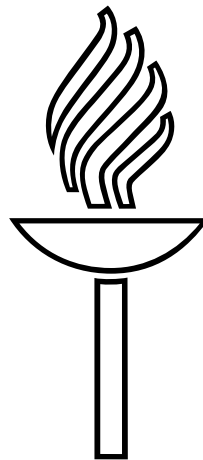


Pro Gradu

**Kvanttikuljetussyhtälöt sähköheikossa
baryogeneesissa**



Matti Herranen

25. elokuuta 2005

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIKAN LAITOS

Alkusanat

Tämä Pro Gradu-työ on tehty Jyväskylän yliopiston fysiikan laitoksella teoreettisen hiukkasfysiikan ja kosmologian tutkimusryhmässä. Työn ohajasi yliassistentti Kimmo Kainulainen ja tarkastivat Kimmo Kainulainen sekä professori Jukka Maalampi.

Haluan erityisesti kiittää Kimmo Kainulaista asiantuntevasta ja innostavasta ohjauksesta kesästä 2003 alkaen. Erityiskiitokset myös Jukka Maalammelle työn tarkastuksesta ja kieliasuun liittyvistä korjauksista. Lisäksi haluan kiittää koko tutkimusryhmää hyvästä työilmapiiristä ja asiantuntevista neuvoista.

Kiitokset myös perheelle ja avopuolisolleni Jennille kannustuksesta ja tuesta sekä hyvistä neuvoista.

Jyväskylässä 24.8.2005

Matti Herranen

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Sähköheikko baryogeneesi	5
2.1	Baryoniluvun rikkoutuminen	5
2.2	Sähköheikko faasitransitio	8
3	CTP-formalismi ja kvanttikuljetusyhtälöt	19
3.1	CTP-formalismi	19
3.2	2PI-efektiivinen aktio ja Schwingerin-Dysonin yhtälöt	29
3.3	Kadanoffin-Baymin kvanttikuljetusyhtälöt	36
4	Klassinen Boltzmannin kuljetusyhtälö skalaaribosoneille	41
4.1	Hitaasti muuttuva ulkoinen kenttä	41
4.2	Heikon kytkennän raja	42
5	Semiklassinen Boltzmannin kuljetusyhtälö fermioneille	49
5.1	Semiklassinen WKB-aproksimaatio	50
5.2	Fermioninen Kadanoffin-Baymin yhtälö ilman vuorovaikutuksia . .	53
6	Yhteenveto	63

1. Johdanto

Meitä ympäröivän maailmankaikkeuden näkyvä aine - planeetat, tähdet ja galaksit - koostuu protoneista, neutroneista ja elektroneista. Sitä kutsutaan *baryoniseksi materiaksi*, koska käytännössä kaikki sen massasta on protoneissa ja neutroneissa, jotka ovat hiukkasfysiikan luokittelussa baryoneita. Yleisesti käytetty baryonisen materian määrää kuvaava kosmologinen parametri on maailmankaikkeuden keskimääräinen baryonien ja fotonien lukumäärätiheyksien suhde. Tällä hetkellä tarkimmat kosmologiset mittaukset antavat (WMAP) [1]

$$\frac{n_B}{n_\gamma} = (6.1_{-0.2}^{+0.3}) \times 10^{-10}. \quad (1.1)$$

Mistä tämä baryoninen materia on maailmankaikkeuteen tullut? Hiukkasfysiikasta tiedetään, että hiukkas-antihiukkaspareja voi materialisoitua säteilystä ja hyvin korkeilla energioilla tätä tapahtuu paljon. Niinpä varhaisessa maailmankaikkeudessa on ollut paljon sekä baryoneita että antibaryoneita, joiden lukumäärää toisiinsa verrattuna kuvataan *baryoniluvulla*

$$B = N_{\text{baryonit}} - N_{\text{antibaryonit}}. \quad (1.2)$$

Baryoniluku kertoo siis ylijäämän, joka jää jäljelle, kun kaikki olemassa olevat baryonit ja antibaryonit annihiloituvat keskenään.

Kaikissa tavanomaisissa hiukkasfysiikan prosesseissa baryoniluku on säilyvä suure. Siten vaikuttaisi siltä, että ainoa mahdollinen selitys havaitulle baryonitiheydelle (1.1) on se, että maailmankaikkeuden alkuhetkellä baryoniluku oli nolosta poikkeava. Tämä epäsymmetrinen alkuehto ei ole kuitenkaan missään mielessä esteettinen tai fysikaalisesti perusteltu. Miksi alussa olisi ollut juuri oikean suuruinen baryoniylijäämä? Kauneushaittaa vakavampiin ongelmiin joudutaan kuitenkin kosmologisen inflaation yhteydessä. Inflaatiolla tarkoitetaan eksponentiaalisen laajenemisen vaihetta varhaisessa maailmankaikkeudessa, jolloin maailmankaikkeuden koko kasvoi vähintään tekijällä 10^{60} . Nykyiset kosmologiset havainnot tukevat inflaatioteoriaa hyvin vahvasti. Se ratkaisee maailmankaikkeuden horisontti- ja laakeusongelmat, ja sen ennustamat rakenteen muodostumisen kannalta välttämättömät tiheysfluktuaatiot ovat sopuinnassa kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn ja suuren mittakaavan galaksijakaumien kanssa. Inflaatiovaiheen aikana kuitenkin kaikki säilyvät (tai melkein säilyvät) suuret pienenevät vähintään tekijällä 10^{60} ja siten alkuehtona asetettu baryoniluku on hävinnyt inflaatiovaiheen aikana olemattomiin.

Miten sitten materia-antimateriaepäsymmetria on voinut syntyä inflaation jälkeen? Yksi mahdollinen selitys voisi olla se, että kokonaisbaryoniluku on edelleen nolla, mutta se on inflaation jälkeen jakautunut siten, että osa maailmankaikkeudesta koostuu materiaa ja osa antimateriaa. Tämä vaihtoehto on kuitenkin pystytty osoittamaan vääräksi. Materia- ja antimateria-alueiden rajapinnalta olisi rekombinaation ajalta tullut voimakas annihilaatiosta johtuva lisä gamma-säteilyn spektriin, joka näkyisi nykyään MeV:n energiaskaalassa. Tämän lisän suuruus olisi kuitenkin ristiriidassa COMPTEL-teleskoopilla tehtyjen gammasäteilyn spektrin mittausten kanssa, ellei materia- ja antimateria-alueiden koko

olisi vähintään luokkaa 3000 Mpc. Koska koko maailmankaikkeuden säde on noin $c/H_0 = 4000$ Mpc, voidaan päätellä, että oleellisesti koko maailmankaikkeus koostuu vain materiasta.

Ainoaksi vaihtoehdoksi jää siten se, että jossain maailmankaikkeuden kehitysvaiheessa inflaation jälkeen on tapahtunut prosessi, jossa materia-antimateria symmetria eli tarkemmin sanottuna baryoniluku on rikkoutunut lopullisesti. Tällaisesta prosessista käytetään nimitystä *baryogeneesi*. Ensimmäisenä baryogeneesin idean toi esille A. Saharov [2]. Hän esitti kolme ehtoa, jotka baryogeneesin on välttämättä toteutettava:

1. Baryoniluvun rikkoutuminen: Ilmeinen ehto, koska lähtötilanne on symmetrinen $B = 0$.
2. CP-rikkoutuminen: Jos CP-pariteetti eli varauskonjugoinnin ja pariteetin tulo ei rikkoudu, niin jokaista reaktiota, joka tuottaa tietyn hiukkasen, vastaa täsmälleen yhtä nopea reaktio, joka tuottaa tämän antihiukkasen. Tällöin kokonaisbaryoniluku ei voi rikkoutua.
3. Epätasapaino: CPT-teoreeman perusteella hiukkasten ja antihiukkasten massat ovat samansuuruiset. Tämän vuoksi termodynaamisessa tasapainossa hiukkasten ja antihiukkasten tiheydet ovat aina yhtä suuret, jolloin kokonaisbaryoniluvun rikkoutuminen on mahdotonta. Matemaattisesti muotoiltuna: Koska baryoniluku B on pariton CPT-muunnoksessa, sen terminen keskiarvo $\langle B \rangle$ häviää termodynaamisessa tasapainossa.

Saharovin ehdot toteuttavia malleja baryogeneesille on olemassa useita. Tunnetuimmat niistä ovat GUT-baryogeneesi, sähköheikko baryogeneesi, leptogeneesi ja Affleck-Dine-baryogeneesi. Näistä ensimmäinen eli GUT (Grand Unified Theory) baryogeneesi perustuu raskaiden GUT-skaalan $M_{\text{GUT}} \approx 10^{16}$ GeV mittabosonien hajoamiseen ja poistumiseen termisestä tasapainosta. Tässä prosessissa kaikki kolme Saharovin ehtoa ovat voimassa ja kosmologisia havaintoja vastaavan baryoniepäsymmetrian luominen on mahdollista. GUT-baryogeneesiä ei kuitenkaan enää pidetä kovin hyvänä mallina, sillä se aiheuttaa selkeitä ongelmia inflaation kanssa. Se nimittäin vaatisi, että inflaation jälkeinen “uudelleenlämmitys” nostaisi maailmankaikkeuden lämpötilan GUT-skaalaan. Mutta uudelleenlämmitys lämpötilaan, joka on paljon yli 10^9 GeV, aiheuttaisi vakavia kosmologisia ongelmia [4].

Kolme jälkimmäistä mallia, eli sähköheikko baryogeneesi, leptogeneesi ja Affleck-Dine-baryogeneesin useimmat variantit perustuvat sähköheikkoon baryoniluvun rikkoutumiseen. Tämä on standardimallissa esiintyvä anomalia, joka mahdollistaa korkeissa energioissa baryoniluvun rikkoutumisen. Mallit kuitenkin eroavat toisistaan siinä, miten ja missä olosuhteissa Saharovin 2. ja 3. ehto tulevat toteutetuiksi. Tässä tutkielmassa tarkastellaan nimenomaan sähköheikkoa baryogeneesiä, jossa Saharovin 2. ja 3. ehto toteutuvat varhaisen maailmankaikkeuden sähköheikossa faasitransitiossa. Sähköheikko faasitransitio on lämpötilassa ~ 100 GeV tapahtuva prosessi, jossa Higgsin skalaarikentän perustilan mittasymmetria rikkoutuu spontaanisti ja samalla heikon vuorovaikutuksen mittabosonit W^\pm ja Z^0 ja kaikki fermoinit saavat massansa. Kaikki baryogeneesi-mallit vaativat toimiakseen hiukkasfysiikan standardimallin laajennuksia, joista luonnollisin on

supersymmetria. Myöskin sähköheikko baryogeneesi, joka on periaatteessa mahdollinen jo standardimallin puitteissa, ei nykyisten parametrien valossa pysty tuottamaan läheskään vaadittavaa baryoniepäsymmetriaa pelkästään standardimallin avulla.

Tämän tutkielman päätarkoitus on tutkia teoreettisesti Kadanoffin-Baymin kvanttikuljetusyhtälöiden avulla fermionien dynamiikkaa sähköheikossa baryogeenisissä. Ilman fermionien välisiä vuorovaikutuksia Kadanoffin-Baymin yhtälöt redusoituvat 8:n kytketyn osittaisdifferentiaaliyhtälön ryhmäksi 4:lle reaaliselle funktiolle. Semiklassisella rajalla nämä yhtälöt jakautuvat rajoiteyhtälöiksi ja kineettisiksi-yhtälöiksi siten, että rajoiteyhtälöistä saadaan algebrallisia rajoitteita kineettisten yhtälöiden ratkaisuille. Nämä rajoitteet sitovat ratkaisufunktioita tietyille faasiavaruuden pinnoille ja määräävät fermionien ja antifermionien dispersiorelaatiot. Edelleen kineettisistä yhtälöistä saadaan johdettua yksihiukkastiheydelle semiklassinen Boltzmannin yhtälö, jossa ryhmänopeus ja voimatermi sisältävät kertaluvun \hbar kvanttikorjauksia, jotka ovat CP -rikkovia. Tätä kautta voidaan ymmärtää, kuinka sähköheikon faasitransition rajapinnassa hiukkaset ja antihiukkaset ajautuvat erilleen ja mahdollistavat baryogeenin.

Tutkielman luvussa 2 tarkastellaan sähköheikkoa baryogeeniä yleisellä tasolla tavoitteena ymmärtää, miten baryoniluvun rikkoutuminen on standardimallissa mahdollista ja miten tämä erityisesti sähköheikon faasitransition yhteydessä voi johtaa pysyvän baryoniepäsymmetrian muodostumiseen. Luvussa 3 tarkastellaan kvanttikenttäteorian CTP -formalismia (Closed Time Path), joka soveltuu erityisen hyvin epätasapaino-prosessien tutkimiseen. Tämän formalismin ja yleistetyn 2PI-efektiivisen aktion (2-Particle Irreducible) avulla johdetaan fundamentaalit Schwingerin-Dysonin yhtälöt systeemin täydellisen 2-pistefunktion dynamiikalle. Edelleen näitä muokkaamalla ja siirtymällä osittain impulssiavaruuteen saadaan Kadanoffin-Baymin kvanttikuljetusyhtälöt.

Edelleen luvussa 4 tarkastellaan Kadanoffin-Baymin yhtälöitä skalaaribosoneille klassisella rajalla. Tällöin havaitaan, kuinka tietyin lisäoletuksin Kadanoffin-Baymin yhtälöistä redusoituu klassinen Boltzmannin yksihiukkastiheyden kuljetusyhtälö. Lopulta luvussa 5 tarkastellaan fermionien dynamiikkaa sähköheikossa baryogeenisissä semiklassisella rajalla WKB-approksimaation ja Kadanoffin-Baymin yhtälöiden avulla ja luvussa 6 esitetään kokoava yhteenveto tutkielmasta.

2. Sähköheikko baryogeneesi

2.1 Baryoniluvun rikkoutuminen

Baryoni- ja leptoniluvut säilyvät hiukkasfysiikan standardimallissa klassisella tasolla. Kvanttitasolla baryoni- ja leptonilukujen rikkoutuminen on kuitenkin mahdollista. Tämän havaitsi ensimmäisenä 't Hooft [3]. Ilmiö perustuu baryoni- ja leptonilukuvirtojen anomalioihin. Ei-perturbatiivisella tarkastelulla havaitaan, että baryoni- ja leptonilukuvirrat j_B^μ ja j_L^μ eivät ole eksaktisti säilyviä, vaan

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = n_f \left(\frac{g^2}{32\pi^2} \tilde{W}_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{g'^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right), \quad (2.1)$$

missä n_f on fermioniperheiden lukumäärä, $W_{\mu\nu}$ ja $F_{\mu\nu}$ ovat SU(2)- ja U(1)-symmetrioihin liittyvät kenttätensorit

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (2.2)$$

ja

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{a,\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_{\rho\sigma}^a \\ \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ovat näiden duaalit. Yhtälön (2.1) perusteella baryoni- ja leptonilukujen erotus $B - L$ säilyy, sen sijaan summa $B + L$ rikkoutuu. Yhtälön (2.1) oikea puoli on itsessään kokonaisdivergenssi, eli voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^a \tilde{W}^{a,\mu\nu} &= \partial_\mu K^\mu, \\ F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \partial_\mu k^\mu, \end{aligned} \quad (2.4)$$

missä

$$\begin{aligned} K^\mu &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(W_{\nu\rho}^a A_\sigma^a - \frac{1}{3} g\epsilon_{abc} A_\nu^a A_\rho^b A_\sigma^c \right) \\ k^\mu &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} B_\sigma \end{aligned} \quad (2.5)$$

ovat SU(2)- ja U(1)-symmetrioiden ns. Chern-Simons-virrat. Näiden avulla yhtälö (2.1) saadaan muotoon

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = \partial_\mu \left(\frac{g^2}{32\pi^2} K^\mu - \frac{g'^2}{32\pi^2} k^\mu \right). \quad (2.6)$$

Häiriöteoriassa Chern-Simons-virrat K^μ ja k^μ menevät nopeasti nolnaan etäisyyden kasvaessa (tyypillisesti kuin $1/r^6$), joten niiden integraalit yli avarusajan ovat nolli. Näin ollen häiriöteoriassa baryoni- ja leptoniluvut säilyvät.

Standardimallin ei-abelisessa SU(2)-osassa on kuitenkin ei-perturbatiivisia kenttäkonfiguraatioita, jotka kontribuoivat yhtälön (2.1) oikeaan puoleen.

Näitä kenttäkonfiguraatioita kutsutaan instantoneiksi, ja ne vastaavat siirtymäkonfiguraatioita, joiden kautta mittakentät siirtyvät perustilasta eli vakuumin-konfiguraatiosta toiseen. Perustila tarkoittaa energian minimoivaa tilaa, ja luonnollisesti triviaali perustila on se, jossa mittakentän vektoripotentiali häviää, eli $\vec{A} = 0$. Mutta yhtä lailla matalimman energian tilan antaa kenttäkonfiguraatio, jossa \vec{A} on puhdas mitta

$$\vec{A} = \frac{1}{i} g^{-1} \vec{\nabla} g, \quad (2.7)$$

missä g on mittamuunnosmatriisi. Standardimallin abelisessa U(1)-hypervaraus osassa mitan kiinnitys eliminoi kaikki muut perustila-ratkaisut paitsi triviaalin ratkaisun $\vec{B} = 0$. Sen sijaan ei-abelisessa SU(2)-osassa on olemassa diskreetti joukko mittamuunnoksia, jotka eivät lähesty yksikkömuunnosta, kun $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Nämä muunnokset ovat muotoa

$$g_n(\vec{x}) = e^{inf(\vec{x})\hat{x}\cdot\tau/2}, \quad (2.8)$$

missä n on diskreetti indeksi ja $f(\vec{x}) \rightarrow 2\pi$ kun $\vec{x} \rightarrow \infty$ ja $f(\vec{x}) \rightarrow 0$ kun $\vec{x} \rightarrow 0$. Näitä mittamuunnoksia vastaavat kenttäkonfiguraatiot (2.7) ovat aidosti eri tiloja kuin triviaaliratkaisu $\vec{A} = 0$ ja muodostavat näin degeneroituneen diskreetin mittakenttien perustilojen joukon.

SU(2)-symmetrian Chern-Simons-virran 0-komponentin K^0 avaruusintegraalia kutsutaan *Chern-Simons-luvuksi*

$$N_{CS} = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^3x K^0. \quad (2.9)$$

Yhtälön (2.6) perusteella pätee

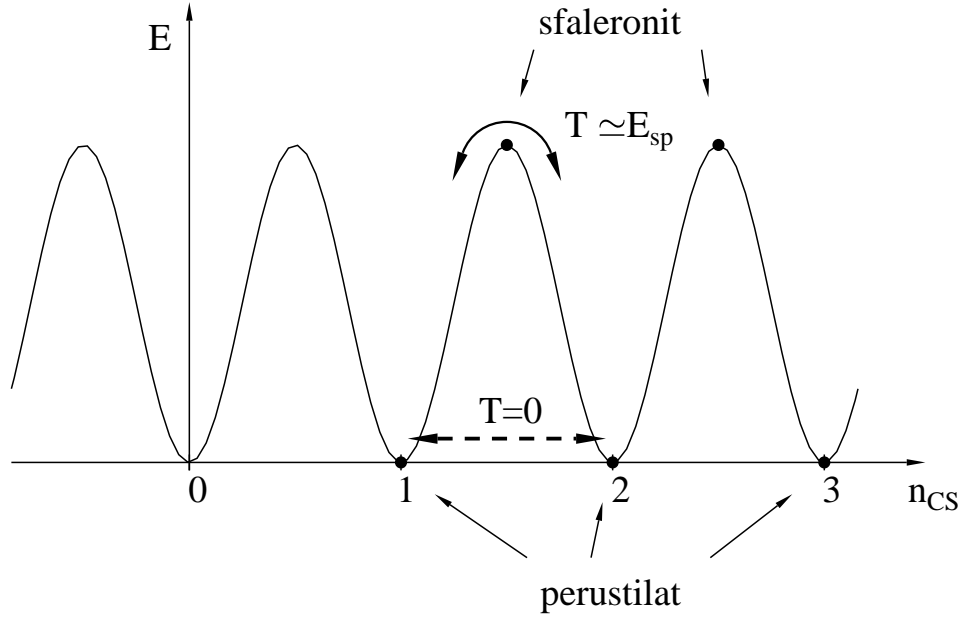
$$\Delta B = \Delta L = n_f \Delta N_{CS}, \quad (2.10)$$

eli Chern-Simons-luvun muuttuessa yhdellä sekä baryoni- että leptoniluvut muuttuvat fermioniperheiden lukumäärän $n_f = 3$ verran. Perustilakonfiguraatioiden (2.7) (2.8) tapauksessa

$$\begin{aligned} N_{CS} &= \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^3x K^0 = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^3x \epsilon_{ijk} \text{Tr} (g_n^{-1} \partial_i g_n g_n^{-1} \partial_j g_n g_n^{-1} \partial_k g_n) \\ &= n, \end{aligned} \quad (2.11)$$

eli perustiloja luotteloiva diskreetti indeksi on juuri Chern-Simons-luku. Tämä merkitsee sitä, että kun kenttäkonfiguraatio siirtyy tällaisesta perustilasta toiseen, Chern-Simons-luku ja sitä kautta myös baryoni- ja leptoniluvut muuttuvat. Tilanteen hahmottamista helpottaa kuva, jossa mittakenttiin liittyvä efektiivinen potentiaali on piirretty Chern-Simons-luvun funktiona (kuva 2.1). Potentiaalminimit vastaavat epätriviaaleja perustilakonfiguraatioita. Chern-Simons-luvun muuttamiseksi kenttäkonfiguraation täytyy siis siirtyä minimistä toiseen. Nolla-lämpötilassa tämä onnistuu vain tunnelloitumalla. Tunnelloitumisnopeudelle tilavuusyksikössä voidaan laskea arvio [5]

$$\Gamma < e^{-16\pi^2/g^2} \sim e^{-170}, \quad (2.12)$$



Kuva 2.1: $SU(2)$ -mittakenttien vakuuirakenne. Degeneroitunutta perustilojen joukkoa voidaan kuvata Chern-Simons-luvulla n_{CS} . Nolla-lämpötilassa siirtyminen perustilasta toiseen tunneloitumalla on äärimmäisen hidasta. Korkeassa lämpötilassa siirtyminen on mahdollista termisellä virityksellä sfaleronikonfiguraation kautta.

mikä on äärimmäisen pieni luku. Tällä vauhdilla yhden ainoan baryonin syntymisen koko maailmankaikkeuden historian aikana on epätodennäköistä. Nolla-lämpötilassa ilmiötä ei siis käytännössä esiinny ja tämän vuoksi mm. protoni on stabiili hiukkanen.

Korkeassa lämpötilassa siirtyminen perustilakonfiguraatiosta toiseen voi kuitenkin tapahtua myös termisen virityksen kautta. Jos termisen virityksen energia on potentiaalivallin huipun tasolla (kuva 2.1), voi siirtyminen perustilakonfiguraatiosta toiseen tapahtua ilman tunneloitumista. Potentiaalın maksimikohtia vastaavia kenttäkonfiguraatioita kutsutaan sfaleroneiksi [6]. Terminen siirtymisnopeus tilavuusyksikössä sfaleroni-konfiguraation kautta perustilasta toiseen on [7]

$$\Gamma_{sp} \propto T^4 e^{-E_{sp}(T)/T}, \quad (2.13)$$

missä E_{sp} on sfaleroni-konfiguraation energia, jolle pätee

$$\frac{E_{sp}}{T} \simeq 40 \frac{\phi}{T}, \quad (2.14)$$

missä ϕ on Higgsin skalaarikentän vakuuodotusarvo. Sfaleroni-virityksnopeutta koskeva yhtälö (2.13) pätee kuitenkin vain silloin, kun spontaani symmetriarikko on tapahtunut ja mittabosonit ovat massallisia. Sen sijaan tilanteessa, jossa spontaania symmetriarikkoa ei ole tapahtunut ja mittabosonit ovat massattomia,

sfaleroni-viritysnopeudelle saadaan hilalaskusta [15]

$$\Gamma_{sp} \simeq (20 - 25)\alpha_W^5 T^4, \quad (2.15)$$

missä α_W on heikon vuorovaikutuksen hienorakennevakio. Molemmassa tapauksissa tarpeeksi suurissa lämpötiloissa baryoneja syntyy ja häviää huomattavalla nopeudella eikä Saharovin 1. ehdon toteutumisessa ole mitään ongelmaa.

2.2 Sähköheikko faasitransitio

Hiukkasfysiikan standardimallissa sähkömagneettiset ja heikot vuorovaikutukset selitetään Glashow-Weinberg-Salamin sähköheikolla yhtenäisteorialla [8] [9] [10]. Teorian oleellinen rakenneosa on spontaani symmetriarikko, millä tarkoitetaan sitä, että Higgsin skalaarikentän perustilan mittasymmetria on spontaanisti rikkoutunut. Spontaanin symmetriarikon vaikutuksesta heikon vuorovaikutuksen välittäjäbosonit W^\pm ja Z^0 sekä kaikki fermionit saavat massan. Spontaanin symmetriarikon voi helposti ymmärtää tarkastelemalla Higgsin skalaarikenttään liittyvää potentiaalia

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\phi|^4. \quad (2.16)$$

Potentiaalilla on minimi kohdassa $|\phi| = v_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$, joka vastaa kentän perustilaa eli vakuumiodotusarvoa. Potentiaalminimi on kuitenkin degeneroitunut riippuen vain kompleksisen $SU(2)$ -Higgsin kentän itseisarvosta. Tietyn minimin eli perustilan valinta tästä degeneroituneesta joukosta rikkoo $SU(2) \times U(1)$ -mittasymmetrian. Itse asiassa se rikkoo neljästä riippumattomasta symmetriageneraattorista kolme ja näin ollen Higgsin mekanismin vaikutuksesta kolme mittabosonia (W^\pm ja Z^0) saa massan ja yksi mittabosoni (fotoni) säilyy massattomana.

Massallisten mittabosonien massat riippuvat vain heikosta kytkinvakiosta g , Higgsin kentän vakuumiodotusarvosta v_0 ja Weinbergin kulmasta θ_W

$$m_W = \frac{gv_0}{2} \quad \text{ja} \quad m_Z = \frac{gv_0}{2 \cos \theta_W}. \quad (2.17)$$

Kokeelliset arvot mittabosonien massoille ovat $m_W \approx 80.43$ GeV ja $m_Z \approx 91.19$ GeV [11]. Vakuumiodotusarvo v_0 voidaan laskea mitattujen massojen ja sähkömagneettisen hienorakennevakion $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ perusteella käyttämällä yhtälöitä (2.17) ja relaatiota

$$g = \frac{e}{\sin \theta_W}, \quad (2.18)$$

missä e on sähkömagneettinen kytkinvakio. Tulokseksi saadaan

$$v_0 = \frac{2 m_W}{e m_Z} \sqrt{m_Z^2 - m_W^2} \approx 250 \text{ GeV}. \quad (2.19)$$

Fermionit saavat massansa Yukawa-kytkentöjen vaikutuksesta

$$m_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_f v_0, \quad (2.20)$$

missä λ_f on fermionin f ja Higgsin kentän välisen Yukawa-kytkennän kytkinvakio. Higgsin skalaarikentän kvantti eli Higgsin hiukkanen puolestaan saa massan

$$m_h = \sqrt{2\lambda}v_0. \quad (2.21)$$

Higgsin hiukkasen massaa ei ole vielä pystytty kokeellisesti määrittämään, mutta massalle pätee alaraja $m_h > 114.4$ GeV [11].

Standardimallin Lagrangen tiheydessä esiintyvä Higgsin kentän ”klassinen” potentiaali (2.16) vastaa vakuuniam nolla-lämpötilassa. Suurilla etäisyyksillä Higgsin kentän vaikutusta kuvaa paremmin efektiivinen potentiaali, johon on huomioitu kaikkien kenttien välisten vuorovaikutusten aiheuttamat korjaukset. Nolla-lämpötilassa nämä kvanttikorjaukset eivät tuo Higgsin potentiaalin oleellista muutosta; lähinnä ne renormalisoivat teorian parametrien arvoja. Sen sijaan äärellisessä lämpötilassa Higgsin kentän efektiivinen potentiaali saa lämpötilakorjauksia, jotka vaikuttavat potentiaalin luonteeseen ratkaisevalla tavalla. Äärellisessä lämpötilassa efektiivinen potentiaali voidaan parametrisoida seuraavasti [4]

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) = D(T^2 - T_0^2)\phi^2 - ET\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \dots \quad (2.22)$$

missä parametrien T_0 , D ja E arvot riippuvat mallista ja sen parametreista. Minimallisessa standardimallissa (MSM), jolla tarkoitetaan hiukkasfysiikan standardimallia ilman laajennuksia, parametrit määräytyvät pääasiassa mittabosonien ja t-kvarkin massoista sekä Higgsin hiukkasen massasta (muiden baryonien ja kaikkien leptoneiden massat ovat pieniä näihin verrattuna, ja niiden vaikutuksen voi jättää huomiotta)

$$T_0^2 = \frac{1}{4D} \left[m_h^2 - \frac{3}{8\pi^2 v_0^2} (2m_W^2 + m_Z^2 - 4m_t^2) \right], \quad (2.23)$$

$$D = \frac{1}{8v_0^2} (2m_W^2 + m_Z^2 2m_t^2), \quad E = \frac{1}{4\pi v_0^3} (2m_W^3 + m_Z^3).$$

Efektiivinen potentiaali (2.22) eroaa klassisesta potentiaalista (2.16) lämpötilariippuvuutensa vuoksi selvästi. Siinä on negatiivinen kolmannen asteen termi ja lisäksi toisen asteen termin merkki riippuu oleellisesti lämpötilasta. Kolmannen asteen termin kerroin E on minimallisessa standardimallissa numeroarvoltaan pieni, luokkaa 10^{-2} . Standardimallin supersymmetrisissä laajennuksissa, kuten MSSM (Minimal Supersymmetric Standard Model), E :n numeroarvo voi olla kuitenkin selvästi suurempi. Tämä on hyvin oleellinen asia, sillä jos parametri E on todella pieni, joudutaan baryogeneesin kannalta suuriin ongelmiin, kuten myöhemmin havaitaan.

Lämpötiloissa $T \leq T_0$ sekä toisen että kolmannen asteen termit ovat negatiivisia ja efektiivinen potentiaali on klassisen potentiaalin (2.16) kaltainen, ja mittasymmetrian rikkova minimi on kohdassa

$$\phi_{\text{min}} = \frac{3ET + \sqrt{9E^2T^2 - 8\lambda D(T^2 - T_0^2)}}{2\lambda}. \quad (2.24)$$

Kytkinvakio λ on tyypillisesti pieni, joten $\phi_{\text{min}} \sim E$, eli erityisesti, jos E on pieni, myös symmetrian rikkova kentän odotusarvo ϕ_{min} on pieni. Tämä on

baryogeneesiin kannalta ongelma minimaalisessa standardimallissa, koska sfaleroniviritysnopeus rikkoutuneessa faasissa riippuu E_{sp} :n kautta lineaarisesti kentän arvosta ϕ (2.13) (2.14). Tämä tarkoittaa sitä, että pienen E -tekijän tapauksessa on vaara, että syntynyt baryoniluku huuhtoutuu pois rikkoutuneessa faasissa.

Lämpötiloissa $T > T_0$ toisen asteen termi on positiivinen ja dominoi pienillä kentän ϕ arvoilla aiheuttaen symmetrian rikkovan minimin (2.24) lisäksi symmetrian säilyttävän minimin kohtaan $\phi = 0$ ja näiden minimien välille maksimin (kuva 2.2). Kriittisessä lämpötilassa

$$T_C = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{\lambda D}}} T_0 \quad (2.25)$$

molemmat minimi ovat samalla korkeudella. Tätä vastaava rikkoutuneen minimin arvo (2.24) on

$$\phi_C = \frac{2E}{\lambda} T_C. \quad (2.26)$$

Lopulta, kun

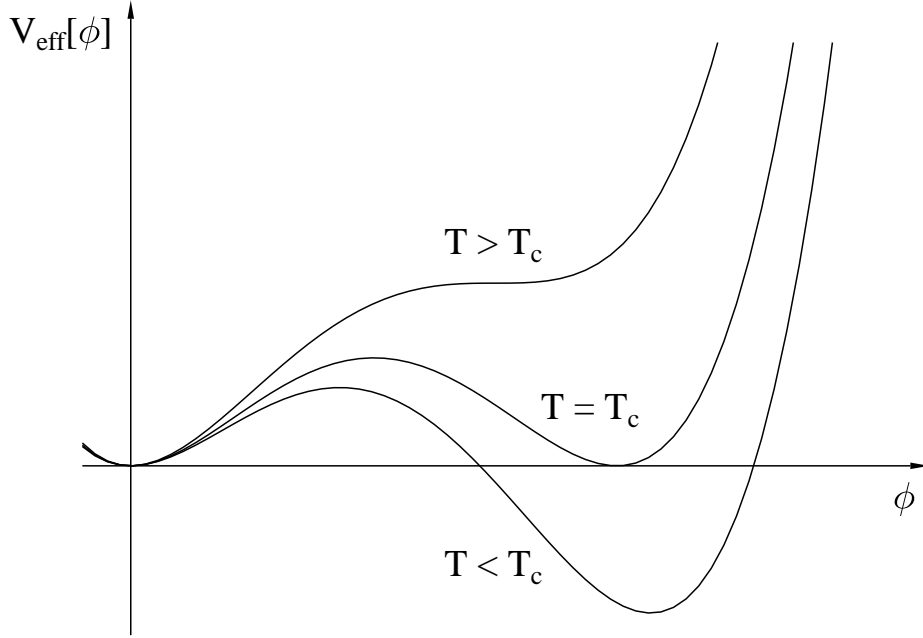
$$T > T_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9E^2}{8\lambda D}}} T_0, \quad (2.27)$$

rikkoutunut minimi $\phi = \phi_{\min}$ häviää kokonaan.

Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että Higgsin kentän perustila eli vakuu-
miodotusarvo on lämpötiloissa $T > T_1$ symmetrian säilyttävä $\phi = 0$ ja vastaavasti lämpötiloissa $T \leq T_0$ symmetrian rikkova $\phi = \phi_{\min}$. Näiden lämpötilojen välisellä alueella $T_1 > T > T_0$ tapahtuu faasitransitio, jossa Higgsin kenttä siirtyy lämpötilan laskiessa symmetrisestä faasista rikkoutuneeseen. Tässä sähköheikossa faasitransitiossa Higgsin kenttään kytkeytyvät heikon vuorovaikutuksen mittabosonit ja fermionit saavat massan, sillä yhtälöiden (2.17) ja (2.20) perusteella niiden massat riippuvat Higgsin kentän vakuu-
miodotusarvosta, joka vastaa juuri efektiivisen potentiaalin minimiä.

Sähköheikko faasitransitio ei kuitenkaan tapahdu kriittisessä lämpötilassa $T = T_C$, koska lämpötila-alueella $T_1 > T > T_0$ symmetristä ja rikkoutunutta minimiä erottaa potentiaalivalli, ja näin ollen faasitransitio ainoastaan maksaisi energiaa syntyvän faasirajapinnan muodossa. Sen sijaan tätä matalammassa lämpötiloissa $T < T_C$, joissa rikkoutunut minimi on aidosti matalaenergisempi kuin symmetrinen minimi, energiaa vievän faasirajapinnan syntyminen voi kompensoitua matalamman energian tilaan siirtymisestä vapautuvalla energialla. Tällöin rikkoutuneen faasin alueiden syntyminen tulee periaatteessa mahdolliseksi. Käytännössä faasitransitio kuitenkin keskittyy hyvin tarkasti tiettyyn lämpötilaan $T_C > T_{\text{nukl}} > T_0$, jolloin todennäköisyys rikkoutuneen faasin alkeisaluiden syntymiseen kasvaa nopeasti merkittäväksi.

Koska tarkasteltavassa mallissa rikkoutunut minimi on matalaenergisempi kuin symmetrinen minimi, faasitransitiossa vapautuu energiaa eli latenttia lämpöä. Tällöin kyseessä 1. kertaluvun faasitransitio ja se tapahtuu kuplien nukleoitumisena. Lämpötilassa $T \simeq T_{\text{nukl}}$ symmetriseen faasiin alkaa muodostua rikkoutuneen faasin kuplia, jotka laajenevat ja lopulta täyttävät koko avaruuden. Tarkastellaan seuraavaksi yhden kuplan muodostumista kvalitatiivisesti. Oletetaan, että muodostuvan kuplan reuna on ohut, eli $\ell_W \ll r$, missä ℓ_W on kuplan reunanleveys ja r



Kuva 2.2: Higgsin skalaarikentän efektiivinen potentiaali kolmessa eri lämpötilassa. Koska lämpötiloissa $T_1 > T > T_0$ symmetristä ja rikkoutunutta minimiä erottaa valli, sähköheikko faasitransitio ei tapahdu kriittisessä lämpötilassa $T = T_C$, jossa minimi ovat samalla korkeudella, vaan tietyssä lämpötilassa $T_C > T > T_0$, jossa rikkoutunut minimi on aidosti matalaenergisempi kuin symmetrinen minimi. Tämän vuoksi faasitransitiossa vapautuu latenttia lämpöä eli transiatio on 1. kertalukua.

on kuplan säde. Tällöin kuplan reunaan sitoutunutta energiaa voidaan järkevästi mallintaa pintajännityksellä ja kuplan muodostumisessa tarvittavalle energialle saadaan

$$\begin{aligned}
 E_{\text{kupla}} &= E_{\text{pinta}} + \Delta E_{\text{tilavuus}} \\
 &= 4\pi\sigma r^2 - \frac{4\pi}{3} \left[L \left(1 - \frac{T}{T_C} \right) \right] r^3,
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

missä σ on kuplan reunan pintajännitys ja L on vapautuva latentti lämpö. Pintajännitys seuraa siitä, että Higgsin kentän gradienttiin sisältyy energiaa, ja latentti lämpö puolestaan vastaa Higgsin kentän odotusarvon muuttumisen aiheuttamaa energian muutosta efektiivisen potentiaalin mukaisesti. Yhtälön (2.28) perusteella faasitransitio ei tapahdu kriittisessä lämpötilassa T_C , jossa symmetrisen ja rikkoutuneen minimin energiat ovat yhtäsuuret, sillä tällöin kuplien muodostuminen vie energiaa ja muodostuneet kuplat hajoavat välittömästi. Kuitenkin T_C :tä pienemmissä lämpötiloissa pysyvän kuplan muodostuminen on energeettis-

esti mahdollista. Yhtälöstä $E_{\text{kupla}}(r_{\text{opt}}, T) = 0$ saadaan optimaalinen säde

$$r_{\text{opt}} = \frac{3\sigma}{L \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)}, \quad (2.29)$$

jota suurempien kuplien muodostuminen on energeettisesti edullista. Tämän suurusten kuplien muodostuminen vaatii kuitenkin kuplan energiavallin ylitystä (kuva 2.3). Periaatteessa vallin voisi läpäistä kvanttimekaanisella tunneloitumisella, mutta todennäköisyys tähän on häviävän pieni. Siten ainoa realistinen vaihtoehto energeettisesti edullisen kuplan muodostumiselle on energiavallin ylitys termisellä virittymisellä. Tämä vaatii välitulana r_{cr} -säteisen kuplan muodostumista, joka sitten kasvaa r_{opt} -säteiseksi ja edelleen suuremmaksi. Kriittinen säde r_{cr} saadaan yhtälöstä $\left. \frac{\partial E_{\text{kupla}}(r, T)}{\partial r} \right|_{r=r_{\text{cr}}} = 0$

$$r_{\text{cr}} = \frac{2\sigma}{L \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)} = \frac{2}{3} r_{\text{opt}}. \quad (2.30)$$

Edelleen energiavallin korkeudelle saadaan

$$E_{\text{cr}} = E_{\text{kupla}}(r_{\text{cr}}, T) = \frac{16\pi}{3} \frac{\sigma^3}{L^2 \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)^2}. \quad (2.31)$$

Näin ollen kuplan muodostumistodennäköisyydelle termisellä aktivaatiolla saadaan

$$P \sim e^{-E_{\text{cr}}/T} = \exp \left[-\frac{16\pi}{3} \frac{\sigma^3}{TL^2 \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)^2} \right]. \quad (2.32)$$

Tämä kvalitatiivisesti johdettu tulos on luotettava rajalla, jolla kuplan reuna on hyvin ohut. Kyseinen lasku voidaan tehdä tarkemmin käyttäen Langerin satulapistemenetelmää [12].

Edelleen voidaan osoittaa, että ohuen kuplan reunan rajalla kriittisessä lämpötilassa T_C kuplan reunalla on muoto

$$\phi = \frac{1}{2} \phi_C \left[1 - \tanh \left(\frac{x}{2\ell_W} \right) \right], \quad (2.33)$$

missä reunan leveys

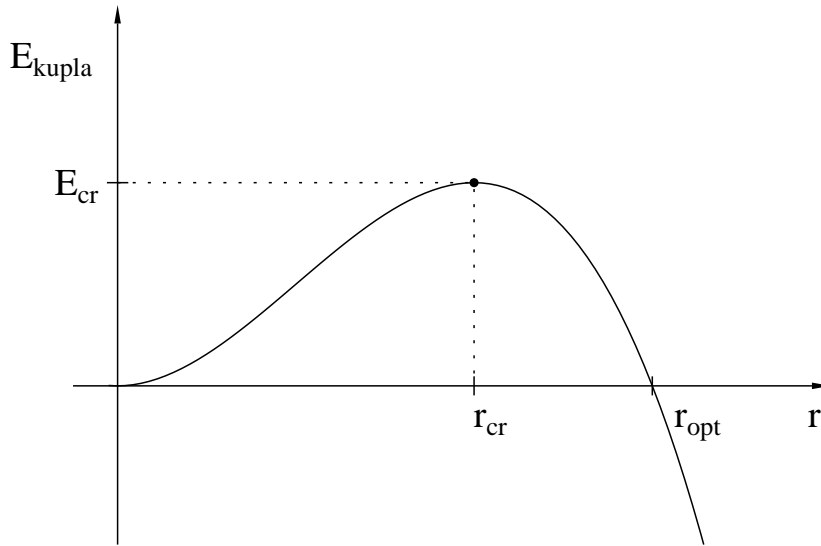
$$\ell_W \simeq \frac{10}{\phi_C} \simeq \frac{15}{T_C}. \quad (2.34)$$

Tässä esiintyvät numeroarvot kuplan reunan leveydelle ja reunan etenemisnopeudelle riippuvat fysikaalisesta mallista. Esimerkiksi MSSM:ssä on laskettu, että [13]

$$v_W = (0.02 - 0.1) c \quad (2.35)$$

riippuen parametrien arvoista. Reunan etenemiseen liittyy siten aikaskaala

$$t_W = \frac{\ell_W}{v_W} \sim 10^2 \frac{1}{T}. \quad (2.36)$$



Kuva 2.3: Yhden kuplan nukleoitumiseen tarvittava energia E kuplan säteen r funktiona. Kun termisellä virittymisellä nukleoituvan kuplan säde ylittää kriittisen säteen r_{cr} , kupla voi kasvaa rajatta.

Toisaalta plasman hiukkasten välisiin vuorovaikutuksiin liittyvä aikaskaala on dimensioanalyysin perusteella

$$t_{\text{sironta}} \sim (\alpha_W^2 T)^{-1} \sim 10^3 \frac{1}{T}, \quad (2.37)$$

missä käytettiin tulosta $\alpha_W \approx 1/30$ heikon vuorovaikutuksen hienorakennevakiolle. Siten $t_W \lesssim t_{\text{sironta}}$ eli kuplan reunan eteneminen on prosessi, jonka aikana plasma ei ole termodynaamisessa tasapainossa. Saharovin kolmas ehto eli epätasapaino toteutuu siten kuplan reuna-alueella. Osoittautuu, että myös toinen ehto eli CP -rikkoutuminen toteutuu kuplan reunalla. Tämän ilmiön tarkasteluun kvanttikuljetusyhtälöiden avulla palataan luvussa 5.

Kaikki kolme Saharovin ehtoa siis toteutuvat kuplan reuna-alueella ja baryogeneesi on periaatteessa mahdollinen. Ongelmaksi kuitenkin jää baryoniluvun huuhtoutuminen sfaleronien vaikutuksesta. Tämä aiheutuu siitä, että muodostuva hiukkas- antihiukkasepäsymmetria kasvattaa systeemin vapaata energiaa

$$F \propto \mu n_B, \quad (2.38)$$

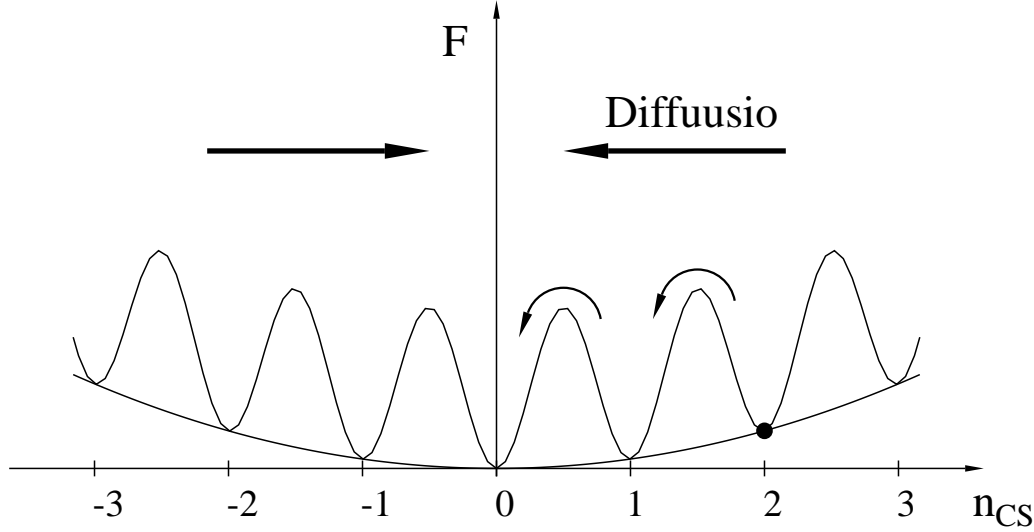
missä μ on sfaleronien kanssa vuorovaikuttaviin hiukkasiin liittyvä kemiallinen potentiaali. Termodynaamisessa tasapainossa kemiallinen potentiaali on muotoa

$$\mu = \frac{A}{T^2} n_B, \quad (2.39)$$

missä kombinatorinen tekijä A riippuu sfaleronien kanssa vuorovaikuttavien hiukkasten lukumäärästä ja siten fysikaalisesta mallista. Minimaalisessa standardimallissa $A = 13/2$. Kemiallisen potentiaalin (2.39) perusteella vapaalle energialle saadaan

$$F \propto \mu n_B \propto n_B^2 \propto n_{CS}^2. \quad (2.40)$$

Näin ollen, koska vapaa energia pyrkii minimoitumaan, sfaleron-siirtymät tapahtuvat enimmäkseen alaspäin tässä paraabeli-potentiaalissa eli kohti symmetristä tilaa $n_{CS} = n_B = 0$ (kuva 2.4). Siten olemassa oleva baryonitiheys huuhtoutuu pois termalisoitumisen vaikutuksesta.



Kuva 2.4: Systemin vapaa energia F Chern-Simons-luvun n_{CS} funktiona termodynaamisessa tasapainossa. Vapaa energia pyrkii minimoitumaan ja näin ollen sfaleroni-siirtymiä tapahtuu enemmän kohti symmetristä tilaa $n_{CS} = 0$ kuin vastakkaisiin suuntiin. Tämän diffuusioprosessin vaikutuksesta Chern-Simons-luku ja sitä kautta baryoniluku huuhtoutuvat pois.

Matemaattisesti muotoiltuna baryonitiheyden evoluutiolle saadaan Master-yhtälö [14]

$$\frac{\partial n_B}{\partial t} = -\frac{n_f \Gamma_{sp}}{2T} \Delta F = -\frac{n_f \Gamma_{sp}}{2T} \mu. \quad (2.41)$$

Sijoittamalla tähän kemiallinen potentiaali (2.39) saadaan

$$\frac{\partial n_B}{\partial t} = -\frac{n_f A \Gamma_{sp}}{2T^3} n_B. \quad (2.42)$$

Baryonitiheys siis relaksoituu eksponentiaalisesti.

Miten sitten pysyvä baryoniluvun syntyminen on mahdollista? Ratkaisu ongelmaan on se, että sfaleroni-siirtymänopeuden täytyy olla hyvin pieni kuplien sisällä. Matemaattisesti muotoiltuna sfaleroni-siirtymänopeuden täytyy olla kuplan sisällä pienempi kuin maailmankaikkeuden laajenemisnopeus, $\Gamma_{sp} < H$, jotta baryonitiheyden pieneneminen olisi vähäistä Hubblen laajenemisen aiheuttamaan tiheyden pienenemiseen verrattuna. Hubblen vakiolle pätee varhaisessa maailmankaikkeudessa säteilydominanssin aikana ($T > 1$ eV)

$$H \simeq \sqrt{\frac{4\pi^3}{45} g_* \frac{T^4}{m_{pl}^2}}, \quad (2.43)$$

missä g_* on energiatiheyteen vaikuttavien vapausasteiden lukumäärä ja $m_{pl} \approx 1.22 \times 10^{19}$ GeV on Planckin massa. Sähköheikon faasitransition aikana $T_C \approx 100$ GeV ja $g_* = 106.75$, jolloin ehto $\Gamma_{sp} < H$ saadaan yhtälöitä (2.43), (2.13) ja (2.14) ja tarkkaa sfaleroni-viritysnopeuden numeerista tulosta [15] käyttäen muotoon

$$\frac{\phi_C}{T_C} \gtrsim 1. \quad (2.44)$$

Mutta kun tiedetään, että minimaalisessa standardimallissa parametrit $E \simeq 0.007$ ja $\lambda \simeq 0.02 + 0.0022 \left(\frac{m_h}{100 \text{ GeV}}\right)$, saadaan yhtälön (2.26) perusteella

$$\frac{\phi_C}{T_C} \sim 0.7 \frac{1}{1 + 0.11 \left(\frac{m_h}{100 \text{ GeV}}\right)}. \quad (2.45)$$

Tämä on pienempi kuin 1 kaikilla Higgsin massan m_h arvoilla. Erityisesti nykyisellä Higgsin massan rajoituksella $m_h > 114.4$ GeV saadaan $\frac{\phi_C}{T_C} < 0.63$. Tämä on selvästi ristiriidassa ehdon (2.44) kanssa. Itse asiassa tilanne on tätäkin vakavampi minimaalisen standardimallin osalta. Kyseinen häiriöteoreettinen tarkastelu on todellisuudessa mahdollinen vain, kun $\phi/T \gtrsim 1$, eikä siten soveltu minimaalisen standardimallin tapaukseen. Numeerisin laskuin [16] on kyetty osoittamaan, että standardimallissa faasitransitio on “cross over”-tyyppinen, eli systeemin partitiofunktio on kaikkialla analyttinen eikä transitiossa vapaudu latenttia lämpöä. Tällöin efektiivisessä potentiaalissa ei ole kahta erillistä miniimiä, vaan minimi siirtyy jatkuvalla siirtymällä nolasta epäsymmetriseen arvoon. “Cross over”-transitio ei tapahdu kuplien nukleoitumisena, ja näin ollen baryogeneesi transition yhteydessä on mahdotonta.

Sähköheikko baryogeneesi ei siis onnistu minimaalisessa standardimallissa, vaan siihen vaaditaan standardimallin laajennuksia, kuten MSSM. Sopivilla laajennuksilla vaatimus (2.44) pystytään toteuttamaan ja näin ollen baryoniluku ei huuhtoudu pois kuplan sisällä. Vastaavasti kuplan ulkopuolella rikkoutuneessa faasissa sfaleroni-viritysnopeudelle saadaan yhtälön (2.15) perusteella

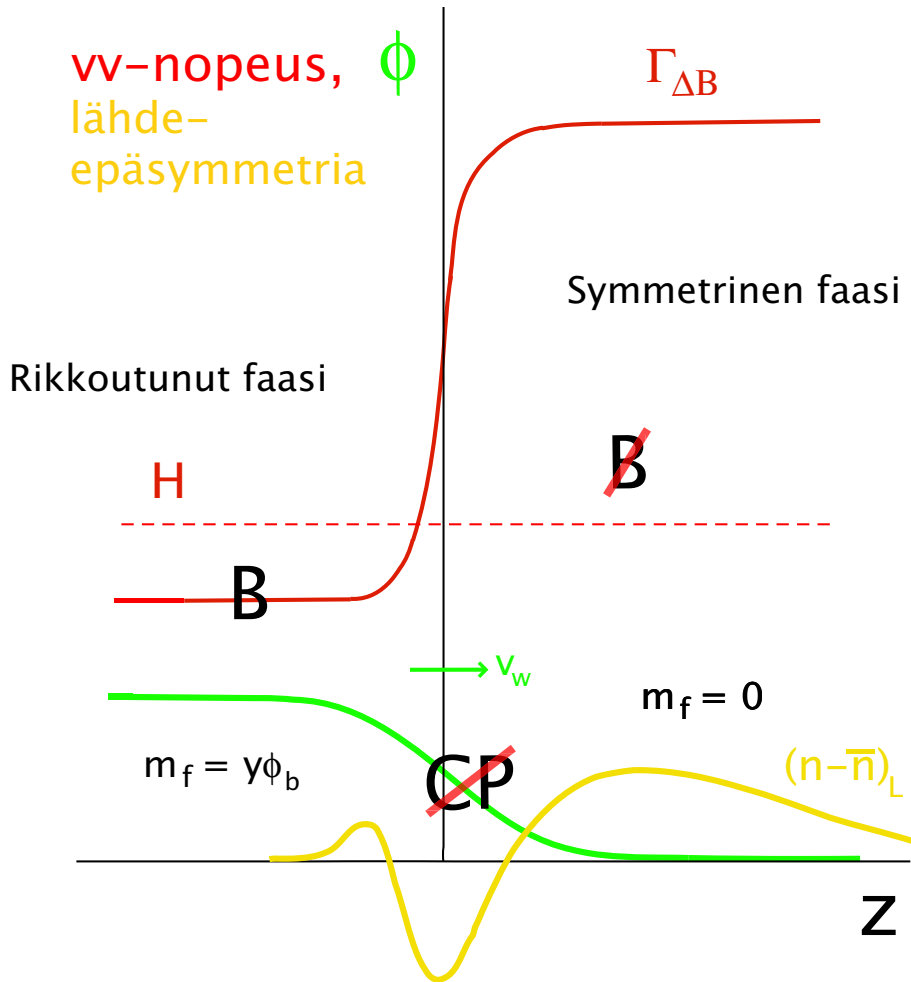
$$\Gamma_{sp} \sim 10^{-6} T. \quad (2.46)$$

Toisaalta maailmankaikkeuden laajenemisnopeus sähköheikon faasitransition aikaan on yhtälön (2.43) perusteella

$$H \sim 10^{-16} \left(\frac{T}{100 \text{ GeV}}\right) T. \quad (2.47)$$

Koska sähköheikon faasitransition kriittinen lämpötila $T_C \approx 100$ GeV, sfaleroniviritysnopeus kuplan ulkopinnalla on näin ollen noin 10 kertalukua Hubblen laajenemisnopeutta suurempi ja baryoneita syntyy ja häviää siten huomattavalla nopeudella.

Kaikki ainekset baryogeneesi-prosessin ymmärtämiseen ovat nyt koossa. Prosessin kulku käy hyvin ilmi kuvasta 2.5. Kuvaan on piirretty kolme eri käyrää, jotka riippuvat kuplan reunan alueella paikka-muuttujasta z . Yhtälön (2.33) mukainen vihreä käyrä kuvaa Higgsin kentän vakuumiodotusarvon muutosta siirryttäessä kuplan sisäpuolelta (rikkoutunut faasi) ulkopuolelle (symmetrinen faasi). Keltainen käyrä kuvaa CP -rikkovien efektien aiheuttamaa vasen-kiraalista fermioni-antifermioniepäsymmetriaa, joka on nolasta poikkeava kuplan reunan



Kuva 2.5: Sfaleroni-viritysnopeus, Higgsin kentän odotusarvo ϕ ja muodostunut vasen-kiraalisten fermionien lähde-epäsymmetria kuplan reuna-alueella.

lähiympäristössä. Myös vastaava oikea-kiraalinen käyrä on epäsymmetrinen, mutta vasen- ja oikea-kiraalisten käyrien summan paikkaintegraali on nolla, eli CP -rikkovat efektit eivät itsessään aiheuta fermioni-antifermioniepäsymmetriaa. Kuitenkin ainoastaan vasen-kiraalinen epäsymmetria on baryogeneesin kannalta oleellista, sillä sfaleronit $SU(2)$ -mittakenttien konfiguraatioina vuorovaikuttavat vain vasen-kiraalisten fermionien kanssa. Punainen käyrä puolestaan kertoo sfaleroni-viritysnopeuden suuruuden reunan alueella verrattuna Hubblen laajenemisnopeuteen H (punainen katkoviiva). Kuvaajan pysty akseli ei ole yhteinen eri käyriille, vaan käyrät mittaavat eri suureita.

Mitä siis tapahtuu, kun kuplan reuna ohittaa tietyn kohdan maailmankaikkeuden kattavassa hiukkasplasmassa? Ensiksikin CP -rikkovat efektit aiheuttavat plasman fermioneille keltaisen käyrän mukaisen vasen-kiraalisen fermioni-antifermioniepäsymmetrian. Tämä vasen-kiraalinen epäsymmetria puolestaan toimii lähteenä sfaleronien baryonituotolle. Sfaleronien paraabeli-potentiaali (kuva 2.4) kallistuu CP -rikkovien diffuusioefektien vaikutuksesta. Matemaattisesti muotoiltuna kemiallinen potentiaali saa vasen-kiraalisten fermionien diffuusiosta

johtuvan lisätermin μ_{diff} ,

$$\mu = \frac{A}{T^2} n_B - \mu_{\text{diff}}, \quad (2.48)$$

jolloin Master-yhtälö (2.41) saadaan muotoon

$$\frac{\partial n_B}{\partial t} = \frac{n_f \Gamma_{sp}}{2T} \left(\mu_{\text{diff}} - \frac{A}{T^2} n_B \right). \quad (2.49)$$

Tämän diffuusiotermin vaikutuksesta baryoniluku kasvaa kuplan ulkoreunan kulkiessa tarkasteltavan plasman paikan ohi. Vastaavasti kuplan sisäreunalla sfaleroni-siirtymänopeus muuttuu hyvin pieneksi, joten ulkoreunalla tapahtuva baryoni-antibaryoniepäsymmetrian muodostuminen ei kompensoidu. Näin ollen, kuplan reuna-alueen kuljettua tarkasteltavan plasman paikan ohi ja systeemin jälleen palattua termodynaamiseen tasapainoon on paikkaan jäänyt baryoniylimäärä.

Kun sähköheikko faasitransitio on lopulta tapahtunut avaruuden joka paikassa, eli kuplat ovat laajentuneet ja yhtyneet koko avaruuden kattaviksi ja maailmankaikkeus on jälleen palannut termodynaamiseen tasapainoon, on maailmankaikkeuteen syntynyt tietty baryoni-antibaryoniepäsymmetria, joka ei enää missään myöhemmässä maailmankaikkeuden kehitysvaiheessa häviä pois. Baryonitiheys toki pienenee Hubblen laajenemisen myötä niin kuin kaikki muutkin tiheydet, mutta mitään uutta fysikaalista prosessia, joka muuttaisi baryonilukua, ei enää maailmankaikkeuden kehityksen myöhemmässä vaiheessa esiinny.

Baryogeneesilaskuissa täytyy siis määrittää luotettavasti CP -rikkovien diffuusiotehtien aiheuttama kemiallinen potentiaali μ_{diff} , jonka jälkeen syntyvä baryonitiheys voidaan laskea integraalina yhtälöstä (2.49). Kemiallisen potentiaalın μ_{diff} määrittäminen on kuitenkin hankalaa, ja se vaatii kvanttikuljetusyhtälöiden teoriaa, jota tarkastellaan seuraavassa luvussa.

3. CTP-formalism ja kvanttikuljetusyhtälöt

3.1 CTP-formalism

Tavallisessa kvanttikenttäteoriassa kiinnostavia suureita ovat tyypillisesti erilaiset siirtymätodennäköisyydet ja vaikutusalat. Näiden laskemiseen liittyvät vapaat asymptoottiset kvanttitilat nk. “In”- ja “Out”-tilat, jotka kuvaavat systeemin tilaa paljon ennen ja paljon jälkeen varsinaisen vuorovaikutuksen. Tässä formalismissa systeemin siirtymäamplitudin tietystä In-tilasta tiettyyn Out-tilaan antaa sirontamatriisi

$$S_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha; IN | \beta; OUT \rangle \equiv \langle \alpha | S | \beta \rangle, \quad (3.1)$$

missä tilat $\langle \alpha; IN |$ ja $\langle \beta; OUT |$ ovat vuorovaikuttavan teorian In- ja Out-tiloja ja tilat $\langle \alpha |$ ja $\langle \beta |$ vastaavia vapaan teorian kvanttitiloja. Tämä tarkoittaa sitä, että rajalla $t \rightarrow +/ - \infty$ kyseisillä tiloilla on sama hiukkassisältö samoilla 1-hiukkaskvanttitiloilla kuin vastaavilla Out / In -tiloilla. Yhtälössä (3.1) tulee samalla määritellyksi unitaarinen sirontaoperaattori S , joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$S \equiv T \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} V_I(t) dt \right), \quad (3.2)$$

missä V_I on systeemin vuorovaikutuksen Hamiltonin operaattori vuorovaikutuskuvassa ja aikajärjestetty eksponentti tarkoittaa, että vastaavan sarjakehitelmän jokainen termi on aikajärjestetty. S -operaattori siis operoi vapaan teorian tiloihin ja muuttaa niitä toisiksi vuorovaikutuksen mukaisesti. Kvanttikenttäteorian laskuissa näille S -operaattorin matriisielementeille tehdään yleensä häiriökehite, joka lasketaan haluttuun kertalukuun kytkinvakiassa (tai vaihtoehtoisesti \hbar :ssa eli silmukoiden lukumäärässä) käyttäen hyväksi Feynmanin diagrammitekniikkaa. Tässä tulee avuksi Wickin teoreema [17], jonka mukaisesti monimutkaisetkin häiriökehite-termit palautuvat teorian 2-piste Greenin funktioiden eli propagaattoreiden yhdistelemiseen ja integroimiseen.

Tavanomainen kvanttikenttäteoria soveltuu erinomaisesti suuren ilmiöjoukon tarkasteluun. Tähän kuuluvat kaikki ilmiöt, joissa tarkasteltavien hiukkasten energiat ovat paljon suurempia kuin taustan lämpötila ja hiukkastiheys on pieni. Tällöin termisillä virityksillä ei ole systeemin dynamiikan kannalta merkitystä ja ne voidaan jättää huomiotta. Lisäksi pienen tiheyden vaikutuksesta hiukkasten välisiä reaktioita tapahtuu suhteellisen harvoin ja asymptoottisesti vapaat In- ja Out-tilat ovat mielekkäitä. Esimerkiksi hiukkaskiihdyttimissä ja tavallisissa hiukkaskaasuissa olosuhteet ovat tyypillisesti tällaiset.

Hyvin suuressa lämpötilassa ja tiheydessä, kuten varhaisen maailmankaikkeuden hiukkasplasmassa, tavanomaisen kvanttikenttäteorian soveltaminen ei kuitenkaan enää onnistu. Taustan lämpötilan ollessa samaa suuruusluokkaa tarkasteltavien hiukkasten energioiden kanssa täytyy termisten viritysten vaikutukset huomioida systeemin dynamiikassa. Edelleen, hiukkastiheyden ollessa suuri tapahtuu hiukkasten välisiä reaktioita niin usein, että asymptoottisesti vapaita In- ja Out-tiloja ei ole olemassa, jolloin tavanomaisten siirtymäamplitudien

määrittely ei ole edes mielekäästä. Tällöin kiinnostavia suureita ovat statistiset ja termodynaamiset suureet, jotka kuvaavat koko hiukkasjoukon kollektiivisia ominaisuuksia tai yhden hiukkasen keskimääräisiä ominaisuuksia muiden hiukkasten muodostamassa hiukkastaustassa. Jos kyseessä oleva systeemi on termodynaamisessa tasapainossa, voidaan kiinnostavat suureet, kuten systeemin paine, energiaspektri, jne. laskea samalla tavalla häiriöteoriaa ja Feynmanin diagrammeja käyttäen kuin tavanomaisessa kvanttikenttäteoriassakin termisen kenttäteorian imaginaari- ja reaaliaikaformalismeilla [18] [19]. Jos systeemi ei kuitenkaan ole termodynaamisessa tasapainossa, ei näiden formalismien käyttäminen onnistu. Tällöin on otettava käyttöön CTP-formalismi (Closed Time Path), jota kehittivät aikoinaan mm. J. S. Schwinger [20] ja L. V. Keldysh [21].

3.1.1 Suljettu aikapolku

CTP-formalismin idea ja nimityksen alkuperä on yksinkertainen. Formalismissa lasketaan siirtymäamplitudien (3.1) sijaan odotusarvoja, joissa alku- ja lopputilat ovat samoja. Lausuttaessa odotusarvo kvanttimekaanisena polkuintegraalina täytyy polun alku- ja lopputilojen olla samat eli kyseessä on suljettu polku. CTP-formalismista käytetäänkin myös kuvaavaa nimitystä In-In-formalismi.

Matemaattisesti suljetun aikapolun merkitys ilmenee seuraavassa tarkastelussa [21]. Mielivaltaisen systeemin Hamiltonin funktio voidaan aina jakaa vuorovaikutamattoman teorian Hamiltonin funktioon H_0 ja vuorovaikutusosaan V ,

$$H = H_0 + V \quad (3.3)$$

Systeemin statistista tilajakaumaa kuvataan tiheysoperaattorilla ρ . Mielivaltaisen tilan $|\psi\rangle$ statistisen ensemble-painotekijän (-todennäköisyyden) antaa odotusarvo

$$p(\psi) = \langle \psi | \rho | \psi \rangle. \quad (3.4)$$

Koska tämä odotusarvo vastaa todennäköisyyttä, täytyy sen olla aina reaallinen, joten ρ on hermiittinen operaattori. Hermiittinen operaattori voidaan aina ilmaista diagonaalisen ominaistilojensa määräämässä kannassa, eli ρ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\rho = \sum_i \rho_i |\rho_i\rangle \langle \rho_i|, \quad (3.5)$$

missä siis $|\rho_i\rangle$:t ovat ρ :n ominaistiloja ja ρ_i :t vastaavia ominaisarvoja. Ominaisarvot ovat samalla odotusarvoja $\rho_i = \langle \rho_i | \rho | \rho_i \rangle = p(\rho_i)$ eli ne antavat ominaistilojen $|\rho_i\rangle$ statistiset painotekijät. Painotekijöiden summa on luonnollisesti 1 eli tiheysoperaattorin jäljelle saadaan

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i \langle \rho_i | \rho | \rho_i \rangle = \sum_i p(\rho_i) = 1. \quad (3.6)$$

Edelleen mielivaltaisen operaattorin O statistiselle ensemble-odotusarvolle saadaan

$$\langle O \rangle = \sum_i p(\rho_i) \langle \rho_i | O | \rho_i \rangle = \text{Tr}(\rho O), \quad (3.7)$$

eli ensemble-odotusarvo saadaan jälkeenä yli tiheysoperaattorin. Näiden jälki-
muotoisten lausekkeiden (3.6) ja (3.7) merkitys on siinä, että ne ovat

kanta-invariantteja, sillä jälki on sama kaikissa kannoissa. Tämä on tietysti välttämätöntä suureiden järkevyyden kannalta, sillä fysikaalisten suureiden arvot eivät voi riippua käytetystä Hilbertin avaruuden kannasta.

Miten sitten tiheysoperaattori (3.74) kehittyy ajan suhteen? Ajatellaan suurta kokoelmaa eli ensembleä kvanttimekaanisia systeemeitä. Alkutilassa systeemit ovat jakautuneet tiheysoperaattorin ominaistiloihin $|\rho_i\rangle$ painotekijöiden mukaisissa lukumääräsuhteissa, eli jokainen ensiblen systeemi on jossakin ominaistilassa $|\rho_i\rangle$ ja kehittyy siten ajan suhteen kyseisen ominaistilan mukaisesti. Tämän perusteella koko ensiblen ja siten tiheysoperaattorin aikakehitys saadaan kehittämällä ρ :n ominaistiloja ajan suhteen. Tilojen suhteelliset painot ρ_i eivät kuitenkaan muutu ajan suhteen, sillä mitään "hyppyjä" ensiblen eri systeemien välillä ei tapahdu, vaan systeemit ovat täysin itsenäisiä, eli sen jälkeen kun ensiblen systeemit on alussa "jaettu" kvanttutiloihin $|\rho_i\rangle$, ne myös käyttäytyvät kuten kyseiset kvanttutilat eli kehittyvät ajan suhteen niiden mukaisesti.

Tiheysoperaattorin ρ aikakehityksen määrää siis puhtaasti oministilojen $|\rho_i\rangle$ aikakehitys. Schrödingerin kuvassa tilojen aikakehitys on Schrödingerin yhtälön mukaista

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_S = \frac{1}{i\hbar} H |\psi\rangle_S, \quad (3.8)$$

joten tiheysoperaattorille saadaan aikaderivoinnilla

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \sum_i \rho_i |\rho_i(t)\rangle_S \langle \rho_i(t)|_S \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho_S(t) &= \frac{1}{i\hbar} [H, \rho_S(t)] \quad (\text{Schrödingerin kuva}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vuorovaikutuskuvassa tilojen aikakehityksen määrää Hamiltonin operaattorin vuorovaikutusosa V_I :

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I = \frac{1}{i\hbar} V_I(t) |\psi\rangle_I. \quad (3.10)$$

Tällöin tiheysoperaattorille saadaan

$$\begin{aligned} \rho_I(t) &= \sum_i \rho_i |\rho_i(t)\rangle_I \langle \rho_i(t)|_I \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho_I(t) &= \frac{1}{i\hbar} [V_I(t), \rho_I(t)] \quad (\text{Vuorovaikutuskuva}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Heisenbergin kuvassa tilat eivät riipu ajasta, ja siten myös tiheysoperaattori on ajasta riippumaton:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i \rho_i |\rho_i\rangle \langle \rho_i| \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho &= 0 \quad (\text{Heisenbergin kuva}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Oletetaan nyt, että vuorovaikutuskuvan tiheysoperaattorille pätee reunaehto

$$\rho(t = -\infty) \equiv \rho_0 = e^{\beta(F_0 - H_0)}, \quad (3.13)$$

missä $\beta = 1/k_B T$ ja F_0 ovat vuorovaikuttamattoman systeemin vapaa energia, joka kommutoi H_0 :n kanssa. Tämä reunaehto vastaa sitä, että vuorovaikutukset

kytketään päälle adiabattisesti kaukana $t = -\infty$:ssä, jolloin systeemi on vielä termodynaamisessa tasapainossa. Tiheysoperaattorin yhtälö vuorovaikutuskuvas-
sa (3.11) voidaan ratkaista S -operaattorilla

$$S(t, -\infty) = T \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_I(t') dt' \right), \quad (3.14)$$

jolle pätee yhtälö

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, -\infty) = \frac{1}{i\hbar} V_I(t) S(t, -\infty) \quad (3.15)$$

Tällöin tiheysoperaattorille saadaan

$$\begin{aligned} \rho_I(t) &= S(t, -\infty) \rho_0 S^\dagger(t, -\infty) \\ &= S(t, -\infty) \rho_0 S(-\infty, t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Valitaan nyt ajanhetki $t = 0$ siten, että tällöin vuorovaikutuskuvan operaattorit ja tilat yhtyvät Heisenbergin kuvan vastaaviin, eli $O_I(t = 0) = O(t = 0)$ ja $|\psi(t = 0)\rangle_I = |\psi\rangle$. Tällöin erityisesti tiheysoperaattoreille pätee $\rho = \rho_I(0)$ ja edelleen tavallisille operaattoreille O saadaan vuorovaikutuskuvan ja Heisenbergin kuvan välinen yhteys

$$O(t) = S(0, t) O_I(t) S(t, 0), \quad (3.17)$$

missä $S(t, t')$ on additiivinen aikakehitysoperaattori

$$S(t, t') = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0 t'}, \quad (3.18)$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} S(t, t') &= T \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V_I(t'') dt'' \right) \\ &= S(t, -\infty) S^\dagger(t', -\infty). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aikakehitysoperaattorille $S(t, t')$ pätee:

$$\begin{aligned} S(t_1, t_2) S(t_2, t_3) &= S(t_1, t_3) \\ S^\dagger(t, t') &= S(t', t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Kvanttikenttäteorian laskuissa kiinnostavia suureita ovat usein operaattoreiden aikajärjestetyn tulon odotusarvot. Statistisen ensemblen tapauksessa odotusarvot ovat muotoa (3.7), joten n :n mielivaltaisen Heisenbergin kuvan operaattorin $O_1(t_1), \dots, O_n(t_n)$ aikajärjestetyn tulon ensemble-odotusarvolle saadaan

$$\langle T O_1(t_1) O_2(t_2) \cdots O_n(t_n) \rangle \equiv \text{Tr} \{ \rho T [O_1(t_1) O_2(t_2) \cdots O_n(t_n)] \}. \quad (3.21)$$

Kirjoittamalla Heisenbergin kuvan operaattorit $O_i(t)$ ja ρ vastaavien vuorovaikutuskuvan operaattoreiden $O_i^I(t)$ ja $\rho_I(t)$ avulla yhtälöiden (3.16), (3.17) ja tiedon

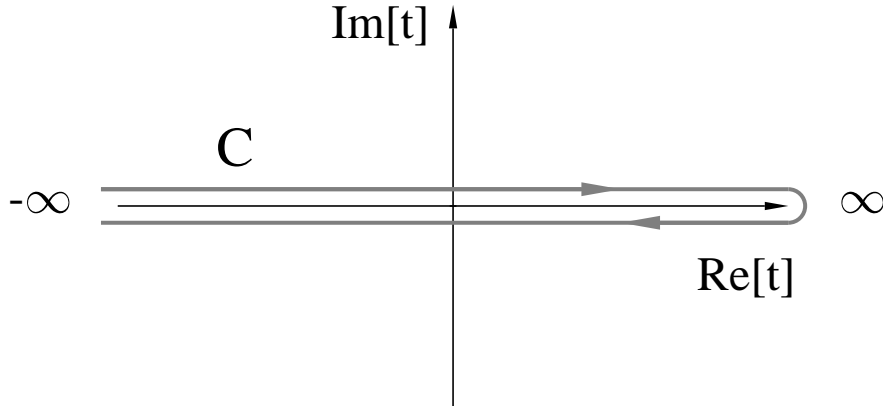
$\rho = \rho_I(0)$ mukaisesti odotusarvolle (3.21) saadaan

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}\{\rho T [O_1(t_1)O_2(t_2)\cdots O_n(t_n)]\} \\
&= \text{Tr}\left\{S(0, -\infty)\rho_0 S(-\infty, 0)T[S(0, t_1)O_1^I(t_1)S(t_1, 0)S(0, t_2)O_2^I(t_2)S(t_2, 0)\cdots\right. \\
&\quad \left.\times S(0, t_n)O_n^I(t_n)S(t_n, 0)]\right\} \\
&= \text{Tr}\left\{\rho_0 S(-\infty, 0)T[S(0, t_1)O_1^I(t_1)S(t_1, t_2)O_2^I(t_2)S(t_2, t_3)\cdots\right. \\
&\quad \left.\times S(t_{n-1}, t_n)O_n^I(t_n)S(t_n, 0)]S(0, -\infty)\right\},
\end{aligned} \tag{3.22}$$

missä on käyetty jäljen syklisyyttä $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)$ ja tuloksia (3.20). Kirjoittamalla tekijän $S(t_n, 0)$ jälkeen identiteetti $1 = S(0, \infty)S(\infty, 0)$ saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
& \langle TO_1(t_1)O_2(t_2)\cdots O_n(t_n) \rangle \\
&= \text{Tr}\left\{\rho_0 S(-\infty, 0)T[S(0, t_1)O_1^I(t_1)S(t_1, t_2)O_2^I(t_2)S(t_2, t_3)\cdots\right. \\
&\quad \left.\times S(t_{n-1}, t_n)O_n^I(t_n)S(t_n, \infty)S(\infty, 0)]S(0, -\infty)\right\} \\
&= \text{Tr}\{\rho_0 T_C [S_C O_1^I(t_1)O_2^I(t_2)\cdots O_n^I(t_n)]\},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

missä T_C tarkoittaa aikajärjestystä kuvan 3.1 mukaisella *suljetulla aikapolulla* C , joka kulkee $-\infty$:stä pisteiden t_1, t_2, \dots, t_n kautta $+\infty$:ään ja palaa sitten takaisin $-\infty$:ään.



Kuva 3.1: *CTP-formalism*in suljettu aikapolku $C = \{t : -\infty \rightarrow +\infty \rightarrow -\infty\}$.

Kaikki palaavalla “negatiivisella” aikahaaralla olevat pisteet käsitetään myöhemmiksi kuin alkuperäisen “positiivisen” aikahaaran pisteet ja lisäksi kahden palaavalla aikahaaralla olevan pisteen aikajärjestys on päinvastainen alkuperäiseen aikahaaraan nähden. Tämä voi kuulostaa monimutkaiselta, mutta ei itse asiassa ole sitä. Tavanomainen aikajärjestys on vain yleistetty polkujärjestykseksi T_C kuvan

3.1 mukaisella polulla. Kaikki fysikaaliset ajanhetket, jotka esiintyvät operaattoreiden O_i^I argumentteina sijaitsevat positiivisella aikahaaralla $-\infty \rightarrow +\infty$. Sirontaoperaattori S_C käy kuitenkin läpi kaikki ajanhetket molemmilla aikahaaroilla

$$S_C \equiv T_C \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_C V_I(t) dt \right), \quad (3.24)$$

eli integraali suoritetaan koko suljetun aikapolun C yli. Diagrammitekniikan kannalta tämä tarkoittaa sitä, että diagrammeissa kaikki ulkoiset jalat ovat positiivisella aikahaaralla, mutta sisäiset vuorovaikukset voivat sijaita kummalla tahansa haaralla.

3.1.2 Skalaaribosonien propagaattorit

CTP-formalismissa pätee yleistetty Wickin teoreema [22] [23], jonka mukaan n -piste Greenin funktiot voidaan häiriöteorian mielivaltaisessa kertaluvussa lausua vapaan teorian propagaattoreiden tulojen summina, eli summina diagrammeista, joiden viivat ovat vapaan teorian propagaattoreita. Koska näiden vapaiden propagaattoreiden päätepisteet voivat olla joko ulkoisia jalkoja tai sisäisiä verteksejä, tarkoittaa tämä sitä, että teorian vapaiden propagaattorien määritelmässä aikaavaruuden pisteiden aikakoordinaatti voi olla kummalla tahansa aikahaaralla. Teorian vapaiksi propagaattoreiksi saadaankin yleistetyn Wickin teoreeman pohjalta neljä eri propagaattoria riippuen siitä, kummalla aikahaaralla pisteiden aikakoordinaatit ovat. Kompleksisen skalaarikentän $\phi(x)$ tapauksessa saadaan siten

$$\begin{aligned} \Delta_0^{++}(x, y) &\equiv \Delta_0^F(x, y) \equiv -i \text{Tr} \{ \rho_0 T [\phi_I(x) \phi_I^\dagger(y)] \}, \\ \Delta_0^{+-}(x, y) &\equiv \Delta_0^<(x, y) \equiv -i \text{Tr} \{ \rho_0 \phi_I^\dagger(y) \phi_I(x) \}, \\ \Delta_0^{-+}(x, y) &\equiv \Delta_0^>(x, y) \equiv -i \text{Tr} \{ \rho_0 \phi_I(x) \phi_I^\dagger(y) \}, \\ \Delta_0^{--}(x, y) &\equiv \Delta_0^{\bar{F}}(x, y) \equiv -i \text{Tr} \{ \rho_0 \bar{T} [\phi_I(x) \phi_I^\dagger(y)] \}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

missä yläindeksit $+/-$ viittaavat siihen, että vastaavan aikaavaruuden pisteen aikakoordinaatti on positiivisella/negatiivisella aikahaaralla. Eli esimerkiksi $\Delta^{+-}(x, y)$ tarkoittaa, että pisteen x aikakoordinaatti on positiivisella ja vastaavasti pisteen y aikakoordinaatti negatiivisella aikahaaralla. Kentät $\phi_I(x)$ ja $\phi_I^\dagger(y)$, kuten myös tiheysoperaattori ρ_0 (3.13) (3.16), ovat vuorovaikutuskuvan operaattoreita. Viimeisellä rivillä \bar{T} tarkoittaa käännettyä (anti)aikajärjestystä

$$\bar{T} \phi(x) \phi^\dagger(x') = \begin{cases} \phi(x) \phi^\dagger(x'), & \text{jos } t < t', \\ \phi^\dagger(x') \phi(x), & \text{jos } t > t'. \end{cases} \quad (3.26)$$

Propagaattoreista (3.25) Δ_0^F vastaa lähinnä tavallista kausaalista Feynmanin propagaattoria, mutta kolme muuta ovat uusia ja ne sisältävät korrelaatiot negatiivisen aikahaaran pisteiden kanssa. Vapaat propagaattorit (3.25) voidaan lausua myös yhdellä lausekkeella muodossa

$$\Delta_0(x, y) = -i \text{Tr} \{ \rho_0 T_C [\phi_I(x) \phi_I^\dagger(y)] \}, \quad (3.27)$$

missä pisteiden x ja y aikakoordinaateissa esiintyy eksplisiittisesti tieto siitä, kummalle aikahaaralle se kuuluu.

Jos tutkittava systeemi on termodynaamisessa tasapainossa, on tiheysoperaattorilla hyvin tunnettu muoto

$$\rho = \exp[\beta(F - H)], \quad (3.28)$$

missä $\beta = 1/k_B T$ on käänteinen lämpötila, H on systeemin Hamiltonin operaattori ja F on systeemin vapaa energia, joka kommutoi Hamiltonin operaattorin kanssa. Tällöin tutkittavan teorian vapaat propagaattorit (3.25) saadaan helposti ratkaistua, ja Greenin funktioiden avulla esitettävät termodynaamiset suuret voidaan laskea häiriöteoriaa käyttäen kuten tavanomaisessa kvanttikenttäteoriassa sillä erotuksella, että propagaattoreita on nyt neljä erilaista, joiden käyttö riippuu siitä kummalla aikahaaralla propagaattorin pääteverteksien aikakoordinaatit ovat. Tässä tapauksessa CTP-formalismi redusoituu erääksi esitykseksi termisen kenttäteorian reaaliaikaformalismille.

Erityisen hyödyllinen CTP-formalismi on kuitenkin tarkasteltaessa systeemeitä, jotka eivät ole termodynaamisessa tasapainossa. Tällöin tiheysoperaattoria ei tunneta, vaan se on periaatteessa jatkuvasti muuttuva dynaaminen suure. Nyt vapaita propagaattoreita (3.25) ei pystytä mitenkään laskemaan etukäteen, sillä ne riippuvat eksplisiittisesti tiheysoperaattorista, joka puolestaan riippuu systeemin dynamiikasta. Näin ollen epätasapaino-tilanteissa vapaita propagaattoreita ei pystytä hyödyntämään perinteisellä tavalla häiriöteoriaa käyttäen. Sen sijaan propagaattorit täytyy laskea systeemin dynamiikan ratkaisemisen yhteydessä. Tällöin vapaita propagaattoreita kiinnostavampia suureita ovat vuorovaikuttavan teorian täydet propagaattorit, sillä nämä muodostavat teorian todellisen 2-piste Greenin funktion. 2-piste Greenin funktio antaa jo itsessään paljon tietoa systeemin fysiikasta, esimerkiksi hiukkastiheys- ja hiukkasvirtajakaumat avaruudessa. Lisäksi sen ja korkeampien n -piste Greenin funktioiden välille voidaan johtaa hierarkkinen kytkettyjen yhtälöiden joukko, josta korkeamman kertaluvun Greenin funktiot voidaan tietyin approksimaatioin ratkaista. Kaikkien n -piste Greenin funktioiden ratkaiseminen vastaa lopulta koko teorian ratkaisemista, sillä on jo kauan tiedetty, että mielivaltainen teoria voidaan formuloida pelkästään sen n -piste Greenin funktioiden ja niiden välisten yhtälöiden avulla.

CTP-formalismissa myös täysiä propagaattoreita täytyy määritellä neljä kappaletta, sillä ne voivat yhdistää sisäisiä verteksejä ja näin ollen eri aikahaarojen pisteitä aivan samoin kuin vapaat propagaattoritkin. Näitä neljää propagaattoria ei kuitenkaan pysty vuorovaikutuskuvassa kirjoittamaan auki kuten vapaita propagaattoreita (3.25), sillä sirontaoperaattori S_C pirstoutuu kenttien välille eikä aikajärjestyksiä pysty näin ollen edes keskimmäisten $<$ - ja $>$ -funktioiden osalta purkamaan, vaan propagaattoreiksi saadaan

$$\begin{aligned} \Delta^{++}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) &\equiv \Delta^F(x, y) \equiv -i\text{Tr}\{\rho_0 T_C [S_C \phi_I(t_+, \vec{x}) \phi_I^\dagger(t'_+, \vec{y})]\}, \\ \Delta^{+-}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) &\equiv \Delta^<(x, y) \equiv -i\text{Tr}\{\rho_0 T_C [S_C \phi_I(t_+, \vec{x}) \phi_I^\dagger(t'_-, \vec{y})]\}, \\ \Delta^{-+}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) &\equiv \Delta^>(x, y) \equiv -i\text{Tr}\{\rho_0 T_C [S_C \phi_I(t_-, \vec{x}) \phi_I^\dagger(t'_+, \vec{y})]\}, \\ \Delta^{--}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) &\equiv \Delta^{\bar{F}}(x, y) \equiv -i\text{Tr}\{\rho_0 T_C [S_C \phi_I(t_-, \vec{x}) \phi_I^\dagger(t'_-, \vec{y})]\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

missä aikakoordinaattien alaindeksit t_\pm kertovat kummalle aikahaaralle kyseinen koordinaatti kuuluu. Täydet propagaattorit (3.29) voidaan lausua yhdellä lausek-

keella

$$\Delta(x, y) = -i\text{Tr}\{\rho_0 T_C [\phi_I(x)\phi_I^\dagger(y)S_C]\}, \quad (3.30)$$

missä siis pisteiden x ja y aikakoordinaateissa esiintyy eksplisiittisesti tieto siitä, kummalle aikahaaralle se kuuluu. Etenemällä päinvastoin kuin kohdissa (3.22) ja (3.23) saadaan propagaattorille (3.30) Heisenbergin kuvan operaattoreiden $\phi(x)$, $\phi^\dagger(y)$ ja ρ avulla lauseke

$$\Delta(x, y) = -i\text{Tr}\{\rho T_C [\phi(x)\phi^\dagger(y)]\}, \quad (3.31)$$

missä edelleen pisteet x ja y voivat kuulua kummalle tahansa aikahaaralle. Koska tässä Heisenbergin kuvan muodossa ei esiinny sirontaoperaattoria, voidaan se kirjoittaa auki kuten vapaat propagaattorit:

$$\begin{aligned} \Delta^{++}(x, y) &\equiv \Delta^F(x, y) \equiv -i\text{Tr}\{\rho T [\phi(x)\phi^\dagger(y)]\}, \\ \Delta^{+-}(x, y) &\equiv \Delta^<(x, y) \equiv -i\text{Tr}\{\rho \phi^\dagger(y)\phi(x)\}, \\ \Delta^{-+}(x, y) &\equiv \Delta^>(x, y) \equiv -i\text{Tr}\{\rho \phi(x)\phi^\dagger(y)\}, \\ \Delta^{--}(x, y) &\equiv \Delta^{\bar{F}}(x, y) \equiv -i\text{Tr}\{\rho \bar{T} [\phi(x)\phi^\dagger(y)]\}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

missä merkinnät ovat samat kuin vapaille propagaattoreille (3.25). Heti havaitaan, etteivät kaikki neljä propagaattoria (3.32) (tai yhtä hyvin (3.25)) ole toisistaan riippumattomia, vaan pätee

$$\begin{aligned} \Delta^F(x, y) &= \theta(x_0 - y_0)\Delta^>(x, y) + \theta(y_0 - x_0)\Delta^<(x, y), \\ \Delta^{\bar{F}}(x, y) &= \theta(x_0 - y_0)\Delta^<(x, y) + \theta(y_0 - x_0)\Delta^>(x, y), \end{aligned} \quad (3.33)$$

missä $\theta(t)$ on porraskfunktio

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos } t > 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (3.34)$$

Käyttämällä porraskfunktion normitusta $\theta(x_0 - y_0) + \theta(y_0 - x_0) = 1$ saadaan propagaattoreiden riippuvuuksista (3.33) yksi yhtälö:

$$\Delta^F(x, y) + \Delta^{\bar{F}}(x, y) = \Delta^<(x, y) + \Delta^>(x, y). \quad (3.35)$$

Jatkon kannalta on hyödyllistä määritellä nk. “fysikaalisen” esityksen propagaattorit

$$\begin{aligned} \Delta^r(x, y) &\equiv -i\theta(x_0 - y_0)\text{Tr}\{\rho[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_-\}, \\ \Delta^a(x, y) &\equiv i\theta(y_0 - x_0)\text{Tr}\{\rho[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_-\}, \\ \Delta^c(x, y) &\equiv -i\text{Tr}\{\rho[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_+\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

missä Δ^r , Δ^a ja Δ^c ovat “retarded”, “advanced” ja “correlation”-propagaattorit ja merkintä $[\dots]_-$ tarkoittaa kommuttaattoria ja $[\dots]_+$ antikommutaattoria. Alkuperäisten propagaattoreiden (3.32) avulla näille saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} \Delta^r &= \Delta^F - \Delta^< = \Delta^> - \Delta^{\bar{F}}, \\ \Delta^a &= \Delta^F - \Delta^> = \Delta^< - \Delta^{\bar{F}}, \\ \Delta^c &= \Delta^F + \Delta^{\bar{F}} = \Delta^< + \Delta^>. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Edelleen määritellään näiden “fysikaalisen” esityksen propagaattoreiden hermiittinen ja antihermiittinen osa

$$\begin{aligned}\Delta_h &\equiv \frac{1}{2}(\Delta^r + \Delta^a), \\ \Delta_a &\equiv \frac{1}{2i}(\Delta^a - \Delta^r) = \frac{i}{2}(\Delta^> - \Delta^<),\end{aligned}\tag{3.38}$$

eli tällöin

$$\Delta^{r,a} = \Delta_h \mp i\Delta_a.\tag{3.39}$$

Suoraan määritelmien (3.32) perusteella saadaan alkuperäisille propagaattoreille seuraavat hermiittisyys-relaatiot:

$$\begin{aligned}(i\Delta^F(x, y))^\dagger &= i\Delta^{\bar{F}}(y, x), \\ (i\Delta^{<, >}(x, y))^\dagger &= i\Delta^{<, >}(y, x).\end{aligned}\tag{3.40}$$

Näiden relaatioiden perusteella saadaan fysikaalisen esityksen propagaattoreille

$$\begin{aligned}\Delta^{r,a}(x, y)^\dagger &= \Delta^{a,r}(y, x), \\ \Delta_h(x, y)^\dagger &= \Delta_h(y, x), \\ \Delta_a(x, y)^\dagger &= \Delta_a(y, x).\end{aligned}\tag{3.41}$$

3.1.3 Fermionien propagaattorit

Edellä esitetyt määritelmät propagaattoreille koskivat skalaaribosonien tapaus-ta. Fermionien propagaattorit määritellään CTP-formalismissa täysin analogisel-la tavalla. Täydelle propagaattorille saadaan Heisenbergin kuvan operaattoreiden $\psi(x)$, $\bar{\psi}(y)$ ja ρ avulla

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = -i\text{Tr} \{ \rho T_C [\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] \},\tag{3.42}$$

missä α ja β ovat Diracin indeksejä eli propagaattori $G_{\alpha\beta}$ on 4×4 -matriisi. Propagaattorissa (3.42) pisteet x ja y voivat kuulua kummalle tahansa aikahaaralle ja se voidaan kirjoittaa auki kuten bosonisessa tapauksessa:

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}^{++}(x, y) &\equiv G_{\alpha\beta}^F(x, y) \equiv -i\text{Tr} \{ \rho T [\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] \}, \\ G_{\alpha\beta}^{+-}(x, y) &\equiv G_{\alpha\beta}^{<}(x, y) \equiv +i\text{Tr} \{ \rho \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) \}, \\ G_{\alpha\beta}^{-+}(x, y) &\equiv G_{\alpha\beta}^{>}(x, y) \equiv -i\text{Tr} \{ \rho \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \}, \\ G_{\alpha\beta}^{--}(x, y) &\equiv G_{\alpha\beta}^{\bar{F}}(x, y) \equiv -i\text{Tr} \{ \rho \bar{T} [\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] \},\end{aligned}\tag{3.43}$$

missä merkinnät ovat samat kuin bosonisille propagaattoreille (3.25). Eri merkki (+) propagaattorin $G_{\alpha\beta}^{<}(x, y)$ lausekkeessa on konventio, jonka taustalla on fermionisten operaattoreiden antikommutointi. Tämä konventio on valittu, jotta propagaattoreille (3.43) pätsivät samat riippuvuudet kuin bosonisessa tapaukses-sa:

$$\begin{aligned}G^F(x, y) &= \theta(x_0 - y_0)G^>(x, y) + \theta(y_0 - x_0)G^<(x, y), \\ G^{\bar{F}}(x, y) &= \theta(x_0 - y_0)G^<(x, y) + \theta(y_0 - x_0)G^>(x, y),\end{aligned}\tag{3.44}$$

joista seuraa

$$G^F(x, y) + G^{\bar{F}}(x, y) = G^<(x, y) + G^>(x, y). \quad (3.45)$$

Edelleen analogisesti määritellään “fysikaalisen” esityksen retarded-, advanced- ja correlation-propagaattorit:

$$\begin{aligned} G^r(x, y) &\equiv -i\theta(x_0 - y_0)\text{Tr}\{\rho[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+\}, \\ G^a(x, y) &\equiv i\theta(y_0 - x_0)\text{Tr}\{\rho[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+\}, \\ G^c(x, y) &\equiv -i\text{Tr}\{\rho[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Näille saadaan samanlaiset lausekkeet alkuperäisten propagaattoreiden (3.43) avulla kuin bosonisessa tapauksessa

$$\begin{aligned} G^r &= G^F - G^< = G^> - G^{\bar{F}}, \\ G^a &= G^F - G^> = G^< - G^{\bar{F}}, \\ G^c &= G^F + G^{\bar{F}} = G^< + G^>. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Myöskin fysikaalisen esityksen propagaattoreiden hermiittinen ja antihermiittinen osa määritellään samoin kuin bosonisessa tapauksessa eli

$$\begin{aligned} G_h &\equiv \frac{1}{2}(G^r + G^a), \\ G_a &\equiv \frac{1}{2i}(G^a - G^r) = \frac{i}{2}(G^> - G^<), \end{aligned} \quad (3.48)$$

jolloin siis

$$G^{r,a} = G_h \mp iG_a. \quad (3.49)$$

Hermiittisyys-relaatioksi saadaan fermionien tapauksessa

$$\begin{aligned} (i\gamma^0 G^F(x, y))^\dagger &= i\gamma^0 G^{\bar{F}}(y, x), \\ (i\gamma^0 G^{<, >}(x, y))^\dagger &= i\gamma^0 G^{<, >}(y, x). \end{aligned} \quad (3.50)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} (\gamma^0 G^{r,a}(x, y))^\dagger &= \gamma^0 G^{a,r}(y, x), \\ (\gamma^0 G_h(x, y))^\dagger &= \gamma^0 G_h(y, x), \\ (\gamma^0 G_a(x, y))^\dagger &= \gamma^0 G_a(y, x). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Sovellettaessa CTP-formalismia epätasapaino-ongelmiin ei perinteinen diagrammiteknikka Wickin teoreemineen ja vapaine propagaattoreineen toimi, sillä vapaiden propagaattoreiden laskeminen etukäteen on mahdotonta, kuten edellä todettiin. Sen sijaan teoria voidaan formuloida suoraan Greenin funktioiden ja niiden välisten yhtälöiden avulla. Kuuluisat Schwingerin-Dysonin yhtälöt ovat hierarkinen joukko intergaaliyhtälöitä täysille n -piste Greenin funktioille. Hierarkiassa alin näistä yhtälöistä sisältää pelkästään täyden propagaattorin (3.31) ja on lähtökohta johdettaessa esimerkiksi systeemiin liittyviä kuljetusyhtälöitä. Seuraavaksi johdetaan Schwingerin-Dysonin yhtälö täydelle propagaattorille 2PI-efektiivisen aktion avulla ja tätä kautta päädytään lopulta Kadanoffin-Baymin kvanttikuljetusyhtälöihin.

3.2 2PI-efektiivinen aktio ja Schwingerin-Dysonin yhtälöt

2PI-efektiivinen aktio (Two Particle Irreducible), ja siihen perustuva formalismi esiteltiin ensi kerran kiinteän olomuodon fysiikassa [24]. Relativistiseen kvanttikenttäteoriaan soveltuvaksi formalismin kehittivät Cornwall, Jackiw ja Tomboulis [25] ja myöhemmin formalismia muokattiin soveltumaan CTP-formalismin tarpeisiin [26] [27].

2PI-formalismin ideana on yleistää efektiivinen aktio Γ riippumaan paitsi tarkasteltavan kentän odotusarvosta $\hat{\phi}(x) \equiv \langle \phi(x) \rangle = \text{Tr} \{ \rho \phi(x) \}$, eli 1-piste korrelaatiofunktioista, myös systeemin täydestä propagaattorista $\Delta(x, y)$ (3.31). Tämän jälkeen systeemiin liittyvät fysikaaliset ratkaisut saadaan ottamalla 2PI-efektiivisen aktion $\Gamma[\hat{\phi}, \Delta]$ ääriarvo sekä keskimääräisen kentän $\hat{\phi}(x)$ että täyden propagaattorin $\Delta(x, y)$ suhteen, eli vaatimalla

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\hat{\phi}, \Delta]}{\delta \hat{\phi}} &= 0, \\ \frac{\delta \Gamma[\hat{\phi}, \Delta]}{\delta \Delta} &= 0. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Tarkastellaan seuraavaksi 2PI-efektiivistä aktiota tarkemmin reaalisen skalaarikentän $\phi(x)$ tapauksessa [27]. Lähdetään liikkeelle systeemin generoivasta funktionaalista $Z(J)$, joka määritellään CTP-formalismissa seuraavasti:

$$Z[J, \rho] \equiv \text{Tr} \left\{ T_C \left[\exp \left(i \int_C J(x) \Phi(x) \right) \right] \rho \right\}, \tag{3.53}$$

missä Φ ja ρ ovat Heisenbergin kuvan operaattoreita ja integroimispolku on edellä määritelty suljettu aikapolku. Yleisesti ottaen lähdetermi $J(x)$ voi olla positiivisella ja negatiivisella aikahaaralla erilainen, joten eri haaroja vastaavat lähdeterminit on syytä erottaa toisistaan alaindeksein, $J_+(x)$ ja $J_-(x)$. Näin generoivalle funktionaalille saadaan tavallisen aikamuuttujan avulla lausuttuna esitys

$$\begin{aligned} Z[J_+, J_-, \rho] &= \text{Tr} \left\{ \left[\bar{T} \exp \left(-i \int d^4x J_-(x) \Phi(x) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[T \exp \left(i \int d^4x J_+(x) \Phi(x) \right) \right] \rho \right\}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Systeemin kytkettyjen graafien generoiva funktio määritellään kuten tavallista logaritmina

$$W[J_+, J_-, \rho] \equiv -i \ln Z(J_+, J_-, \rho). \tag{3.55}$$

Generoivalle funktionaalille voidaan johtaa polkuintegraaliesitys. Tätä varten tarvitaan Heisenbergin kenttäoperaattorin $\Phi(x)$ ominaistilojen muodostama kanta ajanhetkellä $t = 0$

$$\Phi(\vec{x}, 0) | \phi_0, 0 \rangle = \phi_0(\vec{x}) | \phi_0, 0 \rangle, \tag{3.56}$$

ja $t = +\infty$

$$\Phi(\vec{x}, +\infty) | \phi_\infty, +\infty \rangle = \phi_\infty(\vec{x}) | \phi_\infty, +\infty \rangle. \tag{3.57}$$

Näihin ylinumeroituviin kantoihin liittyvät täydellisyysrelaatiot ovat funktionaalisia:

$$1 = \int D\phi_0 |\phi_{0,0}\rangle \langle \phi_{0,0}|, \quad 1 = \int D\phi_\infty |\phi_{\infty,0}\rangle \langle \phi_{\infty,0}|. \quad (3.58)$$

Lausumalla jälki integraalina yli kantatilajoukon (3.56) ja käyttämällä täydellisyysrelaatioita (3.58) saadaan generoivan funktionaalille (3.54) esitys

$$\begin{aligned} Z[J_+, J_-, \rho] &= \int D\phi_0 D\phi'_0 D\phi_\infty \langle \phi_{0,0} | \bar{T} \exp \left(-i \int d^4x J_-(x) \Phi(x) \right) | \phi_{\infty, +\infty} \rangle \\ &\quad \times \langle \phi_{\infty, +\infty} | T \exp \left(i \int d^4x J_+(x) \Phi(x) \right) | \phi'_{0,0} \rangle \langle \phi'_{0,0} | \rho | \phi_{0,0} \rangle. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Toinen Diracin sulkeissa oleva termi on tavanomainen kvanttikenttäteorian siirtymäamplitudi ulkoisella lähteellä J_+ . Tällä on polkuintegraaliesitys [26] [28]

$$\begin{aligned} &\langle \phi_{\infty, +\infty} | T \exp \left(i \int d^4x J_+(x) \Phi(x) \right) | \phi'_{0,0} \rangle \\ &= \int D\phi^+ \exp \left[i \left(I[\phi^+] + \int d^4x J_+ \phi^+ \right) \right] \delta(\phi^+(\vec{x}, +\infty) - \phi_\infty(\vec{x})) \\ &\quad \times \delta(\phi^+(\vec{x}, 0) - \phi'_0(\vec{x})), \end{aligned} \quad (3.60)$$

missä $I[\phi]$ on klassinen aktio, esimerkiksi

$$I[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right). \quad (3.61)$$

Vastaavasti yhtälön (3.59) ensimmäinen Diracin sulkeissa oleva termi on ulkoisen lähteen J_- sisältävän siirtymäamplitudin kompleksikonjugaatti. Näin ollen generoiva funktionaali (3.59) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} Z[J_+, J_-, \rho] &= \int D\phi^+ D\phi^- \exp \left\{ i \left[(I[\phi^+] + J_+ \phi^+) - (I^*[\phi^-] + J_- \phi^-) \right] \right\} \\ &\quad \times \langle \phi^+, 0 | \rho | \phi^-, 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.62)$$

missä on käytetty lyhennysmerkintää $J_\pm \phi^\pm := \int d^4x J_\pm(x) \phi^\pm(x)$ ja tilat $|\phi^\pm, 0\rangle$ ovat kenttäkonfiguraatioita $\phi^\pm(\vec{x}, 0)$ vastaavia kvanttitiloja.

Otetaan CTP-aktiolla käyttöön merkintä

$$I[\phi^a] \equiv I[\phi^+] - I^*[\phi^-] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} c_{ab} \partial\phi^a \partial\phi^b - \frac{1}{2} m^2 c_{ab} \phi^a \phi^b - \frac{\lambda}{4!} h_{abcd} \phi^a \phi^b \phi^c \phi^d \right), \quad (3.63)$$

missä indeksi $a = \pm$, “metrinen tensori” $c_{ab} = \text{diag}(1, -1)$ ja matriisi h_{abcd} on 1 jos $a = b = c = d = 1$, -1 jos $a = b = c = d = -1$ ja 0 muutoin. Näin generoiva funktionaali voidaan kirjoittaa kompaktissa muodossa

$$Z[J_+, J_-, \rho] = \int D\phi^a \exp [i (I[\phi^a] + J_a \phi^a)] \langle \phi^+, 0 | \rho | \phi^-, 0 \rangle, \quad (3.64)$$

missä toistuvan indeksin $a = \pm$ yli summataan käyttäen kontraktiossa “metristä tensoria” $c_{ab} = \text{diag}(1, -1)$. Polkuintegraalin ydin $\langle \phi^+, 0 | \rho | \phi^-, 0 \rangle$ on jokin funktionaali kenttäkonfiguraatioista $\phi^+(\vec{x}, 0)$ ja $\phi^-(\vec{x}, 0)$, joten se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\langle \phi^+, 0 | \rho | \phi^-, 0 \rangle = \exp (K[\phi^a]), \quad (3.65)$$

missä $K[\phi^a]$ voidaan kehittää funktionaalisesti sarjaksi

$$K[\phi^a] = K + \int d^4x K_a(x) \phi^a(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' K_{ab}(x, x') \phi^a(x) \phi^b(x') + \dots, \quad (3.66)$$

missä K on vakio, K_a on rinnastettavissa lokaaliin lähdetermiin ja K_{ab}, K_{abc}, \dots ovat ei-lokaaleja lähdetermejä. Näin tiheysoperaattoriin liityvä informaatio saadaan kirjoitettua eriasteisten ydinten sarjan K, K_a, K_{ab}, \dots avulla ja generoivalle funktionaalille saadaan

$$\begin{aligned} Z[J_+, J_-, \rho] &= Z[J_+, J_-, K_{ab}, K_{abc}, \dots] \\ &= \int D\phi^a \exp \left[i \left(I[\phi^a] + J_a \phi^a + \frac{1}{2} K_{ab} \phi^a \phi^b + \frac{1}{6} K_{abc} \phi^a \phi^b \phi^c + \dots \right) \right], \end{aligned} \quad (3.67)$$

missä vakiotermi K on absorboitu normalisaatioon ja K_a lähdetermiin J_a . Integraaleille käytetään edelleen lyhennysmerkintää. Esimerkiksi $K_{ab} \phi^a \phi^b$ tarkoittaa integraalia $\int d^4x d^4x' K_{ab}(x, x') \phi^a(x) \phi^b(x')$.

Generoivassa funktionaalissa (3.67) esiintyvillä ei-lokaaleilla lähteillä K_{ab}, K_{abc}, \dots ei yleisesti ottaen ole selkeää fysikaalista tulkintaa. Sen sijaan kannattaakin yleensä tarkastella efektiivistä aktiota, joka saadaan suorittamalla generoivalle funktionaalille W (3.55) moninkertainen Legendren muunnos. Määritellään ensin keskimääräinen kenttä $\hat{\phi}^a$ ja ei-lokaalit funktiot $\Delta^{ab}(x, x')$, $\Delta^{abc}(x, x', x'')$, \dots funktionaaliderivaattoina

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta J_a(x)} &\equiv \hat{\phi}^a(x), \\ \frac{\delta W}{\delta K_{ab}(x, x')} &\equiv \frac{1}{2} \left[\Delta^{ab}(x, x') + \hat{\phi}^a(x) \hat{\phi}^b(x') \right], \\ \frac{\delta W}{\delta K_{abc}} &\equiv \frac{1}{6} \left[\Delta^{abc} + 3\Delta^{(ab} \hat{\phi}^c) + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b \hat{\phi}^c \right], \quad \text{jne.} \end{aligned} \quad (3.68)$$

missä merkintä $3\Delta^{(ab} \hat{\phi}^c)$ tarkoittaa permutointia, eli $3\Delta^{(ab} \hat{\phi}^c) \equiv \Delta^{ab} \hat{\phi}^c + \Delta^{ca} \hat{\phi}^b + \Delta^{bc} \hat{\phi}^a$. Yhtälön (3.67) perusteella havaitaan, että funktionaaliderivaatat $\frac{\delta W}{\delta K}$ ovat korrelaattoreita odotusarvon $\hat{\phi}^a(x)$ suhteen tiheysoperaattorin ρ ja lähteiden J_a kuvaamassa kvantttilassa, eli esimerkiksi

$$\begin{aligned} \Delta^{ab}(x, x') &= \left\langle \phi^a(x) \phi^b(x') \right\rangle - \hat{\phi}^a(x) \hat{\phi}^b(x') \\ &= \left\langle (\phi^a(x) - \hat{\phi}^a(x)) (\phi^b(x') - \hat{\phi}^b(x')) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{abc}(x, x', x'') &= \left\langle \phi^a(x) \phi^b(x') \phi^c(x'') \right\rangle - \left(\left\langle \phi^a(x) \phi^b(x') \right\rangle \hat{\phi}^c(x'') + \text{permutaatiot} \right) \\ &\quad + 2\hat{\phi}^a(x) \hat{\phi}^b(x') \hat{\phi}^c(x'') \\ &= \left\langle (\phi^a(x) - \hat{\phi}^a(x)) (\phi^b(x') - \hat{\phi}^b(x')) (\phi^c(x'') - \hat{\phi}^c(x'')) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.70)$$

missä $\hat{\phi}^a(x) = \langle \phi^a(x) \rangle$ ja yleinen odotusarvo on

$$\langle (\dots) \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int D\phi^a(\dots) \exp \left[i \left(I[\phi^a] + J_a \phi^a + \frac{1}{2} K_{ab} \phi^a \phi^b + \frac{1}{6} K_{abc} \phi^a \phi^b \phi^c + \dots \right) \right]. \quad (3.71)$$

Näiden lausekkeiden perusteella todetaan, että $\hat{\phi}^a$ todellakin vastaa keskimääräistä kenttää kyseisessä kvanttitilassa ja Δ :t puolestaan kytkettyjä redusoitumattomia n -piste Greenin funktioita tämän keskimääräisen kentän suhteen. Tällainen Greenin funktioiden määrittely on häiriöteorian kannalta järkevää, sillä tyypillisesti kenttien fluktuaatiot keskimääräisen kentän ympärille ovat pieniä, jolloin korrelaattorit eli Greenin funktiot nimenomaan keskimääräisen kentän suhteen antavat pieniä korjauksia ja näistä muodostettu sarja suppenee nopeasti. Yleistetty efektiivinen aktio määritellään nyt moninkertaisena Legendren muunnoksena

$$\Gamma[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}, \Delta^{abc}, \dots] \equiv W(J_a, K_{ab}, K_{abc}, \dots) - J_a \hat{\phi}^a - \frac{1}{2} K_{ab} (\Delta^{ab} + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b) - \frac{1}{6} K_{abc} (\Delta^{abc} + 3\Delta^{ab} \hat{\phi}^c + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b \hat{\phi}^c) - \dots, \quad (3.72)$$

missä lähdetermit J_a ja K_{ab}, K_{abc}, \dots eliminoidaan lausumalla ne $\hat{\phi}^a$:n ja Δ :jen avulla käyttämällä hyväksi yhtälöitä (3.68). Edelleen saadaan suoraan derivoimalla ja käyttämällä jälleen lausekkeitä (3.68)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta \hat{\phi}^a} &= -J_a - K_{ab} \hat{\phi}^b - \frac{1}{2} K_{abc} (\Delta^{bc} + \hat{\phi}^b \hat{\phi}^c) - \dots, \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \Delta^{ab}} &= -\frac{1}{2} K_{ab} - \frac{1}{2} K_{abc} \hat{\phi}^c - \dots, \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \Delta^{abc}} &= -\frac{1}{6} K_{abc} - \dots, \quad \text{jne.} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Yhtälöt (3.73) muodostavat äärettömän yhtälöryhmän, joka kytkee toisiinsa keskimääräisen kentän $\hat{\phi}$, tiheysmatriisista riippuvat lähdetermit K ja kytketyt n -piste Greenin funktiot Δ . Selvää on, että tämän yhtälöryhmän ratkaiseminen ilman minkäänlaisia oletuksia on mahdotonta. Täytyy siis löytää jokin keino systeemin vapausasteiden vähentämiseksi. Tässä tulee avuksi tiheysoperaattorin muodon tarkastelu. Osoittautuu, että jos tiheysoperaattori voidaan systeemin alkutilassa lausua muodossa

$$\rho = C \exp \left(- \int d^3k \beta_k a_k^\dagger a_{\vec{k}} \right), \quad (3.74)$$

missä a_k^\dagger :t ovat hiukkasten luomisoperaattoreita ja β_k on mielivaltainen ei-negatiivinen k :n funktio, kaikki lähdetermit K_{abc} :stä ylöspäin häviävät [27]. Tällöin yleistetty efektiivinen aktio on

$$\Gamma[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}, \Delta^{abc}, \Delta^{abcd}, \dots] = W[J_a, K_{ab}, 0, 0, \dots] - J_a \hat{\phi}^a - \frac{1}{2} K_{ab} (\Delta^{ab} + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b), \quad (3.75)$$

ja yhtälöryhmälle (3.73) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta \hat{\phi}^a} &= -J_a - K_{ab} \hat{\phi}^b, \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \Delta^{ab}} &= -\frac{1}{2} K_{ab}, \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \Delta^{abc}} &= 0, \quad \text{jne.} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Systemi on kuitenkin edelleen ääretön, sillä n -piste Greenin funktioita Δ on ääretön määrä. Jotta systeemistä saataisiin äärellinen, täytyy n -piste Greenin funktiot $\Delta^{abc}, \Delta^{abcd}, \dots$ pystyä jotenkin eliminoimaan dynaamisina muuttujina eli lausumaan ne keskimääräisen kentän $\hat{\phi}^a$ ja 2-piste Greenin funktion Δ^{ab} avulla. Tämä onnistuu yhtälöryhmän (3.76) nollaa antavien yhtälöiden avulla. Määritellään uusi, vain $\hat{\phi}^a$:sta ja Δ^{ab} :stä riippuva funktionaali

$$\Gamma[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}] = \Gamma[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}, \tilde{\Delta}^{abc}, \tilde{\Delta}^{abcd}, \dots], \quad (3.77)$$

missä $\hat{\phi}^a$:n ja Δ^{ab} :n funktionaalit $\tilde{\Delta}[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}]$ voidaan ratkaista yhtälöistä

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta\Delta^{abc}}[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}, \tilde{\Delta}^{abc}, \dots] &= 0, \\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\Delta^{abcd}}[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}, \tilde{\Delta}^{abc}, \dots] &= 0, \quad \text{jne.} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Mutta mitä hyötyä tästä on? Edelleenhan yhtälöryhmä (3.78) on ääretön. Idea onkin siinä, että jos systeemin alkutilassa tiheysoperaattori on muotoa (3.74), voidaan yhtälöt (3.78) aina ratkaista helposti käyttäen Wickin teoremaa. Diagrammitekniikan kannalta tämä tarkoittaa sitä, että korkeammat n -piste Greenin funktiot voidaan lausua propagaattoreiden avulla, jolloin alkuperäinen yhtälöryhmä (3.73) todellakin redusoituu kahdeksi yhtälöksi kahdelle dynaamiselle muuttujalle $\hat{\phi}^a$ ja Δ^{ab} . Mitä sitten alkutilan tiheysoperaattorin rajoittaminen muotoon (3.74) merkitsee systeemin fysiikan kannalta? Koska tiheysoperaattori on määritelty Fockin avaruudessa luomis- ja hävitysoperaattoreiden avulla, täytyy systeemin alkutilan olla Fockin avaruuden tila eli lausuttavissa 1-hiukkastilojen kompositiona. Tämä tarkoittaa sitä, että alkutilassa hiukkasten välisten vuorovaikutusten on oltava riittävän heikkoja, jotta systeemin kuvailu 1-hiukkastilojen avulla olisi mahdollista. Lisäksi alkutilan täytyy olla rotaatio-symmetrinen, sillä funktiot β_k riippuvat vain liikemäärän itseisarvosta k .

Yhtälöllä (3.77) määritelty efektiivinen aktio $\Gamma[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}]$ on puhdas kaksinkertainen Legendren muunnos kytkettyjen graafien generoivasta funktionaalista $W[J_a, K_{ab}, 0, 0, \dots]$ siinä mielessä, että sekä uusia ($\hat{\phi}^a$ ja Δ^{ab}) että vanhoja (J_a , K_{ab}) dynaamisia muuttujia on yhtä monta. Tällä tavalla määriteltyä yleistettyä efektiivistä aktiota $\Gamma[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}]$ kutsutaan 2PI-efektiiviseksi aktioksi (Two Particle Irreducible). 2PI-efektiiviselle aktiolla voidaan johtaa eksakti lauseke [25]

$$\Gamma[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}] = I[\hat{\phi}^a] + \frac{i}{2} \ln \det(\Delta^{ab})^{-1} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{\delta^2 I[\hat{\phi}^a]}{\delta\hat{\phi}^a \delta\hat{\phi}^b} \Delta^{ab} \right\} + \Gamma_2[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}] + \text{vakio}, \quad (3.79)$$

missä Γ_2 on summa kaikista 2PI-vakuumigraafeista teoriassa, jossa on propagaattorina Δ^{ab} , kuutiollinen vuorovaikutus voimakkuudella $\lambda h_{abcd} \hat{\phi}^d$ ja neljännen potenssin vuorovaikutus voimakkuudella λh_{abcd} . 2PI-graafeilla tarkoitetaan kytkettyjä graafeja, joista tulee ei-kytkettyjä katkaisemalla kaksi viivaa. 2PI-efektiivisen aktion nimi onkin perua juuri tästä Γ_2 :n sisältävästä esitysmuodosta (3.79).

Systemin dynamiikka määräytyy nyt kahden ylimmän yhtälön (3.76) perusteella. Fysikaalisissa ratkaisuisa lokaali lähde-termi J_a häviää ja systeemin alkukonfiguraatiosta riippuva lähde-termi K_{ab} voidaan absorboida reunaehtoihin.

Tällöin systeemin dynaamisiksi yhtälöiksi saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}]}{\delta\hat{\phi}^a} &= 0, \\ \frac{\delta\Gamma[\hat{\phi}^a, \Delta^{ab}]}{\delta\Delta^{ab}} &= 0.\end{aligned}\tag{3.80}$$

2PI-aktion esityksessä (3.79) esiintyvä aktion funktionaaliderivaatta voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\delta^2 I[\hat{\phi}^a]}{\delta\hat{\phi}^a(x)\delta\hat{\phi}^b(y)} = i\Delta_{ab}^{(0)-1}(x-y) + \frac{\delta^2 I_{\text{int}}[\hat{\phi}^a]}{\delta\hat{\phi}^a(x)\delta\hat{\phi}^b(y)},\tag{3.81}$$

missä $\Delta_{ab}^{(0)}(x-y)$ on bosonikentän vapaa propagaattori

$$\Delta_{ab}^{(0)-1}(x-y) = -c_{ab}(\partial^2 + m^2)\delta^4(x-y)\tag{3.82}$$

ja vuorovaikutusosan $I_{\text{int}}[\hat{\phi}^a]$ funktionaaliderivaatta sisältää vähintään yhden kentän $\hat{\phi}^a$. Jos kenttäkondensaattia ei ole olemassa eli $\hat{\phi}^a = 0$, kuten tarkastelemassamme tilanteessa, häviää vuorovaikutusosan kontribuutio aktion funktionaaliderivaatassa (3.81), ja 2PI-efektiivinen aktio saadaan muotoon

$$\Gamma[\Delta^{ab}] = \frac{i}{2} \ln \det(\Delta^{ab})^{-1} + \frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ \Delta_{ab}^{(0)-1} \Delta^{ab} \right\} + \Gamma_2[\Delta^{ab}] + \text{vakio}.\tag{3.83}$$

Edellä esitetty tarkastelu tehtiin reaalille skalaarikentälle eli bosoneille. Täysin vastaavalla tavalla voidaan kuitenkin johtaa 2PI-efektiivinen aktio myös fermioineille, joille saadaan kenttäkondensaatin puuttuessa

$$\Gamma[G^{ab}] = -\frac{i}{2} \ln \det(G^{ab})^{-1} - \frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ G_{ab}^{(0)-1} G^{ab} \right\} + \Gamma_2[G^{ab}] + \text{vakio}.\tag{3.84}$$

Termien eri merkki vastaaviin bosonisiin termeihin verrattuna johtuu Fermi-statistiikasta. Jos kyseessä on sekä fermoinit että bosonit yhdistävä Yukawa-teoria, on teorian 2PI-efektiivinen aktio bosonisen osan ja fermoinisen osan summa ja vuorovaikutuksiin otetaan huomioon myös Yukawa-kytkentä. Tässä tapauksessa saadaan sekä bosonisen että fermionisen kenttäkondensaatin puuttuessa 2PI-efektiiviseksi aktioksi

$$\begin{aligned}\Gamma[\Delta^{ab}, G^{ab}] &= \frac{i}{2} \ln \det(\Delta^{ab})^{-1} - \frac{i}{2} \ln \det(G^{ab})^{-1} + \frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ \Delta_{ab}^{(0)-1} \Delta^{ab} \right\} \\ &\quad - \frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ G_{ab}^{(0)-1} G^{ab} \right\} + \Gamma_2[\Delta, G^{ab}] + \text{vakio},\end{aligned}\tag{3.85}$$

ja systeemin dynaamiset yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\Delta^{ab}, G^{ab}]}{\delta\Delta^{ab}} &= 0, \\ \frac{\delta\Gamma[\Delta^{ab}, G^{ab}]}{\delta G^{ab}} &= 0.\end{aligned}\tag{3.86}$$

Ottamalla funktionaaliderivaatat lausekkeesta (3.85) saadaan dynaamisten yhtälöiden perusteella

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\Delta^{ab}, G^{ab}]}{\delta\Delta^{ab}(x, y)} &= -\frac{i}{2}\Delta_{ab}^{-1}(x, y) + \frac{i}{2}\Delta_{ab}^{(0)-1}(x, y) + \frac{\delta\Gamma_2[\Delta^{ab}, G^{ab}]}{\delta\Delta^{ab}(x, y)} = 0, \\ \frac{\delta\Gamma[\Delta^{ab}, G^{ab}]}{\delta G^{ab}(x, y)} &= \frac{i}{2}G_{ab}^{-1}(x, y) - \frac{i}{2}G_{ab}^{(0)-1}(x, y) + \frac{\delta\Gamma_2[\Delta^{ab}, G^{ab}]}{\delta G^{ab}(x, y)} = 0.\end{aligned}\quad (3.87)$$

2PI-vakuumigraafien summan Γ_2 funktionaaliderivaatta propagaattorin suhteen vastaa yhden viivan katkaisemista jokaisessa vakuumigraafissa, jolloin saadaan summa kaikista 1PI-graafeista (One Particle Irreducible), jotka kontribuoivat kyseiseen propagaattoriin. Mutta tämä redusoitumattomien 2-piste graafien summa on vastaava itseisenergia. Bosoneille ja fermioneille määritellään siten itseisenergiat

$$\begin{aligned}\Pi_{ab}(x, y) &\equiv 2i\frac{\delta\Gamma_2[\Delta^{ab}, G^{ab}]}{\delta\Delta^{ab}(x, y)}, \\ \Sigma_{ab}(x, y) &\equiv -2i\frac{\delta\Gamma_2[\Delta^{ab}, G^{ab}]}{\delta G^{ab}(x, y)},\end{aligned}\quad (3.88)$$

jolloin yhtälöt (3.87) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}\Delta_{ab}^{(0)-1}(x, y) &= \Delta_{ab}^{-1}(x, y) + \Pi_{ab}(x, y), \\ G_{ab}^{(0)-1}(x, y) &= G_{ab}^{-1}(x, y) + \Sigma_{ab}(x, y).\end{aligned}\quad (3.89)$$

Itseisenergioille Π ja Σ (3.88) voidaan määritellä propagaattoreiden (3.32) ja (3.36) kanssa täysin analogisesti “retarded”, “advanced” jne. itseisenergiat. Yhtälöiden (3.89) perusteella havaitaan heti, että itseisenergioilla Π ja Σ on täsmälleen samat hermitisyysominaisuudet kuin propagaattoreilla Δ ja G , eli

$$\begin{aligned}(i\Pi^F(x, y))^\dagger &= i\Pi^{\bar{F}}(y, x), \\ (i\Pi^{<, >}(x, y))^\dagger &= i\Pi^{<, >}(y, x), \\ \Pi^{r, a}(x, y)^\dagger &= \Pi^{a, r}(y, x), \\ \Pi_h(x, y)^\dagger &= \Pi_h(y, x), \\ \Pi_a(x, y)^\dagger &= \Pi_a(y, x),\end{aligned}\quad (3.90)$$

ja vastaavasti Σ :lle.

Kertomalla yhtälöt (3.89) oikealta propagaattoreilla Δ ja G vastaavasti ja integroimalla saadaan kuuluisat Schwingerin-Dysonin yhtälöt propagaattoreille:

$$\begin{aligned}\int d^4z \Delta^{(0)-1}(x, z)\Delta^{ab}(z, y) &= a\delta_{ab}\delta^4(x - y) + c \int d^4z \Pi^{ac}(x, z)\Delta^{cb}(z, y), \\ \int d^4z G^{(0)-1}(x, z)G^{ab}(z, y) &= a\delta_{ab}\delta^4(x - y) + c \int d^4z \Sigma^{ac}(x, z)G^{cb}(z, y),\end{aligned}\quad (3.91)$$

missä toistuvien ideksien c yli summataan. Etumerkit a ja c yhtälöiden oikealla puolella seuraavat siitä, että kontraktiossa on käytetty “metristä tensoria”

$c_{ab} = a\delta_{ab} = \text{diag}(1, -1)$. Vapaiden propagaattoreiden käänteisoperaattoreissa ei ole aikahaaraindeksejä, sillä $\Delta_{ab}^{(0)-1} \propto \delta_{ab}$ (3.82) ja vastaavasti fermioniselle vapaalle propagaattorille, ja näin ollen summaus näiden indeksien yli on suoritettu triviaalisti. Schwingerin-Dysonin yhtälöiden heuristisesti selvä graafinen tulkinta käy hyvin ilmi kuvasta 3.2, jossa fermioninen yhtälö on kerrottu vasemmalta vapaalla propagaattorilla ja integroitu yli välimuuttujan.

$$\underline{\underline{G}} = \underline{G_0} + \underline{G_0} \text{---} \Sigma \text{---} \underline{G}$$

Kuva 3.2: Schwingerin-Dysonin yhtälöiden graafinen tulkinta. Täysi propagaattori G saadaan vapaan propagaattorin G_0 ja kaikkien redusoituvien 2-pistefunktioiden summana. Redusoituvien 2-pistefunktioiden summa voidaan kirjoittaa rekursiivisesti vapaan propagaattorin, redusoitumattoman 2-pistefunktion eli itseisenergian Σ ja täyden propagaattorin tulona. Iteratiivisesti auki kirjoitettuna täydelle propagaattorille saadaan geometrinen sarja, jonka suhdeluku on ΣG_0 .

Schwingerin-Dysonin yhtälöt propagaattoreille (3.91) ovat etsityt fundamentaalit yhtälöt systeemin dynamiikalle. Yhtälöissä esiintyvät itseisenergiat voidaan sopivin approksimaatioin, esimerkiksi häiriöteorian tietyssä kertaluvussa, lausua täysien propagaattoreiden kompositioina. Tällöin yhtälöistä (3.91) tulee kytketty yhtälöpari, joka sisältää vain propagaattoreita Δ ja G . Ottaen huomioon, että vapaiden propagaattoreiden käänteiset $\Delta^{(0)-1}$ ja $G^{(0)-1}$ ovat differentiaalioperaattoreita, ovat kyseiset yhtälöt integro-differentiaaliyhtälöitä ja erittäin vaikeita ratkaista etenkin häiriöteorian korkeammassa kertaluvussa, joissa itseisenergiat ovat propagaattoreiden monimutkaisia funktioaaleja.

3.3 Kadanoffin-Baymin kvanttikuljetusyhtälöt

Schwingerin-Dysonin yhtälöiden (3.91) luonne kuljetusyhtälöinä tulee paremmin esille muokkaamalla niitä hieman ja siirtymällä impulssiavaruuteen. Käyttämällä propagaattoreiden lausekkeita (3.32) ja (3.36) saadaan bosonisesta Schwingerin-Dysonin yhtälöstä (3.91)

$$\Delta^{(0)-1} \odot \Delta^{r,a} - \Pi^{r,a} \odot \Delta^{r,a} = \delta, \quad (3.92)$$

$$\Delta^{(0)-1} \odot \Delta^{<, >} - \Pi^r \odot \Delta^{<, >} = \Pi^{<, >} \odot \Delta^a, \quad (3.93)$$

ja vastaavasti fermionisesta yhtälöstä

$$G^{(0)-1} \odot G^{r,a} - \Sigma^{r,a} \odot G^{r,a} = \delta, \quad (3.94)$$

$$G^{(0)-1} \odot G^{<, >} - \Sigma^r \odot G^{<, >} = \Sigma^{<, >} \odot G^a, \quad (3.95)$$

missä \odot tarkoittaa integrointia yhteisen väli-muuttujan suhteen. Koska kaikki Greenin funktiot eivät yhtälön (3.33) mukaisesti ole riippumattomia, eivät

myöskään kaikki neljä bosonista yhtälöä (3.92) ja (3.93) ja vastaavasti fermionista yhtälöä (3.94) ja (3.95) ole keskenään riippumattomia. Sidosehdon (3.33) perusteella yksi Greenin funktio voidaan aina lausua kolmen muun summana, niinpä kummastakin näistä neljän yhtälön ryhmästä vain kolme yhtälöä ovat riippumattomia.

Molemmissa yhtälöryhmissä “retarded”- ja “advanced”-propagaattoreiden yhtälöt (3.92) ja (3.94) kuvaavat pääasiassa systeemin staattisia ominaisuuksia, ja niistä saadaan puutasolla mm. systeemin spektraalirelaatiot, kuten dispersiorelaatio. Sen sijaan Wightmanin funktioiden $\Delta^{<, >}$ ja $G^{<, >}$ yhtälöt (3.93) ja (3.95) kuvaavat systeemin dynamiikkaa ja kineettisiä ominaisuuksia. Käyttämällä itseisenergioiden hermiittisiä ja antihermiittisiä osia voidaan dynaamiset yhtälöt (3.93) ja (3.95) kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}\Delta^{(0)-1} \odot \Delta^{<, >} - \Pi_h \odot \Delta^{<, >} - \Pi^{<, >} \odot \Delta_h &= \mathcal{C}_\phi, \\ G^{(0)-1} \odot G^{<, >} - \Sigma_h \odot G^{<, >} - \Sigma^{<, >} \odot G_h &= \mathcal{C}_\psi,\end{aligned}\tag{3.96}$$

missä on määritelty bosoninen ja fermioninen kolliisiotermi

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\phi &\equiv \frac{1}{2} (\Pi^> \odot \Delta^< - \Pi^< \odot \Delta^>), \\ \mathcal{C}_\psi &\equiv \frac{1}{2} (\Sigma^> \odot G^< - \Sigma^< \odot G^>).\end{aligned}\tag{3.97}$$

Saadut yhtälöt (3.96) ovat systeemin kinematiikkaa kuvaavat Kadanoffin-Baymin yhtälöt. Ne soveltuvat erityisen hyvin epätasapaino-ilmioiden tarkasteluun, joissa systeemiin liittyy kaksi selkeästi erillistä skaalaa, sisäinen eli *mikroskooppinen* skaala ja ulkoinen eli *makroskooppinen* skaala. Näin on esimerkiksi tilanteissa, joissa hitaasti muuttuva ulkoinen kenttä aiheuttaa makroskooppisia kuljetusilmiöitä muuten lähes termisessä systeemissä.

Systeemin sisäiset ja ulkoiset vapausasteet voidaan erottaa toisistaan siirtymällä sisäisen muuttujan osalta impulssiavaruuteen. 2-piste Greenin funktioissa $\Delta(x, y)$ ja $G(x, y)$ sisäisellä muuttujalla tarkoitetaan suhteellista koordinaattia $r = x - y$ ja ulkoisella muuttujalla puolestaan koordinaattien keskiarvoa $X = (x + y)/2$. Termodynaamisessa tasapainossa propagaattorit $\Delta(x, y)$ ja $G(x, y)$ ovat translaatioinvariantteja eli riippuvat ainoastaan sisäisestä muuttujasta $r = x - y$. Sen sijaan epätasapainon tilanteissa tämä translaatioinvarianssi ei päde. Tällöin propagaattorit $\Delta(x, y)$ ja $G(x, y)$ riippuvat sekä sisäisestä muuttujasta r että ulkoisesta muuttujasta X , jolloin esimerkiksi $G(x, y) = G(X + r/2, X - r/2)$. Impulssiavaruuteen siirytään sisäisen muuttujan osalta tekemällä Wignerin muunnos eli Fourier-muunnos suhteellisen koordinaatin $r = x - y$ suhteen

$$G(k, X) = \int d^4 r e^{ik \cdot r} G(X + r/2, X - r/2).\tag{3.98}$$

Bosonisille ja fermionisille Wightmanin funktioille $\Delta^{<, >}$ ja $G^{<, >}$ pätee normaalissa paikkaesityksessä seuraavat hermiittisyysrelaatiot (ks. (3.40)):

$$\begin{aligned}(i\Delta^{<, >}(x, y))^\dagger &= i\Delta^{<, >}(y, x), \\ (i\gamma^0 G^{<, >}(x, y))^\dagger &= i\gamma^0 G^{<, >}(y, x).\end{aligned}\tag{3.99}$$

Wignerin esityksessä nämä hermiittisyysrelaatiot ovat yksinkertaisesti

$$\begin{aligned} (i\Delta^{<, >}(k, X))^\dagger &= i\Delta^{<, >}(k, X), \\ (i\gamma^0 G^{<, >}(k, X))^\dagger &= i\gamma^0 G^{<, >}(k, X). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Kadanoffin-Baymin yhtälöiden (3.96) muuntamiseksi Wignerin esitykseen tarvitaan seuraavaa helposti todistettavaa yleistä relaatiota:

$$\int d^4(x-y)e^{ik \cdot (x-y)} \int d^4z A(x, z)B(z, y) = e^{-i\circ} \{A(k, X)\} \{B(k, X)\}, \quad (3.101)$$

missä siis $X = (x+y)/2$ on keskimääräinen koordinaatti ja \circ -operaattori määritellään seuraavasti

$$\circ\{\cdot\}\{\cdot\} = \frac{1}{2} \left(\partial_X^{(1)} \cdot \partial_k^{(2)} - \partial_k^{(1)} \cdot \partial_X^{(2)} \right) \{\cdot\}\{\cdot\}, \quad (3.102)$$

jossa yläindeksit (1) ja (2) viittaavat ensimmäiseen ja toiseen argumenttiin. Näin saadaan Kadanoffin-Baymin yhtälöiden (3.96) Wignerin muunnokseksi

$$\begin{aligned} e^{-i\circ} \{ \Delta^{(0)-1} \} \{ \Delta^{<, >} \} - e^{-i\circ} \{ \Pi_h \} \{ \Delta^{<, >} \} - e^{-i\circ} \{ \Pi^{<, >} \} \{ \Delta_h \} &= \mathcal{C}_\phi, \\ e^{-i\circ} \{ G^{(0)-1} \} \{ G^{<, >} \} - e^{-i\circ} \{ \Sigma_h \} \{ G^{<, >} \} - e^{-i\circ} \{ \Sigma^{<, >} \} \{ G_h \} &= \mathcal{C}_\psi, \end{aligned} \quad (3.103)$$

missä kolliisiotermit ovat

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\phi &= \frac{1}{2} e^{-i\circ} \left(\{ \Pi^> \} \{ \Delta^< \} - \{ \Pi^< \} \{ \Delta^> \} \right), \\ \mathcal{C}_\psi &= \frac{1}{2} e^{-i\circ} \left(\{ \Sigma^> \} \{ G^< \} - \{ \Sigma^< \} \{ G^> \} \right). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Käyttämällä tavanomaisia skalaaribosonien ja fermionien vapaita propagaattoreita

$$\begin{aligned} \Delta^{(0)-1} &= -(\partial_x^2 + M^2) \delta^4(x-y), \\ G^{(0)-1} &= (i\partial_x - m) \delta^4(x-y), \end{aligned} \quad (3.105)$$

saadaan Kadanoffin-Baymin yhtälöt (3.103) edelleen muotoon

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{1}{4} \partial_X^2 + ik \cdot \partial_X - M^2 \right) \Delta^{<, >} - e^{-i\circ} \{ \Pi_h \} \{ \Delta^{<, >} \} - e^{-i\circ} \{ \Pi^{<, >} \} \{ \Delta_h \} &= \mathcal{C}_\phi, \\ \left(\not{k} + \frac{i}{2} \not{\partial}_X - m \right) G^{<, >} - e^{-i\circ} \{ \Sigma_h \} \{ G^{<, >} \} - e^{-i\circ} \{ \Sigma^{<, >} \} \{ G_h \} &= \mathcal{C}_\psi. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Johdetut Kadanoffin-Baymin yhtälöt ovat lopulliset systeemin dynamiikkaa kuvaavat yhtälöt, joiden ratkaisuna saadaan systeemin Wightmanin funktiot $\Delta^{<, >}$ ja $G^{<, >}$ ja edelleen yhtälöiden (3.33) (3.44) kautta kaikki täydet propagaattorit, joiden avulla voidaan laskea melkein mikä tahansa kiinnostava fysikaalinen suure mielivaltaisena ajanhetkenä. Wightmanin funktiot itsessäänkin kertovat paljon systeemin fysiikasta. Niistä saadaan systeemin faasiavaruuden tilajakaumaa kuvaava tiheysmatriisi ja edelleen tietyillä rajoilla yksihiukkastiheydet ja -virrat ja niiden dynamiikka.

Yhtälöt ovat kuitenkin erittäin monimutkaisia integro-differentiaaliyhtälöitä, ja niiden ratkaiseminen ilman mitään approksimaatioita on erittäin vaikeaa. Käytännön laskuissa käytetään yleensä häiriöteoriaa ja lasketaan tiettyyn kvanttikorjauksien \hbar ja vuorovaikutuksia kontrolloivien kytkinvakioiden kertalukuun. Seuraavissa kahdessa luvussa käsitellään Kadanoff-Baym yhtälöitä häiriöteorian alimmissa kertaluvuissa sovellettuna ensin skalaaribosoneihin ja lopulta fermioneihin sähköheikon baryogeneesin yhteydessä.

4. Klassinen Boltzmannin kuljetusyhtälö skalaaribosoneille

Kadanoffin-Baymin yhtälöt (3.103) ovat yleisessä tapauksessa erittäin monimutkaisia. *Klassisella rajalla* yhtälöistä redusoituu kuitenkin tavallinen Boltzmannin kuljetusyhtälö. Tässä klassisella rajalla tarkoitetaan sitä, että kvanttikorjauksia ei huomioida, eli yhtälön termit lasketaan kertalukuun \hbar^0 saakka. Klassinen raja on mielekäs, jos ulkoinen taustakenttä muuttuu hitaasti eli kvantti-ilmiöihin liittyvä *mikroskooppinen skaala*, jonka määrää tyypillinen *Comptonin aallonpituus* $\ell \sim k^{-1}$, on paljon pienempi kuin *makroskooppinen skaala*, jolla ulkoinen kenttä muuttuu ja itse kuljetusilmiöt tapahtuvat. Hitaasti muuttuvan ulkoisen kentän lisäksi klassiseen rajaan sisältyy *heikon kytkennän raja*, jolla tarkoitetaan sitä, että vuorovaikutuksia kontrolloiva kytkinvakio on pieni.

4.1 Hitaasti muuttuva ulkoinen kenttä

Lähdetään liikkeelle skalaaribosonien “retarded”- ja “advanced”-propagaattoreiden yhtälöistä (3.92):

$$\left(\Delta^{(0)-1} - \Pi^{r,a}\right) \odot \Delta^{r,a} = \delta. \quad (3.92)$$

Siirtymällä Wignerin esitykseen saadaan yhtälön (3.101) perusteella

$$e^{-i\circ} \left\{ \Delta^{(0)-1} - \Pi^{r,a} \right\} \left\{ \Delta^{r,a} \right\} = 1. \quad (4.1)$$

Käyttämällä propagaattoreiden $\Delta^{r,a}$ ja itseisenergioiden $\Pi^{r,a}$ hermiittisyysrelaatioita (3.41) ja (3.90) sekä vapaan propagaattorin $\Delta^{(0)}$ hermiittisyyttä saadaan yhtälön (4.1) hermiittiseksi konjugaatiksi

$$e^{i\circ} \left\{ \Delta^{(0)-1} - \Pi^{r,a} \right\} \left\{ \Delta^{r,a} \right\} = 1. \quad (4.2)$$

Summaamalla ja vähentämällä yhtälöt (4.1) ja (4.2) toisistaan saadaan

$$\cos \diamond \left\{ \Delta^{(0)-1} - \Pi^{r,a} \right\} \left\{ \Delta^{r,a} \right\} = 1, \quad (4.3)$$

$$\sin \diamond \left\{ \Delta^{(0)-1} - \Pi^{r,a} \right\} \left\{ \Delta^{r,a} \right\} = 0. \quad (4.4)$$

koska $\cos \diamond$ on parillinen funktio, esiintyy yhtälössä (4.3) vain parillisia \diamond^{2n} - tekijöitä. Näin ollen yhtälön (4.3) ratkaisuksi saadaan iteroimalla

$$\Delta^{r,a} = \left(\Delta^{(0)-1} - \Pi^{r,a} \right)^{-1} + \mathcal{O}(\diamond^2). \quad (4.5)$$

Tämän perusteella saadaan edelleen propagaattoreiden hermiittiselle ja antihermiittiselle osalle alimmassa gradienttikertaluvussa

$$\Delta_h = \frac{1}{2} (\Delta^r + \Delta^a) = \frac{\Delta^{(0)-1} - \Pi_h}{(\Delta^{(0)-1} - \Pi^r)^2 + (\omega\Gamma)^2}, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{A} \equiv \Delta_a = \frac{1}{2} (\Delta^r - \Delta^a) = \frac{\omega\Gamma}{(\Delta^{(0)-1} - \Pi^r)^2 + (\omega\Gamma)^2}, \quad (4.7)$$

missä on määritelty spektraalifunktio $\mathcal{A} \equiv \Delta_a$ ja sirontaleveys Γ siten, että $\Pi_a \equiv \omega\Gamma$. Yhtälöt (4.6) ja (4.7) ovat ratkaisuja Δ_h :lle ja \mathcal{A} :lle vain muodollisesti, sillä itseisenergiat Π_h ja $\Pi_a \equiv \omega\Gamma$ ovat propagaattoreiden monimutkaisia funktioaaleja, niinpä konkreettisten tulosten laskemista varten itseisenergioille on käytettävä approksimaatioita, esimerkiksi laskettava ne vain kytkinvakion alimpiin kertalukuihin.

Varsinainen kuljetusyhtälö johdetaan Kadanoffin-Baymin yhtälöstä (3.96)

$$\left(\Delta^{(0)-1} - \Pi_h\right) \odot \Delta^{<, >} - \Pi^{<, >} \odot \Delta_h = \frac{1}{2} (\Pi^> \odot \Delta^< - \Pi^< \odot \Delta^>),$$

jonka Wignerin muunnos on siis (3.103)

$$\begin{aligned} e^{-i\odot} \{\Delta^{(0)-1} - \Pi_h\} \{\Delta^{<, >}\} - e^{-i\odot} \{\Pi^{<, >}\} \{\Delta_h\} \\ = \frac{1}{2} e^{-i\odot} \left(\{\Pi^>\} \{\Delta^<\} - \{\Pi^<\} \{\Delta^>\} \right). \end{aligned}$$

Ensimmäisessä gradienttikertaluvussa $e^{-i\odot} = (1 - i\odot)$, jolloin yhtälölle (3.103) saadaan

$$\begin{aligned} (1 - i\odot) \{\Delta^{(0)-1} - \Pi_h\} \{\Delta^{<, >}\} - (1 - i\odot) \{\Pi^{<, >}\} \{\Delta_h\} \\ = \frac{1}{2} (1 - i\odot) \left(\{\Pi^>\} \{\Delta^<\} - \{\Pi^<\} \{\Delta^>\} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Summaamalla ja vähentämällä yhtälöt (4.8) ja tämän hermiittinen konjugaatti saadaan

$$-\odot \{\Delta^{(0)-1} - \Pi_h\} \{i\Delta^{<, >}\} + \odot \{i\Pi^{<, >}\} \{\Delta_h\} = \frac{1}{2} (\Pi^> \Delta^< - \Pi^< \Delta^>), \quad (4.9)$$

$$\left(\Delta^{(0)-1} - \Pi_h\right) \Delta^{<, >} - \Pi^{<, >} \Delta_h = -\frac{i}{2} \odot \left(\{\Pi^>\} \{\Delta^<\} - \{\Pi^<\} \{\Delta^>\} \right). \quad (4.10)$$

Yhtälöistä ensimmäinen (4.9) on dynaaminen yhtälö, joka määrää systeemin aikakehityksen. Toinen yhtälö (4.10) on luonteeltaan "rajoiteyhtälö", joka rajoittaa dynaamisen yhtälön ratkaisuja faasiavaruudessa.

4.2 Heikon kytkennän raja

Heikon kytkennän rajalla vuorovaikutuksia kontrolloiva kytkinvakio on pieni, jolloin suuret lasketaan vain kytkinvakion alimpaan kertalukuun. Koska sirontaleveys Γ on kytkinvakiassa korkeampaa kertalukua kuin itseisenergia Π^r , voidaan heikon kytkennän rajalla asettaa konsistentisti $\Gamma \rightarrow 0$. Tällä rajalla spektraalifunktiosta (4.7) tulee singulaarinen

$$\mathcal{A} = \frac{\omega\Gamma}{(\Delta^{(0)-1} - \Pi^r)^2 + (\omega\Gamma)^2} \xrightarrow{\Gamma \rightarrow 0} \mathcal{A}_s = \pi \text{sign}(\omega) \delta(\Delta^{(0)-1} - \Pi_h). \quad (4.11)$$

Singulaarinen hyperpinta määrää termisestä kenttäteoriasta tutun [19] kvasihiukkasten dispersiorelaation

$$\Omega^2 \equiv \Delta^{(0)-1} - \Pi_h = 0 \quad (4.12)$$

eli

$$k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 - \Pi_h(k_0, \vec{k}, X) = 0. \quad (4.13)$$

Yleisesti ottaen dispersiorelaatiolla (4.13) on kaksi eri juurta,

$$k_0 = \omega_k \quad \text{ja} \quad k_0 = -\bar{\omega}_k \quad (\omega_k > 0 \quad \text{ja} \quad \bar{\omega}_k > 0), \quad (4.14)$$

jotka vastaavat hiukkasia ja antihiukkasia. Näiden juurien avulla singulaarinen spektraalifunktio (4.11) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{A}_s = \frac{\pi}{2\omega_k} Z_p \delta(k_0 - \omega_k) - \frac{\pi}{2\bar{\omega}_k} Z_a \delta(k_0 + \bar{\omega}_k), \quad (4.15)$$

missä

$$Z_p = 2\omega_k \left| \frac{\partial \Omega^2}{\partial k_0} \right|_{k_0=\omega_k}^{-1} \quad \text{ja} \quad Z_a = 2\bar{\omega}_k \left| \frac{\partial \Omega^2}{\partial k_0} \right|_{k_0=-\bar{\omega}_k}^{-1}. \quad (4.16)$$

ovat hiukkasten ja antihiukkasten aaltofunktioiden renormalisaatiotekijät.

Hiukkasten ja antihiukkasten voi siten ajatella asuvan heikon kytkennän rajalla hyperpinnan (4.13) määräämällä massakuorella. Tällöin on järkevää tehdä oletus, että kaikissa propagaattoreissa on sama massakuoren δ -funktio, eli esimerkiksi Wightmanin funktiolle $\Delta^<$ voidaan kirjoittaa

$$i\Delta^< = 2\mathcal{A}_s n. \quad (4.17)$$

missä $n(k, X)$ on ei-singulaarinen funktio. Tämän oletuksen järkevyyttä tukee se, että termodynaamisessa tasapainossa Wightmanin funktioille pätee Kubo-Martin-Schwinger reunaehto [19]

$$\Delta^> = e^{\beta(\omega-\mu)} \Delta^<, \quad (4.18)$$

jolloin havaitaan, että funktiosta $n(k, X)$ tulee tavanomainen bosoninen miehityslukufunktio

$$n = \frac{i\Delta^<}{2\mathcal{A}_s} = \frac{\Delta^<}{\Delta^> - \Delta^<} = \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} - 1}. \quad (4.19)$$

Tämän perusteella funktiota $n(k, X)$ voidaan pitää *yleistettynä miehityslukufunktiona*, joka siis kuvaa neli-impulssin k omaavan yksihiukkastilan keskimääräistä miehityslukua aika-avaruuden pisteessä X . Edelleen voidaan tehdä analoginen oletus itseisenergioille:

$$i\Pi^< = 2\omega\Gamma n_\Pi, \quad (4.20)$$

missä $n_\Pi(k, X)$ on ei-singulaarinen funktio.

Oletus (4.17) ei kuitenkaan päde kaikissa tilanteissa. Esimerkiksi kvantti-koherenssiin liittyvät efektit hukkuvat tehtäessä kyseinen oletus, sillä koherenssi ei välttämättä elä triviaalilla massakuorella. Oletusta (4.17) tuleekin pitää *yritteenä*, jonka avulla etsitään dynaamiselle yhtälölle ratkaisuja. Tämä yrite on kuitenkin useimpien ilmiöiden kannalta täysin riittävä ja osoittautuu hyväksi esimerkiksi tarkasteltaessa systeemeitä lähellä termodynaamista tasapainoa.

Käyttämättä yritettä (4.17) täytyisi yhtälöt (4.9) ja (4.10) ratkaista eksplisiitisesti haluttuun kertalukuun kytkinvakiassa sijoittamalla niihin vaadittavat itseisenergiat propagaattoreiden funktioina. Tällöin rajoiteyhtälön ratkaisu $\Delta^<$:lle voi tietyssä tilanteessa olla muotoa (4.17), jolloin päädytään lopulta samanlaiseen klassiseen Boltzmanin yhtälöön kuin tässä luvussa. Välttämättä näin ei kuitenkaan

ole, vaan tarkka rajoiteyhtälön analyysi voi tuoda esille paljon uutta fysiikkaa, kuten juuri kvanttikoherenssi-ilmiot.

Tässä luvussa tarkastellaan kuitenkin Kadanoffin-Baymin yhtälöiden klassista rajaa, jolloin yritteiden (4.17) ja (4.20) käyttö on hyvin perusteltua. Sijoittamalla yritteet yhtälöihin (4.9) ja (4.10) ja käyttämällä identiteettiä

$$\diamond\{f\}\{gh\} = g \diamond\{f\}\{h\} + h \diamond\{f\}\{g\} \quad (4.21)$$

sekä $i\Delta^>$:n ja $i\Delta^<$:n yhtälöiden (4.9) erotuksena saatavaa spektraalifunktion \mathcal{A} yhtälöä

$$- \diamond\{\Delta^{(0)^{-1}} - \Pi_h\}\{\mathcal{A}\} + \diamond\{\omega\Gamma\}\{\Delta_h\} = 0 \quad (4.22)$$

saadaan yhtälöt

$$\mathcal{A}_s \diamond\{\Delta^{(0)^{-1}} - \Pi_h\}\{n\} + \omega\Gamma \diamond\{\Delta_h\}\{n_\Pi\} = \omega\Gamma \mathcal{A}_s(n - n_\Pi), \quad (4.23)$$

$$\left(\Delta^{(0)^{-1}} - \Pi_h\right) \mathcal{A}_s n - \omega\Gamma n_\Pi \Delta_h = \diamond(\{\omega\Gamma n_\Pi\}\{\mathcal{A}_s\} - \{\omega\Gamma\}\{\mathcal{A}_s n\}). \quad (4.24)$$

Edelleen $n_\Pi(k, X)$ on periaatteessa dynaamisen yhtälön ratkaisun $n(k, X)$ monimutkainen funktionaali $n_\Pi[n]$. Kuitenkin yhtälön (4.23) perusteella ratkaisulle saadaan iteroimalla

$$n_\Pi = n + \mathcal{O}(\diamond), \quad (4.25)$$

eli erityisesti termeissä, joissa on jo valmiiksi \diamond -operaattori, pätee 1. gradientti-kertalukuun saakka $n = n_\Pi$. Tämän perusteella yhtälöt (4.23) ja (4.24) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{A}_s \diamond\{\Delta^{(0)^{-1}} - \Pi_h\}\{n\} + \omega\Gamma \diamond\{\Delta_h\}\{n\} = \omega\Gamma \mathcal{A}_s(n - n_\Pi), \quad (4.26)$$

$$\left(\Delta^{(0)^{-1}} - \Pi_h\right) \mathcal{A}_s n - \omega\Gamma n_\Pi \Delta_h = - \diamond\{\omega\Gamma \mathcal{A}_s\}\{n\}. \quad (4.27)$$

Dynaaminen yhtälö (4.26) on nyt muodoltaan varsin yksinkertainen. Yhtälön vasen puoli kuvaa yleistetyn hiukkashuvun n virtausta (k, X) -avaruudessa, ja oikea puoli on vuorovaikutuksista aiheutuva kolliisiotermi. Heikon kytkennän rajalla $\Gamma \rightarrow 0$ dynaamisen yhtälön (4.26) termi $\omega\Gamma \diamond\{\Delta_h\}\{n\}$ on hyvin pieni verrattuna yhtälön muihin termeihin [29] (korkeampaa kertalukua kytkinvakiassa) ja se voidaan pudottaa pois. Näin ollen dynaaminen yhtälö saadaan muotoon

$$\mathcal{A}_s \diamond\{\Delta^{(0)^{-1}} - \Pi_h\}\{n\} = \omega\Gamma \mathcal{A}_s(n - n_\Pi). \quad (4.28)$$

Vastaavasti, käyttämällä $i\Delta^>$:n ja $i\Delta^<$:n yhtälöiden (4.10) erotuksena saatavaa tulosta

$$\left(\Delta^{(0)^{-1}} - \Pi_h\right) \mathcal{A} = \omega\Gamma \Delta_h, \quad (4.29)$$

saadaan rajoiteyhtälölle (4.27)

$$\left(\Delta^{(0)^{-1}} - \Pi_h\right) \mathcal{A}(n - n_\Pi) = - \diamond\{\omega\Gamma \mathcal{A}_s\}\{n\}, \quad (4.30)$$

eli heikon kytkennän rajalla $\Gamma \rightarrow 0$

$$\left(\Delta^{(0)^{-1}} - \Pi_h\right) \mathcal{A}_s(n - n_\Pi) = 0. \quad (4.31)$$

Koska \mathcal{A}_s on nyt singulaarinen funktio (4.11), tämä yhtälö toteutuu identtisesti. Siispä heikon kytkennän rajalla rajoiteyhtälö on yhtäpitävä yrittien (4.17) kanssa. (Tämä ei kuitenkaan sulje pois sitä vaihtoehtoa, että alkuperäisellä rajoiteyhtälöllä (4.10) olisi muitakin ratkaisuja kuin kyseinen yrite.)

Koko tarkasteltavan ongelman ratkaisu palautuu siten yhden dynaamisen yhtälön (4.28) ratkaisemiseen huomioiden hiukkasten dispersiorelaatio (4.13). Tämä dispersiorelaatio voidaan suoraan sisällyttää dynaamiseen yhtälöön integroimalla yhtälöä yli taajuusspektrin. Integroimalla dynaamisen yhtälön vasen puoli eli virtaustermi positiivisten taajuuksien yli saadaan

$$\int_0^\infty \frac{dk_0}{2\pi} \mathcal{A}_s \diamond \{ \Delta^{(0)-1} - \Pi_h \} \{ n \} = -\frac{1}{4} \left(\partial_t + \dot{\vec{x}}_p \cdot \partial_{\vec{x}} + \dot{\vec{k}}_p \cdot \partial_{\vec{k}} \right) f_p, \quad (4.32)$$

missä keskimääräistä aika-avaruuden koordinaattia merkitään $X^\mu \equiv (t, \vec{x})$, hiukkasten miehitysluku f_p määritellään projektiona vastaavalle energia-hyperpinnalle

$$f_p(\vec{k}, X) \equiv n(k_0, \vec{k}, X) \Big|_{k_0=\omega_k} \quad (4.33)$$

ja lisäksi käytetään merkintöjä

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_p &\equiv \partial_{\vec{k}} \omega_k && \text{(ryhmänopeus),} \\ \dot{\vec{k}}_p &\equiv -\partial_{\vec{x}} \omega_k && \text{(klassinen voima).} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Lisäksi yhtälössä (4.32) osittaisderivaatoilla tarkoitetaan derivaattoja pitkin energia-hyperpintaa

$$\partial f_p = [\partial n + (\partial \omega_k) \partial_{k_0}]_{k_0=\omega_k}. \quad (4.35)$$

Vastaavasti integroimalla virtaustermi negatiivisten taajuuksien yli saadaan

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dk_0}{2\pi} \mathcal{A}_s \diamond \{ \Delta^{(0)-1} - \Pi_h \} \{ n \} = \frac{1}{4} \left(\partial_t + \dot{\vec{x}}_a \cdot \partial_{\vec{x}} + \dot{\vec{k}}_a \cdot \partial_{\vec{k}} \right) f_a, \quad (4.36)$$

missä f_a on antihiukkasten miehitysluku

$$f_a(\vec{k}, X) \equiv -[1 + n(k_0, -\vec{k}, X)]_{k_0=-\bar{\omega}_k} \quad (4.37)$$

ja vastaavat antihiukkasten ryhmänopeus ja semiklassinen voima ovat

$$\dot{\vec{x}}_a \equiv \partial_{\vec{k}} \bar{\omega}_k \quad \text{ja} \quad \dot{\vec{k}}_a \equiv -\partial_{\vec{x}} \bar{\omega}_k. \quad (4.38)$$

Antihiukkasten miehityslukufunktion oikea muoto (4.37) saadaan selville tarkastelemalla termodynaamista tasapainoa. Tällöin yleinen miehityslukufunktio on (4.19)

$$n(k_0, \vec{k}, X) = \frac{1}{e^{\beta(k_0-\mu)} - 1}.$$

Feynman-Stuckelbergin tulkinnan perusteella negatiivisen energian ratkaisut ovat antihiukkasia ja näin ollen on oltava

$$f_a(\bar{\omega}_k, \vec{k}, X) \propto n(-\bar{\omega}_k, -\vec{k}, X). \quad (4.39)$$

Termodynaamisessa tasapainossa saadaan nyt

$$n(-\bar{\omega}_k, -\vec{k}, X) = \frac{1}{e^{-\beta(\bar{\omega}_k+\mu)} - 1}, \quad (4.40)$$

mikä ei eksponentissa olevan “-” -merkin takia ole oikea muoto antihiukkasten miehityslukufunktiolle. Kuitenkin

$$-\left[1 + n(-\bar{\omega}_k, -\vec{k}, X)\right] = -\frac{e^{-\beta(\bar{\omega}_k + \mu)}}{e^{-\beta(\bar{\omega}_k + \mu)} - 1} = \frac{1}{e^{\beta(\bar{\omega}_k + \mu)} - 1}, \quad (4.41)$$

mikä on etsitty oikea muoto antihiukkasten miehityslukufunktiolle termodynaamisessa tasapainossa. Tämän argumentin perusteella (4.37) todella on oikea määritelmä yleistetyille antihiukkasten miehityslukufunktiolle.

Dynaamisen yhtälön (4.28) oikean puolen eli kolliisiotermin integraali taajuusspektrin yli antaa hiukkasten ja antihiukkasten kolliisiointegraalit, joiden eksplisiittinen muoto riippuu tarkasteltavan systeemin vuorovaikutusten Lagrangen funktiosta. Tavanomaisen neliöllisen vuorovaikutuksen

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4} \left(\phi(x) \phi^\dagger(x) \right)^2 \quad (4.42)$$

tapauksessa hiukkasten kolliisiointegraalille saadaan käyttämällä trunkaatiota, jossa eksakti redusoitumaton 4-pistefunktio lasketaan häiriöteorian alimmassa kertaluvussa kytkinvakion suhteen, seuraava lauseke [29]:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{coll}}[f_p(k)] &\equiv -4 \int_0^\infty \frac{dk_0}{2\pi} \omega \Gamma \mathcal{A}_s(n - n_\Pi) \\ &= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2\omega_{p'}} (2\pi)^3 \delta^3(k + p - k' - p') |\mathcal{M}|^2 \\ &\quad \times \left[f_p(k) f_p(p) (1 + f_p(k')) (1 + f_p(p')) - (k \leftrightarrow k'; p \leftrightarrow p') \right] + \dots, \end{aligned} \quad (4.43)$$

missä matriisielementti

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{\lambda^2}{2} Z_p(k) Z_p(p) Z_p(k') Z_p(p') \quad (4.44)$$

sisältää hiukkasten aaltofunktion renormalisaatiotekijät (4.16). Hiukkasten kolliisiointegraalissa (4.43) on kirjoitettu auki vain hiukkas-hiukkasvuorovaikutusten kontribuutio. Vastaavanlainen termi tulee hiukkas-antihiukkasvuorovaikutuksista.

Lopulliseksi *klassiseksi Boltzmannin kuljetusyhtälöksi* saadaan hiukkasten tapauksessa näin ollen

$$\left(\partial_t + \dot{\vec{x}}_p \cdot \partial_{\vec{x}} + \dot{\vec{k}}_p \cdot \partial_{\vec{k}} \right) f_p = \mathcal{C}_{\text{coll}}[f_p(\vec{k}, X)]. \quad (4.45)$$

Antihiukkasten kolliisiointegraali saadaan vastaavalla tavalla integroimalla kolliisiotermi negatiivisten taajuuksien yli, ja se on muodoltaan täysin identtinen yhtälön (4.43) kanssa ja saadaan siitä korvaamalla $\omega_k \rightarrow \bar{\omega}_k$ ja $f_p \rightarrow f_a$. Siten myös lopullinen Boltzmannin kuljetusyhtälö antihiukkasille saadaan korvaamalla hiukkasten kuljetusyhtälössä (4.45) $\omega_k \rightarrow \bar{\omega}_k$ ja $f_p \rightarrow f_a$.

Klassinen Boltzmannin yhtälö skalaaribosoneille (4.45) saatiin siis johdettua tarkastelemalla Kadanoffin-Baymin yhtälöitä (3.103) hitaasti muuttuvan ulkoisen

kentän ja heikon kytkennän rajalla huomioimatta kvanttikorjauksia eli laskemalla termit kertalukuun \hbar^0 saakka. Tällöin systeemin virityksiin liittyvät kvasihiukkaset ovat oleellisesti massakuorellaan ja yhtälö voidaan lausua yhden tuntemattoman funktion avulla, joka lopulta tulkitaan yleistetyksi miehityslukufunktioksi.

Klassisen Boltzmannin yhtälön yleistäminen tarkoittaa kvanttikorjausten huomioimista. *Semiklassisella rajalla* huomioidaan ulkoisen kentän muutoksesta aiheutuvat \hbar :aan verrannolliset kvanttikorjaukset. Osoittautuu, että bosonisessa tapauksessa näitä ei kuitenkaan ole, ja jos mennään vielä pidemmälle \hbar^2 :een verrannollisiin korjauksiin, ei kvasihiukkas-massakuoriraja enää toteudu eikä kuljetusyhtälöitä saada Boltzmannin yhtälön muotoon. Sen sijaan fermioneilla esiintyy \hbar :aan verrannollisia semiklassisia kvanttikorjauksia, jotka eivät muuta Boltzmannin yhtälön muotoa (4.45), vaan aiheuttavat ainoastaan \hbar :aan verrannollisia korjaustermejä ryhmänopeuden ja voiman lausekkeisiin (4.34). Seuraavassa luvussa siirrytäänkin tarkastelemaan fermioneita semiklassisella rajalla.

5. Semiklassinen Boltzmannin kuljetusyhtälö fermioneille

Tässä luvussa tarkastellaan Kadanoffin-Baymin kvanttikuljetusyhtälöiden avulla fermionien dynamiikkaa semiklassisella rajalla, eli klassisen rajan lisäksi huomioidaan ulkoisen kentän muutoksesta aiheutuvat \hbar :aan verrannolliset termit. Nämä semiklassiset korjaustermit ovat erityisen tärkeitä sähköheikon baryogeneesin kannalta, sillä CP -rikkovat efektit tulevat mukaan juuri kertaluvussa \hbar , kuten myöhemmin havaitaan. CP -rikkovien efektien kvalitatiivisella tarkastelulla voidaan ymmärtää, miten fermionien- ja antifermionien välinen lähde-epäsymmetria ja siten baryonilukua generoiva epätriviaali kemiallinen potentiaali μ_{diff} muodostuvat sähköheikossa faasitransitiossa. Tämän kemiallisen potentiaaliin muodostumiseen vaikuttavat myös muut CP -rikkovat efektit, joita esiintyy mm. Higgsin skalaaribosoneilla, mutta fermionien kontribuutio on selvästi dominoiva ja sen vuoksi nimenomaan fermionien CP -rikkovien efektien tarkastelu on baryogeneesin kannalta olennaisinta.

Todellisessa supersymmetriaan perustuvassa mallissa tärkeimmät CP -rikkovat efektit tulevat raskaista fermioneista, joita ovat kvarkit sekä neutraliinit ja chargiinit, jotka ovat Higgsin skalaaribosonien ja mittabosonien supersymmetrisia vastinhiukkasia. Kaikissa tapauksissa eri fermionimaut sekoittuvat keskenään ja niihin liittyvät massamatriisit sisältävät toisaalta Yukawa-kytkennöistä Higgsin skalaarikentän odotusarvon kanssa (luku 2) tulevia reaalisia kontribuutiota (2.20) ja toisaalta supersymmetrian rikkoutumisesta aiheutuvia mahdollisesti kompleksisia kontribuutioita. Sähköheikossa faasitransitiossa kuplan reuna-alueella Higgsin kentän vakuuiodotusarvo on paikasta riippuva suure. Näin ollen sekoittuviin fermioneihin liittyvät massamatriisit ovat kuplan reuna-alueella sekä kompleksisia että paikasta riippuvia.

Baryogeneesin CP -rikkovien efektien kvalitatiivisen tarkastelun kannalta fermionimakujen sekoittuminen ei kuitenkaan ole oleellista. Niinpä tiettyyn fermioniryhmään (kuten kvarkit) liittyvän baryogeneesin kannalta olennaisen dynamiikan tarkastelussa riittää tässä tutkia massamatriisin ominaistiloja. Koska massamatriisi on kuplan reuna-alueella kompleksinen ja paikasta riippuva, myös sen ominaisarvot ovat kompleksisia ja paikasta riippuvia. Tiettyä massamatriisin ominaistilaa vastaavan fermionin dynamiikkaa kuvaa siten kvalitatiivisesti oikein efektiivinen Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \bar{\psi}_L m \psi_R - \bar{\psi}_R m^* \psi_L + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (5.1)$$

missä \mathcal{L}_{int} sisältää tarkasteltavan fermionin vuorovaikutukset, ja

$$m(x) = m_R(x) + im_I(x) = |m(x)|e^{i\theta(x)} \quad (5.2)$$

on kompleksinen avaruusajan paikasta riippuva massa. Massatermit voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} -\bar{\psi}_L m \psi_R - \bar{\psi}_R m^* \psi_L &= -\bar{\psi} (P_R m + P_L m^*) \psi \\ &= -\bar{\psi} (m_R + i\gamma^5 m_I) \psi, \end{aligned} \quad (5.3)$$

jolloin Lagrangen tiheydeksi (5.1) saadaan

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \bar{\psi} (m_R + i\gamma^5 m_I) \psi + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (5.4)$$

Tarkastellaan tästä eteenpäin tilannetta, jossa fermioneilla ei ole muita vuorovaikutuksia kuin Yukawa-kytkentä Higgsin kentän odotusarvon kanssa, joka aiheuttaa fermionien muuttuvan massan. Tämä on hyvä approksimaatio tutkittaessa dominoivia, puhtaasti muuttuvan massan aiheuttamia CP -rikkovia efektejä. Fermioneihin liittyvät dispersiorelaatiot ja niihin liittyvä dynamiikka, kuten ryhmänopeudet, saadaan alimmassa epätriviaalissa kertaluvussa huomioimatta vuorovaikutuksia.

5.1 Semiklassinen WKB-approksimaatio

Alunperin fermionien kuljetusilmiötä sähköheikossa faasitransitiossa tarkasteltiin semiklassisessa WKB-approksimaatiossa, jossa hiukkasplasman yksihiukkastiloille johdetaan Diracin yhtälö, joka sitten ratkaistaan WKB-yritteellä.

Lagrangen tiheyden (5.4) perusteella tarkasteltavan fermionin vapaaksi propagaattoriksi saadaan

$$G^{(0)-1} = (i\not{\partial}_x - m_R - i\gamma^5 m_I) \delta^4(x - y), \quad (5.5)$$

ja edelleen Diracin yhtälöksi ilman vuorovaikutuksia

$$(i\not{\partial}_x - m_R - i\gamma^5 m_I) \psi = 0, \quad (5.6)$$

Sähköheikossa faasitransitiossa laajenevat kuplat ovat tyypillisesti hyvin suuria verrattuna muihin oleellisiin fysikaalisiin etäisyyksiin, joten kuplan reuna-alueella vallitsee hyvänä approksimaationa tasosymmetria, eli massat $m_{R(I)}(x)$ ja aaltofunktio $\psi(x)$ riippuvat vain yhdestä paikkakoordinaatista (z -koordinaatti), joka on kuplan reunaa vastaan kohtisora koordinaatti. Näin tarkasteltava tilanne reduoituu avaruusajassa 1+1 - ulotteiseksi ja Diracin yhtälöksi saadaan

$$(i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^3 \partial_z - m_R - i\gamma^5 m_I) \psi(t, z) = 0. \quad (5.7)$$

Kuplan reunan mukana liikkuvassa koordinaatistossa massa m ei riipu ajasta ja tilanne on näin ollen staattinen. Tällöin aaltofunktion aikariippuvuus separoituu $\psi(t, z) = e^{-ik_0 t} \psi(k_0, z)$ ja Diracin yhtälö saadaan muotoon

$$(\gamma^0 k_0 + i\gamma^3 \partial_z - m_R - i\gamma^5 m_I) \psi(k_0, z) = 0. \quad (5.8)$$

Yhtälön (5.8) differentiaalioperaattori $D_{\text{Dirac}} \equiv \gamma^0 k_0 + i\gamma^3 \partial_z - m_R - i\gamma^5 m_I$ kommutoi z -suuntaisen spin-operaattorin $S^3 = \gamma^0 \gamma^3 \gamma^5$ kanssa. Näin ollen spin on hyvä kvanttiluku ja aaltofunktio voidaan kirjoittaa kiraali- ja spin-vapausasteiden suoraan tulona

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} L_s \\ R_s \end{pmatrix} \otimes \chi^s, \quad (5.9)$$

missä χ^s :t ovat Paulin spin-matriisin σ_3 ominaisspinorit. Tällöin Diracin yhtälöstä (5.8) saadaan kaksi kytkettyä yhtälöä

$$\begin{aligned} (k_0 - is\partial_z) L_s &= m R_s, \\ (k_0 + is\partial_z) R_s &= m^* L_s. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ratkaisemalla yleimmästä yhtälöstä R_s ja sijoittamalla se alempaan saadaan

$$\left((k_0 + is\partial_z) \frac{1}{m} (k_0 - is\partial_z) - m^* \right) L_s = 0. \quad (5.11)$$

Yhtälö (5.11) voidaan ratkaista WKB-approksimaation yritteellä

$$L_s \equiv u_s e^{i \int^z k_c(z') dz'}. \quad (5.12)$$

Tällöin saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} k_0^2 - k_c^2 - |m|^2 + (sk_0 + k_c)\theta' + \frac{u_s''}{u_s} - \frac{|m|' u_s'}{|m| u_s} &= 0, \\ k_c' + (2k_c - \theta') \frac{u_s'}{u_s} - (sk_0 + k_c) \frac{|m|'}{|m|} &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Yhtälöparista voidaan helposti ratkaista iteratiivisesti k_c ja u_s ensimmäiseen kertalukuun saakka massan derivaatoissa $|m|'$ ja θ' . Tulokseksi saadaan [30]

$$\psi_s = \frac{|m|}{\sqrt{2k_s^+(k_0 + sp_0)}} \left(\frac{1}{\frac{k_0 + sp_s^+}{|m|}} \right) \otimes \chi^s e^{i \int \tilde{p}_s + i\theta 2\gamma^5 + i\alpha'}, \quad (5.14)$$

ja

$$k_c = k_0 + s_{\text{CP}} \frac{sk_0 + p_0}{2p_0} \theta' + \alpha', \quad (5.15)$$

missä $p_0 \equiv \text{sign}(k_c) \sqrt{k_0^2 - |m|^2}$, $\tilde{p}_s \equiv p_0 + sk_0\theta'/(2p_0)$, $p_s^+ \equiv \tilde{p}_s + \theta'/2$ ja $s_{\text{CP}} = \pm 1$ hiukkasille / antihiukkasille vastaavasti. Mielivaltainen skalaarifunktio $\alpha'(z)$ on seurausta kenttään ψ liittyvästä mittavapaudesta. Toisin sanoen systeemin fysiikka ei muutu tehtäessä mittamuunnos $\psi \rightarrow e^{i\alpha(z)}\psi$, jonka johdosta $k_c \rightarrow k_c + \alpha$. Koska liikemäärä k_c on mittariippuva suure, se ei voi vastata fysikaalista liikemäärää. Se tuleeikin tulkita WKB-aaltopaketin *kanoniseksi liikemääräksi*. Yhtälö (5.15) voidaan kääntää, jolloin saadaan

$$k_0 \simeq \sqrt{\left(k_c - s_{\text{CP}} \frac{s\theta'}{2} \right)^2 + |m|^2} - s_{\text{CP}} \frac{s\theta'}{2}. \quad (5.16)$$

Tästä saadaan aaltopaketin ryhmänopeus

$$v_g \equiv \partial_{k_c} k_0 = \frac{1}{k_0} \left(p_0 + s_{\text{CP}} \hbar \frac{s|m|^2\theta'}{2p_0 k_0} \right), \quad (5.17)$$

jossa \hbar -riippuvuus on nyt kirjoitettu näkyviin. Hiukkasten *fysikaalinen liikemäärä* määritellään ryhmänopeuden avulla $k_z \equiv k_0 v_g$, joten yhtälön (5.17) perusteella saadaan

$$k_z = p_0 + s_{\text{CP}} \hbar \frac{s|m|^2\theta'}{2p_0 k_0}. \quad (5.18)$$

Tämä on mittariippumaton suure, niin kuin pitääkin. Edelleen hiukkasiin kohdistuva *semiklassinen voima* määritellään $F_z \equiv \dot{k}_z$. Tälle saadaan yhtälön (5.18) perusteella

$$F_z = -\frac{|m|^{2'}}{2k_0} + s_{\text{CP}} \hbar \frac{s(|m|^2\theta)'}{2k_0^2}. \quad (5.19)$$

Semiklassisella rajalla fermioneille voidaan johtaa täysin saman muotoinen Boltzmannin kuljetusyhtälö kuin bosoneille klassisella rajalla (4.45), jossa esiintyvät edellä johdetut \hbar -riippuvat ryhmänopeus ja semiklassinen voima. Kolliisiottomassa tapauksessa Boltzmannin yhtälöksi saadaan hiukkasten ja antihiukkasten tapauksissa

$$\partial_t f_{s\pm} + v_g \partial_z f_{s\pm} + F_z \partial_{k_z} f_{s\pm} = 0, \quad (5.20)$$

missä $f_{s\pm}(k, x)$ on spinin s omaavan hiukkasen / antihiukkasen keskimääräinen miehitysluku faasiavaruuden pisteessä (k, x) . Edelleen voidaan laskea yhden WKB-hiukkasen nelivirta $j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$. Yhtälön (5.14) perusteella saadaan

$$j_{p,s}^\mu = \left(\frac{1}{v_g}, \hat{\mathbf{k}} \right), \quad (5.21)$$

missä $\hat{\mathbf{k}}$ on kolmiulotteinen liikemäärän suuntainen yksikkövektori. Virran lausekkeessa (5.21) on palautettu kuplan reunaan vastaan kohtisuora liike tekemällä reunan suuntainen Lorentz-muunnos. Todellinen, termisen hiukkasjoukon aiheuttama virta saadaan yhden hiukkasen virran termisenä keskiarvona. Näin saadaan spinin s omaavien hiukkasten ja antihiukkasten virroiksi

$$j_{s\pm}^\mu \equiv \langle \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \rangle = \sum_{\text{sign}(k_z)=\pm 1} \text{sign}(k_z) \int \frac{k_{\parallel}^2 dk_{\parallel} d\omega}{2\pi^2} \left(\frac{1}{v_g}, \hat{\mathbf{k}} \right) f_{s\pm}, \quad (5.22)$$

missä k_{\parallel} tarkoittaa poikkisuuntaisen liikemäärän suuruutta.

Näiden tulosten perusteella voidaan ymmärtää, miten hiukkasten ja antihiukkasten välinen lähde-epäsymmetria muodostuu kuplan reuna-alueelle. CP -rikkovan voiman (5.19) vaikutuksesta hiukkasille ja antihiukkasille muodostuu kuplan reuna-alueella eri suuret ryhmänopeudet, kuten ryhmänopeuden lausekkeesta (5.17) on havaittavissa. Kuplan reunan eteneminen on vakionopeudella tapahtuva stationaarinen prosessi. Niinpä kuplan reunan koordinaatistossa hiukkasten ja antihiukkasten tiheysjakaumat muodostuvat staattisiksi. Tämän perusteella jokaisessa pisteessä kuplan reuna-alueella hiukkasten ja antihiukkasten voidaan täytyä olla yhtä suuret. Vuon antaa nelivirran (5.22) kolmiulotteinen osa, joka selvästi onkin paikasta riippumaton ja sekä hiukkasille että antihiukkasille sama. Koska ryhmänopeudet ovat kuitenkin paikasta riippuvat ja erisuuret hiukkasille ja antihiukkasille, täytyy vastaavien tiheyksien kompensoida tämä erisuuruus. Nelivirran (5.22) 0-komponentin eli tiheyden lausekkeen perusteella yksihiukkastiheys onkin juuri ryhmänopeuden käänteisluku, jolloin vuo eli tiheyden ja nopeuden tulo on luonnollisesti vakio. Toisin sanoen paikassa, jossa nopeus on suurempi, täytyy tiheyden olla pienempi, ja päinvastoin.

Nelivirran (5.22) 0-komponentti antaa siis hiukkasten ja antihiukkasten tiheydet kussakin avaruuden pisteessä. Siten alueella, jossa hiukkasilla on keskimäärin suurempi ryhmänopeus kuin antihiukkasilla, vastaavasti hiukkasten tiheys on pienempi kuin antihiukkasten tiheys, ja päinvastoin. Tällä tavalla lähde-epäsymmetrian muodostuminen on helposti ymmärrettävissä. Todellisen kuvan 2.5 mukaisen tiheysprofiilin laskeminen vuorovaikuttavassa systeemissä edellyttää jakaumafunktion f ja sitä kautta Boltzmannin kuljetusyhtälön (5.20) ratkaisemista. Tavallisesti Boltzmannin yhtälöstä muodostetaan diffuusioyhtälöiden ryhmä, josta kiinnostavat suureet voidaan ratkaista [30]. Tällä tavalla saadaan

lopulta laskettua hiukkasiin ja antihiukkasiin liittyvät sfaleroni-siirtymiä biasoivat kemialliset potentiaalit (2.48), joiden kautta lopullinen baryogeneesin tulos, eli muodostuva hiukas-antihiukkasepäsymmetria, on laskettavissa.

WKB-aproksimaation rajoituksena on kuitenkin oletus, että plasmaa voidaan kuvata yksihiukkastilojen avulla. Parempi tapa käsitellä systeemin dynamiikkaa on käyttää fundamentaaleja Kadanoffin-Baymin yhtälöitä, joissa ei tehdä mitään oletuksia plasman tilarakenteesta.

5.2 Fermioninen Kadanoffin-Baymin yhtälö ilman vuorovaikutuksia

Vapaan propagaattorin (5.5) perusteella fermioninen Kadanoffin-Baymin yhtälö (3.103) Wignerin esityksessä saadaan muotoon

$$\left(\hat{k} + \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_x - m_R e^{-\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_x \cdot \partial_k} - i \gamma^5 m_I e^{-\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_x \cdot \partial_k} \right) G^{<, >} - e^{-i\phi} \{ \Sigma_h \} \{ G^{<, >} \} - e^{-i\phi} \{ \Sigma^{<, >} \} \{ G_h \} = \mathcal{C}_\psi, \quad (5.23)$$

missä kolliisiotermi on

$$\mathcal{C}_\psi = \frac{1}{2} e^{-i\phi} \left(\{ \Sigma^> \} \{ G^< \} - \{ \Sigma^< \} \{ G^> \} \right). \quad (5.24)$$

Merkintä $\overleftarrow{\partial}_x$ eksponenteissa tarkoittaa, että derivointi osuu operaattorin vasemmassa puolella olevaan massaan.

Tarkastellaan yhtälöä (5.23) tilanteessa, jossa fermionin vuorovaikutuksia ei huomioida. Tällöin itseisenergiat Σ ja näin ollen niistä riippuvat kolliisiotermi (5.24) sekä kaksi muuta yhtälön (5.23) termiä häviävät ja yhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$\left(\hat{k} - \hat{m}_0(x) - i \hat{m}_5(x) \gamma^5 \right) G^<(x, k) = 0, \quad (5.25)$$

missä käytetään operaattoreille lyhennysmerkintää

$$\begin{aligned} \hat{k}_\mu &\equiv k_\mu + \frac{i}{2} \partial_\mu, \\ \hat{m}_{0(5)} &\equiv m_{R(I)} e^{-\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_x \cdot \partial_k}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Yhtälöstä (5.25) tekee edelleen monimutkaisen se, että massaan liittyvät differentiaalioperaattorit $\hat{m}_{0(5)}$ sisältävät derivaattoja eksponentissa, eli sarjamuotoon kirjoitettuna massan paikka-derivaattoja ja samalla tuntemattoman Greenin funktion $G^<(x, k)$ impulssi-derivaattoja esiintyy äärettömään kertalukuun saakka. Kyseinen Kadanoffin-Baymin yhtälö (5.25) on siten äärettömän kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö. Gradienttiekspansio massojen $m_{R(I)}$ paikka-derivaattojen suhteen on samalla \hbar -ekspansio, sillä käytettäessä normaaleja yksiköitä täytyy korvata

$$\partial_x \rightarrow \hbar \partial_x \quad \text{ja} \quad G^< \rightarrow \hbar^{-1} G^<. \quad (5.27)$$

Oletetaan jälleen tasosymmetria, mikä on hyvä approksimaatio kuplan reuna-alueella. Tällöin massat $m_{R(I)}(x)$ ja Greenin funktio $G^<(x, k)$ riippuvat vain kuplan reunaa vastaan kohtisorasta paikkakoordinaatista (z -koordinaatti). Kuplan

reunan eteneminen on stationaarinen prosessi, eli se tapahtuu vakionopeudella, jolloin hiukkasplasman koordinaatistossa (plasma frame) massafunktiot ovat muotoa $m_{R(I)}(t, z) = m_{R(I)}(z - v_W t)$, missä v_W on kuplan reunan etenemisnopeus. Aika-riippuvuudesta päästään kokonaan eroon siirtymällä kuplan reunan koordinaatistoon (wall frame), jossa massat $m_{R(I)}$ ja sitä kautta greenin funktiot g_α^s eivät riipu ajasta eli tilanne on täysin staattinen. Tekemällä edelleen kuplan reunan suuntainen Lorentz-muunnos saadaan poikkisuuntaiset liikemäärät häviämään $\vec{k}_\parallel = 0$, jolloin tarkasteltava tilanne redusoituu 1+1 - ulotteiseksi ja Kadanoffin-Baymin yhtälö saadaan muotoon [31]

$$\left(\hat{k}_0 \gamma^0 - \hat{k}_z \gamma^3 - \hat{m}_0 - i \hat{m}_5 \gamma^5\right) G_\parallel^<(z, k_0, k_z) = 0, \quad (5.28)$$

missä muunnettu Wightmanin funktio on

$$G_\parallel^< = L(\Lambda) G^< L(\Lambda)^{-1}, \quad (5.29)$$

ja

$$L(\Lambda) = \frac{k_0 + \tilde{k}_0 - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{k}_\parallel}{\sqrt{2\tilde{k}_0(k_0 + \tilde{k}_0)}}, \quad \tilde{k}_0 = \text{sign}(k_0) \sqrt{k_0^2 - \vec{k}_\parallel^2} \quad (5.30)$$

on vastaava Lorentz-muunnosmatriisi. Edelleen $\hat{k}_0 = k_0 + \frac{i}{2} \partial_0$ ja $\hat{k}_z = k_z - \frac{i}{2} \partial_z$, missä k_0 ja k_z ovat nyt normaaleja kontravariantteja komponentteja ja \vec{k}_\parallel on poikkisuuntainen liikemäärävektori. Yhtälön (5.28) voi kirjoittaa hermiittisen Greenin funktion $i\gamma^0 G^<$ avulla muodossa [32]

$$\left(\hat{k}_0 + \hat{k}_z \gamma^0 \gamma^3 - \hat{m}_0(z) \gamma^0 + i \hat{m}_5(z) \gamma^0 \gamma^5\right) i\gamma^0 G_\parallel^< = 0, \quad (5.31)$$

missä 2. ja 4. termin merkit ovat vaihtuneet γ -matriisien antikommutoinnin vuoksi. Yhtälön (5.31) differentiaalioperaattori $D \equiv \hat{k}_0 + \hat{k}_z \gamma^0 \gamma^3 - \hat{m}_0(z) \gamma^0 + i \hat{m}_5(z) \gamma^0 \gamma^5$ kommutoi z -suuntaisen spin-operaattorin $S^3 = \gamma^0 \gamma^3 \gamma^5$ kanssa. Tämä merkitsee sitä, että jos $i\gamma^0 G_\parallel^<$ on yhtälön (5.31) ratkaisu, myös $S^3 i\gamma^0 G_\parallel^<$ on kyseisen yhtälön ratkaisu. Kuitenkin kuljetusyhtälöllä (5.31) on reunaehdot tuntien oltava yksikäsitteinen ratkaisu. Näin ollen täytyy olla $S^3 i\gamma^0 G_\parallel^< = s i\gamma^0 G_\parallel^<$ eli ratkaisun $i\gamma^0 G_\parallel^<$ on oltava spin-operaattorin S^3 ominaistila.

Weylin esityksessä γ -matriisit ovat muotoa

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

missä 2x2-matriisit σ^i ovat Paulin spin-matriiseja

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

γ -matriisit voidaan ilmaista σ -matriisien suorina tuloina:

$$\gamma^0 = \sigma^1 \otimes 1_2, \quad \gamma^3 = i\sigma^2 \otimes \sigma^3, \quad \gamma^5 = -\sigma^3 \otimes 1_2. \quad (5.34)$$

Näin ollen spin-operaattorille saadaan suorana tulona esitys $S^3 = \gamma^0 \gamma^3 \gamma^5 = 1_2 \otimes \sigma^3$. Selvästi tämän operaattorin ominaistilan on oltava muotoa $i\gamma^0 G_\parallel^< = g_s^< \otimes A_s$,

missä 2x2-matriisi $g_s^<$ on mielivaltainen ja 2x2-matriisille A_s pätee $\sigma^3 A_s = s A_s$, missä s on vastaava ominaisarvo. Mielivaltainen 2x2-matriisi voidaan ilmaista Paulin σ -matriisien ja ykkösmatriisin 1_2 lineaarikombinaationa kompleksisin kertoimin, eli A_s voidaan kirjoittaa muodossa $A_s = a_0 1_2 + a_i \sigma^i$. Sijoittamalla tämä ominaisyhtälöön $\sigma^3 A_s = s A_s$ saadaan helposti ratkaisu $A_s = a_0 (1 + s \sigma^3)$, missä a_0 on mielivaltainen kopleksiluku ja vastaavat ominaisarvot ovat $s = \pm 1$. Valitsemalla $a_0 = 1/2$ voidaan yhtälön (5.31) ratkaisu kirjoittaa lopulta suorana tulona muodossa

$$i\gamma^0 G_{||s}^< = g_s^< \otimes \frac{1}{2} (1 + s \sigma^3), \quad (5.35)$$

missä $g_s^<$ on tuntematon 2x2-matriisi. Sijoittamalla (5.35) yhtälöön (5.31) ja käyttämällä γ -matriiseille suoria tuloja (5.34), joiden perusteella operaattorissa D olevat matriisit ovat

$$\gamma^0 = \sigma^1 \otimes 1_2, \quad \gamma^0 \gamma^3 = -\sigma^3 \otimes \sigma^3, \quad i\gamma^0 \gamma^5 = -\sigma^2 \otimes 1_2, \quad (5.36)$$

saadaan matriisille $g_s^<$ yhtälö

$$\left(\hat{k}_0 - s \hat{k}_z \sigma^3 - \hat{m}_0(z) \sigma^1 - \hat{m}_5(z) \sigma^2 \right) g_s^< = 0. \quad (5.37)$$

Edelleen, koska ratkaisun $i\gamma^0 G^<$ on oltava hermiittinen ja suoran tulon toinen osa 2x2-matriisi $\frac{1}{2} (1 + s \sigma^3)$ on hermiittinen, täytyy myös matriisin $g_s^<$ olla hermiittinen. Hermiittinen 2x2-matriisi voidaan kirjoittaa Paulin σ -matriisien ja ykkösmatriisin 1_2 lineaarikombinaationa, jonka kertoimet ovat *reaaliset*, eli

$$g_s^< = \frac{1}{2} (g_0^s + g_i^s \sigma^i), \quad (5.38)$$

missä $g_\mu^s(z, k_0, k_z)$:t ovat reaalisia funktioita. Sijoittamalla tämä muoto yhtälöön (5.37) ja kertomalla vuorotellen matriiseilla 1_2 ja $\sigma^i, i = 1, 2, 3$ ja ottamalla saaduista neljästä matriisiyhtälöstä jäljet, saadaan neljä kompleksiarvoista yhtälöä

$$\begin{aligned} \hat{k}_0 g_0^s - s \hat{k}_z g_3^s - \hat{m}_0 g_1^s - \hat{m}_5 g_2^s &= 0, \\ \hat{k}_0 g_3^s - s \hat{k}_z g_0^s - i \hat{m}_0 g_2^s + i \hat{m}_5 g_1^s &= 0, \\ \hat{k}_0 g_1^s + i s \hat{k}_z g_2^s - \hat{m}_0 g_0^s - i \hat{m}_5 g_3^s &= 0, \\ \hat{k}_0 g_2^s - i s \hat{k}_z g_1^s + i \hat{m}_0 g_3^s - \hat{m}_5 g_0^s &= 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Yhtälöryhmässä (5.39) on 8 riippumatonta reaalista yhtälöä, yhtälöiden reaali- ja imaginaariosat. Koska $g_\mu^s(z, k_0, k_z)$:t ovat reaalisia, on tuntemattomia funktioita kuitenkin vain 4. Tilanne voi siten vaikuttaa ylideterminoidulta. Näin ei kuitenkaan ole, sillä yhtälöt ovat osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, joissa on derivaattoja sekä paikan että liikemäärän suhteen. Siten esimerkiksi yhtälö, jossa on derivaattoja vain liikemäärän suhteen, ei määrää tuntemattomien funktioiden paikkariippuvuutta millään tavalla, ja päinvastoin.

Kuten differentiaalioperaattorien \hat{m}_0 ja \hat{m}_5 lausekkeista (5.26) havaitaan, yhtälöt (5.39) ovat äärettömän kertaluvun differentiaaliyhtälöitä derivaatan ∂_k suhteen. Tämä on juuri edellä mainittu gradienttiekspansio, joka siis on ekvivalentisti \hbar -ekspansio. Tarkastellaan seuraavassa rajaa, jossa kuplien reunat ovat

leveitä eli fermionien tyypillinen de Broglie aallonpituus ℓ_{dB} on pieni verrattuna verrattuna reunan leveyteen

$$\ell_{\text{dB}} \ll \ell_{\text{W}}. \quad (5.40)$$

Tämä ehto toteutuu suhteellisen hyvin sähköheikossa faasitransitiossa, jossa tyypillisesti $\ell_{\text{dB}} \sim 1/T$ ja $\ell_{\text{W}} \sim 10/T$ (2.34). Tarkastellaan yhtälöitä (5.39) tällä rajalla alimmassa epätriviaalissa kertaluvussa eli 1. gradienttikertaluvussa, joka vastaa juuri semiklassista rajaa eli kertalukua \hbar . Tällöin saadaan differentiaalioperaattoreille

$$\hat{m}_{0(5)} \simeq m_{R(I)} + \frac{i}{2} m'_{R(I)} \partial_{k_z}, \quad (5.41)$$

missä massojen derivaatat ovat z :n suhteen. Näin ollen yhtälöryhmästä (5.39) saadaan kahdeksan reaalisen yhtälön ryhmä

$$\begin{aligned} k_0 g_0^s - s k_z g_3^s - m_R g_1^s - m_I g_2^s &= 0, \\ k_0 g_3^s - s k_z g_0^s + \frac{1}{2} m'_{R} \partial_{k_z} g_2^s - \frac{1}{2} m'_{I} \partial_{k_z} g_1^s &= 0, \\ k_0 g_1^s + \frac{s}{2} \partial_z g_2^s - m_R g_0^s + \frac{1}{2} m'_{I} \partial_{k_z} g_3^s &= 0, \\ k_0 g_2^s - \frac{s}{2} \partial_z g_1^s - m_I g_0^s - \frac{1}{2} m'_{R} \partial_{k_z} g_3^s &= 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} s \partial_z g_3^s - m'_{R} \partial_{k_z} g_1^s - m'_{I} \partial_{k_z} g_2^s &= 0, \\ \frac{s}{2} \partial_z g_0^s - m_R g_2^s + m_I g_1^s &= 0, \\ s k_z g_2^s - \frac{1}{2} m'_{R} \partial_{k_z} g_0^s - m_I g_3^s &= 0, \\ -s k_z g_1^s + m_R g_3^s - \frac{1}{2} m'_{I} \partial_{k_z} g_0^s &= 0. \end{aligned}$$

Yhtälöryhmässä (5.42) on neljä yhtälöä, joissa ei ole lainkaan ∂_z -derivaattoja (kaksi ylintä ja kaksi alinta yhtälöä) ja neljä yhtälöä, joissa on sekä ∂_z että ∂_{k_z} -derivaattoja (keskimmäiset yhtälöt). Tässä tilanteessa yhtälöt tulee tulkita siten, että ne neljä yhtälöä, jotka sisältävät vain ∂_{k_z} -derivaattoja, ovat niin kutsuttuja ”rajoiteyhtälöitä” eli ne määräävät tuntemattomien reaalifunktioiden $g_\mu^s(z, k_0, k_z)$ liikemääräriippuvuuden ja dispersiorelaatiot. Vastaavasti keskimmäiset yhtälöt, jotka sisältävät sekä paikka- että liikemääräderivaattoja, ovat kineettisiä yhtälöitä eli varsinaisia kuljetusyhtälöitä.

5.2.1 Rajoiteyhtälöt

Staattisessa tilanteessa rajoiteyhtälöiksi tulee siis valita yhtälöt

$$k_0 g_0^s - s k_z g_3^s - m_R g_1^s - m_I g_2^s = 0, \quad (5.43)$$

$$k_0 g_3^s - s k_z g_0^s + \frac{1}{2} m'_R \partial_{k_z} g_2^s - \frac{1}{2} m'_I \partial_{k_z} g_1^s = 0, \quad (5.44)$$

$$s k_z g_2^s - \frac{1}{2} m'_R \partial_{k_z} g_0^s - m_I g_3^s = 0, \quad (5.45)$$

$$-s k_z g_1^s + m_R g_3^s - \frac{1}{2} m'_I \partial_{k_z} g_0^s = 0. \quad (5.46)$$

Etsitään nyt rajoittava ehto funktiolle g_0^s , joka antaa systeemin tiheysjakauman, kuten myöhemmin havaitaan. Ratkaistaan yhtälöistä (5.44) - (5.46) funktioiden g_1^s , g_2^s ja g_3^s lausekkeet funktion g_0^s avulla ja sijoitetaan ne yhtälöön (5.43).

Ratkaisemalla ensiksi yhtälöistä (5.45) ja (5.46) g_1^s ja g_2^s ja sijoittamalla se yhtälöön (5.44) saadaan 1. gradienttikertaluvussa

$$k_0 g_3^s - s k_z g_0^s + s \frac{|m|^2 \theta'}{2k_z^2} (g_3^s - \partial_{k_z} g_3^s) = 0 \quad (5.47)$$

Tästä yhtälöstä saadaan iteroimalla ratkaistua funktio g_3^s funktion g_0^s avulla:

$$g_3^s = \left(s \frac{k_z}{k_0} + \frac{|m|^2 \theta'}{2k_0^2} \partial_{k_z} \right) g_0^s. \quad (5.48)$$

Edelleen sijoittamalla g_3^s :n lauseke (5.48) yhtälöihin (5.45) ja (5.46) funktiot g_1^s ja g_2^s saadaan ratkaistua funktion g_0^s avulla:

$$g_1^s = \left[\frac{m_R}{k_0} + s \left(\frac{m_R |m|^2 \theta'}{2k_z k_0^2} - \frac{m'_I}{2k_z} \right) \partial_{k_z} \right] g_0^s, \quad (5.49)$$

$$g_2^s = \left[\frac{m_I}{k_0} + s \left(\frac{m_I |m|^2 \theta'}{2k_z k_0^2} + \frac{m'_R}{2k_z} \right) \partial_{k_z} \right] g_0^s. \quad (5.50)$$

Sijoittamalla lausekkeet (5.48) - (5.50) yhtälöön (5.43) saadaan

$$(k_0^2 - k_z^2 - |m|^2) \left(g_0^s + s \frac{|m|^2 \theta'}{2k_z k_0} \partial_{k_z} g_0^s \right) = 0 \quad (5.51)$$

Edelleen yhtälön (5.51) perusteella pätee

$$\begin{aligned} (k_0^2 - k_z^2 - |m|^2) \partial_{k_z} g_0^s &= \partial_{k_z} [(k_0^2 - k_z^2 - |m|^2) g_0^s] - [\partial_{k_z} (k_0^2 - k_z^2 - |m|^2) g_0^s] \\ &= \partial_{k_z} \left[-s \frac{|m|^2 \theta'}{2k_z k_0} (k_0^2 - k_z^2 - |m|^2) \partial_{k_z} g_0^s \right] + 2k_z g_0^s \\ &= 2k_z g_0^s + \mathcal{O}(\partial_z). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (5.51) saadaan lopulta algebrallinen yhtälö

$$\left(k_0^2 - k_z^2 - |m|^2 + \hbar \frac{s |m|^2 \theta'}{k_0} \right) g_0^s = 0, \quad (5.53)$$

missä \hbar -riippuvuus on nyt kirjoitettu näkyviin. Yhtälön täytyy toteutua kaikilla k_μ :n arvoilla. Tämän vuoksi g_0^s :n täytyy olla nolla aina kun sitä kertova sulklauseke ei ole nolla. Tästä seuraa, että yhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa spektraalimuodossa

$$g_0^s = \pi n_s |k_0| \delta(\Omega_s^2), \quad (5.54)$$

missä

$$\Omega_s^2 \equiv k_0^s - k_z^2 - |m|^2 + \hbar \frac{s|m|^2 \theta'}{k_0}, \quad (5.55)$$

ja $n_s(k_0, k_z, z)$ ovat ei-singulaarisia funktioita. Tekijät π ja $|k_0|$ on otettu mukaan mukavuussyistä, yhtä hyvin ne olisi voitu sisällyttää n_s :n lausekkeeseen. Ratkaisua (5.54) voidaan edelleen muokata kirjoittamalla delta-funktio Ω_s^2 :n juurien $\pm\omega_{s\pm}$ avulla:

$$g_0^s = \sum_{\pm} \frac{\pi}{2Z_{s\pm}} n_s \delta(k_0 \mp \omega_{s\pm}), \quad (5.56)$$

missä $Z_{s\pm}$ on normitustekijä,

$$Z_{s\pm} \equiv \frac{1}{2\omega_{s\pm}} \left| \partial_{k_0} \Omega_s^2 \right|_{k_0 = \pm\omega_{s\pm}}. \quad (5.57)$$

Ω_s^2 :n juurille ja edelleen normitustekijälle saadaan 1. gradienttikertaluvussa iteroimalla

$$\omega_{s\pm} = \omega_0 \mp \hbar \frac{s|m|^2 \theta'}{2\omega_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{k_z^2 + |m|^2}, \quad (5.58)$$

$$Z_{s\pm} = 1 \mp \hbar \frac{s|m|^2 \theta'}{2\omega_0^3} = \frac{\omega_{s\pm}}{\omega_0}. \quad (5.59)$$

Lausekkeesta (5.56) havaitaan, että g_0^s :n yhtälön (5.53) ratkaisut on rajoitettu tietyille faasiavaruuden pinnoille ($k_0 = \pm\omega_{s\pm}$), joilla pätee juurien (5.58) määräämä dispersiorelaatio. Nämä tulokset funktiolle g_0^s on johdettu jo aiemmin [32]. Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin funktioita g_i^s , $i = 1, 2, 3$ ja johdetaan niitä koskevat rajoittavat ehdot.

Rajoittava ehto funktiolle g_3^s saadaan johdettua täysin vastaavalla tavalla kuin edellä funktiolle g_0^s . Nyt yhtälöstä (5.47) ratkaistaankin g_0^s

$$g_0^s = \left[s \frac{k_0}{k_z} + \frac{|m|^2 \theta'}{2k_z^3} (1 - k_z \partial_{k_z}) \right] g_3^s. \quad (5.60)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöihin (5.45) ja (5.46) saadaan funktiot g_1^s ja g_2^s ratkaistua funktion g_3^s avulla

$$g_1^s = \left[s \frac{m_R}{k_z} + \frac{k_0 m'_I}{2k_z^3} (1 - k_z \partial_{k_z}) \right] g_3^s, \quad (5.61)$$

$$g_2^s = \left[s \frac{m_I}{k_z} - \frac{k_0 m'_R}{2k_z^3} (1 - k_z \partial_{k_z}) \right] g_3^s. \quad (5.62)$$

Sijoittamalla lausekkeet (5.60) - (5.62) yhtälöön (5.43) saadaan funktiota g_3^s rajoittava ehto

$$\left(k_0^2 - k_z^2 - |m|^2 \right) g_3^s = 0. \quad (5.63)$$

Tämän perusteella funktio g_3^s on rajoitettu pinnalle, joka vastaa fermionien tavallista dispersiorelaatiota

$$\Omega_0^2 \equiv k_0^2 - k_z^2 - |m|^2 = 0. \quad (5.64)$$

Edelleen täysin vastaavalle tavalla saadaan johdettua rajoittavat ehdot funktioille g_1^s ja g_2^s . Tuloksiksi saadaan

$$\left[k_0^2 - k_z^s - |m|^2 + \hbar s k_0 \left(\theta' + \frac{|m|'}{|m|} \tan \theta \right) \right] g_1^s = 0 \quad (5.65)$$

ja

$$\left[k_0^2 - k_z^s - |m|^2 + \hbar s k_0 \left(\theta' - \frac{|m|'}{|m|} \cot \theta \right) \right] g_2^s = 0. \quad (5.66)$$

Näiden tulosten (5.53), (5.63), (5.65) ja (5.66) perusteella voi esittää kaksi eri tulkintaa. Joko funktiot g_μ^s todella ovat eri massakuorilla, kuten kyseisistä rajoittavista ehdoista ja niitä seuraavista dispersiorelaatioista voisi päätellä, *tai* on olemassa vain yksi dispersiorelaation määräävä massakuori, esimerkiksi g_3^s :n tavanomainen massakuori, ja kaikkien muiden funktioiden riippuvuus g_3^s :sta sisältää ∂_{k_z} -derivaattoja.

Jälkimmäistä tulkintaa tukevia seikkoja on helppo löytää. Ensinnäkin, jos plasmaa todella voidaan kuvata yksihiukkastilojen avulla, näillä yksihiukkastiloilla täytyy olla jokin tietty *yhden* dispersiorelaation määräämä spektri. Toiseksi, funktiot g_μ^s ovat täydellisen tiheysmatriisin (Wightmanin funktion) $G_{||s}^<$ eri komponentteja, jolloin järkevä tuntuinen oletus on, että kaikki matriisin komponentit ovat samalla massakuorella. Joka tapauksessa sen, kumman tahansa tulkinnan ottaa käyttöön, ei pitäisi vaikuttaa myöhempien laskujen tuloksiin millään tavalla. Oletettavaa onkin, että tiettyihin tilanteisiin sopii paremmin toinen tulkinta ja tiettyihin taas toinen.

Tarkastellaan nyt tiheysmatriisin $G_{||s}^<$ muodostamista jälkimmäisen tulkinnan avulla. Valitaan riippumattomaksi funktioksi g_3^s , jolle pätee rajoittava ehto

$$\left(k_0^2 - k_z^2 - |m|^2 \right) g_3^s = 0. \quad (5.63)$$

Tämän yhtälön ratkaisuna saadaan spektraalimuodossa

$$g_0^s = f_3^s \delta(\Omega_0^2), \quad (5.67)$$

missä

$$\Omega_0^2 \equiv k_0^s - k_z^2 - |m|^2, \quad (5.68)$$

ja $f_3^s(k_0, k_z, z)$ ovat ei-singulaarisia funktioita. Ratkaisua (5.67) voidaan jälleen muokata kirjoittamalla delta-funktio Ω_0^2 :n juurien $\pm\omega_0$ avulla:

$$g_3^s = \sum_{\pm} \pm \frac{1}{2\omega_0} f_3^s \delta(k_0 \mp \omega_0), \quad (5.69)$$

missä siis

$$\omega_0 = \sqrt{k_z^2 + |m|^2}. \quad (5.70)$$

Yhtälöiden (5.60), (5.61) ja (5.62) avulla saadaan lausuttua funktiot g_0^s , g_1^s ja g_2^s funktion g_3^s avulla

$$g_0^s = \left[s \frac{k_0}{k_z} + \frac{|m|^2 \theta'}{2k_z^3} (1 - k_z \partial_{k_z}) \right] g_3^s, \quad (5.60)$$

$$g_1^s = \left[s \frac{m_R}{k_z} + \frac{k_0 m'_I}{2k_z^3} (1 - k_z \partial_{k_z}) \right] g_3^s, \quad (5.61)$$

$$g_2^s = \left[s \frac{m_I}{k_z} - \frac{k_0 m'_R}{2k_z^3} (1 - k_z \partial_{k_z}) \right] g_3^s. \quad (5.62)$$

Sijoittamalla näihin g_3^s :n lauseke (5.67) saadaan

$$\begin{aligned} g_0^s &= s \frac{k_0}{k_z} f_3^s \delta(\Omega_0^2) + \frac{|m|^2 \theta'}{2k_z^3} \left[(f_3^s - k_z \partial_{k_z} f_3^s) \delta(\Omega_0^2) - f_3^s k_z \partial_{k_z} \delta(\Omega_0^2) \right], \\ g_1^s &= s \frac{m_R}{k_z} f_3^s \delta(\Omega_0^2) + \frac{k_0 m'_I}{2k_z^3} \left[(f_3^s - k_z \partial_{k_z} f_3^s) \delta(\Omega_0^2) - f_3^s k_z \partial_{k_z} \delta(\Omega_0^2) \right], \\ g_2^s &= s \frac{m_I}{k_z} f_3^s \delta(\Omega_0^2) - \frac{k_0 m'_R}{2k_z^3} \left[(f_3^s - k_z \partial_{k_z} f_3^s) \delta(\Omega_0^2) - f_3^s k_z \partial_{k_z} \delta(\Omega_0^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Derivaatat δ -funktion suhteen on määritelty distribuutio-derivaattoina ja ne tulevat merkityksellisiksi integroitaessa taajuusspektrin tai liikemääräspektrin ylitse. Hermiittinen tiheysmatriisi

$$i\gamma^0 G_{||s}^< = \frac{1}{2} (g_0^s + g_i^s \sigma^i) \otimes \frac{1}{2} (1 + s\sigma^3) \quad (5.72)$$

voidaan nyt näiden tulosten perusteella lausua yhden tuntemattoman reaalfunktion f_3^s avulla. Sijoittamalla lausekkeet (5.67) ja (5.71) yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} i\gamma^0 G_{||s}^< &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{pmatrix} s \frac{k_0}{k_z} + 1 & s \frac{m^*}{k_z} \\ s \frac{m^*}{k_z} & s \frac{k_0}{k_z} - 1 \end{pmatrix} f_3^s \delta(\Omega_0^2) + \begin{pmatrix} \frac{|m|^2 \theta'}{2k_z^3} & i \frac{k_0 m^{*'}}{2k_z^3} \\ -i \frac{k_0 m'}{2k_z^3} & \frac{|m|^2 \theta'}{2k_z^3} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \times \left[(f_3^s - k_z \partial_{k_z} f_3^s) \delta(\Omega_0^2) - f_3^s k_z \partial_{k_z} \delta(\Omega_0^2) \right] \right\} \otimes (1 + s\sigma^3). \end{aligned} \quad (5.73)$$

Tiheysmatriisin lauseketta (5.73) käyttäen voidaan tarkastella Kadanoffin-Baymin yhtälöä (5.23) matriisimuodossa kertaluvussa \hbar . Ilman vuorovaikutuksia tästä ei ole mitään hyötyä, sillä yhtälöt on jo valmiiksi kirjoitettu komponenttimuodossa (5.42). Rajoiteyhtälöt (5.43)-(5.46) pätevät kuitenkin myös vuorovaikutukset huomioiden kertalukuun \hbar saakka, eli rajoiteyhtälöihin liittyvä kollideritermi on korkeampaa kertalukua kuin \hbar . Siten tarkasteltaessa Kadanoffin-Baymin yhtälöä (5.23) vuorovaikutukset huomioiden kertaluvussa \hbar voidaan käyttää tiheysmatriisia (5.73) ja lausua erityisesti itseisenergiat Σ ja sitä kautta kollideritermi tämän avulla.

Tässä luvussa tarkastellaan kuitenkin vain tilannetta, jossa vuorovaikutuksia ei huomioida. Tällöin tiheysmatriisista (5.73) ei ole mitään suoranaista hyötyä ja haluttuun lopputulokseen päästään helpommin käyttämällä funktioiden g_μ^s rajoittavia ehtoja suoraan yhdessä komponenttimuotoisten kineettisten yhtälöiden kanssa.

5.2.2 Kineettiset yhtälöt

Kineettisiksi yhtälöiksi tulee staattisessa tilanteessa yhtälöryhmän (5.42) neljä keskimmäistä yhtälöä

$$k_0 g_1^s + \frac{s}{2} \partial_z g_2^s - m_R g_0^s - \frac{1}{2} m'_I \partial_{k_z} g_3^s = 0, \quad (5.74)$$

$$k_0 g_2^s - \frac{s}{2} \partial_z g_1^s - m_I g_0^s - \frac{1}{2} m'_R \partial_{k_z} g_3^s = 0, \quad (5.75)$$

$$s \partial_z g_3^s - m'_R \partial_{k_z} g_1^s - m'_I \partial_{k_z} g_2^s = 0, \quad (5.76)$$

$$s \partial_z g_0^s - 2m_R g_2^s + 2m_I g_1^s = 0. \quad (5.77)$$

Tavoitteena on saada kineettinen yhtälö funktiolle g_0^s , joka vastaa yksihiukkastiheyttä, kuten myöhemmin havaitaan. Tätä tarkoitusta varten paras kineettinen yhtälö on yhtälöryhmän viimeinen yhtälö (5.77), koska siinä on ∂_z -derivaatta nimenomaan g_0^s :n suhteen. Sijoittamalla tähän rajoiteyhtälöiden yhteydessä ratkaistut g_1^s :n, g_2^s :n ja g_3^s :n lausekkeet (5.48) - (5.50) saadaan kineettiseksi yhtälöksi g_0^s :lle kertaluvussa \hbar

$$k_z \partial_z g_0^s - \left(\frac{|m|^{2'}}{2} - \hbar \frac{s (|m|^2 \theta')'}{2k_0} \right) \partial_{k_z} g_0^s = 0, \quad (5.78)$$

missä \hbar -riippuvuus on jälleen kirjoitettu näkyviin. Koska lausekkeiden (5.48) - (5.50) ratkaisemiseksi on käytetty kolmea rajoiteyhtälöä (5.44) - (5.46), on vielä yksi riippumaton rajoiteyhtälö g_0^s :lle käyttämättä. Tämän voi siis kirjoittaa muodossa (5.53) ja se rajoittaa g_0^s :n pinnalle $\Omega_s^2 = 0$ (5.54). Sijoittamalla tämä spektraaliratkaisu kineettiseen yhtälöön (5.78) ja integroimalla yli positiivisten ja negatiivisten taajuuksien k_0 saadaan Vlasovin yhtälöt (Boltzmannin yhtälöt ilman vuorovaikutuksia) hiukkasille ja antihiukkasille:

$$v_{s\pm} \partial_z f_{s\pm} + F_{s\pm} \partial_{k_z} f_{s\pm} = 0, \quad (5.79)$$

missä

$$\begin{aligned} f_{s+} &\equiv n_s(\omega_{s+}, k_z, z), \\ f_{s-} &\equiv 1 - n_s(-\omega_{s-}, -k_z, z) \end{aligned} \quad (5.80)$$

ovat yleistetyt miehityslukujakaumat hiukkasille ja antihiukkasille, joiden spin on s . Hiukkasten ja antihiukkasten ryhmänopeudet ovat

$$v_{s\pm} = \frac{k_z}{\omega_{s\pm}} \quad (5.81)$$

ja spin-riippuva CP -rikkova *semiklassinen voima* on

$$F_{s\pm} = -\frac{|m|^{2'}}{2\omega_{s\pm}} \pm \hbar \frac{s (|m|^2 \theta')'}{2\omega_0^2}. \quad (5.82)$$

Edelleen fermioneihin liittyvä virta on

$$j^\mu \equiv \langle \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \rangle = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dk_0 dk_z}{(2\pi)^2} (g_0^s, s g_3^s), \quad (5.83)$$

jolle saadaan lausumalla funktio g_3^s funktion g_0^s avulla (5.48)

$$j_{s\pm}^\mu = \sum_{s=\pm 1} s \int \frac{d\omega}{8\pi} \left(\frac{1}{v_{s\pm}}, 1 \right) f_{s\pm}. \quad (5.84)$$

Tekemällä kuplan reunan suuntainen Lorentz-muunnos saadaan lopulta

$$j_{s\pm}^\mu = \sum_{\text{sign}(k_z)=\pm 1} \text{sign}(k_z) \int \frac{k_{||}^2 dk_{||} d\omega}{2\pi^2} \left(\frac{1}{v_{s\pm}}, \hat{\mathbf{k}} \right) f_{s\pm}. \quad (5.85)$$

Vlasovin yhtälöt (5.79) ovat muodoltaan täysin identtisiä Boltzmannin yhtälön (5.20) kanssa huomioiden sen, että kyseessä on staattinen tilanne eli aikaderivaatat häviävät. Myös ryhmänopeudet (5.81), semiklassinen voima (5.82) ja fermioneihin liittyvä nelivirta (5.85) ovat *täysin samat* kuin WKB-approksimaatiolla johdetut tulokset (5.17), (5.19) ja (5.22). Siten semiklassisella rajalla (kertaluvussa \hbar) ilman vuorovaikutuksia WKB-approksimaatiolla saadaan täsmälleen samat tulokset kuin eksakteilla Kadanoff-Baym yhtälöillä eli WKB-approksimaatio vaikuttaa oikealta kyseisellä rajalla.

Tämä ei ole kuitenkaan aivan totta, sillä WKB-approksimaatiossa hukkuu kaikki informaatio monihiukkaskoherenssista ja sen takia WKB-approksimaatio ei pysty selittämään esimerkiksi kvanttiheijastusta kuplan reunasta. Myöskään edellä johdettu tiheysmatriisin muoto (5.73) ei sisällä kvanttiheijastukseen liittyvää monihiukkaskoherenssia, sillä se ei elä massakuorella, vaan kuorella $k_z = 0$ [33]. Kvanttiheijastuksen sisällyttäminen tiheysmatriisiin onkin seuraava tärkeä tutkimusvaihe. Tätä kautta pystytään lopulta ymmärtämään kokonaisuudessaan fermionien käyttäytyminen kuplan reuna-alueella ja laskemaan parempia tuloksia lähde-epäsymmetrian ja sitä kautta baryonituotantoa biasoivan kemiallisen potentiaalim muodostumiselle.

6. Yhteenveto

Sähköheikko baryogeneesi perustuu hiukkasfysiikan standardimallin sisältämään aksiaalivirta-anomaliaan, jonka perusteella baryoni- ja leptoniluvut eivät ole eksaktisti säilyviä suureita. Tämä fermionilukujen rikkoutumisen mahdollisuus liittyy standardimallin heikkoihin vuorovaikutuksiin eli $SU(2)$ -sektorille. $SU(2)$ -mittakentillä on degeneroitunut epätriviaalien perustilojen joukko. Siirryttäessä perustilasta toiseen sekä baryoni- että leptoniluvut muuttuvat. Nolla-lämpötilassa siirtyminen perustilojen välillä on mahdollista vain tunnelloitumalla potentiaali-vallin läpi, mutta tämä prosessi on kuitenkin erittäin voimakkaasti suppressoitu. Sähköheikon faasitransition lämpötilassa ~ 100 GeV siirtyminen voi kuitenkin tapahtua nopeasti termisellä virittymisellä sfaleroni-konfiguraation kautta (kuva 2.1). Saharovin 1. ehto siis toteutuu korkeassa lämpötilassa.

Saharovin 2. ja 3. ehto eli CP -rikkoutuminen ja epätasapaino toteutuvat sähköheikon faasitransition faasirajapinnalla. Sähköheikossa faasitransitiossa Higgsin skalaarikentän perustilan mittasymmetria rikkoutuu dynaamisesti lämpötilan laskiessa alle kriittisen lämpötilan T_C (kuva 2.2). Tämän spontaanin symmetriarikon vaikutuksesta heikon vuorovaikutuksen välittäjäbosonit W^\pm ja Z^0 sekä kaikki fermionit saavat massansa. Faasitransitio etenee rikkoutuneen faasin kuplien muodostumisena ja leviämisenä symmetrisessä faasissa. Transitio voi synnyttää termistä epätasapainoa, koska kuplien leviämiseen liittyvä aikaskaala on taustan hiukkasplasman kannalta enintään samaa luokkaa kuin hiukkasten välisiin vuorovaikutuksiin liittyvä aikaskaala.

Kuplien reuna-alueella esiintyy Higgsin kentän odotusarvon muutoksesta johtuvia CP -rikkovia vuorovaikutuksia, jotka ajavat sfaleronien kanssa vuorovaikuttavat vasen-kiraaliset fermionit ja antifermionit erilleen oleellisesti siten, että kuplan ulkoreunalle kertyy vasen-kiraalisten fermionien ylijäämä (kuva 2.5). Sfaleronisiirtymiä tapahtuu symmetrisessä faasissa eli kuplan ulkoreunalla huomattavan suurella nopeudella, kun taas massallisessa faasissa kuplan sisäreunalla sfaleronisiirtymänopeus on monta kertalukua alhaisempi. Edelleen vasen-kiraalisten fermionien lähde-epäsymmetria ja diffuusio kuplan ulkoreunalla biasoi sfaleronisiirtymiä baryonilukua kasvattavaan suuntaan. Niinpä kuplan ulkoreunan kulkiesä tarkastellun hiukkasplasman pisteen ohi tapahtuu siinä nopea baryonitiheyden generoituminen. Koska kuplan sisäreunalla sfaleronisiirtymät ovat usealla kertaluvulla suppressoituja ulkoreunaan verrattuna, ei syntynyt baryoniluku enää häviä pois kuplan sisällä, vaikka siellä bias onkin vastakkaiseen eli baryonilukua pienentävään suuntaan.

Tällä tavalla faasitransition kuljettua avaruuden jokaisen pisteen läpi on maailmankaikkeuteen syntynyt nettobaryoniluku. Tärkeää prosessissa kuitenkin on, että kuplan sisäpuolella sfaleronisiirtymisnopeus laskee tarpeeksi alhaiseksi, useita kertalukuja Hubbleen laajenemisnopeutta alhaisemmalle tasolle, jotta syntynyt nettobaryoniluku ei maailmankaikkeuden myöhemmän kehityksen aikana enää huuhtoudu pois. Tässä tulee vastaan suurin syy, jonka vuoksi sähköheikko baryogeneesi ei onnistu minimaalisessa standardimallissa. Mallissa sfaleronisiirtymänopeus ei nimittäin ole läheskään tarpeeksi alhainen kuplan sisällä. On myös toinen syy, jonka vuoksi minimaalinen standardimalli on syytä haudata sähköheikon baryo-

geneesin yhteydessä. Siinä ei myöskään esiinny tarpeeksi CP -rikkovia efektejä vaadittavan lähde-epäsymmetrian luomiseen. Siispä sähköheikkoon baryogeneesiin tarvitaan standardimallin laajennuksia, kuten supersymmetrisiä malleja MSSM (Minimal Supersymmetric Standard Model) tai NMSSM (Next to Minimal Supersymmetric Standard Model). Tämä ei kuitenkaan laske sähköheikon baryogeneesin arvoa teoriana muihin malleihin verrattuna, sillä lähes kaikki varteen otettavat baryogeneesimallit vaativat toimiakseen supersymmetriaa.

Luvussa 3 käsiteltiin epätasapainon kvantti-ilmiöiden tarkasteluun erinomaisesti soveltuva CTP-formalismia. Formalismi perustuu siihen, että tarkasteltavassa (termisessä tai ei-termisessä) monihiukkassysteemissä kiinnostavien suureiden odotusarvot voidaan laskea polkuintegraalina yli suljetun aikapolun $t : -\infty \rightarrow \infty$ ja takaisin $\infty \rightarrow -\infty$. Tällöin voidaan soveltaa samanlaista diagrammitekniikkaa kuin perinteisessä kvanttikenttäteoriassa sillä erotuksella, että nyt sisäisten verteksien aikakoordinaatit voivat olla kummalla tahansa aikahaaralla, jolloin propagaattoreita tarvitaan neljä erilaista. Mielivaltaisen ei-termisen systeemin tapauksessa propagaattoreita ei kuitenkaan pystytä laskemaan etukäteen kuten tavanomaisessa kvanttikenttäteoriassa tai termisessä kenttäteoriassa, mutta systeemin täysille propagaattoreille voidaan johtaa Schwingerin-Dysonin yhtälöt, joista propagaattorit on mahdollista ratkaista. Tässä tutkielmassa yhtälöiden johto on tehty 2PI-efektiivisen aktion avulla, mutta lähestymistapoja on muitakin. Schwingerin-Dysonin yhtälöt ovat itse asiassa kytketty hierarkinen integrodifferentiaaliyhtälöiden joukko *kaikille* systeemin n -piste Greenin funktioille. Hiarkiassa alimmassa propagaattorin yhtälössäkään esiintyy periaatteessa kaikkia n -piste Greenin funktioita, mutta käytännön laskuissa huomoidaan vuorovaikutukset yleensä vain kytkinvakioiden alimpiin kertalukuihin, jolloin korkeamman kertaluvun Greenin funktioille voidaan käyttää eriasteisia trunkaatioita.

Schwingerin-Dysonin yhtälöt ovat fundamentaalit dynaamiset yhtälöt systeemin propagaattoreille. Siirtymällä impulssiavaruuteen ja muokkaamalla yhtälöitä saadaan Kadanoffin-Baymin kvanttikuljetusyhtälöt, joiden avulla erityisesti muuttuvassa taustassa tapahtuvien kuljetusilmiöiden käsittely onnistuu helposti. Edelleen luvussa 4 osoitetaan skalaaribosoneiden tapauksessa, kuinka Kadanoff-Baym yhtälöt redusoituvat klassisella rajalla tavalliseksi Boltzmannin kuljetusyhtälöksi.

Luvussa 5 käsiteltiin fermionien dynamiikkaa sähköheikossa baryogeneesissä semiklassisella rajalla. Tässä semiklassisella rajalla tarkoitetaan hitaasti muuttuvan fermionien massan aiheuttamien \hbar :aan verrannollisten kvanttikorjausten huomioimista. Hitaasti muuttuva massa kuplan reuna-alueella merkitsee mikroskooppisiin vapausasteisiin nähden leveää kuplan reunaa, mikä onkin tyypillinen tilanne sähköheikossa baryogeneesissä. Tarkoitus oli erityisesti tutkia CP -rikkovien efektien muodostumista ja vaikutuksia kuplan reuna-alueella. Tarkastelu tehtiin sekoittuvien fermionilajien yhtä ominaistilaa kuvaavalla efektiivisellä Lagrangen tiheydellä, jossa massan voi olettaa kuplan reuna-alueella kompleksiseksi paikan funktioksi. Fermionien välisiä törmäyksiä ei tarkastelussa huomioitu. Edelleen oletettiin tasosymmetria, mikä on kuplan reuna-alueella hyvä approksimaatio, sillä kuplat ovat tyypillisesti hyvin suuria verrattuna muihin fysikaalisesti oleellisiin etäisyyksiin. Koordinaatistoksi valittiin liikkuvan kuplan reunan määräämä koordinaatisto (wall frame), jossa kaikki fysikaaliset suuret ja näin ollen myös ratkaisufunktiot ovat staattisia. Jos ratkaisut halutaan

myöhemmin lausua plasman määräämässä koordinaatistossa (plasma frame), tämä onnistuu tekemällä yksinkertainen reunan etenemisnopeuden suuntainen Lorentz-muunnos.

Aluksi johdettiin WKB-approksimaatiolla fermioniseen semiklassiseen Boltzmannin yhtälöön rymänopeus ja CP -rikkova voima. Näissä lausekkeissa esiintyy CP -rikkovia massan derivaatasta riippuvia termejä, jotka aiheuttavat fermionien ja antifermionien erilaisen dynamiikan ja siten ajautumisen erilleen kuplan reuna-alueella. Erityisen selvästi tämä käy ilmi yhden hiukkasen neli-virran lausekkeesta, jossa 0-komponentti eli yksihiukkastiheys on kääntäen verrannollinen ryhmänopeuteen. Huomioimalla, että hiukkasten jakauman faasiavaruudessa antaa Boltzmannin yhtälön funktio f , saadaan koko hiukkasjoukon neli-virta yksihiukkasvirtojen termisenä keskiarvona. Funktion f selvittäminen edellyttää kuitenkin Boltzmannin yhtälön ratkaisemista, mikä voidaan tehdä esimerkiksi muodostamalla siitä diffuusioyhtälöiden ryhmä, josta kiinnostavat suureet on helpompi ratkaista [30].

Luvun 5 päätarkoitus oli kuitenkin Kadanoffin-Baymin yhtälöiden soveltaminen fermionien dynamiikan tarkasteluun sähköheikossa baryogeneesissä. Koska fermioneilla on kuplan reuna-alueella muuttuva massa, tulee Kadanoffin-Baymin yhtälöihin massan derivaattoja äärettömään kertalukuun saakka. Tämä gradienttikspansio on samalla \hbar -ekspansio, ja semiklassisella rajalla yhtälöissä huomioidaankin vain \hbar :aan verrannolliset 1. kertaluvun derivaat massassa. Ilman fermionien välisiä vuorovaikutuksia kollisionstermi ja muut itseisenergioista riippuvat termit häviävät Kadanoffin-Baymin yhtälöissä, ja yhtälöt redusoituvat edelleen 1+1-ulotteisiksi huomioimalla kuplan reuna-alueella vallitseva tasosymmetria. Havaitsemalla, että z -suuntainen spin on systeemissä hyvä kvanttiluku, voidaan yhtälön ratkaisu $i\gamma^0 G^<$ kirjoittaa kiraali- ja spin-vapausasteiden suorana tulona, jolloin epätriviaaleihin kiraali-vapausasteisiin liittyville neljälle reaalfunktiolle g_μ^s saadaan kuplan reunan koordinaatistossa kytketty kahdeksan osittaisdifferentiaaliyhtälön ryhmä.

Nämä kahdeksan yhtälöä voidaan jakaa kahteen eri ryhmään, rajoiteyhtälöihin ja kineettisiin yhtälöihin. Yhtälöiden jako perustuu siihen, että kineettiset yhtälöt ovat varsinaisia dynaamisia yhtälöitä ja rajoiteyhtälöt puolestaan rajoittavat kineettisten yhtälöiden ratkaisuja faasiavaruudessa. Tällöin rajoiteyhtälöiksi tulee valita ne yhtälöt, jotka sisältävät vain faasiavaruuteen liittyviä ∂_{k_z} -derivaattoja. Rajoiteyhtälöistä saadaan 1. gradienttikertaluvussa neljälle eri reaalfunktiolle g_μ^s algebralliset yhtälöt, joiden ratkaisut ovat spektraalimuotoisia ja siten rajoittavat funktiot g_μ^s tietyille faasiavaruuden pinnoille. Spektraaliratkaisujen perusteella voidaan tulkita, että funktiot g_μ^s asuvat eri massakuorilla, ja massakuorten välinen ero on 1. gradienttikertalukua massan derivaatoissa. Toinen tulkinta on se, että yksi funktio, esimerkiksi g_3^s , määrää massakuoren ja sitä kautta hiukkasten dispersiorelaation, ja muut funktiot lausutaan tämän avulla rajoiteyhtälöitä käyttäen. Tällä tavalla Wightmanin funktiolle eli systeemin tiheysmatriisille $i\gamma^0 G^<$ saadaan lauseke, jossa esiintyy vain yksi tuntematon ei-singulaarinen funktio f_3^s ja tämän derivaattoja. Tätä muotoa voidaan käyttää laskettaessa fermionien itseisenergioita Σ ja edelleen kollisionstermiä, joita tarvitaan, kun huomioidaan fermionien väliset vuorovaikutukset.

Kineettisistä yhtälöistä tarkasteltiin ainoastaan yhtälöä, jossa on g_0^s :n z -derivaatta. Sijoittamalla tähän rajoiteyhtälöiden yhteydessä ratkaistut g_1^s :n, g_2^s :n

ja g_3^s :n lausekkeet g_0^s :n avulla ja käyttämällä edelleen g_0^s :n spektraaliratkaisua sekä integroimalla positiivisen ja negatiivisen taajuusspektrin yli saadaan lopulta hiukkasten ja antihiukkasten Vlasovin yhtälöt, joissa ryhmänopeus ja semiklassinen voima ovat *täsmälleen samat* kuin WKB-approksimaation yhteydessä johdetut tulokset. Semiklassisella rajalla eli kertaluvussa \hbar WKB-approksimaatio antaa siis ainakin tarkastellun kuljetusilmiön osalta samat tulokset kuin fundamentaalit Kadanoffin-Baymin yhtälöt.

Tämä *ei* kuitenkaan tarkoita sitä, että WKB-approksimaatio olisi täysin kattava menetelmä tutkittaessa sähköheikkoa baryogeneesiä semiklassisella rajalla. Ensimmäkin WKB-approksimaatio kuvaa vain yksihiukkastilojen dynamiikkaa, jolloin fermionien välisten vuorovaikutusten täsmällinen sisällyttäminen on menetelmän puitteissa mahdotonta. Toiseksi WKB-approksimaatio hävittää kaiken tiedon systeemin mahdollisesta kvanttikoherenssista, jota esiintyy kun tarkastelussa huomioidaan myös hiukkasten kvanttiheijastus kuplan reunasta.

Sähköheikon baryogeenin tarkastelussa Kadanoffin-Baymin yhtälöiden avulla riittää tulevaisuudessa paljon tutkittavaa. Ensimmäisiä tärkeitä tavoitteita ovat kvanttiheijastuksen ja fermionien välisten vuorovaikutusten sisällyttäminen haluttuun kertalukuun saakka ja koko tarkastelun suorittaminen 3+1-ulottuvuudessa hiukkasplasman koordinaatistossa, mikä lopulta on se kiinnostava koordinaatisto. Lopullisena tavoitteena on luodun koneiston soveltaminen realistiseen supersymmetriseen teoriaan (kuten MSSM tai NMSSM), jossa tarkastellaan sekoituvien charginojen, neutraliinojen ja kvarkkien dynamiikkaa faasirajapinnalla. Tällä tavalla voidaan saada huomattavasti tarkempia tuloksia syntyvän baryoniepäsymmetrian suuruudelle, kuin mitä koskaan aiemmin on laskettu. Vertaamalla saatuja tuloksia kosmologisten mittausten antamaan baryoniepäsymmetrian arvoon voidaan edelleen löytää tarkkoja rajoitteita teorian supersymmetristen parametrien arvoille.

Kirjallisuutta

- [1] C. L. Bennett *et al.* [WMAP collaboration], astro-ph/0302207
- [2] A. D. Sakharov, JETP Lett. **6** (1967) 24.
- [3] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8.
- [4] M. Dine and A. Kusenko, Rev. Mod. Phys. **76** (2004) 1.
- [5] M. Trodden, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) 1463.
- [6] N. Manton, Phys. Rev. D **28** (1983) 2019.
- [7] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **155** (1985) 36.
- [8] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
- [9] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [10] A. Salam, in *Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity, Proceedings of the Eight Nobel Symposium* (1968) 367.
- [11] S. Eidelman *et al.*, Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).
- [12] J. S. Langer, Ann. Phys. **41** (1967) 108.
- [13] P. John and M. G. Schmidt, HD-THEP-00-04, hep-ph/0002050 (2002).
- [14] M. Joyce, T. Prokopec and N. Turok, Phys. Lett. B **339** (1994) 312.
- [15] G. D. Moore, hep-ph/9902464v1 (1999).
- [16] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 2887.
- [17] G. E. Wick, Phys. Rev. **80** (1950) 268.
- [18] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14** (1955) 351.
- [19] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge UK, (1996).
- [20] J. S. Schwinger, J. Math. Phys. **2** (1961) 407.
- [21] L. V. Keldysh, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47** (1964) 1515 [Sov. Phys. JETP **20** (1965) 1018].
- [22] A. G. Hall, J. Phys. A **8** (1975) 214.
- [23] K. C. Chou and Z. B. Su, Ch. 5 in *Progress in Statistical Physics* (in Chinese) eds., B. L. Hao et al. (Science Press, Beijing, 1981) p. 268.
- [24] J. M. Luttinger and J. C. Ward, Phys. Rev. **118** (1960) 1417.

- [25] J. M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2428.
- [26] K. C. Chou, Z. B. Su, B. L. Hao and L. Yu, *Phys. Rep.* **118** (1985) 1.
- [27] E. Calzetta and B. L. Hu, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 2878.
- [28] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc., New York, (1980).
- [29] M. Joyce, K. Kainulainen and T. Prokopec, NORDITA-98/XX HE (1998).
- [30] J. M. Kline, M. Joyce and K. Kainulainen, *JHEP07* (2000) 018.
- [31] K. Kainulainen, T. Prokopec, M. G. Schmidt and S. Weinstock, NORDITA-2002-05 HE (2002).
- [32] K. Kainulainen, T. Prokopec, M. G. Schmidt and S. Weinstock, NORDITA-2001-9 HE (2001).
- [33] K. Kainulainen and M. Herranen, valmisteluvaiheessa.