa yhtäläiseen asemaan toisiinsa nähden tasolla. Kolmen pelaajan kohdalla se on mahdollista. Kun shakkinappuloiden liikkeet muunnetaan kuusikulmioista koostuvalle laudalle, niin kaksi sisintä puolustusvyöhykettä voidaan peittää tornin ja lähetin liikesuunnilla. Ratsua tarvitaan kolmannella vyöhykkeellä. Peli koostuu kolmesta linnakkeesta ja 87 kuusikulmiosta (kuvio 78). Nämä kuusikulmiot kolmishakkilaudalla väritetään kolmella eri värillä (tavallisesti mustalla, valkoisella ja ruskealla), mikä myös selittää sen että pelissä kullakin pelaajalla tulee olla kolme lähettiä. Muiden upseerien määrä on sama kuin perinteisessä shakkipelissä (kuvio 81).

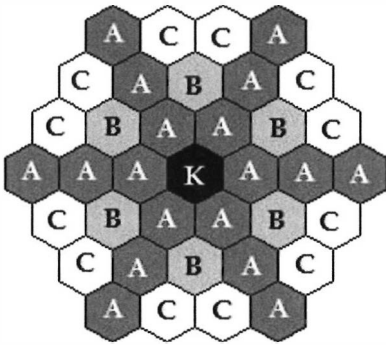
Näillä samoilla periaatteilla olisi siis mahdollista rakentaa myös shakkipeli kolmioruutuiselle laudalle, mutta sille sijoitettavien nappuloiden liikesuuntia ei ole enää mahdollista kuvata tavanomaisen shakin nappuloiden liikkeisiin samoin kuin kuusikulmioihin perustuvassa mallissa. Esimerkiksi alkuasetelmassa ei mikään upseereista (ratsu mukaan lukien) voisi liikkua ennen kuin jotain sotilasta on siirretty. Tähän asiaan palataan vielä tarkemmin lyhyesti kohdassa 7.3.2. Kuviossa 76 esitetään linnakkeiden (K) synty kolmiolaudalla, kun puolustusvyöhykkeitä on kaksi. Linnakkeita syntyy kolmioruudukkolaudalla kuusi.



KUVIO 76 Keskuslinnakkeiden symmetria kolmiolaudalla

Kootaan seuraavaksi lauta heksagoneista eli kuusikulmioista ja katsotaan miten perinteisen shakin säännöt soveltuvat tällaiselle alustalle. Kun kuusikulmaisen linnakkeen ympärille asetetaan puolustusvyöhyke, siis Kuninkaan linnaketta koskettavat kuusikulmiot, niin se koostuu kuudesta kuusikulmiosta. Vyöhyke on merkitty harmaalla värillä (kuvio 75, b). Toiseen, ulompaan vyöhykkeeseen, eli kuusikulmioihin, jotka koskettavat ensimmäistä vyöhykettä, kuuluu 12 kuusikulmiota (sama kuvio 75, b).

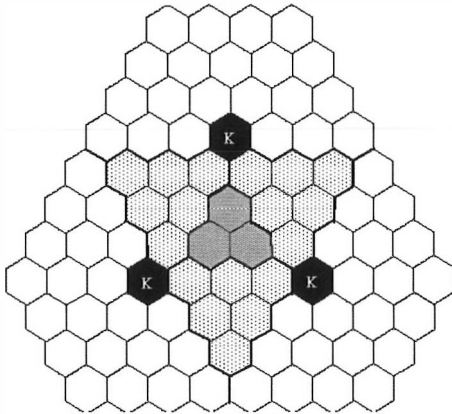
Torni liikkuu ruutunsa, eli tässä tapauksessa kuusikulmion, sivujen suuntaan ja näin sektoreita tulee kuusi ja ne sijaitsevat 60° välein. Mikäli kuninkaan keskusruutu on kärjellään seisova kuusikulmio, kuten kuvassa 79, niin torni, joka kuvassa on merkitty kirjaimella A, liikkuu suuntiin $30^\circ + k \cdot 60^\circ$, kun $k \in [0,5]$ ja $k \in \mathbb{N}$. Ensimmäisen vyöhykkeen kaikki ruudut ja joka toinen seuraavan vyöhykkeen ruuduista voidaan peittää tornilla. Toiselle vyöhykkeelle jää näin vielä kuusi peittämätöntä ruutua. Koska jokainen näistä ruuduista jää kahden torniruudun väliin niin nämä ruudut ovat ensimmäisiä välisektoreita ja ne ovat lähettien liikesuuntia. Lähetit, jotka kuvassa 77 on merkitty kirjaimella B, liikkuvat suuntiin $0^\circ + k \cdot 60^\circ$, kun $k \in [0,5]$ ja $k \in \mathbb{N}$. Mikäli halutaan luoda peli, jossa on sama määrä erilaisia upseereita kuin tavallisessa shakissa niin joudutaan puuttuvan ratsun vuoksi ottamaan vielä kolmas puolustusvyöhyke. Tällä vyöhykkeellä on 18 ruutua, joista torni peittää kuusi. Lähetit ei peitä yhtään ruutua sillä sen sektorit osuvat ruuduille seuraavaksi vasta neljännellä vyöhykkeellä. Peittoa vaille jääneet 12 ruutua kuuluvat ratsulle, kuvassa on merkitty kirjaimella C, joka liikkuu suuntiin $n \cdot 10^\circ + k \cdot 60^\circ$ ja $n \cdot 50^\circ + k \cdot 60^\circ$, kun $k \in [0,5]$ ja $k \in \mathbb{N}$. Näin on erilaisten upseerityyppien lukumäärä saatu samaksi kuin perinteisessä shakissa.



KUVIO 77 Kolmishakki, upseerien liikesuunnat

Sijoitetaan jälleen, kuten neliöruutuisella laudalla, naapurilinnake niin etäälle ettei kummankaan reviiri ulotu toiseen linnakkeeseen. Tämä on merkitty kirjaimella K. Tällöin linnakkeiden väliseksi etäisyydeksi tulee kolme ruutua ja näin ruutujen yhteismääräksi 65. Mikäli lisätään linnakkeiden määrää siten että ne ovat symmetrisesti samassa asemassasuhteessa toisiinsa, niin se onnistuu vain sijoittamalla yksi linnake jo olemassa olevan kahden yläpuolelle niiden väliin. Näin laudalle tulee kolme linnaketta ja ruutujen määrä kasvaa 87:ään (kuvio 78). (Honkela 1999)

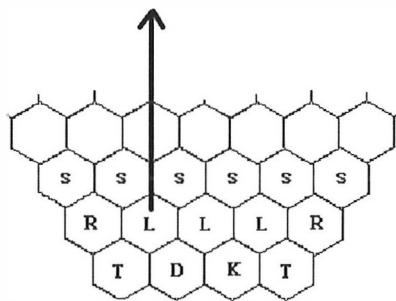
Tällä tavoin on siis saatu valmiiksi määriteltyä sekä pelilauta että tarvittavat nappulat liikkeineen. Enää on tarpeen määrätä nappuloiden lukumäärä sekä sijainti laudalla.



KUVIO 78 Keskuslinnakkeiden symmetria heksagonaalilaudalla

Laudalla on kolme pitkää (8 ruutua) ja kolme lyhyttä sivua (4 ruutua). Valitaan pelaajien nurkiksi lyhyet sivut koska niissä eivät alkuperäisten linnakkeiden vyöhykkeet leikkaa toisiaan ja nappulat voidaan asettaa siten että saadaan täydet rivit kohtuullisella määrällä nappuloita. Kohtuullinen määrä on noin puolet ruutujen määrästä kuten tavallisessa shakissa. Pitkillä sivuilla voitaisiin ottaa

käyttöön ainoastaan yksi täysi rivi eli vain 8 pelinappulaa. Mikäli myös seuraava rivi otettaisiin käyttöön, niin se johtaisi siihen, että naapurijoukkueiden väliin ei reunoissa jäisi yhtään vapaata ruutua. Kohtuullinen määrä nappuloita saadaan siis tavallisesta shakista: puolet ruuduista ($32/64$) on vapaita. Tarkka yhden pelaajan nappuloiden määrä kolmen pelaajan pelissä olisi silloin $87/2/3 = 14.5$ eli 14 tai 15. Kun tästä määrästä vähennetään 8 upseeria (lähettejä on kolme) ja Kuningas niin sotilaiden määräksi tulee korkeintaan 6 tai 7. Kun lyhyen sivun kulmasta lasketaan kolme riviä (kuvio 79), niin saadaan $4 + 5 + 6 = 15$ ruutua. Näin kahdella alimmalla rivillä on 9 ruutua, joten niille sijoittuvat Kuningas ja upseerit. Kolmannella rivillä ruutuja on 6, mikä määrää sotilaiden määrän. Täytetään upseerien rivit seuraavasti: Takarivillä on neljä ruutua, joista keskimmäisiin asetetaan Kuningas ja Kuningatar, kuten tavallisessakin shakissa ja reunaruutuihin tornit, tornituksen eli linnoittamisen mahdollistamiseksi. Seuraavalla rivillä asetetaan Ratsut reunoille ja lähetit keskelle - kukin eriväriiseen ruutuun - koska vain tällaisella asetelmalla tulevat kaikki nappulat suojaetuiksi alkuasetelmassa. Ratsujen ja lähettien muunlainen sijoitustapa johtaisi siihen, että Lähetti voisi syödä jo alkuasetelmastaan. Lähetti voi kuitenkin liikkuu heti alussa, kuten Ratsukin, vaikka yhtään sotilasta ei ole siirretty, mikä on asetelmassa suurin ero tavalliseen shakkiin. Kuviossa 79 on vasemman puoleisen lähetin kohdalle merkitty nuoli osoittamaan sen liikesuuntaa alkuasetelmassa.

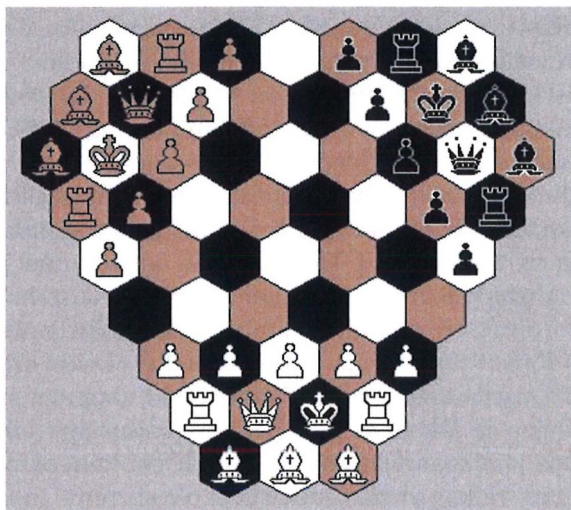


KUVIO 79 Alkuasetelma kolmishakissa

6.2.2 Heksagonaalilaudan pelinappulat

Kun lähdetään kuvaamaan shakkinappuloiden liikkeitä heksagonaalilaudalla, niin otetaan pohjaksi perinteinen neliöruutuinen lauta. Neliöruutuisella laudalahan torni liikkuu sivujen suuntaan. Näin ollen tällä toisenlaisella alustalla torni liikkuu suoraan heksagonien eli kuusikulmioiden sivujen suunnassa ja peittää kokonaisuudessaan sisimmän vyöhykkeen. Lähetin liikesektori on kahden tornin välissä ja näin toinen vyöhyke tulee peitetyksi pelkästään torneilla ja läheteillä. Tästä seuraa, että saatu 46-ruutuinen heksagonaalilauta (kuvio 80) voi-

daan rakentaa vyöhykkeillä, joilla ei ole vielä ratsua, joka tulee tarpeelliseksi vasta kolmannella vyöhykkeellä.



KUVIO 80 Heksagonaalilauta, jossa on 46 ruutua

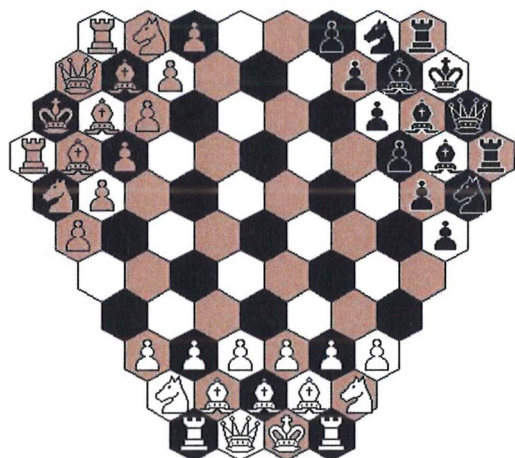
Sen jälkeen kun Ratsu otetaan mukaan kasvaa heksagonaalilauta 87-ruutuiseksi kolmen osapuolen (linnakkeen) peliksi (kuvio 81).

Näiden pelien kehittäminen lähti siis liikkeelle, kun lähdettiin etsimään ratkaisuja ratsun avoimen polun ongelman yleistykseen. Heksagonaalilaudoilla voidaan hakea ratsun polkuja aivan vastaavasti kuin neliöruutulaudoilla, mutta verkkojen rakenne muuttuu merkittävästi. Tämä ei kuitenkaan ole olennaista tässä luvussa, jossa keskitytään selvittämään kolmishakin syntyprosessia. Kehitysprosessissa shakkipeli jakaantui tavallaan "alkutekijöihin", eli palattiin shaturangaan ja lähdettiin eri pohjalta käymään läpi samaa oletettu shakin evoluutioprosessia. Koottiin peli uudelleen alkutekijöistään ottamalla kuitenkin samalla huomioon shakissa tapahtuneet sääntömuutokset kahden vuosituhannen aikana. Samalla syntyivät yleiset säännöt ns. "abstraktille shakille", jonka pohjalta rakentui aluksi kolmishakki ja uudelleen perinteinen shakki. Perinteinen shakki koottiin, jotta voitiin varmistaa mallin toimivuus. Kolmas kolmioruudutulle laudalle sijoitettu malli muotoutui puolestaan tässä "evoluutiossa" niin erilaiseksi peliksi, että sitä saattoi pitää jo aivan eri pelinä kuin shakki. Kolmioruudumalli tarjosi kuitenkin tukea kun traditionaalisen shakin ja kolmishakin välille haettiin mahdollisimman tarkkaa isomorfismia. Onhan shakki vuosituhantisen historiansa aikana hioutunut niin täydelliseksi, että pienetkin muutokset aiheuttaisivat aikaa myöten ikäviä yllätyksiä. Useimpien sääntöjen projisioiminen uuteen peliin oli helppoa, mutta aina silloin tällöin tuli eteen tilanne, jossa oli valittava oikea sääntö useammasta vaihtoehdosta. Tällaisessa tilanteessa tarkistettiin asia kolmioruudutuksesta mallista (kuvio 76).

6.2.3 Heksagonaalisen kolmishakkilaudan numerointijärjestelmä

Kuvio 81 esittää kolmishakkilaudan alkuasetelmiseen. Valkoinen pelaaja on perusasetelmassa alhaalla ja Musta oikealla.

Sen vuoksi, että shakkialusta muodostui kuusikulmioista, niin laudan numeroinnin määrittäminen yksiselitteisesti oli ongelma. Menetellään seuraavasti. Määritellään numerointi samoin kuin perinteisessä shakissa, mutta sovellettuina 87-ruutuiselelle heksagonilaudalle. Pelilaudan ruudut merkitään siten että rivit ilmoitetaan kirjaimin a-k alkaen Valkean pelipäädystä. Yksittäiset ruudut kullakin rivillä numeroidaan vasemmalta oikealle, jolloin lyhimmän rivin suurin numero on 4 (a4) ja pisimmän rivin suurin numero on 11 (h11). Valkeaa pelaajaa vastapäätä olevan päätyrivin kulmaruudut ovat tällöin k1 vasemmassa ja k8 oikealla. Ruudussa k1 on ruskea torni ja ruudussa k8 on musta torni.



KUVIO 81 Kolmishakkilautaa (87 ruutuinen) ja nappuloiden alkuasetelma

Numeroinnin käytännön toteutus

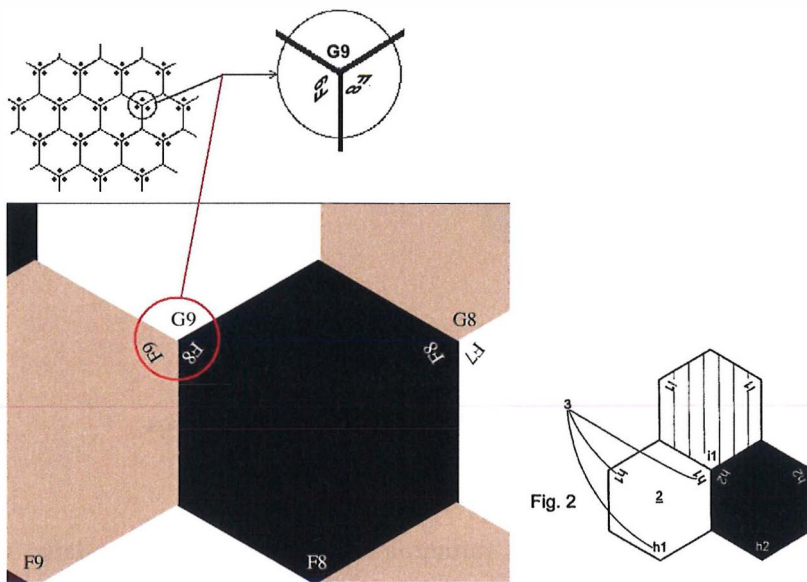
Ongelman muodostaa kuitenkin numeroinnin merkitseminen laudalle siten, että se on

- tasapuolinen jokaista kolmea pelaajaa kohtaan,
- aina näkyvissä riippumatta nappuloiden paikoista,
- havainnollinen eli nappulan sijainti tulee olla välittömästi todettavissa ja
- laudun ulkoasuun sopiva eikä häiritse silmää.

Seuraavassa esitelty ratkaisu (Kyppö 1999) täyttää mainitut kriteerit sillä kunkin ruudun koordinaatti merkitään kolmeen sen kuudesta kulmasta siten, että jokainen kolmesta pelaajasta näkee yhden näistä kolmesta koordinaatista oikeinpäin kirjoitettuna. Koordinaatit esitetään ruudun kokoon nähden pienessä koossa, jolloin lautaa kauempaa tarkasteltaessa ei numerointia edes havaitse.

Koordinaatit ovat kuitenkin riittävän isoja, jotta pelaaja kykenee ne helposti lukemaan. Koordinaatit on kirjoitettu ruudun kulmiin joten tilanteessa, jossa ruudulle on sijoitettu pelinappula, ei kolmesta koordinaatista koskaan peity se, joka on pelaajaan päin eli hänen kannaltaan olennainen. Koordinaatit on sijoitettu heksagonaaliruudukkoon siten, että joka toisessa kolmen janan risteyksessä on kolme koordinaattia, joka toisen vastaavan risteyksen jäädessä vapaaksi (Kuvio 82). Kuvassa on suurennos ruutujen F8, F9 ja G9 risteyksestä.

Hyödyllisyysmallissa tämä on tarkennettu seuraavasti: Pelilauta kolmea pelaajaa varten, joka pelilauta on muodostettu kuusikulmaisista ruuduista, jotka on sovitettu katkaistun tasasivuisen kolmion muotoon siten, että pelitilanteessa kukin pelaaja on asettunut kolmion kärkien jatkeille pelaajien katselusuunnan ollessa oleellisesti pelilautaan päin, tunnettu siitä, että jokaisessa ruudussa on kolme ruudun koordinaattimerkintää, joista kutakin pelaajaa varten yksi on sijoitettu kyseisen pelaajan katselusuunnassa oleellisesti kuusikulmaisen ruudun pelaajaa lähimpään kulmaan.



KUVIO 82 Heksagonaalilaudan numerointijärjestelmä

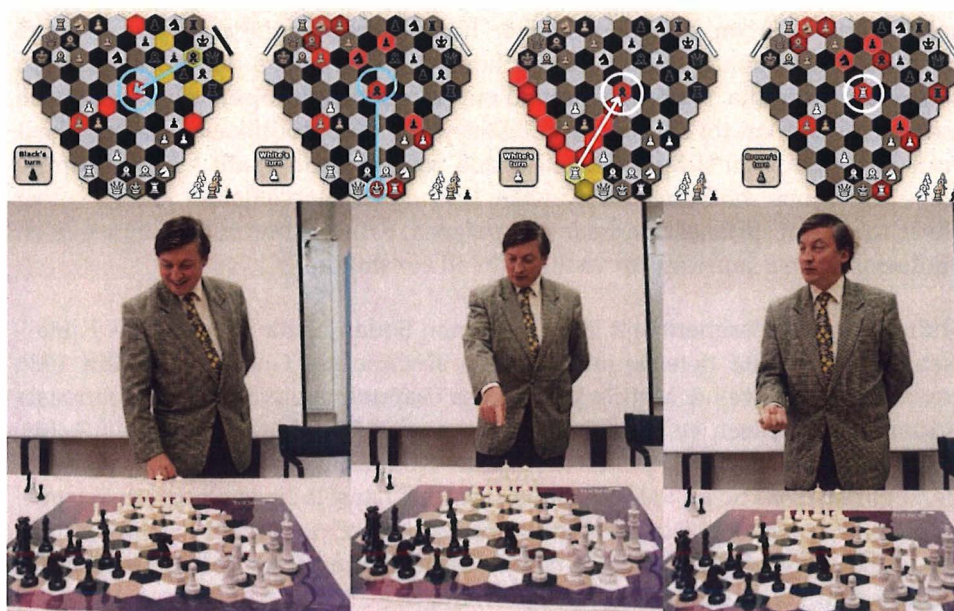
6.2.4 Kolmishakki pelinä

Vaikka Kolmishakki rakentuukin tavallisen shakin pohjalle, niin pelien luonteissa on eroja, johtuen heksagonaalimallin tarjoaman suuremman sektoritiheyden luomasta nappuloiden suuremmasta iskuvoimasta ja useamman pelaajan tuomasta dynamiikasta. Suurin ero on kuitenkin strategisella tasolla. Tavallisen

pelin yläpuolella on toinen, pelaajien liittoutumismahdollisuudesta syntyvä taso, koska kyse on useamman kuin kahden pelaajan pelistä. Milloinkaan pelaajan kannattaa liittoutua toisen kanssa aiheuttaa mielenkiintoisen peliteoreettisen asetelman, jolle on löydettävissä yhtäläisyyksiä mm. politiikasta. Esimerkkinä voi käyttää Suomen sisäpolitiikasta tuttua Sosiaalidemokraatit - Keskustapuolue - Kokoomus -hallituspelejä. Kevään 1999 eduskuntavaaleissa kaikki kolme olivat rohkeasti siirtäneet parhaan nappulansa, Kuningattaren, keskialueelle eli puoluejohtajansa suurimpaan vaalipiiriin eli Helsinkiin.

Muita tunnettuja esimerkkejä löytyy Kylmän Sodan ajalta NL - USA - Kiina - asetelmassa tai sitä tieteiskirjallisuudessa sivunneessa George Orwellin 1984 kuvitelmassa (Orwell & Mattila 1999), jossa osapuolina olivat Oseania, Euraasia ja Kaukoit. Edelleen voidaan esimerkiksi nostaa Euroopassa 90-luvulla kehittynyt Jugoslavian kriisi, jonka keskipiste Kolmishakin kannalta on Bosnia-Herzegovinassa. Tuossa valtiossa kohtaavat Itä, Länsi ja Etelä eli ortodoksisuus, roomalaiskatolisuus ja islam tai sitten Venäjän etupiiri, Lännen etupiiri ja köyhän Etelän etupiiri. Vuonna 2014 näiden samojen etupiirien keskiö on siirtynyt Mustameren ympäristöön ja sen pohjoisrannalle.

Kolmishakissa nappuloiden siirrot perustuvat täysin perinteisen shakin siirtoihin. Ainoa ero on siinä, että nelikulmainen ruutu on korvattu kuusikulmaisella. Näin ollen esimerkiksi tornilla on liikesuuntia kuusi neljän sijaan, koska sivuja on neljä. Sama koskee lähettiä, joka liikkuu ruutunsa kulmien suuntaan samoin kuin perinteisessä shakissa. Kuningattaren liikesuunta on tornin ja lähetin yhdistelmä. Kuningas liikkuu kuten kuningatar, mutta vain yhden ruudun kerrallaan. Ratsu liikkuu lähimpään ruutuun, johon torni tai lähetti ei pääse. Ratsun liike voidaan myös määritellä kuten perinteisessä shakissa eli sitä siirretään yksi ruutu kuten tornia ja yksi ruutu kuten lähettiä. Nappuloiden liiketavat siis oppii shakin pohjalta varsin nopeasti, kuitenkin ensimmäisiä kertoja pelattaessa, on pelin hahmottaminen hieman hankalaa, mikäli on tottunut neliöruutuiseen lautaan. Erityisesti lähettien liikeratojen huomaaminen voi tuottaa alkuvaiheessa ongelmia. Kuvassa 83 on esimerkki pelistä, jossa entinen shakin maailmanmestari Anatoli Karpov purkaa lähetin aiheuttaman shakkitilanteen.



KUVIO 83 Anatoli Karpov purkaa shakin kolmishakissa

Kuvan pelitilanteessa vasemmalta oikealle Musta siirtää lähettinsä keskelle aiheuttaen shakin Valkoisen kuninkaalle. Esittelypelissä tehty shakki oli Karpoville helppo purkaa sillä Valkoisen torni voi eliminoida Mustan lähetin. Tilanteella oli tarkoitus tuoda esille lähetin yllättävyys esittelytilanteessa. Kuvat (otanut sanomalehti Keskisuomalaisen kuvaaja) ovat jälkitilanteesta eli valokuvissa on esillä ylhäällä oikealla oleva tilanne. Seuraavaksi selvitetään pelin säännöt tarkemmin.

Kuvat Karpovista otti sanomalehti Keskisuomalaisen valokuvaaja Matti Turpeinen elokuussa 1996. Siirrot kuvan yllälaidassa on esitetty kolmishakkiohjelmalla, jonka loi Visi-on projekti lukuvuonna 1999 - 2000 (Tietojenkäsittelytieteiden laitos, Jyväskylän yliopisto).

Säännöt

Pelialusta. Kolmishakin pelilauta poikkeaa tavallisesta shakkilaudasta siinä että 64 kaksiväristä neliöruutua on korvattu kolmella eri värillä väritetyllä kuusikulmaisilla ruuduilla, joita on 87, jotka ovat vuorotellen valkoisia ("valkeat ruudut"), ruskeita ("ruskeat ruudut") ja mustia ("mustat ruudut"). Tämän vuoksi jokaisella pelaajalla on kolme lähettä. Muiden upseerien määrä on sama kuin tavallisessa shakissa.

Kuusisivuisen laudan kolmella pitkällä sivulla on 8 ruutua ja kolmella lyhyellä sivulla 4 ruutua. Vastapäiset sivut ovat aina eripituisia. Lauta on asetettava pelaajien väliin niin, että kunkin pelaajan kohdalla on yksi laudan lyhyistä sivuista. Pelaajaan nähden vaakasuunnassa olevia ruuturivejä nimit-

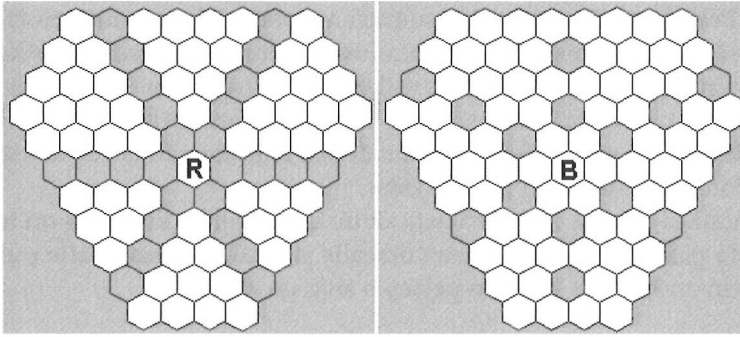
tään *riveiksi*. Pelaajasta vastapelaajien suuntaan menevää kahta ruuturiviä nimitetään *linjoiksi*. Laudan kaikki ruudut kuuluvat kolmeen eri linjaan, jotka ovat mustavalkea linja, ruskeamusta linja ja valkoruskea linja. Näin ollen esimerkiksi ruskean rivit ovat samalla mustavalkeita linjoja. Samanväristen ruutujen yhdensuuntaisia rivejä, joissa kahden samanvärisen ruudun välillä on kahden eri-värisen ruudun raja, kutsutaan *viistolinjoiksi*.

Valkea pelaaja ottaa lyhyistä sivuista sen, jonka kulmissa on mustat ruudut. Musta pelaaja asettuu Valkean oikealle ja Ruskea vasemmalle puolelle. Tämän tutkielman kuvissa Valkean pelaajan sivu on alhaalla.

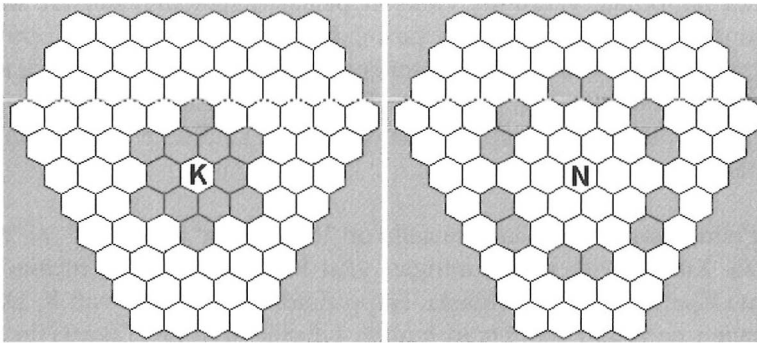
Pelin kulku. Peliä pelataan kolmen vastustajan kesken. Nämä siirtävät nappuloita siten, että valkoiset nappulat aloittavat pelin. Pelin alussa kullakin pelaajalla on 15 nappulaa, valkoiset Valkean pelaajan reunalla, mustat Mustan pelaajan reunalla ja ruskeat Ruskean pelaajan reunalla. Jokainen nappula voi siirtyä lähtöruudultaan määrättyjen sääntöjen puitteissa. Nappula ei voi siirtyä oman nappulan miehittämään ruutuun. Jos siirtoruudulla on vastapelaajan nappula, tämä "lyödään" ja poistetaan laudalta. Poikkeuksena on ohestalyönti, joka selvitetään myöhemmin.

Nappulat. Pelin alussa jokaisella pelaajalla on 15 "mustaa", "valkeaa" tai "ruskeaa" nappulaa. Kullakin on yksi kuningas, yksi kuningatar, kaksi tornia, kaksi ratsua, kolme lähettiä ja kuusi sotilasta. Nappuloiden lyhenteet ovat: K, D, T, R, L ja S. Pelaajien nappulat sijoitetaan laudan lyhyille sivuille. Takariviin asetetaan kuningas ja kuningatar keskelle (kuningatar oman värisensä ruutuun) ja reunoille tornit. Seuraavan rivin reunoille asetetaan ratsut ja keskelle kolme lähettiä. Kolmannelle riville (kuusi ruutua) tulevat sotilaat.

Nappuloiden liikkuminen. Tavallisessa shakissa torni voi liikkua sivujensa suuntaan niin pitkälle kuin pääsee (esteenä pelialueen reuna tai toinen nappula). Samoin on laita kolmishakissa, mutta mahdollisia liikesuuntia on nyt neljän sijaan kuusi johtuen ruutujen muodosta (kuvio 84, vasemmalla). Tornit liikkuvat siis linjoja tai riviä pitkin. Lähetti liikkuu tavallisessa shakissa viistosti tornin välisiin suuntiin, joita kolmishakissa on siis kaksi enemmän eli kuusi viistolinjaa (kuvio 84, oikealla). Toinen ero on että ruudut eivät kulumistaan kosketa toisiaan. Kuninkaan, kuningattaren ja ratsun liikkeet voidaan määritellä täsmälleen samoin kuin tavallisessa shakissa. Ratsu liikkuu ensin yhden ruudun kuten torni ja sitten yhden ruudun kuten lähetti tai liike voidaan ilmaista myös siten, että ratsu liikkuu kaksi ruutua samaan suuntaan kuten torni ja sen jälkeen yhden ruudun 60 astetta tästä etenemisuunnasta vasemmalle tai oikealle olevaan ruutuun (kuvio 85, oikealla). Ratsu voi myös hypätä toisten nappuloiden ylitse. Kuningattaren liike on kuten Tornin ja Lähetin yhdessä. Kuningas siirtyy samoin kuin kuningatar, mutta vain yhden askeleen kerrallaan (kuvio 85, vasemmalla). Jokainen muu nappula kuin sotilas, syö vastustajan nappulan siitä ruudusta, johon se etenee ja näin korvaa kyseisessä ruudussa olleen nappulan.



KUVIO 84 Tornin ja Lähetin liikesuunnat



KUVIO 85 Kuninkaan ja Ratsun liikesuunnat

Liikesuunnat tarkennettuna:

Torni liikkuu pitkin niitä rivejä tai linjoja, joilla se on. Torni voi liikkua jokaiseen ruutuun pitkin sitä riviä tai linjaa, jolla se on. Torni ei voi hypätä yhdenkään nappulan yli. Torni syö samalla tavoin kuin se liikkuu. Kun se syö vastustajan nappulan, niin se valtaa samalla syödyn nappulan ruudun.

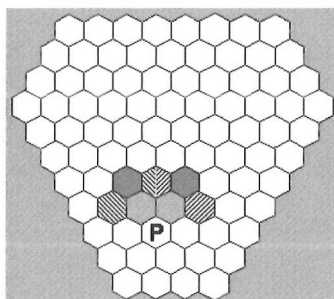
Lähetti liikkuu pitkin niitä viistolinjoja, joilla se on, eli aina samanvärisillä ruuduilla. Lähetti voi liikkua jokaiseen ruutuun pitkin sitä viistolinjaa, jolla se on. Lähetti ei voi hypätä yhdenkään nappulan yli. Lähetti syö samalla tavoin kuin se liikkuu. Kun se syö vastustajan nappulan, niin se valtaa samalla syödyn nappulan ruudun.

Kuningas siirtyy ruudustaan johonkin sitä koskettavaan ruutuun tai lähimpiin samanväriseen ruutuun, mikäli ruutuja ei uhkaa kummankaan vastapelaajan nappula. Osapuolten kuninkaas eivät voi milloinkaan olla toisiaan koskettavilla ruuduilla tai vierekkäisillä samanvärisillä ruuduilla. Kuningas on pelin tärkein nappula. Jos kuningas joutuu mattiin, niin peli on ohi. Kuningas liikkuu jokaiseen rivi- linja, ja viistolinja-suuntaan ruutu kerrallaan. Kuningas syö samoin kuin liikkuu. Syödessään se korvaa syödyn nappulan paikan ruudulla. Kuningas ei voi liikkua ruutuun, jota uhkaa yksi tai useampi vastustajan pelinappula.

Kuningatar liikkuu pitkin niitä rivejä, linjoja ja viistolinjoja, joilla se on. Kuningatar on vahvin kaikista shakkinappuloista ja se liikkuu kuten torni ja lähetti yhdessä. Kuningatar ei voi hypätä muiden nappuloiden ylitse. Kuningatar syö samoin kuin liikkuu. Syödessään se korvaa syödyn nappulan paikan ruudulla.

Ratsu siirtyy ensin yhden askelen kuten torni ja sitten yhden askelen etuviistoon kuten lähetti tai sitten yhden askelen kuten lähetti ja sitten yhden askelen etuviistoon kuten torni. Lähtö- ja tuluoruuden välisissä ruuduissa voi olla myös muita nappuloita. Lähtö- ja tuluuruu ovat aina erivärisiä. Ratsu on siis ainoa nappula, joka voi hypätä muiden nappuloiden yli (omien tai vastustajan). Ratsu on myös ainoa upseeri, jolla on kiinteä siirtomatka.

Sotilas poikkeaa tavallisen shakin sotilaasta syystä että vastustajia on yhden sijaan kaksi. Näin ollen sotilas voi siirtyä mahdollisesta kuudesta naapuriruudusta kahteen, kohden jompaakumpaa vastustajaansa. Sotilas voi pelin aikana milloin tahansa valita näiden kahden liikesuunnan välillä. Sotilas siirtyy eteenpäin vain yhden ruudun kerrallaan. Ainoastaan lähtöruudusta se voi halutessaan siirtyä myös kaksi ruutua pitkin samaa linjaa, mikäli väliin jäävä ruutu on tyhjä. Tämä lähtöruudun kahden askelen mahdollisuus säilyy koko pelin ajan.



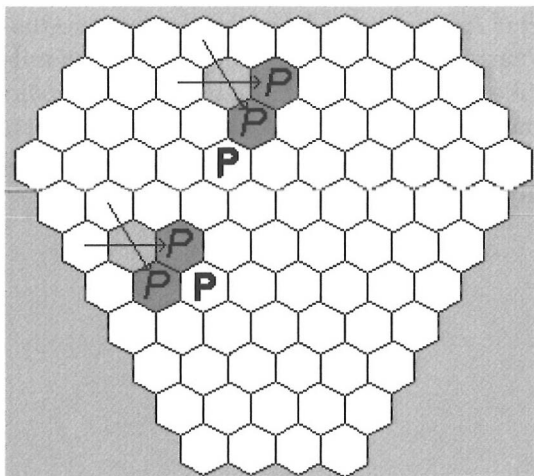
KUVIO 86 Sotilaan liike- ja lyöntisuunnat

Sotilas voi lyödä ruudustaan liikesuuntansa nähden viistosti niihin kahteen samanväriseseen ruutuun, jotka sijaitsevat sen ruudun, johon se normaalisti voi siirtyä, oikealla ja vasemmalla puolella. Sotilaalla on kahden vastustajan vuoksi kaksi liikesuuntaa ja sen vuoksi kasvaa lyöntiruutujen määrä myös kolmeksi (kuvio 86). Huomattavaa on, että näistä kolmesta ruudusta sotilas voi lyödä vasemman puoleisen vastustajan nappulan vain kahdesta vasemmasta ruudusta ja oikean puoleisen nappulan vain kahdesta oikean puoleisesta ruudusta. Tämä sääntö on välttämätön, jotta ei jouduta asetelmaan, missä vain toinen vierekkäisistä iskuasemassa olevista sotilaista voisi lyödä toisen.

Sotilas korotetaan jos se saavuttaa jonkin vastapäisen pitkän sivun kahdeksasta ruudusta. Jokainen sotilas, joka saavuttaa vastapäisen sivun on vaihdettava heti, ja riippumatta laudalla jäljellä olevista muista nappuloista, samanväriseksi kuningattareksi, torniksi, lähetiksi tai ratsuksi pelaajan valinnan mukaan. Ainoastaan kuninkaaksi korotus on kielletty. Vaihtonappuloina voidaan käyttää jo lyötyjä nappuloita ja mikäli sellaisia ei ole, niin laudalle laitetaan jokin nappu-

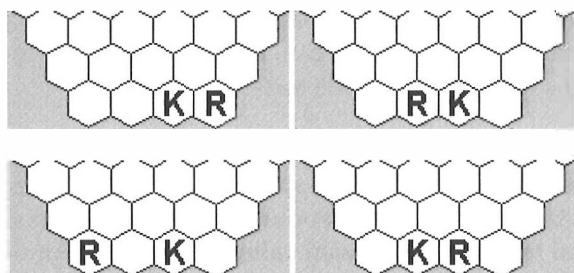
laksi sopiva, joka merkitään asiaan kuuluvalla tavalla. Tällaisia pääteruutuja on laudalla kahdeksan ja sotilaan kokemaa muodonmuutosta nimitetään korotukseksi. Korotus vaikuttaa välittömästi.

Sotilas, joka uhkaa ruutua, jonka vastapelaajan alkuperäisestä ruudustaan yhdellä kertaa kaksi askelta edennyt sotilas on sivuuttanut, eli siirtynyt sen naapuriruutuun, voi välittömästi seuraavalla siirrollaan, ja ainoastaan silloin, lyödä tämän vastapelaajan sotilaan ikään kuin viimeksi mainittu olisi siirtynyt vain yhden askelen. Tätä erikoissiirtoa nimitetään ohesta lyönniksi (kuvio 87). Ohestalyöntiä ei tarvitse kuitenkaan välttämättä tehdä.



KUVIO 87 Ohesta lyönti

Linnoittaminen on kuninkaan siirto, jota täydentää tornin siirto. Se lasketaan yhdeksi siirroksi, joka on suoritettava siten, että kuningas pysyy paikallaan (kuvio 88, ylhäällä) tai siirtyy samalla rivillä viereiseen ruutuun (kuvio 88, alhaalla). Sen jälkeen torni, joka on lähinnä kuningasta, siirtyy kuninkaan yli seuraavaan ruutuun. Linnoittuminen on mahdoton jos jompikumpi osapuolista, kuningas tai kyseinen torni, on jo kertaalleen siirtynyt. Linnoittuminen on tilapäisesti estetty, mikäli kuninkaan lähtöruutu on vastapelaajan nappulan uhkaama.



KUVIO 88 Linnoittaminen

Tavoite ja pelin päättäminen. Tavoitteena on toisen vastustajan kuninkaan tai pelin toisessa muunnelmassa vastustajien kuninkaiden vangitseminen. Kaikki muut nappulat voidaan lyödä ja poistaa laudalta. Kun kuningas joutuu vangituksi, niin siitä tulee "matti". Peli päättyy joko siihen että joku kolmesta kuninkaasta joutuu mattiin, jolloin matin tehnyt pelaaja on voittaja. Peli voi päättyä myös antautumiseen, kun on ilmeistä, ettei voiton mahdollisuutta ole. Peli päättyy tasapeliin silloin kun kuningas on ainoa nappula, jota voi siirtää mutta sille ei ole vapaana yhtään ruutu, jossa se ei tulisi uhatuksia. Tasapeliä kutsutaan *patiksi*. Peli voi päättyä pattiin myös osapuolien sopimuksesta tais jos samanlainen peliasetelma toistuu laudalla kolme kertaa. Äärimmäisessä tapauksessa pelin katsotaan päättyneen pattiin jos viimeisten 50 siirtovuoron aikana kukaan pelaajista ei ole siirtänyt yhtään sotilasta eikä syönyt yhtään nappulaa. Peliä voidaan, jos siitä on etukäteen sovittu, myös jatkaa kahden jäljelle jääneen pelaajan kesken loppuun eli toiseen mattiin saakka. Tästä lisää seuraavassa.

Kaksi eri tapaa päättää peli

A. Pelaaja, joka ensimmäiseksi onnistuu tekemään matin, toiselle vastustajistaan, on voittaja ("ensimmäinen matti voittaa").

B. Pelaaja, jonka kuninkaasta on tehty matti, putoaa pelistä ja viimeinen laudalle jäänyt pelaaja on voittaja ("viimeinen matti voittaa"). Tähän pelivaihtoehtoon liittyvä sääntölisäys löytyy seuraavasta kohdasta, joka käsittelee *pelin kulkuun liittyviä sääntöjä* ja siinä kohdasta **häviö**. Pelaaja, joka näkee matiksi joutumisen uhkaavan kuningastaan voi myös luovuttaa, jolloin hän samoin putoaa pelistä.

Mikäli tapaa B käytetään turnauksessa, niin peliä voidaan aktivoida jakamalla kolme pistettä pelaajien kesken siten, että voittaja eli viimeisenä matin tehnyt pelaaja, saa kaksi pistettä ja ensimmäisenä matin tehnyt pelaaja yhden pisteen. Mikäli ensimmäisenä pudonnut pelaaja on hävinnyt pelinsä luovuttamalla niin seuraavan matin tekijä saa täydet kolme pistettä. Peli voi tällöin päättyä seuraaviin pistejakaumiin: (3, 0, 0), (2, 1, 0) tai (1, 1, 1). Viimeinen tilanne syntyy kun kaikki kolme pelaajaa päätyvät tasapeliin.

Pelin kulkuun liittyviä sääntöjä

Avausmenettely. Nappuloiden värit arvotaan. Valkeat nappulat saanut pelaaja tekee ensimmäisen siirron, minkä jälkeen siirtovuorot kiertävät myötöpäivään. Toisena siirtää siis ruskea ja kolmantena musta.

Peli. Nappuloiden ollessa alkuasetelmassa kukin pelaaja voi siirtää ainoastaan lähettiä, ratsua tai sotilasta.

Siirto on suoritettu loppuun a) siirrettäessä nappula tyhjään ruutuun, kun pelaaja on päästänyt nappulan irti, b) lyötäessä kun nappula on poistettu laudalta ja pelaaja asetettuaan oman nappulansa sen paikalle on päästänyt siirtämänsä nappulan irti, c) linnoittautumisessa, kun pelaaja on päästänyt irti kuninkaan tai d) korotuksessa, kun sotilas on poistettu laudalta ja pelaaja on päästänyt irti uuden, korottumisruutuun asetetun nappulan.

Shakki ja matti. Kuningas on shakissa, kun sen ruutu on jommankumman vastapelaajan nappulan uhkaama. Vastustajan sanotaan tällöin shakkaavan. Shakki on torjuttava välittömästi seuraavalla omalla siirtovuorolla seuraavalla siirroilla: a) siirtämällä kuningas ruudulle, jossa se ei ole uhattuna, b) lyömällä shakkaava nappula tai c) siirtämällä jokin nappula shakkauslinjalle. Ellei shakkia voida torjua, kuningas on "matti".

Häviö. Tämä sääntö on merkityksellinen ainoastaan jos peli on sovittu päättyväksi edellä olleessa tavoite-kohdassa kohdassa tavalla B ("viimeinen matti voittoa"). Pelaajat, joiden kuninkaista on tehty matti, ovat hävinneet pelin. Samoin pelaajat, jotka ovat ilmoittaneet antautuvansa, ovat hävinneet pelin. Matti ja antautumisilmoitus ovat tehtävissä missä pelin vaiheessa tahansa. Ensimmäisenä hävinnyt pelaaja putoaa pelistä, mutta *nappulat jäävät laudalle "voimattomina"*. "Voimaton", joka muuten oli myös sanan "matti" merkitys persian kielessä, tarkoittaa sitä että nappuloita ei voi liikuttaa, mutta ne eivät myöskään uhkaa muita nappuloita. Ne ovat siis kulkuesteitä, jotka voidaan poistaa vain lyömällä kuten normaalitkin nappulat. Tämä sääntö koskee myös kuningasta. Tällä sääntömuutoksella vältetään tilanne, syöntiasemat laudalla muuttuisivat yhden pelaajan poistuttua.

Tasapeli kahden pelaajan kesken. Mikäli vain kaksi pelaajaa on jäljellä, niin peli näiden kesken päättyy tasapeliin noudattaen samoja sääntöjä kuin perinteisessä shakissa.

Tasapeli kolmen pelaajan kesken. Peli voi päättyä tasapeliin myös kaikkien kolmen pelaajan kesken kun siirtovuorossa olevan pelaajan kuningas ei ole shakissa, mutta tämä pelaaja ei voi tehdä siirtovuorollaan mitään sääntöjen mukaista siirtoa.

Sääntöjen vastaisuuksia. Jos pelin kestäessä todetaan että jokin siirto on suoritettu sääntöjen vastaisesti, asema on palautettava sellaiseksi kuin se oli ennen kyseisen siirron suorittamista. Ellei asemaa voida palauttaa, peli on mitätön ja uusi peli on pelattava. Kaikki edellä olevat säännöt ovat yhteneväisiä perinteisen shakin sääntöjen kanssa.

Siirtojen algebrallinen merkitsemistapa. Nappulat merkitään sotilaita lukuun ottamatta vakiintuneilla alkukirjaimilla. Suomeksi kuningas K, kuningatar D, torni T, lähetti L, ratsu R ja sotilas S. Englanniksi kuningas K, kuningatar Q, torni R, lähetti B, ratsu N ja sotilaalla ei ole kirjainsymbolia. Sotilasta voidaan

Suomessa merkitä S:llä, joka Ruotsissa ja Saksassa tarkoittaa perinteellisen kahden pelaajan shakin ratsua. On syytä myös huomata, että luvussa 6.1.1 käytimme ratsulle symbolia Kn, koska se on yleisesti käytetty merkintä tälle upseerille verkkoteoriassa.

Pelilaudan ruudut merkitään alkaen Valkean pelaajan päädyistä siten että rivit ilmoitetaan kirjaimin a-k alkaen Valkean pelipäädystä. Sarakkeet numeroidaan 1 - 11 alkaen myös Valkean pelipäädystä. Merkintätapa on vastaavanlainen kuin tavallisessa shakissa poislukien sen, että kirjaimia ja numeroita on hieman enemmän. Näin ollen lyhimmän rivin suuri numero on 4 ja siinä olevan ruuden symboli a4. Pisimmän rivin suurin numero on 11 ja vastaavan ruudun symboli h11. Valkeaa pelaajaa vastapäätä olevan päätyrivin kulmaruudut ovat tällöin k1 vasemmalla ja k8 oikealla.

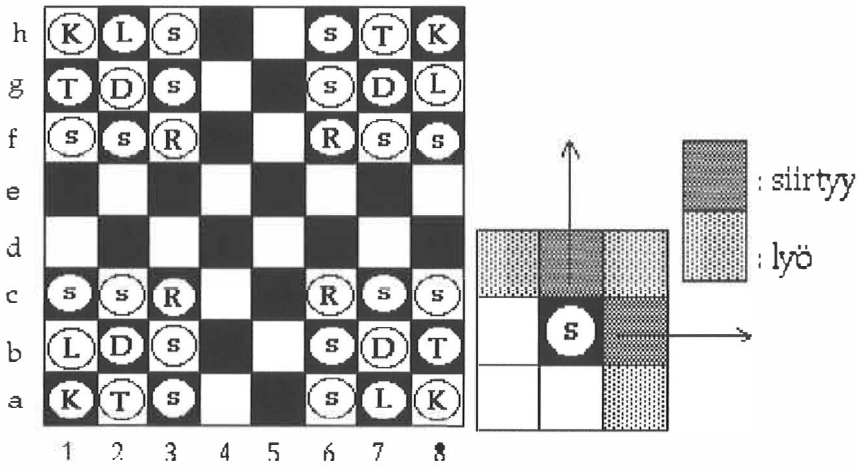
Alkuasetelmassa Valkean nappulat ovat riveillä a-c, Ruskean ja Mustan nappulat ovat riveillä f-k. Tällöin Ruskean nappulat sijaitsevat rivillä f ruudussa 1, rivillä g ruuduilla 1-2 ja riveillä h-k ruuduilla 1-3. Mustan nappulat sijaitsevat seuraavasti: f9, g9-10, h9-11, i8-10, j7-9 ja k6-8. Jokainen ruutu on siten muuttumattomasti kirjaimen ja numeron yhdistelmän määrittelemä. Nappulan alkukirjaimen lisätään sen lähtö- ja tuloaruutu. Sotilaan osalta voidaan alkukirjain jättää merkitsemättä.

6.3 Epäsymmetrinen nelishakki

Myös neljän pelaajan shakkeja on kehitetty historian saatossa useampiakin, kuten jo luvussa 4 ja 5 tuli esille. Nämä pelit ovat kaikki olleet epäsymmetrisiä koska niiden pelialustat ovat kaksiulotteisia.

Tässä esiteltävä epäsymmetrinen nelishakki on perinteisen shakin ja kolmishakin yhdistelmä. Pelissä on neljä pelaajaa ja sitä pelataan perinteisellä 64-ruutuisella shakkilaudalla. Tämä peli pohjautuu universaalin shakin malliin. Kun tämä peli syntyi pian kohdassa 6.2. esitellyn kolmishakin jälkeen, niin ajatuksena oli soveltaa kolmishakin rakennusperiaatteita tavalliselle neliöruutuiselle shakkilaudalle neljän pelaajan peliksi. Motiivina oli kolmishakin syntyyn johtanut tieto muinaisen shaturangan neljän pelattavasta versiosta, joka on esitelty kohdassa 4.2.2.

Kun kehitimme kolmishakin 90-luvun alussa, niin idea saatiin neljän pelattavasta shaturangasta. Tietoa siitä millainen itse peli oli ollut, ei kuitenkaan ollut. Tätä tutkielmaa tehdessä löytyi sitten 1200 -luvulla pelattu neljän vuodenajan shakki, joka on esitelty luvussa 5.1.3 (kuvio 54), ja se muistuttaa yllättäen tätä peli erityisesti nappuloiden alkuaseman suhteen.



KUVIO 89 Epäsymmetrinen neljän pelaajan shakki (bridgeshakki)

Shakkilaudan muodostavat 8×8 samanlaista ruutua, jotka ovat vuorotellen valkoisia ja mustia. Valkea pelaaja ottaa sen kulman, jonka nurkassa on musta ruutu a1. Valkean vasemmalla puolella on Punainen, Valkoista vastapäätä Musta ja Valkoisen oikealla puolen Keltainen pelaaja (kuvio 89). Värejä ei ole merkitty tähän kuvaan. Valkean ja Keltaisen akseliin nähden vaakasuunnassa olevia ruuturivejä nimitetään *riveiksi*. Valkeasta pelaajasta Punaisen suuntaan meneviä ruuturivejä nimitetään *linjoiksi*. Samanväristen ruutujen yhdensuuntaisia rivejä, joissa kahden samanvärisen ruudun välillä on kahden erivärisen ruudun raja, kutsutaan *viistolinjoiksi*.

Bridgeshakki. Peliä voi pelata kuten kolmishakkaa, jossa kaikki pelaavat toisiinsa vastaan. Tällaisena peli toimii hyvin seurapelinä. Toinen tapa on pelata kahden hengen joukkueina, joko vierekkäiset tai vastakkaiset pelaajat samalla puolella. Tällöin kommunikointi pelin aikana on kielletty eli peliä voi kutsua bridgeshakiksi tunnetun bridge korttipelin mukaan.

Pelin säännöt. Pelin säännöt ovat suora sovellus kolmishakkipelin säännöistä ja ne on esitelty liitteessä 2.

6.4 Laudaton shakki

Laudaton shakki (Kyppö 1997) perustuu myös universaalien shakin malliin, lähtökohtana oli pelkistää pelialusta eli lauta. Itseasiassa tämäkin idea syntyi jo aiemmin, vuonna 1993, kuten liitteen 1 sähköpostista nro 16 ilmenee. Motiivina idean eteenpäin viemiselle oli se, että shakki on strategiapeli, jota sovelletaan todellisen maailman strategiaan asetelmiin. Niissä ei ole pelilautaa. Lopputulos

oli, että pelilauta poistui kokonaan ja nappuloiden liikkeiden määräytyminen siirtyi nappuloihin itseensä.

6.4.1 Pelialue ja nappulat

Pelialue on rajattu kaksiulotteinen pinta. Jokaisella nappulalla on ympärillään ympyränmuotoinen alue, joka määritetään nappulan pohjan alalla. Pohja on muodoltaan ympyrä. Alkuasetelmassa nappulat sijoitetaan siten että Valkoisella puolella ovat keskellä Kuningas ja Kuningatar, Kuningatar vasemmalla puolella. Niistä vasemmalle ja oikealle ovat järjestyksessä Lähetti, Ratsu ja Torni. Kukin omalla alueellaan, siten että alueet sivuavat toisiaan. Näiden, ns. upseerien, edellä on kahdeksan sotilasta, siten että kunkin sotilaan alue sivuaa sen takana olevan upseerin aluetta. Sotilaista kohtisuoraan eteenpäin viiden alueenmitan päässä (täysin tyhjiä alueita jää väliin neljä) on yhdensuuntainen mustien sotilaiden rivi, jonka takana vastaavasti mustat upseerit. Musta Kuningatar on kohtisuoraan samalla linjalla kuin valkoinen Kuningatar.

Mustan ja Valkoisen Kuninkaan välille jää alkuasetelmassa 6 alueenmittaa. Pelialueen laajuus määritellään piirtämällä ympyrä, jonka säde on pituudeltaan 6 alueenmittaa ja, jonka keskipiste on mustan Kuningattaren ja valkoisen Kuninkaan välisen janan keskipisteessä. Vaikka peliä voi pelata millä tasaisella alustalla tahansa niin käytännössä pelin mukana yleensä seuraa kuitenkin alusta, jossa tämä raja on tehty jo valmiiksi. Kuviossa 90 ylhäällä on esitetty nappuloiden alkuasetelma, jossa pienet ympyrät kuvaavat nappuloiden pohjan määrittämiä alueita. Pelialueen koko on, selvyuden vuoksi, rajattu kuvassa on rajattu ympyräviivalla.

Nappulan paikan määrittäminen tapahtuu nappulan pohjan yläpinnalle merkittyjen suuntien mukaan (kuvio 91). Nappulan juuressa oleva, pyörivään renkaaseen kiinnitetty *suuntausnauha* (10, kuviossa 91), käännetään valittuun suuntaan ja nappulan siirtymä matka luetaan nauhaan asetetulta asteikolta. Nauhan pituus on lähetillä, tornilla ja kuningattarella 10 alueen mittaa, ratsulla 3 alueen mittaa ja muilla nappuloilla 2 alueen mittaa.

Ennen suuntimista on nappula asennettava kohtisuoraan suhteessa pelin alkuasetelmaan. Tämä tapahtuu *suuntimen* avulla. Suunnin sijaitsee Valkoisesta pelaajasta katsoen pelialueen vasemmalla puolella (kuvio 90, ylhäällä) ja siinä on keskellä uraan sijoitettu liikkuva nappi, josta lähtee oikealle liikuteltava mittatikku. Pelin alussa suunnin asennetaan siten että se on samansuuntainen kuin Valkoisen ja Mustan Kuninkaan välille piirretty suora. Pelistä on myös ns. seinäversio, jossa ei suunninta tarvita.

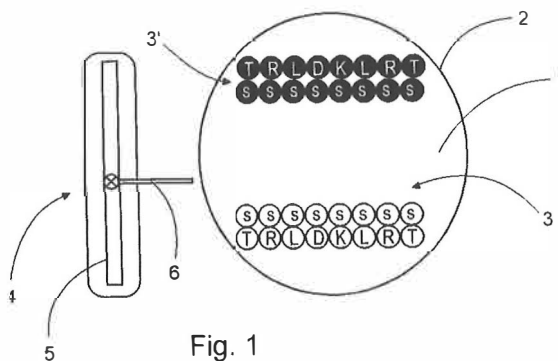


Fig. 1

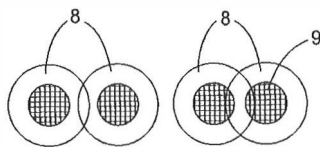


Fig. 4a

Fig. 4b

KUVIO 90 Alkuasetelma, suunnin ja pelinappulan vyöhykkeet ⁴²

Nappulat. Pelin alussa jokaisella pelaajalla on 16 "mustaa" tai "valkeaa". Kullakin on yksi Kuningas, yksi Kuningatar, kaksi Tornia, kaksi Ratsua, kaksi Lähettiä ja kahdeksan sotilasta. Nappuloiden lukumäärä ja alkuasetelma on siis samanlainen kuin "tavallisessa" shakissa.

Tavoite. Tarkoituksena on vastustajan Kuninkaan vangitseminen. Kaikki muut nappulat voidaan lyödä ja poistaa pelialueelta. Mikäli Kuningas joutuu vangiin, niin sille on tehty "matti" ja peli päättyy.

Siirrot. Jokainen nappula voi siirtyä lähtöpaikaltaan määrättyjen sääntöjen puitteissa. Nappula ei voi siirtyä sellaiseen paikkaan joka kuuluu jonkin oman nappulan alueeseen, eikä sellaiseen paikkaan, joka kuuluu vastustajan nappulan alueeseen. "Alue" on määritelty alla. Mikäli siirretyn nappulan alue leikkaa vastustajan nappulan aluetta niin tämä "lyödään" ja poistetaan pelialueelta. Vain Ratsu ja Lähetti voivat ylittää muiden nappuloiden alueita. Nappulan alue ei saa leikata pelialueen rajaa.

Alueen määrittäminen tapahtuu käytännössä siten, että nappuloiden alustana on litteä ympyränmuotoinen kiekko, jonka pinta-ala on yhtä kuin nappulan alue. Kiekoissa on myös sisempi ympyrä, ns. sisäalue, jonka lävistäjä on puolet koko alueen lävistäjästä. Erikseen sovittaessa pelin alussa voidaan nappuloiden aggressiivisuutta pienentää lieventämällä alueiden leikkaamissääntöä alueen ja

⁴² Kuvion merkinnät Fig.1 , Fig. 4a ja Fig 4b, sekä pikku numerot liittyvät patenttiin (Kypö 1997), josta kuva on poimittu

sisäalueen leikkaamiseen. Tästä lievennyksestä seuraa, että nappulat voivat sijaita toistensa vieressä myös siten että sisäalueen reunan ja nappulan koko alueen reunan väliin jäävät renkaan muotoiset vyöhykkeet leikkaavat toisiaan. Kuvassa esittää vasemman puoleinen piirros alueiden leikkausta normaalissa tilanteessa ja oikeanpuoleinen kuva lievennettyä leikkaussäätöä. Tumma alue keskellä on sisäalue (kuvio 90, alhaalla).

Esimerkkikuvissa on kahden upseerin, ratsun (kuvio 91) ja lähetin (kuviot 92 ja 93) rakenne. Koko pohjan ala on upseerin aluetta ja sisäaluetta kuvaa keskellä oleva paksu tummennettu "koroke".

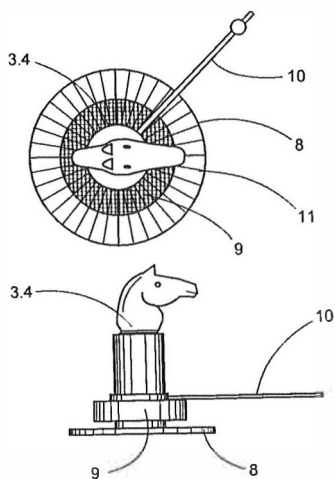
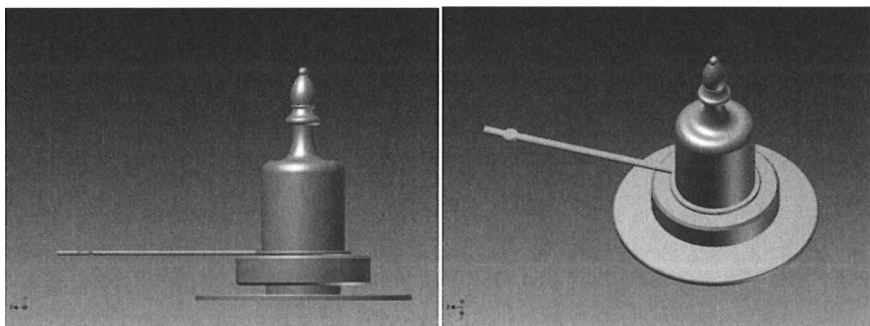


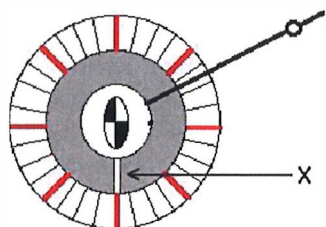
Fig. 2

KUVIO 91 Laudattoman shakin Ratsu ⁴³



KUVIO 92 Laudattoman shakin Lähetti

⁴³ Kuvion merkinnät Fig.2, sekä pikku numerot liittyvät patenttiin (Kyppö 1997), josta kuva on poimittu

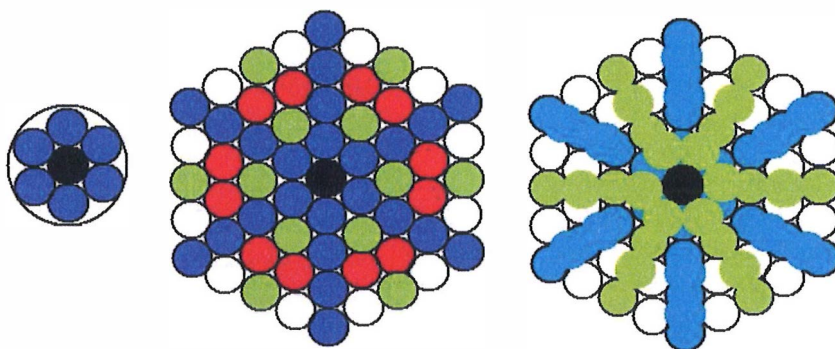


KUVIO 93 Lähetin rakenne ylhäältä

6.4.2 Yksittäisten nappuloiden siirtäminen alustalla

Torni liikkuu pohjoisesta lukien suuntiin 0° , 60° , 120° , 180° , 240° ja 300° , eikä myöskään sen siirtymisaskelien määrää ole rajoitettu, jos reitti on muuten selvä. Liikkuminen muistuttaa heksagonaalilaudalla liikkumista, koska suunnat ovat samat kuin aiemmin kohdassa 6.3. kolmishakin kohdalla. Tämä johtuu siitä, että kaksiulotteisella tasolla suutelulukku on kuusi eli ympyrällä on vastaava määrä naapureita kuin heksagonilla. Kuviossa 94 torni voi siis liikkua keskellä olevasta mustasta ympyrästä sinisten ympyröiden suuntaan. Upseereista ensimmäiselle puolustusvyöhykkeelle (kuvio 94, pieni kuva) voi liikkua vain torni. Pelin edetessä tornin paikka ei enää välttämättä osu tässä kuviossa oleviin ympyröihin sillä tornin yhden askelen pituutta ei ole määritelty ja se voi pysähtyä jollain siirrolla liikesuunnassaan ympyröiden väliselle alueelle (kuvio 96, oikean puoleisin kuva). Tämä sama koskee nappuloista myös lähettiä ja kuningatarta.

Lähetti liikkuu kerrallaan kahden alueen verran suuntiin 30° , 90° , 150° , 210° , 270° ja 330° . Mikäli väliin jäävillä alueilla on muita nappuloita, niin lähetti hyppää niiden ylitse. Kuten tornin, niin ei lähetinkään siirtymisaskelien määrää, eikä yhden askelen pituutta ole rajoitettu. Kuvan 94 keskellä olevasta mustasta ympyrästä lähetti liikkuu vihreiden ympyröiden suuntaan, mutta toisin kuin heksagonaalilaudalla (ks. edellä torni ja kuvio 94, oikeanpuoleisin kuva), se voi pysähtyä myös niiden välille.



KUVIO 94 Upseerien sektorit

Ratsu siirtyy kerrallaan kolmen alueen verran suuntiin 20° , 40° , 80° , 100° , 140° , 160° , 200° , 220° , 260° , 280° , 320° , 340° yhden askeleen kerrallaan. Mikäli väliin jäävillä alueilla on muita nappuloita niin *Ratsu* hyppää niiden ylitse. Kuviossa 94 ratsun liikkuminen on kuvattu punaisilla ympyröillä.

Kuningatar liikkuu kuten torni ja lähetti yhdessä. *Kuningas* liikkuu kuten kuningatar, mutta vain yhden alueenmitan kerrallaan.

Linnoittuminen on kuninkaan siirto, jota täydentää tornin siirto. Se lasketaan yhdeksi siirroksi ja on suoritettava seuraavasti: kuningas pysyy paikallaan tai siirtyy samalla vaakatasossa tornin viereen ja sen jälkeen torni siirtyy kuninkaan yli jos kuninkaan toisella puolella oleva alue on vapaa. Linnoittuminen on mahdoton jos jompikumpi osapuolista, kuningas tai kyseinen torni, on jo kertaalleen siirtynyt. Linnoittuminen on tilapäisesti estetty, mikäli kuningas on vastapelaajan nappulan uhkaama.

Sotilas siirtyy vain eteenpäin alueensa verran. Ainoastaan ensimmäinen askel voi olla kahden alueen mittainen, mikäli välialue on täysin vapaa. *Sotilas* lyö alueeltaan suuntiin $\pm 30^\circ$ menosuuntaansa yhden askeleen mitan päähän.

Sotilas, joka uhkaa aluetta, jonka vastapelaajan alkuperäiseltä alueeltaan yhdellä kertaa kaksi askelta edennyt sotilas on sivuuttanut voi välittömästi seuraavalla siirrollaan (ja ainoastaan silloin) lyödä tämän vastapelaajan sotilaan ikään kuin viimeksi mainittu olisi siirtynyt vain yhden askelen. Tätä erikoissiirtoa nimitetään ohesta lyönniksi.

Jokainen sotilas, joka kyennyt etenemään kuuden alueen mittaisen matkan lähtöasemastaan on saman siirron osana vaihdettava heti, ja riippumatta laudalla jäljellä olevista muista nappuloista, samanväriseksi *Kuningattareksi*, *Torniksi*, *Lähetiksi* tai *Ratsuksi* pelaajan valinnan mukaan. Sotilaan kokemaa muodonmuutosta nimitetään korotukseksi. Korotus vaikuttaa välittömästi.

6.4.3 Pelin kulkuun liittyvät säännöt

Avausmenettely. Nappuloiden värit arvotaan. Valkeat nappulat saanut pelaaja tekee ensimmäisen siirron.

Siirto on suoritettu loppuun a) siirrettäessä nappula tyhjälle alueelle, kun pelaaja on päästänyt nappulan irti, b) lyötäessä kun nappula on poistettu pelialueelta ja pelaaja asetettuaan oman nappulansa lyödyn nappulan paikalle on päästänyt siirtämänsä nappulan irti, c) linnoittautumisessa, kun pelaaja on päästänyt irti Kuningaan tai d) korotuksessa, kun sotilas on poistettu pelialueelta ja pelaaja on päästänyt irti uuden, korotetun nappulan.

Kosketettu nappula. Ilmoittamalla etukäteen vastapelaajalle saa siirtovuorossa oleva pelaaja tarkentaa yhden tai useamman nappulan sijaintia. Tavallisimmin tästä ilmoitetaan sanomalla "korjaan". Tätä tapausta lukuun ottamatta siirtovuorossa olevan, joka koskettaa yhtä tai useampaa nappulaa, on suoritettava siirtonsa siirtämällä tai lyömällä ensimmäinen kosketettu nappula, joka on siirrettävissä tai lyötävissä.

Shakki, matti ja patti. Kuningas on shakissa, kun sen alue on vastapelaajan nappulan uhkaama. Vastustajan sanotaan tällöin shakkaavan. Shakki on torjuttava välittömästi seuraavalla omalla siirtovuorolla seuraavalla siirroilla a) siirtämällä Kuningas alueelle, jossa se ei ole uhattuna, b) lyömällä shakkaava nappula tai c) siirtämällä jokin nappula shakkauslinjalle. Ellei shakkia voida torjua, Kuningas on "matti". Matin tehnyt pelaaja on voittaja. Peli päättyy tasapeliin kun: a) Siirtovuorossa olevan pelaajan Kuningas ei ole shakissa, mutta tämä pelaaja ei voi tehdä mitään sääntöjen mukaista siirtoa (tilanne on "patti"); b) Molempien pelaajien siitä sopiessa.

Sääntöjen vastaisuuksia. Jos pelin kestäessä todetaan että jokin siirto on suoritettu sääntöjen vastaisesti, asema on palautettava sellaiseksi kuin se oli ennen siirron suorittamista. Ellei asemaa voida palauttaa, peli on mitätön ja uusi peli on pelattava. Jos pelin kestäessä yksi tai useampi nappula on vahingossa sijoitettu väärin eikä asema ole palautettavissa oikeaksi, on peli samoin mitätön. Niin myös jos pelin kestäessä todetaan että nappuloiden alkuasema oli virheellinen.

Siirtojen algebrallinen merkitsemistapa. Nappulat merkitään alkukirjaimilla: Kuningas K, Kuningatar D, Torni T, Lähetti L, Ratsu R ja sotilas S. Nappuloiden liikkeet ilmoitetaan suuntina ja siirron pituutena. Pituusyksikkönä käytetään vyöhykkeen lävistäjää. Vyöhyke on esitetty kuviossa 92. Ratsun ja sotilaan kohdalla ei matkan pituutta merkitä, paitsi siinä erityistapauksessa, jossa sotilas liikkuu kaksi askelta. Esimerkiksi T90,5 tarkoittaa, että torni liikkuu 5 askelta suuntaan 90°. R80 tarkoittaa, että ratsu liikkuu suuntaan 80°.

Seinäversio ilman suunninta

Seinäversiossa nappulat on kiinnitetty pelialustaan magneeteilla tai jollain muulla menetelmällä. Pelialustana käytetään tasaista metallilevyä, johon on merkitty ympyrän muotoisen pelialueen koko. Pelialusta asetetaan riippumaan pystysuoraan asentoon esimerkiksi seinää vasten. Pelinappuloiden pohjissa on magneetit ja nappuloiden asettaminen pelialustalle tapahtuu sääntöjen yhteydessä selvitetyllä tavalla eli kuten kuviossa 90 on esitetty. Valkoiset nappulat ovat alhaalla ja Mustat ylhäällä.

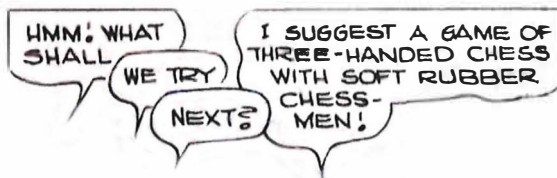
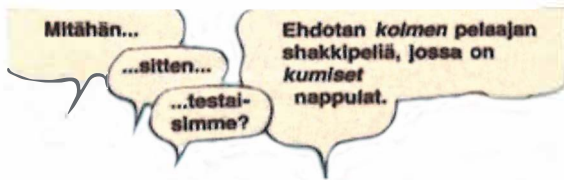
Nappulan paikan määrittäminen tapahtuu nappulan pohjan yläpinnalle merkittyjen suuntien mukaan. Pelin alussa nappulan suunnistus tarkennetaan kääntämällä nappula asentoon jossa ns. perussuuntaviiva (kuviossa 95 nuolen osoittama viiva x) osoittaa suoraan alaspäin. Näin on mikäli vapaasti riippuva, nappulan juuressa olevaan pyörivään renkaaseen kiinnitetty suuntausnauha on täsmälleen perussuuntaviivan kohdalla.

Tämän jälkeen nappulan siirto tapahtuu kääntämällä suuntausnauhaa valittuun liikesuuntaan ja lukemalla nappulan siirtymämatka suuntausnauhaan asetetulta asteikolta. Nauhan pituus on Lähetillä, Tornilla ja Kuningattarella 10 alueen mittaa, Ratsulla 3 alueen mittaa ja muilla nappuloilla 2 alueen mittaa. (Kyppö 1997)

6.5 Yhteenveto

Tässä luvussa on käsitelty sitä kuinka ajatus universaalien shakin mallista lähti alun alkaen liikkeelle ja kuvailtu erityisesti ajatuksen seurauksena syntynyt yhtä konkreettista tulosta, kolmenpelaajan shakkipeliä, joka nimettiin kolmishakiksi (trichess). Luvussa on selvitetty pelin syntyyn johtanutta päättelyketjua sekä sen lopputuloksena syntynyt peli. Luvun alkuosassa on käsitelty myös klassinen ratsun polun ongelma, koska se liittyi keskeisesti kolmishakin syntyyn. Lisäksi luvussa on esitelty kaksi muuta saman ajatuksen pohjalta syntyneitä pelejä, patentoitu laudaton shakki ja epäsymmetrinen neljän pelaajan shakki. Nämä tämän luvun kaikki pelit oli kehitelty ennen tätä tutkielmaa.

Kuten aiemmissa luvuissa on jo käynyt ilmi, täysin uusia asioita on todella vaikea keksiä. Näin on ollut myös kolmishakin kohdalla. Tästä esimerkiksi käy vaikkapa 1000-luvulla syntynyt kiinalainen kolmen pelaajan shakki, joka esiteltiin 5. luvussa. Tähän yhteenveto-osaan voidaan lisätä vielä kuva, joka osoittaa, että jopa kuuluisan Walt Disneyn legendaarinen sarjakuvapiirtäjä ja Aku Ankan hahmon luoja, Carl Barks, on aikoinaan 1940-luvulla ajatellut asiaa (kuvio 95). Suomessa kuvan tarina on julkaistu lehdessä kahdesti, alkuperäinen USA:ssa vuonna 1947. Peliin asti tämä idea ei johtanut, mutta osoittaa kuinka monet ideat on ainakin joku ajatellut joskus. Tieteen teossa kestää joskus pitkään ennen kuin pääsee rannalle, jota kukaan ei ole koskaan edes ajatellut olevan olemassa.



KUVIO 95 Kolmen pelaajan shakki ja Carl Barks

Tekijänoikeudellisista syistä kuviosta on poistettu Carl Barksin piirroksiset.

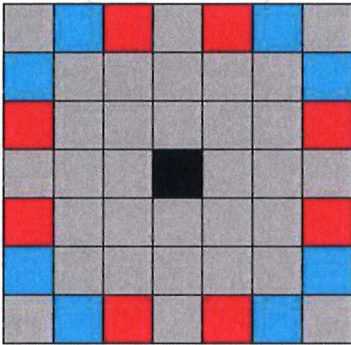
7 UNIVERSAALIN SHAKIN LAAJENNUS

Tässä luvussa laajennetaan ensin (aliluvussa 7.1) neliöruutuista shakkia laudan koon mukaan, sitten (aliluvussa 7.2) kuutio ja hyperkuutiopohjalta eri ulottuvuuksissa ja lopuksi (aliluvussa 7.3) tutkitaan muihin kuin neliöruutuihin tai heksagoniruutuihin pohjautuvia pelimalleja.

Kaikki tämän luvun kehittämät ovat tekijän omia, lähdeviitteet on lisätty kohtiin, joissa on hyödynnetty muualta saatua tietoa. Osa tässä luvussa olevista kehitelmistä on aiemmin ollut esillä julkisessa tilaisuudessa, julkaistu tai patentoitu. Aiemmin julkaisemattomat kehittämät käsitellään seuraavassa luvussa 8.

7.1 Shakin laajennus laudan koon mukaan tasopinnalla

Ensimmäinen neliöruutulajennus yleistää upseerityyppien lukumäärän ja siihen liittyen laudan koon. Keskuruudun (linnakkeen) ympärillä olevien vyöhykkeiden määrän kasvaminen johtaa yhä uusien upseerityyppien syntymiseen. Esimerkiksi jos neliöruutuiseen malliin lisätään kolmas vyöhyke, niin upseerien määrä nousee kahdella ja pelialusta kasvaa 144 ruutuiseksi. Tämä johtuu siitä, että kolmannen vyöhykkeen myötä tulee kaksi uutta upseerityyppiä, joiden siirtymisruutuja keskuruudusta on kuviossa 96 merkitty sinisillä ja punaisilla ruuduilla. Kaikkien eri upseerityyppien määrä pidetään parillisena, kuten tavallisessakin shakissa, minkä vuoksi takarivin, jonne upseerit on sijoitettu, pituus kasvaa 8:sta 12:een ja tämän seurauksena koko laudan koko on siis $12 \times 12 = 144$ ruutua. Nämä uudet upseerit nimetään aliluvussa 7.1.1.



KUVIO 96 R₃₂ (sininen) ja L₃₁ (punainen) 3. puolustusvyöhykkeellä

Merkitään upseerien liikkeitä koordinaatteina siten, että keskuslinnakeruudun koordinaatti on (0,0) ja koordinaatissa (x,y) ensimmäinen parametri x on etäisyys keskusruudusta ylöspäin pystysarakkeen suuntaan ja y on etäisyys keskusruudusta vaakatasossa rivien suuntaan oikealle. Uudet upseerit liikkuvat ratsun tavoin, mutta pidemmälle eli lähtökoordinaatista (0,0) ruutuuihin (3,1) ja (3,2). Tällä esitystavalla perinteisen shakin ratsu päättyy ruutuun (2,1).

Seuraavissa laajennuksissa tapahtuu muitakin muutoksia, kuin pelialustan kasvu ja upseerityyppien luku lisääminen. Ne noudattavat kuitenkin samaa logiikkaa, jonka pohjalta voidaan määritellä yleispätevät, abstraktit, säännöt universaalille shakille. Säännöt, joiden logiikka toimii myös perinteisessä shakissa. Edelleen sääntöjen pohjalta voidaan rakentaa yleinen algoritmi ja edelleen yksi tietokoneohjelma, joka toimii kaikissa universaalien shakin variaatioissa. Seuraavissa luvuissa on pelimalleja esitelty ensimmäisellä *universaalista shakista tehdyn peliohjelman*⁴⁴ kuvilla (kuviot 98, 101-104, 107 ja 110, oikealla).

7.1.1 Suurikokoiset shakkipelit neliöruutuisilla tasoilla

Seuraavaksi määrittelemme muutamia uusia käsitteitä.

Kun pelilautojen kokoja laajennetaan, niin samalla luodaan uusia upseerityyppejä, jotka kattavat suuremman puolustusalueen. Pelilauta voidaan myös muuntaa useampi ulotteiseksi. Shakkinnappulat voidaan luokitella siten, että ne, jotka liikkuvat samanvärisillä ruuduilla ovat *hyperlähettejä*, kun taas ruudun väriä liikkuessaan vaihtamaan voivat nappulat ovat *hyperratsuja*. Tämän vuoksi tavallisella kaksiulotteisella 8x8 laudalla liikkuva torni on näiden määritelmien pohjalta hyperratsu.

⁴⁴ Mika Vesterholm 1998

Annetaan upseereille yleisnimitys *hyperupseerit*. Kaksiulotteisilla neliöruutu-
laudolla olevia hyperupseereista erotetaan siis kaksi eri upseerityyppiä, hyper-
lähetit ja hyperratsut, jotka eroavat toisistaan edellä kerrotulla tavalla. Tavalli-
sessa 8×8 ruudun shakissa on vain yksi hyperlähetti eli perinteisen shakin lähet-
ti. Ratsu ja myös torni taas ovat hyperratsuja.

Laudan koon kasvaessa otetaan käyttöön *upseerien liikkumissääntö*: uudet hyper-
upseerit liikkuvat pelialustalla, jossa ne ensimmäisen kerran otetaan mukaan
upseerien joukkoon, vain yhden askelen kerrallaan, mutta kaikki muut hyper-
upseerit voivat liikkua niin pitkälle kuin pääsevät omaa sektoriaan pitkin (ku-
vio 97).

Näin ollen esimerkiksi ratsumies voi 12×12 -laudalla ja sitä suuremmilla alustoilla
liikkua niin pitkälle suuntaansa kuin pääsee. Siis aivan kuin lähetti perinteisessä
shakissa, mutta suuntaan $(2n, 1n)$. Ratsun liikesuuntaa isommilla laudoilla osoit-
taa suora numero 3 kuviossa 97.

Hyperlähettien ja -ratsujen siirrot määritellään kaksiulotteisilla neliöruutuisilla
laudolla lisäämällä uusi upseeri jokaiselle uudelle puolustusvyöhyketasolle.
Uuden puolustusvyöhykkeen lisääminen kasvattaa samalla neliöruutulaudan
kokoa. Perinteisen 64 -ruutuisella laudalla on puolustusvyöhyketasoja kaksi,
ensimmäisen peittävät torni ja lähetti, kolmannen ratsumies. Upseerit, jotka ovat
kulloisenkin laudan uloimmalla puolustusvyöhykkeellä, liikkuvat vain askeleen
kerrallaan määritettyyn suuntaansa. Alemmilla puolustusvyöhyketasoilla ole-
vat upseerit taas voivat siis liikkua määritettyyn suuntaansa annetulla peli-
laudalla niin pitkälle kuin sektorilla ei ole muita nappuloita. Suunnat on annet-
tu (x, y) -koordinaatteina xy -koordinaatistossa akselien $x=0$ ja $y=x$ välillä eli
kuviossa 97 suorien numerot 1 ja 2 välillä. Hyperupseerit merkitään lyhenteillä
 R_{xy} ja L_{xy} , missä R tarkoittaa hyperratsua, L tarkoittaa hyperlähettiä ja lukupari
 xy ensimmäistä askelta xy -koordinaatistossa eli y siirrettyjen ruutujen määrä
ylös y -akselin suuntaan ja x siirrettyjen ruutujen määrä oikealle, x -akselin suun-
taan. Summa $x+y$ on hyperläheteille aina parillinen ja hyperratsuille pariton.
Tällöin esimerkiksi perinteisen shakin ratsumies on R_{21} . Liikesuunta esittää siis rat-
sumiehen liikettä annetulla akselivälillä $x=0$ ja $y=x$, mutta liikesuunnat ovat symmet-
riset koordinaatiston $(0,0)$ -pisteen suhteen. Eli perinteinen ratsumies on R_{xy} , missä $x =$
 ± 1 tai ± 2 , $y = \pm 1$ tai ± 2 ja $|x+y| = 3$. Ratsulla liikesuuntia on 8 eli R_{21} , R_{12} , $R_{2,-1}$, $R_{1,-}$
 2 , $R_{-1,-2}$, $R_{-2,-1}$, $R_{-2,1}$ ja $R_{-1,2}$. Seuraavassa on listattuna esimerkin vuoksi kuuden
ensimmäisen tason hyperupseerien liikkumissuunnat.

Taulukko 3 Puolustusvyöhykkeet I-VI

Oheisella listalla perinteinen Ratsu on R_{21} , Torni on R_{10} ja Lähetti on L_{11} .

Puolustusvyöhyke I (2 ensimmäistä upseeria, Torni ja Lähetti)

R_{10} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (1,0) ... (n,0),

L_{11} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (1,1) ... (n,n)

Puolustusvyöhyke II (1 uusi upseeri, Ratsu)

R_{21} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (2,1) ... (2n,n)

Puolustusvyöhyke III (2 uutta upseeria)

L_{31} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (3,1) ... (3n,n),

R_{32} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (3,2) ... (3n,2n)

Puolustusvyöhyke IV (2 uutta upseeria)

R_{41} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (4,1) ... (4n,n),

R_{43} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (4,3) ... (4n,3n)

Puolustusvyöhyke V (4 uutta upseeria)

L_{51} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (5,1) ... (5n,n),

R_{52} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (5,2) ... (5n,2n)

L_{53} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (5,3) ... (5n,3n),

R_{54} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (5,4) ... (5n,4n)

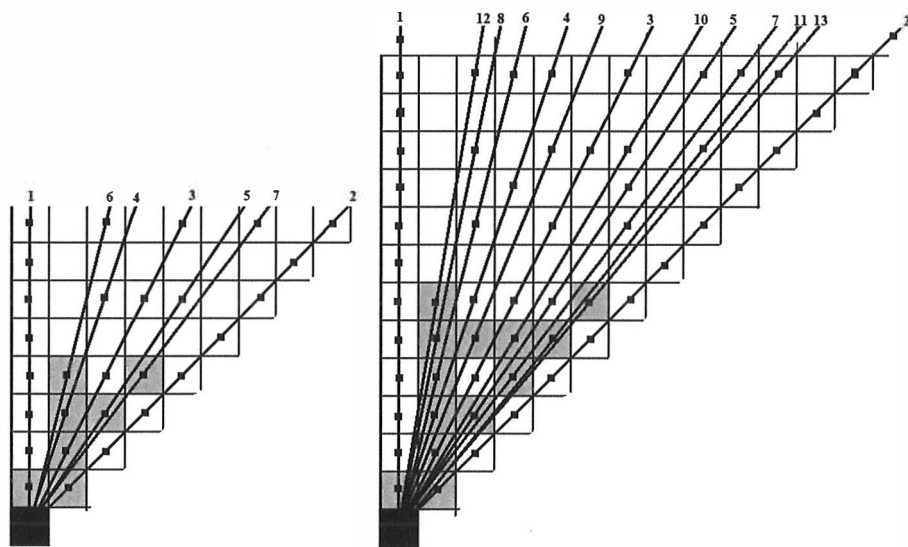
Puolustusvyöhyke VI (2 uutta upseeria)

R_{61} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (6,1) ... (6n,n),

R_{65} voi siirtyä alkuruudusta (0,0) ruutuihin (6,5) ... (6n,5n).

Kuviossa 97 on edellä esiteltujen hyperupseerien liikesuunnat numeroitu seuraavasti.

1 = R_{10} , 2 = L_{11} , 3 = R_{21} , 4 = L_{31} , 5 = R_{32} , 6 = R_{41} , 7 = R_{43} , 8 = L_{51} , 9 = R_{52} , 10 = L_{53} , 11 = R_{54} ,
12 = R_{61} , ja 13 = R_{65} .

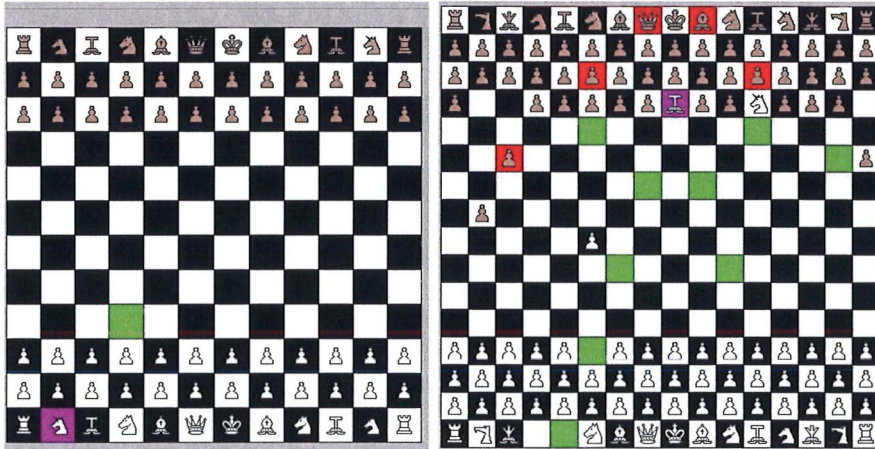


KUVIO 97 Hyperupseerien liikeradat kun tasoja on neljä ja kuusi

Kun lähdetään kokoamaan suurempia pelilautoja upseerien lukumäärän kasvaessa ja puolustusvyöhykkeiden lisääntyessä, niin noudatetaan seuraavia kokoamissääntöjä. Lautojen koko kasvaa uusien upseerien määrän mukaan, siten laudan koko on aina $N^2 = (2k + 2)^2$, missä k on upseerien lukumäärä. Upseerit sijoittuvat aina takariville siten, että kuningas ja kuningatar ovat keskellä samoin kuin perinteisessä shakissa, jossa Valkoinen kuningatar on valkoisella ruudulla ja Musta kuningatar sitä vastapäätä toisessa päädyssä. Kuninkaan ja kuningattaren vasemmalla ja oikealla puolella ovat lähetit. Tornit on sijoitettu takarivin nurkkiin. Lähetistä tornin suuntaan sijaitsevat muut upseerit puolustusvyöhykejärjestyksessä eli ensin ratsu, sitten 4. vyöhykkeen uudet upseerit ja niin edelleen. Viimeksi lisätyt upseerit liikkuvat laudalla aina vain askeleen kerrallaan, muut voivat liikkua kulkulinjaansa niin pitkälle kuin vapaita ruutuja on. Sotilasrivien määrä kasvaa joka kerta laudan koon kasvaessa siten, että pelilaudan ruuduista on aina 50% vapaina. Tällöin $N \times N$ kokoisella laudalla on kummallakin pelaajalla $(N/2 - 2)/2 = N/4 - 1$ sotilasriviä eli $N \times (N/4 - 1)$ sotilasta. Perinteisessä shakissa siis $8 \times (8/4 - 1) = 8$ sotilasta, kuten pitääkin. Laudan kasvaminen huomioidaan sotilaan alkuaskelella, joka saa olla laudan puoliväliin saakka, näin peli pysyy toiminnallisena ja sääntö toimii myös perinteisessä shakissa. Näin ollen perinteisen shakin alkuaskel voi olla pituudeltaan enimmillään 2, 12×12 laudan alkuaskel enimmillään 3, 16×16 laudan alkuaskel enimmillään 4 ja niin edelleen laudan koon kasvaessa. Kaikki muut säännöt ovat samat kuin perinteisessä shakissa.

Oheissa (kuviot 98 ja 99) on konkreettiset esimerkit 12×12 ja 16×16 ruutuisista pelilautoista. Vasemman kuvan 12×12 laudalla nappulat ovat alkuasetelmassa ja kuvassa on esitetty hyperratsun R_{32} liikkumismahdollisuus alkuasetelmasta

vihreän ruudun avulla. Oikeanpuoleisessa kuvassa on hyperlähetti L_{31} irtaantunut vastustajan puolelle (violettinen ruutu ylhäältä 4. rivissä) ja värilliset ruudut kuvaavat ruutuja, joihin se voisi seuraavaksi siirtyä. Näistä vihreät ruudut ovat vapaita ja punaisilla on vastustajan nappula, joka luonnollisesti on siis mahdollista syödä.



KUVIO 98 Vasemmalla R_{32} 12x12 laudalla, oikealla L_{31} 16x16 laudalla

Kuudella ensimmäisellä puolustusvyöhyketasolla upseerien lukumäärä kasvaa siis seuraavasti: 2, 1, 2, 2, 4 ja 2 eli yhteensä 13 uutta upseeria. Upseerien määrän kasvulle ei ole selkeää kaavaa, mutta luonnollisesti tason k ollessa alkuluku, tulee uusia upseereja $k-1$ kappaletta sillä alemman tason upseerien liikesuunnan monikerta on aina jaollinen luku. Jos tason luku k , on alkuluku, niin kaikki tämän tason upseerityypit ovat uusia.



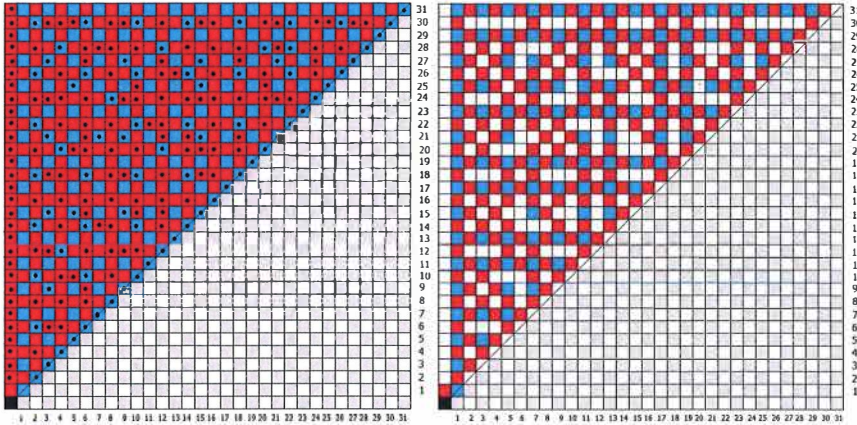
KUVIO 99 Neliöruutuinen 16x16 shakki

Seuraavassa on (taulukko 3) listattuna 31 alimman puolustusvyöhyketason upseerityyppien lukumäärät. Sivuhuomiona voidaan todeta, että tasoa kaksi lukuun ottamatta upseerien määrä näyttää kasvavan aina parillisella luvulla ja tasolle 9 saakka upseerien yhteismäärä on aina alkuluku kattaen 10 ensimmäisestä alkuluvusta 9, vain luku 17 puuttuu. Mielenkiinnon vuoksi alkuluvut on lihavoitu taulukossa. Kumpaankaan asiaan ei kuitenkaan puututa tässä tutkimuksessa, vaan kirjataan asiat huomioina. Laudan leveys on siis aina $2k + 2$, missä k on upseerien lukumäärä (taulukossa summa).

Taulukko 4 Upseerityyppien lukumäärän kasvu 31. tasolle saakka

Taso	Uusia	Ratsut	Lähetit	Summa	Laudan leveys
1	2	1	1	2	6
2	1	1	0	3	8
3	2	1	1	5	12
4	2	2	0	7	16
5	4	2	2	11	24
6	2	2	0	13	28
7	6	3	3	19	40
8	4	4	0	23	48
9	6	3	3	29	60
10	4	4	0	33	68
11	10	5	5	43	88
12	4	4	0	47	96
13	12	6	6	59	120
14	6	6	0	65	132
15	8	4	4	73	148
16	8	8	0	81	164
17	16	8	8	97	196
18	6	6	0	103	208
19	18	9	9	121	244
20	8	8	0	129	260
21	12	6	6	141	284
22	10	10	0	151	304
23	22	11	11	173	348
24	8	8	0	181	364
25	20	10	10	201	404
26	12	12	0	213	428
27	18	9	9	231	464
28	12	12	0	243	488
29	28	12	0	271	544
30	8	8	0	279	560
31	30	15	15	309	620

Kuviossa 100 on upseerien määrän kasvu esitetty graafisesti 31. tasolle saakka. Siniset ruudut ovat hyperlähettejä ja punaiset ovat hyperratsuja. Ruudut, joille ei enää aseteta uusia upseereja koska alemman tason upseerit peittävät nämä ruudut, ovat oikeanpuoleisessa kuvassa valkoisia. Toisin sanoen oikeanpuoleisessa kuvassa jokainen värillinen ruutu edustaa yhtä uutta upseeria. Vasemman puoleisessa kuvassa on valkoisiin ruutuihin lisätty väri ja musta piste keskelle. Väri kuvaa sitä peittääkö ruudun hyperratsun vai hyperlähetin liikesektori.



KUVIO 100 Graafinen esitys upseerien lukumäärän kasvusta

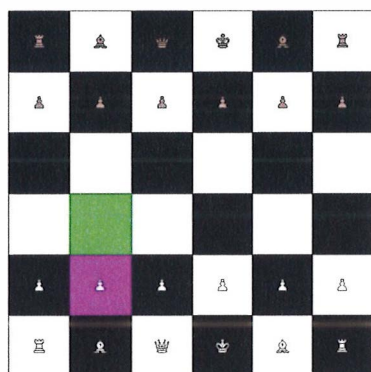
7.1.2 Yleistetyt pienet shakkipelit neliöruutuisilla tasoilla

Shakkipeliä voidaan yleistää myös yksinkertaisempaan suuntaan samoin periaattein kuin sitä voidaan laajentaa suuremmaksi. Perinteisen shakin 8x8 ruutuinen lauta syntyi siis universaalin shakin kokoamisperiaatteen pohjalta siten, että neljä kahden puolustusvyöhykkeen aluetta kooltaan 5x5 ruutua yhdistettiin limittäin toisiinsa. Limittäminen tapahtui siten, että vyöhykkeet leikkasivat toisensa, mutta keskusruudut jäivät leikkauksen ulkopuolelle (kuva 70, aliluvussa 6.1.2). Näistä kahdesta vyöhykkeestä, ensimmäinen, sisempi, määritteli tornin ja lähetin, toinen ratsun. Kun siirryttiin suurempiin pelilautoihin, niin jokaisen vyöhykkeen lisäys toi uusia upseereita, joiden lukumäärä määräsi laudan koon.

Pikkushakki

Kun toinen vyöhyke jätetään pois, niin saadaan 3x3 ruudukko. Kun ruudukot limitetään toistensa kanssa samoin kuin edellä tehtiin (kuvio 72), niin syntyy 5x5 kokoinen shakkilauta. Universaalin shakin kokoamisperiaate määrittelee kuitenkin laudan koon upseerien määrän mukaan siten, että jokaista upseeria on pelissä kaksi kappaletta. Ensimmäisellä vyöhykkeellä ovat torni ja lähetti eli

kaksi upseerityyppiä ja neljä upseeria, joten laudan koko on siis $(2k + 2)^2 = 6 \times 6 = 36$ ruutua. Laudalle sijoitetaan samat nappulat kuin shakissakin sillä erotuksella, että Ratsu siis puuttuu vielä upseereista, sotilaita on kuusi eikä niillä ei ole alussa mahdollisuutta kahden ruudun askeleeseen (kuvio 101). Näin pienellä laudalla ei sotilasrivien lukumäärää koskevaa kaavaa $N/4 - 1$ enää sovelleta, kuten suurten lautojen kohdalla edellisessä kappaleessa, koska sotilaita on oltava vähintään yksi rivi. Tämä kaava antaisi sotilasrivien määräksi vain puoli riviä eli kolme ruutua. Myös vapaiden ruutujen määrä laskee edellisestä johtuen 33%:iin. Alkuaskelsääntö laudan puoliväliin saakka on sen sijaan voimassa eli sotilas saa ottaa pelissä korkeintaan yhden askeleen.



KUVIO 101 Pikkushakin alkuasetelma

Tämän tyyppinen peli soveltuu hyvin opetuskäyttöön kun halutaan opastaa shakin pelaamiseen. Lähetti ja torni liikkuvat aivan kuten perinteisessä shakissa eli pitkiä linjoja. Tämä on järkevää pelin opetuskäytön ja pelattavuuden vuoksi, vaikka edellisessä aliluvussa 7.1.1 mainitun upseerien liikkumissäännön mukaan, niiden tulisi liikkua vain yksi ruutu kerrallaan. Tällaisen pelin kestoaika on kokemukseräisesti noin 15 - 20 minuuttia. Lisähuomiona voidaan mainita, että pelin alussa on Valkoisella mahdollisuus kahden siirron mattiin, mikäli Valkoinen avaa siirtämällä kuninkaan edessä olevan sotilaan ja Musta erehtyy avaamaan mustalla ruudulla olevan lähetin edessä olevalla sotilaalla. Seuraava siirto johtaa mattiin kun Valkoisen kuningatar siirtyy laudan oikeaan laitaan.

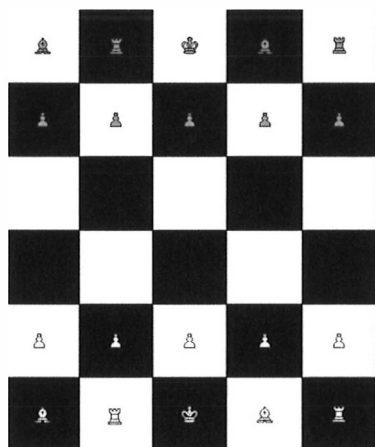
Primitiiviset shakkipelit

Shakkipeljä voidaan edelleen yksinkertaistaa pikkushakkiakin pienemmiksi, mutta silloin joudutaan joustamaan lisää universaalin shakin mallista. Näitä pienimpiä pelejä kutsutaan tässä yhteydessä nimellä *primitiiviset shakkipelit*. Niiden mallintaminen on mielekästä kolmesta syystä. Pelejä voidaan käyttää opetustarkoitukseen, niitä voidaan käyttää oppimisen tutkimiseen ja niiden kohdalla on pelien pienen koon vuoksi mahdollista kartoittaa kaikki mahdolliset pelistrategiat. Tätä puolta asiasta käsitellään vielä uudelleen tämän tutkiel-

man luvussa 9, joka on samalla tutkielman viimeinen luku. Pelistrategioiden kartoittamista taas voidaan myöhemmin käyttää pohjana kun pyritään selvittämään monimutkaisempien pelien strategioita, koska niiden strategiaverkoissa toistuu samanlaisia rakenteita.

Käydään seuraavaksi läpi primitiiviset shakkipelit suurimmasta pienimpään. Kaikkein yksinkertaisimmat primitiiviset shakkipelit ovat soveliaita jopa 3-5 vuoden ikäisille lapsille, jopa kaksivuotiaille.

Pikkushakista seuraava on primitiivinen 5x6 shakkipeli. Primitiivisessä 5x6 shakkipelissä on laudalle, jonka koko on 5x6 ruutua, on kummallakin pelaajalla kuningas, kaksi tornia, kaksi lähettiä ja viisi sotilasta (kuvio 102). Näille nappuloille säännöt aivan samat kuin shakissa, paitsi että sotilaalla ei ole alussa mahdollisuutta kahden ruudun askeleeseen samoin kuin pikkushakissa. Sotilas voi korottua torniksi tai lähetiksi.



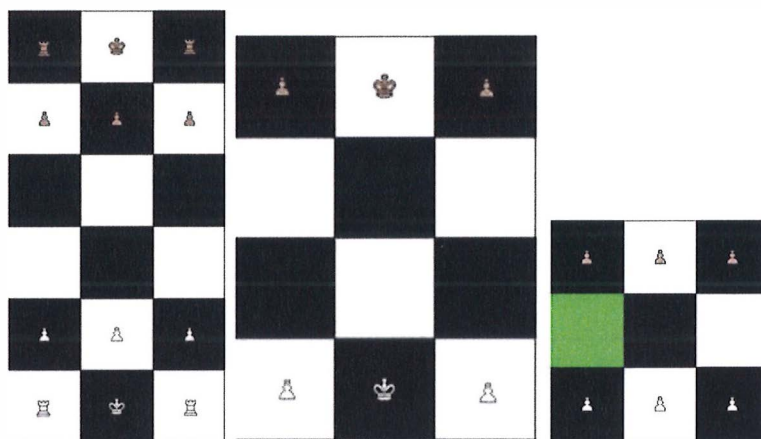
KUVIO 102 Primitiivinen 5x6 shakkipeli, alkuasetelma

Primitiivisessä 3x6 shakkipelissä (kuvio 103) on laudalle, jonka koko on 3x6 ruutua, on sijoitettu kummallekin pelaajalle kuningas, kaksi tornia ja kolme sotilasta. Näille nappuloille säännöt aivan samat kuin shakissa, paitsi että sotilaalla ei ole alussa mahdollisuutta kahden ruudun askeleeseen. Sotilas voi enää korottua torniksi.

Seuraavissa vielä pienemmissä peleissä tulee yksi varsin olennainen sääntömuutos, jotta niitä olisi mielekästä pelata. Näissä peleissä sotilaat voivat korottua kuninkaiksi, joten yhdellä pelaajalla voi olla useampia kuin yksi kuningas.

Primitiivisessä 3x4 shakkipelissä on laudalle, jonka koko on 3x4 ruutua, on kummallakin puolelle kuningas ja sen vierellä kaksi sotilasta (kuvio 103). Sotilaat voivat korottua kuninkaiksi saavutettuaan vastalaidan ruudut.

Primitiivisessä 3x3 shakkipelissä on laudalle, jonka koko on 3x3 ruutua, on sijoitettu 3 valkoista ja 3 mustaa nappulaa. Nappulat liikkuvat samoin kuin sotilas shakissa ja kaikki nappulat voivat siis korottua kuninkaiksi saavutettuaan vastalaidan ruudut. Oheisessa kuviossa 103 ovat primitiiviset shakkipelit 3x6, 3x4 ja 3x3 alkuasetelmissään. Kuvassa vihreä ruutu kertoo minne vasemmanpuoleisin valkoinen sotilas on siirtymässä.

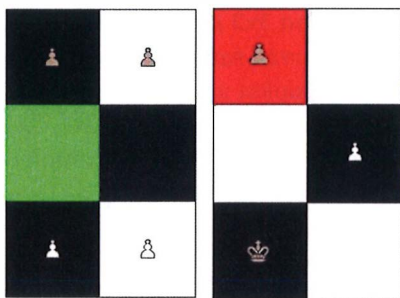


KUVIO 103 Primitiiviset shakkipelit kokoa 3x6, 3x4 ja 3x3, alkuasetelmat

Pelien kulku eroaa shakista paitsi sillä, että kuninkaita voi pelin jossain vaiheessa olla samalla pelaajalla useampikin, mutta eroa on myös pelin päättymisen osalta. Pelin häviää pelaaja, joka menettää kaikki nappulansa tai ei voi omalla siirtovuorolla enää siirtää yhtään nappulaa. Kuninkaitahan ei saa siirtää uhattuun ruutuun. Peli päättyy tasan kun kumpikin pelaaja voi liikuttaa nappuloitaan, mutta siirrot toistuvat loputtomasti.

Lopuksi vielä peleistä kaikkein yksinkertaisin eli *Primitiivinen 2x3 shakkipeli*. Tässä pelissä on laudalle, jonka koko on 2x3 ruutua, on sijoitettu kaksi valkoista ja kaksi mustaa nappulaa. Nappulat liikkuvat samoin kuin sotilas shakissa ja molemmat nappulat voivat korottua kuninkaiksi saavutettuaan vastalaidan ruudut. Muutoin kuningasta koskevat samat säännöt kuin tavallisesakin shakissa sekä liikkumisen suhteen, että kiellolla siirtyä uhattuun ruutuun.

Peliä esittävässä kuvassa (kuvio 104) on vasemmalla alkuasetelma (Valkoisen sotilas on siirtymässä vihreään ruutuun) ja oikealla pelitilanne, jossa Mustan toinen sotilas on korottunut kuninkaaksi ja Valkoinen uhkaa (punainen ruutu) siirtovuorollaan Mustan sotilasta.



KUVIO 104 Primitiivinen 2x3 shakkipeli, alkuasetelma ja eräs pelitilanne

Yhteenveto primitiivisten shakkipelien säännöistä

Laudalle, jonka koko on 6 ruutua (Primitiivinen 2x3 shakkipeli) (kuvio 104) tai 9 ruutua (Primitiivinen 3x3 shakkipeli) (kuvio 103, oikealla) tai suurempi, on sijoitettu valkoiset ja mustat nappulat kumpaankin pätyyn siten, että eriväristen nappuloiden väliin jäävät tyhjät ruudut. Nappulat liikkuvat yhden askelen eteenpäin ja voivat syödä vastustajan nappulan viistosti samanvärisestä ruudusta. Perusnappula ei voi liikkua taaksepäin. Jos nappula tavoittaa jonkin laudan vastapäin ruudun, niin se korottuu kuninkaaksi. Samalla pelaajalla voi olla useampikin kuningas. Kuningas saa liikkua kaikkiin suuntiin, myös viistoon, yhden askelen. Kuningas ei saa mennä ruutuun, jossa se voitaisiin syödä.

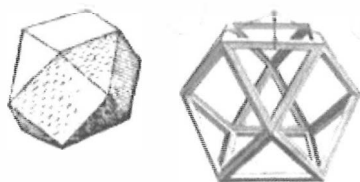
Pelin häviää se pelaaja, joka menettää kaikki nappulansa tai ei voi omalla siirtovuorolla enää siirtää yhtään nappulaa. Kuninkaita ei siis saa siirtää uhatuun ruutuun. Peli päättyy tasan kun kumpikin pelaaja voi siirtää nappuloitaan, mutta siirrot toistuvat loputtomasti. "Loputtomasti" voidaan määritellä erikseen esimerkiksi kahdeksi tai kolmeksi siirroksi. Helpointa tämä on todeta pelin tietokoneversioissa. Tasapeliasetelmat näkyvät peliä kuvaavassa strategiaverkossa silmukoina.

Kyseessä on siis erittäin pienimuotoinen "shakki", jossa kummallakin pelaajalla on vain kaksi tai kolme sotilasta. Säännöissä erona shakkiin on ainoastaan korottuminen - kumpikin sotilas voi korottua kuninkaaksi - sekä päätyminen mattiin myös siinä tapauksessa kun pelaaja ei voi siirtää nappulaansa.

7.2 Shakin laajennus ulottuvuuteen N

Siirryttäessä kolmanteen ulottuvuuteen huomataan, että mahdollisuudet tasaiseen täyttämiseen, erilaisilla tilanmuodoilla, ovat vähäisemmät tilan kuin tason suhteen. Näin siksi, että tasolla säännöllisiä monikulmioita on ääretön määrä ja niistä sellaisia, jotka voitiin valita tasaiseen täyttämiseen, on kolme eli kolmio,

neliö ja kuusikulmio. Sen sijaan kolmannessa ulottuvuudessa säännöllisiä monitahokkaita on vain äärellinen määrä eli viisi Platonin kappaletta, tetraedri, kuutio, oktaedri, ikosaedri ja dodekaedri. Näistä vain kuutio täyttää tilan tasaisesti. Kuten tasolla, niin on kolmiulotteisessa tilassakin mahdollista löytää erilaisia säännöllisten monitahokkaiden kombinaatioita, jotka jakavat tilan jättämättä väliin tyhjää tilaa. Tarkalleen ottaen näitä on viisi erilaista: kuutiot, kahden tetraedrin ja kahden oktaedrin yhdistelmä, tetraedrin ja kolmen kärjestään katkaistun (truncated) tetraedrin yhdistelmä, kolmen kärjestään katkaistun oktaedrin yhdistelmä, tai oktaedrin ja cuboctaedrin yhdistelmä (Ball & Coxeter 1987). Cuboctaedri on monitahokas, joka koostuu kahdeksasta kolmiosta ja kuudesta neliöstä, ja jonka 12 kärkipisteessä kohtaa kaksi kolmiota ja kaksi neliötä. Kuviossa 105 on kaksi hyvin vanhaa piirrosta tästä monitahokkaasta. Piirroksot ovat tehneet Pappus ja Leonardo da Vinci (Hisarligil 2012). Tällöin kyse ei kuitenkaan ole täyttämisestä pelialustalle tarkoitetun rakenteen mukaan, mikä kolmanteen ulottuvuuteen sovellettuna tarkoittaa sitä, että kaikkien monitahokkaiden on oltava identtisiä, jokaisen tahkon tulee koskettaa samaa määrää muita tahkoja (yleensä yhtä) ja jokaisen kärkipisteellä on oltava sama asteluku. Näin ollen ainoa vaihtoehto on täyttää tila kuutioilla, koska kuutio on ainoa säännöllinen monitahokas, joka voi täyttää kolmiulotteisen tilan säännöllisesti.



KUVIO 105 Cuboctaedri

Kuution ympärillä olevat puolustusvyöhykkeet tehdään samalla tavoin kuin kuin tehtiin neliön ympärille kaksiulotteisella tasolla. Kun rakennetaan ensimmäinen puolustusvyöhyke, niin 26 kuutiota ympäröimään yksi kuutio. Tämä on helppo todet sillä jos kuution jokaisella puolella, siis jokaista tahkoa ja kulmapistettä vastaan, on toinen kuutio, niin kuutioita on silloin $3 \times 3 \times 3 = 27$ kpl ja näin ollen keskuskuutio poislukien 26 kuutiota. Huomataan, että kun yhden keskuskuution (linnake) ympärille levitetään vyöhyke, niin tällä 26-kuutioisella vyöhykkeellä on jo kolme eri upseerityyppiä, joiden liikesuunnat ovat $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ ja $(1,1,1)$. Näistä ensimmäinen on torni, joka liikkuu kuution tahkojen suuntaan eli kuuteen eri sektoriin. Muut kaksi eli lähetti_1 ja lähetti_2, jota voidaan kutsua myös ”ratsuksi”, liikkuvat 12 särmän (lähetti_1) ja 8 kulman (lähetti_2) suuntiin.

Seuraava ulottuvuus eli 4D-malli käsittää kahdeksaan eri suuntaan liikkuvan Tornin ja kolme muuta upseeria. Tämä 4D-malli on projisioitavissa sekä kolmi- että kaksiulotteiseksi. Tämä malli käsitellään aliluvussa 7.2.2.

7.2.1 Kolmiulotteinen shakki kuutiolaudalla

Seuraavassa käsite *kuutiolauta* tarkoittaa kuutioista koostuvaa suorakulmaista särmiötä, kolmiulotteista pelilautaa, jossa jokainen kuutio muodostaa yhden peliruudun.

Hyperlähettien ja -ratsujen siirrot määritellään kolmiulotteisilla kuutiolaudoilla lisäämällä uusi upseeri jokaiselle uudelle puolustusvyöhyketasolle. Uuden puolustusvyöhykkeen lisääminen kasvattaa luonnollisesti samalla kuutiuruutuisen laudan kokoa. Kun keskussinnakekuution ympärille liitetään ensimmäinen puolustusvyöhyketaso, niin saadaan, kuten edellisessä aliluvussa kerrottiin, 27 kuutiosta muodostunut $3 \times 3 \times 3$ kokoinen kuutiolauta, jossa ensimmäiseen puolustusvyöhykkeeseen kuuluu 26 kuutiota.

Liikesuuntia on keskuskuutiosta alkaen kolme erilaista eli kuution tahkojen suuntaan 6, särmien suuntaan 12 ja kulmien suuntaan 8 (katso kuvio 106). Näin ollen jo ensimmäisellä puolustusvyöhyketasolla tarvitaan kolme eri upseeria, jotka nimetään vielä tässä vaiheessa torniksi (tahkot), lähetiksi (särmät) ja Ratsuksi (kulmat). Myöhemmin nimet täsmentyvät lopulliseen muotoonsa. Jos yhden vyöhykkeen mallista rakennetaan pelilauta samalla periaatteella kuin edellä kaksiulotteisessa pelissä, niin saataisiin 125 kuutiuruutua käsittävä $5 \times 5 \times 5$ -kokoinen pelialusta. Kun noudatetaan periaatetta, jossa upseerit on sijoitettu reunatasolle ja sotilaat niitä suojaamaan seuraavalle tasolle, kuten kaksiulotteisessa pelissä, jossa upseerit ovat reunarivillä ja sotilaat seuraavalla rivillä, niin on pelialustan koon oltava vähintään $6 \times 6 \times 6$ (216 ruutua), jotta pelaajien väliin jäisi vähintään kaksi tyhjää tasoa. Myös upseerien määrän tulee olla parillinen. Vielä pienempi mielekäs kolmiulotteinen shakki voidaan kuitenkin koota pelialustalle, joka ei ole muodoltaan kuutio vaan suorakulmainen särmiö, jossa yksi särmä on muita pidempi. Kyseessä on $4 \times 4 \times 6$ (96 ruutua) alustalle sijoitettu kolmiulotteinen pikkushakki (kuvio 107). Pelissä kummallakin pelaajalla on $4 \times 4 \times 2 = 32$ nappulaa, jotka on sijoitettu 96 ruutuisen kuutiolaudan kumpaankin pätyyn, siten että reunaseinustalla eli reunatahkolla, on 16 upseeria ja seuraavalla tasolla 16 sotilasta. Väliin jää kaksi tyhjää tasoa.

Universaalissa shakissa perusideana on pelilaudan koon kasvaessa, että upseerit, jotka ovat kulloisenkin laudan uloimmalla puolustusvyöhykkeellä, liikkuvat vain askeleen kerrallaan määritettyyn suuntaansa. Alemmilla puolustusvyöhyketasoilla olevat upseerit taas voivat liikkua määritettyyn suuntaansa annetulla pelilaudalla niin pitkälle kuin sektorilla ei ole muita nappuloita. Suunnat on annettu (x, y, z) -koordinaatteina. Hyperupseerit merkitään lyhenteillä R_{xyz} ja L_{xyz} , missä R tarkoittaa ratsua, L tarkoittaa lähettiä ja indeksi xyz tarkoittaa xyz-koordinaatistossa ensimmäistä askelta suunnissa x, y ja z. Summa $x+y+z$ on hyperläheteille aina parillinen ja hyperratsuille pariton. Tällöin esimerkiksi perinteinen ratsu liike olisi R_{210} , siis kaksi askelta eteen, yksi sivulle ja 0 kertoo, että askelet tehdään samalla kaksiulotteisella tasolla.

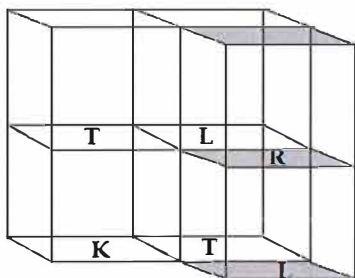
Erityisesti kolmiulotteisen pikkushakin, jonka kaikki upseerit ovat sen ensimmäisellä ja samalla uloimmalla puolustusvyöhykkeellä, kohdalla voidaan, pelin mielekkyyden vuoksi, pelata myös muunnelmaa, jossa torni (R_{100}), lähetti (L_{110}) ja kolmas ensimmäisen tason upseeri, joka on nimetty ratsuksi (R_{111}), liikkuvat pitkiä linjoja. Kuvio 107 näyttää kaksi erilaista ratsun eli tässä R_{111} siirtoa. Lähtöruutu on vaaleanpunainen ja siirtoruudut vihreitä

Seuraavassa on listattuna kahden ensimmäisen tason hyperupseerien liikkumissuunnat. Ensimmäinen puolustusvyöhyke (3 ensimmäistä upseeria):

R_{100} voi siirtyä alkuruudusta $(0,0,0)$ ruutuihin $(1,0,0) \dots (n,0,0)$,

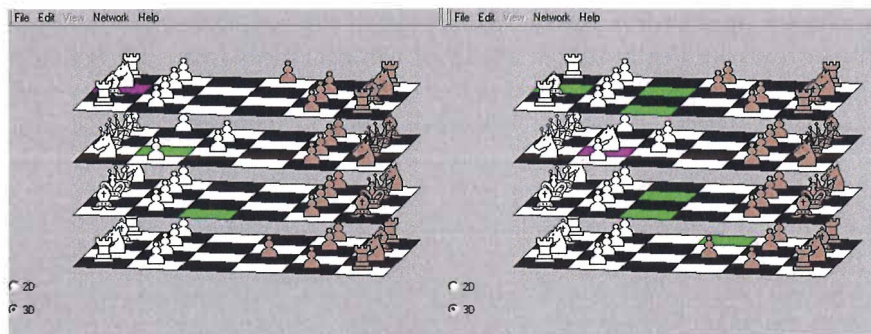
L_{110} voi siirtyä alkuruudusta $(0,0,0)$ ruutuihin $(1,1,0) \dots (n,n,0)$

R_{111} voi siirtyä alkuruudusta $(0,0,0)$ ruutuihin $(1,1,1) \dots (n,n,n)$.



KUVIO 106 Upseerien liikesuunnat 3-ulotteisessa pelissä

Oheinen kuvio 106 havainnollistaa ensimmäisen puolustusvyöhykkeen liikesuuntia. Kuvaan on laitettu keskuskuutio (K) sekä muutama sen oikealla puolella oleva kuutio. Kuutioiden lattiatahkoille on merkitty niihin liikkuvat upseerit $R_{100} = T$ (torni), $L_{110} = L$ (lähetti) ja $R_{111} = R$ (ratsu). Etummaisten kuutioiden ylä- ja alatahkot on merkitty harmaiksi kuvan selkeyttämiseksi. Torni liikkuu siis tahkojen, lähetti särmien ja ratsu kulmien suuntaan.



KUVIO 107 Esimerkki kolmiulotteisesta pikkushakista

Seuraavassa kuviossa 108 näkyy upseerien sijoittuminen laudan reunatahkolle.

KUVIO 108 Upseerien alkuasetelma pienessä 3D shakissa

Toinen puolustusvyöhyke (3 uutta upseeria):

R_{210} voi siirtyä alkuruudusta $(0,0,0)$ ruutuihin $(2,1,0) \dots (2n,n,0)$

L_{211} voi siirtyä alkuruudusta $(0,0,0)$ ruutuihin $(2,1,1) \dots (2n,n,n)$

R_{221} voi siirtyä alkuruudusta $(0,0,0)$ ruutuihin $(2,2,1) \dots (2n,2n,n)$

Nämä eivät ole mukana kuvioden 107 ja 108 pelissä.

7.2.2 Neliulotteinen shakki

Universaalin shakin säännöt voidaan sen jälkeen edelleen soveltaa useampiin ulottuvuuksiin kun käytetään tilan täyttämisenä hyperkuutioita, kuten edellisessä aliluvussa kuutioita kolmiulotteisen shakin kohdalla.

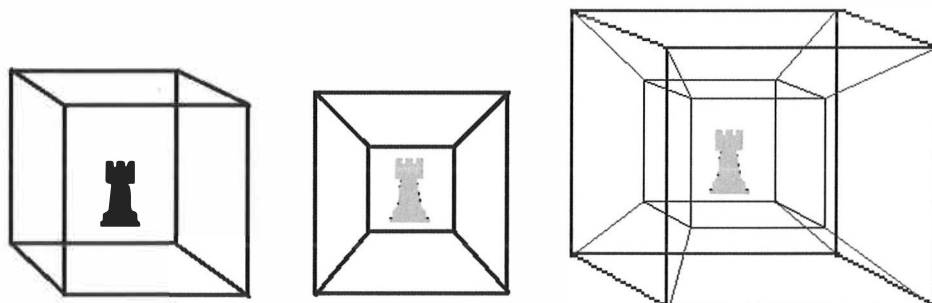
Erilaiset uudet hyperlähetit ja -ratsut sekä niiden siirrot määritellään neliulotteisilla hyperkuutiolaudoilla sitä mukaa kuin uusia puolustusvyöhyketasoja syntyy ja samalla niille uusia upseerityyppejä. Uuden puolustusvyöhykkeen lisääminen kasvattaa samalla pelialustan kokoa. Kun keskuslinnakehyperkuution ympärille liitetään ensimmäinen puolustusvyöhyketaso, niin saadaan 81 hyperkuutiosta muodostunut $3 \times 3 \times 3 \times 3$ kokoinen hyperkuutioalusta, jossa ensimmäiseen puolustusvyöhykkeeseen kuuluu 80 hyperkuutiota. Liikesuuntia on upseereille keskuskuutiosta alkaen neljä erilaista. Nämä ovat neliulotteista hyperkuutiota ympäröivien kuutioiden suuntaan 8, tahkojen suuntaan 24, särmien suuntaan 32 ja kulmien suuntaan 16. Näin ollen ensimmäisellä puolustusvyöhyketasolla tarvitaan neljä eri upseerityyppiä.

Havainnollistetaan asiaa kuvalla. Kuviossa 109 on vasemmalla torni asetettu kolmiulotteisessa shakissa kuution tai siis kuutioruudun sisälle. Kuvasta nähdään tornin liikesuunnat kuuden tahkon suuntaan, vasemmalle, oikealle, eteen, taakse, ylös, alas. Keskimmaisessa piirroksessa on sama kuutio "litistetty" tasoon tai projisoitu kaksiulotteiselle tasolle, jossa ei ole kolmiulotteista tilaa, jonne tornin voisi laittaa. Tämän vuoksi torni on esitetty harmaana "varjokuvana".

Tästäkin kuvasta voidaan mainitut kuusi liikesuuntaa löytää. Ne ovat tornin ympärillä olevat neljä nelikulmiota, keskellä oleva nelikulmio, johon tornin kuva on sijoitettu, sekä ulkopuolinen alue. Näiden kahden piirroksen pohjalta on helpompi ymmärtää kuvion oikeanpuolimmainen piirros, joka esittää neliulotteisen hyperkuution projisiota kolmanteen ulottuvuuteen. Jokainen neliulotteiselle hyperkuutiolaudalle rakennetun shakkipelin yksi ruutu on tällainen hyperkuutio. Hyperkuution sisällä on neliulotteisen tornin "varjo" osoittamassa tornin paikkaa ruudun sisällä. Tornin liikesuunnat ovat edellä mainitut hyperkuutiota reunustavien kolmiulotteisten kuutioiden, joita on kahdeksan, suuntiin. Nämä kahdeksan ovat sisällä oleva kuutio, siihen rajoittuvat kuusi kuutiota sekä ulkopuolella oleva iso kuutio eli siis ulkopuolinen alue.

Kuvasta 109 (oikean puoleisin piirros) voidaan myös todeta helposti tornin hyperkuutiota reunustavien tahkojen (24), särmien (32) ja kulmien (16) määrät. Ne määrittävät muiden upseerien liikkumissuunnat ensimmäisellä puolustusvyöhykkeellä.

Kuvan pohjalta voi myös hahmottaa hyperkuutiota reunustavat kolmiulotteiset kuutiot (8) eli piirroksen sisällä oleva kuutio, sitä reunustavat kuusi kuutiota ja kahdeksantena ulkopuolinen alue eli ympärillä oleva iso kuutio.

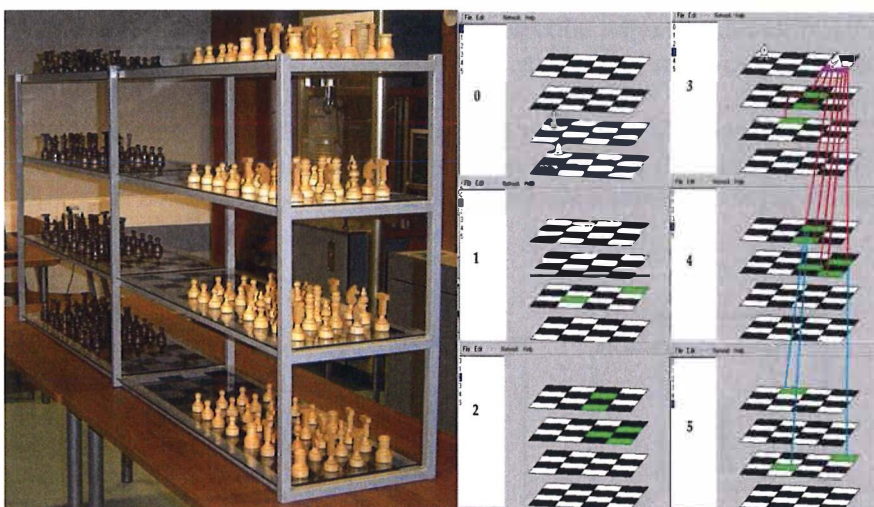


KUVIO 109 Tornin kuutiossa ja hyperkuutiossa

Jos yhden vyöhykkeen mallista rakennetaan pelilauta samalla periaatteella kuin edellisessä aliluvussa 7.2.1 kolmiulotteisessa pelissä, niin saataisiin $5^4 = 625$ hyperkuutioruutua käsittävä hyperkuutioalusta. Kun noudatetaan periaatetta, jossa upseerit on sijoitettu reunatasolle ja sotilaat niitä suojaamaan seuraavalle tasolle, kuten kolmiulotteisessa pelissä upseerit ovat reunarivillä ja sotilaat seuraavalla rivillä, niin on pelialustan koon oltava vähintään $6^4 = 1296$ ruutua, jotta pelaajien väliin jäisi vähintään kaksi tyhjää tasoa. Pienempi, mutta pelattavaksi mielekäs, neliulotteinen shakki voidaan kuitenkin koota, samoin kuin kolmiulotteisessa tapauksessa, pelialustalle, jossa yksi särmä on muita pidempi. Näin saadaan $4 \times 4 \times 4 \times 6 = 384$ ruutua -alustalle sijoitettu neliulotteinen pikkushakki. Pelissä kummallakin pelaajalla on $4 \times 4 \times 4 \times 2 = 128$ nappulaa, jotka on sijoitettu hyperkuutiolaudan kumpaankin pätyyn, siten että $4 \times 4 \times 4$ reunakuutiolla on 64

upseeria ja seuraavalla tasolla, siis puolustusvyöhykkeellä, 64 sotilasta. Pelaajien väliin jää siis nytkin kaksi tyhjää tasoa (kuvio 110, vasen kuva).

Kuten edellisissäkin peleissä, upseerit, jotka ovat kulloisenkin laudan uloimmalla puolustusvyöhykkeellä, liikkuvat vain askeleen kerrallaan määritettyyn suuntaansa. Sisemmällä puolustusvyöhyketasoilla olevat upseerit taas voivat liikkua määritettyyn suuntaansa annetulla pelilaudalla niin pitkälle kuin sektorilla ei ole muita nappuloita. Suunnat on annettu (x,y,z,q) -koordinaatteina. Hyperupseerit merkitään lyhenteillä R_{xyzq} ja L_{xyzq} , missä R tarkoittaa hyperratsua, L tarkoittaa hyperlähettä ja indeksi $xyzq$ ensimmäistä askelta $xyzq$ -koordinaatistossa.



KUVIO 110 Esimerkki neliulotteisesta pikkushakista

Seuraavassa on listattuna kahden ensimmäisen tason hyperupseerien liikkumissuunnat. Perinteinen torni on tässä R_{1000} ja perinteinen lähetti L_{1100} . Toisin sanoen hyperupseereissa torni kuuluu hyperratsujen luokkaan.

Puolustusvyöhyke I (4 ensimmäistä upseeria), alkuruutu on $(0,0,0,0)$

R_{1000} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(1,0,0,0) \dots (n,0,0,0)$,

L_{1100} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(1,1,0,0) \dots (n,n,0,0)$,

R_{1110} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(1,1,1,0) \dots (n,n,n,0)$,

L_{1111} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(1,1,1,1) \dots (n,n,n,n)$

Kun katsotaan kuvion 110 vasemmanpuoleista kuvaa, niin esimerkiksi R_{1000} (perinteinen torni) voi liikkua kahdeksaan eri suuntaan pelialustalla, joka koostuu kuudesta kolmiulotteisesta "hyllyköstä", joissa kussakin on päällekkäin neljä 4×4 neliöruudutettua kaksiulotteista pelilautaa. Suunnat ovat yhdellä 4×4 laudalla lähtöruudun sivujen suuntaan eteen/taakse, vasemmalle/oikealle,

ylös/alas ja lopuksi vastaavan koordinaattisijainnin omaavaan ruutuun muissa "hyllyköissä". Yksi "hyllykkö" on siis vyöhyke, mutta näin ilmaistuna se on helpompi hahmottaa.

Kuvio 111 näyttää upseerien sijoittumisen tämän neliulotteisen pelin reunimmaiselle vyöhykkeelle eli "hyllykköön". Hyllykön ylin taso on vasemmalla. Kuvioon on lisäksi merkitty myös kolmiulotteisen shakin upseerien kuvien koodit.



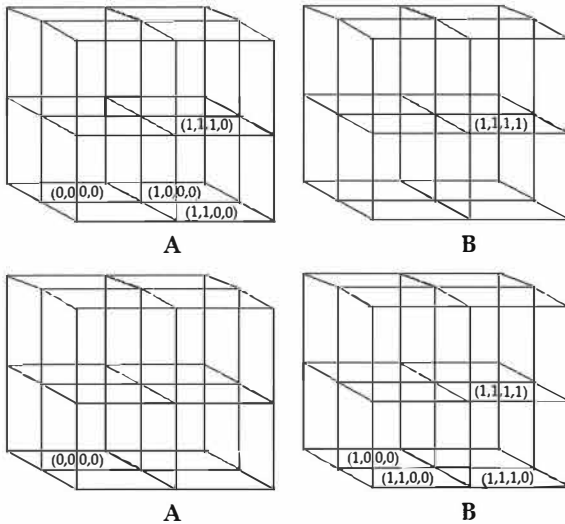
	4D	3D
	R ₁₀₀₀	R ₁₀₀
	L ₁₁₀₀	L ₁₁₀
	R ₁₁₁₀	R ₁₁₁
	L ₁₁₁₁	

KUVIO 111 Upseerien alkuasetelma pienessä 4D shakissa

Kuvion 110 oikeanpuoleinen kuva esittää R₁₁₁₀ liikerataa. R₁₁₁₀ on sijoitettu 3. vyöhykkeen eli "hyllykön" (kuvassa numero 3) ylätasolle ja vihreät ruudut osoittavat paikat, joihin se voi tästä lähtöruudustaan edetä. Punaiset viivat osoittavat ruutuihin yhden askelen päässä samalla 3. vyöhykkeellä, sekä 4. vyöhykkeellä. Siniset viivat osoittavat ruutuihin kahden askelen päästä samaan vektorisuuntaan vyöhykkeelle 5. Siirtymistä kahdella askelella vyöhykkeille 0, 1 ja 2 vasemmalla ei ole sinisin viivojen erikseen näytetty, mutta suunnat tänne suuntaan "ylöspäin" ovat identtiset edellisten kanssa. Sen voi todeta mm. vertaamalla vyöhykettä 2 vyöhykkeeseen 4 ja vyöhykettä 1 vyöhykkeeseen 5. Vihreällä merkityt ruudut ovat samoissa paikoissa. Lisäksi ratsu saavuttaa yhden ruudun myös vyöhykkeellä 0.

Otetaan toiseksi esimerkiksi L₁₁₁₁. Se liikutetaan ruutuunsa siirtämällä se ensin 4x4 ruutuisella tasolla yksi askel sivunsa suuntaan eteen/taakse ja sitten vasemmalle/oikealle, sitten seuraavaan ruutuun ylös/alas samassa "hyllykössä" ja lopuksi yksi askel vastaavan koordinaattisijainnin omaavaan ruutuun muissa "hyllyköissä". Tämä on L₁₁₁₁:n yhden askeleen mittainen liike. Mikäli L₁₁₁₁:aa

liikutetaan pidemmälle, niin siirretään seuraaviin ruutuihin samaan vektorisuuntaan. Kuviossa 112 on esitetty L_{1111} :n liikkuminen vektoreittain yhden askelen päähän. Lähtöruutu on $(0,0,0,0)$ ja loppuruutu $(1,1,1,1)$, mutta väliset ruudut voi mennä missä järjestyksessä vain, joista kuvassa on esitetty kaksi vaihtoehtoista järjestystä. Tässä kuviossa A esittää osiota yhdestä ja B osiota toisesta "hyllyköstä", jotka ovat neliulotteisen laudan projisioita kolmiulotteiseen tilaan.



KUVIO 112 Esimerkki L_{1111} :n liikkumisesta

Puolustusvyöhyke II (6 uutta upseeria), alkuruutu on $(0,0,0,0)$

- R_{2100} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(2,1,0,0) \dots (2n,n,0,0)$,
- L_{2110} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(2,1,1,0) \dots (2n,n,n,0)$,
- R_{2210} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(2,2,1,0) \dots (2n,2n,n,0)$,
- R_{2111} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(2,1,1,1) \dots (2n,n,n,n)$,
- L_{2211} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(2,2,1,1) \dots (2n,2n,n,n)$,
- R_{2221} voi siirtyä alkuruudusta ruutuihin $(2,2,2,1) \dots (2n,2n,2n,n)$.

Tämän puolustusvyöhykkeen upseereita ei ole esiteltyssä esimerkkipelissä.

7.2.3 N-ulotteinen kahden pelaajan shakki

Tässä luvussa tarkastellaan vielä kahdenpelaajan shakkipelin laajentamista yleisesti n -ulotteiseen euklidiseen avaruuteen samoilla universaalien shakin idean periaatteilla kuin edellisissä luvuissa kolmanteen ja neljänteen ulottuvuuteen. Hyperlähettien ja -ratsujen siirrot määritellään n -ulotteisilla hyperkuu-

tiolaudoilla lisäämällä uusi upseerityyppi jokaiselle uudelle puolustusvyöhyketasolle, kuten aiemminkin tehtiin alemmissa ulottuvuuksissa.

Kun keskuslinnakehyperkuution ympärille liitetään ensimmäinen puolustusvyöhyketaso, niin saadaan 3^n hyperkuutiosta koostuva hyperkuutioalusta, jossa ensimmäiseen puolustusvyöhykkeeseen kuuluu $3^n - 1$ hyperkuutiota. Liikesuuntia on keskuskuutiosta alkaen n erilaista eli n -ulotteista hyperkuutiota ympäröivien $n-1$ hyperkuutioiden suuntaan $2^{n-k} \binom{n}{k}$. Eli ääripäissä suurimpien reunustavien $n-1$ hyperkuutioiden määrä on kuutioiden $2^{n-(n-1)} \binom{n}{n-1} = 2n$ ja kulmapisteiden suuntaan liikesuuntien määrä on $2^{n-0} \binom{n}{0} = 2^n$. (Coxeter 1973)

Varsinaisesti Coxeter kirjoitti kaavansa n -ulotteiselle *parallelotopelle*, jota voisi suomeksi kutsua *suuntaistahokkaaksi*, koska se on jatkumo termeille suuntaissärmiö (*parallelepiped*) ja suunnikas (*parallelogram*). Hyperkuutio, kuutio ja neliö ovat näiden erikoistapauksia. (Coxeter 1973)

Jos palataan vielä kaavaan, niin esimerkiksi neliulotteisen hyperkuution kohdalla luvut ovat $2^{4-1} \binom{4}{1} = 4 \cdot 2^3 = 32$ (särmien suuntaan), $2^{4-2} \binom{4}{2} = 6 \cdot 2^2 = 24$ (tahkojen suuntaan), $2^{4-3} \binom{4}{3} = 4 \cdot 2 = 8$ kuutioiden suuntaan ja $2^{4-0} \binom{4}{0} = 2^4 = 16$ (kulmien suuntaan). Koska liikesuuntia on n erilaista, niin ensimmäiselle tasolle tulee n kpl erilaisia upseereita. Seuraavien tasojen upseerien määrät ovat vaikeammin arvioitavissa aivan samoin kuin kaksiulotteisessa tapauksessa (ks. taulukko 3 edellä).

Seuraavassa käytetään merkintää $\#X$ tarkoittaa joukon X kokoa tai mahtavuutta (*cardinality*) eli sen alkioden määrää. Koska kyseessä olevat joukot ovat äärellisiä, niin koko voisi olla osuvampi nimitys, mutta käytetään käsitettä mahtavuus, koska sanaa koko käytetään paljon myös muissa merkityksissä. Esimerkiksi $\#\{a,b,c\} = 3$. Seuraavassa esityksessä $\#\{x\}$ tarkoittaa alkioden x lukumäärää indeksissä. Esimerkiksi jos $\#\{1\} = 1, 3$, niin silloin indeksissä voi olla joko yksi tai kolme peräkkäistä ykköstä. Merkintä kertoo siis tässä numeron 1 lukumäärän indeksissä.

Tarkennetaan merkintätapaa vielä hieman. Yleisellä tasolla $\#$ tarkoittaa usein lukumäärää. Tässä yhteydessä esimerkiksi $\#\{3\}$ tarkoittaa indeksin 3 lukumäärää. Jos $\#\{3\}$ on esimerkiksi 2, 5 tai 8, niin silloin indeksissä on peräkkäin joko 2, 3 tai 8 numeroa 3. Indeksillä puolestaan ilmaisee pelinappulan koordinaatin $xyz\dots n$ koordinaatistossa.

Palataan itse peliin. Sovelletuna n -ulotteisen pelilaudan upseerit saadaan seuraavasti.

Puolustusvyöhyke I (n ensimmäistä upseeria), alkuruutu on $(0,0,0, \dots, 0)$, missä on n kpl nollia. Hyperratsuja ovat $R_{\#\{1\}\#\{0\}}$: missä $\#\{1\} = 1, 3, 5, \dots, n$, $\#\{1\}$ on pariton ja $\#\{0\} = n - \#\{1\}$. Hyperlähetejä ovat $L_{\#\{1\}\#\{0\}}$: missä $\#\{1\} = 2, 4, 6, \dots, n$, $\#\{1\}$

on parillinen ja $\#\{0\} = n - \#\{1\}$. Tässä esityksessä $\#\{1\}$ on siis peräkkäisten ykkösten ja $\#\{0\}$ peräkkäisten nollien lukumäärä indeksissä.

Siis esimerkiksi edellisen luvun neliulotteisessa pelissä olisi hyperratsut $R_{\#\{1\}\#\{0\}}$: missä $\#\{1\} = 1, 3$ ja $\#\{0\} = 4 - 1 = 3$, sekä $4 - 3 = 1$. Hyperratsut ovat R_{1000} ja R_{1110} . Ensimmäisellä tämän puolustusvyöhykkeen hyperratsulla on siis indeksissä yksi ja toisella kolme 'ykköstä'. Vastaavasti 'nollia' on ensimmäisellä kolme ja jälkimmäisellä yksi. Samoin hyperläheteille saadaan $L_{\#\{1\}\#\{0\}}$: missä $\#\{1\} = 2, 4$ ja $\#\{0\} = 2$ ja 0 . Hyperlähetit ovat L_{1100} ja L_{1111} .

Hyperupseerin indeksi kertoo mihin ruutuihin se voi liikkua. Esimerkiksi jos $\#\{1\} = 5$ ja $\#\{0\} = 2$, niin Hyperratsu $R_{\#\{1\}\#\{0\}}$ voi siirtyä alkuruudusta $(0,0,0,0,0,0)$ ruutuihin $(1,1,1,1,1,0,0) \dots (n,n,n,n,n,0,0)$ seitsemänulotteisessa shakkipelissä. Koordinaatissa olevien, pilkulla erotettujen merkkien, lukumäärä kertoo sen minkä ulottuvuuden pelistä on kyse. Edellisessä neliulotteisessa tapauksessa esimerkiksi tilanteessa jossa $\#\{1\} = 1$ ja $\#\{0\} = 3$ saatiin hyperratsu R_{1000} , joka voi siis liikkua vastaavasti ruudusta $(0,0,0,0)$ ruutuihin $(1,0,0,0) \dots (n,0,0,0)$.

Kun ympärille liitetään toinen puolustusvyöhyketaso, niin saadaan 5^n hyperkuutiosta koostuva hyperkuutioalusta, jossa toiseen puolustusvyöhykkeeseen kuuluu $5^n - 3^n$ hyperkuutiota. Eli jos kyseessä on esimerkiksi kolmiulotteinen peli ja hyperkuutiona tavallinen kuutio ja $n=3$, niin silloin toisella puolustusvyöhykkeellä on $5^3 - 3^3 = 125 - 27 = 98$ kuutiota. Tavallisella kaksiulotteisella tasolla tämä on helpommin hahmotettavissa. Silloin vyöhykkeen ruutujen määrä on $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ ruutua. Tämän voi todeta helposti esimerkiksi kuvios-
ta 73.

Ensimmäisellä puolustusvyöhykkeellä uusien, ja samalla ensimmäisten, upseerien määrä on siis n . Perinteisessä kaksiulotteisessa shakissa, jossa $n=2$, ensimmäisellä vyöhykkeellä olevat upseerit ovat torni ja lähetti. Toisella puolustusvyöhykkeellä on yksi uusi upseeri eli ratsu. Aliluvuissa 7.2.1 ja 7.2.2 selvitettiin, että uusien upseerien määrä toisella puolustusvyöhykkeellä on 3, kun $n=3$ ja 6, kun $n=4$. Ensimmäisen vyöhykkeen upseerit $L_{\#\{1\}\#\{0\}}$ ja $R_{\#\{1\}\#\{0\}}$ ovat toisella vyöhykkeellä muotoa $L_{\#\{2\}\#\{0\}}$ ja $R_{\#\{2\}\#\{0\}}$. Kaikki uudet upseerit taas ovat muotoa $L_{\#\{2\}\#\{1\}\#\{0\}}$ ja $R_{\#\{2\}\#\{1\}\#\{0\}}$ tai $L_{\#\{2\}\#\{1\}}$ ja $R_{\#\{2\}\#\{1\}}$. Esimerkiksi kun $n=3$, niin "vanhat" upseerit ovat R_{200} (torni), $L_{220} = L$ (lähetti) ja R_{111} (ratsu) ja uudet upseerit R_{210} , L_{211} ja R_{221} . Indeksien pituus on siis n ja toisella puolustusvyöhyketasolla uusien upseerien kohdalla ei ole yhtään indeksiä, jossa olisi vain luvut 2 ja 0 tai pelkkä luku 2. Ne ovat jo puolustusvyöhykkeellä yksi luotujen upseerien liikesuuntia. Indeksissä lukujen 2 ja 1 määrät jakaantuvat siten, että kun lukuja 2 on maksimimäärä $n-1$, niin lukua 1 on 1 kpl. Kun lukua 2 on $n-2$, niin lukua 1 on 1 tai 2 kpl, ... ja kun lukua 2 on 1 kpl, niin lukua 1 on 1, ... $n-1$ kpl. Tällaisten kombinaatioiden määrä on $\binom{n}{2} = n!/2!(n-2)!$. Näin ollen uusien upseerien määrä tasolla I on $\binom{n}{1} = n$ ja tasolla II on $\binom{n}{2}$. Kun edetään tasolle III, niin uusien upseerien

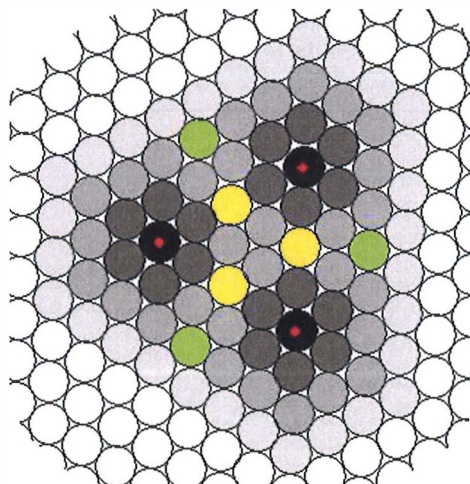
määrän määrittäminen tulee mutkikkaammaksi, kuten ilmeni kohdassa 7.1.1, jossa n oli 2. Tähän asiaan perehtyminen olisi varmasti mielenkiintoinen jatko-tutkimuskohde, mutta ei ole kuitenkaan enää olennaista enää tämän tutkielman kannalta.

7.3 Kolme universaalien shakin reunatapausta

Koska tämän työn tavoitteena on hakea symmetristä n -pelaajan mallia, niin eräät universaalien shakin idean reuna-alueet on myös syytä lyhyesti selvittää. Jotkin näistä pelimalleista saattavat olla hyödyllisiä haettaessa symmetristä usean pelaajan peliä. Osa taas tähän täysin hyödyttömiä mikä sekin on tavallaan hyödyllistä tietoa. Esitellään siis lyhyesti laudaton kolmishakki, kolmishakki ja dodekaedriin pohjautuva fullereenishakki.

7.3.1 Laudaton kolmishakki

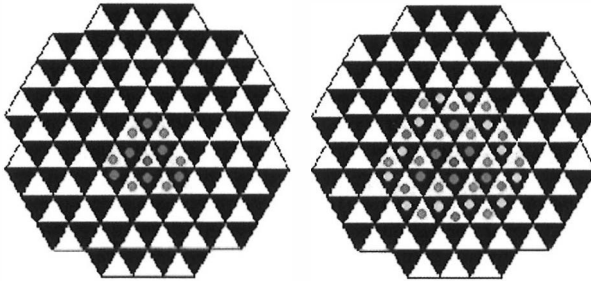
Tämän pelin (kuvio 113) säännöt ovat samat kuin kolmishakissa ja nappuloiden liikkuminen määräytyy samoin kuin laudattomassa shakissa. Koska peli on sijoitettu kaksiulotteiselle tasolle, niin symmetria saadaan syntymään korkeintaan kolmen pelaajan välille. Näin ollen pelaajien lukumäärän kasvattaminen useamman pelaajan laudattomaan shakkiin on tästä näkökulmasta hyödytöntä.



KUVIO 113 Laudaton kolmishakki

7.3.2 Kolmioshakki

Kolmioshakki oli kolmas peli, joka syntyi universaaliin shakkiin liittyvän tutkimuksen alkuvaiheissa. Palataan alilukuun 6.2.2, jossa selvitettiin: "koottiin peli uudelleen alkutekijöistään ottamalla kuitenkin samalla huomioon shakissa tapahtuneet sääntömuutokset ... kolmas kolmioruudutetulle laudalle sijoitettu malli muotoutui erilaiseksi peliksi". Kuitenkin senkin voi muuntaa kolmishakiksi seuraavalla tavalla.



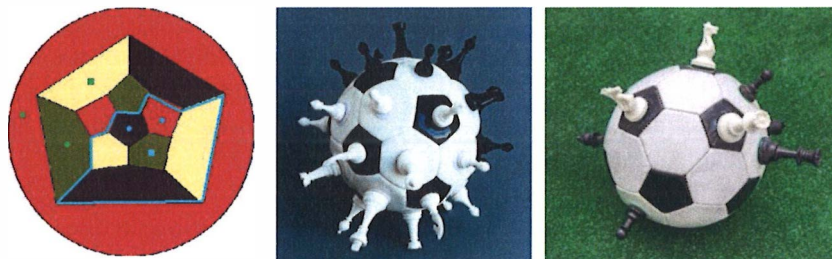
KUVIO 114 Kolmioshakki

Pelilauta muotoutui samalla periaatteella kuin kolmishakissakin, kuten aliluvussa 6.2.1 selvitettiin. Erona oli se, että linnakkeita syntyi kuusi (ks. kuvio 76). Näistä kuudesta linnakkeesta voidaan muodostaa paitsi kuuden, niin myös kolmen pelaajan peli. Kolmen pelaajan peli on symmetrinen, mutta kuuden ei koska kyseessä on tasossa pelattava peli. Kuviossa 114 on vasemmalla näytetty ensimmäisen puolustusvyöhykkeen upseerit sinisillä ja vihreillä ympyröillä ja oikealla myös toisen puolustusvyöhykkeen upseerit, jolloin mukaan tulevat myös keltaiset ympyrät. Pelistä voidaan näin saada kolmishakin kaltainen. Vihreät ympyrät vastaavat kuvassa torneja, siniset lähettejä ja keltaiset ovat ratsuja. Erona kolmishakkiin ja shakkiin on, että torni liikkuu vuorotellen kulmien ja sivujen suuntaan.

7.3.3 Fullereenishakki

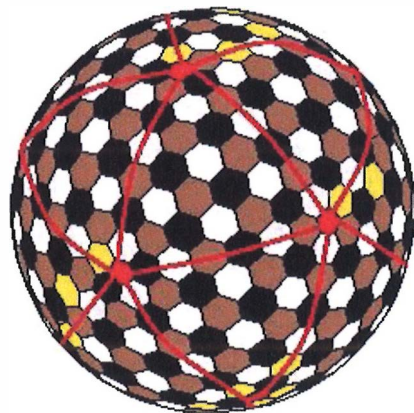
Edelliset tasolla pelattavat pelit on pelattu ruuduilla, jotka olivat kolmioita, neljiä ja kuusikulmioita. Näiden väliin jää vielä viisikulmio, joten viimeisenä tarkastellaan voisiko viisikulmioista koostuvalle dodekaedrille sijoittaa shakinomaista peliä. Dodekaedrin pinta on kaksiulotteinen, mutta se on kolmiulotteinen kappale, joten sen pinta taipuu kolmannessa ulottuvuudessa ja näin siinä voisi olla neljäkin pelaajaa symmetrisesti sijoitettuna toisiinsa nähden. Jos käytetään pelkkää dodekaedriä (kuvio 115 vasemmalla), niin neljä väriä tarvitseva pelialusta on erittäin pieni ja sille voidaan sijoittaa vain jokin hyvin yksinkertainen peli. Alustaa voidaan kuitenkin kasvattaa lisäämällä jokaiseen viisikulmion ympärille viisi kuusikulmiota, jolloin saadaan kooltaan seuraava malli, *Goldbergin monitahokas* $G(2,0)$ (Goldberg 1937), joka tunnetaan parhaiten jalkapallona.

Dodekaedriä voidaan myös kutsua Goldbergin monitahokas $G(1,0)$:ksi. Kuviossa 115 oikealla on kahden taiteilijan, Milan Mikulastikin (keskellä) ja Gabriele De Santis, näkemykset shakkinappuloista jalkapallon päällä, nämä eivät kuitenkaan ole pelejä.



KUVIO 115 Pentagonpeli ja "shakkijalkapallot"

Kuusikulmioiden määrää voi kuitenkin kasvattaa loputtomasti sillä kuusikulmiot jakavat tason säännöllisesti ja dodekaedrin 12 viisikulmiota sulkevat kokonaisuuden pallopinnaksi, kuten aliluvuissa 3.1 ja 3.2 selvitettiin. Kuviossa 116 on esimerkkinä Goldbergin monitahokas $G(7,0)$ (Goldberg 1937). Kemiassa nämä rakenteet tunnetaan pallohiilinä eli fulleriineinä. Goldbergin monitahokas $G(7,0)$ on fulleriini C_{180} ja dodekaedri fulleriineista pienin eli C_{20} (Wirz et al. 2016). Tämän tapaiselle fullereenipallolle olisi helppo sijoittaa kolmishakin kaltainen shakkipeli samanlaisilla säännöillä ja nappuloiden liikesuunnilla. Viisikulmiot, jotka kuviossa 118 on esitetty punaisina, toimisivat keskuslinnakeina, joiden ympärille oleville kehille sijoittuisivat pelinappulat. Jotta saataisiin neljän pelaajan peli, tarvitsee vain valita neljä näiden kahdentoista viisikulmion joukosta.



KUVIO 116 Goldbergin monitahokas $G(7,0)$ ⁴⁵

45

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldberg_polyhedron_7_0.png#/media/File:Goldberg_polyhedron_7_0.png

Mutta vaikka pallon pinnalta voitaisiinkin valita neljä pistettä, jotka ovat symmetrisesti toisiinsa nähden, niin Goldbergin monitahokkaillakaan neljän pisteen symmetrisyys ei kuitenkaan onnistu. Tämä selittyy sillä, että dodekaedrin riippumattomuusluku on kolme vaikka se onkin väritettävissä neljällä eri värillä. *Riippumattomuusluku* tarkoittaa sitä, että korkeintaan kolme viisikulmiota voidaan sijoittaa siten, että ne eivät kosketa toisiaan. Tämän voi todeta katsomalla kuvion 115 vasenta piirrosta eli dodekaedrin tasolle piirrettyä projisiota. Goldbergin monitahokkaan kohdalla tämä tarkoittaa sitä ettei ole mahdollista valita neljättä viisikulmiota siten, että sen etäisyys muihin kolmeen olisi sama kuin näiden kolmen keskinäinen etäisyys.

Joukko $X \subseteq V(G)$ on riippumaton jos joukossa X ei ole solmuja yhdistäviä välejä. G :n suurimman riippumattoman joukon mahtavuutta kutsutaan joukon G *riippumattomuusluvuksi*. Verkon G solmuväritettävyyden on funktio sen solmujoukosta V_G joukkoon C , jonka alkioita kutsutaan väreiksi. Verkko on c -väritetty jos sillä on selkeä solmuväritys, jossa on c tai vähemmän värejä. Verkon G *kromaattinen luku* on pienin määrä c värejä siten, että G on c -väritetty. (Gross et al. 2004)

Dodekaedrin duaaliverkko on ikosaedriverkko, jonka kromaattinen luku on neljä ja riippumattomuusluku kolme.

7.4 Yhteenveto

Tässä luvussa käytiin läpi niitä universaalien shakin laajennuksia, jotka on tehty jo ennen tätä tutkielmaa kuten myös 6. luvussa. Edellisen luvun sisällöstä tämän 7. luvun pelit eroavat siinä, että ne kuuluvat universaalien shakin kehityksen toiseen myöhempään vaiheeseen, jossa peliä laajennettiin laudan koon ja ulottuvuuksien mukaan. Pelien alustana säilyi kuitenkin neliö- kuutio- hyperkuutiomalli ruuduissa. Poikkeuksena laudaton shakki, jossa nappuloiden liikeratojen määritys oli sijoitettu nappuloihin itseensä. Laudaton shakki myös patentoitiin, mutta muutoin sitä ei esitetty missään julkisesti.

Tasolla pelattavat neliöruutuiset pelit yleistettiin aliluvussa 7.1. ensin kooltaan suuriksi sekä laudan koon, että upseerien määrän mukaan ja lopuksi tavallista shakkia pienemmiksi peleiksi. Kaikissa peleissä noudatettiin kuitenkin universaalien shakin ideaa. Aliluvussa 7.2 siirryttiin eri ulottuvuuksiin ja kuutio-, sekä hyperkuutiiruutuisilla alustoilla pelatut pelit laajennettiin aina n -ulotteisiksi shakkipeleiksi. Pelaajien määrä pysyi kuitenkin kahtena. Näistä 4-ulotteisesta pelistä tehtiin myös kaksi fyysistä mallia, joista toinen oli esillä Oulun Tietomaassa (kuvio 110).

Viimeisessä aliluvussa 7.3. tarkasteltiin vielä lyhyesti kahta keskeneräiseksi jäänyttä peliä ja lopuksi dodekaedriin perustuvaa mallia tavoitteena kasvat-
taa symmetrisen shakin pelaajien määrä kolmesta neljään. Tämä ei kuitenkaan onnistunut ja niinpä seuraavassa luvussa 8, lähdetään liikkeelle hieman erilaiselta pohjalta.

8 SYMMETRINEN N-PELAAJAN SHAKKI

Tämän tutkimuksen alkaessa oli tavoitteena selvittää onko mahdollista muodostaa strategiapeli, jossa n pelaajaa on sijoitettu toisiinsa nähden täysin symmetrisesti? Kaksiulotteisella tasolla voi enintään kolme pistettä olla täysin symmetrisessä asemassa toisiinsa nähden. Mikäli pisteitä on enemmän, niin ulottuvuuksien määrää on lisättävä. Kun ulottuvuuksien määrää lisätään, niin on valittava myös pelialustaksi soveltuva moniulotteinen kappale, joka todennäköisimmin on jokin monipinta eli moniulotteinen monitahokas, polytooppi. Monipintoja käsiteltiin aiemmin aliluvussa 3.4.1. Tätä valittavaa rakennetta kutsutaan tässä tutkielmassa *ulkorakenteeksi*. Tämän jälkeen on vielä löydettävä sopiva tapa jakaa pelilauta säännöllisiin osiin sisältä. Tätä kutsutaan tutkielman yhteydessä *sisärakenteeksi*. Ongelmana oli löytää toimiva rakenne näiden kahden näkökulman välille. Pelissä pelaajien määrä on yhtä kuin symmetrisessä asemassa olevien pisteiden määrä ja sisärakenteen tulisi olla niin säännöllinen, että se skaalautuisi selkeän kaavan mukaan Euklidisesta ulottuvuudesta toiseen ja se voitaisiin näin yleistää.

Aliluvussa 8.1. esitellään tutkittuja vaihtoehtoja, joita oli kolme erilaista. Yhdestä näistä löytyi ratkaisu symmetriaongelmaan ja tämä ratkaisu esitellään aliluvussa 8.2. Aliluvussa 8.3. sijoitetaan shakinomainen peli löydetylle ratkaisupohjalle ja aliluvussa 8.4. pohditaan useamman pelaajan asetelman vaikutusta shakin sääntöihin.

Tämän luvun kehitelmät ovat tekijän omia, lähdeviitteet on lisätty kohtiin, joissa on hyödynnetty muualta saatua tietoa.

8.1 Mahdolliset mallit symmetriselle n -osapuolen pelialustalle

Kun rakennetaan lautapeli, jossa on tiettyjen sääntöjen perusteella liikuteltavia pelinappuloita, niin yksi selkeä tapa määrittellä nappuloiden liikkeitä on asettaa peli sellaiselle alustalle, jossa niiden paikat ja liikesuunnat voidaan selkeästi

määritellä. Näin on myös perinteinen shakki rakennettu, shakkilauta koostuu neliöruuduista, jotka toimivat koordinaatteina. Shakkipelissä on $8 \times 8 = 64$ ruutua, joille on sijoitettu 16 mustaa ja 16 valkeaa nappulaa. Nappuloita on 32 kpl eli niiden ruudut peittävät siis tasan 50% laudan pinta-alasta. Nappuloita on kuutta eri tyyppiä, joille jokaiselle on määritelty ruudukossa oma liikkumistansa.

Miksi shakkilaudan koko on juuri tuo 64, on hämärän peitossa. Vaihtoehtoisia selityksiä esiteltiin aliluvussa 6.1.2. Samassa luvussa esiteltiin myös tekijän oma teoria alkushakista, johon liittyi ns. *reviirimalli*.

Reviirimallilla voidaan varsin johdonmukaisesti selittää myös shakkipelin upseereiden liikkumissuunnat. Kun kukin upseeri sijoitetaan vuorollaan kuvion 117 mustaan keskusruutuun, niin torni (kuviossa kirjain A) peittää liikkumissuunnillaan 24 ruudusta 8 ja lähetti samoin 8 (kuviossa kirjainten B ja F peittämät ruudut). Silloin jäljelle jää vielä ulommalle puolustusvyöhykkeelle 8 peittämätöntä ruutua. Kuten 6. luvussa kävi ilmi, niin nämä ruudut voidaan peittää ratsulla. Näin ratsun erikoisena pidetty liikkumistapa sai johdonmukaisen selityksen. Tämä selitys saa edelleen tukea siitä, että shakin edeltäjässä shaturangassa (aliluku 4.2.1) lähetti, *fil*, liikkui vain yhden askelen kerrallaan (Kuvio 117, nappula B) (Eales 1985). Tälle esitellylle kahden askelen reviirialueelle sijoitettuna lähetti, joka olisi liikunut kuten shaturangan *fil*, olisi peittänyt siis vain 4 ruutua eli ulomman vyöhykkeen kulmaruudut. Sisemmän puolustusvyöhykkeen 4 kulmaruutua peitti kuningattaren edeltäjä, *firzan* (Kuvio 117, nappula F), joka shaturangassa liikkui ainoastaan yhden askeleen viistoon.

B				B	B		A		B
	F		F			F	A	F	
						A	A		A
	F		F			F	A	F	
B				B	B		A		B

KUVIO 117 Shaturangan *fil* ja *firzan*

Tätä peliarkkitehtuuria käyttäen shakki on mahdollista siirtää samoin säännöin myös toisenlaisille alustoille, kuten tehtiin 6. ja 7. luvuissa. Tasopinta voidaan jakaa tasaisesti säännöllisillä monikulmioilla täsmälleen kolmella eri tavalla, kuten aiemmin luvussa 3 kerrottiin, neliöillä, kolmioilla ja kuusikulmioilla. Kun pelialusta rakennetaan kuusikulmioilla samalla linnoitusperiaatteella, niin saadaan kolme linnaketta, kuten selvitettiin aliluvussa 6.2.1 (kuvio 80). Mikäli reviirin vyöhykkeitä on kaksi, kuten edellä, niin shakkilaudan kooksi saadaan 46 kuusikulmiota. Kuusikulmioalustalla kuitenkin kahden puolustusvyöhykkeen reviirin peittämiseen riittää jo kaksi upseeria eli torni ja lähetti. Ratsun saamiseksi mukaan pelimalliin on pelinappulaksi lisättävä vielä kolmas vyöhyke,

jolloin kentän kooksi saadaan 87 kuusikulmiota. Kun nappulat sijoitetaan laudan kulmiin, niin saadaan aidosti kolmen pelaajan pelattava shakkipeli, jossa on samat säännöt kuin shakissa. "Aidosti" tarkoittaa tässä sitä, että kaikki kolme pelaajaa ovat symmetrisesti samassa asemassa suhteessa toisiinsa. Ainoa epäsymmetrisyys syntyy siirtojärjestyksestä. Jos kolme pelaajaa, a, b ja c, tekevät siirtonsa järjestyksessä a - b - c - a ..., niin esimerkiksi pelaaja a on eri asemassa kahteen muuhun pelaajaan nähden, kuin jos siirtojärjestys olisi b - a - c - b Tämäkin epäsymmetrisyys olisi mahdollista poistaa jos käytetään satunnaisuutta tai jotain muuta siirtojärjestyksen pelin aikana vaihtavaa sääntöä.

Tasolla on siis mahdollista rakentaa symmetrinen pelialusta enintään kolmelle pelaajalle, joten seuraavaksi on tutkittava millaisia pelialustoja on mahdollista rakentaa, kun ulottuvuuksien määrä $n > 2$ ja onko niille mahdollista sijoittaa useampi kuin kolme pelaajaa symmetrisesti toisiinsa nähden?

8.1.1 Hyperkuutiomalli

Kun pelialustaa lähdetään sijoittamaan tasoa ylempiin euklodisiin ulottuvuuksiin, niin tulee ongelmaksi tilan tasainen jakaminen. Tasopinta voidaan siis jakaa tasaisesti kolmella eri tavalla, mutta kolmiulotteinen tila vain yhdellä tavalla, kuutioilla. Sama koskee korkeampia ulottuvuuksia, joissa tasainen jakaminen onnistuu vain hyperkuutiomallilla. Nelikulmiolla on nimensä mukaisesti neljä kulmapistettä. Siis 4 kulmapistettä ja 4 yksiulotteista viivaa eli sivua, rajaavat kaksiulotteista pintaa. Kolmiulotteista kuutiota rajaavat 8 kulmapistettä, 12 särmää ja 6 kaksiulotteista nelikulmiota. Yleisesti n-ulotteista hyperkuutiota rajaavien k-ulotteisten hyperkuutioiden, kun $k = 0, \dots, n-1$, määrä on $2^{n-k} \binom{n}{k}$, missä $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ (Coxeter 1973). Esimerkiksi neljiulotteista hyperkuutiota rajaavat $2^{4-0} \binom{4}{0} = 2^4 = 16$ kulmapistettä, $2^{4-1} \binom{4}{1} = 32$ särmää, $2^{4-2} \binom{4}{2} = 24$ nelikulmiota ja $2^{4-3} \binom{4}{3} = 8$ kolmiulotteista kuutiota.

N-ulotteista hyperkuutiota rajaavien k-ulotteisten ($k=0, \dots, n-1$) pintojen lukumääriä havainnollistaa oheinen taulukko 4. Vasemmalla hyperkuution ulottuvuus n ja seuraavilla sarakeilla rajaavat pinnat eri ulottuvuuksissa.

Taulukko 5 Hyperkuutiota rajaavien pintojen lukumäärät

k =	0	1	2	3	4	5
n						
1	2	1				
2	4	4	1			
3	8	12	6	1		
4	16	32	24	8	1	
5	32	80	80	40	10	
6	64	192	240	160	60	12

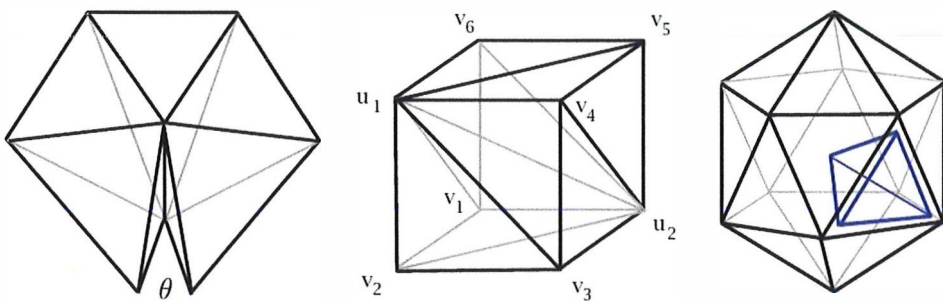
Useamman kuin kahden pelaajan sijoittaminen symmetrisesti toisiinsa nähden hyperkuutiomallissa on erittäin hankalaa, eikä onnistu samalla tavalla eri ulottuvuuksissa. Helppona esimerkkinä voidaan ottaa kuutio. Neliölaudalla on vastakkain kaksi pelaajaa vastakkaisilla sivuilla. Kolmiulotteisessa avaruudessa on mahdollista sijoittaa neljä pistettä symmetrisesti toisiinsa nähden.

Kun pelaajien lukumäärällä jaetaan n -ulotteisen hyperkuution rajaavien k-ulotteisten pintojen lukumäärä, niin jako menee samalla tavoin tasan ainoastaan ulottuvuudessa $n-1$. Tässä ulottuvuudessa on kuitenkin vain kaksi pintaa, jotka ovat pistevieraita toistensa kanssa.

8.1.2 Tetraedrimalli

Seuraava varsin luonnolliselta tuntuva tapa pilkkoa kolmiulotteinen avaruus pelialustaksi on käyttää tetraedriä, joka tavallaan vastaisi kolmion käyttämistä kaksiulotteisella alustalla. Tetraedri näyttää rakenteensa puolesta siltä, että sillä voisi täyttää tilan säännöllisesti.

Näin päätteli aikoinaan myös Aristoteles (384 -322 eKr.), joka teoksessaan "De Caelo" eli "Taivaissa", päätteli, että tason vai jakaa säännöllisesti vain kolmella monikulmiolla, kolmiolla, neliöllä ja kuusikulmiolla, mutta tilan vain kahdella kappaleella, kuutiolla ja pyramidilla". Pyramidilla hän tarkoitti kolmisivuista pyramidia eli tetraedriä, jossa kaikki tahkot ovat tasasivuisia kolmioita. Tämä ei kuitenkaan pitänyt paikkaansa. Aristoteleen virheen todisti lopullisesti vääräksi vasta 1800 vuotta myöhemmin Paulus van Middelburg (1445 - 1534), joka toimi Padovassa, Italiassa, astrologian (!) professorina vuosina 1478 - 1481. (Lagarias & Zong 2012)



KUVIO 118 Kolme tapaa pakata tetraedrejä⁴⁶

Tarkastellaan kuviota 118. Vasemman puolimmaisessa piirroksessa on viisi tetraedriä liitetty yhteen yhden särmän kautta. Reunimmaisheet kaksi tetraedriä eivät kosketa toisiaan vaan väliin jää aukko, joka on kooltaan $7^\circ 21'$, koska tetra-

⁴⁶ (Lagarias & Zong 2012)

edrien kahden tahkon välinen kulma on $70^\circ 32'$ ja $360^\circ - 5 \cdot 7^\circ 32' = 7^\circ 21'$. Joten jos viisi tetraedriä kiinnitetään toisiinsa yhden särmän kautta niin väliin jää pieni rako kooltaan $360^\circ - 5 \cdot 7^\circ 32' = 7^\circ 21'$ ja tästä voidaan päätellä, että säännöllinen tetraedri ei voi täyttää tilaa tasaisesti. (Lagarias & Zong 2012).

Keskimmäisessä piirroksessa on pakattu 6 tetraedriä kuution sisälle. Koska kuutio puolestaan jakaa kolmiulotteisen tilan säännöllisesti, niin tällaisesta kuutio/tetraedri yhdistelmästä voisi periaatteessa rakentaa kolmiulotteisen pelialustan, mutta sen sisärakenne olisi varsin hankala. Tätä vaihtoehtoa kokeiltiin tämän tutkielman alkuvaiheessa.

Oikeanpuolimmaisessa piirroksessa on ikosaedrin sisälle pakattu 20 tetraedriä. Rakennelma on mielenkiintoinen koska tetraedrejä on saatu pakattua yhteen tilaan enemmän kuin kahdessa vasemman puoleisessa piirroksessa, mutta vähemmän hyödyllinen kuin keskimmäisen kuvan yhdistelmä, koska ikosaedreillä ei voi jakaa tilaa säännöllisesti kuten kuutioilla (Lagarias & Zong 2012).

Tetraedrin voisi myös yhdistää johonkin toiseen monitahokkaaseen, jolloin tilankin jakaminen tasaisesti onnistuisi. Yksi tällainen yhdistelmä on esimerkiksi kahdeksan tetraedrin ja kuuden oktaedrin yhdistelmä, joka jakaa tasaisesti kolmiulotteisen tilan. Tässäkin mallissa sisärakenne aiheuttaa ongelmia pelin sijoittamiseen.

Johtopäätöksenä edellisiin tarkasteluihin voidaan todeta, että tetraedrimallia voisi mahdollisesti käyttää pohjana kolmiulotteiselle pelialustalle, mutta malli tulisi olemaan rakenteeltaan sellainen, että selkeää jatkumoa sääntöjen määrittelyssä kaksiulotteisen pelin pohjalta on vaikea löytää. Tilanne hankaloituu edelleen kun siirrytään ylempiin ulottuvuuksiin eli vaikuttaa siltä, että tetraedrimalli ei ole se millä tavoiteltu ratkaisu, symmetrinen n-pelaajan pelialusta saadaan rakennettua.

8.1.3 Suutelulukumalli

Tasossa olevan kuusikulmioista koostuvan pelilaudan ruudut voitaisiin korvata myös ympyröillä, jolloin jokaista ruutua koskettaisi myös kuusi muuta samoin kuin kuusikulmiotakin. Tämä on todettavissa esimerkiksi kuvioista 94. Kolmiulotteisessa euklidisessä avaruudessa ympyrät voitaisiin korvata palloilla ja sijoittaa tetraedriin, jolloin neljä pelaajaa olisi symmetrisesti toisiinsa nähden. Pallon ympärille voidaan sijoittaa naapuriruuduiksi 12 muuta palloa. Yleistäminen korkeampiin ulottuvuuksiin kohtaa kuitenkin ongelmia sillä tällöin vastaan tulee ns. *suutelulukuongelma*, jota käsiteltiin jo 4. luvussa. Kaksiulotteisella tasolla voidaan ympyrän ympärille sijoittaa tasan kuusi samankokoista ympyrää eli tasolla suuteluluku on 6. Tasolle voidaan siis muodostaa ympyröitä käyttäen kuusikulmiolaudan kanssa identtinen pelialusta. Kun siirrytään 3-ulotteiseen avaruuteen, niin pallon pinnalle voidaan asettaa täsmälleen 12 samankokoista palloa, kuten edellä kerrottiin. Vastaavasti 4-ulotteinen pallo voidaan peittää tarkalleen 24:llä neliulotteisella pallolla. Tämän matemaattinen todistaminen on kuitenkin ollut erittäin vaikeaa ja niinpä 3-ulotteisen avaruuden suuteluluku todistettiin vuonna 1953 ja 4-ulotteisen vasta vuonna 2003

(Musin 2003). Näiden lisäksi on suuteluluvun tarkka arvo todistettu vain 8- ja 24-ulotteisissa avaruuksissa, kuten luvussa 4 selvitetään. Nämä todistukset olivat seurausta 4-ulotteisen avaruuden todistuksesta. Kaikissa muissa ulottuvuuksissa on tiedossa ainoastaan suuteluluvun suurin ja pienin mahdollinen arvo. Tästä johtuen myös pallorakenteen käyttäminen n -ulotteisen tetraedrin sisällä on ongelmallista.

8.1.4 Multinomikaavaan perustuva malli

Kuten aiemmin on muutaman kerran jo todettu, on neljä pelaajaa mahdollista sijoittaa symmetrisesti toisiinsa nähden ainoastaan kolmiulotteisessa avaruudessa. Pelilaudan siirtäminen korkeampiin ulottuvuuksiin mahdollistaa siis useampien pelaajien sijoittamisen laudalle siten, että he ovat samanlaisessa asemassa toisiinsa nähden. Kolmiulotteisen tetraedrin kaikki neljä kärkipistettä ovat symmetrisesti toisiinsa nähden. Mikäli pelaajia on viisi, niin symmetriseen pelialustaan tarvitaan 4-ulotteinen tetraedri eli pentachoron, jonka kaikki viisi kärkipistettä ovat sijoittuneet symmetrisesti toisiinsa nähden.

Tämä sama malli voidaan esittää myös *simpleksin* avulla. Simpleksi on on kolmion tai tetraedrin yleistetty merkintätapa eri ulottuvuuksissa. Piste on 0-simpleksi, jana 1-simpleksi, kolmio 2-simpleksi, tetraedri 3-simpleksi, *pentachoron* 4-simpleksi ja k -simpleksi n k -ulotteinen monipinta. Ulottuvuuksien kasvaessa yhdellä, kasvaa simpleksin kulmapisteiden määrä samoin aina yhdellä. Näin ollen voidaankin todeta, että jos sijoitetaan n pelaajaa symmetrisesti toisiinsa nähden, niin se voidaan tehdä $(n-1)$ -simpleksirakenteessa eli n pelaajan pelialustaan tarvitaan $(n-1)$ -ulotteinen säännöllinen monipinta.

Tämä sama asia ilmeni jo tetraedrimallin yhteydessä aliluvussa 8.1.2, jossa ongelmana oli mallin toimiva sisärakenne. Seuraavaksi lähdettiin hakemaan sisärakenteeseen erilaista ratkaisua, joka löytyikin tätä tutkielmaa tehdessä erään maanantai-aamun "heureka-ovalluksena". Ratkaisu on binomikaavan yleistys, multinomikaava sekä sen visuaalinen esitys.

8.1.5 Yhteenveto

Edellä esiteltiin neljä erilaista pelimallia, joilla haettiin rakennetta jonne symmetrisen monen pelaajan peli voitaisiin sijoittaa. Käytettävä pelin on tarkoitus perustua shakkiin. Ongelmana oli sekä toimivan ulko-, että sisärakenteen löytäminen. *Ulkorakenne* tarkoittaa mallia, jossa useampi pelaaja on samassa symmetrisessä asemassa. Koska n pistettä, ja siis n pelaajaa, ollakseen samassa asemassa toisiinsa nähden vaatii vähintään $n-1$ -ulotteisen tilan niin mallin rakenne oli tunnettava eri euklidisissa ulottuvuuksissa. Sisärakenne taas tarkoittaa tuon mallin sisätilan jakamista tasaisesti siten, että samanlainen jakamistapa toimii eri ulottuvuuksissa.

Tässä luvussa esitetyistä malleista hyperkuutiomallilla on selkeä ulkorakenne ja se sillä saadaan myös yhtä hyvä sisärakenne eli se jakaantuu säännöllisesti.

sesti hyperkuutioihin. Tälle mallille on helppo yleistää shakkinappuloiden lii-
keet ja se toimii hyvin kahden pelaajan pelialustana. Useamman pelaajaan alus-
taa sille on kuitenkin erittäin vaikea mielekkäästi sijoittaa.

Toisena esitelty tetraedrimalli on tavallaan hyperkuutiomallin vastakohta.
Tetraedri sopii ulkorakenteeltaan hyvin usean pelaajaan symmetrisen aseman
toteuttamiseen, mutta siinä tulee taas ongelmaksi sisärakenteen toteutus.

Kolmantena käsitelty suutelulukumalli toimisi sekä ulko-, että sisäraken-
teena, mutta yleistys korkeampiin ulottuvuuksiin ei toimi koska niissä ei ole
vielä saatu laskettua täsmällisiä suutelulukuarvoja.

Neljäntenä ja viimeisenä mallina olevassa multinomikaavaan perustusvas-
sa mallissa on ratkaistu tetraedrimallin sisärakenne ja siksi se otetaan käsittelyn
kohteeksi seuraavassa aliluvussa 8.2.

8.2 Shakkipelin upottaminen simpleksi-alustalle

Aritmeettisella kolmiolla on pitkä historia muinaisesta Kiinasta Blaise Pascaliin
ja tämän binomikaavaan. Kaksiulotteinen *Pascalin aritmeettinen kolmio* voidaan
yleistää kolmiulotteiseksi "*Pascalin*" *aritmeettiseksi tetraedriksi* ja neliulotteiseksi
aritmeettiseksi pentachoroniksi. Yleisesti kutsumme näitä laajennuksia *aritmeetti-*
siksi kolme- ja nelimonipinnoiksi. Monipinnasta, joka on selvitetty jo aiemmin ala-
luvussa 3.4.1, käytetään siis myös nimitystä polytooppi.

Multinomikertoimet ovat kertoimia multinomikaavassa, joka on binomi-
kaavan laajennus. Binomikaavan kertoimet voidaan esittää Pascalin kolmiolla.
Aivan samoin voidaan multinomikaavan kertoimet esittää aritmeettisillä n-
monipinnoilla.

8.2.1 Pascalin sääntö

Binomikertoimet sijaitsevat Pascalin kolmiossa seuraavasti:

1
1, 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1
...

Yllä on esitetty Pascalin kolmion ensimmäiset rivit, joista havaitaan jo sa-
toja vuosia Pascalin sääntönä tunnettu sääntö (Edwards 1987). Sääntön mukaan
yhdellä rivillä kahden vierekkäisen luvun summa on suoraan niiden alapuolel-
la seuraavalla rivillä. Siis esimerkiksi $1 + 2 = 3$ ja $4 + 6 = 10$ edellä kuvatussa
kolmiossa.

Binomikertoimet ovat k -kombinaatioita $C(p,k) = p!/k!(p-k)!$, missä p kuuluu luonnollisten lukujen joukkoon $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ja $k \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$. Pascalin kolmiossa binomikertoimet esiintyvät seuraavasti:

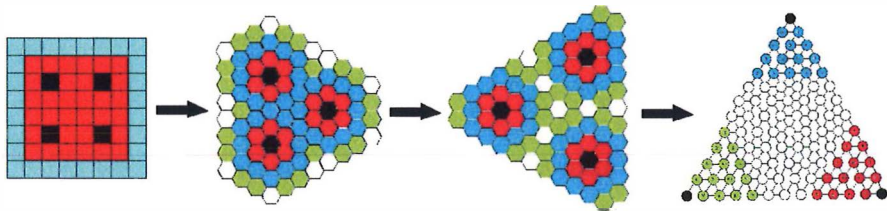
$C(0,0)$
 $C(1,0), C(1,1)$
 $C(2,0), C(2,1), C(2,2)$
 $C(3,0), C(3,1), C(3,2), C(3,3)$
 $C(4,0), C(4,1), C(4,2), C(4,3), C(4,4)$
 $C(5,0), C(5,1), C(5,2), C(5,3), C(5,4), C(5,5)$

...

Yleisesti huomataan Pascalin säännön mukaisesti, että $C(p+1, k+1) = C(p,k) + C(p, k+1)$, kun $p \in \mathbb{N}$ on rivi ja k ($k \in \mathbb{N}, k = 0, \dots, p+1$) on k :s kerroin kyseisellä rivillä.

8.2.2 Kolmen pelaajan malli upotettuna Pascalin kolmioon

Tässä tilanteessa, jossa haetaan ratkaisua sisärakenteelle, voidaan siis ottaa avuksi Pascalin aritmeettinen kolmio. Pascalin kolmio voidaan sijoittaa myös kuusikulmiorakenteeseen, jossa jokaisen kuusikulmion sisällä on yksi binomikerroin. Kun 6. luvussa esitellyn kolmen pelaajan kuusikulmiolaudan muotoa hieman muutetaan, niin se voidaan upottaa Pascalin kolmioon pelin säilyessä muutoin täysin samana. Kuviosta 119 selviää kuinka perinteisestä shakkilaudasta päästään linnake/reviiri periaatteella kuusikulmiolautaan ja kuinka kuusikulmiolautu upotetaan Pascalin kolmioon.

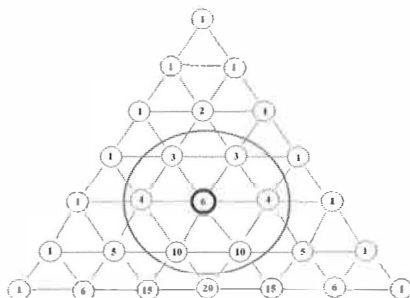


KUVIO 119 Shakkilaudan siirtäminen Pascalin kolmioon

Koska Pascalin kolmion jokaisen binomikertoimen paikka voidaan määrittää binomikaavan perusteella, niin aivan vastaavasti voidaan "Pascalin" n -ulotteisen tetraedrin jokaisen multinomikertoimen paikka määrittellä tarkalleen multinomikaavan perusteella. Multinomikertoimet muodostavat siis pelialustan koordinaatit, jolloin pelinappuloiden liikeradat voidaan esittää eksaktisti eriulotteisilla pelialustoilla. Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin pelilaudan rakennetta aloittaen yksinkertaisimmasta eli 2-ulotteisesta tasosta.

Kuten kohdassa 8.2.1 on selvitetty, saadaan alemmalla rivillä olevat kertoimet kahden yläpuolella olevan kertoimen summasta. Tältä pohjalta voidaan kullekin luvulle määrittää sen naapuriluvut sillä perusteella, että onko se jonkin muun luvun summan osa, joidenkin muiden lukujen summa tai mikä on sen

naapuriluku samalla rivillä. Esimerkiksi viidennen rivin kertoimen 6 naapurit ovat ylempällä rivillä molemmat luvut 3, sillä $3+3 = 6$ ja alemmalla rivillä molemmat luvut 10 sillä $4+6 = 10$ ja $6+4 = 10$. Lisäksi naapureita ovat molemmat luvut 4 samalla rivillä. Asia ilmenee selkeämmin, kun tämä Pascalin kolmion alkuosa esitetään kolmioverkkona (kuvio 120). Naapureita on siis yhteensä kuusi ja ne muodostavat samalla kyseisen numeron 6 ensimmäisen puolustusvyöhykkeen jos katsomme tätä kuviota pelilautana.



KUVIO 120 Puolustusvyöhyke 1 Pascalin kolmiossa

Kombinaationa esitettynä binomikerroin 6 on $C(4,2)$ ja sen naapurit ovat $C(3,1)$ sekä $C(3,2)$ (ylätasolla), $C(5,2)$ ja $C(5,3)$ (alatasolla) ja $C(4,1)$ ja $C(4,3)$ samalla tasolla. Yleisesti huomataankin, että kertoimen $C(p,k)$ naapurikertoimet ovat $C(p-1,k-1)$ ja $C(p-1,k)$ (ylätasolla), $C(p+1,k)$ ja $C(p+1,k+1)$ (alatasolla) ja $C(p,k-1)$ ja $C(p,k+1)$ samalla tasolla.

Tässä kombinaatioille on käytetty lyhyempää merkintätapaa, pidemmässä merkintätavasta $C(4,2)$ merkitään $C(4,2,2)$ ja $C(4,1)$ merkitään $C(4,1,3)$, missä ensimmäinen muuttuja on jäljellä olevien summa eli merkintätapaan on lisätty ylimääräinen kolmas luku, joka on saatu vähentämällä toinen luku ensimmäisestä. Jatkossa käytämme tätä pidempää merkintätapaa. Alla on kuvattu Pascalin aritmeettisen kolmion ensimmäiset rivit pidemmällä merkintätavalla. Jatkossa käytetään vain tätä merkintätapaa.

$C(0,0,0)$
 $C(1,0,1), C(1,1,0)$
 $C(2,0,2), C(2,1,1), C(2,2,0)$
 $C(3,0,3), C(3,1,2), C(3,2,1), C(3,3,0)$
 $C(4,0,4), C(4,1,3), C(4,2,2), C(4,3,1), C(4,4,0)$
 $C(5,0,5), C(5,1,4), C(5,2,3), C(5,3,2), C(5,4,1), C(5,5,0)$
 ...

8.2.3 Multinomikaava ja n-simpleksi

Aivan vastaavasti kuten binomikertoimet voidaan esittää Pascalin kolmiolla, niin voidaan trinomikertoimet esittää "Pascalin pyramidina", jota voidaan kut-

sua myö ”Pascalin tetraedriksi”. Kolmio on geometrisena kuviona 2-simpleksi ja tetraedri 3-simpleksi. Edelleen *kvadronikertoimet*⁴⁷ voidaan esittää neliulotteisella 4-simpleksialustalla eli pentachoronissa (pentatooppi, viisipinta). Yleisesti multinomikertoimet voidaan esittää n-ulotteisella n-simpleksi-alustalla.

Kuten edellä kaksiulotteisella Pascalin kolmiolla, voidaan myös n-simpleksillä määrittää seuraavan tason kertoimet edellisen tason kertoimien avulla. Jokainen simpleksin *taso* on ulottuvuudeltaan yhtä pienempi kuin itse simpleksi eli n-simpleksin tasot ovat n-1 ulotteisia. Tavallisessa kaksiulotteisessa Pascalin kolmiossa taso on yksiulotteinen rivi. Kun Pascalin kolmiossa minkä tahansa rivin kerroin saadaan kahden sen yläpuolella olevan rivin kertoimien summasta, niin esimerkiksi Pascalin tetraedrissä tason yksi kerroin saadaan sen yläpuolella edellisellä tasolla olevan kolmen kertoimen summasta. Vastaavasti pentachoronissa kerroin saadaan neljän edellisellä tasolla olevan kertoimen summasta.

Selvitetään seuraavaksi se, kuinka tämä laskutapa toimii yksityiskohtaisemmin. Otetaan seuraavaksi tarkastelun kohteeksi ulottuvuudet kolme, neljä ja viisi.

8.2.4 Symmetrinen 4 pelaajan malli 3-simpleksi-alustalla

Trinomikaavan kertoimet ovat muotoa $C(p, k_1, k_2, k_3)$, missä $k_1 + k_2 + k_3 = p$. Esimerkiksi trinomikertoimet potensseilla 0-3 ovat seuraavat:

Taulukko 6 Neljä ensimmäistä trinomia

Trinomi	kertoimet
$(x+y+z)^0 = 1$	1
$(x+y+z)^1 = x+y+z$	1, 1, 1
$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$	1, 1, 1, 2, 2, 2
$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy^2 + 3xz^2 + 3yx^2 + 3yz^2 + 3zx^2 + 3zy^2 + 6xyz$	1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 6

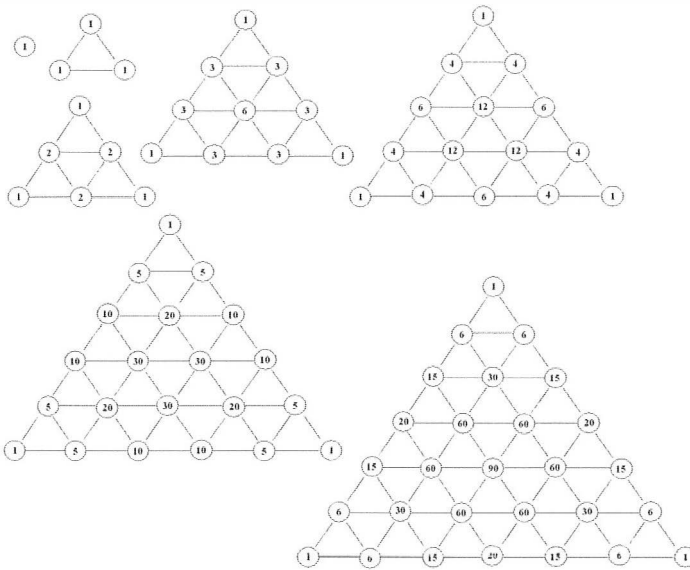
Kombinaatio $C(p, k_1, k_2, k_3)$	kertoimet
$x+y+z)^0 = 1$	$C(0,0,0,0)$
$(x+y+z)^1 = x+y+z$	$C(1,1,0,0), C(1,0,1,0), C(1,0,0,1)$
$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$	$C(2,2,0,0), C(2,0,2,0), C(2,0,0,2), C(2,1,1,0), C(2,1,0,1), C(2,0,1,1)$
$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy^2 + 3xz^2 + 3yx^2 + 3yz^2 + 3zx^2 + 3zy^2 + 6xyz$	$C(3,3,0,0), C(3,0,3,0), C(3,0,0,3), C(3,2,1,0), C(3,2,0,1), C(3,1,2,0), C(3,0,2,1), C(3,1,0,2), C(3,0,1,2), C(3,1,1,1)$

⁴⁷ kvadroni (quadrinomial) on neliterminen polynomi, vrt. binomi ja trinomi

Trinomikertoimet voidaan sijoittaa 3-simpleksi-alustalle eli kolmiulotteisen tetraedrin sisälle kuten kuviossa 123 siten, että ylimpänä kärkenä on trinomi $(x+y+z)^0$, jonka lukuarvo on 1. Seuraavalla tasolla on korotus potenssiin 1 eli kolme kerrointa ja kolme solmua, joiden jokaisen lukuarvo on 1. Vertaa kuvaa 121 ja taulukossa 5 olevaan yhtälöiden listaan. Kolmannella tasolla, joka on taso numero 2 koska tasojen numerointi alkaa 0:sta, on korotus potenssiin 2, jolloin kertoimia on kuusi kappaletta, joista kolme arvoltaan 1 ja kolme arvoltaan 2. Sijoitetaan kertoimet siten, että ne, joiden lukuarvo on 1, tulevat kulmiin ja ne, joiden lukuarvo on 2, tulevat keskelle. Samalla havaitaan, että tämän kolmion, joka on poikkileikattu tetraedrin siivu, sivuille muodostuu kaksiulotteisen Pascalin kolmion kolmas rivi 1, 2, 1. Kuviota 121 katsottaessa huomataankin, että kaksiulotteinen Pascalin kolmio toistuu tetraedrin tahkoilla.

Yleisemmin määriteltynä kertoimien sijoittaminen tetraedrillä tason k kolmioon tapahtuu siten, että kulmiin tulevat ne kertoimet, joiden arvo on 1 ja vastaavan muuttujan eksponentti on k . Sen jälkeen kolmion sivuille tulevat seuraavaksi kertoimet, joiden muuttujista löytyy eksponentti $k-1$. Näin jatketaan eli kertoimet sijoitetaan kolmion sivuille muuttujien laskevan korkeimman eksponentin mukaan. Mikäli kahdella eri kertoimella on yhtä suuri korkein muuttujan eksponentti, niin järjestys määräytyy seuraavaksi korkeimman eksponentin mukaan. Muuttujiaan on trinomissa kolme ja niillä jokaisella eksponentit. Tämän hahmottaa parhaiten kun katsoo taulukon 5 alinta yhtälöä ja sen kertoimien sijoittumista kuviossa 121 olevaan 10 solmun kolmioverkkoon.

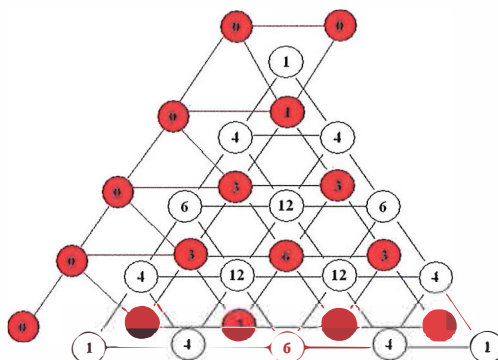
Kun yhden kolmioverkon sivujen solmut on täytetty kertoimien arvoilla, niin siirrytään samalla tasolla seuraavaan sisäkolmioon ja menetellään samalla tavalla. Näin jatketaan kunnes ollaan kolmion keskustassa. Siellä muuttujien eksponentit ovat arvoltaan pienimmät ja kertoimet puolestaan suurimmat. Kuviossa 123 on esitetty trinomikertoimien paikat alkutasoilla 0 – 6 tetraedrin sisällä. Nämä kertoimien paikat määritellään vielä eksaktimmin, aliluvussa 8.2.6, käyttäen kombinaatioesitystä.



KUVIO 121 Trinomikaavan kertoimet Pascalin tetraedrissä

Kun katsotaan tässä kolmiulotteisessa mallissa kertoimien keskinäistä suhdetta, niin ilmenee, samalla tavoin kuin kaksiulotteisessa tapauksessa, että alemmalla tasolla olevat kertoimet saadaan yläpuolella olevien summasta. Kolmen ylemmällä tasolla kertoimen summa antaa niiden alapuolella olevan kertoimen kuvion 122 esittämällä tavalla. Ylempi taso on merkitty punaisilla solmuilla ja kolmen punaisen solmun muodostaman kolmion, jossa on kaksi solmua ylhäällä ja yksi alhaalla, keskellä olevan valkoisen solmun luku, on noiden kolmen edellisen summa. Tetraedrissä siis valkoiset solmut ovat punaisten alapuolisella tasolla. Kuvaan on lisätty myös vasemmalle muutamia ulkopuolisia 0-solmuja, jotka osoittavat saman laskentamenetelmän pätevän myös tason reunasolmujen kohdalla. Kaikki summat muodostuvat siis joka toisesta kärjellään seisovasta kolmiosta, joista ylin on kuviossa punaisilla solmuilla merkitty kärjellään seisova kolmio solmuilla 0, 0, 1.

Välisten kolmioiden, siis kuviossa kannallaan seisovien punaisten kolmioiden, summilla ei tässä tarkastelussa ole merkitystä. Voidaan kuitenkin esimerkin vuoksi todeta, että kuviossa tällaisten kolmioiden summat ovat ylhäältä aloittaen ja oikealta vasemmalle lukien 1, 1, 3, 7, 3, 3, 12, 12, 3, 1, 7, 12, 7, 1. Näilläkin summilla saattaa olla merkitystä jossain toisessa yhteydessä.

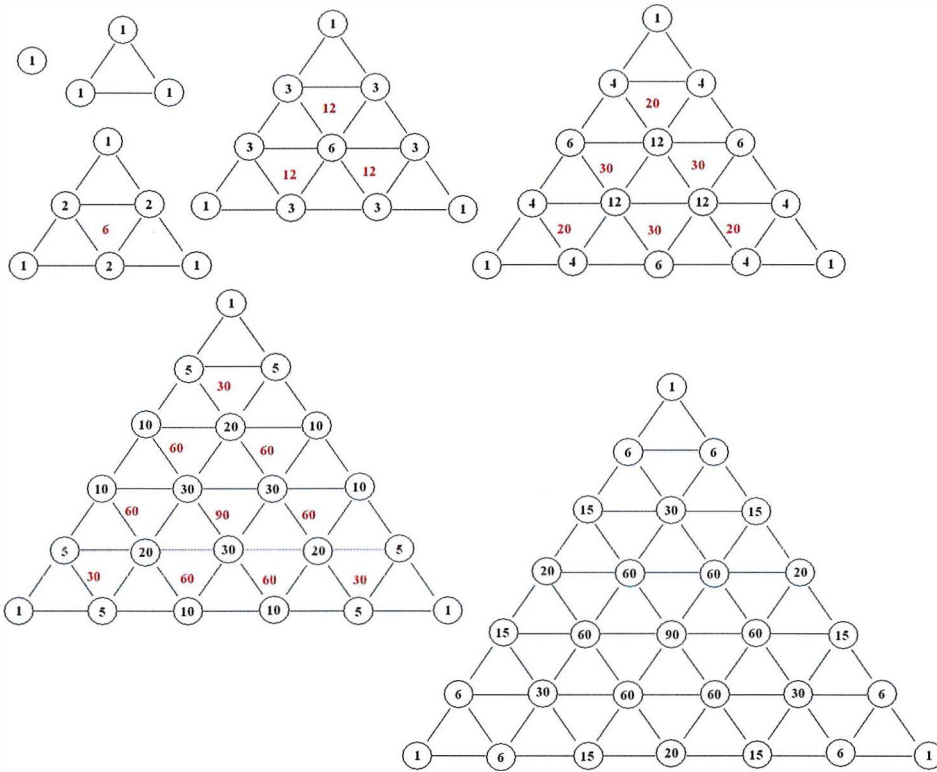


KUVIO 122 Tason 4 summien muotoutuminen Pascalin tetraedrissä

Tältä samalta pohjalta voidaan naapurit määrittellä myös kolmiulotteisessa mallissa. Tarkastellaan kuviota 123, jossa on esitetty sisäsummat seitsemälle ensimmäiselle tasolle. Kuten Pascalin kolmiossa, niin myös Pascalin tetraedrissä voidaan kullekin kerroinsolmulle määrittää sen naapurisolmut sillä perusteella, että onko se jonkin muun luvun summan osa tai mikä on sen naapurisolmu samalla tasolla. Esimerkiksi kuvassa kuudennen tason luvun 30 naapurit ovat ylemmällä tasolla luvut 6, 12 ja 12 sillä $6+12+12 = 30$. Alemmalla tasolla naapuriluvut ovat 60, 60 ja 90 sillä $30+10+20 = 60$ ja $30+30+30 = 90$. Näissä 30 on siis summien osatekijänä. Lisäksi naapureita ovat viereiset luvut 10, 20, 30, 30, 20 ja 10 samalla kuudennella tasolla. Luvun 30 solmulla on siis yhteensä 12 naapurisolmua.

Kombinaatioina trinomikertoimen $30 = 5!/2!2!1! = C(5,2,2,1)$ naapurit voidaan esittää tarkemmin määriteltyinä ja ne ovat ylätasolla $6 = C(4,2,2,0)$, $12 = C(4,2,1,1)$ ja $12 = C(4,1,2,1)$, alatasolla $90 = C(6,2,2,2)$, $60 = C(6,2,3,1)$ ja $60 = C(6,3,2,1)$, sekä samalla tasolla $10 = C(5,3,2,0)$, $10 = C(5,0,2,3)$, $20 = C(5,3,1,1)$, $20 = C(5,1,3,1)$, $30 = C(5,2,1,2)$ ja $30 = C(5,1,2,2)$. Katso kuviota 123.

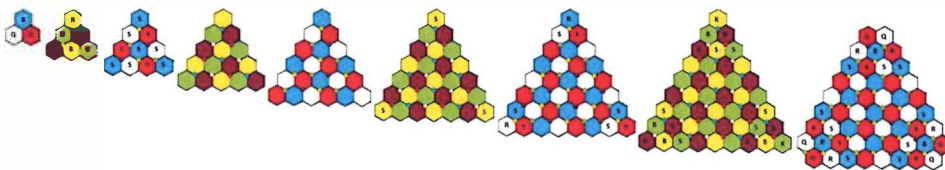
Yleisesti pätee, että kertoimen $C(p,k_1,k_2,k_3)$ naapurikertoimet ovat ylätasolla $C(p-1,k_1,k_2,k_3-1)$, $C(p-1,k_1,k_2-1,k_3)$ ja $C(p-1,k_1-1,k_2,k_3)$, alatasolla $C(p+1,k_1,k_2,k_3+1)$, $C(p+1,k_1,k_2+1,k_3)$ ja $C(p+1,k_1+1,k_2,k_3)$, sekä samalla tasolla $C(p,k_1+1,k_2,k_3-1)$, $C(p,k_1-2,k_2,k_3+2)$, $C(p,k_1+1,k_2-1,k_3)$, $C(p,k_1-1,k_2+1,k_3)$, $C(p,k_1,k_2-1,k_3+1)$ ja $C(p,k_1-1,k_2,k_3+1)$.



KUVIO 123 Tasojen 1-6 sisäsommien muotoutuminen Pascalin tetraedrissä

8.2.5 Pelialusta ja hyperupseerityypit

Neljän pelaajan symmetrinen pelialusta voidaan toteuttaa myös konkreettisesti reaali maailmassa kuvassa 126 esitetyn pelilaudan avulla, jossa on vasemmalta oikealle tasot 1 - 9.



KUVIO 124 Neljän pelaajan symmetrisen shakin pelialusta

Kuten huomataan, niin pelialustassa on käytetty kuutta eri väriä, jotta naapuruudet olisivat erivärisiä. Tetraedrimallinen pelialusta on siis kuusivärityvä. Kuuden värin tarve on helppo todeta esimerkiksi kuviosta 124. Otetaan esimerkiksi tasolla 3 keskellä oleva solmu, jossa on kerroin 6. Mikäli se merkitään vä-

rillä A, niin sen naapureina samalla tasolla olevat solmut (kerroin 3) voidaan värittää kahdella värillä B ja C, koska solmun asteluku on parillinen, eli keskellä olevan solmun ympärillä kiertää väriketju $B - C - B - C - B - C$. Jos se olisi pariton, niin silloin värejä tarvittaisiin yksi enemmän. Solmun 6 naapurisolmuina alemmalla tasolla 4 on kolme solmua, solmut joissa on kerroin 12. Näistä solmuista jokainen on naapurisolmuna paitsi solmulle 6, niin myös kahdelle solmun 6 viereiselle solmulle, joissa on kerroin 3. Tästä johtuen mikään solmuista kertoimella 12 ei voi olla väriä A, B tai C. Koska solmut 12 ovat myös toistensa naapurit, ne ovat kaikki eri väriä, joten tarvitaan lisävärit D, E ja F. Koska samalla tasolla riittää kolme väriä, niin enempää uusia värejä ei tarvita. Koska tason 3 yläpuolella oleva taso 2 ei ole kosketuksissa tason 4 kanssa, niin nämä kaksi tasoa voita käyttää samoja värejä.

Aiemmin luvussa 7 yleistettiin upseerit kahteen tyyppiin, hyperratsuihin ja hyperlähetteihin. Upseereille annettiin yleisnimitys hyperupseerit. Kaksiulotteisilla neliöruutulaudoilla olevia hyperupseereista erotettiin hyperlähetit ja hyperratsut toisistaan sen perusteella pysyivätkö ne siirrettäessä aina samanvärisillä ruuduilla vai eivät. Laajennetulla kaksiulotteisella kuusikulmiolaudalla ja moniulotteisella simpleksialustalla ruutujen värimäärä kasvaa ja sen seurauksena hyperratsut voivat siirtyä useampaan erivärisen ruutuun. Syntyy siis erilaisia liikkumiskombinaatioita. Näiden upseerityyppien luokittelu ei kuulu tämän tutkielman sisältöön, mutta on mahdollinen jatkotutkimuskohde.

8.2.6 Koordinaattien määräytyminen simpleksi-alustalla

Selvitetään kuinka yksittäisen solmun paikka määräytyy simpleksi-alustalla eri ulottuvuuksissa.

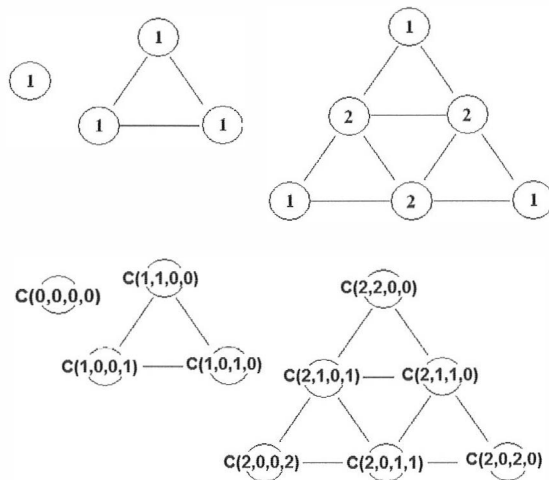
Kaksiulotteisella alustalla eli 2-simpleksillä, joka upotettiin tavalliselle Pascalin aritmeettiselle kolmiolle, kombinaatiot sijoittuivat edellä kerrotun tavoin seuraavasti:

$C(0,0,0)$
 $C(1,0,1), C(1,1,0)$
 $C(2,0,2), C(2,1,1), C(2,2,0)$
 $C(3,0,3), C(3,1,2), C(3,2,1), C(3,3,0)$
 ...

Kombinaatiossa $C(p, k_1, k_2)$ kertoo muuttuja p siis rivin. Muuttujat k_1 ja k_2 kertovat kombinaation sijainnin laskien vasemmasta ja oikeasta reunasta paikoissa k_1+1 ja k_2+1 . Siis esimerkiksi $C(3,1,2) = 3$ sijaitsee Pascalin kolmion 3. rivillä vasemmalta lukien toisena ja oikealta lukien kolmantena. Luonnollisesti tämä numerointi poikkeaa aiemmissa luvuissa esitellyn kolmishakin numeroinnista, mutta on varsin helposti muunnettavissa siihen käyttämällä kombinaation ensimmäisen muuttujan paikalla kirjaimia ja ottamalla numeroarvoksi toinen muuttuja. Tämä numerointi on johdettu Pascalin aritmeettisestä kolmiosta ja

binomikaavasta, kun taas kolmishakissa numeroinnin lähtökohtana oli yhteensopivuus perinteisen shakin numeroinnin kanssa.

Kolmiulotteisessa mallissa, 3-simpleksissä eli tetraedrissä, kombinaatiot ovat muotoa $C(p, k_1, k_2, k_3)$. Kombinaatioiden $C(p, k_1, k_2, k_3)$, paikat määräytyvät siten, että tetraedrin yhdessä kärkipisteessä kaikki muuttujat p , k_1 , k_2 ja k_3 saavat arvon 0 eli kärkipisteessä on $C(0, 0, 0, 0) = 1$.

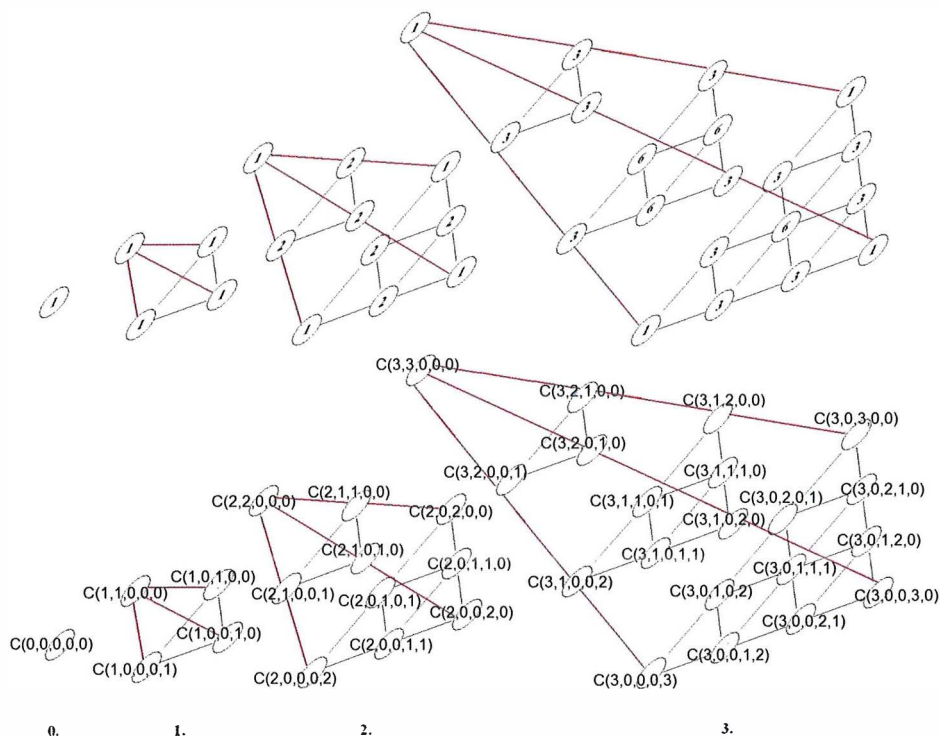


KUVIO 125 Trinomikaavan kertoimet kombinaatioesityksenä

Havainnollisuuden vuoksi voidaan olettaa, että kyseessä on kolmisivuisen pyramidin, tetraedrin, ylhäällä oleva kärkipiste $C(0, 0, 0, 0)$. Tämän jälkeen mennään tetraedrin tasokolmioita annetusta kärkipisteestä alaspäin tasolle 2, jolloin p :n arvo kasvaa 0:sta 2:een. Alimmalla tasokolmiolla eli tetraedrin pohjalla kombinaatiot ovat näin ollen muotoa $C(2, k_1, k_2, k_3)$. Tämän alimpana olevan tasokolmion kunkin sivun jokaisessa kombinaatiosolmussa saa jokin muuttujista k_1 , k_2 tai k_3 aina arvon 0 ja sivua vastapäätä olevassa kolmion kärkisolmussa arvon 2. Sivun ja kärkipisteen välisissä solmuissa muuttujan arvo kasvaa 0:sta n :ään rivi kerrallaan. Asiaa havainnollistaa kuvio 125. Siinä k_3 saa kuvan kolmiossa oikealla arvon 0, k_2 vasemmalla ja k_1 alhaalla. Kun edetään tässä alimmassa tasokolmiossa (kuvassa oikealla) kultakin sivulta kohti vastapäistä kärkisolmua kasvavat kombinaatiossa olevien muuttujien arvot 1:een ja kärkisolmussa 2:een.

Neliulotteisessa mallissa (kuvio 126), 4-simpleksi eli pentachoronissa, kombinaatiot ovat *kvadrinomikaavan* kertoimia ja muotoa $C(p, k_1, k_2, k_3, k_4)$. Yhteen pentachoronin viidestä kärjestä sijoitetaan kombinaatio $C(0, 0, 0, 0, 0) = 1$. Tämä kärkisolmu muodostaa samalla tason 0, jota kombinaatiossa edustaa ensimmäinen parametri. Pentachoronin seuraavat tasot muodostuvat tetraedreistä, joista pie-

nimmässä tasolla 1, on ainoastaan neljä solmua eli tetraedrin kärkisolmut. Näiden solmujen koordinaatit ovat $C(1,1,0,0,0) = 1$, $C(1,0,1,0,0) = 1$, $C(1,0,0,1,0) = 1$ ja $C(1,0,0,0,1) = 1$.



KUVIO 126 Kvadrinomikaavan kertoimet kombinaatioesityksenä

Yleisesti n -ulotteisessa simpleksissä, jossa kombinaatiot ovat muotoa $C(p, k_1, k_2, \dots, k_n)$, missä $p = \sum_{i=1}^n k_i$, määräytyy kunkin kombinaation sijainti seuraavalla tavalla.

Yhdessä simpleksin kärjistä on kombinaatio aina muotoa $C(0,0,0,0, \dots, 0)$, jossa muuttujien, eli tässä tapauksessa nollien, määrä on $n+1$. Tätä n -simpleksin kärkisolmua vastapäätä olevalla $(n-1)$ -ulotteisella reunatasolla, joka on $(n-1)$ -simpleksi, p saa arvon $p = s - 1$, missä s on simpleksin "suuruus" eli kullakin särmällä olevien solmujen lukumäärä.

Kombinaation $C(p, k_1, k_2, \dots, k_n)$ ensimmäinen muuttuja $p \in [0, s-1]$ kertoo millä $(n-1)$ -ulotteisella tasolla n -simpleksissä kombinaatio sijaitsee kun lähtösolmuna on kombinaatio $C(0,0,0,0, \dots, 0)$. Muuttuja k_1 kertoo etäisyyden johonkin pohjatasona olevaan $(n-2)$ -simpleksiin, jossa k_1 :n arvo on 0. Muuttuja k_2 kertoo etäisyyden toiseen pohjatasona olevaan $(n-2)$ -simpleksiin, jossa k_2 :n arvo on 0. Ja niin edelleen, kunnes muuttuja k_n kertoo etäisyyden johonkin pohjatasona olevaan $(n-2)$ -simpleksiin, jossa k_n :n arvo on 0. Muuttujille pätee $k_i \in [0, s]$ ja $i \in [0, n]$.

Muuttuja p eroaa siis muista siinä, että sen lähtötaso eli 0-taso on kärkisolmu, kun muilla parametreilla lähtötasona on jokin n -simpleksin $(n-1)$ -ulotteinen reunasimpleksi. Syynä tähän on havainnollisuus, mutta algoritmissa p voidaan aina korvata muuttujalla $k_0 = s - p$, jonka 0-taso alkaa myös reunalla olevasta $(n-1)$ -simpleksistä.

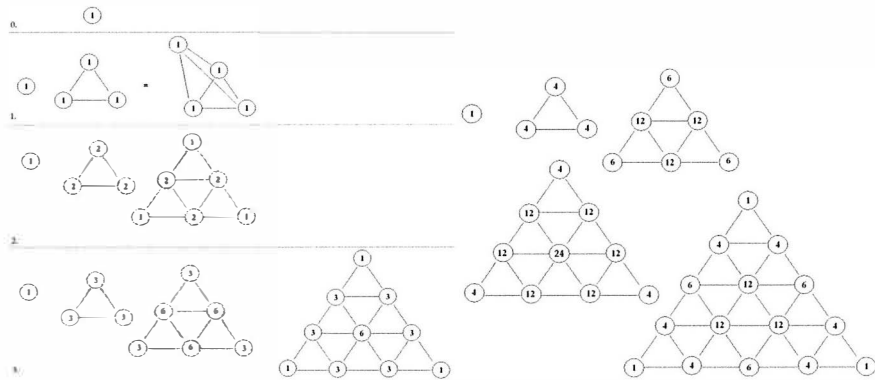
Edellä kuviossa 126 paikan määräytyminen selvitetään pentachoronissa. Selvyyden vuoksi esitetään sama uudelleen tällä yleisellä esitystavalla. Neliulotteisessa 4-simpleksissä eli pentachoronissa, jossa kombinaatiot ovat muotoa $C(p, k_1, k_2, k_3, k_4)$, määräytyy kunkin kombinaation sijainti seuraavalla tavalla.

Yhdessä simpleksin kärjistä on kombinaatio aina muotoa $C(0, 0, 0, 0, 0)$, jossa muuttujien, eli tässä tapauksessa nollien, määrä on $4+1=5$. Tätä pentachoronin kärkisolmua vastapäätä olevalla kolmiulotteisella reunatasolla, joka on tetraedri, $p = s - 1$, missä s on siis simpleksin "suuruus" eli kullakin särmällä olevien solmujen lukumäärä. Kuvion 128 esimerkissä $s = 4$.

Kombinaation $C(p, k_1, k_2, k_3, k_4)$ ensimmäinen muuttuja $p \in [0, 3]$ kertoo millä kolmiulotteisella tetraedritasolla 4-simpleksissä eli pentachoronissa kombinaatio sijaitsee kun lähtösolmuna on kombinaatio $C(0, 0, 0, 0, 0)$. Muuttuja k_1 kertoo etäisyyden yhteen pohjatasona olevaan 2-simpleksiin, eli tässä tapauksessa tetraedrien sisällä olevaan yhteen kolmiotahkoon, jossa k_1 :n arvo on 0. Muuttuja k_2 kertoo etäisyyden toiseen pohjatasona olevaan 2-simpleksiin eli yhteen kolmiotahkoon, jossa k_2 :n arvo on 0. Samoin k_3 ja k_4 kertovat etäisyydet niihin pohjatasoina oleviin kolmiotahkoihin, joissa niiden arvo on 0.

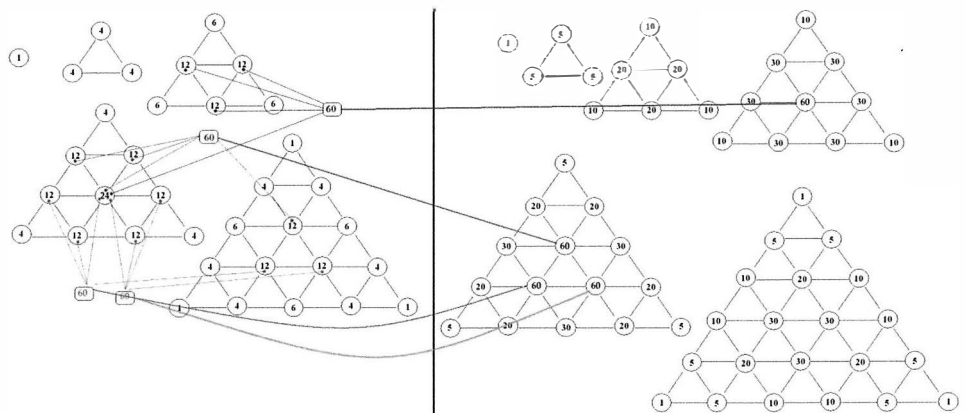
8.2.7 Symmetrinen 5 pelaajan malli 4-simpleksi-alustalla

Jatketaan luvussa 8.2.4 aloitettua pelialustojen tarkastelua yksi ulottuvuus ylöspäin ja otetaan kohteeksi neliulotteinen pentachoron. Pentachoronissa eli 4-simpleksissä kvadrinomikaavan kertoimet ovat sijoittuneet siten, että jokainen taso on oma tetraedrinsa, joka kasvaa tason kasvaessa. Kuviossa 127 on neljä ensimmäistä tasoa esitettynä kerroksittain. Tason 2 tetraedri on esitetty erikseen havainnollisuuden vuoksi myös kolmiulotteisena mallina. Kolmiulotteinen malli on oikeanpuolimmaisain neljän solmun verkko. Taso 4 on kuviossa oikealla.



KUVIO 127 Tasot 1 - 4 Pascalin pentachoronissa

Myös tässä ulottuvuudessa kertoimet saadaan edellisen tason summista. Kun 2-ulotteisella tasolla summa muodostui kahdesta ylemmällä rivillä olleesta kertoimesta ja 3-ulotteisessa tilassa ylemmällä tasolla olevan kolmen solmun kolmion kärkipisteissä olevista kertoimista, niin 4-ulotteisessa pentachoronissa summa saadaan ylemmällä tasolla olevan neljän solmun tetraedrin kulmapisteiden solmuissa olevista kertoimista. Asiaa on havainnollistettu kuviossa 128, jossa vasemmalla on osa pentachoronin neljännen tason tetraedristä, ja oikealla osa viidennen tason tetraedristä. Väreillä on osoitettu minkä neljännen tason tetraedrin kertoimien summista ne viidennen tason kertoimet, joiden lukuarvo on 60, on saatu.

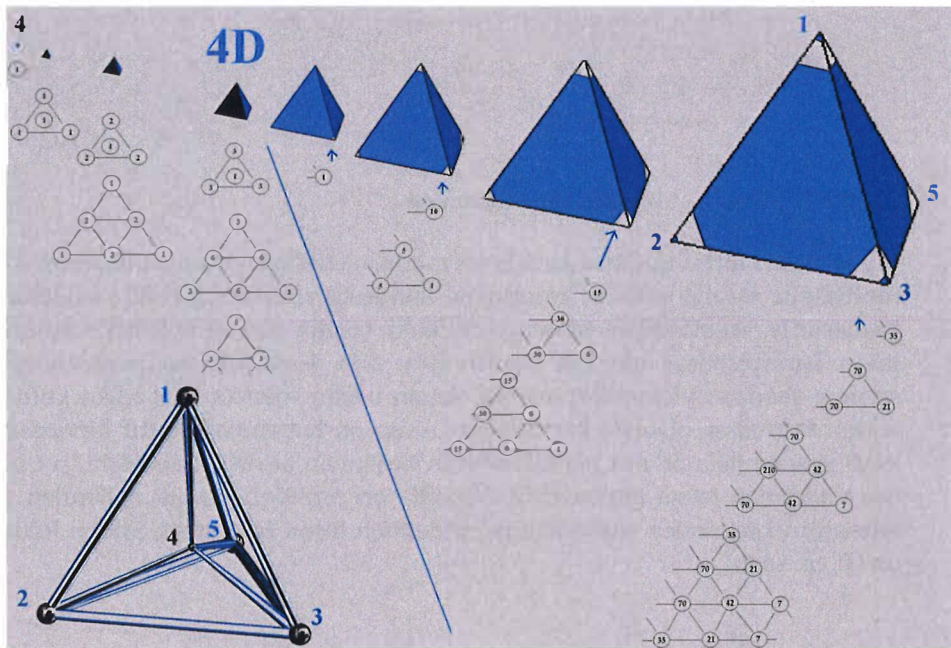


KUVIO 128 Tasosumman muotoutuminen Pascalin pentachoronin tasolla 5

Pentachoronissa samalla tasolla olevien naapurikertoimen määrä on sama kuin kolmiulotteisessa tetraedrissä kaikkien naapureiden lukumäärä eli 12. Näin ollen naapurikertoimia on neljiulotteisessa tilassa yhteensä $4 + 12 + 4 = 20$. Kuviossa 129 esitetään vielä pelaajien sijoittuminen pelialustalle 4-simpleksimallissa. Neljän pelaajan aloitusalueet ovat oikealla olevien kolmen suuren tetraedrin

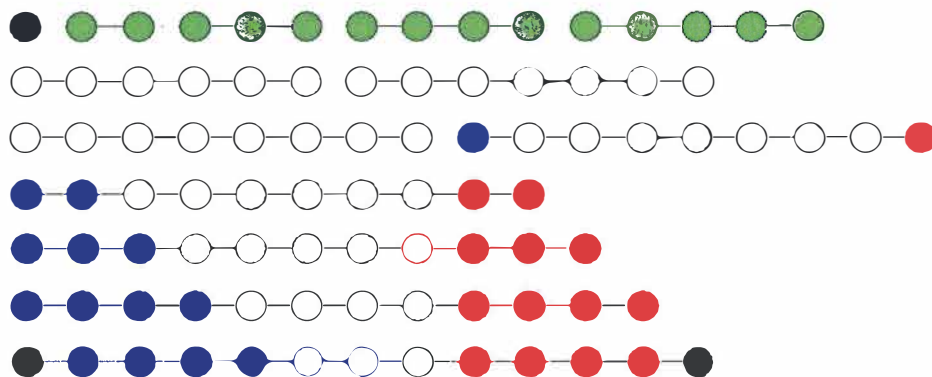
kulmissa ja viidennen alue käsittää vasemmalla olevat kolme pientä mustaa tetraedriä kokonaisuudessaan.

Tässä mallissa ei ole vielä määritelty yksityiskohtaista nappuloin sijoitustapaa, mutta oletusarvona ne sijoittuvat jokaiseen kulmaan kolmelle tasolle jolloin pelaajien välille jää yksi tyhjä taso. Jokaisen kulman kärkisolmu jää pois pelilaudasta.



KUVIO 129 Viiden pelaajaosapuolen sijoittuminen pentachoronin nurkkiin

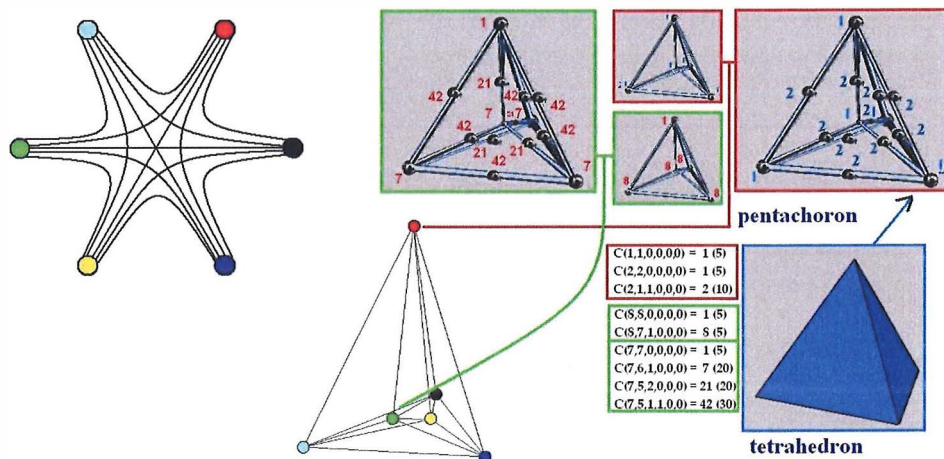
Edellinen neliulotteinen projisiokuva on helpompi ymmärtää jos kuvataan kolmen pelaajan asetelmaa Pascalin kolmiossa samanlaisella kuvaustavalla eli projisioina 1-ulotteiseen avaruuteen (kuvio 130). Vertaa aiempaan kuvioon 119, jossa äärimmäisenä oikealla on sama malli 2-ulotteisesti esitettyinä.



KUVIO 130 Pascalin aritmeettinen kolmio 1-ulotteisella tasolla

8.2.8 Symmetrinen 6-pelaajan malli 5-simpleksi-alustalla

Viimeisenä esimerkkinä otetaan yksityiskohtaiseen tarkasteluun viisiulotteiseen hexateroniin upotettu pelialusta. Pascalin aritmeettisessä kolmiossa binomikaavan kertoimet on visuaalisesti sijoitettu riveille, joiden koko kasvaa mentäessä ylemmältä tasolta alemmalle. Vastaavasti *hexateronissa* eli 5-simpleksissä *pentanomikaavan* kertoimet ovat pentachoronitasoilla, joiden kokoa kasvaa mentäessä ylemmältä tasolta alemmalle. Tähän esimerkkiin on otettu pelialusta, jolla on 8 tasoa.



KUVIO 131 Kuuden pelaajan symmetrinen malli hexateron alustalla

Hexateron on 5-ulotteinen säännöllinen monipinta, jonka rajoittaa ulkopuolisesta avaruudesta 6 pentachoronia, 15 tetraedriä, 20 kolmiota, 15 särmää ja 6 kärkipistettä.

Kuten aiemmissakin tapauksissa, kertoimet saadaan edellisen alemman ulottuvuustason summista siten, että yhden kerroinsoilmun summa saadaan ylempällä tasolla olevien pentachoronin viidestä kulmapisteestä.

Kerrointen sijoittumista hexateroniin on havainnollistettu kuviossa 131, jossa punaisella suorakulmiolla on reunustettu piirrokset hexateronin yläosan kaksi ensimmäisen tason pentachorina, sekä erikseen punaisen suorakulmion sisälle vastaavat kertoimet (suluissa niiden lukumäärät). Ensimmäisellä tasolla on viisi solmua, joiden lukuarvot ovat $C(1,1,0,0,0) = 1$. Toisella tasolla viisi kulmasolmua saavat samoin arvot 1 sillä $C(2,2,0,0,0) = 1$. Välejä pentachoronissa on 10 ja niiden keskellä olevat solmut saavat arvot $C(2,1,1,0,0) = 2$. Kombinaatioiden $C(2,1,1,0,0)$ määrähän on $5!/2!3! = 10$.

Tässä hexateronissa on siis 8 tasoa, jotka ovat pentachoroneja, ja kuusi kulmaa, joista lähtevät pelitasot ovat myös pentachoroneja. Kustakin kulmasta on 8 tasoa vastapäätä olevaan hexateronin reunatasoon saakka. Edellä oleva selitys on helpompi ymmärtää kun soveltaa sitä kuviossa 119 oikealla olevaan Pascalin kolmioon, jossa vastaava ilmaistaan seuraavasti:

Tässä Pascalin kolmiossa on 13 tasoa, jotka ovat rivejä, ja kolme kulmaa, joista lähtevät pelitasot ovat myös rivejä. Kustakin kulmasta on 13 tasoa vastapäätä olevaan kolmion reunatasoon saakka.

Kuviossa 131 on punaisella solmulla merkitty yläkulma ja sen "alla" on 5 alakulmaa. Alakulmat on esitetty kuviossa 133 vihreällä reunustetuilla suorakulmioilla. Ulommaisena ja samalla pienemmän pentachoronin viidestä kulmasolmusta yksi saa arvon $C(8,8,0,0,0) = 1$ ja neljä muuta arvon $C(8,7,1,0,0) = 8$. Kuviossa suluissa olevat luvut tarkoittavat kaikkien viiden kulman yhteismäärää. Sisemmällä ja suuremmalla pentachoronilla kombinaatiot ovat yhdessä kulmassa $C(7,7,0,0,0) = 1$ ja neljässä muussa kulmassa $C(7,6,1,0,0) = 7$. Välejä pentachoronissa on 10 ja niiden keskellä olevat solmut saavat neljällä välillä arvot $C(7,5,2,0,0) = 21$ ja kuudella välillä arvot $C(7,5,1,1,0,0) = 42$.

8.2.9 Symmetrinen n-pelaajan malli n-1 simpleksialustalla

Seuraavaksi määrittelemme tämän monen pelaajan symmetrisen pelimallin yleisellä tasolla.

Yleinen kaava, ylempään tason kertoimen saamiseksi alemman tason kertoimien summasta, on $C(p, k_1, k_2, \dots, k_n) = C(p-1, k_1-1, k_2, \dots, k_n) + C(p-1, k_1, k_2-1, \dots, k_n) + \dots + C(p-1, k_1, k_2, \dots, k_n-1)$, missä $k_1 + k_2 + \dots + k_n = p$ ja $k_i \geq 0 \forall i \in N$.

Todistus:

$$\begin{aligned} & C(p-1, k_1-1, k_2, \dots, k_n) + C(p-1, k_1, k_2-1, \dots, k_n) + C(p-1, k_1, k_2, \dots, k_n-1) \\ &= (p-1)! / (k_1-1)! k_2! \dots k_n! + (p-1)! / k_1! (k_2-1)! \dots k_n! \dots + (p-1)! / k_1! k_2! \dots (k_n-1)! \\ &= (p-1)! k_1 / k_1! k_2! \dots k_n! + (p-1)! k_2 / k_1! k_2! \dots k_n! \dots + (p-1)! k_n / k_1! k_2! \dots k_n! \\ &= (p-1)! (k_1 + k_2 + \dots + k_n) / k_1! k_2! \dots k_n! = (p-1)! p / k_1! k_2! \dots k_n! = p! / k_1! k_2! \dots k_n! \\ &= C(p, k_1, k_2, \dots, k_n) \text{ m.o.t.} \end{aligned}$$

Kuvioon 123 liittyvässä tekstissä selvitettiin yhden yksittäisen solmun naapurit kolmiulotteisen mallin kuudennella tasolla ja todettiin, että naapurien lukumäärä ($\#n$) oli 12. Neliulotteisessa mallissa $\#n = 20$ mikäli solmu sijaitsee muualla kuin reunalla. Naapurien määrä kasvaa kaksiulotteiselta tasolta alkaen siten, että ylä- ja alatasoille tulee aina naapurisolmuja yksi enemmän, kuin oli edellisellä tasolla, kun siirrytään n -simpleksistä $(n+1)$ -simpleksiin. Samalla tasolla taas naapurisolmuja on yhtä paljon kuin oli kaikkiaan yhtä ulottuvuutta pienemmässä ulottuvuudessa.

Havainnollistetaan asiaa. Yksiulotteisella rivillä solmulla on 2 naapurisolmuja. Kaksiulotteisessa tilassa solmulla on samalla tasolla 2 naapurisolmuja sekä ylä- ja alatasolla kummallakin 2 eli siis yhteensä $2 + 2 + 2 = 6$. Kolmiulotteisessa tilassa on naapurisolmuja samalla tasolla 6 eli kaksiulotteisen tilan naapureiden määrä ja lisäksi ylä- ja alatasoilla 3 eli yhteensä $6 + 3 + 3 = 12$. Neliulotteisessa tilassa on naapurisolmuja samalla tasolla 12 eli kolmiulotteisen tilan naapureiden määrä ja lisäksi ylä- ja alatasoilla 4 eli yhteensä $12 + 4 + 4 = 20$.

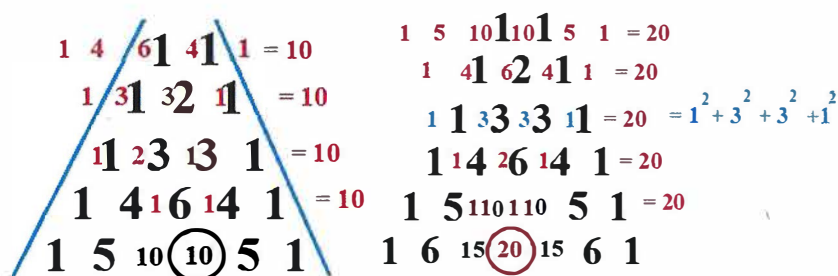
Naapurisolmujen määrä on aina $2 \times$ Pascalin kolmion kolmas termi rivillä $n+1$, missä n on ulottuvuus. Naapurisolmujen määrä on luku $\#n = 2 \times C(n+1, n-1)$. Huomioidaan, että $\#n = n \times$ (pelaajien lukumäärä) siis se maksimimäärä pelaajia, joka asianomaiselle pelialustalle voidaan symmetrisesti sijoittaa. Luku $\#n$ kasvaa alkaen kaksiulotteiselta tasolta: 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, jne. Huomataan myös, että kaksi ensimmäistä lukua ovat samat kuin vastaavien ulottuvuuksien suuteluluvut (ks. taulukko 1), mutta sen jälkeen selvästi pienempiä.

8.3 Pascalin säännön laajennus

Pascalin sääntö voidaan myös nähdä osana yleisempää sääntöä, missä kukin kerroin voidaan saada, ei ainoastaan edellisen tason kertoimista, vaan kaikilta ylempien tasojen ketoimista Pascalin kolmion avulla.

8.3.1 Laajennus tavallisessa Pascalin kolmiossa

Kuviossa 132 on esimerkit siitä kuinka viidennen rivin neljäs kerroin 10 ja kuudennen rivin neljäs kerroin 20 saadaan käänteisen Pascalin kolmion (punaiset luvut) tulosummina edeltäviltä riveiltä.



KUVIO 132 Pascalin säännön laajennus

Kuvion 132 vasemman puoleisesta kolmiosta nähdään, että $C(5,3) = C(4,2) + C(4,3) = 1 \cdot C(3,0) + 2 \cdot C(3,1) + 1 \cdot C(3,2) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot C(2,0) + 3 \cdot C(2,1) + 1 \cdot C(2,2) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot C(1,0) + 4 \cdot C(1,1) + 1 \cdot 0 = 10$.

Kun myös käänteisen Pascalin kolmion kertoimet esitetään kombinaatioina, eli aloitetaan laskeminen ylemmiltä riveiltä, niin saadaan:

$$\begin{aligned} C(5,3) &= C(1,0)C(4,2) + C(1,1)C(4,3) \\ &= C(2,0)C(3,0) + C(2,1)C(3,1) + C(2,2)C(3,2) \\ &= C(3,0) \cdot 0 + C(3,1)C(2,0) + C(3,2)C(2,1) + C(3,3)C(2,2) \\ &= C(4,0) \cdot 0 + C(4,1) \cdot 0 + C(4,2)C(1,0) + C(4,3)C(1,1) + C(4,4) \cdot 0 = 10. \end{aligned}$$

Näin ollen Pascalin sääntö $C(p+1, k+1) = C(p,k) + C(p, k+1)$ voidaan laajentaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} C(p+1, k+1) &= C(1,0)C(p,k) + C(1,1)C(p, k+1) \\ &= C(2,0)C(p-1,k-1) + C(2,1)C(p-1,k) + C(2,2)C(p-1,k+1) \\ &= C(3,0)C(p-2,k-2) + C(3,1)C(p-2,k-1) + C(3,2)C(p-2,k) + C(3,3)C(p-2,k+1) \\ &\dots \\ &= C(p,0)C(1,k-p+1) + C(p,1)C(1,k-p+2) + \dots + C(p,p)C(1,k+1), \end{aligned}$$

missä $C(x,y) = 0$ jos $y < 0$ tai $y > x$.

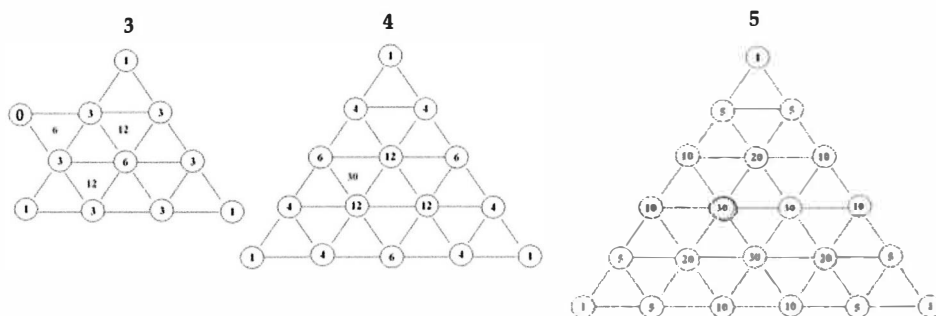
Katsotaan toisena esimerkkinä vielä kuvion 132 oikeanpuoleinen kolmio, jossa käytetään pidempää kombinaation merkitsemistapaa. Saadaan $C(6,3,3) = C(5,2,3) + C(5,3,2) = C(4,1,3) + 2 \cdot C(4,2,2) + C(4,3,1) = C(3,0,3) + 3 \cdot C(3,1,2) + 3 \cdot C(3,2,1) + C(3,3,0) = C(2,-1,3) + 4 \cdot C(2,0,2) + 6 \cdot C(2,1,1) + 4 \cdot C(2,2,0) + C(2,3,-1) = C(1,-2,3) + 5 \cdot C(1,-1,2) + 10 \cdot C(1,0,1) + 10 \cdot C(1,1,0) + 5 \cdot C(1,2,-1) + C(1,3,-2) = 20$.

Kun tämä laajennettu sääntö yleistetään binomista multinomeihin, niin saadaan Pascalin yleistetty laajennettu sääntö, jonka avulla voidaan laskea yksittäinen kerroin säännön summaus menetelmällä kauempaa kuin vain edelliseltä tasolta. Tällä on merkitystä myöhemmin kun määritellään pelissä upseerien liikeratoja.

8.3.2 Pascalin säännön laajennus 3-ulotteisessa mallissa

Aliluvussa 8.2.6 koskien koordinaattien määräytymistä, määriteltiin yksittäisen kerroinsolmun naapurisolmut. Käyttämällä aiemmin esiteltyä Pascalin säännön laajennusta ja sen yleistystä trinomille, voidaan määritellä suoraan myös seuraavien tasojen, eli kahden tai useamman askelen päässä olevat, solmut.

Aloitetaan tässäkin esimerkillä, joksi valitaan aliluvussa 8.2.4 käytetty trinomin kerroinsolmu $30 = C(5,2,2,1)$, (kuvio 133). Sen naapurit olivat ylätasolla kerroinsolmut 6, 12 ja 12 eli kombinaatioina $C(4,2,2,0)$, $C(4,2,1,1)$ ja $C(4,1,2,1)$. Pascalin säännön laajennus kolmiulotteiseen malliin antaa siis $30 = 6 + 12 + 12$. Kerroin 30 on tasolla 5 ja sääntöä sovellettiin näin tasolle 4. Sovelletaan seuraavaksi laajennusta tasolle 3. Kuviossa 133 tason 3 solmuista valitaan ne, joiden summista saadaan tason 4 edellä mainitut kombinaatiosolmut 6, 12 ja 12, sekä sijaitsevat niiden yläpuoliset naapurisolmut. Näistä 6 saadaan solmuista 0, 3, 3, missä 0 on kolmion ulkopuolelle jäävä solmu, joka on eriksen merkitty kuvioon. Toinen 12 saadaan solmuista 3, 3, 6 ja toinen solmuista 3, 6, 3. Kombinaatioina siis solmut, $6 = C(3,2,1,0) + C(3,1,2,0) + 0$, $12 = C(3,2,1,0) + C(3,2,0,1) + C(3,1,1,1)$ ja $12 = C(3,1,1,1) + C(3,1,2,0) + C(3,0,2,1)$. Näin ollen 5. tason solmu $C(5,2,2,1)$ voidaan laskea jo 3. tasolta käyttäen summassa viittä solmua $C(3,2,1,0)$, $C(3,2,0,1)$, $C(3,1,2,0)$, $C(3,0,2,1)$ ja $C(3,1,1,1)$. Eli kahden tason yli laskettuna saadaan: $C(5,2,2,1) = C(3,2,1,0) + C(3,1,2,0) + 0 + C(3,2,1,0) + C(3,2,0,1) + C(3,1,1,1) + C(3,1,1,1) + C(3,1,2,0) + C(3,0,2,1)$.



KUVIO 133 Pascalin säännön laajennus trinomissa

8.4 Pelaajien määrän vaikutus sääntöihin

Useamman pelaajan symmetrinen malli käsittelee pelialustan rakennetta, ruutujen koordinaatteja, pelinappuloiden tyyppejä ja siirtojen suuntia. Kun pelaajien määrä kasvaa, niin tämän ulkopuolelle tarvitaan myös pelistrategiaan liittyviä määrityksiä, joista yksi olennaisimpia on, shakin kyeessä ollen, pelin lopetuksen eli shakin ja matin määrittely kun pelaajia on n -kappaletta.

Useamman pelaajan shakkipelin yhteydessä täsmennystä vaativat sellaiset shakki- ja mattitilanteet, joita ei voi esiintyä kahden pelaajan shakissa. Saman säännösten pitää loogisesti sopia kaikkiin monen pelaajan shakkeihin, joita on käsitelty tässä tutkielmassa. Seuraavassa on arvioitu kymmenen erilaista tapasta, joista kuusi ensimmäistä koskee ainoastaan kolmen pelaajan shakkia.

Pelaajia on kolme

Pelin kiertojärjestys on A, B, C, A ja niin edelleen.

1. Pelaaja A tekee matin C:lle. Seuraus: A voittaa pelin sillä B sillä purkaa mattia. Eli yleisesti (soveltuen myös kahden hengen shakkiin) matti alkaa siitä hetkestä kun se on tehty, eikä siitä hetkestä kun on C:n seuraava siirtovuoro. B ei siis saa purkaa mattia.

2. Pelaaja A tekee shakin C:lle ja pelaaja B täydentää sen matiksi. Myös tämä on alkuperäisissä säännöissä, jotka määrittelevät että ensimmäisenä shakin tehnyt eli A on voittaja.

3. Pelaaja A tekee avomatin C:lle eli paljastaa jonkun pelaajan B nappulan siten, että B uhkaa C:n kuningasta ja syntyy matti. Voittaja on B.

4. Pelaaja A tekee avoshakin C:lle eli paljastaa jonkun pelaajan B nappulan siten, että B uhkaa C:n kuningasta ja syntyy shakki. Tämä on matti vaikka C:llä olisikin omalla siirtovuorollaan mahdollisuus purkaa shakki. Syynä on se, että B:llä on mahdollisuus syödä C:n kuningas mikä ei ole shakissa sallittua. Kohdan 3 perusteella on voittaja on B.

5. Pelaaja A tekee avomatin sekä B:lle että C:lle. Tulkinta: A voittaa, vaikka myös B:llä on matti C:n kuningasta ja päinvastoin. Jotta vältettäisiin ristiriita kohdan 3 kanssa on käyttöön otettava määrittely: pelaajan on voittanut ainoastaan jos sen kuningas ei ole uhattuna matin syntyessä.

6. Pelaaja A tekee avoshakin sekä C:lle että B:lle eli paljastaa jonkun pelaajan B nappulan siten, että se uhkaa C:n Kuningasta sekä jonkun pelaajan C nappulan siten että se uhkaa B:n Kuningasta. Tulkinta: peli jatkuu sillä B ei voi syödä C:n Kuningasta koska sen pitää purkaa oma shakkitilanteensa. Ei myöskään näytä olevan mahdollista pelastaa oma Kuningas ja syödä C:n Kuningas samalla siirrolla.

Pelaajia on neljä

Pelin kiertojärjestys on A, B, C, D, A ja niin edelleen.

7. Pelaaja A tekee avomatin kaikille muille. A voittaa.

8. Pelaaja A tekee avomatin B:lle ja C:lle, D ei shakkaa ketään. A voittaa.
9. Pelaaja A tekee avomatin B:lle ja C:lle siten, että sekä A, että D shakkaavat, kuitenkin vasta A:n siirrosta alkaen. A voittaa.
10. Pelaaja A tekee avomatin B:lle ja C:lle siten, että vain D shakkaa A:n siirron seurauksena. Kohdan 3 perusteella nyt voittaa D.

Pelaajia on n kpl

Eli yleisesti, kun pelaajia on n kpl. Pelaaja X, joka on siirroillaan aiheuttanut matin on voittaja mikäli joku sen nappuloista samaan aikaan shakkaa kuningasta, joka on matissa, eikä pelaajan oma kuningas ole uhattuna. Mikäli pelaajan X yksikään nappula ei uhkaa matti-tilanteessa olevaa kuningasta niin voitto siirtyy siirtovuorossa seuraavalle pelaajalle, jonka nappula uhkaa matissa olevaa kuningasta, mikäli tämän oma kuningas ei ole uhattuna. Mikäli kaikkien niiden pelaajien, jotka uhkaavat matissa olevaa kuningasta, omat kuninkaat ovat shakattuja niin pelin voi voittaa myös siirroillaan matin aiheuttanut pelaaja X vaikka mikään sen nappuloista ei uhkasi kuningasta, joka on matissa.

Huomautus siirtojärjestyksestä

Vaikka pelaajien asema toisiinsa nähden onkin symmetrinen, niin epäsymmetriaa syntyy edelleen siirtojärjestyksestä. Tarvittaessa tämäkin voidaan ohittaa määrittelemällä siirtojärjestys satunnaisesti. Vaikka matti-ssäntö saataisiin toimimaan myös tällaisessa tilanteessa, niin luonnollisesti pelin luonne muuttuisi olennaisesti, koska sattuman vaikutus tulisi mukaan.

8.5 Yleinen simpleksishakki

Seuraavaksi tarkastellaan puolustusvyöhykkeitä ja kolmen ensimmäisen tason upseerien liikeratoja n-simpleksi-alustalla. Tämä antaa pohjan algoritmille, jolla simulaatiomalli tulee toimimaan.

8.5.1 Ensimmäinen puolustusvyöhyke eri ulottuvuuksissa

Solmun $C(p, k_1, k_2, \dots, k_n)$ naapurisolmujen kombinaatiot n-ulotteisessa simpleksissä ovat seuraavat.

Ylätaso: $C(p-1, k_1-1, k_2, \dots, k_n), C(p-1, k_1, k_2-1, \dots, k_n), \dots, C(p-1, k_1, k_2, \dots, k_n-1)$.

Sama taso: $C(p, k_1+1, k_2, \dots, k_{n-1}), C(p, k_1-1, k_2, \dots, k_n+1), C(p, k_1+1, k_2, \dots, k_{n-1}-1, k_n), C(p, k_1-1, k_2, \dots, k_{n-1}+1, k_n), \dots, C(p, k_1+1, k_2-1, \dots, k_n), C(p, k_1-1, k_2+1, \dots, k_n), \dots, C(p, k_1, k_2+1, \dots, k_{n-1}), C(p, k_1, k_2-1, \dots, k_n+1), \dots, C(p, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}+1, k_n-1), C(p, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}-1, k_n+1)$.

Alataso: $C(p+1, k_1+1, k_2, \dots, k_n), C(p+1, k_1, k_2+1, \dots, k_n), \dots, C(p+1, k_1, k_2, \dots, k_n+1)$.

Valaistaan asiaa yksinkertaistuksella, jossa $n = 2$. Tällöin solmun $C(p, k_1, k_2)$ naapurisolmut ovat ylätasolla $C(p-1, k_1-1, k_2)$ ja $C(p-1, k_1, k_2-1)$, samalla tasolla $C(p, k_1+1, k_2-1)$ ja $C(p, k_1-1, k_2+1)$, sekä alatasolla $C(p+1, k_1+1, k_2)$ ja $C(p+1, k_1, k_2+1)$. Kuviossa 120, aliluvussa 8.2.2, oli esimerkki, jossa $p = 4$ ja $k_1 = 2$. Tällöin solmun $C(4,2,2)$, eli $C(4,2)$ lyhyellä merkintätavalla, naapurit ovat $C(3,1,2)$ ja $C(3,2,1)$ (ylätasolla), $C(5,2,3)$ ja $C(5,3,2)$ (alatasolla) sekä $C(4,1,3)$ ja $C(4,3,1)$ samalla tasolla.

8.5.2 Tornin liikeradat n-simpleksi-alustalla

Tornin ensimmäisen puolustusvyöhykkeen jokaiseen suuntaan on matka, jonka pituus on enintään q askelta jos edessä ei ole muita nappuloita, kun $q \in (0, r)$, missä r on laudan tasojen lukumäärä. Suuntia on $\#n$, kuten on selvitetty edellä luvussa 8.2.9. Kun lähtöruutu on $C(p, k_1, k_2, \dots, k_n)$ ovat suunnat seuraavat.

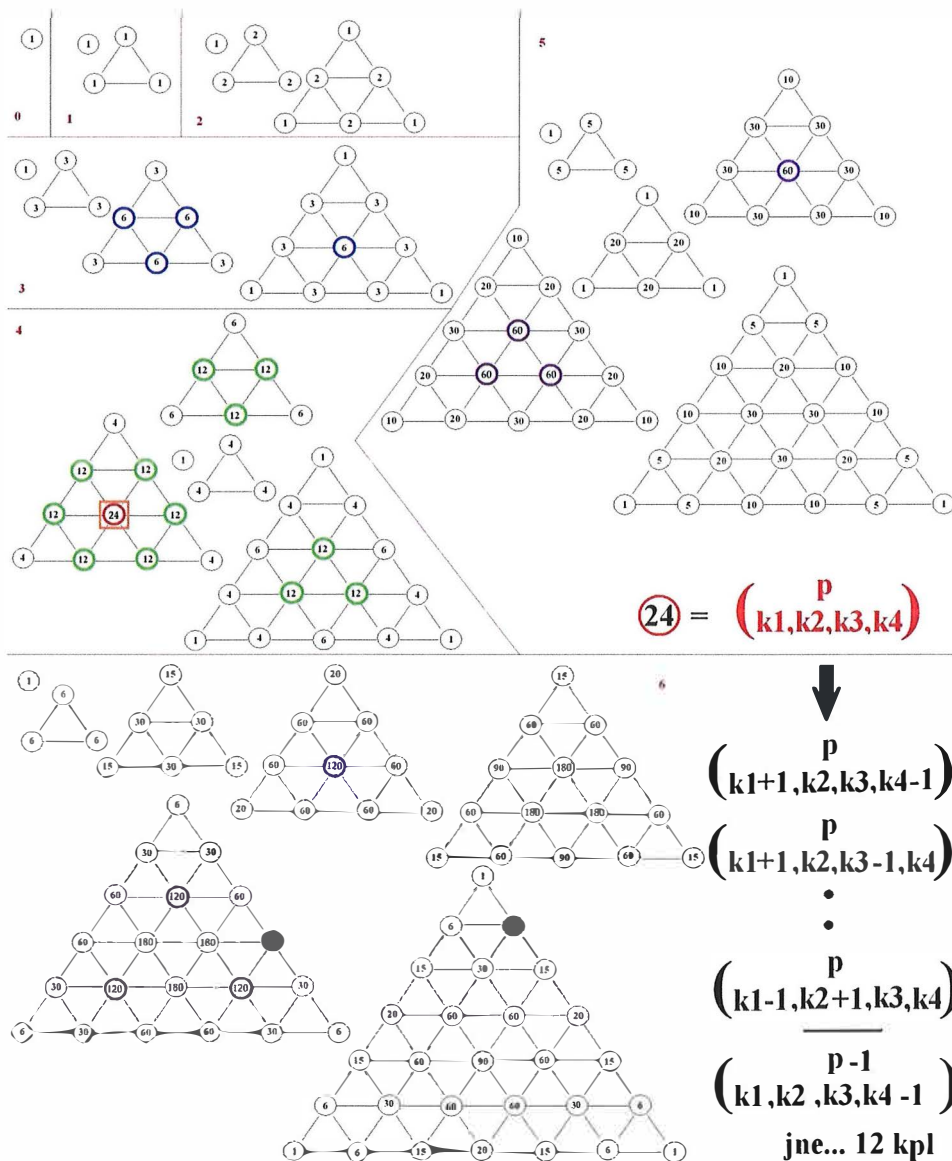
Ylätasoon suuntaan: $C(p-q, k_1-q, k_2, \dots, k_n), C(p-q, k_1, k_2-q, \dots, k_n), \dots, C(p-q, k_1, k_2, \dots, k_n-q)$.

Samalla tasolla: $C(p, k_1+q, k_2, \dots, k_n-q), C(p, k_1-q, k_2, \dots, k_n+q), C(p, k_1+q, k_2, \dots, k_{n-1}-q, k_n), C(p, k_1-q, k_2, \dots, k_{n-1}+q, k_n), \dots, C(p, k_1+q, k_2-q, \dots, k_n), C(p, k_1-q, k_2+q, \dots, k_n), \dots, C(p, k_1, k_2+q, \dots, k_n-q), C(p, k_1, k_2-q, \dots, k_n+q), \dots, C(p, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}+q, k_n-q), C(p, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}-q, k_n+q)$.

Alatasoon suuntaan: $C(p+q, k_1+q, k_2, \dots, k_n), C(p+q, k_1, k_2+q, \dots, k_n), \dots, C(p+q, k_1, k_2, \dots, k_n+q)$.

Otetaan jälleen esimerkiksi yksinkertaisin tapaus eli taso, jolloin $n = 2$ ja $\#n = 2 \times C(n+2, n+2-2) \Rightarrow \#2 = 2 \times C(4,2) = 6$. Tällöin torni liikkuu ylätasolla solmuihin suunnissa $C(p-q, k_1-q, k_2)$ ja $C(p-q, k_1, k_2-q)$, alatasolla solmuihin suunnissa $C(p+q, k_1+q, k_2)$ ja $C(p+q, k_1, k_2+q)$ sekä samalla tasolla suuntiin $C(p, k_1+q, k_2-q)$ ja $C(p, k_1-q, k_2+q)$. Jos esimerkin lähtöruuduksi otetaan jälleen kuvion 120 solmu $C(4,2) = 6$, niin silloin $p = 4$ ja $k_1 = k_2 = 2$. Näin torni liikkuu ylätasolle solmuihin $C(4-q, 2-q, 2)$ ja $C(4-q, 2, 2-q)$, alatasolle solmuihin $C(4+q, 2+q, 2)$ ja $C(4+q, 2, 2+q)$ sekä samalla tasolla solmuihin $C(4, 2+q, 2-q)$ ja $C(4, 2-q, 2+q)$. Ylätasoon suuntaan mentäessä q voi saada arvot 1 tai 2, joten kulkusuunta yläva-

semmälle on solmut $C(3,1,2)$ ja $C(2,0,2)$ sekä yläoikealle solmut $C(3,2,0)$ ja $C(2,2,0)$. Alatasen suuntaan q voi saada vain arvon 1 ja liikkumissuunnassa ovat solmut $C(5,2,3)$ ja $C(5,3,2)$. Myös saman tason summissa q voi saada arvot 1 ja 2 ja kulkusuunnassa vasemmalle ovat solmut $C(4,1,3)$ ja $C(4,0,4)$ sekä oikealle solmut $C(4,3,0)$ ja $C(4,4,0)$.



KUVIO 134 Tornin liikesuunnat 4-ulotteisessa simpleksissä

Yleisesti tornin liikkeessa yläsuuntiin tai samalla tasolla, on viimeinen solmu se, jossa joko $k_1=p$ tai $k_2=p$. Alasuuntiin mentäessä viimeinen on se, jossa $p=r$. Kuviossa 134 on kuvattu tornin liikesuunnat neliulotteisessa simpleksissä eli pentachoronissa. Lähtösolmu on 24, joka on merkitty oranssilla neliöllä.

8.5.3 Toisen puolustusvyöhykkeen upseerit n-simpleksi-alustalla

Kaikissa ulottuvuuksissa hallitsee ensimmäisen puolustusvyöhykkeen ruutuja vain yksi upseeri, torni. Toisella puolustusvyöhykkeellä lisätään uusia upseereita niihin ruutuihin, joihin torni ei pääse.

Edellä aliluvussa 8.5.1 selvitettiin n-ulotteisessa avaruudessa yksittäisen peliruutusolmun naapurisolmut eli ensimmäinen puolustusvyöhyke n-ulotteisessa avaruudessa. Aliluvussa 8.5.2 taas selvitettiin tornin liikesuunnat n-ulotteisessa avaruudessa. Toisella puolustusvyöhykkeellä uudet upseerit ovat niitä, jotka täyttävät nämä tornin väliin jäävät liikesuunnat. Kerrataan ensin merkintätavat. Kombinaatiossa $C(p, k_1, k_2, \dots, k_n)$ muuttuja p kertoo kombinaation tason yhdellä n-1 ulotteisella tasolla. Kombinaatiossa $p \in \mathbb{N}$, missä \mathbb{N} on luonnollinen luku tai 0. Muuttujat $m \in \mathbb{N}$ ja $k_m \in \mathbb{N}$, $k_m = 0, \dots, p+1$, on kertovat kombinaation sijainnin n-simpleksillä. Upseerin matka jokaiseen suuntaan on enintään q askelta jos edessä ei ole muita nappuloita, kun $q \in (0, r)$, missä r on laudan tasojen lukumäärä.

Aloitetaan tarkastelu alemmista ulottuvuuksista. Kun ulottuvuus $n=2$, niin toisella puolustusvyöhykkeellä tornin liikesuuntien väliin jäävät ruudut ovat: $C(p-2, k_1-1, k_2-1)$, $C(p-1, k_1+1, k_2-2)$, $C(p+1, k_1+2, k_2-1)$, $C(p+2, k_1+1, k_2+1)$, $C(p+1, k_1-1, k_2+2)$ ja $C(p-1, k_1-2, k_2+1)$. Asian voi havainnollistaa kuviossa 122 antamalla asettamalla $p=4$ ja $k_1=2 \Rightarrow k_2=2$, jolloin saadaan keskellä olevan solmun $C(4,2,2) = 6$ toisen puolustusvyöhykkeen solmut alkaen ylhäältä ja kiertäen myötäpäivään. Näin saadaan $C(2,1,1) = 2$, $C(3,3,0) = 1$, $C(5,4,1) = 5$, $C(6,3,3) = 20$, $C(5,1,4) = 5$ ja $C(3,0,3) = 1$. Vastaavat suunnat ovat $C(p-2q, k_1+q, k_2)$, $C(p-q, k_1+q, k_2-2q)$, $C(p+q, k_1+2q, k_2-q)$, $C(p+2q, k_1+q, k_2+q)$, $C(p+q, k_1-q, k_2+2q)$ ja $C(p-q, k_1-2q, k_2+q)$.

8.5.4 Seuraava vaihe

Kun pelilaudan kokoa laajennetaan, niin ulottuvuuksien määrästä riippumatta lisätään uusia upseereita alempien puolustusvyöhykkeiden upseereiden liikkuemissektoreiden välisille alueille. Tämä tehdään samalla tavoin kuin tehtiin kaksiulotteisen laajennetun neliöruutuisen laudan tapauksessa aliluvussa 7.1.1. ja menetelmä on helppo yleistää. Mitä tapahtuu tämän jälkeen? Seuraava vaihe on simulointiohjelman rakentaminen mallin pohjalte ja sen soveltaminen reaali maailman tilanteisiin.

9 LOPPUHUOMAUTUKSIA

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen aikana syntyneitä lisätuloksia.

9.1 Verkon lukuarvo

Tämän aliluvun kehitelmät perustuvat tekijän ja professori Frank Hararyn yhteistutkimukseen, lähdeviitteet on lisätty kohtiin, joissa on hyödynnetty muualta saatua tietoa. Luvun kirjoittamisen mahdollisti Hararyn sihteerin Sarah Tsosien (Kedesbah) korvaamaton apu kadonneen materiaalin esiin kaivamisessa.

Seuraavassa selvitetään, kuinka mikä tahansa verkko voidaan esittää yksikäsitteisenä lukuna ja kuinka mikä tahansa luku voidaan esittää yksikäsitteisesti verkkona.

Verkko, jonka järjestys on n sisältää epätyhjän joukon $V = V(G)$, mikä sisältää n solmua sekä määritellyn joukon X erillisiä järjestämättömiä solmuja. On olemassa useita eri tapoja esittää abstraktin verkon rakenne. Ensimmäinen tapa on piirtää verkko. Verkon nimiöinti lisää luvut 1:stä n :ään sen solmuihin. Verkon G yhteysmatriisi on toinen tapa esittää verkko, samoin kuin joukko toisiinsa liitoksissa olevien solmujen järjestettyjä pareja. Me esitämme verkon G tunnistamiseen yksikäsitteistä positiivista kokonaislukua.

Esimerkit käsittelevät nimiöintiä satunnaisverkosta, jonka järjestys eli solmujen lukumäärä on 4 ja koko eli välien lukumäärä on 5. Kun kaikkien yhtenäisten verkkojen lukuarvot on esitetty, niin jatkamme avoimien ongelmien ja mahdollisten sovellusten parissa.

9.1.1 Verkon nimiöinnistä

Yksinkertainen verkko, siis verkko ilman luuppeja ja moninkertaisia välejä, jonka järjestys on p käsittää äärellisen epätyhjän joukon $V = V(G)$, jossa on p solmua ja määritelty joukko X järjestämättömiä solmupareja. Paria $x = \{u, v\} \in X$ kutsutaan verkon G väliksi, joka yhdistää solmut u ja v . Otetaan esimerkiksi verkko G satunnaisella solmujoukolla $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ja välien joukolla $X = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_3\}\}$. Tässä nimiöidyssä verkossa (kuvio 138), jonka järjestys on p , kokonaisluvut 1:stä p :hen liittyvät verkon solmuihin. Tämä verkko voidaan nimiöidä kuudella eri tavalla, jotka on esitetty kuviossa 139. Yleisesti verkossa, jossa on p solmua ja k väliä on yhteensä n kpl nimiöityjä verkkoja s.e.

$$n = \binom{p}{k} \Rightarrow \binom{4}{2} = 6$$

9.1.2 Yhtenäinen suuntaamaton verkko

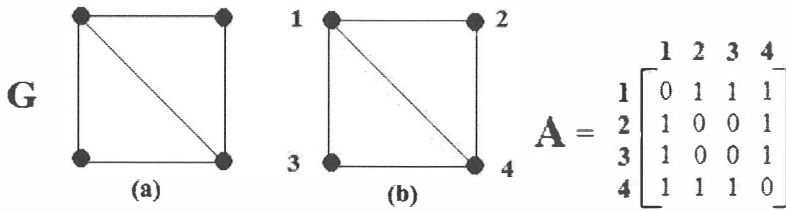
On useita tapoja esittää abstraktin verkon G rakenne. Ensimmäinen (1) on verkon G (kuvio 136) piirtäminen. Verkon G luokituksella lisätään luvut 1:stä n :ään sen solmuihin. Nimiöidyn verkon listaesitys (2) on toinen tapa. Ensimmäisenä listalla on solmu numero 1 ja sen viereisten solmujen järjestetty nimiöinti, sitten solmu 2 ja ainoastaan niiden solmujen nimiöinti, joka eivät vielä ole listalla. Ja näin edelleen jatketaan aina viimeiseen solmuun saakka.

Kolmas tapa (3) on G :n yhteysmatriisi. Kun verkko nimiöity, niin yhteysmatriisista muodostetaan nollien ja ykkösten lukujono. Suuntaamattomalle verkolle muodostetaan lyhyempi koodi käyttäen ylädiagonaalimatriisia, josta näin saadaan muodostettua binääriluku (Read & Corneil 1977, Nagle 1966).

Satunnaisverkon kanoninen luku

Tässä esitetään merkinnäksi yksikäsitteistä kokonaislukua verkolle G . Tarkastellaan oheista neljän solmun ja viiden välin verkkoa G ja sen nimiöity verkkoa G_1

- (1) Kuvio 136 (a) esittää piirrettyä verkkoa G
- (2) Kuvion 136 (b) verkon listaesitys on
 - 1: 2, 3, 4
 - 2: 4
 - 3: 4
- (3) Kuviossa A esittää verkon G yhteysmatriisia.

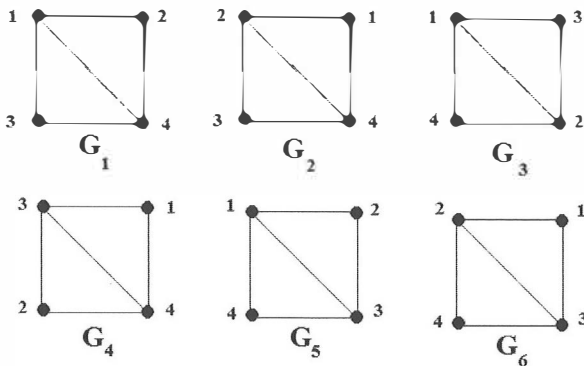


KUVIO 136 Verkko, järjestys $n = 4$, koko $sz = 5$ ja verkon yhteysmatriisi

Koska kyseessä on suuntaamaton verkko, niin matriisi on symmetrinen diagonaalien suhteen. Kun matriisin ylädiagonaalin rivit luetaan peräkkäin ylhäältä alas, niin saadaan numerosarja 101111. Kun numerosarja tulkitaan binääriluvuksi, niin se voidaan esittää kymmenjärjestelmän lukuna 59 sillä $32 + 0 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59$. Harary ja Read, kuten myös Harary, Palmer ja Read ovat osoittaneet, että verkolla, jolla on s kpl automorfismeja, on täsmälleen $n!/s$ erilaista nimiöintiä (Harary & Palmer 1973). Yhden niistä täytyy olla yhtenäisen verkon luku. Tämä on verkon G kanoninen luku, joka merkitään $\#H(G)$ (missä H tarkoittaa Hararya). Ohessa on viiden muun, topologisesti samanlaisen, verkon kanoninen luku. Huomataan, että 59 ei ole kuvion 136 verkon kanoninen luku, koska kuviossa 137 verkolla G_3 :lla on suurin verkon lukuarvo.

Vastaavat luvut ovat:

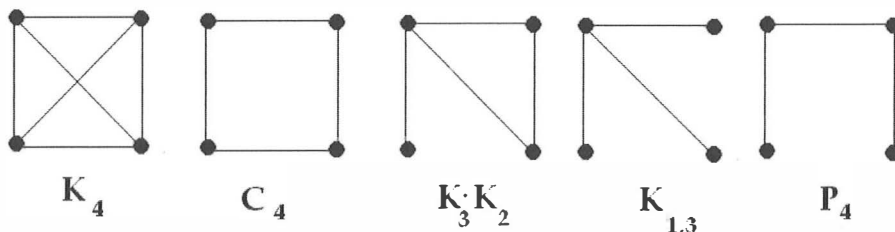
Binääri	Desimaali
111 011 =	59 (G_1)
101 111 =	47 (G_2)
111 110 =	62 (G_3)
011 111 =	31 (G_4)
111 101 =	61 (G_5)
110 111 =	55 (G_6)



KUVIO 137 Verkon G kaikki nimiöinnit

Jokainen luvuista esittää siis yhtä abstraktia verkkoa, mutta yksikäsitteisyyden vuoksi valitsimme niistä suurimman. Suurin on suuntaamattoman verkon luku eli $\#H(G) = 62$.

Yleisesti jokainen binääriluku kokoa $(n,2)$ on liitettävissä yksikäsitteiseen verkkoon, jolla on järjestys n . Näitä lukuja kutsutaan *verkkomaisiksi* (*graphical*).



KUVIO 138 Viisi muuta verkkoa, joiden järjestys on 4

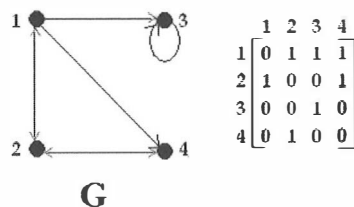
Matriisien (kuvion 138 verkot) ylädiagonaalien antamat vastaavat binääriluvut ovat: $K_4 = 111111$, $C_4 = 110011$, $K_3K_2 = 111100$, $K_{1,3} = 111000$ ja $P_4 = 110011$. Niitä vastaavat kymmenjärjestelmän luvut ovat: $K_4 = 63$, $C_4 = 51$, $K_3K_2 = 60$, $K_{1,3} = 56$ ja $P_4 = 50$.

9.1.3 Suunnattu verkko

Suunnattu verkko eli digraafi $G=(V, E)$ muodostuu solmujen joukosta V ja suunnattujen välien joukosta E . Solmut kuvaavat verkon perusalkioita ja solmujen väliset suhteet esitetään suunnattujen välien avulla. Suunnattu väli on kahden solmun u ja v järjestetty pari (u, v) . Suunnatun verkon esittämiseen voidaan käyttää samoja tietorakenteita kuin suuntaamattomankin verkon. Tässä yhteydessä käytämme yhteysmatriisia.

Suunnatun verkon kanoninen luku

Suunnatun verkon yhteysmatriisi ei ole aina symmetrinen diagonaalien suhteen, kuten suuntaamattoman. Tässä käsitellyille suunnatuille verkoille sallitaan myös lenkit eli luupit. Koska pseudograafi sallii lenkit ja monikertaiset välit, niin kyseessä on pseudodigraafi (Harary 1969), mistä johtuen myöskään matriisin diagonaalialkiot eivät välttämättä ole nollia. Otetaan esimerkiverkko G ja sitä vastaava yhteysmatriisi (kuvio 139).



KUVIO 139 Suunnattu verkko luupilla ja sitä vastaava yhteysmatriisi

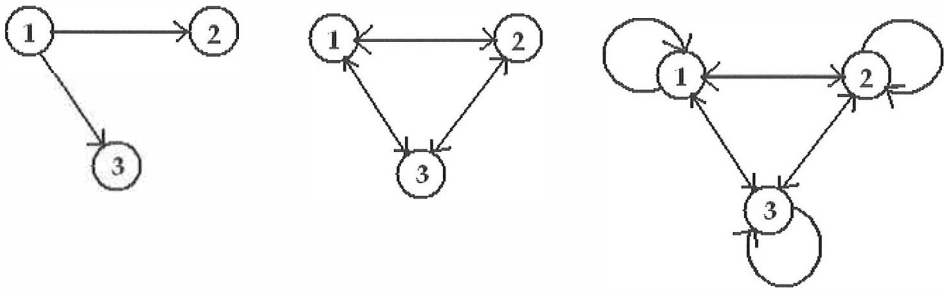
Yhteysmatriisista saatava verkon tunnistava binaariluku on 111100100100100, joka on kymmenjärjestelmän lukuna $31012 = \#K(G)$.

Luvun verkko eli lukuverkko

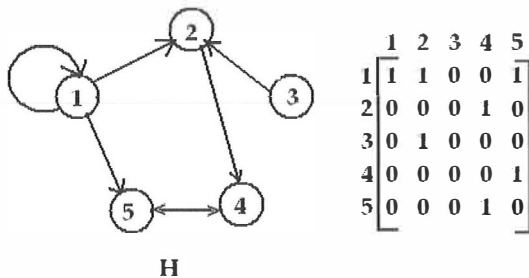
Jokainen luku voidaan esittää yksikäsitteisesti suunnattuna verkkona, jossa solmun luupit eli lenkit ovat sallittuja s.e. verkkojoukolla, jonka verkoissa on solmuja $1 \dots n$ kpl, voidaan esittää kaikki luvut väliltä $1 \dots 2^{n^2} - 1$.

Suunnatut verkot kuviossa 140 tuottavat binääriluvut 011000000, 011101110 ja 111111111. Vastaavat desimaalinumerot ovat 192, 238 ja 511.

Kuviossa 141, suunnattu verkko H voidaan esittää oikealla olevalla matriisilla. matriisista saadaan binäärinumero 1100100010010000000100010, jolloin vastaava desimaalinumero on 26 288 162.

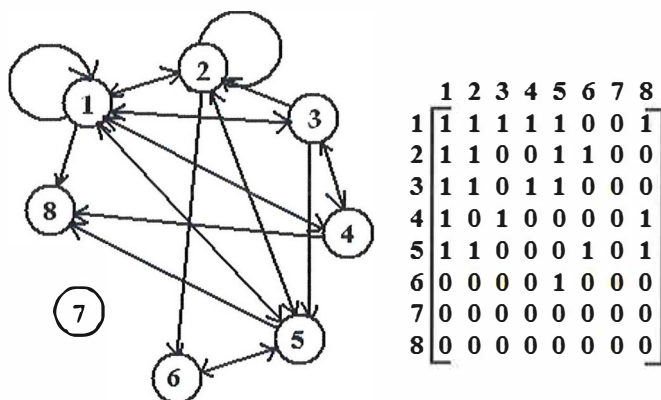


KUVIO 140 Lukuja 192, 238 ja 511 esittävät suunnatut verkot



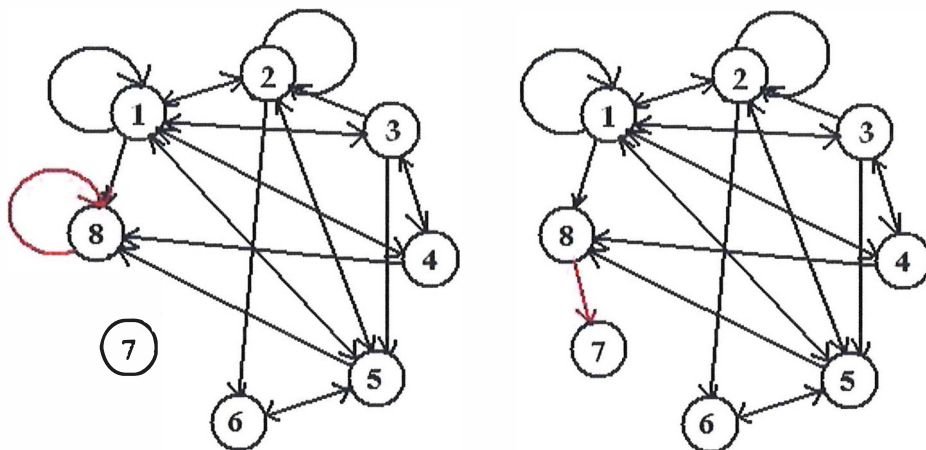
KUVIO 141 Luvun 26 288 162 suunnattu verkko ja vastaava yhteysmatriisi

Suurten lukujen esittäminen



KUVIO 142 Luku 18 triljoonaa suunnattuna verkkona ja sen yhteysmatriisi

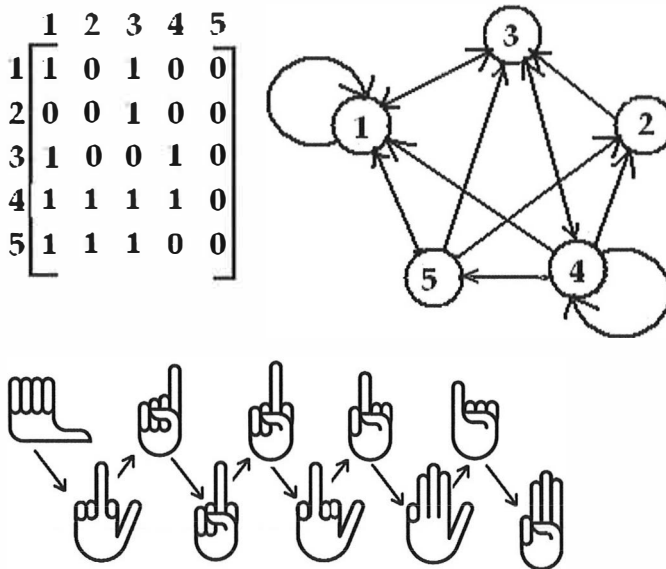
Hyvinkin suuret luvut voidaan esittää yksikäsitteisesti suunnattuna nimiöitynä pseudodigraafina eli suunnattuna pseudoverkkona, joka sallii luupit, samaan solmuun palautuvat välit. Kuvissa 142 ja 143 on esitetty 18 triljoonan kokoisia lukuja ainoastaan 8 solmun verkoilla. Matematiikassa hyvin tunnettu Edward Kasnerin leikkisästi keksimä kuvaannollinen suuri luku "Googol" eli 10^{100} , voidaan esittää 330 solmua käsittävällä suunnatulla pseudoverkolla. Kääntäen tämä tarkoittaa myös sitä, että suunnattujen verkkojen luokittelu tällä menetelmällä on käytännöllistä vain verkoilla, jotka eivät ole tavattoman suuria.



KUVIO 143 Luvut 18 000 000 000 000 000 001 ja 18 000 000 000 000 000 002

Lukuverkon koodaaminen muilla tavoin

Yhteysmatriisiin sijoitettu binääriluku voidaan luonnollisesti esittää muilla muillakin tavoilla kuin verkkona. Yksi esimerkki on luvun koodaaminen käsimerkein. Otetaan esimerkiksi luku 21 122 012, joka on binäärilukuna 1010000100100101111011100. Koska tässä binääriluvussa on 25 merkkiä, niin se voidaan esittää 5x5 yhteysmatriisina ja edelleen viisisolmuisena suunnattuna verkkona. Luku voidaan näin ollen esittää myös yhden käden sormilla siten, että ensin näytetään solmu nro 1 (eli 1. rivi matriisissa) ensimmäisellä sormella (peukalo) ja sen jälkeen muilla sormilla ne solmut, joihin ensimmäisestä solmusta lähtee suunnattu väli. Näin jatketaan kunnes kaikki viisi solmua on esitetty. Kuviossa 144 on esitetty mainittu luku sekä verkkona, että käsimerkein koodattuna.



KUVIO 144 Luvun 21 122 012 lukuverkon esittäminen käsikoodina

Käsimerkeissä sormien paikkaa vaihtamalla osoitetaan matriisin rivi (ylhäällä olevat kädet) ja numeron yksi paikka asianomaisella rivillä (alemmat kädet). Käytännössä rivin osoittamisen voi jättää poisikin koska sormien asentojen vaihtuminen kertoo oikean rivin. Tämä esimerkki otettiin tähän lopuksi vain osoittamaan kuinka pienellä koodauksella voidaan esittää isoja lukuja ja näin muodoin myös monimutkaista informaatiota.

Lyhyt yhteenveto

Tämä sisältyy jatkotutkimukseen eikä ole vielä tuntumaa siihen, johtaako se hyödynnettäviin tuloksiin.

Toinen tapa käsitellä verkkoja, on käyttää jonkinlaisia algebrallisia menetelmiä, sellaisia kuten yhteysmatriisi. Verkolla voi olla kuitenkin monia yhteysmatriiseja, kuten kuten on myös monia tapoja nimiöidä sen solmut. (Read & Corneil 1977)

9.2 Pienten shakkipelien strategiaverkot

*Tämä sivuaihe nousi esille 7. luvun asiakokonaisuuden yhteydessä. Siinä neliöruutu-
selle alustalle upotettua shakkipeliä yleistettiin paitsi suuremmille, niin myös pienem-
mille alustoille.*

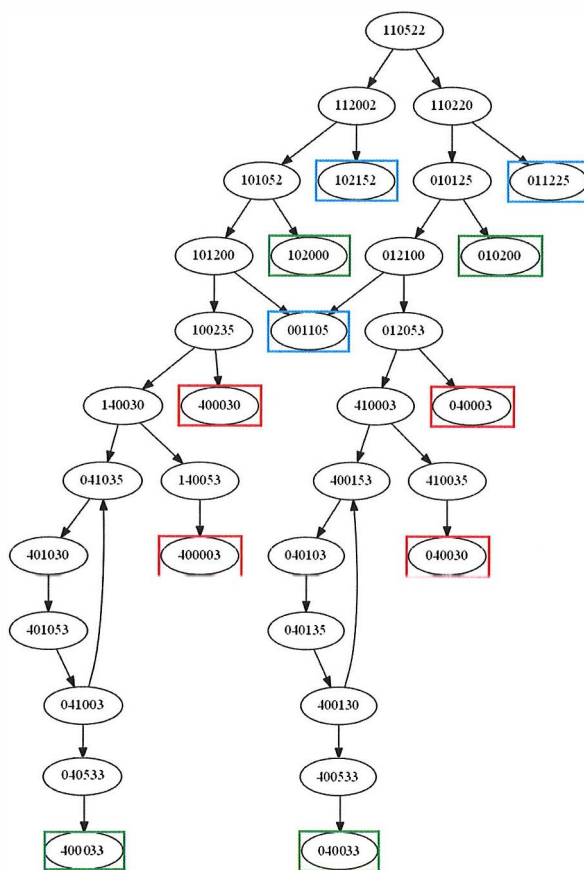
Tämän luvun pääkohteena on eräiden pienten lautapelien voittostrategioiden tutkiminen. Pelien kulku on mallinnettu suunnattujen verkkojen avulla ja pelitilanteen informaatio voidaan esittää solmuihin sijoitettujen koodien avulla. Tässä yhteydessä esitellään vain idean lyhennetty versio, koska kyseessä on yksi tutkielman lisätuloksista.

Lähtökohtana oli pienentää shakkimainen peli mahdollisimman yksinkertaiseksi ja laajentaa sitä aina varsinaiseen shakkipeliin saakka. Pienin on "shakkilauta", jonka koko on 2x3 eli 6 ruutua. Pienimmät pelit on tarkoitettu ainoastaan hyvin pienten lasten opetukseen ja oppimisen seurantaan ja tämä oli myös motiivina näiden pelien kehittämiseen.

Tästä kokonaisuudesta käytetään työnimeä *primitiivinen shakki* (tai "vauvashakki"). Kahdessa pienimmässä versiossa on selkeitä sääntöeroja shakkiin, muun muassa useita kuninkaita.

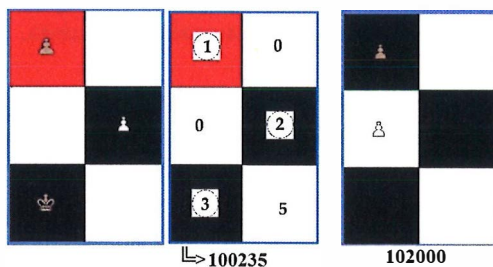
Tämän tutkimuksen päämääränä on selvittää pienten, shakin pohjalta kehitettyjen, lautapelien voittostrategioita. Pelien etenemismahdollisuudet on kuvattu suunnattujen verkkojen avulla ja pelitilanteen vaiheet on kirjattu verkon solmuihin koodeina. Tarkoituksena on myös hakea mahdollisuuksia yleistää tulokisa suurempiin peleihin. Solmuissa käytetty koodausjärjestelmä on kehitetty erityisesti näihin pieniin peleihin. Koodauksen avulla pelin kulloinenkin tilanne kuin myös siirtovuorot, voidaan lukea suoraan solmuista.

Kuvassa 145 on esitelty 2x3 kokoa olevan primitiivisen shakkipelin kaikkia strategiavaihtoehtoja kuvaava verkko. Pelin alkuasetelmassa kummallakin pelaajalla on kaksi sotilasta (kuvio 108 aliluvussa 7.1). Kumpikin sotilas voi korottua laudan toisessa päässä kuninkaaksi.



KUVIO 145 Strategiaverkko primitiiviselle 2x3 shakkipelille

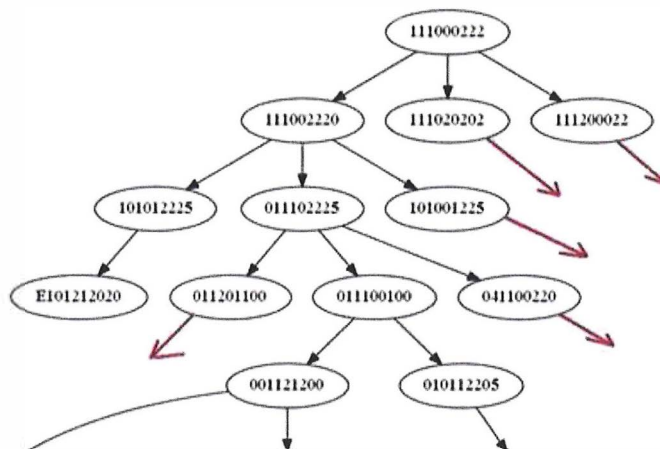
Verkossa kukin solmu on koodattu siten, että siitä ilmenee täysin sekä pelitilanne laudalla, että se kenen siirtovuoro on kyseessä. Tähän verkkoon on lisäksi värillisillä laatikoilla kuvattu voittotilanteet (sininen on mustan matti ja vihreä valkoisen matti) ja tasapelit (patti, punainen laatikko). Silmukka verkossa kertoo myös, että on syntymässä mahdollinen tasapelitilanne eli peli alkaa pyöriä paikallaan jos siirrot pysyvät samoina.



KUVIO 146 Esimerkki solmujen koodauksesta

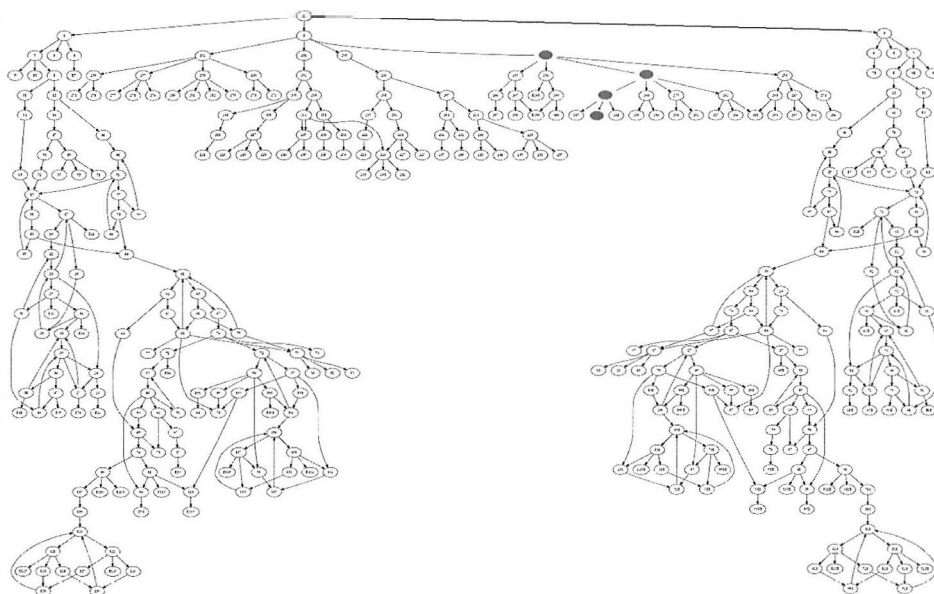
Kuviossa 146 on esitetty kahden kuvion 145 solmun koodaus. Jokaisessa koodissa on yhtä monta numeroa kuin laudassa on ruutuja, tässä tapauksessa siis kuusi, ja numerot ruudussa kuvaavat sen sisältöä tarkasteluhetkellä. Solmussa 100235 luetaan ruudut ylhäältä vasemmalta riveittäin alas s.e. 1 = musta sotilas, 2 = valkoinen sotilas, 3 = musta kuningas, ja 0 = tyhjä ruutu. Mikäli laudalla olisi myös valkoinen kuningas, niin sen numero olisi 4. Mikäli valkoinen on siirtovuorossa, niin viimeinen tyhjä ruutu 0 korvataan numerolla 5. Väärinkäsitysten välttämiseksi lisättäköön, että esimerkiksi verkossa alkuasetelmaa kuvaavassa juurisolmussa ensimmäinen tyhjä ruutu, ja siten myös numero viisi, on neljäs numero. Kuvan oikeanpuoleinen tilanne, jossa koodi on 102000, on valkoisen matti, koska musta ei voi siirtovuorollaan liikuttaa nappulaa. Tilanne on kuvion 145 verkossa vasemman puoleisessa vihreällä laatikolla reunustetussa solmussa.

Kun ruutujen määrä kasvaa kolmella ja nappuloihin tulee mukaan lisää kuningas kummallekin pelaajalle, niin verkko kasvaa huomattavasti laajemmaksi kuin edellisessä pelissä. Kuviossa 147 on esitetty alkuosa pelin oppimis- ja strategiaverkosta, sekä solmujen koodauksesta. Tässä verkossa kirjain E koodin alussa kertoo, että peli päättyy kyseisessä solmussa mattiin.



KUVIO 147 Primitiivisen 3x3 shakkipelin strategiaverkon alku

On huomattava, että peliä kuvaavissa strategiaverkoissa on huomioitu kaikki mahdolliset siirtovaihtoehdot. Näin ollen yksinkertaisimpien joukossa on valtaisa määrä siirtoja, joita kukaan aikuispelaaja ei koskaan tekisi. Peliä opettelevan lapsen kohdalla tilanne saattaa olla kuitenkin toinen. Kuviossa 148 on esitetty suurempi osa Primitiivisen 3x3 shakkipelin verkosta. Kuvaan on merkitty punaisilla palloilla se ilmeinen reitti mitä pitkin peliä ymmärtävien aikuispelaajien valinnat kulkisivat.



KUVIO 148 Primitiivisen 3x3 shakkipelin strategiaverkon alkurakennetta

Näiden pelien perustarkoitus on tutkia aivan pienten lasten päätöksentekoprosesseja pelin kautta. Tietokoneella pelattaessa siirrot kirjautuvat automaattisesti ja kun on kerätty aineistoa suuresta pelaajamäärästä, niin luokittelu on aineiston pohjalta helppoa. Numeerisen koodauksen avulla voidaan erotella erilaisia pelaajatyyppejä sekä erilaista kehitystä oppimisessa.

9.3 Euler-Poincaren kaava ja yleistetty genus

Tämä sivuaihe nousi esille 8. luvussa, kun upseerien liikesuuntia piti määrittää N -simpleksi-alustalla. Aihe liittyy myös tekijän aiempiin tutkimuksiin topologisen verkko-teorian alueelta (Kypö 1993, Kypö 1994).

9.3.1 Taustaa

Monitahokkaan tutkimus voidaan palauttaa jopa neljän tuhannen vuoden taakse muinaiseen Egyptiin ja myöhemmin antiikin Kreikkaan. Kreikkalaiset olivat kiinnostuneet säännöllisen monitahokkaan ominaisuuksista ja he selvittivät nämä viisi tahokasta eli kuution, tetraedrin, oktaedrin, ikosaedrin ja dodekaedrin, jotka sittemmin on tunnettu Platonin kappaleina. Vuosina 1750 - 1752 Leonhard Euler kehitti ja julkaisi kaavan, joka todisti näitä kappaleita olevan täsmälleen viisi. Vuonna 1811 julkaistiin Eulerin monitahokaskaavan ensimmä-

mäiset yleistykset tekijöinä Simon Lhuilier ja Augustin-Louis Cauchy. (Biggs, Lloyd & Wilson 1986)

Lopulta vuonna 1899 Henri Poincaré yleistyi Eulerin kaavan korkeampiin ulottuvuuksiin (Alama 2009a, Alama 2009b, Sachs 1970) (Dufourd 2008). Genuksen yleistämisestä ylempiin ulottuvuuksiin löytyy vähemmän materiaalia, mm. Gagliardi käsitteli asiaa neliulotteisen tapauksen kohdalla vuonna 1981 ja väitti, että sama tulos on yleistettävissä korkeampiin ulottuvuuksiin (Gagliardi 1981).

Eulerin monitahokaskaava:

$$V - E + F = 2 \quad (1)$$

missä V on solmujen, E on välien, ja F on alueiden lukumäärä.

Myöhemmin Cauchy siirsi kaavan monitahokkaista tasoverkoille (Alama 2009a) ja kaava yleistettiin ottamalla siihen mukaan myös monitahokkaassa olevien aukkojen vaikutus.

Eulerin monitahokaskaavan yleistys, Euler-Lhuilier-Cauchy kaava:

$$V - E + F = 2 - 2g \text{ ja } V - E + F - C = 1 \quad (2)$$

missä g on genus ja C komponenttien lukumäärä.

Vasemman puoleisessa yhtälössä muuttuja g , eli genus, on "aukkojen" eli "kahvojen" lukumäärä. Oikeanpuoleisessa yhtälössä muuttuja C on kolmiulotteisten kappaleiden (joissa ei ole aukkoja) lukumäärä. Suunnatun pinnan Eulerin karakteristika voidaan siis laskea sen genuksen avulla eli aukkojen avulla. Seuraavaksi Schläfli yleistyi kaavan korkeampiin ulottuvuuksiin (Coxeter 1973), kaava tunnetaan mm. Euler-Poincarén kaavana Poincarén osuuden vuoksi (Alama 2009a).

Euler-Poincarén kaava:

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots \pm N_k = \begin{cases} 2, & := \textit{parillinen} \\ 0, & k: = \textit{pariton} \end{cases} \quad (3)$$

Euler-Poincarén karakteristika:

Jokaiselle yksinkertaiselle yhdistetylle monitahokkaalle p , ulottuudessa $k+1$ pätee:

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^k (-1)^i N_i = \begin{cases} 2, & k: = \textit{parillinen} \\ 0, & k: = \textit{pariton} \end{cases} \quad (4)$$

missä N_i on monipintojen p lukumäärä ulottuvuudessa i . (Alama 2009b).

Monipinta on hypertasojen rajaama äärellinen alue n -ulotteisessa avaruudessa. Hypertasoja ovat nollaulotteisesta avaruudesta alkaen esimerkiksi piste (solmu), väli (särmä), alue (tahko, monikulmio), kappale (monitahokas), polychoron, polyteron, jne.

Eulerin monitahokaskaava (1) on Leonhard Eulerin alkuaan monitahokkaille määrittelemä ja sitä käytettiin Platonin kappaleiden, viiden säännöllisen konveksin monitahokkaan luokitteluun. Sittenkin kaavaa on sovellettu laajasti verkkoteoriassa, jossa mm. *karttojen neliväriteoreeman* todistus pohjautuu Eulerin kaavan sovelluksiin. Eulerin kaava on määritelty pallopinnalle, jolla Eulerin karakteristika on yleisesti $\chi = 2 - 2g$, missä g on genus, eli aukkojen (kahvojen) lukumäärä. Esimerkiksi toruksen tapauksessa aukkojen määrä $g = 1$ ja Eulerin karakteristika $\chi = 0$. Torukseksi kutsutaan yleisesti kappaletta, jossa on yksi aukko, yleisimmin sillä ymmärretään esimerkiksi auton renkaan kaltaista kappaletta. Jos komponentteja on C kpl, niin voidaan osoittaa, että $V - E + F - C = 1$. Nämä kaksi ovat Eulerin karakteristikan ensimmäiset (2) yleistyksiä (Sachs 1970).

Kolmas yleistys on Euler-Poincarén kaava (3) ja the Euler-Poincarén karakteristika (4), jotka on määritelty myös kolmea suuremmissa ulottuvuuksissa. Euler-Poincarén karakteristika $\chi(E)$ on vuorotteleva summa ja se on aina nolla kaikilla suljetuilla parillisulotteisilla monistoilla; $\chi(E)$ on kaksi kaikilla suljetuilla paritonulotteisilla monistoilla, mikäli genus $g = 0$ (Alama 2009a, Alama 2009b, Sachs 1970).

Näin ollen kaavasta ei voida nähdä genuksen arvoa, mikäli kyseessä on parillisulotteinen monisto. Konkreettisesti tämä voidaan todeta kun ollaan kaksiulotteisessa euklidisessa avaruudessa, jossa monistot ovat monikulmioita. Tällöin kaava on muotoa $V - E = 0$. Monikulmioon ei myöskään voida tehdä kaksiulotteista aukkoa jakamatta sitä kahteen osaan toisin kuin kolmiulotteisessa monitahokkaassa, johon voidaan tehdä kolmiulotteinen aukko. Neliulotteisessa euklidisessa avaruudessa on aina voimassa $V - E + F - C = 0$, joten sielläkään ei genusta voida saada kaavasta.

Tämän kaavan yhteydessä on aukkoja käsitellyt kuitenkin mm. Carlo H. Séquin vuoden 2008 julkaisussa *Generalized Euler-Poincaré Theorem*.

Euler teki tämän kaavansa 3-ulotteisille kappaleille joissa ei ollut aukkoja. Poincaré laajensi kaavaa samanlaisille kappaleille D -ulotteiseen avaruuteen: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots N_D = 1 + (-1)^{D-1}$. Normaalisti työskentelen itse aukkoja ja tunneleita käsittävien mutkikkaampien kohteiden kanssa ja joskus materiaali sisältää useiden kohteiden kuvauksia. Näin ollen oli tarvetta luoda yleisempi kaava niiden käsittelemiseksi. Miellyn seuraavaan muotoon: $I - N_0 + N_1 - N_2 + N_3 - \dots N_D = R_1 - R_2 + R_3 - \dots R_D$. Vasemmalla puolen on jälleen Poincaré's lista i -ulotteisista osista. Tässä listaa on jatkettu lisäämällä yksi lisätermi jompaan kumpaan päähän: I tarkoittaa useita yksittäisiä irrallisia samaa ulottuvuutta olevia osakappaleita kuin kohdekappale. Oikealla puolella ovat kaikki

eri ulotteiset elementit jotka muodostavat suljettuja renkaita. Näin ollen R_1 tarkoittaa yhden välin muodostamaa kehää, R_2 rengasmaista aluetta ja R_3 kiinteää aukkoa. (Séquin 2008)

Seuraavaksi esitellään Euler-Poincaren kaavan yleistys (5), jossa karakteristikan $\chi(E)$ arvo voi olla myös jokin muu kuin nolla suljetuilla n -ulotteisilla monistoilla, jos n on pariton, genus $g_i > 0$, $i < n$ ja $g_i \notin g_j$, kun $i < j$. On syytä huomata, että jos $g_i \in g_j$ ja $i < j$, niin tulos on erilainen! *Merkintä $g_i \in g_j$ tarkoittaa, että i -ulotteisessa aukossa on i -ulotteinen aliaukko.*⁴⁸ Esimerkkinä viisiulotteisesta monistosta (6) voidaan käyttää viisiulotteisia aukkoja (kahvoja) g_4 ja kolmiulotteisia pseudoaukkoja g_2 , jotka voivat muuttaa $\chi(E)$:n arvoa toisin kuin neliulotteinen pseudoaukko, joka ei aiheuta muutoksia. *Monistot eroavat siis aukkojen suhteen toisistaan riippuen siitä onko kyseessä parillinen vai pariton ulottuvuus.*

9.3.2 Euler-Poincaren karakteristikan yleistys genuksen suhteen

Euler-Poincaren karakteristika yleistetään siten, että lisätään kaavaan myös n -ulotteisen monipinnan sellaisten aukkojen, joiden ulottuvuus on pienempi kuin n , lukumäärä. Kutsutaan näitä aukkoja *pseudoaukoiksi*.

Jokaiselle yksinkertaiselle yhdistetylle monitahokkaalle p , ulottuvuudessa k pätee:

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^k (-1)^i N_i = 1 + (-1)^k - \sum_{i=1}^k [1 + (-1)^i] g_i \quad (5)$$

missä N_i on monipintojen p lukumäärä ulottuvuudessa i ja g_i on genus eli "aukkojen" eli "kahvojen" lukumäärä ulottuvuudessa i . Genus g_i kertoo monipinnan sisältämien aukkojen määrän. Mikäli $i < k$, niin kutsumme aukkoa *pseudoaukoiksi*. Sama termi esiintyy hieman toisessa merkityksessä myös operaattoriteoriassa äärettömän kompleksin Hilbertin avaruuden yhteydessä (Jung, Ko & Percy 2001, Bosch et al. 1982).

Kaksiulotteisen aukon rajapinta muodostuu solmuista ja väleistä. Kolmiulotteisen aukon rajapinta muodostuu solmuista, väleistä ja alueista. Neliulotteisen aukon rajapinta muodostuu solmuista, väleistä, alueista ja kappa-leista. Yleisesti N -ulotteisen aukon rajapinta muodostuu ulottuvuutta $0, \dots, N-1$ olevista osia elementeistä.

Kaavan sovellus ulottuvuudessa 5D:

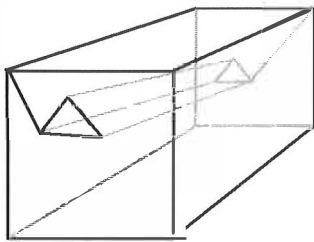
$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 = 2 - 2g_2 - 2g_4 \quad (6)$$

⁴⁸ Esimerkiksi jos poistamme kuvion 150 *triangulaarisesta prismasta*, joka on pentachoronin aukko, yhden kolmion muotoisen tahkon

Joitakin esimerkkejä voidaan esittää kuutiolla (esimerkki 1), missä $\chi(E) = N_0 - N_1 + N_2 = 2 - 2g_2$ ja neliulotteisella pentachoronilla (esimerkit 2 ja 3), missä $\chi(E) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 2 - 2g_2 + 0g_3$. Kuten kaavasta voidaan nähdä, niin *neliulotteinen genus* g_3 ei näytä muutoksia, mutta kolmiulotteinen genus g_2 näyttää.

Esimerkki 1. Kuutio genuksella $g_2 = 1$.

Kuutiossa on 8 pistettä eli solmua, 12 särmää eli väliä ja 6 tahkoa eli aluetta. Tällöin $V = N_0 = 8$, $E = N_1 = 12$ ja $F = N_2 = 6 \Rightarrow \chi(E) = 8 - 12 + 6 = 2$. Jos kaksiulotteinen kolmio lisätään kuution kahdelle vastakkaiselle kaksiulotteiselle tahkolle ja molemmat kolmiot yhdistetään yhteen nurkkaan välin avulla (kuvio 149), niin saadaan seuraava tulos: $2 \cdot 3 = 6$ uutta pistettä, $2 \cdot 4 = 8$ uutta väliä $2 \cdot 1 = 2$ uutta tahkoa. Eulerin karakteristikan arvo on $\chi(E) = 14 - 20 + 8 = 2$.



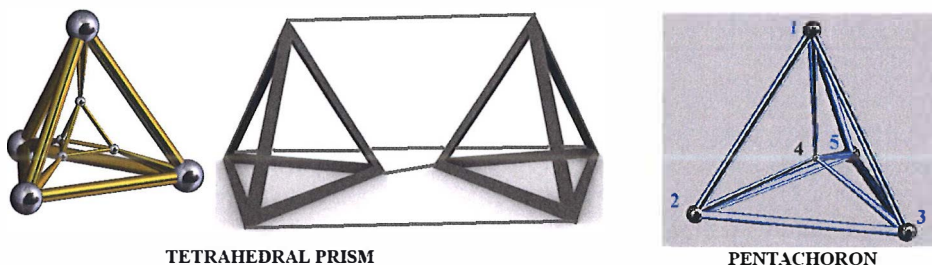
KUVIO 149 Kolmiulotteinen aukko kuutiossa

Jos kolmioiden pisteet yhdistetään toisiinsa kuution läpi, niin huomataan, että kuutio tulee lävistetyksi *triangulaarisella prismalla*. Jos tämä prisma poistetaan tai täsmällisemmin prisman päädyt sulkevat kolmiotahkot, niin monitahokkaaseen on tehty aukko ja sen genus $g = g_2 = 1 \Rightarrow \chi(E) = 0$. Tuloksen varmistamiseksi lasketaan osien lukumäärät. Alueiden lukumäärä kasvaa 8:sta 9:ään. Kolme triangulaarisen prisman sisällä olevaa aluetta lisätään, kun samalla poistetaan kaksi päätykolmiota kuution tahkoilta $\Rightarrow F = 8 - 2 + 3 = 9$. Välien lukumäärä kasvaa kolmella kuution sisällä olevien prisman välien vuoksi. Pisteiden määrä pysyy samana. Nyt saamme Eulerin karakteristikan arvoksi $\chi(E) = 14 - 23 + 9 = 0$.

Esimerkki 2. Pentachoron genuksella $g_3 = 1$.

Pentachoronia reunustaa 5 pistettä, 10 väliä, 10 aluetta and 5 tetraedriä. Tällöin $N_0 = 5$, $N_1 = 10$, $N_2 = 10$ ja $N_3 = 5 \Rightarrow \chi(E) = 5 - 10 + 10 - 5 = 0$. Jos kolmiulotteinen tetraedri lisätään kahdelle vastakkaiselle pentachoronin kolmiulotteiselle tetraedrille (*vertaa kolmioihin edellisessä esimerkissä*), jotka on yhdistetty välillä yhteen nurkkaan, niin saadaan seuraavat arvot: $2 \cdot 4 = 8$ uutta pistettä, $2 \cdot (6+1) = 14$ uutta väliä, $2 \cdot 4 = 8$ uutta aluetta ja $2 \cdot 1 = 2$ uutta tetraedriä. Eulerin karakteristikan arvoksi saadaan $\chi(E) = 13 - 24 + 18 - 7 = 0$.

Mikäli kahden lisätyn tetraedrin pisteet yhdistetään pentachoronin läpi, niin voidaan nähdä, että pentachoron on lävistetty tetraedriprismalla (kuvio 150, editoitu muutaman yleisesti saatavan kuvan pohjalta)⁴⁹. Tetraedriprisma koostuu 8 pisteestä, 16 välistä, 14 alueesta, ja 6 kolmiulotteisesta kappaleesta, jotka ovat 2 tetraedriä ja 4 triangulaarista prismaa. Jos tetraedriprisma poistetaan, niin pentachoroniin syntyy aukko ja saadaan 4-monipinta, jonka genus $g = g_3 = 1$. Koska genus g_3 ei ole olemassa $\chi(E)$:ssa, kun $N = 4$, niin kaava pitää tarkistaa laskemalla osaelementtien lukumäärät. Kolmiulotteisten osien lukumäärä kasvaa 7:stä 9:ään. Pentachoronin sisälle lisätään neljä triangulaarista prismaa. Sitä vastoin kaksi tetraedripäätystä poistuu tetraedriprismasta $\Rightarrow N_3 = 7 - 2 + 4 = 9$. Pentachoronin sisälle lisätään kuusi uutta triangulaarisen prisman aluetta, joista jokainen kuuluu kahteen triangulaariseen prismaan. Pentachoronin sisällä olevien neljän välin vuoksi kasvaa välien lukumäärä neljällä. Pisteiden määrä pysyy samana. Nyt Eulerin karakteristikalla saadaan arvo $\chi(E) = 13 - 28 + 24 - 9 = 0$. Tämä oli odotettu tulos koska *neliulotteinen genus* g_3 ei näytä muutoksia.

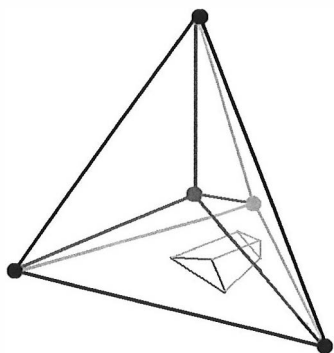


KUVIO 150 Pentachoron genuksella $g_2 = 1$

Esimerkki 2. Pentachoron genuksella $g_2 = 1$.

Käytetään samaa pentachoronia $\chi(E) = 5 - 10 + 10 - 5 = 0$ kuin esimerkissä 2. Jos kaksi triangulaarista aluetta, jotka on yhdistetty välillä yhteen kulmaan, lisätään kahdelle pentachoronin vastapäiselle tetraedrille, niin saadaan seuraavat arvot: $2 \cdot 3 = 6$ uutta pistettä, $2 \cdot (3+1) = 8$ uutta väliä ja $2 \cdot 1 = 2$ uutta aluetta. Eulerin karakteristikan arvo on $\chi(E) = 11 - 18 + 12 - 5 = 0$.

⁴⁹ Attribution must be given to Robert Webb's Stella software as the creator of this image along with a link to the website: <http://www.software3d.com/Stella.php>.



KUVIO 151 Kolmiulotteinen pseudoaukko pentachoronissa

Jos yhdistetään kahden kolmion pisteet pentachoronin läpi, niin huomataan, että pentachoronin sisällä on *triangulaarinen prisma* (kuvio 151). Jos tämä prisma poistetaan, niin pentachoron tulee lävistetyksi triangulaarisella prismalla ja saadaan 4-monipinta, jossa on 3-ulotteinen pseudoaukko ja jonka genus $g_2 = 1$.

Tämä tulos varmennetaan laskemalla osien lukumäärät. Kolmiulotteisten kappaleiden määrä pysyy samana. Pentachoronin sisälle lisätään triangulaarisen prisman kolme aluetta samalla kun prismasta poistetaan kaksi päätykolmiota $\Rightarrow N_2 = 12 - 2 + 3 = 13$. Pentachoronin sisälle lisätään kolme uutta triangulaarisen prisman väliä. Pisteiden määrä pysyy samana. Nyt Eulerin karakteristikalle saadaan arvoksi $\chi(E) = 11 - (18 + 3) + (12 - 2 + 3) - 5 = 11 - 21 + 13 - 5 = -2 = -2g_2$.

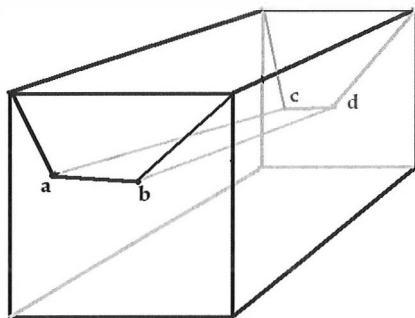
Näin ollen jos 4-ulotteisella monipinnalla on 3-kolmiulotteinen genus, jonka arvo on 1, niin $\chi(E) = -2$.

Lopuksi, jotta esimerkki 3 voitaisiin ymmärtää paremmin, arvioidaan esimerkiksi 4 hyvin yksinkertaista tapausta, jota demonstroidaan kuutiolla ja 2-ulotteisella genuksella.

Esimerkki 4. Kuutio genuksella $g_1 = 1$.

Kuutio on kolmiulotteinen kappale, joten siinä pätee alkuperäinen Eulerin monitahokaskaava $\chi(E) = N_0 - N_1 + N_2 = 2$. Lisätään kaavaan genus g_1 , joka esittää kaksiulotteisen pseudoaukkojen lukumäärää, jolloin kaava saa muodon $\chi(E) = N_0 - N_1 + N_2 = 2 - 0g_1$.

Kuutioon kuuluu 8 pistettä, 12 väliä ja 6 aluetta. Tällöin $V = N_0 = 8$, $E = N_1 = 12$ ja $F = N_2 = 6 \Rightarrow \chi(E) = 8 - 12 + 6 = 2$. Jos yksiulotteiset välit (a,b) ja (c,d) lisätään kahdelle vastakkaiselle kaksiulotteiselle tahkolla eli alueelle ja yhdistetään kahteen kulmaan (10) välillä niin saadaan arvoiksi: $2 \cdot 2 = 4$ uutta pistettä, $2 \cdot 3 = 6$ uutta väliä ja $2 \cdot 1 = 2$ uutta aluetta. Eulerin karakteristikalla saadaan tulos $\chi(E) = 12 - 18 + 8 = 2$.



KUVIO 152 Kaksiulotteinen pseudoaukko kuutiossa

Jos välien (a,b) ja (c,d) pääty pisteet yhdistetään kuution läpi vastakkaiselle välille, niin huomataan, että kuution lävistää kaksiulotteinen taso (kuvio 152). Jos taso poistetaan, niin kuutioon syntyy kaksiulotteinen "aukko" eli pseudoaukko ja monitahokkaan genus $g_1 = 1$. Tämä on siis aukko, mitä mikään kolmiulotteinen kappale voi lävistää koska sillä on leveys, mutta sen paksuus on 0. Alueiden määrä kuutiossa säilyy samana. Kaksi väliä (a,c) ja (b,d), lisätään kuution sisälle ja välit (a,b) ja (c,d) poistetaan kuution vastakkaisilta tahkoilta. Pisteiden määrä pysyy samana, joten Eulerin karakteristikan arvo on $\chi(E) = 12 - (18 - 2 + 2) + 8 = 12 - 18 + 8 = 2$.

Huomataan, että vaikka kaksiulotteisen aukon (a,c,d,b) paksuus on nolla, niin se kuitenkin erottaa sen kummallakin puolella kuution sisällä olevat välit.

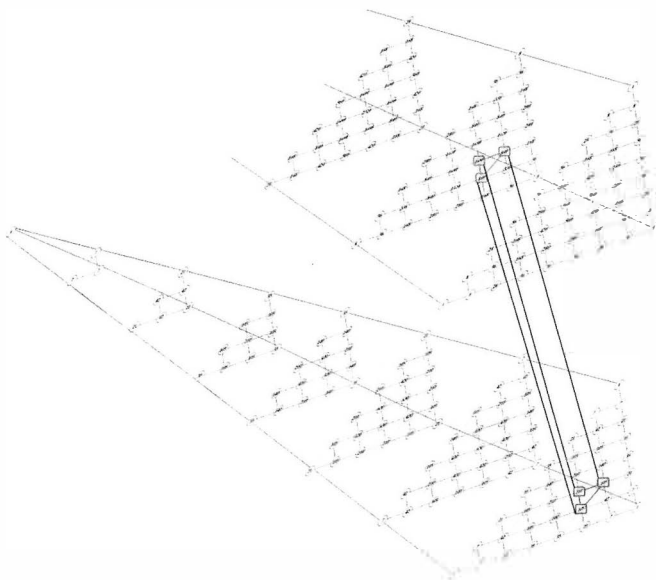
9.3.3 Aukkojen määrittäminen k-simpleksissä

Otetaan esimerkiksi pentachoron, jossa Eulerin monitahokaskaava saa muodon: $\chi(E) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 5 - 10 + 10 - 5 = 0$

Pentachoronia reunustavista viidestä tetraedristä kahden sisälle sijoitetaan pienemmät tetraedrit (N_3), ja kummankin jostain kärjestä vedetään yksi väli vastakkaisen tetraedrin kulmiin, jotta pentachoronin välien verkko pysyy yhtenäisenä. Näin pentachoronin sisältämien tetraedrien määrä lisääntyy kahdella, tahkojen eli alueiden määrä kahdeksalla, särmien eli välien määrä 14:llä ja kärkipisteiden määrä kahdeksalla. Aukon rakentaminen on esitetty havainnollisesti kuviossa 154 seuraavassa luvussa 9.4. Kuvio 153 esittää hieman yksinkertaisemmän 3D-aukon esityksen pentachoronissa.

Kaava saa seuraavan muodon:

$$\chi(E) = (5 + 8) - (10 + 14) + (10 + 8) - (5 + 2) = 13 - 24 + 18 - 7 = 0$$



KUVIO 153 3D-aukon esittäminen pentachoronissa

Laajemmin aukon rakentamista eri ulottuvuuksissa käsitellään luvussa 9.4.

9.3.4 Johtopäätöksiä

Yleisesti voidaan tehdä i -ulotteinen aukko M_i kohteeseen, joka on k -ulotteinen N_k ($i \leq k$) ja saadaan tulokseksi: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots \pm N_k - M_1 + M_2 - M_3 + \dots \pm (M_{i-1} - 2)$. Ohessa tiivistetysti edellä käsitellyt esimerkkitapaukset 1 - 4.

Esimerkki 1: $V - E + F - e + (f-2) = 14 - 20 + 8 - 3 + (3-2) = 14 - 23 + 9 = 0$.

Esimerkki 2: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 - M_1 + M_2 - (M_3 - 2) = 13 - 24 + 18 - 7 - 4 + 6 - (4-2) = 13 - 28 + 24 - 9 = 0$.

Esimerkki 3: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 - M_1 + (M_2 - 2) = 11 - 18 + 12 - 5 - 3 + (3-2) = 11 - 21 + 13 - 5 = -2$.

Esimerkki 4: $V - E + F - (e-2) = 12 - 18 + 8 - (2 - 2) = 12 - 18 + 8 = 2$.

Genukselle g_i : $i < n$ ja $g_i \notin g_j$, kun $i < j$.

9.4 Parilliset ja parittomat euklidiset ulottuvuudet

Tämä aihe nousi esille sivujuonteena luvun 9.3. yhteydessä, Euler-Poincaren kaavan karakteristikan yleistystä kirjoitettaessa.

Luvussa 9.3 näkyi ero Eulerin karakteristikan arvossa parittomissa ja parillisissa ulottuvuuksissa. Eulerin karakteristika nolautui parillisissa euklidisten avaruuksien ulottuvuuksissa ja sai arvon 2 parittomissa euklidisten avaruuksien ulottuvuuksissa.

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^k (-1)^i N_i = \begin{cases} 2, & k: = \text{parillinen} \\ 0, & k: = \text{pariton} \end{cases}$$

Sama vuorottelevuus on nähtävissä myös kyseisessä luvussa esitellyssä Eulerin karakteristikan yleistyksessä, jossa oli arvioitu genukset pseudoaukoille:

$$\begin{aligned} \chi(E) &= N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 - \dots + N_k = 2 - 2g_2 - 2g_4 \dots - 2g_k, \text{ jos } k \text{ on parillinen} \\ \chi(E) &= N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 - \dots - N_k = -2g_2 - 2g_4 \dots - 2g_{k-1}, \text{ jos } k \text{ on pariton} \end{aligned}$$

Miksi näin on? Katsotaan mitä Eulerin monitahokaskaavassa tapahtuu kun tehdään yksi aukko N -simpleksiin, kun $N = 2, 3$ ja 4 . Siis selvitetään kaavan käyttäytyminen aukon syntyessä kolmioon, tetraedriin ja pentachoroniin.

$$\text{Kolmio: } \chi(E) = N_0 - N_1 = 3 - 3 = 0$$

$$\text{Tetraedri: } \chi(E) = N_0 - N_1 + N_2 = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\text{Pentachoron: } \chi(E) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 5 - 10 + 10 - 5 = 0$$

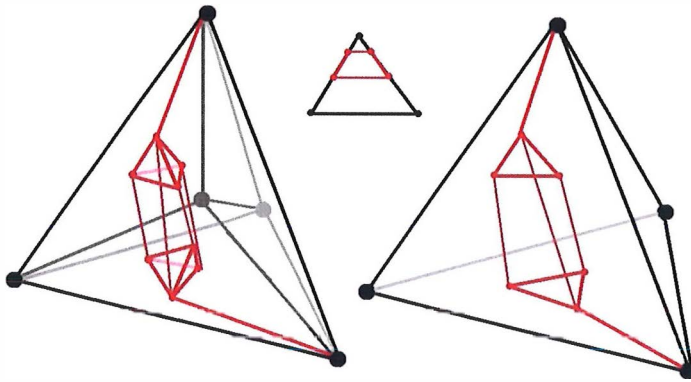
Seuraavaksi lisätään kunkin kappaleen ulkoreunalle aukon rajat. Kolmion kahdelle sivulle lisätään kaksi pistettä (N_0), jolloin samalla välien (N_1) määrä lisääntyy kahdella. Tetraedrin kahdelle tahkolle lisätään kolmiot (N_2), jolloin pisteiden ja välien määrät lisääntyvät kuudella. Lisäksi kumpikin kolmio yhdistetään yhdestä kulmastaan johonkin vastaavan tahkon yhteen kulmaan, jotta tetraedrin välien verkko pysyy yhtenäisenä. Pentachoronia reunustavista viidestä tetraedristä kahden sisälle sijoitetaan pienemmät tetraedrit (N_3), ja kummankin jostain kärjestä vedetään yksi väli vastakkaisen tetraedrin kulmiin, jotta pentachoronin välien verkko pysyy yhtenäisenä. Näin pentachoronin sisältämien tetraedrien määrä lisääntyy kahdella, tahkojen eli alueiden määrä kahdeksalla, särmiä eli välien määrä 14:llä ja kärkipisteiden määrä kahdeksalla. Kaavat saavat seuraavan muodon.

$$\text{Kolmio: } \chi(E) = (3 + 4) - (3 + 4) = 7 - 7 = 0$$

$$\text{Tetraedri: } \chi(E) = (4 + 6) - (6 + 8) + (4 + 2) = 10 - 14 + 6 = 2$$

$$\text{Pentachoron: } \chi(E) = (5 + 8) - (10 + 14) + (10 + 8) - (5 + 2) = 13 - 24 + 18 - 7 = 0$$

Tämän jälkeen tehdään kuhunkin kohteeseen aukko edellä merkityistä kohdista. Kolmion kohdalla yhdistetään vastakkaisilla sivuilla olevat pisteet kahdella välillä (kuvio 154 keskellä). Tetraedrissa yhdistetään vastakkaisilla tahkoilla olevien kolmioiden kärkipisteet kolmella välillä (kuvio 154 oikealla). Pentachoronissa yhdistetään vastakkaisille tetraedrireunoille sijoitettujen kahden pienemmän tetraedrin neljä kärkipistettä väleillä (kuvio 154 vasemmalla).



KUVIO 154 Aukkoja ulottuvuuksissa 4, 2 ja 3

Lisätään näiden monipintojen karakteristikoiden kaavoihin edellä kerrotut uudet osat monipintojen sisällä ja avataan aukot. Tämä tapahtuu kolmion kohdalla siten, että kaksi väliä poistetaan reunalta eli kuviossa 157 (piirros keskellä) reunalla vasemmalla ja oikealla olevat punaiset välit. Näiden välien reunapisteet jäävät paikoilleen. Tetraedrin kohdalla poistetaan reunatahkoilla olevat kaksi kolmion muotoista aluetta, joiden reunavälit ja kulmapisteet jäävät paikoilleen. Samalla tetraedrin sisälle muodostuu kolme suorakaiteen muotoista aluetta, jotka reunustavat triangulaarisen prisman muotoista aukkoa. Pentachoronista poistetaan reunalla olevien kahden tetraedrin sisätila eli tetraedrit poistetaan siten, että niiden kulmapisteet, välit eli särmät ja tahkot eli alueet jäävät paikoilleen aivan kuten kolmion ja tetraedrinkin tapauksessa alempiulotteiset monipinnat jäivät paikoilleen aukon reunoiksi. Näin pentachoroniin muodostuu tetraedraalisen prisman muotoinen aukko. Tetraedraalisen prisman rakennetta on selvitetty luvussa 9.3 kuvan 153 yhteydessä. Näin kaavat saadaan seuraaviin muotoihin.

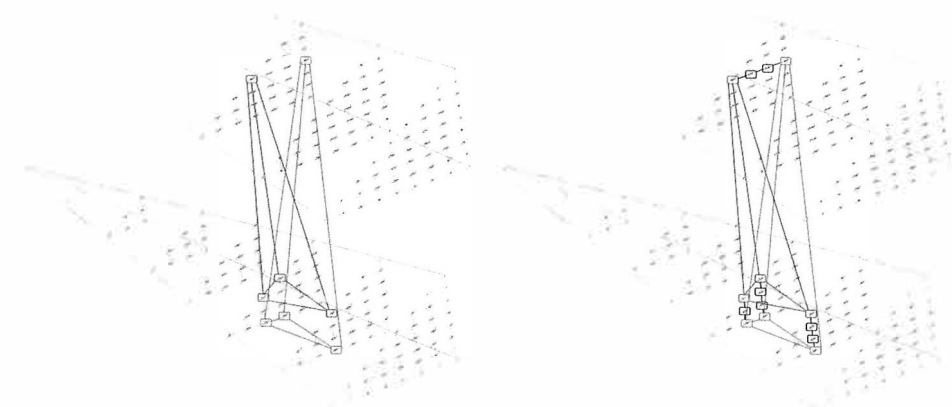
$$\text{Kolmio: } \chi(E) = 7 - (7 - 2 + 2) = 7 - 7 = 0$$

$$\text{Tetraedri: } \chi(E) = 10 - (14 + 3) + (6 - 2 + 3) = 10 - 17 + 7 = 0$$

$$\text{Pentachoron: } \chi(E) = 13 - (24 + 4) + (18 - 8 + 14) - (7 - 2 + 4) = 13 - 28 + 24 - 9 = 0$$

Huomataan aiemmin todettu eli kolmiulotteisen aukon, tässä tapauksessa tetraedrin, tapauksessa Euler-Poincarén karakteristikaran arvo muuttuu 2:sta 0:ksi, mutta parillisissa kaksi- ja neliulotteisissa euklidisisissa avaruuksissa arvo pysyy samana. Parillisissa ulottuvuuksissa ei Euler-Poincarén kaavassa ole genusta

määritelty, eikä karakteristikan arvo muutu. Kaksiulotteisissa euklidisessa avaruudessa "aukko" käytännössä halkaisee tasopinnan kahteen osaan (kuvio 154 keskellä), mutta käykö näin myös muissa parillisissa ulottuvuuksissa? Tarkastellaan pentachoronia eli tilannetta neliulotteisessa avaruudessa. Kuviossa 155 on esitetty multinomikaavan antamien koordinaattien avulla vastaavanlainen aukko kuin edellä Euler-Poincairen kaavassa. Vasemman puoleisessa esityksessä on punaisella ja sinisellä värillä kuvattu aukon päätyinä olevat tetraedrit. Oikeanpuoleisessa esityksessä on mustilla viivoilla yhdistetty samat tetraedrit kulmapisteistään, jolloin esille tulee koko aukko eli pentachoronin lävistävä tetraedraalinen prisma.



KUVIO 155 4D-aukon rakenne pentachoronissa

Tarkastellaan aukon rakennetta sen koordinaattien avulla. Aukkojen suuaukkoina on kaksi kolmiulotteista tetraedriä, kuvassa 155 sininen ja punainen. Seuraavassa tetraedrien kulmapisteiden koordinaatit, sekä tetraedrit pentachoronin läpi toisiinsa yhdistävien välien koordinaattipisteet.

Sininen tetraedri: $C(8,2,3,3,0) = 560$, $C(7,2,0,2,3) = 210$, $C(7,2,0,3,2) = 210$ ja $C(7,1,0,3,3) = 140$.

Punainen tetraedri: $C(8,2,3,0,3) = 560$, $C(7,2,2,0,3) = 210$, $C(7,2,3,0,2) = 210$ ja $C(7,1,3,0,3) = 140$.

Tetraedrejä kulmapisteistään yhdistävät välit ovat:

$C(8,2,3,0,3) - C(8,2,3,1,2) - C(8,2,3,2,1) - C(8,2,3,3,0)$ eli kuvassa 146 punaisesta siniseen 8. tasolla $560 - 1680 - 1680 - 560$. $C(7,2,0,2,3) - C(7,2,1,1,3) - C(7,2,2,0,3)$ eli sinisestä punaiseen 7. tasolla $210 - 420 - 210$. $C(7,2,0,3,2) - C(7,2,1,2,2) - C(7,2,2,1,2) - C(7,2,3,0,2)$ eli sinisestä punaiseen 7. tasolla $210 - 630 - 630 - 210$. $C(7,1,0,3,3) - C(7,1,1,2,3) - C(7,1,2,1,3) - C(7,1,3,0,3)$ eli sinisestä punaiseen 7. tasolla $140 - 420 - 420 - 140$.

Mikäli pentachoronin tapauksessa poistettaisiin myös tetraedrien tahkot, niin Euler-Poincaren kaava ei enää toimisi, sillä tuloksena olisi:

$$\chi(E) = 13 - (24 + 4) + (18 - 8 + 6) - (7 - 2 + 4) = 13 - 28 + 24 - 9 = -8$$

Neliulotteisen aukon suu on siis kolmiulotteinen tetraedri, joka on suljettu neljällä tahkolla. Aivan vastaavasti kuin kolmiulotteisen aukon suu kuviossa 155 on kolmio, joka on suljettu aukon suun kolmella sivuvälillä. Edelleen pentachoronin aukosta voidaan todeta, että toisin kuin kaksiulotteisessa tapauksessa, se ei halkaise pentachoronia, vaan kappale säilyy yhtenäisenä sillä kaikista solmuista on yhteys toisiinsa, kuten kuvastakin (kuvio 155) voidaan todeta. Aukko muodostuu tetraedriprismasta, jonka kaikki koordinaatit oli annettu edellä.

9.4.1 Yleistetty Pii

Yllättäen sama vuorottelu näkyy myös Piin esiintymisessä eräissä suhdeluvuissa samalla tavoin.

Kaksiulotteisessa euklidisessa avaruudessa ympyrän kehän suhde ympyrän halkaisijaan on π eli kun ympyrän säde on r , niin halkaisija $H_1 = 2r$ ja kehä $K_2 = 2\pi r$, missä alaindeksi 2 tarkoittaa ulottuvuutta. Edelleen huomataan, että kolmiulotteisen pallon kaksiulotteisen pinnan K_3 suhde pallon halkaisevaan keskiympyrään H_2 on $K_3/H_2 = 4\pi r^2/\pi r^2 = 4$.

Yleisesti on voimassa n -ulotteiselle pallon tilavuudelle ja pinta-alalle on seuraavat kaavat (Weisstein 2002, Huang & He 2008, Lasserre 2001):

$$V_n = C_n r^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} r^n, \text{ missä } \Gamma \text{ on gammafunktio ja } \Gamma(n) = (n-1)! \quad (1)$$

Ilman gammafunktioita kaava voidaan johtaa erikseen muuttujan n parillisille ja parittomille arvoille (Parks 2013).

Kun n on parillinen, niin edellisestä kaavasta saadaan suoraan pallon tilavuus

$$V_n = C_n r^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} r^n \quad (2)$$

sekä pallon vaipan pinta-ala $S_n = n D_n r^{n-1} = n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} r^{n-1} \Rightarrow S_{n+1} = (n+1) \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(\frac{n+1}{2})!} r^n$
(McDonald 2003). (3)

Tällöin vaipan suhde n -ulotteisen pallon tilavuuteen on $S_{n+1}/V_n = \frac{2^{n+1} [(\frac{n}{2})!]^2}{n!}$

Kun n on pariton, niin hyödynnetään gammafunktioon liittyvää tietoa $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, sekä kertomafunktion ominaisuutta $\Gamma(x+1) = (x+1)\Gamma(x)$. Näin saadaan $\Gamma(1+\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2})! = \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2} \dots \frac{n}{2} = \dots = \sqrt{\pi} \frac{(n+1)!}{(\frac{n+1}{2})! 2^{n+1}}$. Kun tämä lauseke sijoitetaan

$$\text{tilavuuden kaavaan, niin saadaan pallon tilavuus } V_n = \frac{2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)! \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!} r^n \quad (4)$$

$$\text{ja pallon vaipan pinta-ala } S_n = \frac{2n \left(\frac{n-1}{2}\right)! (4\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} r^{n-1} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{2(n+1) \left(\frac{n}{2}\right)! (4\pi)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} r^n$$

(McDonald 2003). (5)

$$\text{Vaipan suhde } n\text{-ulotteisen pallon tilavuuteen on } S_{n+1}/V_n = \frac{(n+1)!}{2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \pi$$

Kertomafunktion $n!$ kasvua voidaan varsin tarkkaan arvioida Stirlingin kaavalla (Parks 2013, Marsaglia & Marsaglia 1990), jonka mukaan $n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Sijoitetaan Stirlingin kaava osamäärään, kun n on parillinen, jolloin saadaan:

$$S_{n+1}/V_n = \frac{2^{n+1} \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}{n!} \approx \frac{2^{n+1} \left[\sqrt{n\pi} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2}{\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{2^{n+1} n\pi \left(\frac{n}{2e}\right)^n}{\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{2^{n+1} n\pi \left(\frac{n}{e}\right)^n 2^{-n}}{\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{2n\pi}{\sqrt{2n\pi}} = \sqrt{2\pi n}.$$

Seuraavaksi sijoitetaan Stirlingin kaava osamäärään, kun n on pariton ja saadaan:

$$S_{n+1}/V_n = \frac{(n+1)!}{2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \pi \approx \sqrt{\frac{2\pi(n+1)^{n+1}}{(n-1)^n}} \frac{1}{e}$$

Yleistetyn Piin arvo konvergoi kohti arvoa $\sqrt{2\pi n}$, kun parillinen $n \rightarrow \infty$ ja kohti

arvoa $\sqrt{\frac{2\pi(n+1)^{n+1}}{(n-1)^n}} \frac{1}{e}$, kun pariton $n \rightarrow \infty$. Oheisessa taulukossa 4 lähestymistä

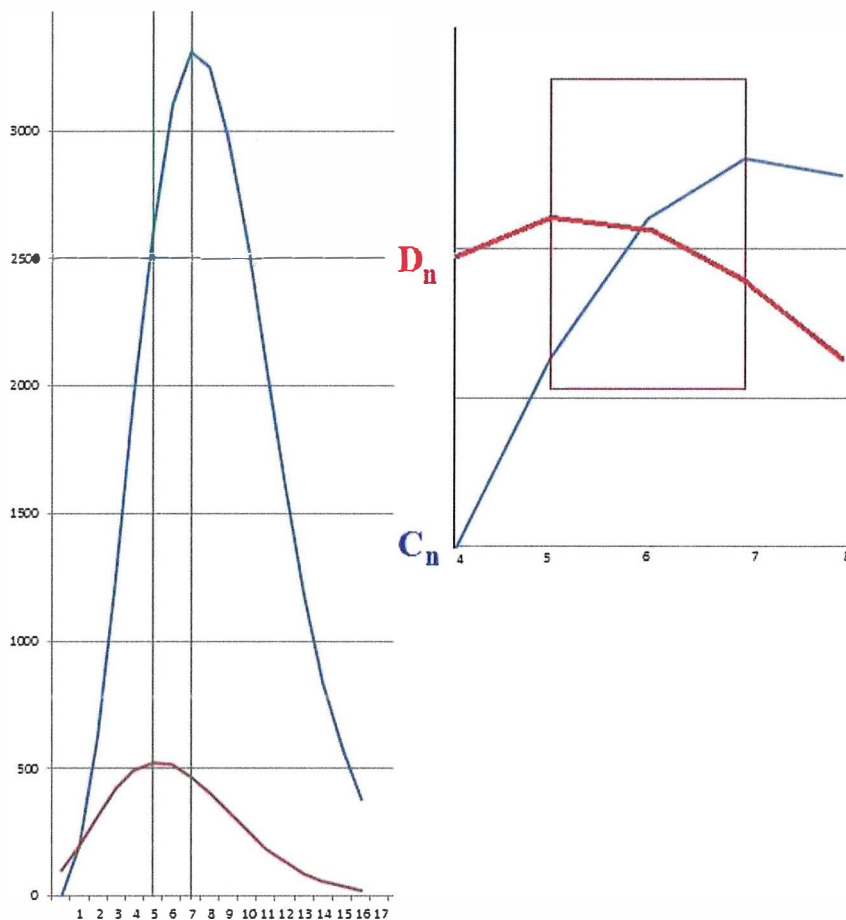
verrataan pienemmillä n :n arvoilla kahden desimaalin tarkkuudella. Stirlingin approksimaatioissa on parittomien ulottuvuuksien kohdalla merkitty sulkuihin kursiivilla myös tulos parillisten ulottuvuuksien approksimaatiolla. Desimaaliluku S_{n+1}/V_n on rationaaliluku kaikissa parillisissa ulottuvuuksissa n ja desimaaliluku on irrationaaliluku, joka on jaollinen yhden kerran π :llä, kaikissa parittomissa ulottuvuuksissa n . Eli jos luku S_{n+1}/V_n jaetaan π :llä niin osamäärä on rationaaliluku. Neljännellä sarakkeella kuvataan pallon tilavuuskertoimen C_n kasvua. Mikäli säde $r = 1$, niin $C_n = V_n$. Viidennellä sarakkeella on vaipan S_n pinta-ala, kun säde $r = 1$ eli D_n . Kaikki C_n :t ja D_n :t ovat irrationaalilukuja, kun $n > 1$. Mielenkiintoinen havainto on, että C_n kasvaa alussa, mutta alkaa supeta ulot-

tuvuuden $n = 5$ jälkeen. Vastaavasti D_n kasvaa ulottuvuuteen $n = 7$ saakka, jonka jälkeen alkaa supeta. Huomattavaa, ja mielenkiintoista, on myös, että pallon tilavuus lähenee nollaa, kun n lähenee ääretöntä (Parks 2013). Tämä onkin ilmeistä, kun katsotaan tilavuuden kaavaa (1), jossa osoittajana on $\pi:n$ potenssi-funktio ja nimittäjänä kertomafunktio, joka varsin pian alkaa kasvaa nopeammin kuin nimittäjä. Koska vaipan ulottuvuus on ensimmäisen sarakkeen suhteessa $n+1$ eli yhden korkeampi kuin tilavuuden, niin $S_{n+1}/V_n = D_{n+1}/C_n$.

Taulukko 7 Yleistetyn Piin lukuarvon kasvu

n	$\sqrt{2\pi n}$	S_{n+1}/V_n	$\frac{1}{e} \sqrt{\frac{2\pi (n+1)^{n+1}}{(n-1)^n}}$	C_n	D_n
0	0	2		1	
1	2,50	3,14 (π)	∞	2	2
2	3,5	4		3,14 (π)	6,28
3	(4,34)	4,71	5,21	4,19	12,57
4	5,01	5,33		4,93	19,74
5	(5,60)	5,89	6,22	5,26	26,32
6	6,14	6,40		5,16	31,01
7	(6,63)	6,87	7,14	4,72	33,07
8	7,09	7,31		4,06	32,47
9	(7,52)	7,73	7,96	3,39	29,69
10	7,93	8,13		2,55	25,50
11	(8,31)	8,50	8,71	1,88	20,73
12	8,68	8,87		1,34	16,02
13	(9,04)	9,21	9,39	0,91	11,84
14	9,38	9,55		0,59	8,39
15	(9,71)	9,87	10,04	0,38	5,72
16	10,03	10,18		0,24	3,77
...					
30	13,73	13,84		0,00...	0,003
...					
75	(21,71)	21,78	21,85	0,00...	0,00...

Se, että suhdeluku S_{n+1}/V_n sisältää $\pi:n$ ja on rationaaliluku $n:n$ parillisilla ja irrationaaliluku $n:n$ parittomilla arvoilla seuraa luonnollisesti tilavuuden ja vaipan kaavoista (2) - (5), joissa $\pi:n$ eksponentin jakajana on 2. Tästä seuraa, että $\pi:llä$ on sama eksponentti aina kahdessa peräkkäisessä ulottuvuudessa. Koska vaipan ulottuvuus on aina yhden korkeampi, niin π supistuu pois joka toisessa ulottuvuudessa.



KUVIO 156 N-pallon vaipan ja tilavuuden kasvu

N-pallo sisältää monia erikoisia ominaisuuksia, joista yksi on sen suhde läpimitaltaan vastaavan kokoiseen hyperkuutioon samassa ulottuvuudessa. Kun ympyrä, jonka säde on r , sijoitetaan nelikulmion sisälle siten että se sivuaa jokaista neliön sivua, niin ympyrä, jonka ala on πr^2 , täyttää neliön, jonka pinta-ala on $4r^2$, alasta noin 79%. Vastaavalla tavalla kuution sisälle sijoitettu pallo täyttää kuution tilavuudesta noin 52%. Yleisimmin kun n kasvaa 1:stä kohti ääretöntä, lähenee N-pallon tilavuuden suhde vastaavan hyperkuution tilavuuteen nolaa seuraavasti:

$n = 1$	2	3	4	5	6	7 ...
100%	79%	52%	31%	16%	8%	4%

Tarkastellaan vielä lyhyesti n -pallon tilavuuden ja vaipan pinta-alan kasvua kun n kasvaa. Kuviosta 156 ilmenee, taulukon 4 yhteydessä mainittu kasvun muutos. Tilavuuden kerroin kasvaa ulottuvuuteen 5 saakka ja vaipan pinta-ala

ulottuvuuteen 7 saakka. Tästä seuraa se erikoinen asia, että ulottuvuuksien 5 ja 7 välillä N-pallon tilavuuskerroin pienenee, mutta sen vaipan pinta-ala kasvaa (oikean yläkulman piirros kuviossa).

Koska edellä on tarkasteltu n-pallon ja hyperkuution tilavuuksia ja niiden suhteita eri ulottuvuuksissa, niin vertailun vuoksi katsotaan vielä miten tässä tutkielmassa keskeisessä asemassa olevan n-simpleksin tilavuuskerroin muuttuu.

N-simpleksin tilavuuden yleinen kaava on $V_n = \frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$ (Buchholz & Smith 1996, Buchholz 1992), missä a on simpleksin särmä eli sivu. Esimerkiksi jos $n = 2$, niin $V_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ ja kyseessä on kolmion ala. Jos $n = 3$, niin $V_3 = \frac{1}{6\sqrt{2}} a^3$ ja V_3 on tetraedrin tilavuus. Kun $a = 1$, niin tilavuuden kerroin muuttuu n:n kasvaessa seuraavasti:

n =	1	2	3	4	5	6 ...
$V_n =$	0,500	0,433	0,118	0,023	0,004	0,0004

9.4.2 Pii ja Neperin luku

Piin ja Neperin luvun välinen yhteys...

Arvioidaan Piin arvoa suhteessa Neperin lukuun käyttämällä edellä esiteltyä Stirlingin kaavaa: $n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Saadaan $n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \pi \approx \frac{[(n-1)!]^2 e^{2n}}{2n^{2n-1}}$, mistä pienillä n:n arvoilla saadaan π :lle seuraavat approksimaatiot (π) kolmen desimaalin tarkkuudella ja ero (Δ) piihin :

n =	1	2	3	4	5	6 ...
$\pi \approx$	3,694	3,412	3,320	3,275	3,248	3,230
$\Delta \approx$	0,552	0,270	0,178	0,133	0,106	0,088

Neperin luvun approksimoiminen π :n avulla käy helpommin kun sovelletaan aiemmin laskettua suhdelukua parittomien lukujen kohdalla eli

$$S_{n+1}/V_n = \frac{(n+1)!}{2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \pi \approx \sqrt{\frac{2\pi(n+1)^{n+1}}{(n-1)^n}} \frac{1}{e} \Rightarrow e = \frac{2^n \left(\frac{n+1}{2}\right)! \left(\frac{n-1}{2}\right)! \sqrt{2(n+1)^{n+1}}}{(n+1)! \sqrt{\pi(n-1)^n}}$$

$e \approx 2,718281...$ ja sijoitettuna kaavaan saadaan approksimaatioiksi $e \approx 3,009...$, $2,871...$ ja $2,827...$, kun $n = 3, 5$ ja 7 .

9.4.3 Yhteenveto

Tiivistetysti: Ympyrän kehän suhde sen halkaisijaan on Pii. Pallon pinnan suhde pallon keskilinjan (ekvaattorin) lävistämän kiekon pinta-alaan on 4. Yleisesti N -ulotteisen pallon vaipan pinta-alan suhde sen suurimpaan halkaisevaan tilaan kasvaa, mutta hyvin hitaasti. Suhteen kasvukäyrä on varsin samanlainen kuin logaritmfunktion kuvaaja. Mielenkiintoista suhteessa on se, että Pii on kertoimena ainoastaan kun ulottuvuus N on parillinen. Kun N on pariton, niin suhde on rationaaliluku. Tällä täytyy olla yhteys sen kanssa, että Eulerin-Poincarén N -ulotteisille monitahokkaille yleistetyssä kaavassa karakteristika on nolla, mikäli N on parillinen.

Toisin sanoen Pii esiintyy pallopintojen kohdalla ulottuvuuksissa 2, 4, 6, 8, ... ja Euler-Poincarén kaavassa genusluku taas ei ole laskettavissa ulottuvuuksissa 2, 4, 6, 8, ... Erikoista on pallopinnan tilavuuden vaipan pinta-alan kaavojen käyttäytyminen ulottuvuuksissa 5 - 7. Näiden ulottuvuuksien välillä pallon tilavuus pienenee, mutta vaipan pinta-ala kasvaa mikäli pallon säde $r = 1$. Siis tilavuuden kaavan kerroin C_n pienenee tällä välillä. Tässä käsitellään luonnollisesti vain matemaattisia euklidisia avaruuksia, mutta mainittakoon kuriositeettina, että kvanttifysiikassa viides ulottuvuus liittyy gravitaatioteoriaan muun muassa vuodelta 1919 peräisin olevan Kaluza-Kleinin teorian (Pope 2002) kautta. Teorian kehitti vuonna 1919 Theodor Kaluza ja sitä täydensi myöhemmin 1920-luvulla Oskar Klein. Saman teorian esitti vieläkin varhemmin vuonna 1914 suomalainen Gunnar Nordström, joka oli Kaluzan tavoin tuloksista yhteydenpidossa Albert Einsteinin kanssa. Einstein oli kiinnostunut Nordströmin teoriasta, mutta ei onnistunut soveltamaan sitä ja lähti etsimään ratkaisua muualta. Nordströmin ajatukset ovat edelleen ajankohtaisia kun *kaiken teorian* (ToE, the theory of everything), joka yhdistäisi kaikki neljä perusvuorovaikutusta, gravitaation, sähkömagneettisen vuorovaikutuksen, vahvan vuorovaikutuksen ja heikon vuorovaikutuksen, ratkaisua pyritään fysiikassa hakemaan korkeammissa ulottuvuuksista. (Norton 1993, Ravndal 2004).

9.5 Fibonaccin sarjan yleistyksiset

Tämä sivuaihe nousi esille aliluvun 8.2. yhteydessä, kun n -simpleksiin pohjautuvan pelialustan koordinaatit oli määriteltävä.

Kun pelinappuloiden liikeratoja lähdettiin määrittelemään aliluvussa 8.2, niin se palautti mieleen tunnetun tuloksen, jonka mukaan Fibonaccin luvut löytyvät myös Pascalin aritmeettisesta kolmiosta. Kun kuusikulmiolaudalle sijoitetusta kolmishakista oli tehty Pascalin kolmioon asetetulle pelilaudalle tehty muunnelma, niin samat luvut löytyivät lähetin oikealle ylös menevän liikeradan tuottamista kerrointen summista.

9.5.1 Yleistykset tasolla

Edellisen vuoksi olikin mielenkiintoista tarkistaa myös ratsun vastaavat liikera-dat. Nämä johtivat toiseen lukusarjaan. Nämä luvut, joista käytetään nimeä Fibonaccin 2-luvut, löytyivät Stakhovin ja Rozin julkaisusta vuodelta 2005 ja ovat rajatapaus ns. Fibonaccin p-luvuista. Esimerkiksi Fibonaccin 4-luvut vastaisivat aliluvussa 6.2.2. käsitellyn heksagonaalilaudan 4. puolustusvyöhykkeen uuden upseerin eli "hyperratsun", mikäli sellainen olisi peliin lisätty, yhtä lii-kesuuntaa. Liikesuunta olisi Pascalin kolmiolle sijoitetulla heksagonaalilaudalla oikealle ylös siten, että hyperratsu liikkuu yhden ruudun kuten lähetti ja kaksi kuten torni. (Stakhov & Rozin 2006)

Yleistetyt Fibonaccin numerot ovat osioita, jotka löytyvät Pascalin kolmioon vasemmalle alaviistoon yhden askelen verran ($c-1$) suunnattujen vii-vojen summista. (Bicknell-Johnson & Spears 1996)

Nykyaikainen luonnontiede tarvitsee uusien matemaattisten väli-neiden kehittämistä. Yleistetyt Fibonaccin numerot tai Fibonaccin p-luvut ($p = 0,1,2,3, \dots$), jotka tulevat esille Pascalin kolmion diagonaalisummissa ovat uusi matemaattinen löytö. Tavoitteena on kehittää näille Fibonaccin p-luvuille ana-lyyttisiä matemaattisia kaavoja. Olkoon $p = 2$ ja käytetään Binetin kaavan kehi-telmää Fibonacci 2-lukujen laskemiseen. Rekursioyhtälö saa seuraavan muodon kun $p = 2$: $F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-3)$; $F_p(0) = 0$, $F_p(1) = F_p(2) = 1$. Tapauksessa $p = 4$ kaava saa vastaavasti muodon: $F_4(n) = F_4(n-1) + F_4(n-4)$; $F_4(0) = 0$, $F_4(1) = F_4(2) = F_4(3) = F_4(4) = 1$. (Stakhov & Rozin 2006)

Edellä mainittua tunnettua Binetin kaavaa käytetään $n:n$ Fibonaccin luvun laskemiseen ja Fibonaccin sarjan jälkeen nämä kaksi sarjaa, kun $p=2$ ja $p=4$, antavat luvut: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, ... ja 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26, ... Tämän kaltaisia sarjoja, eräänlaisia Pascalin kolmiosta haettuja yleistettyjä Fi-bonaccin numeroita, löyty lukuisa määrä. Esimerkiksi ratsun liike Pascalin kolmioon perustuvalla kuusikulmiolaudalla antaa myös sarjan $Kn(n) = Kn(n-1) + Kn(n-2) + Kn(n-4) = 1, 1, 1, 2, 4, 7, 12, 21, 37, 65, 114, 200, \dots$ Myös tämä sarja löytyy useista julkaisuista, vaikkakin muotoiltuna hieman eri tavoin. Sarjojen muodostuminen näkyy kuviossa 157.

Tämä jako on johdonmukainen jatke kultaisen leikkauksen jaosta ja Martin Gardner on antanut sille nimen "korkea fii" viitaten kultaisen leikkauk-sen symbolina käytettyyn kreikkalaiseen kirjaimen fii (ϕ). Vastaava rekursiivi-nen sarja, kuten Fibonaccin sarja kultaisen leikkauksen kohdalla, on $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-3} = 0, 1, 1, 1, 2, 4, 7, 12, 21, 37, 65, 114, 200, 351, \dots$ (Sharp 2000).

Binomiteoreeman avulla saamme $k:n$ ylempään Fibonaccin sarjan $F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{i+1} F_{n-i}^{(k)} + F_{n-k-1}^{(k)}$. Tietenkin sarja $F_n^{(1)}$ on nimenomaan Fibonaccin nu-merot. Toinen ylempi Fibonaccin sarja on $F_n^{(2)} = 1, 1, 1, 2, 4, 7, 12, 21, 37, 65, 114, \dots$ (Krcadinac 2006)

43 tapauksessa 7 bitin ja 85 tapauksessa 8 bitin ohjaimen kohdalla. Luvut 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, ... ovat Jacobsthalin numeroita (Hirst, C. "Hopscotch--Multiple Bit Testing." May 15, 2006). (Weisststein 2015).

Seuraavaksi tavoitteena oli tutkia kolmea suuremman ulottuvuuden ja tarkistaa millaisia sarjoja syntyy Jacobsthalin lukujen jälkeen. Löysimme sarjan $F(n) = F(n-1) + 3F(n-2) = 1, 4, 7, 19, 40, \dots$. Tämä sarja oli laskettu 4-ulotteisista Pascalin pyramidista samassa kulmassa kuin Fibonaccin luvut ja Jacobsthalin luvut kolmiulotteisesta mallista. Eli kyseessä oli tavallaan "neliulotteinen Fibonaccin sarja". Selvisi, että tämäkään sarja ei ollut uusi. Selvisi, että vuonna 2007 Martin Erik Horn oli kirjoittanut samasta sarjasta löydettyään vuonna 2003 Pascalin pyramidit (joita tässä tutkielmassa muodostettiin 8. luvussa):

Pascalin taso, joka koostuu binomikeroimista, voidaan yleistää Pascalin avaruudeksi käyttämällä trinomikertoimia. Sen jälkeen Pascalin pyramidi voidaan muodostaa lisäämällä toisiinsa kolme sopivaa naapurinumeroa ja kirjoittamalla tulos niiden alle. Seuraava vaihe on kasvattaa jälleen ulottuvuuksia käyttämällä kvadronikertoimia, jotka täyttävät neliulotteisen Pascalin hyperavaruuden. Sieltä löytyy viisi Pascalin hyperpyramidia. Näiden neliulotteisten hyperpyramidien kolmiulotteiset hyperpinnat muodostuvat Pascalin pyramideista. Tätä prosessia voidaan jatkaa äärettömyyteen saakka. Multinomikertoimet ovat n-ulotteisessa Pascalin hyperavaruudessa ja niiden muodostamiseen tarvitaan n+1 Pascalin hyperpyramidia. Nämä n-ulotteiset hyperpyramidit omaavat (n-1)-ulotteiset hyperpinnat, jotka näyttävät yhtä ulottuvuutta pienemmiltä Pascalin pyramideilta. (Horn 2003)

Matematiikka on hämmästyttävä aihepiiri, koskaan ei voi mitä sen takana on. Onko matematiikka johdonmukaista? Onko se erehtyvää? Lisäksi on matemaattisia rakenteita, jotka ovat kiehtovan kauniita ja syvästi vaikuttavia. Epäilemättä ne heijastavat jotain kätkeyttä totuutta. Voidaan löytää korkeamman asteenkin Fibonaccin lukuja. Ne voidaan muodostaa lisäämällä toisiinsa sopivat numerot Fibonaccin hyperpyramideja vastaavista multinomikertoimista. Esimerkiksi neliulotteisessa Pascalin avaruudessa on voimassa

$$\frac{n!}{m_1!m_2!m_3!(n-m_1-m_2-m_3)!} = 1, 4, 7, 19, 40, 97, 217, \text{ jne. (Horn 2007)}$$

Seuraavana tutkimuksen kohteena on yhdistää nuo kaksi edellä olevaa yleistystä jatkotutkimuksessa eli muuttaa laskemiskulmia myös n-ulotteisissa simp-lexeissä.

9.5.3 Fibonaccin polynomit ja joitain niiden laajennuksia

Fibonaccin polynomit ovat polynomien sarja, jota voidaan pitää Fibonaccin lukujen yleistyksenä. Ensimmäiset Fibonaccin polynomit ovat:

$$\begin{aligned}
 F_0(x) &= 0 \\
 F_1(x) &= 1 \\
 F_2(x) &= x \\
 F_3(x) &= x^2 + 1 \\
 F_4(x) &= x^3 + 2x \\
 F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\
 F_6(x) &= x^5 + 4x^3 + 3x \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Yleisesti, kun $x = 1$: $F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$ (Benjamin & Quinn 1999)

Kun $x = 1$, niin polynomit antavat Fibonaccin lukusarjan. Kun $x = 2$, niin saadaan sarja, joka on kuvassa 157 merkitty vihreällä ja joka on edellä mainittu Martin Gardnerin ”korkea phii”-sarja.

Jacobsthalin lukusarjan luvut on laskettu kolmiulotteisesta Pascalin pyramidista samassa suunnassa kuin Fibonaccin luvut Pascalin kolmiosta. Mikäli sama operaatio tehdään neliulotteisessa mallissa, niin saadaan Martin Hornin edellä esitteleminen sarja 1, 4, 7, 19, 40, 97, ... Tässä tutkimuksessa jatkoimme näiden sarjojen laskemista ylempiin ulottuvuuksiin ja taulukossa 7 on listattu näitä ”n-Fibonaccin lukuja aina ulottuvuuteen $n=11$ saakka.

Taulukko 8 Ensimmäiset 11 ”n-Fibonacci” sarjaa

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F(0)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
F(1)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
F(2)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F(3)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
F(4)	5	11	19	29	41	55	71	89	109	131
F(5)	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341
F(6)	13	43	97	181	301	463	673	937	1261	1651
F(7)	21	85	217	441	781	1261	1905	2737	3781	5061
F(8)	34	171	508	1165	2286	4039	6616	10233	15130	21571
F(9)	55	341	1159	2929	6191	11605	19951	32129	49156	72181
F(10)	89	683	2683	7589	17621	35839	66263	113993	185329	287891
F(11)	144	1365	6160	19305	48576					

Myös nämä sarjat löytyvät kirjallisuudesta. Esimerkiksi Sburlati käsitteli niitä vuonna 2002 ja aivan vastikään, vuonna 2016, J.V. Leyendekkers ja A.G. Shanon julkaisivat vastaavanlaisen taulukon.

Yleistetyistä Fibonaccin sarjoista on olemassa laajalti kirjallisuutta ja niissä esitellään mielenkiintoisia sovelluksia myös lukuteoriaan. Niiissä näitä

sarjoja käsitellään erikoistapauksina yleisempien numerosarjojen joukossa. (Sburlati 2002)

Tavallisten Fibonaccin ja Lucasin sarjojen eri ominaisuuksilla on vuosisatojen ajan olevan yhteyksiä Kultaiseen leikkaukseen liittyviin sarjoihin. Saksalainen matemaatikko Johannes Kepler osoitti, että peräkkäisten Fibonaccin numeroiden suhde konvergoi kohti Kultaista leikkausta. Tämä pätee myös sellaisille Kultaisen leikkauksen joukoille, jotka liittyvät yleistettyihin Fibonaccin sarjoihin. Meidän tarkoituksemme on etsiä analogioita muihin Kultaisen leikkauksen Fibonaccin lukuihin, F_n (a). (Leyendekkers & Shannon 2016)

Kun nuo edellä mainitut sarjat oli kirjoitettu auki, niin ne oli mahdollista esittää myös polynomeina:

$$F(0) = 1$$

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = 1 + x$$

$$F(3) = 1 + 2x$$

$$F(4) = 1 + 3x + x^2$$

$$F(5) = 1 + 4x + 3x^2$$

$$F(6) = 1 + 5x + 6x^2 + x^3$$

$$F(7) = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3$$

$$F(8) = 1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + x^4$$

$$F(9) = 1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 5x^4$$

Yleisesti: $F(k) = \sum_{i=0}^{\lceil k/2 \rceil} \binom{k-i}{i} x^i$, missä k kertoo tason Pascalin monisimpleksissä.

Polynomeissa voi nähdä yhteyksiä myös alkulukuihin, jotka on merkitty taulukossa 7 punaisella. Esimerkiksi $F(5)$ ja $F(7)$ eivät ole ylemmissäkään ulottuvuuksissa alkulukuja sillä $F(5) = 1 + 4x + 3x^2 = (3n+1)(n+1)$ ja $F(7) = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3 = (2n+1)(2n^2+4n+1)$.

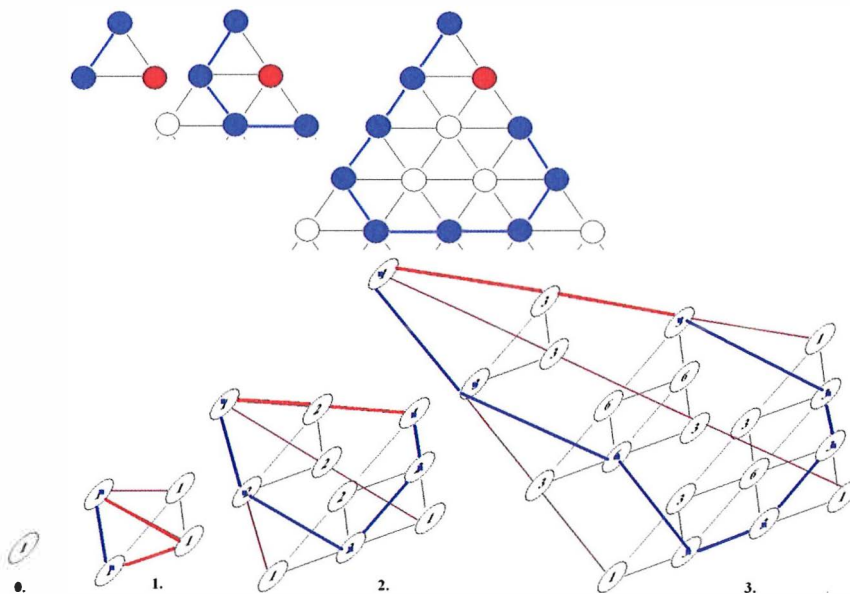
9.5.4 Yhteenveto

Seuraava vaihe on yhdistää kaksi edellä mainittua yleistystä. Näistä yksinkertaisin on kolmiulotteisesta mallista lasketut Jacobsthalin numerot. Tämä sarja alkaa: 1, 1, 1, 5, 13, 25, 57, 111, ... Sarjaa ei ole ainakaan toistaiseksi tullut vielä vastaan kirjallisuudessa. Seuraava sarja neliulotteisesta Pascalin pyramidista alkaa puolestaan 1, 1, 1, 10, 28, 55, 172, ...

9.6 Muita loppuhuomautuksia

9.6.1 Aikaansaadut kehät Pascalin monipinnoilla

Tässä aliluvussa katsotaan alustavasti *aikaansaatuja kehä* (*indusoituja kehä*) Pascalin monipinnoilla. Sivuaihe nousi esille luvun 8.2. yhteydessä. Tässä oleva teksti perustuu esitelmään "Induced Cycles of the Pascal's Polytopes" (21th Workshop on Cycles and Colourings, 2012).



KUVIO 158 Aikaansaatuja kehä Pascalin kolmiolla ja pyramidilla

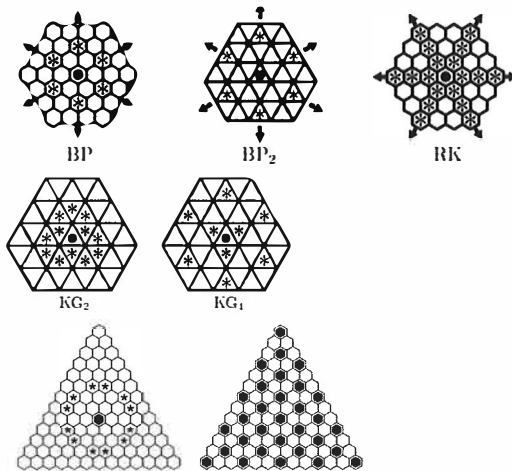
Pascalin aritmeettisen kolmion laajennus kolmanteen ulottuvuuteen on monitahokas, jota kutsutaan Pascalin tetraedriksi tai Pascalin pyramidiksi. Laajennusta neljanteen ulottuvuuteen kutsutaan Pascalin pentachoroniksi. Yleinen käsite on Pascalin monipinta. Käsite aikaansaatu kehä on suuntaamattoman verkon G *aikaansaatu aliverkko*. Aikaansaatuja kehä kutsutaan myös *jänteettömiksi* (*chordless*) *kehiksi* tai verkon aukoiksi. Ongelmaa, jossa pyritään hakemaan aikaansaatuja kehä hyperkuutioista, kutsutaan kierre-laatikossa ongelmaksi ja ongelmaa, jossa pyritään hakemaan virittävää polkua hyperkuutioista, kutsutaan *käärme-laatikossa ongelmaksi*. Tarkoituksena on laajentaa tutkimusta hyperkuutioista myös simpleksi-rakenteisiin. Kuviossa 158 on muutama esimerkki virittävistä kehistä 2- ja 3-simpleksirakenteissa.

9.6.2 Hallitsevuusluvusta eräissä shakin muunnelmissa

Hallitsevuusluku ja riippumattomat joukot ovat toinen alue, jolla voidaan tehdä vielä paljonkin tutkimusta erilaisilla shakkilaudoilla. Selvitetään hieman taustoja.

Verkkojen hallitsevuusluvun tutkimus palautuu vuoteen 1850 ongelmiin, joissa pyrittiin sijoittamaan pienin mahdollinen määrä kuningattaria tai muita shakkinappuloita $n \times n$ kokoiselle laudalle siten, että ne hallitsevat jokaista peliruutua. Lähes kaikki varhaisimmat merkinnät hallitsevuusluvust käsittelevät erilaisten shakkinappuloiden asettelemista pelilaudalle. Varhaisimmat asiaa koskevat teoreemat teki Berge vuonna 1958. (Hedetniemi & Laskar 1988)

Kuitenkin ainakin tasolla olevilla shakkilaudoilla, ei ainostaan neliöruudutetuilla, mutta myös kuusikulmio- ja kolmioruudutetuilla, on saatu jo paljon tuloksia. Kuusikulmioilla tehdyllä tason laatoituksella ratsu voi hyökätä 12 kuusikulmioon ja jokaiselle vapaalle kuusikulmiolle voi hyökätä enintään 6 riippumatonta ratsua. Näin ollen ratsujen riippumaton joukko voi peittää enintään kolmanneksen tasosta. Useita shakkinappuloita käsitellään ja melkein kaikkien shakkinappuloiden riippumattomuusluku on arvioitu. Pieniä aukkoja on vielä jäljellä, kuningattaret pitävät riippumattomuuslukunsa salaisuutena. (Bode, Harborth & Harborth 2003, Bode, Harborth & Kultan 2006, Bode & Harborth 2002)



KUVIO 159 Hallitsevuusluku kuusikulmio- ja kolmiolaudoilla

Kuitenkin aiempi tutkimus on tehty enimmäkseen tasolla olevilla shakkilaudoilla ja perinteisillä shakkinappuloilla. Näyttäisi mahdolliselta yleistää myös nämä ongelmat vaihteleville shakkilaudoille.

10 YHTEENVETO

Tutkimuksessa on rakennettu *matemaattinen, shakkiin pohjautuva n -pelaajan symmetrinen pelimalli*. Mallia käsitellään 8. luvussa. Symmetrisyydellä tarkoitetaan tässä pelaajien asemaa toisiinsa nähden. Siirtojärjestys luonnollisesti rikkoo symmetrisyyden, mutta siihenkin on löydettävissä ratkaisu. Motiivi pelimallin rakentamiseen lähti siitä, että monen pelaajan pelien kohdalla on muuttuvia tekijöitä niin paljon, että niiden kohdalla optimaalisten strategioiden löytäminen matemaattisesti on liki mahdotonta. Paras tapa löytää parhaat toimintatavat on simulointi. Tämän vuoksi oli mielekästä kehittää malli, jota voi hyödyntää peliteoreettisissa asetelmissa simuloimalla. Kun malli on kerran rakennettu, niin sitä voidaan soveltaa monella tavalla malliin pohjautuvien laskennallisten algoritmien avulla. Shakki on tässä vain perusrakenne, joka antaa selkeän pohjan. Eri pelaajien painotusarvoa voidaan muuttaa samoin kuin pelaajien nappuloiden painotusarvoja, jolloin mallilla voi peilata erilaisia tosielämän tilanteita. Peli, ja erityisesti shakki, antaa mielikuvan lautapelistä, mutta pelien kohdalla on kyse useiden eri toimijoiden keskinäisestä vuorovaikutuksesta. Peli, voi olla osa politiikan pelikenttää, metsän ekologiaa tai sään ennustamista.

Ennen mallin luomista oli kuitenkin selvitettävä sen taustalla olevia tekijöitä, joista peliteorian (luku 2) läpikäynti oli luonnollista. Tilan jakamista osiin (luku 3) eri tavoin oli tarpeen käsitellä pelimallin rakenteen vuoksi. Lautapelien ja shakin evoluutiovaiheet (luvut 4 ja 5) toimivat pohjana tekijän omille kehitelmille luvuissa 6 ja 7.

Tutkimuksen aikana syntyi lukuisia huomioita ja sivutuloksia, joista suurin osa on selkeyden vuoksi siirretty 9. lukuun työn loppuun jatkotutkimusaiheiksi. Tällaisia ovat *Eulerin-Poincarén kaavan yleistys aukkojen määriä eri euklidisissa ulottuvuuksissa kuvaavan genus-muuttujan osalta (9.3)*, huomio *parillisten ja parittomien ulottuvuuksien eroista (9.4)*, *Fibonacciin sarjojen yleistyksen (9.5)*.

Näiden lisäksi on erilaisia huomioita. Aikanaan Frank Hararyn kanssa aloitettu *verkkojen nimeäminen yksikäsitteisesti lukujen avulla (9.1)* on ollut esillä muuallakin aiemmin lähinnä mainintana, mutta vastaavaa konkreettista esitys-

tä on ollut vaikea löytää. *Pienten pelien strategiaverkot* (9.2) on tämän tutkielman aikana syntynyt kehitelmä, joka on suunnattu ensisijaisesti kognitiivisen tieteen puolelle tavoitteena tutkia eri ihmisten päätöksentekoprosesseja. Sen laajentaminen perinteisen shakin tasolle tuskin on mahdollista. Kahdessa viimeisessä aliluvussa esitellyt aiheet, *virittävät kehät* (9.6.1) ja *hallitsevuusluku* (9.6.2), antavat pohjan näiden alueiden tutkimuksen viemiselle uusille alueille.

Edellisten lisäksi on päätekstin luvuissa myös joitain uusia huomioita. Pelien varhaishistoriaa käsittelevässä luvussa on käsitelty *havaijilaisen Konanepelin syntyä* (4.1.5.1). Onko peli syntynyt paikallisesti vai onko tullut asutuksen mukana? Kumpikin vastaus on kiehtova. Jos peli on tuotu, niin se kertoo siitä, että tällaisten pelien synty juontaa tuhansien vuosien päähän. Jos peli on keksitty paikallisesti, niin se kertoo ajattelutapamme sisällä olevasta ominaisuudesta luoda samantyyppisiä pelirakenteita eri puolilla maailmaa. Toinen tähän lukuun liittyvä huomio perustuu kuuluisaan *kreetalaiseen Faistoksen kiekkoon* (4.3.2). Tässä tutkielmassa esitetään teoria, että kyseessä on peli ja huomio pohjautuu Iranista löytyneeseen muinaiseen peliin, joka näyttäisi olevan yhdistävä lenkki kahden muun muinaisen pelin, egyptiläisen ja mesopotamialaisen, välillä. Pienempi havainto on *Pascalin säännön laajennus* (8.3), joka on niin yksinkertainen, että se ei voi olla uusi. Yrityksistä huolimatta sitä ei kuitenkaan löytenyt kirjallisuudesta.

Koko tutkimuksen päätavoite ja tulos oli kuitenkin luoda symmetrinen n -pelaajan strategiapeli, koska tiettävästi ei ole olemassa yhtään yksinkertaista matemaattista ratkaisua, jolla voisi mallintaa n -pelaajan strategiapelejä.

ENGLISH SUMMARY

In this research a *mathematical, symmetric n-player game model, based on chess*, was discussed in Chapter 8. Before the creation of the model, several basic issues, such as the game theory (Chapter 2) and tiling (Chapter 3) had to be explored. Due to the earlier results mentioned in Chapter 6 and Chapter 7, the evolution of board games and chess (Chapters 4 and Chapter 5) is also included. During this research a number of spin-off results and observations were discovered. Some of them may be found in Chapter 9 and are meant to be used in further research. These topics include a *generalization of the Euler-Poincare characteristic*, concerning the genus (number of holes) in different Euclidean dimensions (9.3), *the differences between the even and odd Euclidean dimensions* (9.4) and *generalizations of Fibonacci sequences* (9.5). In addition to these topics, notes on various themes are included. For example, *the number of a graph*, started by Frank Harary (9.1), is not a new idea, however, to our knowledge, it has not been presented in detail so far. *Strategy networks for small games* (9.2) with its leaning towards cognitive science were primarily introduced to explore decision-making processes of different people. Its extension to traditional chess is hardly possible. The topics of the last two sub-sections, *induced cycles* (9.6.1) and *domination* (9.6.2), serve as a basis for expanding this research to new areas. In addition, the main chapters offer some new observations. The chapter aimed at the early history of gaming offers two different hypotheses related to the birth of the *Hawaiian game konane* (4.1.5.1). Was the game created locally or imported? Either answer is interesting. If the game was imported, then the genesis of such games dates back thousands of years. If the game was invented locally, it is telling us about our way of thinking and about the creation of the same type of game structures in different parts of the world. The second comment in the same chapter is related to the famous *Cretan Phaistos disc* (4.3.2). This study supports the theory that this was a game. The theory is based on an ancient Iranian game, which seems to be the missing link between two other ancient games in Egypt and Mesopotamia. A minor observation concerns *an extension of Pascal's rule* (8.3), which is so simple that it is difficult to believe it is a new rule. Nevertheless, it has not been found in the literature

HAKEMISTO

2-solu	2-cell	40
agon	agon	72
Alea Evangelii	Alea Evangelii	63
alquerque	alquerque	68
Altenburgin peli	Altenburg's game	101
Anatoli Karpov	Anatoly Karpov	129
Ard Ri	Ard Ri	63
Arkhimedeen kappaleet	Archimedean solids	43
Ashtapada	Ashtapada	60
asva	asva	77
Brandubh	Brandubh	63
Bysanttilainen shakki	Byzantine chess	79
cuboctaedri	Cuboctahedron	159
Dassaun peli	Dassau's game	101
duaaliverkko	dual graph	20
epäsymmetrinen nelishakki	asymmetrical four-handed chess	137
Euler-Poincarén kaava	Euler-Poincaré formula	215
Euler-Poincarén karakteristika	Euler-Poincaré characteristic	215
Faistoksen kiekko	Phaistos Disk	88
fil	fil	77
firzan	firzan	77
Fjögratafl	Fjögratafl	94
fylogeneettinen	phylogenetic	86
Gala-peli	Gala-game	102
Glinskin heksagonaalishakki	Glinski's hexagonal chess	105
go	go	70
Goldbergin monitahokas	Goldberg polyhedron	170
gwezboell	gwezboell	62
gwyddbwyll	gwyddbwyll	62
hallitsevuusluku	domination number	238

Heksagonaalilaudan numerointi	Numbering of a hexagonal board	127
Hexagonia	Hexagonia	106
hexateron	hexateron	193
Hneftafl	Hneftafl	61
hunajakkenno	honeycomb	47
hyperkuutiomalli	the hypercube model	175
hyperlähetti	hyper bishop	148
hyperratsu	hyper knight	148
hyperupseeri	hyperofficer	149
Jacobsthalin luvut	Jacobsthal numbers	233
jätjänshakki	Tic-Tac-Toe	32
kahden hengen nollasummapeli	two-person zero-sum game	25
kahden hengen vakiosummapeli	two-person constant-sum game	27
karttojen neliväriteoreema	Four Color Theorem	216
Kauppamatkustajan ongelma	Travelling Salesman Problem	112
kehämäinen kiekko	circular disk	41
Keplerin otaksoma	Kepler's conjecture	52
kesy verkko	Tame graph	53
Kiinalainen shakki, Xiang-chi	Chinese Chess	78, 80
Kolme kuningaskuntaa	Three Kingdoms	97
Kolmen ystävän peli	Three Friends game	98
kolmiolauta	triangular board	122
Kolmioshakki	Triangular chess	170
Kolmishakki	Trichess	121
konane	konane	72
kromaattinen luku	chromatic number	172
kuutiolauta	cubic game board	160
kvadrinomikaava	quadrinomial formula	188
kvadronikerroin	quadratic coefficient	182
laatoittaminen	paving	37
laatoittaminen, pinnan täyttäminen	tiling	37, 39
Langronierin peli	Langronier' game	107
Latrunculi	Latrunculi	64
Laudaton kolmishakki	Boardless trichess	169
Liubo	Liubo	71
Maglianon kiekko	Magliano Disc	90
Marinellin kolmishakki	Marinelli's three-handed chess	100
Max Langin kuuden pelaajan shakki	Max Lang's six-player chess	104
Mehen	Mehen	56
monipinta	polytope	44
moniverkko	multigraph	20
multinomikaava	multinomial formula	181
multinomikaavamalli	the multinomial formula model	178
neliulotteinen genus	four-dimensional genus	218, 219
Neljän vuodenajan shakki	Four seasons chess	98

neljän pelaajan shaturanga	Chaturaji	78
Neperin luku	Napier's number	230
Neumannin nelishakki	Neumann's four-hand chess	103
N-pelaajan pelit	N-person games	31
n-yhtenäinen	n-connected	20
Ouroboros, Jormagund	Ouroboros	56, 92
pakkausongelmat	packing problems	51
Pascalin sääntö	Pascal's rule	179
Pattonin peli	Patton's game	107
peliteoria	Game theory	23
pentachoron	pentachoron	178
pentanomikaava	pentanomial formula	193
Petteia	Petteia	65
pikkushakki	Small chess	154
pistekuvio	vertex figure	44
Platonin kappaleet	Platon solids	42
primitiiviset shakkipelit	Primitive chessgames	155
pseudoaukko	pseudohole	217
pseudoverkko, epäverkko	pseudograph	20, 40
raja	raja	77
Rasmussinin peli	Rasmussin's game	107
ratha	ratha	77
Ratsun avoin polku	Knight's path	112
Ratsun avoin polku heksagonilaudalla	Knight's Path on hexagonal board	115
Ratsun polku	Knight's tour	112
reviiri	territory	116
reviirimalli	the territorial model	174
riippumattomuusluku	independence number	172
Saamelaisten tablut-peli	Sami tablut-game	62
San-guo-qi	San-guo-qi	97
San-you-qi	San-you-qi	98
satulapiste	saddle point	26
Schläflin symboli	Schläfli symbol	46
Seega	Seega	66
Seitsemän armeijaa peli	Seven Armies game	98
Selfin peli	Self's game	108
Senet	Senet	58
shatranj	shatranj	76, 77
shaturanga	Chaturanga	77
Shogi	Shogi	81
Siegmund Wellischin kolmishakki	Siegmund Wellisch, three-handed chess	105
simpleksi	simplex	19, 178
sisärakenne	the inner structure	173
Skáktafl	Skáktafl	64
suunnattu verkko	digraph	20

suunnin	direction device	139
suuteluluku	kissing number	49
suutelulukumalli	the kissing number model	177
säännöllinen monitahokas	regular polyhedra	42
säännöllinen verkko	regular graph	37
Tafl-pelit	Tafl games	61
Taikaneliöt	Magic squares	82
Tammi	Checkers	67
Tammi	Draughts	67
tasainen täyttäminen	regular tiling	39
Tawlbwrdd	Tawlbwrdd	63
tetraedrimalli	the tetrahedral model	176
tilan täyttäminen	tessellation	37
triangulaarinen prisma	triangular prism	218, 224
trinomikaava	trinomial formula	182
typistetty oktaedri	truncated octahedron	43
täysin säännöllinen verkko	complete regular graph	37
ulkorakenne	the outer structure	173, 178
universaalin shakin peliohjelma	universal chess game program	148
upotettu	embedded	20, 40
Urin kuninkaallinen peli	Royal Game of Ur	59
Waiderin peli	Waider's game	108
vangin pulma	prisoner's dilemma	30
Vauvashakki	Babychess	211
Venäläinen shakki	Russian chess	103
verkko eli graafi	graph	20
verkon lukuarvo	number of a graph	204
Verneyn kahdeksan pelaajan shakki	Verney's eight-handed chess	105
Verneyn peli	Verney's game	101
virittävä kehä	spanning cycle	112
vyöhyke	zone	116
yksikkökiekkö	unit disk	41
yleinen simpleksishakki	multi-simplex chess	199
Yleistetty Pii	Generalized Pi	226
Zubrinin peli	Zubrin's game	107

LÄHTEET

- Abdelbar, A. M., Ragab, S. & Mitri, S. 2004. Co-evolutionary particle swarm optimization applied to the 7×7 Seega game. *Neural Networks, 2004. Proceedings. 2004 IEEE International Joint Conference on.* IEEE.
- Alama, J. 2009a. A Formal Proof of Euler's Polyhedron Formula.
- Alama, J. 2009b. Formal proofs and refutations. Stanford University. Dept. of Philosophy.
- Aleff, H. P. 2002. The Board Game on the Phaistos Disk: Its Siblings Senet and Snake Game, and Its Surviving Sequel the Royal Game of the Goose. Recovered Science Press.
- Appel, K. & Haken, W. 1977. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics* 21 (3), 429-490.
- Austin, R. 1940. Greek board-games. *Antiquity* 14 (55), 257-271.
- Ball, W. W. R. & Coxeter, H. S. M. 1987. *Mathematical recreations and essays.* (13th. painos) New York : Dover,. W. W. Rouse Ball and H. S. M. Coxeter.. .
- Balog, D., Laszlo, T., Csóka, P. & Pintér, M. 2012. Properties of risk capital allocation methods. working paper available at <http://media.coauthors.net/konferencia/conferences/5/TokeallokcioBalogBatyicsokaPinterMKE111213.pdf>.
- Bayless, M. 2005. Tabletop tactics. *Archaeology* 58 (1), 36-40.
- Bell, R. C. 1979. *Board and table games from many civilizations.* Courier Dover Publications.

- Benjamin, A. T. & Quinn, J. J. 1999. Recounting Fibonacci and Lucas identities. *College Mathematics Journal* 30, 359-366.
- Benton, W. & Benton, H. H. 1977. *The New Encyclopaedia Britannica*. Encyclopaedia Britannica, inc.
- Bicknell-Johnson, M. & Spears, C. P. 1996. Classes of Identities for the Generalized Fibonacci Numbers $G_n = G_{n-1} + G_{n-c}$ from Matrices with Constant Valued Determinants. *Fibonacci Quarterly* 34, 121-128.
- Bidev, P. 1986. *Stammt Schach aus Altindien oder China?* Igalo, Yugoslavia: Selbstverlag.
- Biggs, N., Lloyd, E. K. & Wilson, R. J. 1986. *Graph theory 1736-1936*. (New. painos) Oxford : Clarendon Press,. Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, Robin J. Wilson.; First publ. 1976. .
- Bird, H. E. 2004. *Chess history and reminiscences*. Dean.
- Bland, N. 1851. *On the Persian Game of Chess*: Read June 19th, 1847.
- Bode, J., Harborth, H. & Harborth, M. 2003. King independence on triangle boards. *Discrete mathematics* 266 (1), 101-107.
- Bode, J., Harborth, H. & Kultan, V. 2006. Independent Bishops on Hexagon and Triangle Boards. *Congressus Numerantium* 178, 185.
- Bode, J. & Harborth, H. 2002. Knight independence on triangular hexagon boards. *JOURNAL OF COMBINATORIAL MATHEMATICS AND COMBINATORIAL COMPUTING* 40, 129-132.
- Bornet, P. 2012. *Of Games and Civilizations: W. Jones, H. Cox, and J. Mill on the Indian Origins of Chess*. *Religions in Play: Games, Rituals, and Virtual Worlds* 2, 61.
- Bosch, C., Hernandez, C., De Oteyza, E. & Pearcy, C. 1982. Spectral pictures of functions of operators. *J.Operator Theory* 8, 391-400.
- Botan, S. P. & Nuțu, G. 2009. Roman Board Game Pieces in Northern Dobrudja. *Peuce (Serie Nouă)-Studii și cercetari de istorie și arheologie* (7), 145-156.
- Botermans, J., Viitanen, R., Kurki-Suonio, I., van Splunteren, C. & Nijs, G. 1990. *Suuri pelikirja :: 150 kiehtovaa peliä kaikkialta maailmasta : pelisäännöt, valmistusohjeita, syntytarinoita*. Karkkila : Kustannus-Mäkelä., Jack Botermans... [et al.] ; suomennos Raija Viitanen ; asiantuntijana Ilmo Kurki-Suonio ; [toimittaja: Carla van Splunteren] ; [valokuvat:... Tim ja Marko

- Hamoen, ym.] ; [piirroksset: Ellen Akkerman... et al.] ; [mallipelit ja raketamisohejet: George Nijs]..; Suom. englanninkielisestä laitoksesta. .
- Bouisson, M. 1985. Magic :: its rites and history. (Repr. painos) New York : Ams., Maurice Bouisson ; transl. from the French by G. Almayrac.; Orig. publ. from the ed. of 1960, London. .
- Broom, M. & Rychtar, J. 2013. Game-theoretical models in biology. CRC Press.
- Buchholz, R. H. & Smith, M. J. 1996. Volume of an n dimensional simplex.
- Buchholz, R. H. 1992. Perfect pyramids. Bulletin of the Australian Mathematical Society 45 (03), 353-368.
- Burckhardt, T. 1969. The Symbolism of Chess. Tomorrow.
- Campbell, M., Hoane, A. J. & Hsu, F. 2002. Deep blue. Artificial Intelligence 134 (1), 57-83.
- Castleden, R. 2012. The Knossos Labyrinth: A New View of the Palace of Minos' at Knossos. Routledge.
- Cazaux, J. 2003. Is Chess a hybrid game. The anatomy of Chess, promos-Verlag GmbH .
- Chess, F. R., Ramesh, R. & Anand, V. Encyclopedia> Chess. Image 8, a7.
- Conway, J. & Sloane, N. 1988. Sphere packings, lattices and groups. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290.
- Cox, H. & Harington, J. 1807. On the Buhrma Game of Chess: Compared with the Indian, Chines and Persian Game on the Same Domination.
- Coxeter, H. S. M. 1973. Regular polytopes. (3. painos) New York : Dover., H. S. M. Coxeter.; Reprint. Originally published: 2nd ed.; Macmillan, 1963.. .
- Daşdemir, A. 2012. On The Jacobsthal Numbers By Matrix Method. Suleyman Demirel University Journal of Science 7 (1).
- De Grummond, N. T. & Simon, E. 2009. The religion of the Etruscans. University of Texas Press.
- Dementieva, M. 2004. Regularization in multistage cooperative games. University of Jyväskylä.

- Deutsche Gesellschaft für Natur- & Völkerkunde Ostasiens 1876. Mitteilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens.
- Dufourd, J. F. 2008. Polyhedra genus theorem and Euler formula: A hypermap-formalized intuitionistic proof. *Theoretical Computer Science* 403 (2-3), 133-159.
- Dyckhoff, H. 1990. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research* 44 (2), 145-159.
- Eales, R. 1985. *Chess, the History of a Game*.
- Edwards, A. W. F. 1987. *Pascal's arithmetical triangle*. London : Griffin, A. W. F. Edwards.. .
- Effenberger, D. M. F. 2010. *Hamiltonian Submanifolds of Regular Polytopes*. Institut für Geometrie und Topologie der Universität Stuttgart.
- Eisenberg, J. M. 2008. The Phaistos Disk: a one Hundred-Year-Old Hoax. *the International Review of Ancient Art & Archaeology Minerva* , 9-24.
- Ernst, M. D. 1995. Playing Konane mathematically: A combinatorial game-theoretic analysis. *UMAP Journal* 16 (2), 95-121.
- Evans, A. 2004. Hellenistic and pharaonic influences on the formation of Coptic identity: general. *Scriptura: International Journal of Bible, Religion and Theology in Southern Africa* 86, p. 292-301.
- Ferlito, G. & Sanvito, A. 1990. *On the Origins of Chess*.
- Forbes, D. 1860. *The History of Chess: From the Time of the Early Invention of the Game in India Till the Period of Its Establishment in Western and Central Europe*. Wm. H. Allen & co.
- Gagliardi, C. 1981. Extending the concept of genus to dimension n . *Proc. Amer. Math. Soc.* , 473.
- Gale, D. 1953. A Theory of N -Person Games with Perfect Information. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 39 (6), 496-501.
- Gik, J. & Määttänen, P. 1988. *Shakki ja matematiikka*. Hki ; ; Moskova : SN-kirjat : : Mir, J. Gik ; [...suom. Pentti Määttänen].. .
- Goldberg, M. 1937. A class of multi-symmetric polyhedra. *Tohoku Math.J* 43, 104-108.

- Golladay, S. M. 2007. Los Libros de Acedrex Dados E Tablas: Historical, Artistic and Metaphysical Dimensions of Alfonso X's "Book of Games". ProQuest.
- Gollon, J. 2013. Chess Variations: Ancient, Regional, and Modern. Tuttle Publishing.
- Gonthier, G. 2005. A computer-checked proof of the four colour theorem .
- Gross, J. L., Yellen, J., Beineke, L. W., Wilson, R. J., Aho, A. V., Goldberg, M., Lauri, J., Borie, R., Parker, R. G. & Tovey, C. 2004. Handbook of Graph Theory.
- Grünbaum, B. 1967. Convex polytopes. London,:Pure and applied mathematics; Branko Grünbaum ; with the coop. of Victor Klee...[et al].. .
- Grünbaum, B. & Shephard, G. C. 1987. Tilings and patterns. New York : Freeman,. Branko Grünbaum, G. C. Shephard.. .
- Guy, R. K. 1996. What is a game. Games of No Chance , 43-60.
- Hageman, R. K. 2005. Senet, the Game of Passing. Jeff Stephenson , 3.
- Hales, T. C. 2005. A proof of the Kepler conjecture. Annals of mathematics , 1065-1185.
- Hales, T., Adams, M., Bauer, G., Dang, D. T., Harrison, J., Hoang, T. L., Kaliszyk, C., Magron, V., McLaughlin, S. & Nguyen, T. T. 2015. A formal proof of the Kepler conjecture. arXiv preprint arXiv:1501.02155 .
- Harary, F. 1969. Graph theory. Reading, MA: Addison-Wesley. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley v. 1972.
- Harary, F. & Palmer, E. M. 1973. Graphical enumeration. New York:.
- Heargrave Heaps, S. & Varoufakis, Y. 1995. Game theory, a critical introduction.
- Hearn, R. A. 2005. Amazons, Konane, and Cross Purposes are PSPACE-complete. Games of No Chance III, Proc. BIRS Workshop on Combinatorial Games. , 287.
- Hedetniemi, S. & Laskar, R. 1988. Recent results and open problems in domination theory. Applications of Discrete Mathematics , 205-218.
- Helmfrid, S. 2005. Hnefatafl-the Strategic Board Game of the Vikings. Web site by Sten Helmfrid .

- Hisarligil, H. 2012. Cuboctahedron as a potential evidence of the "cultural bridge" between Kyoto and Kayseri.
- Honkela, T. 1999. Pelit, tietokone ja ihminen. Suomen tekoälyseura.
- Hooper, D. & Whyld, K. 1987. The Oxford companion to chess. Oxford University Press.
- Horn, M. E. 2007. Pauli Pascal Pyramids, Pauli Fibonacci Numbers, and Pauli Jacobsthal Numbers. arXiv preprint arXiv:0711.4030 .
- Horn, M. E. 2003. Pascal Pyramids, Pascal Hyper-Pyramids and a Bilateral Multinomial Theorem. arXiv preprint math/0311035 .
- Huang, Z. & He, B. 2008. Volume of unit ball in an n-dimensional normed space and its asymptotic properties. Journal of Shanghai University (English Edition) 12, 107-109.
- Jarrige, J., Didier, A. & Quivron, G. 2011. Shahr-i Sokhta and the chronology of the Indo-Iranian regions. Paléorient 37 (2), 7-34.
- Jelliss, G. P. 1992. New Varieties of Hexagonal Chess. Variant Chess , 97.
- Johnson, W. 2014. The combinatorial game theory of well-tempered scoring games. International Journal of Game Theory 43 (2), 415-438.
- Josten, G. 2001. Chess - a living fossil. Cologne: Initiative Group Königstein .
- Jung, I. B., Ko, E. & Percy, C. 2001. Spectral pictures of Aluthge transforms of operators. Integral Equations and Operator Theory 40 (1), 52-60.
- Kainulainen, J. 1984. Shakkipelin historia. Hämeenlinna : Karisto. J. Kainulainen.. .
- Khalfine, A. & Troyan, E. 2007. Computer analysis of the two versions of Byzantine chess. arXiv preprint math/0701598 .
- Konsa, M., Allmäe, R., Maldre, L. & Vassiljev, J. 2009. Rescue excavations of a Vendel Era boat-grave in Salme, Saaremaa. Archaeological Fieldworks in Estonia 2008, 53-64.
- Kraaijeveld, A. R. 2000. Origin of chess-a phylogenetic perspective. International Journal for the Study of Board Games cnws , 200039.
- Krcadinac, V. 2006. A new generalization of the golden ratio. FIBONACCI QUARTERLY 44 (4), 335.

- Kyppö, J. 1999. Pelilauta kolmea pelaajaa varten. (FI3797. painos) Finland: A63F3/00.
- Kyppö, J. 1997. Game, especially chess. (FI2844. painos) Finland: A63F3/02.
- Kyppö, J. 1993. Embedding of Complete Graphs, Maximum Genus and the Extension of Heawood's Number. Proceedings of the First Estonian Conference on Graphs and Applications: dedicated to the 70th birthday of Professor Frank Harary, Tartu-Kääriku, May 12-19, 1991. Tartu University, 148.
- Kyppö, J. 1994. Verkkojen ja karttojen upottaminen ei-konvekseille topologisille pinnoille. Jyväskylä,:Jorma Kyppö.; 106 lehteä : : kuv. + + 72 liitel; Lisensiaatintyö :. Jyväskylän yliopisto, tietojenkäsittelytieteiden laitos.; Mattilanniemen kirjastossa paperimuodossa.. .
- Kyppö, J. 1993. Avaruusverkkojen kuvaaminen. Jyväskylä,:Jorma Kyppö.; 106 lehteä : : kuv. + + 72 liitel; Pro gradu -työ :. Jyväskylän yliopisto, tietojenkäsittelyopin laitos.; Mattilanniemen kirjastossa paperimuodossa.. .
- Kyppö, J. 1990. Embedding of non-triangular graphs in the k-toroids. Computer science reports / University of Jyväskylä working paper 17. Jyväskylä :.
- Lagarias, J. C. & Zong, C. 2012. Mysteries in packing regular tetrahedra. Notices of the AMS 59 (11).
- Lasserre, J. B. 2001. A quick proof for the volume of n-balls. American Mathematical Monthly 108 (8), 768-769.
- Lawrence, D. 2013. A pictish origin for Hnefatafl? Board Game Studies Journal (8), 63.
- Lee, D. 2011. Online Game Platform for Instant Messaging on IP Multimedia Subsystems.
- Leyendekkers, J. & Shannon, A. 2016. Some Golden Ratio generalized Fibonacci and Lucas sequences. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics 22 (1), 33-41.
- Li, D. H. 1998. The genealogy of chess. Premier Publishing Company.
- Lipton, R. J., Markakis, E. & Mehta, A. 2003. Playing large games using simple strategies. Proceedings of the 4th ACM conference on Electronic commerce. ACM, 36.
- Lo, A. & Wang, T. 2004. The Earthworms Tame the Dragon": The Game of Xiangqi. Asian Games, The Art of Contest, edited by Asia Society .

- López, I. N. & López, I. N. 2012. *The Spanish Tercios, 1536-1704*. Osprey Publishing.
- Luckhart, C. & Irani, K. B. 1986. An Algorithmic Solution of N-Person Games. *AAAI*, 158.
- Mainz, V. & Girolami, G. 2012. *Crystallography - Defining the Shape of Our Modern World*.
- Maor, E. 1987. *To infinity and beyond: a cultural history of the infinite*. Boston: Birkhäuser. Eli Maor. .
- Marinelli, F. 1826. *Triple chess*. Printed by AJ Valpy.
- Mark, M. 2007. *The Beginnings of Chess. Ancient Board Games in Perspective* .
- Marsaglia, G. & Marsaglia, J. C. 1990. A New Derivation of Stirling's Approximation to $n!$ *American Mathematical Monthly* , 826-829.
- Matisoo-Smith, E. L. 2009. David Penny: Man on the edge. *David Penny tribute* 66.
- McDonald, K. T. 2003. Volume and surface area of an N-Sphere. *RN* 1, 6.
- Mittelman, H. D. & Vallentin, F. 2010. High-accuracy semidefinite programming bounds for kissing numbers. *Experimental Mathematics* 19 (2), 175-179.
- Musin, O. R. 2003. The problem of the twenty-five spheres. *Russian Mathematical Surveys* 58 (4), 794-795.
- Nagle, J. F. 1966. On ordering and identifying undirected linear graphs. *Journal of Mathematical Physics* 7, 1588.
- Nash, J. 1951. Non-cooperative games. *Annals of mathematics* , 286-295.
- Nash, J. F. 1950. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences* 36 (1), 48-49.
- Niehues, J. 2014. *Die Brettspiele des mittelalterlichen Irland und Wales*. Matthias Teichert (Hg.), *Sport und Spiel bei den Germanen. Nordeuropa von der römischen Kaiserzeit bis zum Mittelalter*, Berlin/Boston , 217-244.
- Norton, J. D. 1993. Einstein and Nordström: some lesser-known thought experiments in gravitation. *The Attraction of Gravitation: New Studies in History of General Relativity* , 3-29.

- Ore, O. & Wilson, R. 1963. Graphs and their uses, New Mathematical Library.
- Orwell, G. & Mattila, R. 1999. Vuonna 1984. WSOY.
- Page, R. 1969. Old English Cynningstan. Leeds Stud Engl .
- Papineau, E. 2001. The game of go: A Chinese way of seeing the world. China Perspectives 33, 43-55.
- Parkinson, R. B. 1999. Cracking codes: the Rosetta Stone and decipherment. Univ of California Press.
- Parks, H. R. 2013. The Volume of the Unit n -Ball. Mathematics Magazine 86 (4), 270-274.
- Peets, J., Allmäe, R. & Maldre, L. 2011. Pre-Viking Age complex of burial boats in Salme village. Archaeological investigations in 2010. Archaeological Fieldwork in Estonia 2010. In print .
- Perkis, A. 2010. Firdawsi's Nard & "Latrunculi Chess". Variant Chess (64), 226.
- Pfender, F. & Ziegler, G. M. 2004. Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs. Notices-American Mathematical Society 51, 873-883.
- Piccione, P. A. 1980. In search of the meaning of Senet. Archaeological Institute of America.
- Piperno, M. & Salvatori, S. 1983. Recent results and new perspectives from the research at the graveyard of Shahr-I Sokhta, Sistan, Iran. AION 43 (2), 173-191.
- Pope, C. 2002. Lectures on Kaluza-Klein .
- Powell, R. 2010. Willi Sucher and Jeane Dixon's Prophecy. Journal for Star Wisdom .
- Rapoport, A. 1970. N-person game theory: Concepts and applications. Courier Corporation.
- Ravndal, F. 2004. Scalar gravitation and extra dimensions. arXiv preprint gr-qc/0405030 .
- Read, R. C. & Corneil, D. G. 1977. The graph isomorphism disease. Journal of Graph Theory 1 (4), 339-363.
- Rewega, D. R. 1992. Three-player chess game. Three-player chess game .

- Ringel, G., Ringel, G., Ringel, G., Mathematician, A. & Ringel, G. 1974. Map color theorem. Springer.
- Robinson, P. 2015. Social ritual and religion in ancient Egyptian board games. .
- Rogersdotter, E. 2011. Gaming in Mohenjo-daro—an Archaeology of Unities. rapport nr.: GOTARC B 55 .
- Roos, A. M. 2008. 'Magic coins' and 'magic squares': the discovery of astrological sigils in the Oldenburg Letters. Notes and records of the Royal Society of London 62 (3), 271-288.
- Rothöhler, B. 1999. Mehen, God of the board games. Journal of Board Games Studies 2, 10-23.
- Routledge, E. 1866. Routledge's Every Boy's Annual. Routledge, Warne & Routledge.
- Sachau, E. C. 1910. Al-Biruni's India.
- Sachs, H. 1970. Einführung in die Theorie der endlichen Graphen. Leipzig,:Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek; 1 / / Horst Sachs.. .
- Samsin, M. J. 2002. Pawns And Pieces: Towards The Prehistory Of Chess. Ottawa.
- Sburlati, G. 2002. Generalized Fibonacci sequences and linear congruences. Fibonacci Quarterly 40 (5), 446-452.
- Schädler, D. & Ulrich, A. 2014. BOARD GAMES in pre-Islamic Persia. Encyclopædia Iranica .
- Schädler, U. 1999, page 10. Vom 20-Felder-Spiel zum Würfelvierschach. Board Games Studies 2, 144-148.
- Schaeffer, J., Burch, N., Bjornsson, Y., Kishimoto, A., Muller, M., Lake, R., Lu, P. & Sutphen, S. 2007. Checkers is solved. Science (New York, N.Y.) 317 (5844), 1518-1522.
- Schwenk, A. J. 1991. Which rectangular chessboards have a knight's tour? Mathematics Magazine , 325-332.
- Séquin, C. 2008. Generalized Euler-Poincaré Theorem. Generalized Euler-Poincaré Theorem .

- Sharp, J. 2000. Beyond the Golden Section – the Golden tip of the Iceberg. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science. Bridges Conference, 87.
- Sheppard, H. J. 2013. The Ouroboros and the Unity of Matter in Alchemy: A Study in Origins. *Ambix* .
- Shore, A. F. 1963. A 'Serpent'-Board from Egypt. *The British Museum Quarterly* , 88-91.
- Siegfried, T. 2006. *A Beautiful Math: John Nash, Game Theory, and the Modern Quest for a Code of Nature*. National Academies Press.
- Soares, P., Rito, T., Trejaut, J., Mormina, M., Hill, C., Tinkler-Hundal, E., Braid, M., Clarke, D. J., Loo, J. & Thomson, N. 2011. Ancient voyaging and Polynesian origins. *The American Journal of Human Genetics* 88 (2), 239-247.
- Stakhov, A. & Rozin, B. 2006. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers. *Chaos, Solitons & Fractals* 27 (5), 1162-1177.
- Su, B., Jin, L., Underhill, P., Martinson, J., Saha, N., McGarvey, S. T., Shriver, M. D., Chu, J., Oefner, P., Chakraborty, R. & Deka, R. 2000. Polynesian origins: insights from the Y chromosome. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 97 (15), 8225-8228.
- Szilagyi, M. N. 2012. Investigation of N-person games by agent-based modeling. *Complex Systems* 21 (3), 201-243.
- Torquato, S. & Jiao, Y. 2009. Dense packings of polyhedra: Platonic and Archimedean solids. arXiv preprint arXiv:0909.0940 .
- Verney, G. H. 1885. *Chess Eccentricities*. Longmans, Green & Company.
- Walker, D. G. 2014. *A Book of Historic Board Games*. Lulu. com.
- Walker, P. 1995. *An outline of the history of game theory*. Department of Economics, University of Canterbury.
- Watkins, J. J. 2004. *Across the board :: the mathematics of chessboard problems*. Princeton, N.J. : Princeton University Press., John J. Watkins.. .
- Weisstein, E. W. 2002. *CRC concise encyclopedia of mathematics*. CRC press.
- Weisstein, E. W. 2015. *Jacobsthal Number*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. .

White, A. T. 1973. *Graphs, groups and surfaces*. Amsterdam,:North-Holland mathematics studies; Arthur T. White.. .

Whittaker, H. 2013. Social and symbolic aspects of Minoan writing. *European journal of archaeology* .

Winston, W. 1994. *Operations research: applications and algorithms*.

Wirz, L. N., Tonner, R., Hermann, A., Sure, R. & Schwerdtfeger, P. 2016. From small fullerenes to the graphene limit: A harmonic force-field method for fullerenes and a comparison to density functional calculations for Goldberg-Coxeter fullerenes up to C980. *Journal of computational chemistry* 37 (1), 10-17.

Zubrin, R. 1972. *Three player chess board* .

LIITE -1 SÄHKÖPOSTIT KOLMISHAKIN SYNTYPROSESSISTA

Näin koko prosessi alkoi Frank Hararyn kanssa.

1.

From fnh@NMSU.Edu Sat May 15 22:48:54 1993

Subject: Re: Golden Knight

and another perhaps fascinating chessy problem, not a game:

On a $b \times b$ board, what is the largest no. of squares that a knight can visit without any square occurring more than once?

i.e. What is the longest path length in the $Kt(b)$ -graph ??

ooooops, not length but $1 + \text{length} = \text{no. of vertices}$ 1L in a longest path.

b: 3 4 5 6 7 8 9

1L: 8 15 25 ?? ?? 64 ??

This one question MIGHT be fully solvable.

2.

Dear Frank,

Yet some comments about the Hamiltonian Knights.

Here you got 35.

"22 25 34 16 32 27

35 15 23 26 06 17
24 21 07 33 28 31
14 01 29 18 10 05
20 08 03 12 30 xx
02 13 19 09 04 11"

Did you get my fax on Monday (24th)? There was drawn a hamiltonian path in KT6. It was made by computer. When I compared that solution to your one, it seems that you missed in sixth step, which should have gone where now is 34th. The best strategy seems to be such that it is not good to go in the centre if not necessary.

Here is the "fax"-solution:

25 18 07 32 23 16
08 31 24 17 06 33
19 26 09 30 15 22
10 01 12 21 34 05
27 20 03 36 29 14
02 11 28 13 04 35

I also counted with same strategy an hour ago another solution:

01 16 29 22 07 14
28 21 08 15 32 23
09 02 17 30 13 06
18 27 20 33 24 31
03 10 38 26 05 12
36 19 04 11 34 25

"For $b=7$, I can only get 47 do I'm missing 2 squares."

I also got only 47. Very interesting. I try tomorrow also a computer solution for my homeputer $b=7$ is too much, (s)he doesn't stop counting.

By the way I found again a funny small result. The number of edges in KT_b -graphs, when $b=3,4,5,6,7,8$ is 8,24,48,80,120,168, which means that $e(KT_b) = 8 \times e(K_{b-1})$ or in other words: the number of edges in KT_b is the number of edges in complete graph of $b-1$ vertice multiplied by 8.

It was also funny to see that the number of edges in KT_8 is same like the number of vertices in that chessboard I told you in the

morning.

3.

Subject: 48 and other stories

Dear Frank,

You were right in KT7 I got 48 vertice. I counted by hand for the silly program didn't stop counting if there were no Hamiltonian path!

Here:

01 32 13 22 03 24 47
12 21 02 xx 48 15 04
31 38 33 14 23 46 25
20 11 30 45 26 05 16
37 34 39 08 29 42 27
10 19 36 41 44 17 06
35 40 09 18 07 28 43

Hope it is right,
bye, Jorma

4.

From fnh@NMSU.Edu Mon May 31 20:22:53 1993

Subject: Re: 48 and other stories

DJ,

I believe 48 is correct; interesting! This is a nice question for 'mathematical recreation'.

5.

palikka:/home/tukki/tko/jaek% mail fnh@NMSU.Edu

Subject: KT9, etc.

Dear Frank,

" Conjecture; On Kt-bxb-board, there is always a Kt path either on all b^2 squares or on $b^2 - 1$ squares. Do you agree? "

Interesting. It would also be interesting to find out the order when there are all the squares and when -1 squares.

Now it is like this:

4: -1
5: all
6: all
7: -1
8: all
9: all, for

The path of KT9:

01 30 17 44 03 32 19 46 05
56 43 02 31 18 45 04 33 20
29 16 57 80 75 70 59 06 47
42 55 74 69 58 65 76 21 34
15 28 79 64 81 60 71 48 07
54 41 68 73 62 77 66 35 22
27 14 63 78 67 72 61 08 49
40 53 12 25 38 51 10 23 36
13 26 39 52 11 24 37 50 09

This is very nice and easy path, you just follow the outer circle.

And also KT13 has all the squares, for the chessboard with a hole
KT13-KT9 has a path! And because of the same reason the KTKTK
KT9 is solvable for KT9-KT5 has a path and KT5 is solvable.

Now I got one common result, which I explain tomorrow,

Result: All the KT_b , when $b \equiv 4n+1$ and $n = 1,2,3,\dots$ have a path
where are all the squares and just once.

6.
From fnh@NMSU.Edu Tue Jun 1 20:19:05 1993
Subject: Re: KT9, etc.

DJ,
I greatly enjoyed your KT9 path!

7.
From fnh@NMSU.Edu Tue Jun 1 20:34 EET 1993
Date: Tue, 1 Jun 93 11:30:42 MDT

DJ,

Here is some important information from Schwenk:
Subject: RE: Knight-hamiltonian square boards

For the square $b \times b$ boards, only $b=2$ and 4 (for even b 's) fail to have a ham cycle. Of course all the odd boards cannot have a ham cycle since the graph is bipartite and the order is odd. I haven't cataloged the ham paths.

For rectangular boards, ham cycles on an $m \times n$ board, with $m \leq n$, exist unless:

- (1) m and n are both odd
 - (2) $m = 1$ or 2 or 4
 - (3) $m = 3$ and $n = 4$ or 6 or 8 .
-

8.

Thu Jun 3 00:40 EET 1993

Dear Frank,

Yesterday I told you that it is always possible to make the Knight's Tour on $b \times b$ -board, in such way that Knight visits exactly once in every square, if $b = 4n+1$, where $n = 1, 2, 3, \dots$

A. Schwenk, told in his mail, that on $b \times b$ -board there can always be found the Hamiltonian path if b is even number except the cases when $b = 2$ or 4 . This follows that also if $b = 4n$ or $4n+2$ the result above is valid. So there is left only one case: $b = 4n-1$, $n=1,2,3, \dots$
(So these $b = 4n + \{-1,0,1,2\}$ cover the boards $b = 3,4,5,6, \dots$)

Your conjecture said that if it was not possible to get all the squares then there should be left more than 1 square in any case. Since yesterday there were three 1 square cases, namely $b=3, 4$ and 7 .

Now I would like to change this conjecture to a theorem, which says that on every $b \times b$ -board there can be found a path (every square just once), except if $b = 3$ and 4 (and of course $b = 2$). The case $b = 3$ is trivial and also the case $b = 4$ (which you counted to 15) is not difficult to prove. This can be seen clearly for example in that picture, I sent you by fax, where the hexagonal faced version of KT4 was embedded in the torus.

Here I give you KT7 with a path of 49 squares:
(so it slowly grew from 47 to 48 and 49)

31 42 21 02 33 44 23

20 01 32 43 22 03 34
 41 30 09 12 15 24 45
 08 19 14 47 10 35 04
 29 40 11 16 13 46 25
 18 07 38 27 48 05 36
 39 28 17 06 37 26 49

And here yet the case $b=11$ (I've on same paper also KT15, but my fingers denied to type when they saw it)

1 20 39 112 3 22 41 14 5 24 43
 38 111 2 21 40 113 4 23 42 115 6
 19 56 87 88 77 58 89 100 79 44 25
 110 37 76 57 88 99 78 59 90 7 116
 55 18 97 86 65 68 71 80 101 26 45
 36 109 64 75 70 103 66 91 60 117 8
 17 54 85 96 67 72 69 102 81 46 27
 108 35 74 63 94 83 104 61 92 9 118
 53 16 95 84 73 62 93 82 121 28 47
 34 107 14 51 32 105 12 49 30 119 10
 15 52 33 106 13 50 31 120 11 48 29

When you make KT15 you only has to change 121 to 119 then change the labelling by adding 24 to each number and then change 225 where originally was 119. Start from B2 and after one circle you are in KT11.

Some explanations:

I only explain some main ideas of the proof. If you have a "chessroad" $b \times 2$ and $b \geq 2$ then you need 4 different paths to fill all the squares. If you make a "holy" chessboard: $(b+2) \times (b+2) - b \times b$ it consists four this kind of chessroads with four paths. In every corner there are squares, that belong to some of these paths. And as a graph the NW-corner looks like this:

Path I: east <--- B4 --- A2 --- C1 ---> south
 | |
 | |
 Path II: south <-- C2 --- A1 --- B3 ---> east
 | |
 | |
 Path III: east <--- A3 --- B1 --- D2 ---> south

Path IV: south <-- D1 --- B2 --- A4 ---> east

The idea of the proof is to follow these circular chessroads from outer circle towards the centre. In case $b = 4m + 1$ this is enough, but in case $b = 4m - 1$ you start from the outer circle, go to the centre and then back to outer circle. In this second period you have to jump back to the inner circle always once. For example in KT11: 103 and 121.

The reason why it is necessary to follow the paths on chessroads like I've done can be explained in natural way. Paradoxal is only the fact that the to find the system how to follow the paths is most complicated in cases where b is even and such already proved!

Perhaps my explanation was a bit messy, but it is made too fast and it is pretty difficult to draw good pictures in e-mail.

9.

Date: Fri, 23 Jul 93 00:25:28 +0200

Hello Frank,

I hope to send you the Knight-draft on the beginning of next week, perhaps Tuesday. I did like your fascinating way to remind about it.

Tomorrow more. By the way I'm now developing a new idea (yes, yes, I leave it now for few days), a chess without board!

10.

From fnh@NMSU.Edu Fri Jul 23 02:41 EET 1993

Subject: bored-less chess

dj,

I lk fwd to hearing about this nu type of chess, to see if it extends to other games! Such a paper wd not be boring.

11.

Subject: Alichess and ironwheels

Dear Frank,

About hexagonal tri-chess. Now I know at least 3 of them, all invented individually in different times and almost all on hexagonal boards:

- a) Austrian Siegmund Wellisch in 1912 on 91-hexagonal board (no bishops). In this game horse is moving like in my first 46-chess, which I found wrong and then developed 87-chess.
- b) Polish Glinski in 1949 made on same board a 2-person chess (they have started to play world championships from the year 1983! it is called simply "hexagonal chess" or Polish chess). Glinski had got exactly the same movements with buttons like I have!
- c) Russian Safran made (in 50's?) a 2-person hexagonal chess on 70-board. This game didn't come popular,
- d) Hexagonal trichess on 96-board (who?, when? where? don't know, only I know the reference)
- e) In German was sold in 60's some trichess on triangular board! By my opinion that game isn't anymore chess. I don't know more about it, and
- f) Australian Englishman Patton made in 1975 a hexagonal trichess on 217 board!! He had same movements like Glinski (and me). By the way it is not difficult to find out where these boards have got their sights:

If a hexagon is surrounded by 5 levels of hexagons then we have 91 board, if a hexagon is surrounded by 8 levels of hexagons then we have 217-board. I also know how to develop the 96-board.

But I believe that it takes for a while to find out how I got to 87-board. And this is what makes by my opinion my chess different. It is the only hexagonal chess which is created on same basis like traditional 64-chess. I didn't try to invent a strange game; it came out in natural way!

12.

Date: Thu, 5 Aug 93 16:05:36 +0200

Dear Frank,

I didn't yet send the chess-draft, but I send it soon.

Then I send the Slovak-abstract.

And after these two I send trichess to M.G., in spite of the fact that I would like to do it at first. This is what they call self-discipline.

I've played now one 2 hours game with two amateur players trichess. In two weeks also with the chessmaster. By my opinion it seems, that the difference between t.ch. and ordinary chess is something like between Canadian and European icehockey. In trichess the situations change very fast.

LIITE -2 EPÄSYMMETRISEN NELJÄN PELAAJAN SHAKIN SÄÄNNÖT

Nappulat. Pelin alussa jokaisella pelaajalla on 9 mustaa, valkeaa, punaista tai keltaista nappulaa. Kullakin on yksi Kuningas, yksi Kuningatar, yksi Torni, yksi Ratsu, yksi Lähetti ja neljä sotilasta.

Tavoite. Tarkoituksena on vastustajien kuninkaiden vangitseminen. Kaikki muut nappulat voidaan lyödä ja poistaa laudalta. Kun Kuningas joutuu vangituksi, niin siitä tulee *matti*. Peli voi päättyä kahdella eri tavalla ja käytettävästä tavasta on sovittava ennen aloittamista.

A. Pelaaja, joka ensimmäiseksi onnistuu tekemään matin, jollekin vastustajistaan, on voittaja ("ensimmäinen matti voittaa").

B. Pelaaja, jonka Kuninkaasta on tehty matti, putoaa pelistä ja viimeinen laudalle jäänyt pelaaja on voittaja ("viimeinen matti voittaa"). Pelaaja, joka näkee matiksi joutumisen uhkaavan Kuningastaan voi myös antautua, jolloin hän samoin putoaa pelistä.

Mikäli tapaa B käytetään turnauksessa, niin peliä voidaan aktivoida jakamalla neljä pistettä pelaajien kesken siten, että voittaja eli viimeisen matin tehnyt matista saa kaksi pistettä ja ennen pelin päättymistä tehdyistä mateista saa kustakin yhden pisteen. Jos pelaaja on hävinnyt pelinsä luovuttamalla, niin silloin piste lasketaan viimeisenä matin tehneelle pelaajalle. Peli voi siis päättyä seuraaviin pistejakaumiin: (4, 0, 0,0), (3, 1, 0, 0) (2, 1, 1, 0) tai (1, 1, 1, 1). Viimeinen pistejako koskee tilannetta, jossa kaikki neljä pelaajaa päätyvät pattiin.

Siirrot. Jokainen nappula voi siirtyä lähtöruudultaan määrättyjen sääntöjen puitteissa. Säännöt ovat samat kuin perinteisessä shakissa paitsi sotilaan osalta.

Sotilas poikkeaa tavallisen shakin sotilaasta syystä että vastustajia on yhden sijaan kolme, joista kaksi pelaajaan nähden kohtisuoraan ja yksi viistosti. Tästä seuraa, että sotilas voi siirtyä kahteen mahdolliseen ruutuun, kohden jompaakumpaa vasenta tai oikeaa vastustajaansa. Ainoa poikkeus on alussa oleva mahdollisuus kaksoisaskeleeseen, sen voi kukin sotilas tehdä vain kohti lähintä vastustajaa. Muutoin sotilas voi pelin aikana milloin tahansa valita näiden kahden liikesuunnan välillä ja kuten tavallisessa shakissa se lyö viistoon (Lähetin liikesuuntaan). Tällöin lyöntisuuntia on kaikkiaan kolme (Kuvio 91, oikealla). Sotilas korotetaan jos se saavuttaa jonkin vastapäisen pitkän sivun kahdeksasta ruudusta.

Sotilas, joka uhkaa ruutua, jonka vastapelaajan alkuperäisestä ruudustaan yhdellä kertaa kaksi askelta edennyt sotilas on sivuuttanut, eli siirtynyt sen naapuriruutuun, voi välittömästi seuraavalla siirrollaan (ja ainoastaan silloin) lyödä tämän vastapelaajan sotilaan ikään kuin viimeksi mainittu olisi siirtynyt vain yhden askelen. Tätä erikoissiirtoa nimitetään ohesta lyönniksi.

Pelin päättymiseen liittyviä sääntöjä

Häviö. Tämä sääntö on merkityksellinen ainoastaan jos peli on sovittu päättyväksi tavalla B. Pelaajat, joiden kuninkaista on tehty matti ovat hävinneet pelin. Samoin pelaajat, jotka ovat ilmoittaneet antautuvansa, ovat hävinneet pelin. Matti ja antautumisilmoitus ovat tehtävissä missä pelin vaiheessa tahansa. Hävinnyt pelaaja putoaa pelistä, mutta nappulat jäävät laudalle "voimattomina". "Voimaton", tarkoittaa sitä että nappuloita ei voi liikuttaa eivätkä ne uhkaa ketään. Ne ovat kuitenkin kulkuesteitä, jotka voidaan poistaa vai lyömällä kuten normaalitkin nappulat. Tämä sääntö koskee myös Kuningasta.

Hävinneen pelaajan nappulat voidaan myös poistaa laudalta, mikäli jäljelle jääneet osapuolet näin yhteisesti sopivat.

Voitto. Viimeisenä laudalle jäänyt pelaaja on voittanut pelin.

Tasapeli kahden pelaajan kesken. Mikäli vain kaksi pelaajaa on jäljellä niin peli näiden kesken päättyy tasapeliin kun: a) Siirtovuorossa olevan pelaajan Kuningas ei ole shakissa, mutta tämä pelaaja ei voi tehdä mitään sääntöjen mukaista siirtoa (tilanne on "patti"), b) Molempien pelaajien siitä sopiessa, c) Jommankumman pelaajan vaatimuksesta, kun sama asema esiintyy kolme kertaa saman pelaajan ollessa joka kerta siirtovuorossa. Asema katsotaan samaksi, jos samanlaiset ja -väriset nappulat samoissa ruuduissa ja näiden nappuloiden siirtomahdollisuudet ovat samat. Oikeus vaatia tasapeliä on yksinomaan pelaajalla, jolla on mahdollisuus tehdä aseman uusiutumiseen johtava siirto, mikäli hän ilmoittaa tekevänsä tämän siirron tai pelaajalla jonka on vastattava aseman uusiutumiseen johtavaan siirtoon, d) Kun siirtovuorossa

oleva pelaaja osoittaa, että pelissä on kaiken kaikkiaan on tehty vähintään 60 siirtoa mitään nappulaa lyömättä tai sotilasta siirtämättä.

Tasapeli kolmen pelaajan kesken. Peli voi päättyä tasapeliin kaikkien kolmen pelaajan kesken kun: a) Siirtovuorossa olevan pelaajan Kuningas ei ole shakissa, mutta tämä pelaaja ei ole voinut kahdella peräkkäisellä siirtovuorolla tehdä mitään sääntöjen mukaista siirtoa (tilanne on "patti"), b) Kahden peräkkäisellä siirtovuoroilla olevien pelaajien kuninkaat eivät ole shakissa, mutta nämä pelaajat eivät ole voineet siirtovuoroillaan tehdä mitään sääntöjen mukaista siirtoa (tilanne on "kaksoispatti"), c) Molempien pelaajien siitä sopiessa; d) Jonkun pelaajan vaatimuksesta, kun sama asema esiintyy kolme kertaa saman pelaajan ollessa joka kerta siirtovuorossa. Asema katsotaan samaksi, jos samanlaiset ja -väriset nappulat samoissa ruuduissa ja näiden nappuloiden siirtomahdollisuudet ovat samat. Oikeus vaatia tasapeliä on yksinomaan pelaajalla, jolla on mahdollisuus tehdä aseman uusiutumiseen johtava siirto, mikäli hän ilmoittaa tekevänsä tämän siirron tai pelaajalla jonka on vastattava aseman uusiutumiseen johtavaan siirtoon, c) Kun siirtovuorossa oleva pelaaja osoittaa, että puolin ja toisin on tehty vähintään 50 siirtoa mitään nappulaa lyömättä tai sotilasta siirtämättä.

Tasapeli neljän pelaajan kesken. Peli päättyy samoin kuin kolmen pelaajan kesken.

KUVIOT JA TAULUKOT

KUVIOT

KUVIO 1 Verkon eli graafin perusosat.....	20
KUVIO 2 Työn rakenne	22
KUVIO 3 Nollasummapelin voittomatriisi.....	25
KUVIO 4 Esimerkki nollasummapelistä, jossa ei ole satulapistettä.....	26
KUVIO 5 Esimerkki kivi-, paperi-, sakset- pelistä	27
KUVIO 6 Esimerkki vakiosummapelistä	28
KUVIO 7 Esimerkki ei-vakiosummapelistä.....	30
KUVIO 8 Ei-vakiosummapelin esimerkin tarkastelu koordinaatistossa.....	30
KUVIO 9 Vangin pulma	31
KUVIO 10 Jätkäshakki.....	33
KUVIO 11 Neljän pelaajan peli 4-hilassa	34
KUVIO 12 Säännöllinen verkko, sen ei-säännöllinen duaali ja täysin säännöllinen verkko	38
KUVIO 13 Kolme mahdollista tapaa täyttää taso tasaisesti	39
KUVIO 14 Tason täyttö säännöllisillä kahdeksan- ja nelikulmioilla	40
KUVIO 15 Täysin säännölliset tasoverkot	42
KUVIO 16 Platonin säännölliset monitahokkaat	42
KUVIO 17 Tilan tasainen täyttäminen kuutioilla	42
KUVIO 18 Arkhimedeiden kappaleet (Torquato & Jiao 2009)	43
KUVIO 19 Pistekuviaita.....	45
KUVIO 20 Neliulotteisen hyperkuution Schlegelin diagrammi.....	46
KUVIO 21 Kaksi- ja kolmiulotteinen suuteluluku.....	49
KUVIO 22 Suuteluluvun arvot ulottuvuuksissa 1 - 24.....	51
KUVIO 23 Pallojen pakkaaminen ja Keplerin otaksuma.....	53
KUVIO 24 Mehen, pelialusta ja pelitilanne	57
KUVIO 25 Senet.....	58
KUVIO 26 Muinainen 20-ruutua -peli eli kuninkaallinen peli Urista	60
KUVIO 27 Ashatapada juoksupeli	61

KUVIO 28 Salmesta, Virosta löytyneitä hneftaflin pelivälineitä	62
KUVIO 29 Tablut, gwyddbwyll ja hneftafl.....	62
KUVIO 30 Tawlbwrdd, Alea Evangelii, Ard Ri ja Brandubh	63
KUVIO 31 Latrunculi -peli	64
KUVIO 32 Petteia.....	65
KUVIO 33 Seega ja somalialainen seega	67
KUVIO 34 Tammi ja alquerque	69
KUVIO 35 Go peli.....	71
KUVIO 36 Liubopelin lauta	71
KUVIO 37 Konane peli Havaijilta ja Polynesian asuttaminen.....	73
KUVIO 38 Agon.....	75
KUVIO 39 Afrasiabista löytyneitä shakkinappuloita.....	76
KUVIO 40 Shaturanga	77
KUVIO 41 Neljän pelaajan shaturanga eli chaturaji.....	78
KUVIO 42 Bysanttilainen shakki.....	79
KUVIO 43 Kiinalainen shakki, alkuasetelma	80
KUVIO 44 Shogi.....	81
KUVIO 45 Neljä taikaneliötä.....	83
KUVIO 46 Oletettuja shakkinappuloita Kushanista (Josten 2001).....	85
KUVIO 47 Faistoksen kiekko	89
KUVIO 48 Maglianon kiekko.....	91
KUVIO 49 Iranilainen 20-ruutua -peli	93
KUVIO 50 Faistoksen kiekko pelinä sekä mehen -peli	93
KUVIO 51 Fjögratafl.....	94
KUVIO 52 Kolme ystävää ja kolme kuningaskuntaa -peli	97
KUVIO 53 Seitsemän armeijaa peli	98
KUVIO 54 Neljän vuodenajan shakki.....	99
KUVIO 55 Marinellin kolmen pelaajan shakki vuodelta 1722.....	100
KUVIO 56 Neljän pelaajan shakkeja 1700-1800 luvuilta.....	101
KUVIO 57 Gala-peli.....	102
KUVIO 58 G.R. Neumannin 4 pelaajan shakki	103
KUVIO 59 Venäläinen neljän pelaajan linnakeshakki.....	104
KUVIO 60 Kahdeksan ja kuuden pelaajan shakit 1800-luvulta.....	105
KUVIO 61 Wellischin heksagonaalishakki vuodelta 1912.....	105
KUVIO 62 Glinskin heksagonaalishakki (Chess, Ramesh & Anand)	106
KUVIO 63 Hexagonia.....	107
KUVIO 64 96-ruutuisia kolmishakkeja.....	108
KUVIO 65 Waiderin ja Selfin kolmen pelaajan shakit vuosilta 1837 ja 1894	108
KUVIO 66 Ratsun avoin polku 4x4 ja 5x5 laudalla, sekä Eulerin ensimmäinen ratkaisu ratsun polkuun	113
KUVIO 67 KnP ₆ verkko eli ratsun avoin polku 6x6 laudalla	114
KUVIO 68 Ratsun avoin polku kuusikulmioruudutetulla laudalla.....	115
KUVIO 69 Kuninkaan reviiirejä.....	117
KUVIO 70 Kaksi linnaketta	117
KUVIO 71 Kuninkaiden linnoitusten symmetrinen sijainti	118

KUVIO 72 Upseerien sijoittuminen vyöhykkeille shaturangassa	119
KUVIO 73 Kahden askelen vyöhyke neliöshakkilaudalla	120
KUVIO 74 Pisteiden välinen symmetria	121
KUVIO 75 Vyöhykkeet kolmio- ja heksagonaalilaudoilla.....	122
KUVIO 76 Keskuslinnakkeiden symmetria kolmiolaudalla.....	123
KUVIO 77 Kolmishakki, upseerien liikesuunnat.....	124
KUVIO 78 Keskuslinnakkeiden symmetria heksagonaalilaudalla	124
KUVIO 79 Alkuasetelma kolmishakissa	125
KUVIO 80 Heksagonaalilauta, jossa on 46 ruutua.....	126
KUVIO 81 Kolmishakkilauta (87 ruutuinen) ja nappuloiden alkuasetelma.....	127
KUVIO 82 Heksagonaalilaudan numerointijärjestelmä	128
KUVIO 83 Anatoli Karpov purkaa shakin kolmishakissa.....	130
KUVIO 84 Tornin ja Lähetin liikesuunnat	132
KUVIO 85 Kuninkaan ja Ratsun liikesuunnat.....	132
KUVIO 86 Sotilaan liike- ja lyöntisuunnat.....	133
KUVIO 87 Ohesta lyönti	134
KUVIO 88 Linnoittaminen	134
KUVIO 89 Epäsymmetrinen neljän pelaajan shakki (bridgeshakki)	138
KUVIO 90 Alkuasetelma, suunnin ja pelinappulan vyöhykkeet	140
KUVIO 91 Laudattoman shakin Ratsu	141
KUVIO 92 Laudattoman shakin Lähetti.....	141
KUVIO 93 Lähetin rakenne ylhäältä.....	142
KUVIO 94 Upseerien sektorit	143
KUVIO 95 Kolmen pelaajan shakki ja Carl Barks.....	146
KUVIO 96 R_{32} (sininen) ja L_{31} (punainen) 3. puolustusvyöhykkeellä.....	148
KUVIO 97 Hyperupseerien liikeradat kun tasoja on neljä ja kuusi	151
KUVIO 98 Vasemmalla R_{32} 12x12 laudalla, oikealla L_{31} 16x16 laudalla	152
KUVIO 99 Neliöruutuinen 16x16 shakki	152
KUVIO 100 Graafinen esitys upseerien lukumäärän kasvusta	154
KUVIO 101 Pikkushakin alkuasetelma	155
KUVIO 102 Primitiivinen 5x6 shakkipeli, alkuasetelma.....	156
KUVIO 103 Primitiiviset shakkipelit kokoa 3x6, 3x4 ja 3x3, alkuasetelmat.....	157
KUVIO 104 Primitiivinen 2x3 shakkipeli, alkuasetelma ja eräs pelitilanne.....	158
KUVIO 105 Cuboctaedri.....	159
KUVIO 106 Upseerien liikesuunnat 3-ulotteisessa pelissä.....	161
KUVIO 107 Esimerkki kolmiulotteisesta pikkushakista.....	161
KUVIO 108 Upseerien alkuasetelma pienessä 3D shakissa	162
KUVIO 109 Torni kuutiossa ja hyperkuutiossa	163
KUVIO 110 Esimerkki neliulotteisesta pikkushakista	164
KUVIO 111 Upseerien alkuasetelma pienessä 4D shakissa	165
KUVIO 112 Esimerkki L_{1111} :n liikkumisesta	166
KUVIO 113 Laudaton kolmishakki.....	169
KUVIO 114 Kolmioshakki	170
KUVIO 115 Pentagonopeli ja "shakkijalkapallot"	171
KUVIO 116 Goldbergin monitahokas $G(7,0)$	171

KUVIO 117 Shaturangan fil ja firzan	174
KUVIO 118 Kolme tapaa pakata tetraedrejä.....	176
KUVIO 119 Shakkilaudan siirtäminen Pascalin kolmioon.....	180
KUVIO 120 Puolustusvyöhyke 1 Pascalin kolmiossa	181
KUVIO 121 Trinomikaavan kertoimet Pascalin tetraedrissä	184
KUVIO 122 Tason 4 summien muotoutuminen Pascalin tetraedrissä	185
KUVIO 123 Tasojen 1-6 sisäsummien muotoutuminen Pascalin tetraedrissä..	186
KUVIO 124 Neljän pelaajan symmetrisen shakin pelialusta	186
KUVIO 125 Trinomikaavan kertoimet kombinaatioesityksenä.....	188
KUVIO 126 Kvadrinomikaavan kertoimet kombinaatioesityksenä	189
KUVIO 127 Tasot 1 - 4 Pascalin pentachoronissa	191
KUVIO 128 Tasosumman muotoutuminen Pascalin pentachoronin tasolla 5.	191
KUVIO 129 Viiden pelaajaosapuolen sijoittuminen pentachoronin nurkkiin .	192
KUVIO 130 Pascalin aritmeettinen kolmio 1-ulotteisella tasolla	193
KUVIO 131 Kuuden pelaajan symmetrisen malli hexateron alustalla.....	193
KUVIO 132 Pascalin säännön laajennus.....	196
KUVIO 133 Pascalin säännön laajennus trinomissa	197
KUVIO 134 Tornin liikesuunnat 4-ulotteisessa simpleksissä	201
KUVIO 135 Symmetrisen pelialustan evoluutio.....	203
KUVIO 136 Verkko, järjestys $n = 4$, koko $sz = 5$ ja verkon yhteysmatriisi	206
KUVIO 137 Verkon G kaikki nimiöinnit.....	206
KUVIO 138 Viisi muuta verkkoa, joiden järjestys on 4.....	207
KUVIO 139 Suunnattu verkko luupilla ja sitä vastaava yhteysmatriisi.....	207
KUVIO 140 Lukuja 192, 238 ja 511 esittävät suunnatut verkot.....	208
KUVIO 141 Luvun 26 288 162 suunnattu verkko ja vastaava yhteysmatriisi...	208
KUVIO 142 Luku 18 triljoonaa suunnattuna verkkona ja sen yhteysmatriisi..	209
KUVIO 143 Luvut 18 000 000 000 000 000 001 ja 18 000 000 000 000 000 002....	209
KUVIO 144 Luvun 21 122 012 lukuverkon esittäminen käsikoodina.....	210
KUVIO 145 Strategiaverkko primitiiviselle 2x3 shakkipelille	212
KUVIO 146 Esimerkki solmujen koodauksesta	212
KUVIO 147 Primitiivisen 3x3 shakkipelin strategiaverkon alku.....	213
KUVIO 148 Primitiivisen 3x3 shakkipelin strategiaverkon alkurakennetta.....	214
KUVIO 149 Kolmiulotteinen aukko kuutiossa.....	218
KUVIO 150 Pentachoron genuksella $g_2 = 1$	219
KUVIO 151 Kolmiulotteinen pseudoaukko pentachoronissa	220
KUVIO 152 Kaksiulotteinen pseudoaukko kuutiossa.....	221
KUVIO 153 3D-aukon esittäminen pentachoronissa.....	222
KUVIO 154 Aukkoja ulottuvuuksissa 4, 2 ja 3	224
KUVIO 155 4D-aukon rakenne pentachoronissa	225
KUVIO 156 N-pallon vaipan ja tilavuuden kasvu.....	229
KUVIO 157 Fibonaccin sarjan yleistyksiä.	233
KUVIO 158 Aikaansaatuja kehä Pascalin kolmiolla ja pyramidilla.....	237
KUVIO 159 Hallitsevuusluku kuusikulmio- ja kolmiolaudoilla.....	238

TAULUKOT

Taulukko 1 Ensimmäiset 24 suutelulukua (Conway & Sloane 1988)	50
Taulukko 2 Pakkaus- ja leikkausongelmien nimivariaatioita	52
Taulukko 3 Puolustusvyöhykkeet I-VI.....	150
Taulukko 4 Upseerityyppien lukumäärän kasvu 31. tasolle saakka.....	153
Taulukko 5 Hyperkuutiota rajaavien pintojen lukumäärät	175
Taulukko 6 Neljä ensimmäistä trinomia	182
Taulukko 7 Yleistetyn Piin lukuarvon kasvu	228
Taulukko 8 Ensimmäiset 11 "n-Fibonacci" sarjaa.....	235

Tämä värikkäästi kuvitettu kirja esittelee lautapelejä, joita yhdistää toisiinsa niiden mahdollinen yhteys shakin evoluutioon, aina muinaisesta Egyptistä, Kiinasta, Intiasta ja Persiasta, tähän päivään. Kirjassa perehdytään vanhoihin kelttien ja viikinkien lautapeleihin sekä ikivanhaan, havaijilaiseen Konane-peliin. Konane on monimutkaisuudessaan yhtä vaikea tekoälyohjelmoitava kuin vaikkapa go ja shakki. Lisäksi tutustutaan uusiin tulkintoihin arvoituksellisesta antiikin kreetalaisesta Faistoksen kiekosta ja lopuksi selvitetään moniulotteista usean osapuolen strategiapeliä, joka pohjautuu shakin sääntöihin. Viimeinen luku tarjoaa matematiikasta kiinnostuneille innovatiivisia ajatuksia ja eväitä viedä itse luvussa esiteltyjä ideoita eteenpäin. Kirja pohjautuu tekijän väitöskirjaan, joka tänä vuonna ilmestyy myös kansainvälisessä World Scientific –sarjassa. Alkuperäinen väitöskirja julkaistiin englanniksi, mutta kirjoitettiin rinta rinnan samaan aikaan myös suomeksi terminologiaa myöten. Tämä menettely oli samalla kunnianosoitus Jyväskylässä 1800-luvulla vaikuttaneen ”Suomen Ateenan” isälle, Wolmar Schildtille, joka teki suomesta tieteen kielen tuomalla arkikieleemme suuren määrän sanoja, joiden joukossa paljon tuttuja matematiikan termejä, kuten mm. ympyrä, neliö, halkaisija, jakaja, säde ja särmi, sekä myös tiede ja taide.

Kirjan eri historiallisia pelejä käsittelevät alkuluvut ovat helposti myös alakoululaisten omaksuttavissa ja toivottavasti innostavat heitä kokeilemaan niitä. Tiivistetysti kirja on kattava katsaus lautapelien merkityksestä oppimisen, strategian luonnin ja viihtymisen tukena viimeisten viiden vuosituhannen ajalta. Se sisältää myös tekijän itsensä kehittämiä uusia innovatiivisia pelejä ja soveltuu näin kaikille älypeleistä kiinnostuneille

ISBN 978-951-39-7572-2



9 789513 975722 >