

# Tiheä kvarkkiaine ja Nambu-Jona-Lasinio-malli

Tuomas Karavirta

25. kesäkuuta 2007

## **Alkusanat**

Tämä pro gradu -tutkielma tehtiin syksyn 2006 ja kevään 2007 aikana Jyväskylän yliopiston Fysiikan laitoksella. Haluan kiittää työn ohjaajana toimintaa Kimmo Tuomista avusta ja ohjauksesta sekä MATLAB-koodista, jolla tämän työn numeeriset laskut saatiin suoritettua. Haluan myös kiittää Jyväskylän yliopiston Fysiikan laitoksen ultrarelativististen raskasioneitörmäysten tutkimuksen URHIC-ryhmää ja perhettäni saamastani tuesta.

## Tiivistelmä

Tässä työssä tutkittiin tiheän kvarkkiaineen käyttäytymistä äärellisessä lämpötilassa ja kemiallisessa potentiaalissa käyttäen QCD:n approksimointiin kahden kvarkkimaun Nambu-Jona-Lasinio-mallia. Samalla tarkasteltiin kvarkki-antikvarkki- ja erilaisten dikvarkkikondensaattien muodostumista. Lisäksi tarkasteltiin neutronitähtien fysiikkaa ja johdettiin tilanyhtälöt kvarkkiaineesta koostuvalle neutronitähdelle. Numeerisesti ratkaistiin tiheälle kvarkkiaineelle termodynaaminen potentiaali, ottaen huomioon kvarkki-antikvarkkikondensaatin ja dikvarkkikondensaatin muodostuminen. Täten saatiin ennuste QCD:n faasidiagrammille, joka on esitetty kuvassa 6.4.

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Neutronitähtien fysiikkaa</b>	<b>7</b>
2.1	Yleistä suhteellisuusteoriaa . . . . .	7
2.1.1	Riemannin geometriaa . . . . .	8
2.1.2	Einsteinin kenttäyhtälöt . . . . .	12
2.2	Schwarzschildin ratkaisu . . . . .	13
2.3	Neutronitähden tilanyhtälö . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Kvanttikromodynamiikka eli QCD</b>	<b>16</b>
3.1	QCD:n historiaa . . . . .	16
3.2	QCD:n perusteita . . . . .	17
3.3	Matalan energian QCD:n approksimointi . . . . .	19
3.4	Kondensoituminen . . . . .	21
3.5	Asymptoottiset tiheydet . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Nambu-Jona-Lasinio-malli</b>	<b>25</b>
4.1	Kahden kvarkkimaun NJL-malli . . . . .	26
4.1.1	Symmetria . . . . .	26
4.1.2	Keskimääräisen kentän approksimaatio . . . . .	28
4.1.3	Helisiteetti ja kiralityetti . . . . .	29
4.1.4	Aukkoyhtälö . . . . .	30
4.1.5	Mesonipropagaattorit . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Kondensaatit</b>	<b>34</b>
5.1	Dikvarkkikondensaatit . . . . .	35
5.2	Dikvarkkikondensaatti tapauksessa $\delta \neq 0$ ja $\phi \neq 0$ . . . . .	42
5.2.1	Oppenheimer-Volkoff-yhtälöt ja dikvarkkikondensaatti . . . . .	44
5.3	Kvarkki-antikvarkkikondensaatti . . . . .	45
5.4	Spin-1 -kondensaatti . . . . .	48

<b>6</b>	<b>Numeeriset tulokset</b>	<b>53</b>
6.1	Dikvarkkikondensaatti tapauksessa $\delta \neq 0$ ja $\phi \neq 0$ . . . . .	53
6.2	Kvarkki-antikvarkkikondensaatti . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>Schwarzschildin ratkaisu</b>	<b>65</b>
A.1	Klassinen raja . . . . .	65
A.2	Schwarzschildin metriikka . . . . .	66
A.3	Oppenheimer-Volkoff-yhtälöt . . . . .	70
<b>B</b>	<b>Termodynaamisen potentiaalin johtaminen dikvarkkikondensaateille tapauksessa <math>\delta \neq 0</math> ja <math>\phi \neq 0</math></b>	<b>73</b>
<b>C</b>	<b>Termodynaamisen potentiaalin johtaminen dikvarkkikondensaateille</b>	<b>79</b>
<b>D</b>	<b>Termodynaamisen potentiaalin johtaminen spin-1 -kondensaateille</b>	<b>82</b>

# Luku 1

## Johdanto

Kvanttikromodynamiikka (QCD) on vahvan vuorovaikutuksen perusteoria, joka kuvaa kvarkkien välisiä vuorovaikutuksia. Vahvan vuorovaikutuksen välittäjähiukkasina toimivat gluonit. Kvarkkien lisäksi gluonit kantavat värivarausta ja gluonien välillä on myös vuorovaikutuksia. Tämä johtaa monimutkaiseen teorian rakenteeseen ja siihen, että kvarkkiaine voi esiintyä monissa erilaisissa faaseissa.

QCD:llä on ominaisuus, jota kutsutaan kiraalisymmetriaksi. Kiraliteetti kertoo hiukkasen spinin suunnan liikemäärävektorin suhteen. Kiraliteetin yhteydessä usein puhutaan vasen- ja oikeakiraalisista hiukkasista, vastaten hiukkasia, joiden spin on liikemäärän suuntainen (oikea) ja liikemäärän suunnalle vastakkainen (vasen). Kiraalisymmetria on QCD:n vakuuissa kuitenkin rikkoutunut. Kiraalisymmetrian rikkoutumiseen liittyy kvarkki-antikvarkkikondensaatin  $\langle \bar{q}q \rangle$  muodostuminen.

Kvarkki-antikvarkkikondensaatin  $\langle \bar{q}q \rangle$  muodostumisella on vaikutuksia myös kvarkkien käyttäytymiseen. Kvarkkien vuorovaikutukset kvarkki-antikvarkkikondensaatin kanssa saavat aikaan sen, että kvarkit vaikuttavat massiivisemmilta kuin mitä ne ovat faasissa, jossa  $\langle \bar{q}q \rangle = 0$ . Jo vuonna 1975 John Collins ja Malcolm Perry [1] sekä Nicola Cabibbo ja Giorgio Parisi [2] esittivät, että suuressa lämpötilassa tapahtuu faasitransitio, jossa kvarkit vapautuvat hadroneista muodostaen kvarkki-gluoni-plasmaa (QGP). Tämä faasitransitio liittyy kiraalisymmetrian palautumiseen.

Collins ja Perry [1] ehdottivat myös, että riittävän suuressa tiheydessä kvarkit olisivat värisuprajohtavassa faasissa. Sitä tutkittiin tarkemmin muunmuassa Bertrand Barroisin [3], Steven Frautschin [4] sekä David Bailinin ja Alex Loven [5] toimesta, mutta saatujen energia-aukkojen suuruudet olivat varsin pieniä. Tavallisten suprajohteiden kohdalla oli havaittu, että  $T_C \approx 0.57\Delta$ , eli pieni energia-aukko johtaa matalaan kriittiseen lämpötilaan. Tämän vuoksi värisuprajohtavan faasin ei ajateltu olevan fysikaalisesti relevant-

ti. Vasta 1990-luvulla havaittiin, että värisuprajohtavassa faasissa energiaaukko saattaisikin olla suuruusluokkaa 100 MeV [6, 7]. Tämä johtaa korkeampaan kriittiseen lämpötilaan, jolloin värisuprajohtavaa kvarkkiainetta saattaisi esiintyä esimerkiksi neutronitähtien ytimissä [8]. Koska  $1 \text{ MeV} = 1.16 \cdot 10^{10} \text{ K}$ , on kriittinen lämpötila  $T_C$  tällöin suuruusluokkaa  $10^{12} \text{ K}$ . Koska neutronitähden pintalämpötila on alle  $10^9 \text{ K}$ , saattaisi tällöin neutronitähden ytimessä lämpötila olla matalampi kuin värisuprajohtavan faasin kriittinen lämpötila [9].

Kvarkkiaineen värisuprajohtavuutta on tutkittu melko paljon. Todennäköisimpänä värisuprajohtavana faasina pidetään niin sanottua CFL-faasia (color-flavor locked), jossa väri- ja makuindeksit lukkiutuvat toisiinsa. Tämä faasi on tosin mahdollinen vasta, kun otetaan huomioon kolme kvarkkimakua, ja siten se ei sisälly tähän tutkimukseen. Lisäksi kvarkkiaine on CFL-faasissa vasta todella suurilla kemiallisen potentiaalilin  $\mu$  arvoilla. Tällöin hadronisen faasin ja CFL-faasin välille jää alue, jossa kvarkkiaine on värisuprajohtavaa, mutta ei ole lainkaan selvää, onko värisuprajohtavassa faasissa olevia aktiivisia kvarkkimakua kaksi vai kolme. Tämä johtuu siitä, että s-kvarkin massa on huomattavasti suurempi kuin u- ja d-kvarkkien massat. Kolmen keveimmän kvarkkimaun massojen suhteet ovat suuruusluokkaa  $1 : 2 : 40$ . On siten mahdollista, että s-kvarkit eivät ole värisuprajohtavia vielä näin alhaisissa tiheyksissä, johtuen niiden huomattavasti suuremmasta massasta u- ja d-kvarkkeihin nähden. Siten on todennäköistä, että tässä alueessa kvarkkiaine on niin kutsutussa 2SC-faasissa (two flavor color superconductor). On myös esitetty tutkimustuloksia, joiden mukaan neutronitähti, jolla on CFL-faasissa olevasta kvarkkiaineesta koostuva ydin, ei ole stabiili [8]. Siten 2SC-faasi saattaa olla neutronitähtien kannalta oleellinen [10, 11].

Kvarkki-gluoni-plasmaa on varmasti esiintynyt alkuräjähdyksen yhteydessä. Siitä on tehty myös mahdollisesti havaintoja SPS-törmäytymässä [12]. RHIC-törmäytymässä suoritetuissa kokeissa on kiistatta tuotettu vahvasti vuorovaikuttavaa kollektiivisesti vapaata ainetta [13, 14], mutta tämän aineen ominaisuuksien kaikista yksityiskohdista ei vielä olla täysin yksimielisiä. On kuitenkin melko varmaa, että LHC:n (Large Hadron Collider) valmistuksessa Euroopan hiukkasfysiikan tutkimuskeskukseen CERNiin<sup>1</sup> kvarkki-gluoni-plasmaa tullaan havaitsemaan. LHC:n tärkeimpänä tehtävänä on tosin niin sanotun Higgsin hiukkasen löytäminen, joka on ainut hiukkasfysiikan standardimallin hiukkanen, jota ei vielä ole havaittu. Tämän lisäksi LHC:n ALICE-kokeessa (A Large Ion Collider Experiment) yritetään havaita kvarkki-gluoni-

---

<sup>1</sup>CERN on lyhenne sanoista Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, joka tarkoittaa Euroopan ydinfysiikan tutkimusneuvostoa. Tämä lakkautettiin vuonna 1954. Nykyisin käytetään nimeä European Organization for Nuclear Research, mutta vanhaa lyhennettä CERN käytetään edelleen.

plasmaa. ALICEN:n tehtävänä onkin selvittää vahvasti vuorovaikuttavan, kuuman QCD-aineen ominaisuudet.

Tässä työssä tutustutaan tiheän kvarkkiaineen ilmiöihin. Lähinnä keskitytään kvarkki-antikvarkkikondensaatin sekä erilaisten dikvarkkikondensaattien muodostumiseen tiheässä kvarkkiaineessa. Nämä ovat tärkeitä neutronitähtien fysiikan kannalta, sillä neutronitähdissä olosuhteet ovat sellaiset, että värisuprajohtavaa kvarkkiainetta voi syntyä. Siten neutronitähtien ominaisuuksien tuntemiseksi on tunnettava tiheän kvarkkiaineen täsmälliset ominaisuudet.

Tämän työn päämotivaationa tutustutaan ensin neutronitähden fysiikkaan ja johdetaan neutronitähden tilanyhtälö. Tämän jälkeen siirrytään tiheän kvarkkiaineen ominaisuuksiin ja johdetaan kuusi erilaista kvarkki-antikvarkki- ja dikvarkkikondensaattia sisältävän kvarkkiaineen termodynaamiset yhtälöt. Numeerisesti ratkaistaan kvarkkiaineen termodynamiikka tapauksissa, joissa otetaan huomioon kvarkki-antikvarkkikondensaatti  $\langle \bar{q}q \rangle$  sekä kvarkki-antikvarkkikondensaatti  $\langle \bar{q}q \rangle$  ja dikvarkkikondensaatti  $\langle q^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q \rangle$ . Neutronitähden tilanyhtälöiden numeerinen analyysi jää tämän työn ulkopuolelle.



# Luku 2

## Neutronitähtien fysiikkaa

Neutronitähtien olemassaolo on ennustettu ensimmäisen kerran varsin pian neutronin löytymisen<sup>1</sup> jälkeen, jolloin niiden arveltiin syntyvän supernovaräjähdyksen yhteydessä. Ensimmäisen, yleiseen suhteellisuusteoriaan perustuvan, teoreettisen ennusteen neutronitähtien rakenteelle esittivät Richard Tolman [15] ja Julius Robert Oppenheimer sekä George Michael Volkoff [16] vuonna 1939. Ensimmäisen pulsarin havaitsivat Jocelyn Bell Burnell ja Antony Hewish vuonna 1967. Myöhemmin tämän on todettu olevan nopeasti pyörivä neutronitähti [9].

Neutronitähti on kuin suuri atomiydin, joka koostuu pääosin neutroneista. Sen lisäksi neutronitähdissä on pieni osa elektroneita ja protoneita. Neutronitähden pintalämpötila on alle  $10^9$  K, kun sen syntymästä on kulunut vuosi. Sen massa on samaa suuruusluokkaa kuin auringon massa, mutta sen säde on noin 10 km. Tästä johtuen on neutronien lukumäärätiheys neutronitähden sisällä  $0.1 - 1 \text{ fm}^{-3}$ , joka on samaa suuruusluokkaa kuin ydinaineen tiheys  $0.16 \text{ fm}^{-3}$ . Tavallisesti neutronitähtien pinnalla magneettikentän voimakkuus on suuruusluokkaa  $10^8$  T, johtuen niiden nopeasta pyörimisliikkeestä akselinsa ympäri [9].

### 2.1 Yleistä suhteellisuusteoriaa

Yleisessä suhteellisuusteoriassa joudutaan tekemisiin tensorilaskennan kanssa, sillä tensorit ovat käytännöllisiä siirryttäessä usein koordinaattijärjestelmästä toiseen. Tensori on multilineaarikuvaus ja tensorien tärkein ominaisuus on se, että niiden komponentit muuntuvat koordinaatistomuunnoksissa seu-

---

<sup>1</sup>Neutronin havaitsi ensimmäisenä kokeellisesti James Chadwick vuonna 1932.

raavasti:

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\alpha_n}}{\partial x^{\gamma_n}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\delta_m}}{\partial x'^{\beta_m}} T^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\delta_1 \dots \delta_m}. \quad (2.1)$$

Edellä ja jatkossa on käytetty niin kutsuttua Einsteinin summaussääntöä, jossa ylhäällä ja alhaalla toistuvan indeksin yli summataan eli

$$A^\alpha B_\alpha = \sum_\alpha A^\alpha B_\alpha. \quad (2.2)$$

Lisäksi käytetään osittaisderivaatalle paikkakoordinaattien suhteen merkintää

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = A^\mu_{,\nu}. \quad (2.3)$$

Nämä merkinnät lyhentävät laskuja merkittävästi.

### 2.1.1 Riemannin geometriaa

Newtonin mekaniikka perustuu aika-avaruuteen, jossa aika on kaikille havait-sijoille sama. Tätä kutsutaan absoluuttiseksi ajaksi. Tällaisessa aika-avaruudessa tapahtumat voidaan aikajärjestää siten, että tapahtumien järjestys on kaikkien havaitsijoiden mielestä sama. Newtonin aika-avaruudessa koordi-naatistomuunnoksissa säilyy invarianttina pisteiden välinen etäisyys

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.4)$$

Tällaisen pituuden säilyttää invarianttina niin sanottu Galilei-muunnos

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{V}t, \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Edellä  $\vec{V}$  on koordinaatistojen välinen nopeus. Suhteellisuusteoriassa aika ja avaruus yhdistetään neliulotteiseksi aika-avaruudeksi. Yleisessä suhteellisuus-teoriassa sallitaan lisäksi se, että aika-avaruus voi olla kaareva. Tähän ajaudutaan, kun halutaan käyttää koordinaatistoja, jotka ovat kiihtyvässä liikkeessä toistensa suhteen. Kaarevia, metrisiä avaruuksia käsittelevää matematiikan alaa kutsutaan Riemannin geometriaksi [17].

Kaarevassa avaruudessa pisteiden välisen etäisyyden antaa viivaelementti  $ds$ , joka määritellään seuraavasti:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.6)$$

Tässä  $g_{\mu\nu}(x)$  on metrinen tensori, joka määrittää kaarevan avaruuden sisä-tulon. Lisäksi  $dx^\mu$  ja  $dx^\nu$  ovat tangenttiavaruuden vektoreita pisteessä  $x$ .

Viivaelementti  $ds$  säilyy invarianttina koordinaatistomuunnoksissa. Siirryttäessä koordinaateista  $x$  koordinaatteihin  $x'$ , vektori  $dx^\mu$  muuntuu seuraavasti:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha. \quad (2.7)$$

Metrinen tensori muuntuu koordinaatistomuunnoksissa kuten toisen kertaluvun kovariantti tensori eli

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Viivaelementti säilyy siten invarianttina, sillä

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} dx'^\gamma \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\epsilon} dx'^\epsilon \\ &= \delta^\mu_\gamma \delta^\nu_\epsilon g'_{\mu\nu} dx'^\gamma dx'^\epsilon \\ &= g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = ds'^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mielivaltaisen käyrän pituus Riemannin monistolla saadaan lausekkeesta

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}} d\tau, \quad (2.10)$$

missä  $\tau \in [\tau_1, \tau_2] \subset \mathbb{R}$  on mielivaltainen parametri [17].

Viivaelementtiä käyttäen voidaan johtaa geodeettinen yhtälö, joka antaa kaarevassa avaruudessa lyhyimmän mahdollisen reitin kahden pisteen välille vastaten laakean avaruuden suoraa. Parametrisoidaan yhtälössä (2.10) viivaelementti pituudellaan, jolloin saadaan

$$\tilde{s} = \int_0^{\tilde{s}} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} ds. \quad (2.11)$$

Merkitään jatkossa  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ . Integraali (2.11) saa ääriarvonsa, kun niin kutsuttu Euler-Lagrange-yhtälö toteutuu. Jos integrandia merkitään funktiolla  $f(x^\mu, \dot{x}^\nu)$ , on Euler-Lagrange-yhtälö

$$\frac{\partial f(x^\mu, \dot{x}^\nu)}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial f(x^\mu, \dot{x}^\nu)}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Lisäksi huomataan, että  $\frac{d}{ds} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} = 0$ , sillä  $\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} = 1$ . Sovelletaan Euler-Lagrange-yhtälöä nyt lausekkeeseen (2.11), jolloin saadaan johdettua

geodeettiseksi yhtälöksi

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \delta_\mu^\beta + g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \delta_\mu^\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} - 1/2 \frac{g_{\alpha\beta, \mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} \\
&= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{-1/2} \left[ \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \dot{x}^\alpha + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \dot{x}^\beta + g_{\mu\beta} \ddot{x}^\beta - g_{\alpha\beta, \mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Geodeettinen yhtälö voidaan kirjoittaa kompaktissa muodossa

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (2.13)$$

jossa esiintyviä lukuja

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right) \quad (2.14)$$

kutsutaan Christoffelin symboleiksi. Kuten lausekkeesta (2.14) voidaan havaita, ovat Christoffelin symbolit symmetrisiä indeksien  $\mu$  ja  $\nu$  vaihdon suhteen. Siten riippumattomia Christoffelin symboleja on 40 kappaletta [17].

Geodeettinen yhtälö kertoo sen, miten vapaat hiukkaset kulkevat aika-avaruudessa. Laakeassa aika-avaruudessa voidaan aina valita koordinaatisto siten, että  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$ ,  $\forall \alpha, \mu, \nu$ . Tällöin geodeettinen yhtälö saa muodon

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = 0. \quad (2.15)$$

Tämä on analoginen Newtonin II lain kanssa, sillä Newton II vapaille hiukkasille on

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = 0. \quad (2.16)$$

Koska kontravariantin vektorin  $A^\alpha$  osittaisderivaatta ei yleensä ole tensori, on hyödyllistä määritellä uusi derivaatta, niin sanottu kovariantti derivaatta. Tätä merkitään puolipisteellä ja se määritellään seuraavasti:

$$A^\alpha_{;\mu} = A^\alpha_{,\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\beta. \quad (2.17)$$

Tämä derivaatta muuntuu koordinaatistomuunnoksissa kuten tensori. Kovariantti derivaatta voidaan määritellä myös yleiselle tensorille. Sekatensorin  $A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m}$  kovariantti derivaatta on

$$\begin{aligned}
A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m; \mu} &= A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m, \mu} \\
&+ \Gamma_{\gamma_1 \mu}^{\alpha_1} A^{\gamma_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} + \dots + \Gamma_{\gamma_n \mu}^{\alpha_n} A^{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \gamma_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} \\
&- \Gamma_{\beta_1 \mu}^{\gamma_1} A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\gamma_1 \beta_2 \dots \beta_m} - \dots - \Gamma_{\beta_m \mu}^{\gamma_m} A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_{m-1} \gamma_m}.
\end{aligned}$$

Kovariantti derivaatta liittyy vektorin yhdensuuntaissiirtoon. Laakeassa avaruudessa vektoria voidaan yhdensuuntaissiirtää mihin tahansa avaruuden pisteeseen vektorin pysyessä muuttumattomana. Kaarevassa avaruudessa tämä ei ole mahdollista. Vektorin yhdensuuntaissiirto kaarevassa avaruudessa määritellään siten, että siirrettäessä vektoria jotakin avaruuden geodeesia pitkin, vektorin asema geodeesin tangenttivektorien suhteen pysyy vakiona [17].

Kaarevassa avaruudessa kovariantit derivaatat eivät kommutoi. Tämä voidaan osoittaa seuraavasti. Olkoon  $A_\beta$  mielivaltainen kontravariantti vektori. Tällöin

$$\begin{aligned}
& A_{\beta;\mu\nu} - A_{\beta;\nu\mu} \\
&= (A_{\beta;\mu,\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha A_{\alpha;\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_{\beta;\alpha}) - (A_{\beta;\nu,\mu} - \Gamma_{\beta\mu}^\alpha A_{\alpha;\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha A_{\beta;\alpha}) \\
&= A_{\beta,\mu,\nu} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha A_\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\alpha A_{\alpha,\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha (A_{\alpha,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda A_\lambda) \\
&\quad - A_{\beta,\nu,\mu} + \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha A_\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha A_{\alpha,\mu} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha (A_{\alpha,\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda A_\lambda) \\
&= (\Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha) A_\alpha,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

jossa esiintyy niin sanottu Riemannin tensori

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\lambda. \tag{2.19}$$

Riemannin tensorille pätevät seuraavat symmetriaominaisuudet:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu}, & R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\nu\mu} \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\mu\nu\alpha\beta}, & R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Riemannin tensoria  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  voidaan siis pitää kahden toisen kertaluvun antisymmetrisen tensorin  $A_{\alpha\beta}$  ja  $B_{\mu\nu}$  tensoritulona. Toisen kertaluvun antisymmetrisellä tensorilla on kuusi riippumatonta komponenttia. Lisäksi Riemannin tensori on symmetrinen kahden ensimmäisen ja kahden viimeisen indeksin vaihdon suhteen, joten sitä voidaan pitää tensorien  $A_{\alpha\beta}$  ja  $B_{\mu\nu}$  riippumattomien komponenttien suhteen symmetrisenä  $6 \times 6$  matriisina. Symmetrisellä  $6 \times 6$  matriisilla on 21 riippumatonta komponenttia. Viimeinen symmetriarelaatio poistaa lisäksi yhden riippumattoman komponentin, joten Riemannin tensorilla on kaikenkaikkiaan 20 riippumatonta komponenttia [17].

Riemannin tensori kertoo avaruuden kaarevuuden. Laakeassa avaruudessa on aina  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha = 0$ . Se, että Riemannin tensori on nolla, on riittävä ja välttämätön ehto avaruuden laakeudelle. Voidaan osoittaa, että Riemannin tensori on ainut tensori, joka voidaan konstruoida ottamalla toisen kertaluvun derivaattoja metrisestä tensorista. Riemannin tensori toteuttaa lisäksi Bianchin identiteetit

$$R_{\beta\mu\nu;\sigma}^\alpha + R_{\beta\nu\sigma;\mu}^\alpha + R_{\beta\sigma\mu;\nu}^\alpha = 0, \tag{2.21}$$

$$(R_{\nu}^\mu - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^\mu R)_{;\mu} = 0. \tag{2.22}$$

Bianchin toisessa identiteetissä esiintyy Riemannin tensorista kontraktoimalla saatavat Riccin tensori

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} \quad (2.23)$$

ja kaarevuusskalaari

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}. \quad (2.24)$$

Riemannin tensorin symmetriaominaisuuksista seuraa, että Riccin tensori on symmetrinen. Siten Riccin tensorilla on 10 riippumatonta komponenttia eli yhtä monta kuin metrisellä tensorilla [17].

## 2.1.2 Einsteinin kenttäyhtälöt

Aika-avaruudessa olevaa materiaa voidaan kuvata niin kutsutulla energia-liikemäärätensorilla  $T^{\mu\nu}$ , joka on symmetrinen indeksien vaihdon suhteen. Energialiikemäärätensorilla on siis kymmenen riippumatonta komponenttia, jotka voidaan tulkita seuraavasti:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \text{energiatiheys,} \\ T^{0j} &= \text{liikemäärätiheys suuntaan } x^j, \\ T^{jk} &= x^j\text{:n suuntainen liikemäärän vuon tiheys suuntaan } x^k. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Koska materian energia ja liikemäärä säilyvät, voidaan osoittaa, että

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (2.26)$$

Koska materia määrää aika-avaruuden geometrian, ja aika-avaruudessa olevaa materiaa kuvaa  $T^{\mu\nu}$ , on etsittävä symmetrinen toisen kertaluvun kontravariantti tensori, joka on metrisen tensorin ja korkeintaan sen toisten osittaisderivaattojen funktio. Lisäksi tämän tensorin on oltava metrisen tensorin toisen kertaluvun derivaattojen suhteen lineaarinen, sen kovariantin derivaatan oltava nolla ja sen on oltava invariantti koordinaatistomuunnoksissa. Se, että etsityn tensorin on oltava toisten kertaluvun derivaattojen suhteen lineaarinen, johtuu siitä, että tämä johtaa kvasilineaariseen osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmään. Yhtälöryhmästä halutaan kvasilineaarinen, sillä tätä monimutkaisemmista toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmistä ja niiden ratkaisuksista ei osata sanoa juuri mitään [17].

Yleisin mahdollinen tällainen tensori on

$$g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}(R_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu}), \quad (2.27)$$

jossa esiintyvää vakiota  $\lambda$  kutsutaan kosmologiseksi vakioksi. Kosmologiaa lukuunottamatta fyysisissä sovelluksissa yleensä oletetaan, että  $\lambda = 0$ . Jäljelle jäänyttä tensoria

$$R_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}R = G_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

kutsutaan Einsteinin tensoriksi. Se on symmetrinen indeksien vaihdon suhteen ja sisältää toisen kertaluvun derivaattoja metrisestä tensorista. Lisäksi Bianchin toisen identiteetin (2.22) perusteella sen kovariantti derivaatta on nolla.

Näin saadaan kenttäyhtälöt gravitaatiolle

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Valitsemalla vakioksi  $\kappa = 8\pi G$  saadaan hitaasti liikkuvien kappaleiden ja heikon gravitaatiokentän rajalla Newtonin gravitaatioteorian kenttäyhtälö. Tämä on osoitettu liitteessä A.1. Albert Einstein esitti gravitaation kenttäyhtälöt vuonna 1915 artikkelissa "The field equations of gravitation"[18].

## 2.2 Schwarzschildin ratkaisu

Pallosymmetrinen, staattinen ja asympotoottisesti laakea Einsteinin kenttäyhtälöiden ratkaisu on nimeltään Schwarzschildin ratkaisu. Tämän ratkaisun löysi Karl Schwarzschild vuonna 1916. Se kuvaa aika-avaruutta pallosymmetrisen massajakauman, esimerkiksi tähden, ulkopuolella. Voidaan osoittaa, että Schwarzschildin ratkaisu pätee myös silloin, jos staattisuusoletuksesta luovutaan.

Schwarzschildin ratkaisun laskeminen Einsteinin kenttäyhtälöistä on esitetty liitteessä A. Samassa liitteessä on esitetty myös Oppenheimer-Volkoff-yhtälöiden johtaminen massajakauman sisäpuolella.

Viivaelementiksi massajakauman ulkopuolella, kun  $r > R$ , saadaan siten

$$ds^2 = (1 - 2GM/r) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.30)$$

Massajakauman sisäpuolella neutronitähteä kuvaavat niin kutsutut Oppenheimer-Volkoff-yhtälöt, jotka ovat

$$\begin{aligned} P'(r) &= -\frac{G\epsilon(r)\mathcal{M}(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)}\right) \left(1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right)^{-1} \left(\frac{4\pi r^3 P(r)}{\mathcal{M}(r)} + 1\right), \\ \mathcal{M}'(r) &= 4\pi r^2 \epsilon(r). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Yhtälöissä esiintyvät funktiot ovat energiatiheys  $\epsilon(r)$ , paine  $P(r)$  ja säteen  $r$  sisäpuolella oleva massa  $\mathcal{M}(r)$ .

## 2.3 Neutronitähden tilanyhtälö

Oppenheimer-Volkoff-yhtälöt määräävät neutronitähden dynamiikan, mutta näiden lisäksi tarvitaan tähden sisällä olevan materian tilanyhtälö. Tilan-

yhtälö on muotoa  $P = P(\epsilon)$  ja se liittyy tähden termodynamiikkaan. Tätä varten tarvitaan hiukan termodynamiikan perusteita.

Partitiofunktio  $Z$ , jota tullaan käsittelemään myös kondensaattien yhteydessä, liittyy suureen potentiaaliin  $\Omega_{GC}$  seuraavasti

$$Z = e^{-\Omega_{GC}/T}, \quad (2.32)$$

missä  $T$  on lämpötila. Suurelle potentiaalille pätee toisaalta

$$\Omega_{GC} = -PV, \quad (2.33)$$

missä  $P$  on paine ja  $V$  tilavuus. Kondensaattien yhteydessä käsiteltävä termodynaaminen potentiaali  $\Omega$  on suuren potentiaalin tiheys, joten termodynaaminen potentiaali on suuri potentiaali jaettuna tilavuudella:

$$\Omega = \frac{\Omega_{GC}}{V}. \quad (2.34)$$

Siten paine ja termodynaaminen potentiaali liittyvät toisiinsa seuraavasti:

$$\Omega = -P. \quad (2.35)$$

Partitiofunktio määrittää myös energiatiheyden  $\epsilon$ , joka on

$$\epsilon = \frac{E}{V} = \frac{T}{V} \left( \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln T} \right|_{V,\mu} + \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln \mu} \right|_{V,T} \right). \quad (2.36)$$

Näiden avulla voidaan määrittää tilanyhtälö muodossa  $\epsilon = \epsilon(P)$  [9].

Edellä esitetyn perusteella saamme tilanyhtälöksi

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{T}{V} \left( \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln T} \right|_{V,\mu} + \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln \mu} \right|_{V,T} \right) \\ &= \frac{T}{V} \left( \frac{\partial T}{\partial \ln T} \frac{\partial}{\partial T} \left( -\frac{V}{T} \Omega \right) + \frac{\partial \mu}{\partial \ln \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( -\frac{V}{T} \Omega \right) \right) \\ &= -T^2 \frac{\partial \Omega}{\partial T} \frac{1}{T} - \mu \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$= T^2 \frac{\partial P}{\partial T} \frac{1}{T} + \mu \frac{\partial P}{\partial \mu}. \quad (2.38)$$

Tilanyhtälö ja Oppenheimer-Volkoff-yhtälöt muodostavat yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \epsilon &= T^2 \frac{\partial P}{\partial T} \frac{1}{T} + \mu \frac{\partial P}{\partial \mu}, \\ \frac{d\mathcal{M}(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \epsilon(r), \\ \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{G\epsilon(r)\mathcal{M}(r)}{r^2} \left( 1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right) \left( 1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r} \right)^{-1} \left( \frac{4\pi r^3 P(r)}{\mathcal{M}(r)} + 1 \right), \end{aligned} \quad (2.39)$$



jota voidaan kutsua neutronitähden tilanyhtälöksi. Jotta tämä voitaisiin ratkaista, tulee neutronitähden sisällä olevan kvarkkiaineen tilanyhtälö tuntea. Seuraavaksi tutustutaan tiheään kvarkkiaineen ominaisuuksiin ja johdetaan kvarkkiaineelle tilanyhtälö, jossa otetaan huomioon erilaisten kondensaattien muodostuminen.

# Luku 3

## Kvanttikromodynamiikka eli QCD

### 3.1 QCD:n historiaa

Kuplakammion kehittämisen myötä 1950-luvulla hiukkasfyysikot havaitsivat suuren joukon uusia vahvasti vuorovaikuttavia hiukkasia, joita alettiin kutsua hadroneiksi. Kaikki havaitut hiukkaset eivät mitenkään voineet olla alkeishiukkasia, joten tarvittiin uusia teoreettisia malleja selittämään havaittujen hiukkasten alkuperä. Vuonna 1963 Murray Gell-Mann ja George Zweig esittivät, että kaikki hadronit koostuvat uusista alkeishiukkasista, kvarkeista. Jotta havaittujen hiukkasten sähkövaraukset voitiin selittää, asetettiin kvarkeille murtolukusähkövaraukset  $Q_u = \frac{2}{3}e$ ,  $Q_d = Q_s = -\frac{1}{3}e$ . Kvarkkeja oletettiin aluksi olevan kolmea lajia ja niiden kuuluvan  $SU(3)$ -ryhmän perusesitykseen. Lisäksi jokaisella kvarkilla ajateltiin olevan antihukkanen, jolla olisi vastakkaiset kvanttiluvut kuin vastaavalla kvarkilla. Antikvarkkien oletettiin kuuluvan  $SU(3)$ -ryhmän perusesityksen konjugoituun esitykseen. Baryonien ajateltiin koostuvan kolmesta kvarkista ja mesonien kvarkki-antikvarkki pareista [19, 20].

Teorialla kyettiin selittämään lähes kaikki havaitut hiukkaset ja niiden kvanttiluvut. Kvarkkiteoria ei kuitenkaan selittänyt sitä, mikä voima satoi kvarkit hadroneiksi, tai miksei kvarkkeja ollut havaittu. Johtuen kvarkkien murtolukuisista sähkövarauksista, niiden olisi pitänyt olla helppoja havaita. Yhtään hiukkasta, jolla olisi ollut murtolukusähkövaraus, ei kuitenkaan ollut löydetty. Suurin teoriaan liityvä ongelma oli kuitenkin se, että niin sanotulla  $\Delta^{++}$ -hiukkasella oli hiukkasten vaihdon suhteen symmetrinen aaltofunktio.  $\Delta^{++}$ -hiukkanen koostuu kolmesta u-kvarkista, joilla on samansuuntaiset spinit ja ratapyörimismäärä 0.  $\Delta^{++}$ -hiukkasella on siten sähkövaraus  $+2e$  ja spin  $\frac{3}{2}$ . Se on siis fermioni, jolla tulisi olla hiukkasten vaihdon suhteen antisymmetrinen aaltofunktio [19, 20].

Yoichiro Nambu ja Moo-Young Han [21] sekä Oscar W. Greenberg ja Murray Gell-Mann esittivät vuonna 1965, että kvarkeilla olisi lisäksi  $SU(3)$ -symmetrinen värivaraus. Kun kaikilla  $\Delta^{++}$ -hiukkasen kvarkeilla on toisistaan poikkeava värivaraus, saadaan  $\Delta^{++}$ -hiukkaselle hiukkasvaihdon suhteen antisymmetrinen aaltofunktio [19].

Myöhemmin on löydetty myös kolme raskaampaa kvarkkimakua ja havaittu, että kvarkkien  $SU(3)$ -makusymmetria on vain approksimatiivinen, johtuen kvarkkimakujen erisuuruuksista massoista. Koska kolmen keveimmän kvarkkimaun massat ovat melko lähellä toisiaan ja hyvin pieniä verrattuna QCD:n energiaskaalaan, on  $SU(3)$ -makusymmetria kuitenkin hyvä approksimaatio. Suuremmat makusymmetriaryhmät, kuten  $SU(4)$ ,  $SU(5)$  tai  $SU(6)$ , eivät kuitenkaan toimi hyvin edes approksimaatioina. Tämä johtuu raskaimpien kvarkkimakujen suurista massoista suhteessa keveimpiin kvarkkeihin. Esimerkiksi c-kvarkille, joka on kolmesta raskaasta kvarkista kevyin, on  $m_c/m_u \approx 400 - 900$  [11].

## 3.2 QCD:n perusteita

Kvanttikromodynamiikka eli QCD on  $SU(3)$ -symmetrinen mittakenttäteoria, jota kuvaa Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_{N_F=1}^6 \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi. \quad (3.1)$$

Lagrangen tiheydessä esiintyy kovariantti derivaatta

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \quad (3.2)$$

joka sisältää gluonikentän

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)\tau^a. \quad (3.3)$$

Lisäksi lausekkeessa (3.1) on kentänvoimakkuustensori, joka määritellään

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)\tau^a. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Kentänvoimakkuustensorissa esiintyvät matriisit  $\tau^a$  toteuttavat algebran

$$[\tau^a, \tau^b] = if^{abc}\tau^c. \quad (3.5)$$

Edellä  $\tau^a$  ovat  $SU(3)$ -ryhmän generaattorit ja  $f^{abc}$  rakennevakiot. Lisäksi merkintä  $A$  tarkoittaa samaa kuin  $A^\mu\gamma_\mu$ . Lagrangen tiheys (3.1) voidaan johtaa olettamalla lokaali  $SU(3)$ -symmetria, Lorentz-invarianssi ja vaatimalla, että teoria on renormalisoituva [19].

Kvanttikromodynamiikan ominaisuuksiin kuuluu asympotoottinen vapaus ja toisaalta kahliutuminen. Nämä ominaisuudet johtuvat siitä, että renormalisaation seurauksena QCD:n kytkinvakio  $g$  muuttuu energian funktiona. Yksisilmukkatasolla kytkinvakion liikemäärän  $k$  funktiona antaa lauseke

$$g(k) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} (11 - \frac{2}{3}N_F) \ln(k^2/M^2)}, \quad (3.6)$$

missä  $N_F$  on kvarkkimakujen lukumäärä. Parametri  $M$  kertoo, missä energiaskaalassa renormalisaatio on suoritettu. Lausekkeesta (3.6) nähdään, että kytkinvakio  $g(k)$  on kääntäen verrannollinen liikemääräskaalan logaritmiin. Siten suurilla energioilla  $g(k)$  on pieni ja kvarkit ovat asympotoottisesti vapaita. Matalilla energioilla  $g(k)$  on suuri ja kvarkit ovat kahliutuneet hadroneihin. Koska QCD:tä ei osata analyttisesti ratkaista, joudutaan turvautumaan approksimaatiomenetelmiin. Suurilla liikemäärillä ( $k \sim 1$  GeV), QCD:n kytkinvakio  $g(k) \approx 0.4$ , joka on riittävän pieni siihen, että approksimaatioon voidaan käyttää häiriöteoriaa, jossa vuorovaikutukset kehitetään sarjaksi teorian kytkinvakion suhteen. Niillä liikemääräskaaloilla, joita tässä työssä tarkastellaan, kytkinvakio on niin suuri, ettei teorian kehittäminen sarjaksi anna luotettavia tuloksia [19].

Värisymmetrian  $SU(3)$  lisäksi QCD:llä on muitakin symmetrioita. QCD:n Lagrangen tiheys on massattomien hiukkasten rajalla symmetrinen  $SU_L(N_F) \otimes SU_R(N_F)$ -muunnoksessa, missä  $N_F$  on massattomien kvarkkimakujen lukumäärä. Tätä kutsutaan kiraalisymmetriaksi. Kiraalisymmetria pätee kohtalaisesti kolmelle keveimmälle kvarkkimaulle, johtuen niiden pienistä massoista verrattuna vahvan vuorovaikutuksen energiaskaalaan. Luonnossa kiraalisymmetria on kuitenkin rikkoutunut [20].

Kiraalisymmetriaan liittyvät vasen- ja oikeakiraaliset kvarkkikentät, joista käytetään myös nimitystä vasen- ja oikeakätiset kentät  $q_L$  ja  $q_R$ . Ne saadaan kvarkkikenttää kuvaavasta Diracin spinorista  $q$  seuraavasti:

$$q_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} q, \quad q_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} q. \quad (3.7)$$

Vasen- ja oikeakätisille kvarkkikentille pätee  $q = q_L + q_R$ . Kun QCD:n Lagrangen tiheys massattomien hiukkasten rajalla kirjoitetaan vasen- ja oikeakätisten kenttien avulla, on se invariantti  $SU_L(N_F) \otimes SU_R(N_F)$ -muunnoksissa. Nämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$q_L \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}_L \cdot \vec{\tau}} q_L, \quad q_R \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}_R \cdot \vec{\tau}} q_R, \quad (3.8)$$

missä  $\vec{\tau}$ :n komponentit ovat  $SU(N_F)$ -ryhmän generaattorit ja  $\vec{\theta}$  on mielivaltainen vektori.  $SU_L(N_F) \otimes SU_R(N_F)$ -symmetria voidaan kirjoittaa myös vektori- ja aksiaalivektorisymmetrioiden avulla muodossa  $SU_V(N_F) \otimes SU_A(N_F)$ . Vektori- ja aksiaalivektorisymmetria vastaavat muunnoksia, jossa kvarkkikenttä  $q$  muuntuu seuraavasti:

$$q \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}q, \quad q \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}\gamma^5}q, \quad (3.9)$$

missä

$$\vec{\theta}\cdot\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \vec{\theta}_L\cdot\vec{\tau} & 0 \\ 0 & \vec{\theta}_R\cdot\vec{\tau} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Vektorisymmetria vastaa siten tapausta, jossa vasen- ja oikeakiraalisia kenttiä muunnetaan siten, että  $\vec{\theta}_L = \vec{\theta}_R$  ja aksiaalivektorisymmetria tapausta, jossa  $\vec{\theta}_L = -\vec{\theta}_R$ . QCD:n vakuumi on  $SU_V(N_F)$ -symmetrinen<sup>1</sup>, mutta vakuu-  
missa  $SU_A(N_F)$ -kiraalisymmetria on kvarkki-antikvarkkikondensaatin muodostumisen vuoksi spontaanisti rikkoutunut. Jos  $SU_A(N_F)$ -symmetria ei olisi rikkoutunut, tulisi kaikilla hadroneilla olla "kiraalinen vastinhiukkanen", jolla olisi yhtä suuri massa, mutta vastakkainen pariteetti [8].

Pionia voidaan pitää rikkoutuneelle kiraalisymmetrialle niin sanottuna Goldstonen bosonina. Jos kiraalisymmetria olisi eksakti, olisi pioni massaton. Pionilla on kuitenkin luonnossa varsin pieni massa, joten kiraalisymmetriaa voidaan pitää hyvänä approksimaationa. Edellisten lisäksi QCD:llä on vielä  $U_B(1) \otimes U_A(1)$ -kiraalisymmetria. Näistä  $U_B(1)$ -symmetria vastaa baryoniluvun säilymistä ja  $U_A(1)$ -symmetria on niin sanottu aksiaalisymmetria. Aksiaalisymmetria ei ole QCD:n todellinen symmetria, johtuen niin sanotusta aksiaalianomaliasta: QCD:n Lagrangen tiehys on  $U_A(1)$ -symmetrinen, mutta polkuintegraaliformalismilla integroimismitta  $D\Psi D\bar{\Psi}$  ei ole. Anomalialla tarkoitetaan sitä, että järjestelmän klassinen symmetria ei säily teorian kvantisoinnissa [20, 19].

### 3.3 Matalan energian QCD:n approksimointi

Koska QCD:n häiriöteoreettinen käsittely matalilla energioilla ei ole mahdollista, joudutaan käyttämään muita approksimaatiomenetelmiä. Tällöin kehitetään malleja, joilla on samoja ominaisuuksia kuin alkuperäisellä teorialla. Tässä tapauksessa haluamme teorian, joka säilyttää QCD:n kiraalisymmetrian ja kuvaa kvarkkien vuorovaikutuksia matalilla energioilla.

---

<sup>1</sup> $SU_V(N_F)$ -symmetriaa kutsutaan myös isospinsymmetriaksi.

Yleisesti teorian matalan energian käytöstä kuvaavan efektiivisen teorian Lagrangen tiheys saadaan jakamalla taustalla olevan teorian kenttäoperaattorit matalan ja korkean energian moodeihin. Jos taustalla olevan teorian fundamentaali energiaskaala on  $M$ , niin valitaan efektiivisen teorian energiaskaalalle yläraja  $\Lambda$  siten, että  $\Lambda < M$ . Määritellään seuraavaksi

$$\phi(k) = \phi_L(k) + \phi_H(k), \quad (3.11)$$

missä

$$\phi_L(k) = \begin{cases} \phi(k), & \text{jos } k \leq \Lambda, \\ 0, & \text{jos } k > \Lambda \end{cases}, \quad (3.12)$$

$$\phi_H(k) = \begin{cases} 0, & \text{jos } k \leq \Lambda, \\ \phi(k), & \text{jos } k > \Lambda \end{cases}. \quad (3.13)$$

Teorian generoiva funktionaali voidaan edellisten avulla kirjoittaa seuraavasti:

$$Z[J_L] = \int D\phi_L e^{iS_\Lambda(\phi_L) + i \int d^D x J_L(x) \phi(x)}, \quad (3.14)$$

missä

$$e^{iS_\Lambda(\phi_L)} = \int D\phi_H e^{iS(\phi_L, \phi_H)} \quad (3.15)$$

on Wilsonin efektiivinen aktio. Tämä voidaan yleisesti kirjoittaa lokaalien operaattorien avulla muodossa

$$S_\Lambda(\phi_L) = \int d^D x \mathcal{L}_\Lambda^{\text{eff}}(x), \quad (3.16)$$

missä

$$\mathcal{L}_\Lambda^{\text{eff}} = \sum_n c_n O_n(x) \left( \frac{1}{\Lambda} \right)^{\dim(O_n) - D}. \quad (3.17)$$

Operaattoreiksi  $O_n$  voidaan asettaa kaikki teorian symmetrioiden sallimat termit, jotka voidaan muodostaa kentistä  $\phi_L(k)$ . Siten operaattoreita on ääretön määrä. Tässä tapauksessa  $O_n$ :t ovat lokaaleita kiraalisymmetrisiä operaattoreita,  $c_n$ :t ovat kompleksi-arvoisia dimensiottomia kytkinvakioita ja  $\Lambda$  on teorian energiaskaalan yläraja [22, 19, 23]. Seuraavaksi tarkastellaan, mitkä operaattorit ovat matalan energian rajalla tärkeitä.

Olkoon  $E \ll \Lambda$  energiaskaala, jossa teoriaa halutaan tarkastella. Siten operaattorin  $O_n$  vaikutus dimensiottomaan observaabeliin on

$$O_n \sim c_n \left( \frac{E}{\Lambda} \right)^{D - \dim(O_n)} = \begin{cases} O(1) & , \text{jos } D - \dim(O_n) = 0 \\ \ll 1 & , \text{jos } D - \dim(O_n) > 0 \\ \gg 1 & , \text{jos } D - \dim(O_n) < 0 \end{cases}. \quad (3.18)$$

Tästä seuraa se, että vain ne operaattorit  $O_n$ , joille  $D - \dim(O_n) \leq 0$  ovat tärkeitä. Operaattorit voidaan siten luokitella seuraavasti:

$$\begin{aligned} D - \dim(O_n) < 0, & \text{ Relevantti operaattori (Superrenormalisoituva),} \\ D - \dim(O_n) = 0, & \text{ Marginaalinen operaattori (Renormalisoituva),} \\ D - \dim(O_n) > 0, & \text{ Irrelevantti operaattori (Renormalisoitumaton).} \end{aligned}$$

Vain relevantit ja marginaaliset operaattorit ovat tärkeitä, kun  $E \rightarrow 0$ . Fermionijärjestelmien tapauksessa relevantteja operaattoreita ei kuitenkaan ole ja vuorovaikuttamattoman teorian Lagrangen tiheys konstruoidaan marginaalisista operaattoreista  $\bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi$ . Järjestelmään lisättävät vuorovaikutukset ovat siten aina irrelevantteja operaattoreita, koska muita marginaalisia operaattoreita ei ole [23].

Eräs yksinkertainen teoria, joka kuvaa kvarkkien käyttäytymistä matalilla energioilla, on Nambu-Jona-Lasinio-malli (NJL-malli). Alkuperäisen NLJ-mallin Lagrangen tiheys kun  $N_F = 3$ , eli kun kvarkkimakujen lukumäärä on kolme, on

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q}(i\gamma \cdot \partial - m_q)q + \sum_{a=0}^8 \frac{g}{2} [(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \lambda^a q)^2], \quad (3.19)$$

missä  $q$  on kvarkkien kenttäoperaattori,  $g$  kytkinvakio ja  $\lambda^a$ :t Gell-Mannin matriisit. Teorian Lagrangen tiheyteen voidaan halutessa lisätä globaalisti  $U_L(3) \otimes U_R(3)$ -symmetrisiä neljän fermionin vuorovaikutuksia. NJL-mallilla voidaan kuvata kiraalisymmetrian rikkoutumista. Teoria yksinkertaistuu hie-man, kun oletetaan, että  $N_F = 1, 2$  [22].

Yoichiro Nambun ja Giovanni Jona-Lasinion kaksi vuonna 1961 kirjoittamaa artikkelia [24, 25] ovat NJL-mallin perusta. Se oli alunperin vuorovaikuttavien nukleonien teoria ja muotoiltiin ennen kuin QCD tunnettiin. QCD:n kehittämisen jälkeen ymmärrettiin, että NJL-malli voidaan myös tulkita kvarkkien efektiivisenä teoriana [8].

## 3.4 Kondensoituminen

Jokaisessa fermionijärjestelmässä riittävän alhaisilla lämpötiloilla ja attraktiivisen vuorovaikutuksen läsnäollessa muodostuu hiukkaspareja, jotka muuttavat järjestelmän perustilaa. Kun  $T = 0$ , vuorovaikuttamattomat fermionit muodostavat fermipallon, jossa kaikki kvanttitilat fermiliikemäärään  $k_F$  asti on miehitetty. Koska vapaa energia  $|E_{\vec{p}} - \mu|$ , joka vaaditaan hiukkasen tai aukon luomiseksi, häviää fermipallon pinnalla, ei hiukkasparin luomisessa fermipallon pinnalla menetetä energiaa. Jos lisäksi järjestelmässä vaikuttaa

fermionien välillä attraktiivinen vuorovaikutus, laskee hiukkasparin muodostus vapaata energiaa ja on siten järjestelmän kannalta edullista [8, 10].

Fermioniparia, jonka hiukkasten liikemäärät ja spinit ovat samansuuruiset, mutta vastakkaismerkkiset, kutsutaan Cooperin pariaksi. Täten Cooperin pari muodostaa bosonin, jolle Paulin kieltosääntö ei päde. Nämä bosonit kondensoituvat samalle kvanttitalalle, muuttaen samalla järjestelmän perustilaa. Kondensaatin muodostumisen seurauksena järjestelmän energiaspekttiin muodostuu aukko, sillä viritystilan aikaansaamiseksi on jokin Cooperin pareista rikottava. Cooperin pareja muodostuu, kunnes saavutetaan termodynaaminen tasapainotila. Tällöin järjestelmän tila on muuttunut niin paljon alkuperäisestä perustilasta muodostuneiden Cooperin parien vuoksi, että uusien parien sidosenergia on nolla [26].

Tavallisessa suprajohtavuudessa kidehilan atomytimien vaikutuksesta elektronit kokevat keskenäisen poistovoimansa sijasta varjostetun potentiaalin. Varjostettu potentiaali mahdollistaa fononien<sup>2</sup> välityksellä tapahtuvan heikon attraktiivisen vuorovaikutuksen fermipallon pinnalla olevien elektronien välillä, kun elektroneilla on yhtä suuret, mutta vastakkaismerkkiset liikemäärät ja spinit. Kun lämpötila on riittävän matala, ei elektronien lämpöliike riitä rikkomaan muodostuneita Cooperin pareja, jolloin ne kondensoituvat, ja tämän seurauksena järjestelmän perustila muuttuu. Kondensaatin muodostumisen seurauksena fotoneista tulee Andersonin-Higgsin mekanismin kautta massiivisia ja energiaspekttiin tulee aukkoja, jotka ovat suprajohtavuuden syy [27].

Vahva vuorovaikutus on tietyissä kanavissa attraktiivinen, joten värisuprajohtavuuden teoria on paljon suoraviivaisempi kuin tavallisen suprajohtavuuden. Värisuprajohteiden muodostumisen mahdollisuutta tiheässä kvarkkiaineessa onkin ensimmäisen kerran tutkittu jo vuonna 1975 [3, 4, 5]. Tällöin energia-aukon suuruus arvioitiin varsin pieneksi. Koska tavallisten suprajohteiden kriittiselle lämpötilalle pätee  $T_C \approx 0.57\Delta(T = 0)$ , ei värisuprajohteita tällöin pääsisi muodostumaan kuin hyvin pienillä lämpötiloilla. Kuitenkin 1990-luvulla huomattiin, että kun  $\mu \approx 500$  MeV, saattaisivat värisuprajohteiden energia-aukkojen suuruudet olla suuruusluokkaa  $\Delta \sim 100$  MeV. Värisuprajohtavaa kvarkkiainetta saattaisi tällöin esiintyä lämpötila-alueella, jollaisia esiintyy neutronitähtien ytimissä ja mahdollisesti myös raskasioneitämäyksissä [8].

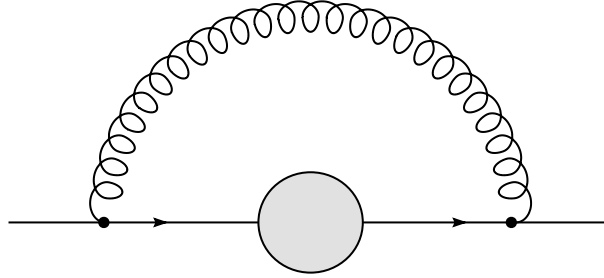
---

<sup>2</sup>Fononit ovat matalan liikemäärän ääniaaltoja.



### 3.5 Asymptoottiset tiheydet

Koska QCD:n kytkinvakio  $g$  muuttuu pieneksi suurilla energioilla, voidaan tällöin QCD:n tutkimiseen käyttää häiriöteoriaa. Koska suurissa tiheyksissä energiaskaalan antaa fermiliikemäärä  $p_F$  ja  $p_F \sim \mu$ , voidaan myös asymptoottisissa tiheyksissä QCD:tä käsitellä häiriöteoreettisesti. Tällöin voidaan myös värisuprajohtavuuteen liittyvä energiaspektrin aukko laskea suoraan käyttäen QCD:tä.



Kuva 3.1: Aukkoyhtälöön liittyvä diagrammi. Kuvassa ohut viiva ja tummennettu ympyrä kuvaavat dikvarkkikondensaatin kanssa vuorovaikuttavaa kvarkkipropagaattoria.

Aukkoyhtälö saadaan diagrammista, joka on esitetty kuvassa 3.1. Tämä voidaan esittää matemaattisesti muodossa

$$\Sigma(p) = -ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_a^\mu S(k) \Gamma_b^\nu D_{\mu\nu}^{ab}(k-p), \quad (3.20)$$

missä  $g$  on QCD:n kytkinvakio,  $\Gamma_a^\mu$  gluoniverteksi,  $S(p)$  kvarkki- ja  $D_{\mu\nu}^{ab}(k-p)$  gluonipropagaattori.

Kuten edellä todettiin, tutkittiin kvarkkien värisuprajohtavuutta ensimmäisen kerran jo vuonna 1975. Tällöin saadut energia-aukkojen suuruudet olivat varsin pieniä. Tämä johtui siitä, että suurissa tiheyksissä, kun  $g \rightarrow 0$ , kvarkkiaineen oletettiin muuttuvan heikosti vuorovaikuttavaksi plasmaksi. Edellisessä kappaleessa kuitenkin todettiin, että jos fermionijärjestelmässä on edes mielivaltaisen pieni attraktiivinen vuorovaikutus, muuttaa se järjestelmän perustilaa.

Näissä ensimmäisissä tutkimuksissa QCD:n oletettiin muuttuvan heikosti vuorovaikuttavaksi plasmaksi, joten ajateltiin, että tällöin kvarkkien välinen gluonin vaihto voidaan korvata kvarkkien nelipistevuorovaikutuksella. Tällöin saadaan aukkoylehtälöksi

$$\Delta = \mu \exp \left( -\frac{3\pi^2 \Lambda^2}{2\mu^2} \frac{1}{g^2} \right), \quad (3.21)$$

missä  $\Lambda$  on liikemäärän yläraja ( $\Lambda \sim \mu$ ), jolla regularisoidaan laskussa esiintyvien integraalien ultraviolettidivergenssit ja jota suuremmilla liikemäärillä laskussa käytetyt approksimaatiot eivät päde [28, 8]. Saatu energia-aukko on varsin pieni, sillä se on verrannollinen  $e^{-1/g^2}$ :een, missä  $g \rightarrow 0$ .

Kun otetaan huomioon pitkän kantaman efektit, muuttuu energia-aukon lauseke merkittävästi. Otettaessa huomioon Debye-varjostus ja Landau-vaimennus, saadaan energia-aukoksi

$$\Delta(p) = \mu \exp\left(-\frac{3\pi^2}{\sqrt{2}g}\right) \sin\left[\frac{g}{3\sqrt{2}\pi} \ln\left(\frac{\mu}{|p_0|}\right)\right]. \quad (3.22)$$

Suurin muutos energia-aukkojen (3.21) ja (3.22) välillä on  $g$ -riippuvuuden muuttuminen eksponenttifunktiossa. Tämä johtaa merkittävään energia-aukon kasvuun. Lisäksi aukkoyhätö (3.22) riippuu liikemäärästä  $p$  [28, 8].

## Luku 4

# Nambu-Jona-Lasinio-malli

Jatkossa tarkastellaan hiukkasprosesseja, joihin liittyy divergoivia integraaleja. Divergenssien poistaminen suoritetaan normaalisti renormalisoimalla teoria, jonka jälkeen kaikki silmukkaintegraalit haluttuun kertalukuun asti ovat äärellisiä. Renormalisaatiossa silmukkaintegraaleja vaivaavat divergenssit eristetään ja sisällytetään teorian paljaisiin parametreihin. Näin voidaan tehdä, koska paljaat parametrit eivät ole mitattavia suureita. Näiden tilalle määritellään uudet äärelliset parametrit, jotka kiinnitetään mittausten avulla.

Fysikaalisesti renormalisoituvuus tarkoittaa pääpiirteissään sitä, että pitkänkantaman ilmiöt eivät riipu teorian mikroskopiasta. Jotta teoria olisi renormalisoituva, saa vain äärellinen määrä teorian Feynmanin graafeista olla divergoivia. Renormalisoitumattoman teorian erottaa myös siitä, että teorian kytkinvakiolla on negatiivinen massan dimensio [19].

Koska NJL-malli ei ole renormalisoituva teoria, ei ole systemaattista tapaa silmukkaintegraalien divergenssien poistamiseksi. Divergoivat integraalit voidaan kuitenkin regularisoida, asettamalla liikemäärälle yläraja  $\Lambda$ , jonka yläpuolella malli ei enää päde. Tätä suuremmilla energioilla teoria korvautuu uudella mikroskooppisemmalla teorialla, joka ottaa huomioon myös suuremmissa energiaskaaloissa esiintyvät vapausasteet. Tällaisia ovat esimerkiksi hiukkaset, joille  $m_x \geq \Lambda$ . Nämä hiukkaset eivät kinemaattisesti voi esiintyä massakuorellaan energiaskaaloilla  $E < m_x$ .

Jatkossa kaikki liikemääräintegraalit regularisoidaan asettamalla kolmi-liikemäärälle yläraja  $|\vec{p}| \leq \Lambda$ . Lisäksi käytetään niin kutsuttuja luonnollisia yksiköitä, joissa  $\hbar = c = k_B = 1$ , josta seuraa  $[x^{-1}] = [t^{-1}] = [E] = [p] = [m] = [T]$ . Tällöin kaikki fysikaaliset suureet voidaan määrittellä yhden yksikön avulla. Yleensä yksikkönä käytetään megaelektronivolttia (MeV) tai femtometriä eli fermiä (fm).

## 4.1 Kahden kvarkkimaun NJL-malli

Kahden kvarkkimaun NJL-mallin Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\cancel{\partial} - m)q + g[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2], \quad (4.1)$$

missä  $q = (u, d)^T$  ja  $u, d$  ovat 4-komponenttisia Diracin spinoreita, ja  $g$  on teorian kytkinvakio, jolla on dimensio [massa]<sup>-2</sup> [22]. Tästä johtuen teoria ei ole renormalisoituva, vaan efektiivinen teoria, jota voidaan käyttää vain tietyn energiarajan alapuolella. Lagrangen tiheys sisältää lisäksi massaparametrin

$$m = \text{diag}(m_u, m_d)$$

ja Paulin spin-matriisit  $\tau^i$  [22]. Tällä mallilla lasketaan kvarkkien massa  $M$  sekä mesonien  $\sigma$  ja  $\pi$  massat  $(m_\sigma, m_\pi)$ , kun  $T = 0$  ja  $\mu = 0$ . Tämä tehdään siksi, että voitaisiin kiinnittää mallin parametrit havaittuhin suureisiin. Tässä  $\mu$  tarkoittaa kvarkkien kemiallista potentiaalia. Baryonien kemiallinen potentiaali on  $3\mu$ .

Lagrangen tiheyden (4.1) vuorovaikutustermit on valittu siten, että vain kvarkki-antikvarkkikondensaatin muodostumisen kannalta oleellinen termi  $(\bar{q}q)^2$  on otettu huomioon. Lagrangen tiheyteen joudutaan lisäämään myös termi  $(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2$ , jotta se olisi massattomien hiukkasten rajalla  $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ -symmetrinen.

### 4.1.1 Symmetria

Lagrangen tiheydellä (4.1) on  $U_L(2) \otimes U_R(2)$ -symmetria, kun  $m = 0$ . Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$SU_V(2) \otimes SU_A(2) \otimes U_V(1) \otimes U_A(1).$$

$SU_V(2)$ -muunnoksessa kvarkkikenttä  $q$  muuntuu siten, että  $q \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}q$ . Termi  $(\bar{q}q)^2$  pysyy invarianttina tässä muunnoksessa. Tämä voidaan osoittaa seuraavasti:

$$(\bar{q}q)^2 \rightarrow (q^\dagger e^{+\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}\gamma_0 e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}q)^2 = (\bar{q}q)^2. \quad (4.2)$$

Myös  $(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2$  pysyy  $SU_V(2)$ -muunnoksessa invarianttina, sillä  $\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q$  on isospin-avaruuden vektori,  $SU_V(2)$ :n alkio vastaavat rotaatioita isospin-avaruudessa ja vektorin pituuden neliö säilyy rotaatioissa. Kvarkkikentän kineettinen termi  $\bar{q}i\cancel{\partial}q$  säilyy myös  $SU_V(2)$ -muunnoksessa invarianttina, sillä

$$\bar{q}i\cancel{\partial}q \rightarrow q^\dagger e^{+\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}\gamma_0 i\cancel{\partial} e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}q = \bar{q}i\cancel{\partial}q, \quad (4.3)$$

mutta massatermi  $\bar{q}mq$  säilyy invarianttina vain, jos  $m_u = m_d$ . Näin ei kuitenkaan tarkaan ottaen ole.

$U_V(1)$ -muunnoksessa  $q \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\alpha}q$  ja vastaavasti

$$(\bar{q}q)^2 \rightarrow (q^\dagger e^{+\frac{i}{2}\alpha}\gamma_0 e^{-\frac{i}{2}\alpha}q)^2 = (\bar{q}q)^2, \quad (4.4)$$

$$(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \rightarrow (q^\dagger e^{+\frac{i}{2}\alpha}\gamma_0 i\gamma_5\vec{\tau}e^{-\frac{i}{2}\alpha}q)^2 = (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \quad (4.5)$$

ja

$$\bar{q}i\cancel{\partial}q \rightarrow q^\dagger e^{+\frac{i}{2}\alpha}\gamma_0 i\cancel{\partial}e^{-\frac{i}{2}\alpha}q = \bar{q}i\cancel{\partial}q. \quad (4.6)$$

Yhtälöstä (4.4) seuraa se, että myös massatermi  $\bar{q}mq$  on  $U_V(1)$ -symmetrinen.

$SU_A(2)$ -muunnoksessa  $q \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}\gamma_5}q$  ja

$$\bar{q}q \rightarrow (q^\dagger e^{+\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}\gamma_5}\gamma_0 e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}\gamma_5}q). \quad (4.7)$$

Tämä saadaan helpompaan muotoon, kun käytetään tietoa  $e^{\pm i\vec{a}\cdot\vec{\tau}} = \cos|a| \pm i\vec{\tau}\cdot\hat{a}\sin|a|$ . Tällöin lausekkeen (4.7) oikea puoli voidaan sieventää yksinkertaiseen muotoon seuraavasti:

$$\begin{aligned} & q^\dagger \left( \cos \frac{\theta}{2} + \frac{i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \gamma_5 \right) \gamma_0 \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \gamma_5 \right) q \\ &= \bar{q} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2i \frac{i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \gamma_5 \right) q \\ &= \bar{q}q \cos \theta - \bar{q}i\gamma_5 \frac{\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta} q \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Seuraavassa tarvitaan lisäksi tietoa  $\{\tau^a, \tau^b\} = 2\delta^{ab}$ , jonka avulla saadaan johdettua tarpeellinen tulos

$$\left\{ \frac{\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta}, \vec{\tau} \right\} = \sum_{i,j} \frac{\theta^i}{\theta} \{\tau^i, \tau^j\} = 2\hat{\theta}. \quad (4.9)$$

Tämä on hyödyllinen, kun tarkastellaan termin  $\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q$  muuntumista  $SU_A(2)$ -muunnoksessa. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} \bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q &\rightarrow (q^\dagger e^{+\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}\gamma_5}\gamma_0 i\gamma_5\vec{\tau}e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}\gamma_5}q) \\ &= \bar{q}i\gamma_5 \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \gamma_5 \right) \vec{\tau} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \gamma_5 \right) q \\ &= \bar{q}i\gamma_5 \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} \vec{\tau} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta} \vec{\tau} \frac{\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta} - i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \gamma_5 \left\{ \frac{\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta}, \vec{\tau} \right\} \right) q \\ &= \bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q - \bar{q}i\gamma_5 \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta} + \frac{i}{2} \gamma_5 \sin \theta \right) \left\{ \frac{\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}{\theta}, \vec{\tau} \right\} q \\ &= \bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q + \bar{q}q\hat{\theta} \sin \theta - \bar{q}i\gamma_5\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}q\hat{\theta}(1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Tästä nähdään, että termien neliöt eivät yksin ole invariantteja, mutta niiden neliöiden summa on:

$$\begin{aligned}
& (\bar{q}q \cos \theta - \bar{q}i\gamma_5 \frac{\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}}{\theta} q \sin \theta)^2 \\
& + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q + \bar{q}q \hat{\theta} \sin \theta - (\bar{q}i\gamma_5 \hat{\theta} \cdot \vec{\tau} q \hat{\theta})^2 (1 - \cos \theta))^2 \\
& = (\bar{q}q)^2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta (\bar{q}q) (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\theta} q) + \sin^2 \theta (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\theta} q)^2 \\
& + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q)^2 + (\bar{q}q)^2 \sin^2 \theta + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\theta} q)^2 (1 - \cos \theta)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q) (\bar{q}q) \hat{\theta} \sin \theta \\
& - 2(\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q) (\bar{q}i\gamma_5 \hat{\theta} \cdot \vec{\tau} q \hat{\theta}) (1 - \cos \theta) \hat{\theta} - 2(\bar{q}q) (\bar{q}i\gamma_5 \hat{\theta} \cdot \vec{\tau} q \hat{\theta}) \sin \theta (1 - \cos \theta) \\
& = (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q)^2.
\end{aligned}$$

Myös kineettinen termi  $\bar{q}i\cancel{\partial}q$  on symmetrinen  $SU_A(2)$ -muunnoksessa, sillä

$$\begin{aligned}
\bar{q}i\cancel{\partial}q & \rightarrow (q^\dagger e^{+\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5} \gamma_0 i\cancel{\partial} e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5} q) \\
& = q^\dagger i (\cos \frac{\theta}{2} + \frac{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2}) \gamma_0 \gamma^\mu (\cos \frac{\theta}{2} - \frac{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2}) \partial_\mu q \\
& = q^\dagger i (\cos^2 \frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma^\mu + \frac{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} [\gamma_5, \gamma_0 \gamma^\mu] + \frac{(\vec{\theta} \cdot \vec{\tau})^2}{\theta^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \gamma_5 \gamma_0 \gamma^\mu \gamma_5) \partial_\mu q \\
& = \bar{q}i\cancel{\partial}q.
\end{aligned}$$

Koska  $(\bar{q}q)^2$  termi ei yksinään ollut symmetrinen  $SU_A(2)$ -muunnoksessa, ei massatermi  $\bar{q}mq$  voi myöskään olla symmetrinen tässä muunnoksessa. Tästä nähdään, että  $SU_V(2) \otimes SU_A(2)$ -symmetria on eksakti vain massattomien hiukkasten rajalla.

Kuten edellä mainittiin, rikkoutuu  $U_A(1)$ -symmetria teorian kvantisoinnissa. Tämä on niin sanottu aksiaalianomalia. Lisäksi vakuuimissa  $SU_A(2)$ -symmetria on kvarkki-antikvarkkikondensaatin muodostumisen vuoksi spontaanisti rikkoutunut, kuten aiemmin todettiin.

### 4.1.2 Keskimääräisen kentän approksimaatio

Oletetaan, että operaattorilla  $\bar{q}q$  on nolasta poikkeava vakuuimiodotusarvo. Linearisoidaan Lagrangen tiheys (4.1) kondensaatin  $\langle \bar{q}q \rangle$  suhteen. Se tapahtuu seuraavasti: kirjoitetaan kaikki  $q^T A q$  termit, missä  $A$  on jokin operaattori siten, että

$$q^T A q = \langle q^T A q \rangle - (q^T A q)_f, \quad (4.11)$$

missä  $\langle q^T A q \rangle$  on  $q^T A q$ :n odotusarvo ja  $(q^T A q)_f$  on pieni flukтуаatio.

Suoritetaan linearisointi Lagrangen tiheydelle (4.1) vastaavasti ja otetaan huomioon vain kondensaatin kannalta oleellinen termi  $g(\bar{q}q)^2$ , jolloin Lagrangen tiheyden (4.1) vuorovaikutustermi saa muodon

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\bar{q}q} & = g(\bar{q}q)^2 \\
& = g(\langle \bar{q}q \rangle - (\bar{q}q)_f)^2 \\
& = g(\langle \bar{q}q \rangle^2 - 2\langle \bar{q}q \rangle (\bar{q}q)_f + (\bar{q}q)_f^2).
\end{aligned} \quad (4.12)$$

Koska oletimme, että kyseessä on pieni fluktuaatio odotusarvon ympärillä, on fluktuaation neliö mitättömän pieni ja se voidaan jättää huomioimatta. Kirjoitetaan sen jälkeen fluktuaatio jälleen odotusarvon avulla, jolloin saadaan

$$\mathcal{L}_{\bar{q}q}^{\text{MFA}} = g(2\langle\bar{q}q\rangle\bar{q}q - \langle\bar{q}q\rangle^2). \quad (4.13)$$

Keskimääräisen kentän approksimaatiossa Lagrangen tiheys (4.1) on siis

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{\text{MFA}} &= \bar{q}(i\cancel{\partial} - m + 2g\langle\bar{q}q\rangle)q - g\langle\bar{q}q\rangle^2 \\ &= \bar{q}(i\cancel{\partial} - M)q - \frac{(M - m)^2}{4g}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

missä  $M = m - 2g\langle\bar{q}q\rangle$  [22].

Klassiset liikeyhtälöt saadaan Lagrangen tiheydestä, kun aktio minimoituu, jolloin Euler-Lagrange-yhtälö

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} = 0 \quad (4.15)$$

toteutuu. Kun tätä sovelletaan  $\mathcal{L}^{\text{MFA}}$ :n, saadaan liikeyhtälöt

$$-M\bar{q} - \partial_\nu \bar{q} i\gamma^\nu = 0 \Rightarrow \bar{q}(i\cancel{\partial} + M) = 0, \quad (4.16)$$

$$-Mq + i\gamma^\nu \partial_\nu q = 0 \Rightarrow (i\cancel{\partial} - M)q = 0. \quad (4.17)$$

Yhtälö (4.17) on niin kutsuttu Diracin yhtälö ja sen esitti vuonna 1928 Paul Dirac. Tämä yhtälö kuvaa M-massaista vuorovaikuttamatonta spin- $\frac{1}{2}$ -fermionia [20].

### 4.1.3 Helisiteetti ja kiraliteetti

Hiukkasen helisiteetti on sen pyörimismäärän projektio liikemäärän suuntaan ja helisiteettioperaattori on  $h = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ , missä  $\vec{\Sigma} = \gamma_5 \gamma^0 \vec{\gamma}$ . Kiraliteetti on hiukkasen spinin projektio liikemäärän suuntaan ja kiraliteettioperaattori  $k = \gamma_5$ .

Otetaan Diracin yhtälö, kun  $m = 0$

$$i\cancel{\partial}\Psi = 0 \quad (4.18)$$

ja kerrotaan oikealta  $\gamma_5$ :llä ja  $\gamma^0$ :lla, jolloin saadaan

$$\gamma_5 p^0 \Psi = \gamma_5 \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} \Psi.$$

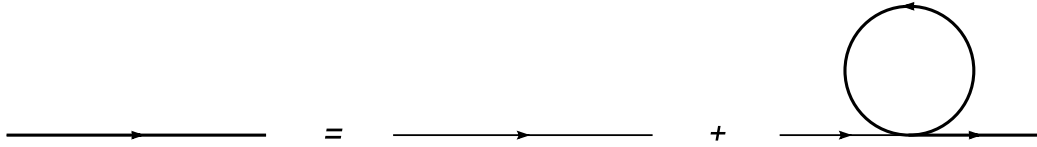
Edellisen yhtälön oikealla puolella on helisiteettioperaattorissa esiintyvä  $\vec{\Sigma}$ . Lisäksi huomataan, että kun  $m = 0$ , on  $\frac{\vec{p}}{p^0} = \hat{p}$ . Tällöin yhtälö saadaan muotoon

$$\pm \gamma_5 \Psi = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \Psi, \quad (4.19)$$

josta nähdään, että kiralliteetilla ja helisiteetillä on samat ominaistilat, kun  $m = 0$ . Kuitenkin kuten edellä osoitettiin, massatermin lisääminen Lagrangen tiheyteen rikkoo kiraalisymmetrian eksplisiittisesti.

#### 4.1.4 Aukkoyhtälö

Kvarkkien vuorovaikutukset kvarkki-antikvarkkikondensaatin  $\langle \bar{q}q \rangle$  kanssa saavat aikaan sen, että kvarkit vaikuttavat massiivisemmilta kuin symmetrian säilyttävässä faasissa, jossa  $\langle \bar{q}q \rangle = 0$ . Kvarkkien massa saadaan laskemalla korjaus kvarkkipropagaattoriin. Tämän antaa niin kutsuttu Dysonin yhtälö, joka on esitetty kuvassa 4.1 diagrammaattisesti. Aukkoyhtälö kertoo kondensoitumisesta seuraavan energiavyöhön syntyvän energia-aukon suuruuden.



Kuva 4.1: Vuorovaikuttavan teorian kvarkkipropagaattorin tulkinta diagrammina. Ohut viiva kuvaa symmetrisen faasin kvarkkipropagaattoria ja paksu viiva  $\langle \bar{q}q \rangle$  kondensaatin kanssa vuorovaikuttavaa propagaattoria.

Määritellään  $m_0 = (m_u + m_d)/2$ . Merkitään lisäksi väri vapausasteiden lukumäärää  $N_C$ :llä ja kvarkkimakujen lukumäärää  $N_F$ :llä. Johdetaan lisäksi aukko-yhtälölle hyödyllinen muoto, jota tarvitaan jatkossa. Symmetrian rikkovassa faasissa kvarkkien massan kertova aukko-yhtälö saadaan, kun kirjoitetaan Dysonin yhtälö matemaattisesti. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
i(\not{k} - M)^{-1} &= i(\not{k} - m_0)^{-1} + i(\not{k} - m_0)^{-1}(-2ig) \\
&\quad \cdot \left\{ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[i(\not{p} - M)^{-1}] \right\} i(\not{k} - M)^{-1}, \\
\Rightarrow M &= m_0 + 2g \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \text{Tr}[i(\not{p} - M)^{-1}] \right\}, \\
\Rightarrow \frac{M - m_0}{2gM} &= 4iN_F N_C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M^2}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{N_C N_F} \frac{1 - m_0/M}{2g} = \int_0^\Lambda \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + M^2}}. \tag{4.21}$$



## 4.1.5 Mesonipropagaattorit

Seuraavassa tarkastellaan mesonipropagaattoreita, joiden avulla saadaan yhtälöt sigman ja pionin massoille. Näiden tarkastelu on oleellista sen vuoksi, että sekä tarkasteltavassa teoriassa että luonnossa esiintyy sidottuja kvarkki-antikvarkkitiloja. Näitä kutsutaan mesoneiksi. Koska NJL-malli on efektiivinen teoria, se sisältää parametreja, jotka täytyy kiinnittää. Tässä työssä NJL-mallin parametrien kiinnitys suoritetaan tutkimalla mesonien massoja ja vertailemalla niitä kokeellisesti havaittuihin massoihin, kun  $T = \mu = 0$ . Kokeellisesti havaitut massat pionille ja sigmamesonille ovat

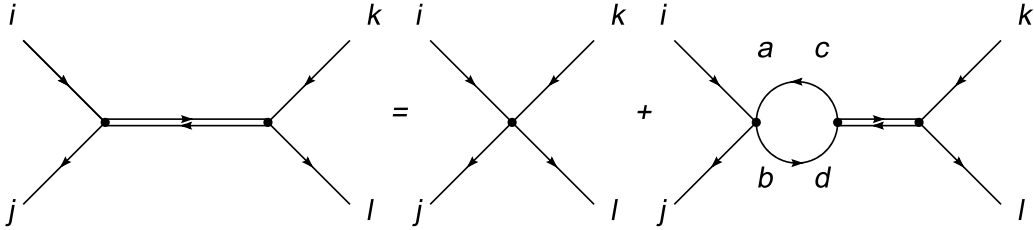
$$\begin{aligned} m_{\pi^\pm} &= 139.5702 \pm 0.0004 \text{ MeV}, \\ m_{\pi^0} &= 134.9766 \pm 0.0006 \text{ MeV}, \\ m_\sigma &= 400 - 1200 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

missä sigmamesoni on identifioitu resonanssihiukkasen  $f_0(600)$  kanssa, jolla on oikeat kvanttiluvut [11].

Kuvassa 4.2 oleva diagrammaattinen yhtälö voidaan matemaattisesti esittää seuraavasti

$$\Gamma_{ij}^C D_M \Gamma_{kl}^C = 2g \Gamma_{ij}^C \Gamma_{kl}^C + 2g \Gamma_{ij}^C \Gamma_{abi}^C \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_{bd}(p+q/2) S_{ca}(p-q/2) \Gamma_{dc}^C D_M \Gamma_{kl}^C, \quad (4.23)$$

missä  $\Gamma_{ab}^C$  on verteksitekijä,  $g$  kytkinvakio,  $S_{ab}(p)$  kvarkkipropagaattori ja  $D_M$  mesonipropagaattori. Tästä halutaan ratkaista mesonipropagaattori  $D_M$ .



Kuva 4.2: Mesoni-propagaattorin tulkinta diagrammina.

Yhtälössä (4.23) voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi  $\Gamma_{ij}^C \Gamma_{kl}^C$ , joten täytyy päteä

$$\begin{aligned} D_M &= 2g + 2gi D_M \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\Gamma_C S(p+q/2) \Gamma_C S(p-q/2)], \\ D_M &= \frac{2g}{1 - 2g\Pi_C(q^2)}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

jossa esiintyvää integraalia on merkitty lyhyemmin  $\Pi_C(q^2)$ . Sievennetään seuraavaksi integraalia  $\Pi_C(q^2)$  muotoon, jota jatkossa voidaan käyttää:

$$\Pi_C(q^2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\Gamma_C S(p+q) \Gamma_C S(p)], \quad (4.25)$$

missä  $C = \sigma, \pi_a$ ,  $\Gamma_\sigma = 1$  ja  $\Gamma_{\pi_a} = i\gamma_5 \tau_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Tämä voidaan kirjoittaa sigmalle seuraavasti:

$$\begin{aligned} \Pi_\sigma(q^2) &= iN_F N_C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{4p \cdot (p+q) + 4M^2}{[(p+q)^2 - M^2][p^2 - M^2]} \\ &= 4iN_F N_C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{p^2 - M^2} + \frac{2M^2 - q^2/2}{[p^2 - M^2][(p+q)^2 - M^2]} \right] \end{aligned}$$

ja käyttämällä aukko-yhtälöä (4.20) integrandin ensimmäiseen termiin saadaan

$$\begin{aligned} \Pi_\sigma(q^2) &= \frac{1}{2g}(1 - m_0/M) \\ &\quad - \frac{1}{2}(q^2 - 4M^2)4iN_F N_C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M^2][(p+q)^2 - M^2]}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Vastaavasti voidaan kirjoittaa pionille

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi_a}(q^2) &= iN_F N_C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{4p \cdot (p+q) - 4M^2}{[(p+q)^2 - M^2][p^2 - M^2]} \\ &= 4iN_F N_C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{p^2 - M^2} + \frac{-q^2/2}{[p^2 - M^2][(p+q)^2 - M^2]} \right], \end{aligned}$$

ja taas käyttämällä aukko-yhtälöä (4.20) saadaan

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi_a}(q^2) &= \frac{1}{2g}(1 - m_0/M) \\ &\quad - \frac{1}{2}q^2 4iN_F N_C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M^2][(p+q)^2 - M^2]}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Kvarkin ja antikvarkin puutason vuorovaikutusta mesonin välityksellä esittää kuvan 4.2 diagrammaattisen yhtälön vasen puoli ja sitä kuvaa amplitudi

$$T_C(q^2) = \frac{-g^2 C q^2}{q^2 - m_C^2}, \quad (4.28)$$

joka divergoi, kun  $q^2 = m_C^2$ , joten myös yhtälössä (4.24) pitää olla

$$1 - 2g\Pi_C(q^2 = m_C^2) = 0. \quad (4.29)$$

Tästä saadaan yhtälöt mesonien massoille. Seuraavassa  $q^2 = m_C^2$ . Otetaan ensin käsittelyyn sigma, jolle pätee

$$\begin{aligned} m_0/M + g(m_\sigma^2 - 4M^2)4iN_F N_C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M^2][(p+q)^2 - M^2]} = 0 \\ \Rightarrow \int_0^\Lambda \frac{dp}{\omega} \frac{p^2}{m_\sigma^2 - 4\omega^2} = \frac{\pi^2}{2N_C N_F} \frac{-m_0/M}{g(m_\sigma^2 - 4M^2)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tämä yhtälö määrää sigmamesonin massan. Pionin massan määräävä yhtälö johdetaan vastaavasti

$$\begin{aligned} m_0/M + gm_\pi^2 4iN_F N_C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M^2][(p+q)^2 - M^2]} = 0 \\ \Rightarrow \int_0^\Lambda \frac{dp}{\omega} \frac{p^2}{m_\pi^2 - 4\omega^2} = \frac{\pi^2}{2N_C N_F} \frac{-m_0/M}{gm_\pi^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Mesonien massat voidaan ratkaista numeerisesti, jos teorian parametrit  $\Lambda$ ,  $g$  ja  $m_0$  tunnetaan. Kiinnitetään parametrit seuraavasti

$$\begin{aligned} \Lambda &= 637 \text{ MeV}, \\ g &= 5.32 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-2}, \\ m_0 &= 5.5 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Näillä parametrien arvoilla saadaan numeerisesti ratkaistua

$$\begin{aligned} M &= 328 \text{ MeV}, \\ m_\sigma &= 700 \text{ MeV}, \\ m_\pi &= 139 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Saadut arvot vastaavat havaittuja hiukkasten massoja hyvin, sillä esimerkiksi protonien ja neutronien tapauksessa  $3M \approx 1 \text{ GeV} \approx m_{p,n}$ . Samoin myös pionin massa vastaa havaittuja arvoja  $m_{\pi^\pm} = 139.5702 \pm 0.0004 \text{ MeV}$ ,  $m_{\pi^0} = 134.9766 \pm 0.0006 \text{ MeV}$ .

Nyt NJL-mallin parametrit on kiinnitetty siten, että ne vastaavat havaintoja, kun  $T = \mu = 0$ .

# Luku 5

## Kondensaatit

Edellä tarkasteltiin kvarkkien ja mesonien massoja, kun  $T = \mu = 0$ , jotta teorian parametrit saatiin kiinnitetyksi. Tässä kappaleessa tutustutaan erilaisiin kvarkkikondensaatteihin ja niiden ominaisuuksiin nollassa poikkeavassa lämpötilassa ja kemiallisessa potentiaalissa.

### Nambu-Gorkov-formalismi

Siirryttäessä monimutkaisempiin kondensaatteihin, on kätevää käyttää niin kutsuttua Nambu-Gorkov-formalismia, jossa vapausasteiden määrä kaksinkertaistetaan määrittelemällä varauskonjugoidut kentät ja operaattorit. Kondensaattien kannalta oleelliset vapausasteet sisältää Lagrangen tiheys

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \mu q^\dagger q = \bar{q}(i\not{D} - m + \mu\gamma_0)q + \sum_i g_i(\bar{q}\Gamma_i q)^2, \quad (5.1)$$

missä  $\Gamma_i$ :t ovat vuorovaikutusoperaattoreita ja  $g_i$ :t niihin liittyvät kytkinvakiot [8].

Määritellään nyt Nambu-Gorkov-formalismiin mukaiset varauskonjugoidut kentät ja operaattorit ja käsitellään alkuperäisiä ja varauskonjugoituja kenttiä riippumattomina muuttujina. Varauskonjugointioperaattori  $C = i\gamma^2\gamma^0$ , joten

$$C^T = -C, \quad C^2 = -1 \quad (5.2)$$

ja

$$q^C = C\bar{q}^T, \quad (5.3)$$

$$\bar{q}^C = q^T C, \quad (5.4)$$

$$\Gamma_i^C = -C\Gamma_i^T C. \quad (5.5)$$

Näiden avulla voidaan kirjoittaa Lagrangen tiheys seuraavasti

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}[\bar{q}(i\cancel{\partial} - m + \mu\gamma_0)q + \bar{q}^C(-i\overleftarrow{\cancel{\partial}} - m - \mu\gamma_0)q^C] + \frac{1}{4}g_i[(\bar{q}\Gamma_i q) + (\bar{q}^C\Gamma_i^C q^C)]^2. \quad (5.6)$$

Nyt siis pidetään  $q$ :ta ja  $q^C$ :ta riippumattomina kenttinä. Määritellään bispinorikenttä  $\Psi$  ja vastaavasti vuorovaikutusoperaattori  $\hat{\Gamma}_i$  seuraavasti:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} q(x) \\ q^C(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} \Gamma_i & 0 \\ 0 & \Gamma_i^C \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Käyttämällä bispinorikenttää voidaan Lagrangen tiheys kirjoittaa kompaktissa muodossa

$$\hat{\mathcal{L}} = \bar{\Psi}S_0^{-1}(x)\Psi + g_i(\bar{\Psi}\hat{\Gamma}_i\Psi)^2, \quad (5.8)$$

missä  $S_0^{-1}(x)$  on kvarkkipropagaattori symmetrisessä faasissa [8].

Sijoitetaan saadut muunnokset vuorovaikuttamattomaan Lagrangen tiheyteen ja tarkastellaan aktiota  $S$ :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} [\bar{q}(x)(i\cancel{\partial} - m + \mu\gamma_0)q(x) + \bar{q}^C(x)(-i\overleftarrow{\cancel{\partial}} - m - \mu\gamma_0)q^C(x)] \\ &= \frac{1}{2V} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} [\sum_k \sum_{k'} \bar{q}(k')(k - m + \mu\gamma_0)q(k)e^{-i(k-k')\cdot x} \\ &\quad + \sum_p \sum_{p'} \bar{q}^C(p')(\not{p}' - m - \mu\gamma_0)q^C(p)e^{-i(p'-p)\cdot x}] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{V}} [\sum_k \bar{q}(k)(k - m + \mu\gamma_0)q(k) + \sum_p \bar{q}^C(p)(\not{p} - m - \mu\gamma_0)q^C(p)]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Näin saadaan kvarkkipropagaattori liikemääräavaruudessa, joka on siis

$$S_0^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \not{p} + \mu\gamma_0 - m & 0 \\ 0 & \not{p} - \mu\gamma_0 - m \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

## 5.1 Dikvarkkikondensaatit

Dikvarkkikondensaatti määritellään odotusarvona

$$\langle q^T \mathcal{O} q \rangle, \quad (5.11)$$

missä operaattori  $\mathcal{O}$  operoi väri-, maku- ja Diracin avaruudessa,

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_C. \quad (5.12)$$

Taulukko 5.1: Väri-, maku- ja Diracin avaruuksien matriisien symmetriaominaisuuksia [8].

	antisymmetrinen	symmetrinen
Dirac	$C\gamma_5, C, C\gamma^\mu\gamma_5$	$C\gamma^\mu, C\sigma^{\mu\nu}$
Maku	$\tau_2$	$1, \tau_1, \tau_3$
Väri	$\lambda_2, \lambda_5, \lambda_7$	$1, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_8$

Ainut rajoitus operaattorille  $\mathcal{O}$  saadaan käyttämällä kenttäoperaattorien  $q$  antikommutointia. Koska

$$q^T \mathcal{O} q = \mathcal{O}_{ij} q_i q_j = -\mathcal{O}_{ij} q_j q_i = -q^T \mathcal{O}^T q, \quad (5.13)$$

on operaattorin  $\mathcal{O}$  oltava antisymmetrinen [8].

Koska  $\mathcal{O}$  saadaan tensoritulona maku-, väri- ja Diracin avaruuksien operaattoreista, voidaan antisymmetrinen operaattori saada joko kolmen antisymmetrisen tai kahden symmetrisen ja yhden antisymmetrisen matriisin tulona. Täten mahdollisia vaihtoehtoja on paljon ja tämä oleellinen ero värisuprajohteiden ja tavallisten suprajohteiden välillä, joissa väri- ja makuvapausasteita ei esiinny. Vuorovaikutus ratkaisee sen, millainen kondensaatti näistä vaihtoehdoista muodostuu [8].

Tässä halutaan tarkastella kondensaatteja, jotka ovat spinin, maun ja värin suhteen antisymmetrisiä ja Lorentz-invariantteja. Tällainen kondensaatti on yleisesti muotoa

$$\langle \Delta q_{a\alpha}^c q_{b\beta}^d \epsilon^{ab} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{cd3} \rangle, \quad (5.14)$$

missä  $\epsilon$  on antisymmetrinen tensori,  $\alpha, \beta$  ovat spinindeksit,  $a, b$  makuindeksit ja  $c, d$  väriindeksit. Värisuunta 3 on vain valinta. Tämän tilalle voitaisiin yhtä hyvin valita kumpi tahansa kahdesta muusta suunnasta tai joku suuntien lineaarikombinaatio. Koska  $\epsilon^{ab} = (\tau_2)^{ab}$  ja  $\epsilon_{cd3} = (\lambda_2)_{cd}$ , voidaan kondensaatti kirjoittaa muodossa

$$\langle q^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q \rangle. \quad (5.15)$$

Tämä kondensaatti vastaa attraktiivista värivuorovaikutusta ja Cooperin paria, jonka spin on nolla. Kondensaatti on myös varattu värin suhteen. Siten siirryttäessä värisuprajohtavaan faasiin, jossa  $\langle q^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q \rangle \neq 0$ ,  $SU(3)$ -värisymmetria rikkoutuu spontaanisti  $SU(2)$ -symmetriaksi ja samalla kahdeksasta gluonista viisi saa Higgsin mekanismin kautta massan [8]. Kondensaatin kytkeminen erivärisiin ja -makuisiin kvarkkeihin näyttää eksplisiitti-

sesti seuraavalta:

$$\begin{aligned}
q^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q &= (u^T, d^T) \begin{pmatrix} 0 & -iC\gamma_5\lambda_2 \\ iC\gamma_5\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\
&= -i (u_r^T, u_g^T, u_b^T) \begin{pmatrix} 0 & -iC\gamma_5 & 0 \\ iC\gamma_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix} \\
&\quad + i (d_r^T, d_g^T, d_b^T) \begin{pmatrix} 0 & -iC\gamma_5 & 0 \\ iC\gamma_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix} \\
&= -u_g^T C \gamma_5 d_r + u_r^T C \gamma_5 d_g + d_g^T C \gamma_5 u_r - d_r^T C \gamma_5 d_g. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Seuraavassa tutkitaan dikvarkkikondensaattien muodostumista ja vuorovaikutusta kvarkki-antikvarkkikondensaatin kanssa.

Otetaan nyt huomioon kaikki mahdolliset kondensaatit, jotka voivat muodostua, kun kiraali- ja värisymmetriat ovat kvarkki-antikvarkki- ja dikvarkkikondensaattien muodostumisen vuoksi rikkoutuneet. Tällöin täytyy ottaa huomioon värisymmetrian rikkova kvarkki-antikvarkkikondensaatti  $\phi_8$ , joka on siis Lorentz-invariantti ja värialiryhmän  $SU(2)$  ja makuryhmän  $SU(2)$  suhteen invariantti. Äärellinen kemiallinen potentiaali rikkoo Lorentz-invarianssin ja siten täytyy ottaa huomioon hiukkasten lukumäärätiheyskondensaatti  $n$ , joka on värin suhteen  $SU(3)$ - ja maun suhteen  $SU(2)$ -symmetrinen, ja Lorentz-invarianssin rikkova dikvarkkikondensaatti  $\delta_0$ , joka on maun suhteen  $SU(2)$ - ja värialiryhmän suhteen  $SU(2)$ -symmetrinen. Näiden lisäksi voi vielä esiintyä värisymmetrian rikkova lukumäärätiheyskondensaatti  $n_8$ , joka on maun suhteen  $SU(2)$ - ja värialiryhmän suhteen  $SU(2)$ -symmetrinen. Kondensaatteja, jotka ovat muotoa  $\langle \bar{q} \gamma^i q \rangle$  ei tarvitse ottaa huomioon, sillä ne vastaavat Cooperin paria, jonka spin on 1 [8]. Tämän tyyppisiä kondensaatteja käsitellään erikseen kappaleessa 5.4. Tilannetta kuvaa tällöin Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \bar{q}(i\cancel{\partial} - m)q + \mathcal{L}_{\bar{q}q} + \mathcal{L}_{qq}, \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{q}q} = G_s^{(0)}(\bar{q}q)^2 + G_s^{(8)}(\bar{q}\lambda_8 q)^2 + G_v^{(0)}(\bar{q}\gamma^0 q)^2 + G_v^{(8)}(\bar{q}\gamma^0 \lambda_8 q)^2, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{qq} &= H(\bar{q}i\gamma_5 C \tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T)(q^T i\gamma_5 C \tau_2 \lambda_2 q) \\
&\quad + H_0(\bar{q}\gamma^0 \gamma_5 C \tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T)(q^T C \gamma^0 \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q). \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Linearisoidaan Lagrangen tiheys (5.17) kondensaattien suhteen kuten teh-

tiin kappaleessa 4.1.2. Tällöin se saa muodon

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}} = & \bar{q}(i\cancel{\phi} - m)q + G_s^{(0)}(\langle \bar{q}q \rangle - (\bar{q}q)_f)^2 + G_s^{(8)}(\langle \bar{q}\lambda_8 q \rangle - (\bar{q}\lambda_8 q)_f)^2 \\
& + G_v^{(0)}(\langle \bar{q}\gamma^0 q \rangle - (\bar{q}\gamma^0 q)_f)^2 + G_v^{(8)}(\langle \bar{q}\gamma^0 \lambda_8 q \rangle - (\bar{q}\gamma^0 \lambda_8 q)_f)^2 \\
& + H(\langle \bar{q}i\gamma_5 C\tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T \rangle - (\bar{q}i\gamma_5 C\tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T)_f) \\
& \quad \cdot (\langle q^T C i\gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q \rangle - (q^T C i\gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q)_f) \\
& + H_0(\langle \bar{q}\gamma^0 \gamma_5 C\tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T \rangle - (\bar{q}\gamma^0 \gamma_5 C\tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T)_f) \\
& \quad \cdot (\langle q^T C \gamma^0 \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q \rangle - (q^T C \gamma^0 \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q)_f).
\end{aligned}$$

Kondensaatit määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\phi &= \langle \bar{q}q \rangle, & \phi_8 &= \langle \bar{q}\lambda_8 q \rangle, \\
n &= \langle \bar{q}\gamma^0 q \rangle, & n_8 &= \langle \bar{q}\gamma^0 \lambda_8 q \rangle, \\
\delta &= \langle q^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q \rangle, & \delta_0 &= \langle q^T C \gamma^0 \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q \rangle.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Edelleen termit, joissa esiintyy fluktuaatio toiseen potenssiin, ovat mitättömän pieniä ja ne voidaan jättää huomioimatta. Tällöin saadaan Lagrangen tiheydeksi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{MFA}} = & \bar{q}(i\cancel{\phi} - m)q + G_s^{(0)}(\phi^2 - 2\phi(\bar{q}q)_f) + G_s^{(8)}(\phi_8^2 - 2\phi_8(\bar{q}\lambda_8 q)_f) \\
& + G_v^{(0)}(n^2 - 2n(\bar{q}\gamma^0 q)_f) + G_v^{(8)}(n_8^2 - 2n_8(\bar{q}\gamma^0 \lambda_8 q)_f) \\
& + H((i\delta)^* i\delta - i\delta(\bar{q}i\gamma_5 C\tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T)_f - (i\delta)^*(q^T i\gamma_5 C\tau_2 \lambda_2 q)_f) \\
& + H_0(\delta_0 \delta_0^* - \delta_0(\bar{q}\gamma^0 \gamma_5 C\tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T)_f - \delta_0^*(q^T C \gamma^0 \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q)_f). \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Kirjoitetaan fluktuaatiot kondensaattien avulla, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{MFA}} = & \bar{q}(i\cancel{\phi} - m)q + G_s^{(0)}(2\phi\bar{q}q - \phi^2) + G_s^{(8)}(2\phi_8\bar{q}\lambda_8 q - \phi_8^2) \\
& + G_v^{(0)}(2n\bar{q}\gamma^0 q - n^2) + G_v^{(8)}(2n_8\bar{q}\gamma^0 \lambda_8 q - n_8^2) \\
& + H(-\delta\bar{q}i\gamma_5 C\tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T + \delta^* q^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q - \delta^* \delta) \\
& + H_0(\delta_0\bar{q}\gamma^0 \gamma_5 C\tau_2 \lambda_2 \bar{q}^T + \delta_0^* q^T C \gamma^0 \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q - \delta_0^* \delta_0). \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Määritellään

$$M_0 = m - 2G_s^{(0)}\phi, \quad M_8 = -2G_s^{(8)}\phi_8, \tag{5.23}$$

$$\tilde{\mu} = \mu + 2G_v^{(0)}n, \quad \tilde{\mu}_8 = 2G_v^{(8)}n_8, \tag{5.24}$$

$$\Delta = -2H\delta, \quad \Delta_0 = 2H_0\delta_0 \tag{5.25}$$

ja

$$\hat{M} = M_0 + M_8\lambda_8, \quad \hat{\mu} = \tilde{\mu} + \tilde{\mu}_8\lambda_8, \tag{5.26}$$



jolloin Lagrangen tiheydeksi saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{MFA}} + \mu q^\dagger q &= \bar{q}(i\cancel{\partial} + \hat{\mu}\gamma^0 - \hat{M})q + \frac{1}{2}\Delta\bar{q}\gamma_5\tau_2\lambda_2q^C - \frac{1}{2}\Delta^*\bar{q}^C\gamma_5\tau_2\lambda_2q \\ &+ \frac{1}{2}\Delta_0\bar{q}\gamma^0\gamma_5\tau_2\lambda_2q^C + \frac{1}{2}\Delta_0^*\bar{q}^C\gamma^0\gamma_5\tau_2\lambda_2q - V,\end{aligned}$$

missä

$$V = \frac{(M_0 - m)^2}{4G_s^{(0)}} + \frac{M_8^2}{4G_s^{(8)}} + \frac{(\tilde{\mu} - \mu)^2}{4G_v^{(0)}} + \frac{\tilde{\mu}_8^2}{4G_v^{(8)}} + \frac{|\Delta|^2}{4H} + \frac{|\Delta_0|^2}{4H_0}. \quad (5.27)$$

Tämä voidaan kirjoittaa edellä määriteltyjä bispinorikenttiä käyttämällä muodossa

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{MFA}} + \mu q^\dagger q = \bar{\Psi}S^{-1}(x)\Psi - V, \quad (5.28)$$

missä paikka-avaruuden kvarkkipropagaattori  $S^{-1}(x)$  on

$$S^{-1}(x) = \begin{pmatrix} i\cancel{\partial} + \hat{\mu}\gamma_0 - \hat{M} & (\Delta + \Delta_0\gamma_0)\gamma_5\tau_2\lambda_2 \\ (-\Delta^* + \Delta_0^*\gamma_0)\gamma_5\tau_2\lambda_2 & -i\cancel{\partial} - \hat{\mu}\gamma_0 - \hat{M} \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Fourier-muunnoksella saadaan kvarkkipropagaattori liikemääräavaruudessa, joka on

$$S^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \not{p} + \hat{\mu}\gamma_0 - \hat{M} & (\Delta + \Delta_0\gamma_0)\gamma_5\tau_2\lambda_2 \\ (-\Delta^* + \Delta_0^*\gamma_0)\gamma_5\tau_2\lambda_2 & \not{p} - \hat{\mu}\gamma_0 - \hat{M} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Määritellään massa ja kemiallinen potentiaali erikseen punaisille ja sinisille kvarkeille seuraavasti:

$$M_b = M_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}M_8, \quad \tilde{\mu}_b = \tilde{\mu} - \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{\mu}_8, \quad (5.31)$$

$$M_r = M_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}M_8, \quad \tilde{\mu}_r = \tilde{\mu} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\mu}_8, \quad (5.32)$$

jolloin

$$M_r = m - \frac{2}{3}(6G_s^{(0)} + 2G_s^{(8)})\phi_r - \frac{2}{3}(3G_s^{(0)} - 2G_s^{(8)})\phi_b, \quad (5.33)$$

$$M_b = m - \frac{2}{3}(6G_s^{(0)} - 4G_s^{(8)})\phi_r - \frac{2}{3}(3G_s^{(0)} + 4G_s^{(8)})\phi_b, \quad (5.34)$$

$$\tilde{\mu}_r = \mu + \frac{2}{3}(6G_v^{(0)} + 2G_v^{(8)})n_r + \frac{2}{3}(3G_v^{(0)} - 2G_v^{(8)})n_b, \quad (5.35)$$

$$\tilde{\mu}_b = \mu + \frac{2}{3}(6G_v^{(0)} - 4G_v^{(8)})n_r + \frac{2}{3}(3G_v^{(0)} + 4G_v^{(8)})n_b. \quad (5.36)$$

Nyt voidaan johtaa yhtälöt kondensaateille  $n_b$ ,  $n_r$ ,  $\phi_r$  ja  $\phi_b$ , jotka ovat

$$\phi_r = -\frac{2M_r + M_b - 3m}{18G_s^{(0)}} - \frac{M_r - M_b}{12G_s^{(8)}}, \quad (5.37)$$

$$\phi_b = -\frac{2M_r + M_b - 3m}{18G_s^{(0)}} + \frac{M_r - M_b}{6G_s^{(8)}}, \quad (5.38)$$

$$n_r = \frac{2\tilde{\mu}_r + \tilde{\mu}_b - 3\mu}{18G_v^{(0)}} + \frac{\tilde{\mu}_r - \tilde{\mu}_b}{12G_v^{(8)}}, \quad (5.39)$$

$$n_b = \frac{2\tilde{\mu}_r + \tilde{\mu}_b - 3\mu}{18G_v^{(0)}} - \frac{\tilde{\mu}_r - \tilde{\mu}_b}{6G_v^{(8)}}. \quad (5.40)$$

Termodynaamista potentiaalia varten pitää laskea jälki kvarkkipropagaattorista (5.30). Tämäkin lasku esitetään yksityiskohtaisesti liitteessä C. Termodynaamiseksi potentiaaliksi saadaan

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu) = & -2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \omega_+ + \omega_- + 2T \ln[1 + e^{-\omega_+/T}] + 2T \ln[1 + e^{-\omega_-/T}] \right. \\ & \left. + E_{p,b} + T \ln[1 + e^{-E_-/T}] + T \ln[1 + e^{-E_+/T}] \right\} + V, \end{aligned} \quad (5.41)$$

missä

$$\begin{aligned} V &= (M_0 - m)^2/4G_s^{(0)} + M_8^2/4G_s^{(8)} + (\tilde{\mu} - \mu)^2/4G_v^{(0)} + \tilde{\mu}_8^2/4G_v^{(8)} \\ &\quad + |\Delta|^2/4H + |\Delta_0|^2/4H_0, \\ E_{\pm} &= \sqrt{\vec{p}^2 + M_b^2} \pm \mu, \\ \omega_{\pm} &= \sqrt{\vec{p}^2 + M_r^2 + \tilde{\mu}_r^2 + |\Delta|^2 + |\Delta_0|^2} \pm 2s, \\ s &= \sqrt{(\tilde{\mu}_r^2 + |\Delta_0|^2)\vec{p}^2 + t^2}, \\ t &= M_r\tilde{\mu}_r - \frac{1}{2}(\Delta\Delta_0^* + \Delta^*\Delta_0). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Aukkoyhtälöt saadaan, kun minimoidaan termodynaaminen potentiaali (5.41) muuttujien  $M_0$ ,  $M_8$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\mu}_8$ ,  $\Delta^*$ ,  $\Delta_0^*$  suhteen eli kun

$$\frac{\partial\Omega}{\partial M_0} = \frac{\partial\Omega}{\partial M_8} = \frac{\partial\Omega}{\partial \tilde{\mu}} = \frac{\partial\Omega}{\partial \tilde{\mu}_8} = \frac{\partial\Omega}{\partial \Delta^*} = \frac{\partial\Omega}{\partial \Delta_0^*} = 0. \quad (5.43)$$

Yhtäpitävästi voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial\Omega}{\partial M_r} = \frac{\partial\Omega}{\partial M_b} = \frac{\partial\Omega}{\partial \tilde{\mu}_r} = \frac{\partial\Omega}{\partial \tilde{\mu}_b} = \frac{\partial\Omega}{\partial \Delta^*} = \frac{\partial\Omega}{\partial \Delta_0^*} = 0, \quad (5.44)$$

sillä nämä ovat vain edellisten lineaarikombinaatioita. Lasketaan edellä mainitut derivaatat. Kondensaatit  $n_r$  ja  $\phi_r$  on kerrottu  $\frac{1}{2}$ :lla. Tämä johtuu siitä, että termodynaamisen potentiaalın lausekkeessa  $\Omega_r$  termi on kerrottu tekijällä

2, koska se kuvaa sekä punaisia että vihreitä kvarkkeja. Aukko yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial M_r} &= -2N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{M_r s - \tilde{\mu}_r t}{s\omega_-} \left[ \frac{e^{-\omega_-/T}}{1 + e^{-\omega_-/T}} - \frac{1}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{M_r s + \tilde{\mu}_r t}{s\omega_+} \left[ \frac{e^{-\omega_+/T}}{1 + e^{-\omega_+/T}} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{-2G_s^{(0)}\phi}{2G_s^{(0)}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{-2G_s^{(8)}\phi_8}{2G_s^{(8)}} = 0, \\
\frac{\partial \Omega}{\partial M_b} &= -2N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{M_b}{E_{p,b}} \left[ 1 - \frac{e^{-E_-/T}}{1 + e^{-E_-/T}} - \frac{e^{-E_+/T}}{1 + e^{-E_+/T}} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{-2G_s^{(0)}\phi}{2G_s^{(0)}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{-2G_s^{(8)}\phi_8}{2G_s^{(8)}} = 0, \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}_r} &= -2N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{\tilde{\mu}_r (s - \vec{p}^2) - M_r t}{s\omega_-} \left[ \frac{e^{-\omega_-/T}}{1 + e^{-\omega_-/T}} - \frac{1}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\tilde{\mu}_r (s + \vec{p}^2) + M_r t}{s\omega_+} \left[ \frac{e^{-\omega_+/T}}{1 + e^{-\omega_+/T}} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{2G_v^{(0)}n}{2G_v^{(0)}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2G_v^{(8)}n_8}{2G_v^{(8)}} = 0, \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}_b} &= -2N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{e^{-E_-/T}}{1 + e^{-E_-/T}} - \frac{e^{-E_+/T}}{1 + e^{-E_+/T}} \right] \\
&\quad + \frac{2G_v^{(0)}n}{2G_v^{(0)}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2G_v^{(8)}n_8}{2G_v^{(8)}} = 0, \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \Delta^*} &= -4N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{\Delta s + \Delta_0 t}{s\omega_-} \left[ \frac{e^{-\omega_-/T}}{1 + e^{-\omega_-/T}} - \frac{1}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Delta s - \Delta_0 t}{s\omega_+} \left[ \frac{e^{-\omega_+/T}}{1 + e^{-\omega_+/T}} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{-4H\delta}{4H} = 0, \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \Delta_0^*} &= -4N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{\Delta_0 (s - \vec{p}^2) + \Delta t}{s\omega_-} \left[ \frac{e^{-\omega_-/T}}{1 + e^{-\omega_-/T}} - \frac{1}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Delta_0 (s + \vec{p}^2) - \Delta t}{s\omega_+} \left[ \frac{e^{-\omega_+/T}}{1 + e^{-\omega_+/T}} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{4H_0\delta_0}{4H_0} = 0.
\end{aligned}$$

Näin on saatu kondensaateille aukko yhtälöt, jotka muodostavat kuuden yhtälön ryhmän. Numeerisesti on siis ratkaistava yhtälöt

$$\begin{aligned}
& -2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{M_r s - \tilde{\mu}_r t}{2s\omega_-} \tanh\left[\frac{\omega_-}{2T}\right] + \frac{M_r s + \tilde{\mu}_r t}{2s\omega_+} \tanh\left[\frac{\omega_+}{2T}\right] \right\} \\
= & -\frac{2M_r + M_b - 3m}{18G_s^{(0)}} - \frac{M_r - M_b}{12G_s^{(8)}}, \tag{5.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M_b}{E_{p,b}} \left[ 1 - \frac{1}{1 + e^{E_-/T}} - \frac{1}{1 + e^{E_+/T}} \right] \\
= & -\frac{2M_r + M_b - 3m}{18G_s^{(0)}} + \frac{M_r - M_b}{6G_s^{(8)}}, \tag{5.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\tilde{\mu}_r(s - \vec{p}^2) - M_r t}{2s\omega_-} \tanh\left[\frac{\omega_-}{2T}\right] + \frac{\tilde{\mu}_r(s + \vec{p}^2) + M_r t}{2s\omega_+} \tanh\left[\frac{\omega_+}{2T}\right] \right\} \\
= & \frac{2\tilde{\mu}_r + \tilde{\mu}_b - 3\mu}{18G_v^{(0)}} + \frac{\tilde{\mu}_r - \tilde{\mu}_b}{12G_v^{(8)}}, \tag{5.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{1 + e^{E_-/T}} - \frac{1}{1 + e^{E_+/T}} \right] \\
= & \frac{2\tilde{\mu}_r + \tilde{\mu}_b - 3\mu}{18G_v^{(0)}} - \frac{\tilde{\mu}_r - \tilde{\mu}_b}{6G_v^{(8)}}, \tag{5.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\Delta s + \Delta_0 t}{2s\omega_-} \tanh\left[\frac{\omega_-}{2T}\right] + \frac{\Delta s - \Delta_0 t}{2s\omega_+} \tanh\left[\frac{\omega_+}{2T}\right] \right\} \\
= & -\frac{\Delta}{2H}, \tag{5.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\Delta_0(s - \vec{p}^2) + \Delta t}{2s\omega_-} \tanh\left[\frac{\omega_-}{2T}\right] + \frac{\Delta_0(s + \vec{p}^2) - \Delta t}{2s\omega_+} \tanh\left[\frac{\omega_+}{2T}\right] \right\} \\
= & \frac{\Delta_0}{2H_0}. \tag{5.50}
\end{aligned}$$

## 5.2 Dikvarkkikondensaatti tapauksessa $\delta \neq 0$ ja $\phi \neq 0$

Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi tapausta, jossa kondensaateista vain  $\delta$  ja  $\phi$  ovat nolasta poikkeavia. Tämä on yksinkertaisin mahdollinen tapaus, jossa kvarkkiaineella on värisuprajohtava faasi. Lisäksi tämän mallin tuottamat aukko-yhtälöt voidaan vielä kohtalaisella vaivalla ratkaista numeerisesti.

Kvarkkipropagaattorin ja termodynaamisen potentiaalin määrittäminen on varsin yksinkertainen, mutta kuitenkin matemaattisilta yksityiskohdiltaan sen verran pitkä prosessi, että se esitellään liitteessä B. Laskutoimitusten

jälkeen termodynaamiseksi potentiaaliksi saadaan

$$\begin{aligned}\Omega(T, \mu) &= -4N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{E_\Delta^+ + E_\Delta^-}{2} + T \ln[1 + e^{-E_\Delta^+/T}] + T \ln[1 + e^{-E_\Delta^-/T}] \right] \\ &\quad - 2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}}] + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}}] \right] + V,\end{aligned}\tag{5.51}$$

missä

$$E_p = \sqrt{p^2 + M^2},\tag{5.52}$$

$$E_\Delta^\pm = \sqrt{(E_p \pm \mu)^2 + \Delta^2},\tag{5.53}$$

$$V = \frac{(M_0 - m)^2}{4G} + \frac{\Delta^2}{4H}.\tag{5.54}$$

Termodynaamista potentiaalia (5.51) minimoimalla kondensaattien  $M$  ja  $\Delta$  suhteen saadaan aukkohtälöt, jotka ovat

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega(T, \mu)}{\partial M} &= -2N_F M \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 E_p} \left[ 1 - n(T, \mu) - \bar{n}(T, \mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{E^-}{E_\Delta^-} \tanh \frac{E_\Delta^-}{2T} + \frac{E^+}{E_\Delta^+} \tanh \frac{E_\Delta^+}{2T} \right] + \frac{M - m}{2G} = 0, \\ \frac{\partial\Omega(T, \mu)}{\partial \Delta} &= -2N_F \Delta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\tanh \frac{E_\Delta^-}{2T}}{E_\Delta^-} + \frac{\tanh \frac{E_\Delta^+}{2T}}{E_\Delta^+} \right] + \frac{\Delta}{2H} = 0.\end{aligned}$$

Nämä muodostavat yhtälöparin

$$\begin{aligned}\frac{1 - m/M}{4N_F G} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 E_p} \left[ 1 - n(T, \mu) - \bar{n}(T, \mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{E^-}{E_\Delta^-} \tanh \frac{E_\Delta^-}{2T} + \frac{E^+}{E_\Delta^+} \tanh \frac{E_\Delta^+}{2T} \right],\end{aligned}\tag{5.55}$$

$$\frac{1}{4N_F H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\tanh \frac{E_\Delta^-}{2T}}{E_\Delta^-} + \frac{\tanh \frac{E_\Delta^+}{2T}}{E_\Delta^+} \right],\tag{5.56}$$

joka voidaan numeerisesti ratkaista. Tämä tehdään luvussa 6.1.

### 5.2.1 Oppenheimer-Volkoff-yhtälöt ja dikvarkkikondensaatti

Sovelletaan saatuja Oppenheimer-Volkoff-yhtälöitä (2.39) edellä saatuun kvarkkiaineen termodynaamiseen potentiaaliin (5.51). Johdetaan näitä tuloksia käyttäen yhtälöryhmä, jota voidaan kutsua neutronitähden tilanyhtälöksi.

Otetaan sivulla 43 esitelty tulos kvarkkien termodynaamiselle potentiaalille, joka antaa siis paineen:

$$\begin{aligned}\Omega(T, \mu) &= -4N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{E_\Delta^+ + E_\Delta^-}{2} + T \ln[1 + e^{-E_\Delta^+/T}] + T \ln[1 + e^{-E_\Delta^-/T}] \right] \\ &\quad - 2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}}] + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}}] \right] \\ &\quad + \frac{(M - m)^2}{4G} + \frac{\Delta^2}{4H} = -P.\end{aligned}$$

Käyttäen yhtälöryhmän (2.39) ensimmäistä yhtälöä, saadaan energiatihedeksi

$$\begin{aligned}\epsilon &= T^2 \frac{\partial P}{\partial T} + \mu \frac{\partial P}{\partial \mu} \\ &= 2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ - (E_\Delta^+ + E_\Delta^- + E_p) + 2 \frac{e^{-E_\Delta^+/T} * E_\Delta^+}{1 + e^{-E_\Delta^+/T}} + 2 \frac{e^{-E_\Delta^-/T} * E_\Delta^-}{1 + e^{-E_\Delta^-/T}} \right. \\ &\quad + \frac{e^{-E^+/T} * E^+}{1 + e^{-E^+/T}} + \frac{e^{-E^-/T} * E^-}{1 + e^{-E^-/T}} + 2 \frac{e^{-E_\Delta^+/T} * (-E^+/E_\Delta^+)}{1 + e^{-E_\Delta^+/T}} + 2 \frac{e^{-E_\Delta^-/T} * (-E^-/E_\Delta^-)}{1 + e^{-E_\Delta^-/T}} \\ &\quad \left. - \frac{e^{-E^+/T}}{1 + e^{-E^+/T}} + \frac{e^{-E^-/T}}{1 + e^{-E^-/T}} + \frac{\mu E^+}{E_\Delta^+} - \frac{\mu E^-}{E_\Delta^-} \right] \\ &= 2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p (n(T, \mu) + \bar{n}(T, \mu) - 1) \right. \\ &\quad \left. + \tanh \frac{E_\Delta^+}{2T} \left( \frac{\mu E^+}{E_\Delta^+} - E_\Delta^+ \right) - \tanh \frac{E_\Delta^-}{2T} \left( \frac{\mu E^-}{E_\Delta^-} - E_\Delta^- \right) \right].\end{aligned}\tag{5.57}$$

Siten saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}
P(r) &= 2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_\Delta^+ + E_\Delta^- + 2T \ln[1 + e^{-E_\Delta^+/T}] + 2T \ln[1 + e^{-E_\Delta^-/T}] \right. \\
&\quad \left. + E_p + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p+\mu}{T}}] + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p-\mu}{T}}] \right] + \frac{(M-m)^2}{4G} + \frac{\Delta^2}{4H}, \\
\epsilon(r) &= 2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p (n(T, \mu) + \bar{n}(T, \mu) - 1) \right. \\
&\quad \left. + \tanh \frac{E_\Delta^+}{2T} \left( \frac{\mu E^+}{E_\Delta^+} - E_\Delta^+ \right) - \tanh \frac{E_\Delta^-}{2T} \left( \frac{\mu E^-}{E_\Delta^-} - E_\Delta^- \right) \right], \\
\frac{d\mathcal{M}(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \epsilon(r), \\
\frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{G\epsilon(r)\mathcal{M}(r)}{r^2} \left( 1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right) \left( 1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r} \right)^{-1} \left( \frac{4\pi r^3 P(r)}{\mathcal{M}(r)} + 1 \right), \\
\frac{1-m/M}{4N_F G} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 E_p} \left[ 1 - n(T, \mu) - \bar{n}(T, \mu) + \frac{E^-}{E_\Delta^-} \tanh \frac{E_\Delta^-}{2T} + \frac{E^+}{E_\Delta^+} \tanh \frac{E_\Delta^+}{2T} \right], \\
\frac{1}{4N_F H} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\tanh \frac{E_\Delta^-}{2T}}{E_\Delta^-} + \frac{\tanh \frac{E_\Delta^+}{2T}}{E_\Delta^+} \right],
\end{aligned} \tag{5.58}$$

missä  $T = T(r)$  ja  $\mu = \mu(r)$ . Nämä yhtälöt ratkaisemalla voitaisiin selvittää, onko neutronitähdillä tämän mallin puitteissa värisuprajohtavasta kvarkkiaineesta muodostuva ydin. Yhtälöiden numeerinen analyysi jätetään kuitenkin tämän työn ulkopuolelle.

### 5.3 Kvarkki-antikvarkkikondensaatti

Oletetaan siis, että kappaleessa 5.1 esitetyistä kondensaateista vain kvarkki-antikvarkkikondensaatti  $\phi$  on nolasta poikkeava. Kvarkki-antikvarkkikondensaatin muodostumisella on hyvin mielenkiintoisia vaikutuksia tiheän kvarkkiaineen matalan energian käyttäytymiseen. Kvarkkien vuorovaikutukset kondensaatin kanssa saavat ne käyttäytymään aivan kuin niillä olisi alkuperäistä suurempi massa.

Lagrangen tiheys, joka sisältää kvarkki-antikvarkkikondensaatin muodostumisen kannalta oleelliset vapausasteet, on muotoa

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \mu q^\dagger q = \bar{q}(i\cancel{\partial} - m + \mu\gamma_0)q + \mathcal{L}_{\bar{q}q}, \tag{5.59}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{q}q} = g(\bar{q}q)^2. \tag{5.60}$$

Lagrangen tiheys (5.59) voidaan linearisoida kuten aikaisemmin kahden maun NJL-mallin tapauksessa kappaleessa 4.1.2. Määritellään lisäksi kondensaatti

$$\langle \bar{q}q \rangle = \phi. \tag{5.61}$$

Nyt voidaan linearisoitu Lagrangen tiheys kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{L}^{\text{MFA}} = \bar{q}S^{-1}(x)q - V = \bar{q}(i\not{\partial} + \mu\gamma_0 - M)q - V, \quad (5.62)$$

$$V = \frac{(M - m)^2}{4g}, \quad (5.63)$$

missä  $S^{-1}(x)$  on kvarkkipropagaattori paikka-avaruudessa ja

$$M = m - 2g\phi. \quad (5.64)$$

Termodynaaminen potentiaali tilavuutta  $\mathcal{V}$  kohden lämpötilassa  $T$  ja kemiallisessa potentiaalissa  $\mu$  on

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{\mathcal{V}} \ln Z, \quad (5.65)$$

missä  $Z$  on järjestelmän partitiofunktio. Nyt termodynaaminen potentiaali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Omega(T, \mu) = -T \sum \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln \left( \frac{1}{T} S^{-1}(i\omega_n, \vec{p}) \right) + V, \quad (5.66)$$

missä

$$p_0 = i\omega_n = (2n + 1)\pi T \quad (5.67)$$

ja matriisijälki operoi maku-, väri- ja Diracin avaruuksissa. Termodynaamista potentiaalia varten tarvitaan yhtälössä (5.62) esiintyvä kvarkkipropagaattori liikemääräavaruudessa, joka on

$$S^{-1}(p) = \not{p} + \mu\gamma_0 - M. \quad (5.68)$$

Nyt termodynaaminen potentiaali voidaan laskea, kun tiedetään, että

$$\text{Tr} \ln(\not{A} - B) = \ln \text{Det}(\not{A} - B) = \ln(A^2 - B^2)^2, \quad (5.69)$$

missä  $A$  on mielivaltainen nelivektori ja  $B \in \mathbb{R}$ . Tällöin yhtälö (5.66) saa muodon

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu) &= -T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln \left( \frac{1}{T} (\not{p} + \mu\gamma_0 - M) \right) + V \\ &= -N_F N_C T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \frac{1}{T^4} |(p_0 + \mu)^2 - \vec{p}^2 - M^2|^2 + V. \end{aligned} \quad (5.70)$$



Merkitään

$$i\omega_n = p_0, \quad (5.71)$$

$$\omega^2 = \vec{p}^2 + M^2. \quad (5.72)$$

Kun lisäksi havaitaan, että

$$|(p_0 + \mu)^2 - \vec{p}^2 - M^2|^2 = (\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2)(\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2), \quad (5.73)$$

$$T \sum_n \ln \left( \frac{1}{T^2} (\omega_n^2 + c^2) \right) = c + 2T \ln(1 + e^{-c/T}), \quad (5.74)$$

saadaan termodynaaminen potentiaali lopulliseen muotoonsa

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu) &= -N_F N_C T \sum \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \frac{1}{T^4} (\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2)(\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2) + V \\ &= -2N_F N_C \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( \omega + T \ln \left( 1 + e^{-\frac{\omega-\mu}{T}} \right) + T \ln \left( 1 + e^{-\frac{\omega+\mu}{T}} \right) \right) \\ &\quad + V. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Kun termodynaaminen potentiaali (5.75) minimoidaan kvarkkien efektiivisen massan  $M$  suhteen, saadaan aukko-yhtälö, josta kvarkkien massa voidaan ratkaista. Tämä on ekvivalentti Dysonin yhtälöstä saadun, kapaleessa 4.1.4 esitetyn, aukko-yhtälön (4.20) kanssa, joka tosin on laskettu, kun  $T = \mu = 0$ . Aukko-yhtälö olisi myös nyt voitu johtaa Dysonin yhtälöstä käyttäen äärellisen lämpötilan kentäteoriaa.

Otetaan potentiaali (5.75) ja derivoidaan sitä  $M$ :n suhteen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(T, \mu)}{\partial M} &= -2N_F N_C \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( \frac{M}{\omega} + T \frac{-\frac{M}{T\omega} e^{-\frac{\omega-\mu}{T}}}{1 + e^{-\frac{\omega-\mu}{T}}} + T \frac{-\frac{M}{T\omega} e^{-\frac{\omega+\mu}{T}}}{1 + e^{-\frac{\omega+\mu}{T}}} \right) \\ &\quad + \frac{2(M - m)}{4g} = 0. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Tästä saadaan aukko-yhtälöksi

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1 - n(T, \mu) - \bar{n}(T, \mu)}{\omega} = \frac{1}{2N_F N_C} \frac{1 - m/M}{2g}, \quad (5.77)$$

missä

$$n(T, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{\omega+\mu}{T}} + 1}, \quad (5.78)$$

$$\bar{n}(T, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{\omega-\mu}{T}} + 1}. \quad (5.79)$$

Aukko-yhtälöstä (5.77) voidaan numeerisesti ratkaista kvarkkien massa  $M(T, \mu)$  lämpötilan ja kemiallisen potentiaalın funktiona.

## 5.4 Spin-1 -kondensaatti

Seuraavassa tarkastellaan sinisten kvarkkien kondensaatin muodostusta, jolla saattaa olla mielenkiintoisia vaikutuksia neutronitähtien fysiikkaan. Myös nämä kvarkit kondensoituvat, jos niiden välillä on sopiva attraktiivinen vuorovaikutus.

Oletetaan vastasyntyneen neutronitähtien ytimen koostuvan värisuprajohtavasta kvarkkiaineesta. Muutaman minuutin kuluttua sen syntymästä lämpötila on alle 1 MeV, jolloin punaiset ja vihreät kvarkit ovat kondensoituneet. Tällöin neutronitähtien ytimen ominaislämpökapasiteetin määräävät täysin siniset kvarkit. Kondensoitumattomat siniset kvarkit emittoivat neutriinoja URCA-prosessin<sup>1</sup> kautta ja siten dominoivasti osallistuvat koko tähden jäähtymiseen. Jos nämäkin kondensoituvat neutronitähtien lämpötilan laskettua riittävästi, on sillä suuri vaikutus neutronitähtien jäähtymisprosessiin. Sinisten kvarkkien kondensoitumisella on myös vaikutuksia neutronitähtien magneettikenttään elektromagneettisen Meissnerin efektin<sup>2</sup> kautta. [10, 8].

Sinisten kvarkkien spin-1 -kondensaatti on muotoa

$$\zeta = \langle q^T C \sigma^{03} \tau_2 \hat{P}_3^{(c)} q \rangle, \quad (5.80)$$

missä  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$  ja  $\hat{P}_3^{(c)} = 1/3 - 1/\sqrt{3}\lambda_8$  on projektioperaattori väriavaruudessa, osoittaen vain sinisten kvarkkien osallistuvan kondensaattiin. Spin-1 -kondensaatin lisäksi otetaan huomioon kvarkki-antikvarkkikondensaatti  $\phi$  ja dikvarkkikondensaatti  $\delta$ .

Tilannetta kuvaa Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \bar{q}(i\cancel{\partial} - m)q + \mathcal{L}_{\bar{q}q} + \mathcal{L}_{qq}, \quad (5.81)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{q}q} = G[(\bar{q}q)^2 - (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 - (\bar{q}i\gamma_5 q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2], \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qq} = & H_s[(\bar{q}i\gamma_5 C\tau_2\lambda_2\bar{q}^T)(q^T C i\gamma_5\tau_2\lambda_2 q) - (\bar{q}C\tau_2\lambda_2\bar{q}^T)(q^T C\tau_2\lambda_2 q)] \\ & - H_t[(\bar{q}\sigma^{\mu\nu} C\tau_2\bar{q}^T)(q^T C\sigma_{\mu\nu}\tau_2 q)]. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Otetaan huomioon vain kondensaatit

$$\phi = \langle q\bar{q} \rangle, \quad (5.84)$$

$$\delta = \langle q^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q \rangle, \quad (5.85)$$

$$\zeta = \langle q^T C \sigma^{03} \tau_2 q \rangle, \quad (5.86)$$

<sup>1</sup>URCA-prosessissa  $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$  ja  $u \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ . URCA-prosessin esittivät George Gamow ja Mario Schönberg 1941 artikkelissa [29].

<sup>2</sup>Walter Meissner havaitsi vuonna 1933, että suprajohteiden sisällä ei tietyn tunkeutumissyvyyden jälkeen esiinny lainkaan magneettikenttää. Tätä kutsutaan Meissnerin efektiksi.

joista  $\delta$  liittyy punaisiin ja vihreisiin kvarkkeihin,  $\zeta$  sinisiin kvarkkeihin ja  $\phi$  niihin kaikkiin. Linearisoidaan Lagrangen tiheys kuten edellä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{MFA}} + \mu q^\dagger q &= \bar{q}(i\cancel{\partial} + \mu\gamma^0 - m)q + G[\phi - (\bar{q}q)_f]^2 \\ &\quad + H_s[(i\delta)^* - (\bar{q}i\gamma_5 C\tau_2\lambda_2\bar{q}^T)_f][i\delta - (q^T C i\gamma_5\tau_2\lambda_2 q)_f] \\ &\quad + 2H_t[\xi^* - (\bar{q}\sigma^{03} C\tau_2\bar{q}^T)_f][\xi - (q^T C\sigma^{03}\tau_2 q)_f] \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{q}(i\cancel{\partial} + \mu\gamma^0 - m)q + G[2\phi\bar{q}q - \phi^2] \\ &\quad + H_s[\delta^* q^T C\gamma_5\tau_2\lambda_2 q - \delta\bar{q}\gamma_5 C\tau_2\lambda_2\bar{q}^T - \delta^*\delta] \\ &\quad + 2H_t[\xi^*\bar{q}\sigma^{03} C\tau_2\bar{q}^T + \xi q^T C\sigma^{03}\tau_2 q - \xi^*\xi] \\ &= \bar{q}(i\cancel{\partial} + \mu\gamma^0 - M)q + \frac{1}{2}\bar{q}[\Delta'\sigma^{03} + \Delta\gamma_5\lambda_2]\tau_2 q^C \\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{q}^C[\Delta'^*\sigma^{03} - \Delta^*\gamma_5 C\lambda_2]\tau_2 q - V. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Tekijä  $-2H_t$ :n edessä edellisessä lausekkeessa (5.87) johtuu siitä, että  $\sigma_{03} = -\sigma^{03} = \sigma^{30}$  ja alkuperäisessä Lagrangen tiheydessä on summaus  $\mu$ :n ja  $\nu$ :n yli. Edellä on määritelty

$$M = m - 2G\phi, \quad \Delta = -2H_s\delta, \quad \Delta' = 4H_t\xi, \quad (5.89)$$

jolloin potentiaali saa muodon

$$V = \frac{(M - m)^2}{4G} + \frac{|\Delta|^2}{4H_s} + \frac{|\Delta'|^2}{16H_t}. \quad (5.90)$$

Linearisoitu Lagrangen tiheys voidaan kirjoittaa nyt bispinorikenttien avulla muodossa

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{MFA}} + \mu q^\dagger q = \bar{\Psi} S^{-1}(x)\Psi - V. \quad (5.91)$$

Edellä esiintyvä kvarkkipropagaattori paikka-avaruudessa on

$$S^{-1}(x) = \begin{pmatrix} i\cancel{\partial} + \mu\gamma^0 - M & (\Delta'\sigma^{03} + \Delta\gamma_5\lambda_2)\tau_2 \\ (\Delta'^*\sigma^{03} - \Delta^*\gamma_5\lambda_2)\tau_2 & -i\cancel{\partial} - \mu\gamma^0 - M \end{pmatrix}, \quad (5.92)$$

ja sen Fourier-muunnos liikemääräavaruuteen

$$S^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \cancel{p} + \mu\gamma^0 - M & (\Delta'\sigma^{03} + \Delta\gamma_5\lambda_2)\tau_2 \\ (\Delta'^*\sigma^{03} - \Delta^*\gamma_5\lambda_2)\tau_2 & \cancel{p} - \mu\gamma^0 - M \end{pmatrix}. \quad (5.93)$$

Termodynaamisen potentiaalin laskeminen on esitetty liitteessä D. Termodynaamiseksi potentiaaliksi saadaan

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu) &= -2N_F \sum_{i=1}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_i^+ + \omega_i^-}{2} + T \ln[1 + e^{-\omega_i^+/T}] + T \ln[1 + e^{-\omega_i^-/T}] \\ &\quad + \frac{(M - m)^2}{4G} + \frac{|\Delta|^2}{4H_s} + \frac{|\Delta'|^2}{16H_t}, \end{aligned} \quad (5.94)$$

missä

$$\begin{aligned}
\omega_{1,2}^\pm &= \sqrt{(\sqrt{\vec{p}^2 + M^2} \pm \mu)^2 + |\Delta|^2}, \\
\omega_3^\pm &= \sqrt{(\sqrt{\vec{p}^2 + M_e^2} \pm \mu_e)^2 + |\Delta'_e|^2}, \\
\mu_e^2 &= \mu^2 + |\Delta'|^2 \sin^2 \theta, \\
M_e &= M\mu/\mu_e, \\
|\Delta'_e|^2 &= |\Delta'|^2 (\cos^2 \theta + \frac{M^2}{\mu_e^2} \sin^2 \theta), \\
\cos \theta &= p_3/\vec{p}^2.
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Aukkoyhtälöt saadaan, kun minimoidaan termodynaaminen potentiaali (5.94) muuttujien  $M$ ,  $\Delta^*$  ja  $\Delta'^*$  suhteen eli kun asetetaan

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta^*} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta'^*} = 0. \tag{5.96}$$

Jatkossa tarvitaan tietoa

$$\frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{x}{2} \right] \tag{5.97}$$

ja lisäksi määritellään

$$E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}, \quad E_3 = \sqrt{\vec{p}^2 + M_e^2}, \tag{5.98}$$

$$E^\pm = E_p \pm \mu, \quad E_3^\pm = E_3 \pm \mu_e. \tag{5.99}$$

Nyt voidaan laskea derivaatat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial M} &= + \frac{M - m}{2G} - 2N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2 \left[ \frac{ME^-}{E_p \omega_{1,2}^-} \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\omega_{1,2}^-/T}}{1 + e^{-\omega_{1,2}^-/T}} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{ME^+}{E_p \omega_{1,2}^+} \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\omega_{1,2}^+/T}}{1 + e^{-\omega_{1,2}^+/T}} \right] \right] \\
&\quad + \left[ \frac{|\Delta'|^2 \sin^2 \theta}{\mu_e^2} + \frac{\mu^2 E_3^-}{\mu_e^2 E_3} \right] \frac{M}{\omega_3^-} \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\omega_3^-/T}}{1 + e^{-\omega_3^-/T}} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{|\Delta'|^2 \sin^2 \theta}{\mu_e^2} + \frac{\mu^2 E_3^+}{\mu_e^2 E_3} \right] \frac{M}{\omega_3^+} \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\omega_3^+/T}}{1 + e^{-\omega_3^+/T}} \right] \\
&= + \frac{M - m}{2G} - N_F M \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2 \left[ \frac{E^-}{E_p \omega_{1,2}^-} \tanh \frac{\omega_{1,2}^-}{2T} + \frac{E^+}{E_p \omega_{1,2}^+} \tanh \frac{\omega_{1,2}^+}{2T} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{|\Delta'|^2 \sin^2 \theta}{\mu_e^2} + \frac{\mu^2 E_3^-}{\mu_e^2 E_3} \right] \frac{1}{\omega_3^-} \tanh \frac{\omega_3^-}{2T} \\
&\quad + \left[ \frac{|\Delta'|^2 \sin^2 \theta}{\mu_e^2} + \frac{\mu^2 E_3^+}{\mu_e^2 E_3} \right] \frac{1}{\omega_3^+} \tanh \frac{\omega_3^+}{2T} = 0.
\end{aligned}$$

Tätä voidaan sieventää lisää, kun huomataan, että

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta'|^2 \sin^2 \theta}{\mu_e^2} + \frac{\mu^2 E_3^\pm}{\mu_e^2 E_3} &= 1 - \frac{\mu^2}{\mu_e^2} + \frac{\mu^2 E_3^\pm}{\mu_e^2 E_3} \\ &= 1 - \frac{\mu^2}{\mu_e^2} \left( \frac{E_3^\pm}{E_3} - 1 \right) = 1 \pm \frac{\mu^2}{\mu_e E_3}, \end{aligned} \quad (5.100)$$

jolloin aukkoystälöksi saadaan

$$\begin{aligned} M &= m + 2GN_F M \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2 \left[ \frac{E^-}{E_p \omega_{1,2}^-} \tanh \frac{\omega_{1,2}^-}{2T} + \frac{E^+}{E_p \omega_{1,2}^+} \tanh \frac{\omega_{1,2}^+}{2T} \right] \\ &\quad + \left[ 1 - \frac{\mu^2}{\mu_e E_3} \right] \frac{\tanh \frac{\omega_3^-}{2T}}{\omega_3^-} + \left[ 1 + \frac{\mu^2}{\mu_e E_3} \right] \frac{\tanh \frac{\omega_3^+}{2T}}{\omega_3^+}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Seuraavaksi minimoidaan termodynaaminen potentiaali dikvarkkikondensaatin  $\delta$  suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta^*} &= \frac{\Delta}{4H_s} - 2N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\omega_1^-/T}}{1 + e^{-\omega_1^-/T}} \right] \frac{\Delta}{\omega_1^-} + \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\omega_1^+/T}}{1 + e^{-\omega_1^+/T}} \right] \frac{\Delta}{\omega_1^+} \\ &= \frac{\Delta}{4H_s} - N_F \Delta \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\tanh \frac{\omega_1^-}{2T}}{\omega_1^-} + \frac{\tanh \frac{\omega_1^+}{2T}}{\omega_1^+} = 0. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Tästä saadaan aukkoystälöksi

$$\Delta = 4H_s N_F \Delta \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\tanh \frac{\omega_1^-}{2T}}{\omega_1^-} + \frac{\tanh \frac{\omega_1^+}{2T}}{\omega_1^+}. \quad (5.103)$$

Viimeiseksi määritetään termodynaamisen potentiaalin minimi spin-1 -kon-

densaatin suhteen, joksi saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial\Delta'^*} = & \frac{\Delta'}{16H_t} - 2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\omega_3^-/T}}{1 + e^{-\omega_3^-/T}} \right] \frac{1}{2\omega_3^-} \right. \\
& \cdot \left[ -\frac{M^2|\Delta'|^2\Delta' \sin^4\theta}{\mu_e^4} + \frac{\Delta'|\Delta_e|^2}{|\Delta'|^2} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\Delta'E_3^- \sin^2\theta}{\mu_e} - \frac{M^2\mu^2\Delta'E_3^- \sin^2\theta}{\mu_e^4 E_3} \right] \right. \\
& + \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\omega_3^+/T}}{1 + e^{-\omega_3^+/T}} \right] \frac{1}{2\omega_3^+} \\
& \cdot \left[ -\frac{M^2|\Delta'|^2\Delta' \sin^4\theta}{\mu_e^4} + \frac{\Delta'|\Delta_e|^2}{|\Delta'|^2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\Delta'E_3^+ \sin^2\theta}{\mu_e} - \frac{M^2\mu^2\Delta'E_3^+ \sin^2\theta}{\mu_e^4 E_3} \right] \right] = 0.
\end{aligned} \tag{5.104}$$

Tämä sieventyy lopulliseksi aukko-yhtälöksi muotoon

$$\Delta' = 8H_t N_F \Delta' \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ 1 - \frac{\vec{p}^2 \sin^2\theta}{\mu_e E_3} \right] \frac{\tanh \frac{\omega_3^-}{2T}}{\omega_3^-} + \left[ 1 + \frac{\vec{p}^2 \sin^2\theta}{\mu_e E_3} \right] \frac{\tanh \frac{\omega_3^+}{2T}}{\omega_3^+}. \tag{5.105}$$

Nyt on numeerisesti ratkaistava kolmen kytketyn yhtälön ryhmä, joka on muotoa

$$\begin{aligned}
\frac{1 - m/M}{2GN_F} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ 2 \left[ \frac{E^-}{E_p \omega_{1,2}^-} \tanh \frac{\omega_{1,2}^-}{2T} + \frac{E^+}{E_p \omega_{1,2}^+} \tanh \frac{\omega_{1,2}^+}{2T} \right] \right. \\
& \left. + \left[ 1 - \frac{\mu^2}{\mu_e E_3} \right] \frac{\tanh \frac{\omega_3^-}{2T}}{\omega_3^-} + \left[ 1 + \frac{\mu^2}{\mu_e E_3} \right] \frac{\tanh \frac{\omega_3^+}{2T}}{\omega_3^+} \right], \\
\frac{1}{4H_s N_F} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\tanh \frac{\omega_1^-}{2T}}{\omega_1^-} + \frac{\tanh \frac{\omega_1^+}{2T}}{\omega_1^+}, \\
\frac{1}{8H_t N_F} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ 1 - \frac{\vec{p}^2 \sin^2\theta}{\mu_e E_3} \right] \frac{\tanh \frac{\omega_3^-}{2T}}{\omega_3^-} + \left[ 1 + \frac{\vec{p}^2 \sin^2\theta}{\mu_e E_3} \right] \frac{\tanh \frac{\omega_3^+}{2T}}{\omega_3^+}.
\end{aligned}$$

Yhtälöryhmän numeerinen analyysi ei kuitenkaan kuulu tähän työhön.

# Luku 6

## Numeeriset tulokset

### 6.1 Dikvarkkikondensaatti tapauksessa $\delta \neq 0$ ja $\phi \neq 0$

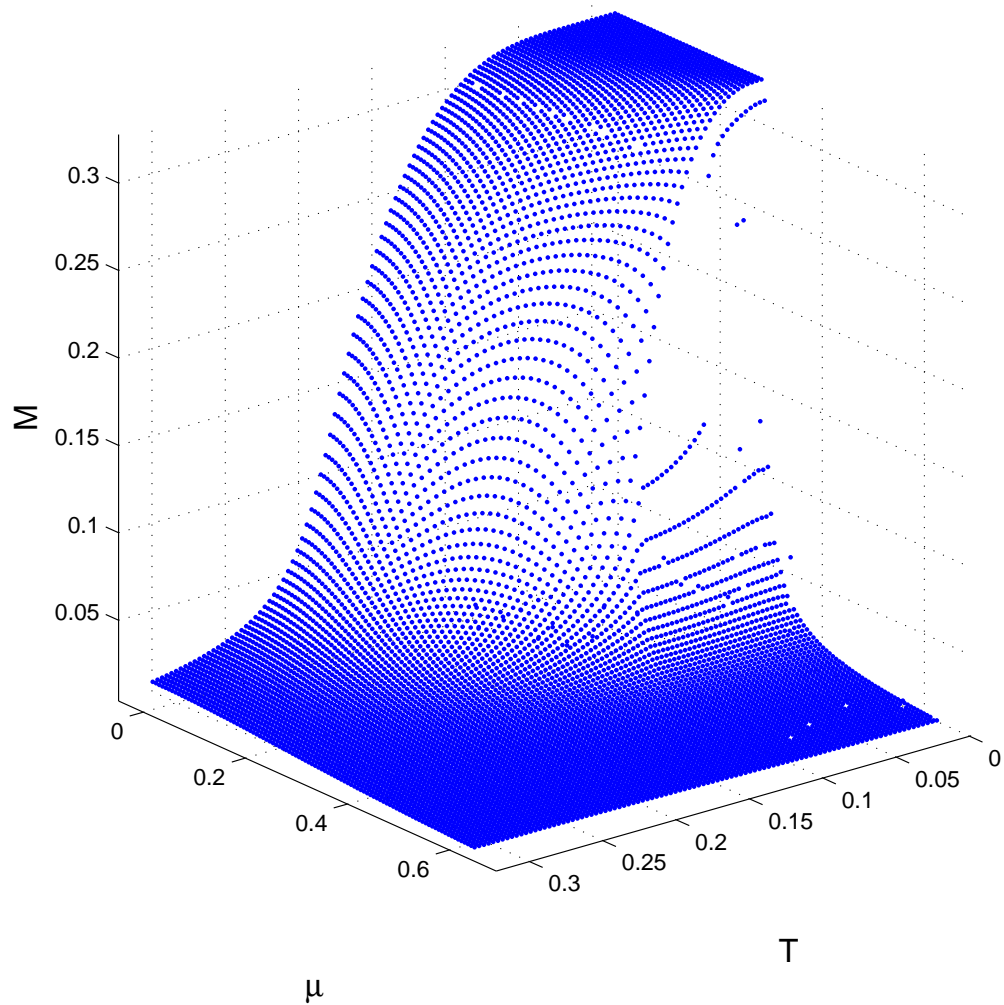
Esitellään nyt numeerinen ratkaisu yhtälöiden (5.55) ja (5.56) muodostamalle yhtälöryhmälle. Saadut tulokset on esitetty kuvissa 6.1, 6.2, 6.3 ja 6.4. Kuvista 6.1, 6.2 ja 6.3 nähdään, että kondensaatit ovat eri alueissa nolasta poikkeavia. Tällöin voidaan olettaa, että järjestelmällä on kolme toisistaan poikkeavaa faasia.

Pienillä lämpötiloilla ja kemiallisen potentiaalin arvoilla  $\phi \neq 0$  ja  $\delta = 0$ . Tässä faasissa kiraalisymmetria on rikkoutunut, ja kvarkkien vuorovaikutukset kvarkki-antikvarkkikondensaatin kanssa generoivat niille massan  $M \approx 330$  MeV, kuten kuvasta 6.1 nähdään. Kvarkit ovat tämän lisäksi kahliutuneet hadroneiksi. Tätä faasia kutsutaan hadroniseksi faasiksi.

Suurilla lämpötiloilla  $\phi = \delta = 0$  eli molemmat kondensaatit ovat nollia. Tällöin kiraalisymmetria on palautunut ja kvarkit ovat lähes massattomia (kuva 6.1). Faasitransition myötä kvarkit vapautuvat hadroneista ja muodostavat kvarkki-gluoni-plasmaa. Tämän faasin olemassaoloa tutkitaan aktiivisesti. Mahdollisia havaintoja kvarkki-gluoni-plasmasta on myös esitetty [12, 13, 14].

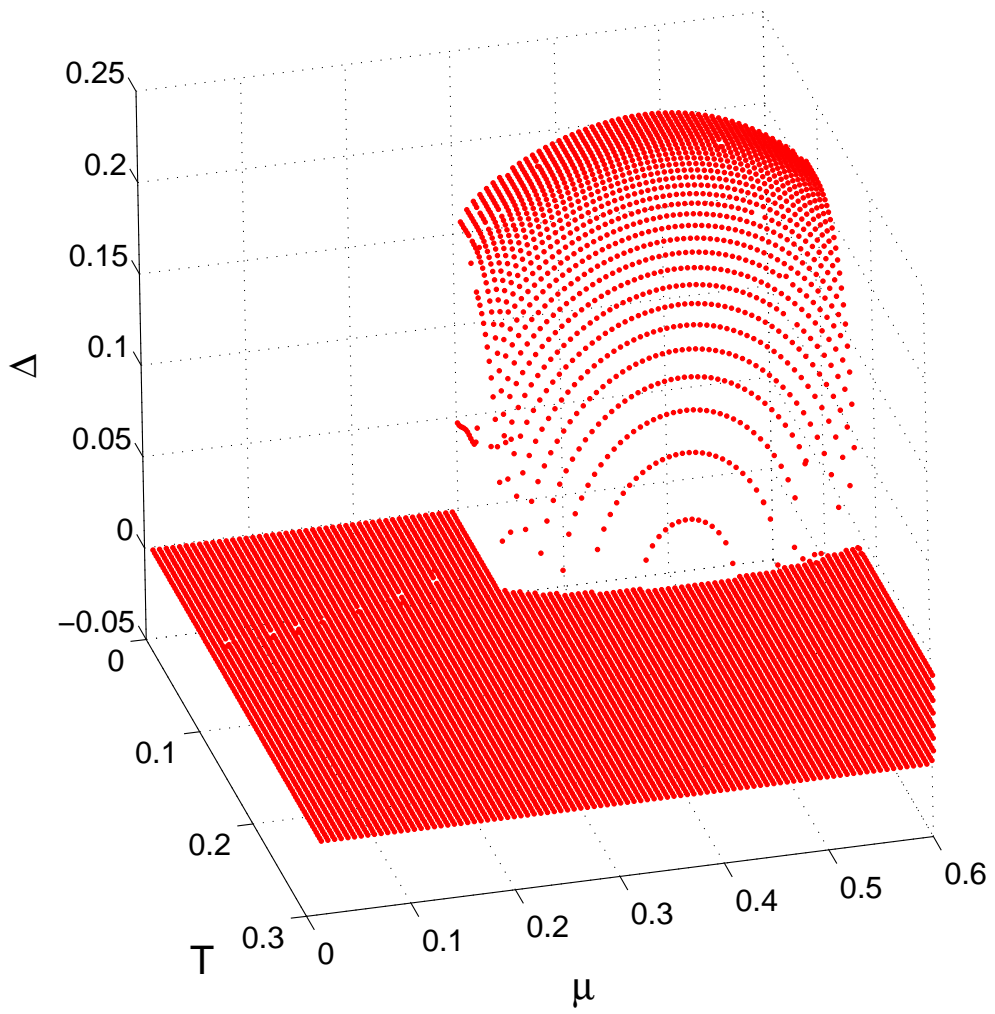
Pienillä lämpötiloilla ja suurilla kemiallisen potentiaalin arvoilla kvarkit ovat värisuprajohtavassa faasissa, jossa  $\delta \neq 0$  ja  $\phi = 0$  (kuva 6.2). Tämä on dikvarkkikondensaatin  $\delta$  aikaansaama faasi. Värisuprajohtavaa kvarkkiainetta saattaa esiintyä luonnossa neutronitähtien ytimissä. Sen olemassaolosta ei kuitenkaan tällä hetkellä ole mitään kokeellisia todisteita.

Kuvassa 6.4 on esitetty mallilla saatu ennuste QCD:n faasidiagrammille. Hadronisen faasin rajana on sininen käyrä ja värisuprajohtavan faasin rajana punainen käyrä. Näiden yläpuolella kvarkit ovat kvarkki-gluoni-plasma

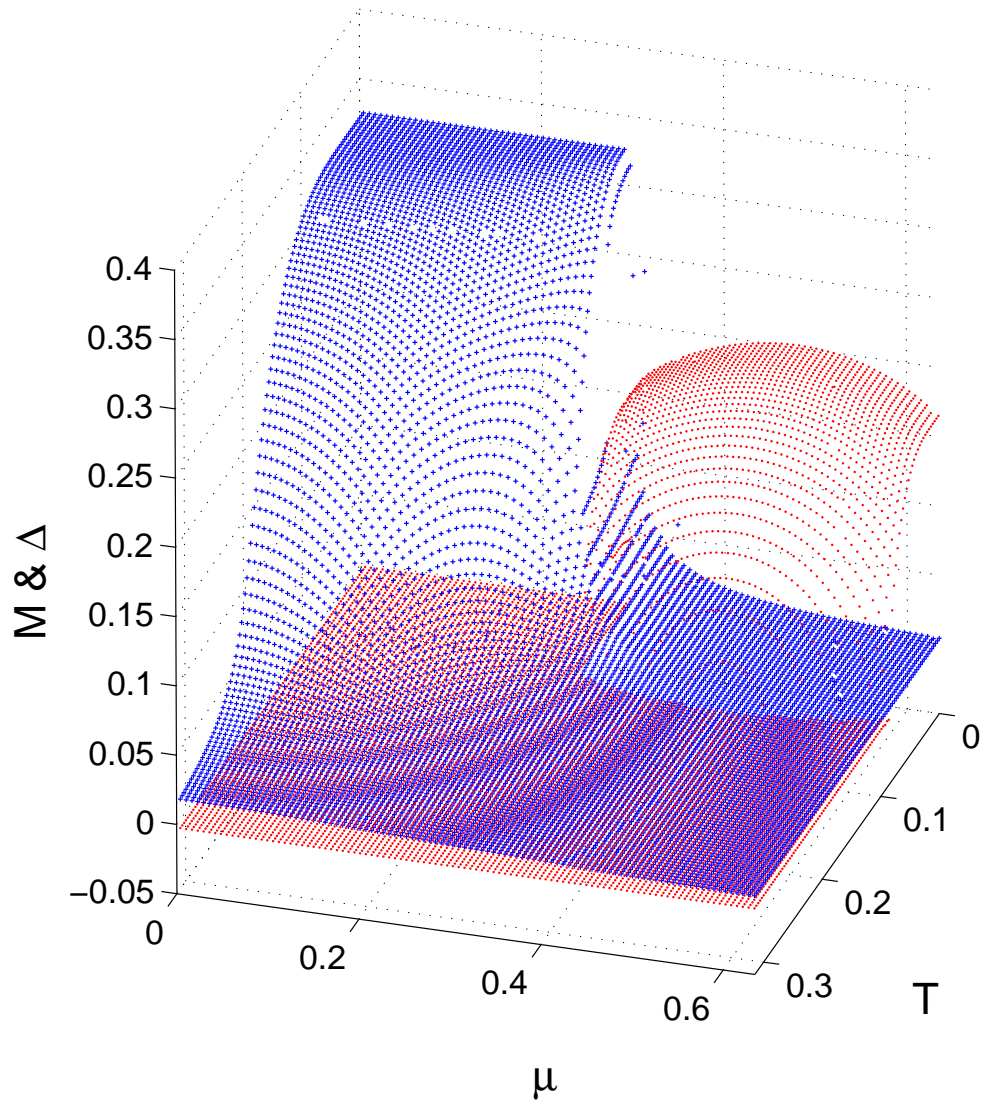


Kuva 6.1: Kvarkkien massa  $M$  lämpötilan  $T$  ja kemiallisen potentiaalin  $\mu$  funktiona yksiköissä GeV.

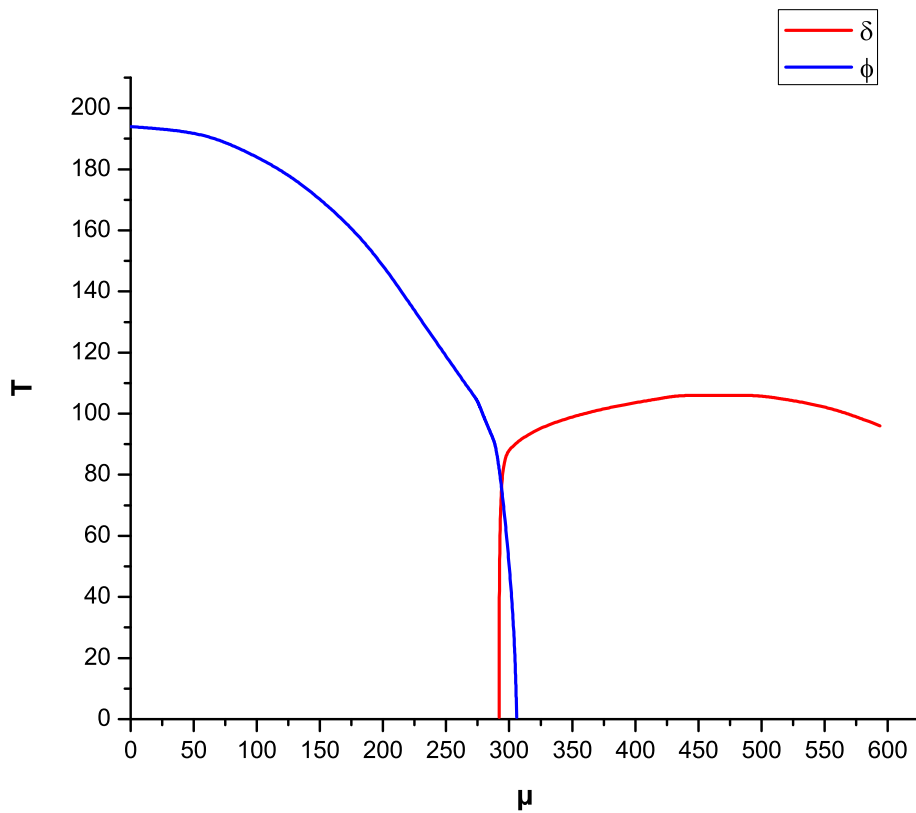




Kuva 6.2: Dikvarkkikondensaatti  $\Delta$  lämpötilan  $T$  ja kemiallisen potentiaalin  $\mu$  funktiona yksiköissä GeV.



Kuva 6.3: Dikvarkkikondensaatti  $\Delta$  (kuvassa punaisella) ja kvarkkien massa  $M$  (kuvassa sinisellä) lämpötilan  $T$  ja kemiallisen potentiaalin  $\mu$  funktiona yksiköissä GeV.



Kuva 6.4: Käytetyllä mallilla saatu ennuste QCD:n faasidiagramiksi. Kuvassa lämpötila  $T$  ja kemiallinen potentiaali  $\mu$  on esitetty yksiköissä MeV. Sinisen viivan alapuolella kvarkki-antikvarkkikondensaatti  $\phi \neq 0$  ja sen yläpuolella  $\phi = 0$ . Punaisen viivan vasemmalla ja yläpuolella dikvarkkikondensaatti  $\delta = 0$  ja viivan oikealla ja alapuolella  $\delta \neq 0$ .

(QGP) faasissa. Faasiraja on määritetty derivaattojen  $\frac{dM}{dT}$ ,  $\frac{dM}{d\mu}$ ,  $\frac{d\Delta}{dT}$  ja  $\frac{d\Delta}{d\mu}$  piikeistä. Faasitransitioiden kertaluvut voidaan päätellä kuvasta 6.3. Faasitransitio hadronisen faasin ja QGP-faasin välillä on niin kutsuttu crossover faasitransitio. Faasitransitiot hadronisen faasin ja värisuprajohtavan faasin välillä sekä värisuprajohtavan faasin ja QGP-faasin välillä ovat ensimmäisen kertaluvun faasitransitioita.

Edellä on oletettu, että kvarkki-antikvarkkikondensaattiin liittyvä kytkinvakio  $G$  ja dikvarkkikondensaattiin liittyvä kytkinvakio  $H$  ovat yhtäsuuria. Seuraavissa kuvissa 6.5 ja 6.6 on esitetty molemmat kondensaatit kemiallisen potentiaalin funktiona eri lämpötilan arvoilla, kun kytkinvakioiden  $G$  ja  $H$  välistä suhdetta muutetaan.

Kuvista 6.5 ja 6.6 nähdään, että kytkinvakioiden välisen suhteen muuttamisella on monenlaisia vaikutuksia. Dikvarkkikondensaattiin liittyvän kytkinvakion  $H$  kasvattaminen vaikuttaa myös kvarkki-antikvarkkikondensaattiin ja siihen, millä kemiallisen potentiaalin arvolla faasitransitio tapahtuu. Faasitransitioon liittyvä kriittinen kemiallinen potentiaali  $\mu_C$  siirtyy lämpötilassa  $T \approx 0$  arvosta  $\mu_C \approx 350$  MeV arvoon  $\mu_C \approx 150$  MeV, kun suhde  $H/G$  kasvaa arvosta 0.5 arvoon 1.5. Kytkinvakion  $H$  kasvattaminen muuttaa lisäksi faasitransition tyyppiä. Kun  $H = 0.5G$  tai  $H = 1.0G$ , faasitransitio on selvästi ensimmäistä kertalukua, mutta näin ei ole, kun  $H = 1.5G$ .

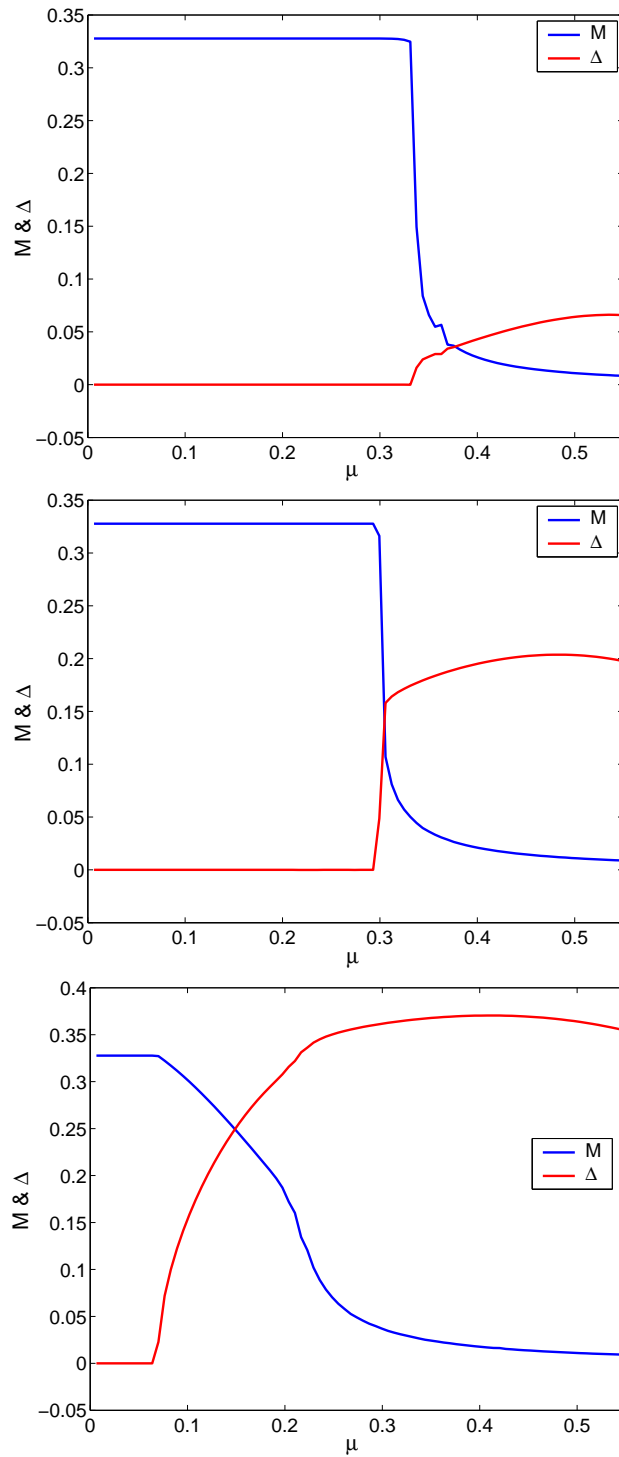
Myös faasitransitioon liittyvä kriittinen lämpötila muuttuu, kun kytkinvakioiden suhdetta muutetaan. Kun  $H = 0.5G$ , on kriittinen lämpötila  $T_C < 60$  MeV. Edellisistä tarkasteluista tiedetään, että, kun  $H = 1.0G$ , on kriittinen lämpötila  $T_C > 100$  MeV.

## 6.2 Kvarkki-antikvarkkikondensaatti

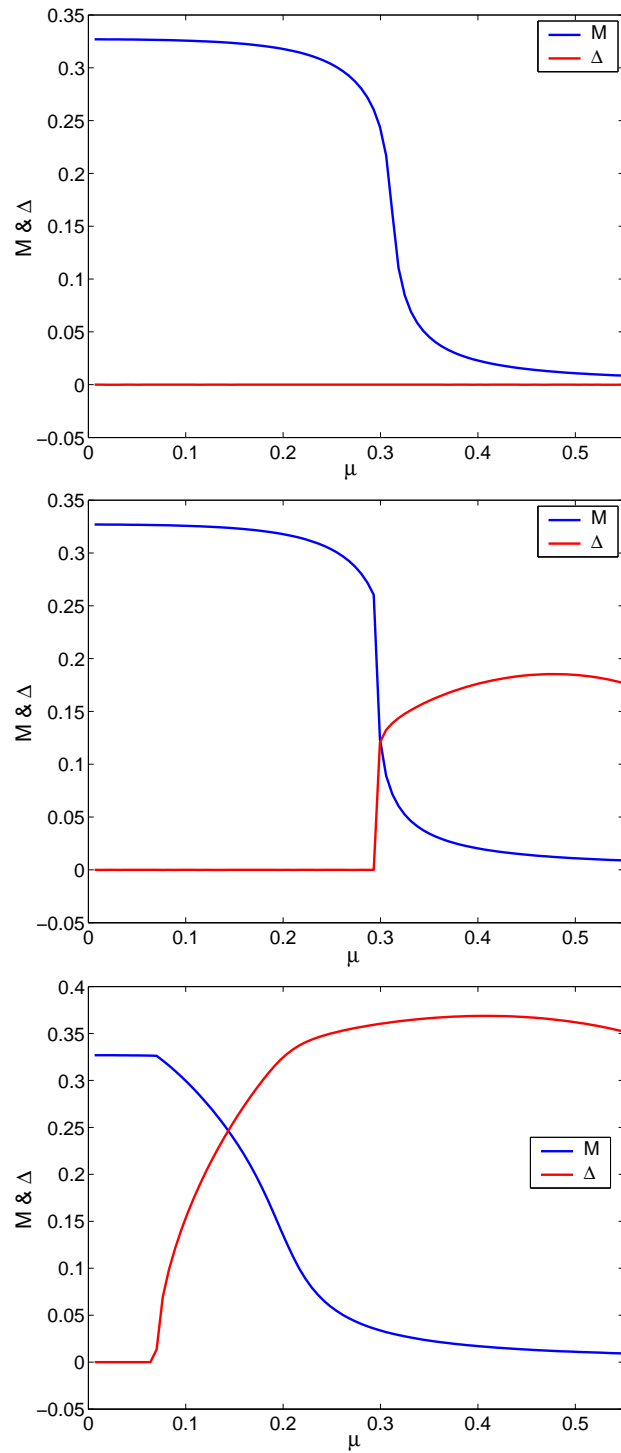
Tässä kappaleessa esitetään numeerinen ratkaisu yhtälölle (5.77), joka antaa kvarkkien massan lämpötilan ja kemiallisen potentiaalin funktiona, kun otetaan huomioon vain kvarkki-antikvarkkikondensaatti.

Kuvasta 6.7 nähdään, että pienillä kemiallisen potentiaalin ja lämpötilan arvoilla kvarkkien massa on noin 330 MeV. Kun kemiallinen potentiaali ja lämpötila kasvavat riittävästi, tapahtuu faasitransitio, jonka jälkeen kvarkkien massa on noin 5 MeV. Kvarkkiaineella on siis tämän mallin mukaan kaksi faasia. Näistä kiraalisymmetrian rikkovassa faasissa, jolloin  $T$  ja  $\mu$  ovat pieniä, kvarkkien massa on lähestulkoon kokonaan kondensaattia  $\langle \bar{q}q \rangle$ , joka on peräisin QCD:n vuorovaikutusenergiasta. Kiraalisymmetrisessä faasissa kvarkit ovat asympotoottisesti vapaita ja niiden massat vastaavat QCD:n Lagrangen tiheydessä esiintyviä massaparametreja.

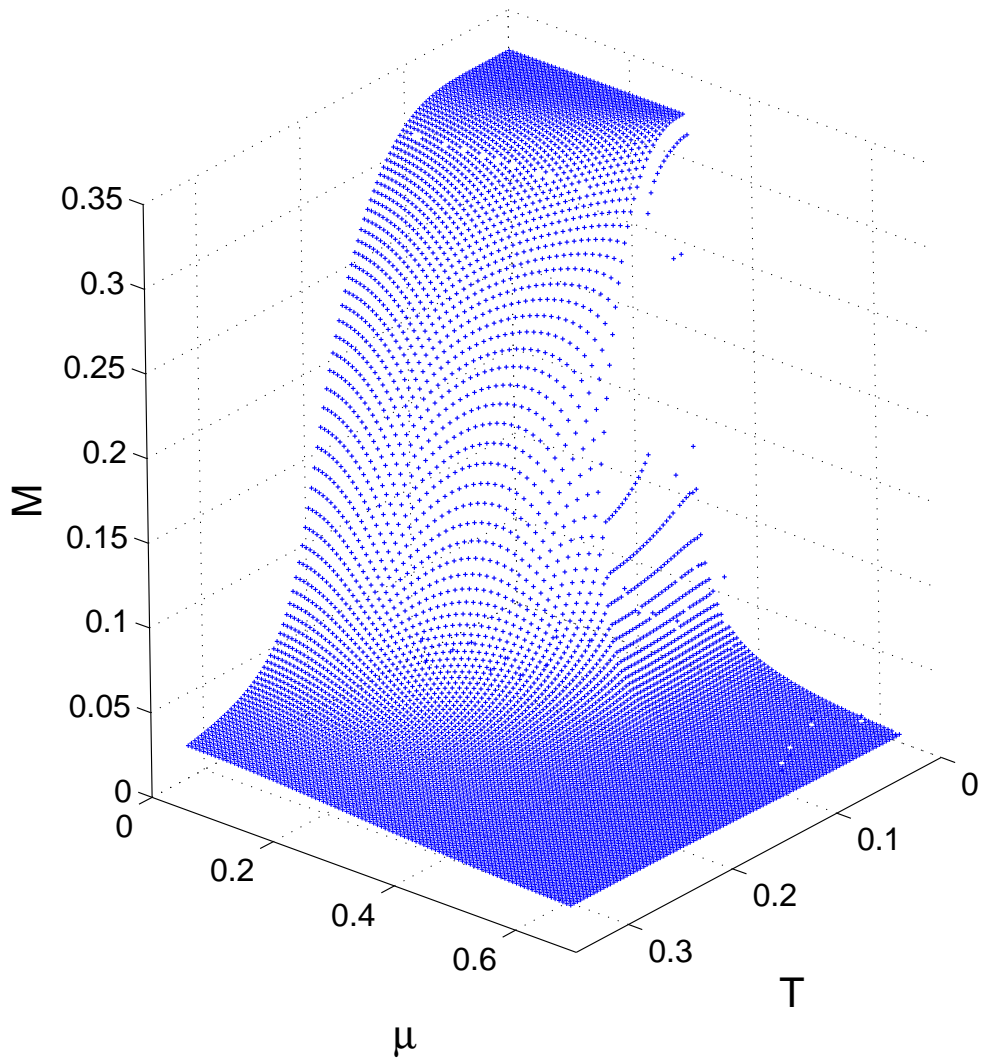
Kuvassa 6.8 on esitetty ennuste QCD:n faasidiagrammille, kun otetaan



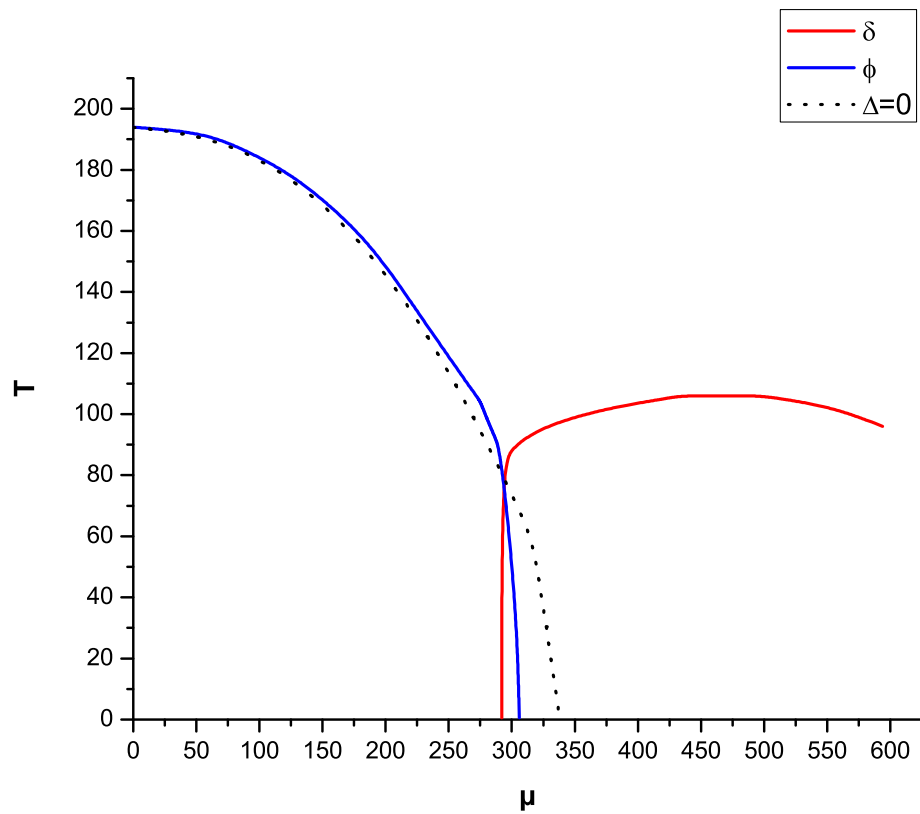
Kuva 6.5: Kvarkkien massa  $M$  (kuvassa sinisellä) ja dikvarkkikondensaatti  $\Delta$  (kuvassa punaisella) kemiallisen potentiaalin funktiona yksiköissä GeV, kun dikvarkkikondensaattiin liittyvä kytkinvakio  $H$  on  $0.5G$ ,  $1.0G$  ja  $1.5G$  ja lämpötila  $T \approx 0$ .



Kuva 6.6: Kvarkkien massa  $M$  (kuvassa sinisellä) ja dikvarkkikondensaatti  $\Delta$  (kuvassa punaisella) kemiallisen potentiaalin funktiona yksiköissä GeV, kun dikvarkkikondensaattiin liittyvä kytkinvakio  $H$  on  $0.5G$ ,  $1.0G$  ja  $1.5G$  ja lämpötila  $T \approx 60$  MeV.



Kuva 6.7: Kvarkkien massa  $M$  lämpötilan  $T$  ja kemiallisen potentiaalin  $\mu$  funktiona yksiköissä GeV.



Kuva 6.8: Ennuste QCD:n faasidiagrammiksi, kun huomioidaan dikvarkki-kondensaatti (kuvassa sininen ja punainen käyrä) ja kun sitä ei huomioida (musta katkoviiva). Lämpötila  $T$  ja kemiallinen potentiaali  $\mu$  esitetty yksiköissä MeV.



huomioon dikvarkkikondensaatti ja kvarkki-antikvarkkikondensaatti (kuvasa sininen ja punainen käyrä) sekä, kun otetaan huomioon vain kvarkki-antikvarkkikondensaatti (musta katkoviiva). Tästä nähdään, että dikvarkkikondensaatin lisääminen vaikuttaa myös kvarkki-antikvarkkikondensaattiin. Ilman dikvarkkikondensaattia, kvarkki-antikvarkkikondensaatti on nollasta eroava suuremmilla kemiallisen potentiaalin arvoilla. Tästä voidaan päätellä, että dikvarkkikondensaatti on järjestelmän kannalta oleellinen. Voidaan myös olettaa, että kondensaattien lisääminen muuttaa faasidiagrammia entisestään. Siten sellaisen järjestelmän tutkimista, johon on tässä käsiteltyjen kondensaattien lisäksi lisätty uusia kondensaatteja, voidaan pitää perusteltuna.

Kun tutkittavat kondensaatit on valittu, on lasku kuitenkin aina konsistentti eli kondensaatit määräytyvät ilman approksimaatioita tai lisäoletuksia. Mutta, kuten saatujen tulosten perusteella voidaan päätellä, ei etukäteen voida tietää, mitkä kondensaatit voidaan jättää huomioimatta. Siten, jos halutaan kvantitatiivisia tuloksia, on otettava huomioon kaikki mahdolliset kondensaatit, jotka voivat muodostua. Tämä lisää teorian parametrien määrää huomattavasti, sillä jokaiseen kondensaattiin liittyy oma kytkinvakio, joka on jotenkin saatava kiinnitettyä. Ja kuten edellä todettiin, saattaa kytkinvakioiden välisen suhteen variointi muuttaa saatuja tuloksia huomattavasti.

# Luku 7

## Yhteenveto

Käytetty malli ennusti kvarkkiaineelle kolme erilaista faasia. Kemiallisen potentiaalin  $\mu$  ollessa alle 300 MeV ja lämpötilan  $T$  ollessa alle 190 MeV kvarkit ovat sitoutuneet hadroneihin ja kiraalisymmetria on rikkoutunut. Lämpötilan ollessa yli 190 MeV kvarkit ovat vapautuneet hadroneista ja muodostavat kvarkki-gluoni-plasmaa (QGP). Tällöin kiraalisymmetria on palautunut. Kemiallisen potentiaalin ollessa yli 300 MeV ja lämpötilan alle 100 MeV kvarkit ovat värisuprajohtavassa faasissa. Vastaava faasidiagrammi on esitetty kuvassa 6.4.

Kappaleissa 5.1 ja 5.4 käsiteltyjen mallien ennustamien faasidiagrammien selvittäminen olisi ollut mielenkiintoista. Joitakin numeerisia tuloksia näihin malleihin löytyy artikkelista [8]. Myös kappaleessa 2.2 esitellyn neutronitähden tilanyhtälön numeerinen ratkaisu olisi ollut kiinnostavaa. Tällöin olisi saatu selville muunmuassa, ennustavatko nämä mallit neutronitähdelle värisuprajohtavasta kvarkkiaineesta koostuvan ytimen.

# Liite A

## Schwarzschildin ratkaisu

### A.1 Klassinen raja

Tarkastellaan hitaasti liikkuvaa kappaletta heikossa ja staattisessa gravitaatiokentässä. Newtonin mekaniikan mukaan kappaleen kiihtyvyyden gravitaatiokentässä antaa yhtälö

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (\text{A.1})$$

missä  $\phi$  on pallosymmetrisen massan  $M$  aikaansaama gravitaatiopotentiaali. Tämä on muotoa

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (\text{A.2})$$

Tarkastellaan geodeettista yhtälöä

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Koska kappale liikkuu hitaasti, on

$$dx^i \ll dx^0 = cdt, \quad (\text{A.4})$$

joten

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \approx \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Koska kenttä on heikko, voidaan olettaa että se antaa vain pienen poikkeaman laakeaan Minkowskin avaruuden taustageometriaan. Tällöin voidaan kehittää metrinen tensori sarjaksi poikkeaman suhteen, jolloin saadaan

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O(h_{\mu\nu}^2). \quad (\text{A.6})$$

Edellä  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  on Minkowskin avaruuden metrinen tensori ja  $h_{\mu\nu}$  pieni poikkeama siitä. Koska gravitaatiokenttä on staattinen, on  $h_{\mu\nu,0} = 0$ . Tarvittavat Christoffelin symbolit ovat siten

$$\Gamma_{00}^{\mu} = 1/2\eta^{\mu\nu}h_{00,\nu}. \quad (\text{A.7})$$

Geodeettinen yhtälö (A.5) muodostaa yhtälöryhmän

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Yhtälö (A.9) antaa  $dx^0/ds = \text{vakio}$ , joten kertomalla yhtälöä (A.8) termillä  $(dx^0/ds)^{-2}$  saadaan

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00}. \quad (\text{A.10})$$

Tämä on samaa muotoa, kuin yhtälö (A.1), joten

$$h_{00} = 2\phi + f, \quad (\text{A.11})$$

missä  $f \in \mathbb{R}$ . Koska metriikan tulee olla asymptoottisesti laakea, on vakion  $f$  oltava nolla. Metrinen tensori on siten

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Näin saatiin johdettua klassinen raja Schwarzschildin metriikalle [30].

## A.2 Schwarzschildin metriikka

Yleisin pallosymmetrisen, staattisen ja asymptoottisesti laakean aika-avaruuden metriikkaa kuvaava metrinen tensori, pallokoordinaateissa esitettynä, on muotoa

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{a(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{b(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

missä  $a(r)$  ja  $b(r)$  ovat mielivaltaisia  $r$ :n funktioita. Koska metriikan tulee olla asympotoottisesti laakea, pätee funktioille  $a(r)$  ja  $b(r)$

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} b(r) &= 0.\end{aligned}$$

Käänteinen metrinen tensori  $g^{\mu\nu}$  saadaan, kun ratkaistaan yhtälö

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad (\text{A.14})$$

missä  $\delta^{\mu}_{\nu}$  on Kroneckerin delta, jolle pätee

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}. \quad (\text{A.15})$$

Käänteinen metrinen tensori on siis

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-a(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-b(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r \sin \theta)^{-2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Einsteinin kenttäyhtälöitä varten tarvitaan Riccin tensori ja kaarevuuskalaari. Jotta nämä voitaisi laskea, tulee sitä ennen laskea Christoffelin symbolit ja Riemannin tensori. Metrisen tensorin ollessa diagonaalinen, on Christoffelin symboli nolasta eroava vain, kun vähintään kaksi indekseistä on samoja. Tämä johtaa siihen, että riippumattomia ja nolasta poikkeavia Christoffelin symboleita on korkeintaan 28 kappaletta. Lisäksi mikään metrisen tensorin komponenteista ei riipu  $t$ :stä tai  $\phi$ :stä ja vain  $g_{33}$  riippuu  $\theta$ :sta. Tästä lauseketta (2.14) tarkastelemalla seuraa, että vain ne Christoffelin symbolit ovat nolasta eroavia, joissa yksi indekseistä on 1 tai joissa yksi indekseistä on 2 ja muut 3:sia. Riippumattomat ja nolasta poikkeavat Christoffelin symbolit ovat siten<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= 1/2e^{-a}\partial_r e^a &= 1/2a', \\ \Gamma_{00}^1 &= -1/2e^{-b}(-\partial_r e^a) &= 1/2a'e^{a-b}, \\ \Gamma_{11}^1 &= -1/2e^{-b}\partial_r(-e^b) &= 1/2b', \\ \Gamma_{22}^1 &= -1/2e^{-b}(-\partial_r(-r^2)) &= -re^{-b}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -1/2e^{-b}(-\partial_r(-r^2 \sin^2)) &= -r \sin^2 \theta e^{-b}, \\ \Gamma_{12}^2 &= -1/2r^{-2}\partial_r(-r^2) &= 1/r, \\ \Gamma_{33}^2 &= -1/2r^{-2}(-\partial_\theta(r^2 \sin^2 \theta)) &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= -1/2r^2 \sin^2 \theta \partial_r(-r^2 \sin^2 \theta) &= 1/r, \\ \Gamma_{23}^3 &= -1/2r^2 \sin^2 \theta \partial_\theta(-r^2 \sin^2 \theta) &= \cot \theta.\end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

<sup>1</sup>Merkitään jatkossa laskujen lyhentämiseksi  $\frac{d}{dr}f(r) = f'(r)$ .

Jotta ei tarvitsisi laskea kaikkia 20:tä riippumatonta Riemannin tensorin komponenttia, voidaan tarkastelemalla Riemannin tensorin lauseketta (2.19) ja nolasta poikkeavia Christoffelin symboleja sekä niiden riippuvuutta parametreista  $t, r, \theta, \phi$  päätellä, mitkä niistä ainakin ovat nolliä. Lyhyen tarkastelun seurauksena voidaan todeta, että nolasta poikkeavia riippumattomia Riemannin tensorin komponentteja voivat olla vain  $R_{0101}, R_{0202}, R_{0303}, R_{1212}, R_{1313}, R_{1323}$  ja  $R_{2323}$ . Nämä ovat

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= -\partial_r(1/2a') + 1/2a'1/2b' - 1/2a'1/2a' \\
&= -1/2a'' + 1/4a'b' - 1/4(a')^2, \\
R^0_{202} &= 1/2a'(-re^{-b}) \\
&= -1/2ra'e^{-b}, \\
R^0_{303} &= 1/2a'(-r \sin^2 \theta e^{-b}) \\
&= -1/2r \sin^2 \theta a' e^{-b}, \\
R^1_{212} &= \partial_r(-re^{-b}) + 1/2b'(-re^{-b}) - (-re^{-b})1/r \\
&= 1/2rb'e^{-b}, \\
R^1_{313} &= \partial_r(-r \sin^2 \theta e^{-b}) + 1/2b'(-r \sin^2 \theta e^{-b}) \\
&= 1/2r \sin^2 \theta b' e^{-b}, \\
R^1_{323} &= \partial_\theta(-r \sin^2 \theta e^{-b}) + (-re^{-b})(-\sin \theta \cos \theta) - (-r \sin^2 \theta e^{-b}) \cot \theta \\
&= 0, \\
R^2_{323} &= \partial_\theta(-\sin \theta \cos \theta) + 1/r(-r \sin^2 \theta e^{-b}) - (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta \\
&= (1 - e^{-b}) \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Nollasta poikkeavat Riccin tensorin komponentit ovat

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R^1_{001} + R^2_{002} + R^3_{003} \\
&= -(g^{11}R^0_{101} + g^{22}R^0_{202} + g^{33}R^0_{303})g_{00} \\
&= -1/2[a'' + (a')^2/2 + a'(2/r - b'/2)]e^{a-b}, \\
R_{11} &= R^0_{110} + R^2_{112} + R^3_{113} \\
&= -R^0_{101} - (g^{22}R^1_{212} + g^{33}R^1_{313})g_{11} \\
&= 1/2[a'' + (a')^2/2 - b'(2/r + a'/2)], \\
R_{22} &= R^0_{220} + R^1_{221} + R^3_{223} \\
&= -R^0_{202} - R^1_{212} + g^{33}g_{22}R^2_{323} \\
&= [r/2(a' - b') + 1]e^{-b} - 1, \\
R_{33} &= R^0_{330} + R^1_{331} + R^2_{332} \\
&= -R^0_{303} - R^1_{313} - R^2_{323} \\
&= [r/2(a' - b') + 1] \sin^\theta e^{-b} - \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Kaarevuusskalaari on

$$\begin{aligned}
R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
&= -\frac{e^{-a}}{2} [a'' + (a')^2/2 + a'(2/r - b'/2)] e^{a-b} \\
&\quad -\frac{e^{-b}}{2} [a'' + (a')^2/2 - b'(2/r + a'/2)] \\
&\quad -r^{-2} \{ [r/2(a' - b') + 1] e^{-b} - 1 \} \\
&\quad -(r \sin \theta)^{-2} \{ [r/2(a' - b') + 1] \sin^\theta e^{-b} - \sin^2 \theta \} \\
&= -e^{-b} [a'' + (a')^2/2 - a'b'/2 + 2(a' - b')/r + 2/r^2] + 2/r^2.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Sijoittamalla nämä Einsteinin kenttäyhtälöön (2.29) saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}
G_{00} &= -1/2 [a'' + (a')^2/2 + a'(2/r - b'/2)] e^{a-b} \\
&\quad + e^{a-b}/2 [a'' + (a')^2/2 - a'b'/2 + 2(a' - b')/r + 2/r^2] - e^a/r^2 \\
&= -e^a/r [1/r + e^{-b}(b' - 1/r)] = -8\pi GT_{00}, \\
G_{11} &= 1/2 [a'' + (a')^2/2 - b'(2/r + a'/2)] \\
&\quad -1/2 [a'' + (a')^2/2 - a'b'/2 + 2(a' - b')/r + 2/r^2] + e^b/r^2 \\
&= -1/r [a' + 1/r - e^b/r] = -8\pi GT_{11}, \\
G_{22} &= [r(a' - b')/2 + 1] e^{-b} - 1 \\
&\quad -r^2 e^{-b}/2 [a'' + (a')^2/2 - a'b'/2 + 2(a' - b')/r + 2/r^2] + 1 \\
&= -r^2 e^{-b}/2 [a'' + (a')^2/2 - a'b'/2 + (a' - b')/r] \\
&= -8\pi GT_{22}, \\
G_{33} &= \sin^2 \theta [r(a' - b')/2 + 1] e^{-b} - \sin^2 \theta \\
&\quad - \sin^2 \theta r^2 e^{-b}/2 [a'' + (a')^2/2 - a'b'/2 + 2(a' - b')/r + 2/r^2] + \sin^2 \theta \\
&= -\sin^2 \theta r^2 e^{-b}/2 [a'' + (a')^2/2 - a'b'/2 + (a' - b')/r] \\
&= -8\pi GT_{33}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Massajakauman ulkopuolella  $T_{\mu\nu} = 0$ , joten edellä olevat yhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
1/r + e^{-b}(b' - 1/r) &= 0, \\
a' + 1/r - e^b/r &= 0, \\
a'' + (a')^2/2 - a'b'/2 + (a' - b')/r &= 0.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Yhtälöryhmän (A.22) ensimmäinen yhtälö antaa

$$\begin{aligned}
& e^{-b}(1 - rb') = 1, \\
\Rightarrow & \frac{b'e^{-b}}{1 - e^{-b}} = -\frac{1}{r}, \\
\Rightarrow & \frac{d}{dr} \ln |1 - e^{-b}| = -1/r, \\
\Rightarrow & \ln |1 - e^{-b}| = -\int 1/r dr = -\ln |r| + C_1, \\
\Rightarrow & e^{b(r)} = (1 - C/r)^{-1}, \tag{A.23}
\end{aligned}$$

missä  $C = e^{C_1} \in \mathbb{R}$  on mielivaltainen. Kun sijoitetaan saatu ratkaisu  $b(r)$ :lle yhtälöryhmän (A.22) toiseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned}
& a' + 1/r - (r - C)^{-1} = 0, \\
\Rightarrow & a = \int [(r - C)^{-1} - 1/r] dr = \ln |1 - C/r| + D_1, \\
\Rightarrow & e^{a(r)} = D(1 - C/r). \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Edelleen  $D = e^{D_1} \in \mathbb{R}$  on mielivaltainen vakio. Koska  $\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0$ , täytyy olla  $D = 1$ . Klassisella rajalla  $g_{\mu\nu}$ :n tulee vastata metristä tensoria (A.12). Tällöin pätee

$$g_{00} = 1 + 2\phi = 1 - \frac{2GM}{r} = 1 - C/r. \tag{A.25}$$

Vakioksi  $C$  saadaan siis  $C = 2GM$ . Viivaelementiksi massajakauman ulkopuolella, kun  $r > R$ , saadaan siten

$$ds^2 = (1 - 2GM/r) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{A.26}$$

### A.3 Oppenheimer-Volkoff-yhtälöt

Massajakauman sisällä

$$T^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(\epsilon(r), -P(r), -P(r), -P(r)), \tag{A.27}$$

missä  $\epsilon(r)$  on energiatiheys ja  $P(r)$  paine [9]. Tästä seuraa, että

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(e^a \epsilon(r), e^b P(r), r^2 P(r), (r \sin \theta)^2 P(r)). \tag{A.28}$$



Sijoittamalla tämä yhtälöihin (A.21), saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} 1/r + e^{-b}(b' - 1/r) &= 8\pi Gr\epsilon(r), \\ a' + 1/r - e^b/r &= -8\pi GrP(r), \\ a'' + (a')^2/2 - a'b'/2 + (a' - b')/r &= 8\pi Gre^bP(r). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Määritellään nyt

$$e^{-b(r)} = 1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}, \quad (\text{A.30})$$

missä  $\mathcal{M}(r)$  on säteen  $r$  sisäpuolella oleva massa. Sille pätee

$$\mathcal{M}(r > R) = M, \quad \mathcal{M}(0) = 0. \quad (\text{A.31})$$

Sijoittamalla (A.30):n yhtälöryhmän (A.29) ensimmäiseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left(1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right) &= 1/r - \left(1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right)/r - 8\pi Gr\epsilon(r), \\ \Rightarrow -2G\left[-\mathcal{M}(r)/r^2 + \mathcal{M}'(r)/r\right] &= -8\pi Gr\epsilon(r) + 2G\mathcal{M}(r)/r^2, \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{M}(r)}{dr} &= 4\pi r^2\epsilon(r). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Jotta saadaan yhtälö paineen gradientille  $\frac{dP(r)}{dr}$ , ratkaistaan yhtälöryhmästä (A.29)  $a'$ ,  $b'$  ja  $a''$ , jolloin saadaan

$$a' = (8\pi GrP(r) + 1/r)e^b - 1/r, \quad (\text{A.33})$$

$$b' = (8\pi Gr\epsilon(r) - 1/r)e^b + 1/r, \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} a'' &= 16\pi Ge^b + a'b'/2 - (a')^2/2 - (a' - b')/r \\ &= 16\pi Ge^b - 1/2\left\{[(8\pi Gr)^2P(P - \epsilon) + 8\pi G(3P - \epsilon) + 2/r^2]e^{2b}\right. \\ &\quad \left.+ e^b[8\pi G(-P - \epsilon)] - 2/r^2\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Derivoidaan lisäksi yhtälöä (A.33), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} a'' &= \frac{d}{dr}\left\{[8\pi GrP(r) + 1/r]e^b - 1/r\right\} \\ &= \left\{[8\pi G(P(r) + rP'(r)) - 1/r^2]\right\}e^b \\ &\quad + b'e^b\left\{[8\pi GrP(r) + 1/r]e^b - 1/r\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Nyt käyttämällä yhtälöitä (A.35), (A.36) ja (A.34) saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= a'' - a'' = 16\pi G e^b \\
&\quad -1/2 \left\{ [(8\pi Gr)^2 P(P - \epsilon) + 8\pi G(3P - \epsilon) + 2/r^2] e^{2b} \right. \\
&\quad \left. + e^b [8\pi G(-P - \epsilon)] - 2/r^2 \right\} - \left\{ [8\pi G(P(r) + rP'(r))] - 1/r^2 \right\} e^b \\
&\quad + b' e^b \left\{ [8\pi GrP(r) + 1/r] e^b - 1/r \right\} \\
&= -1/2 \left\{ [(8\pi Gr)^2 P(P - \epsilon) + 8\pi G(P + \epsilon) + 2/r^2] e^{2b} \right. \\
&\quad \left. + e^b [8\pi G(-P - \epsilon)] \right\} - 8\pi GrP'(r)e^b.
\end{aligned}$$

Ratkaisemalla tästä  $P'(r)$  saadaan

$$\begin{aligned}
P' &= -\frac{P + \epsilon}{2} \left\{ e^b [8\pi GrP + 1/r] - 1/r \right\} \\
&= -\frac{P + \epsilon}{2} a'. \tag{A.37}
\end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän (A.30), saadaan

$$\begin{aligned}
P'(r) &= -\frac{P + \epsilon}{2} \left[ (8\pi GrP + 1/r) \left( 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1} - 1/r \right] \\
&= -\frac{G\epsilon(r)\mathcal{M}(r)}{r^2} \left( 1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right) \left( 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1} \left( \frac{4\pi r^3 P(r)}{\mathcal{M}(r)} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Nyt saimme johdettua Oppenheimer-Volkoff-yhtälöt, jotka ovat

$$\begin{aligned}
P'(r) &= -\frac{G\epsilon(r)\mathcal{M}(r)}{r^2} \left( 1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right) \left( 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1} \left( \frac{4\pi r^3 P(r)}{\mathcal{M}(r)} + 1 \right), \tag{A.38} \\
\mathcal{M}'(r) &= 4\pi r^2 \epsilon(r).
\end{aligned}$$

## Liite B

# Termodynaamisen potentiaalin johtaminen dikvarkkikondensaatille tapauksessa $\delta \neq 0$ ja $\phi \neq 0$

Symmetrisessä faasissa kvarkkipropagaattori on

$$G_0^{-1} = \begin{pmatrix} [G_0^+]^{-1} & 0 \\ 0 & [G_0^-]^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

missä

$$[G_0^\pm]^{-1} = (p_0 \pm \mu)\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m. \quad (\text{B.2})$$

Kun värisymmetria rikkoutuu, kvarkkipropagaattori näyttää seuraavalta:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} [G_0^+]^{-1} & \Delta^- \\ \Delta^+ & [G_0^-]^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

missä

$$\Delta^- = -i\Delta\gamma_5, \quad \Delta^+ = -i\Delta^*\gamma_5. \quad (\text{B.4})$$

Nambu-Gorkov-propagaattori saadaan ratkaisemalla  $G^{-1}G = 1$ . Nyt on

$$G = \begin{pmatrix} G^+ & \Xi^- \\ \Xi^+ & G^- \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

missä

$$G^\pm \equiv \left\{ [G_0^\pm]^{-1} - \Delta^\mp G_0^\mp \Delta^\pm \right\}^{-1}, \quad \Xi^\pm \equiv -G^\mp \Delta^\pm G_0^\pm. \quad (\text{B.6})$$

Tämä on kätevinä ratkaista käyttämällä projektio-operaattoreita. Ne määritellään seuraavasti:

$$\Lambda_{\pm}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\gamma_0(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m)}{E_p} \right), \quad (\text{B.7})$$

joissa  $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Operaattoreille  $\Lambda_{\pm}$  pätee

$$\Lambda_{\pm}(\vec{p})\Lambda_{\pm}(\vec{p}) = \Lambda_{\pm}(\vec{p}), \quad (\text{B.8})$$

$$\Lambda_{\pm}(\vec{p})\Lambda_{\mp}(\vec{p}) = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\Lambda_+(\vec{p}) + \Lambda_-(\vec{p}) = 1. \quad (\text{B.10})$$

Lisäksi niille pätevät muunnosominaisuudet

$$\gamma_5\Lambda_{\pm}(\vec{p})\gamma_5 = \tilde{\Lambda}_{\pm}(\vec{p}), \quad (\text{B.11})$$

$$\gamma_0\Lambda_{\pm}(\vec{p})\gamma_0 = \tilde{\Lambda}_{\mp}(\vec{p}), \quad (\text{B.12})$$

missä

$$\tilde{\Lambda}_{\pm}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\gamma_0(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m)}{E_p} \right). \quad (\text{B.13})$$

Näiden avulla on helpompi laskea kvarkkipropagaattorin elementit.  $G_0^{\pm}$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$G_0^{\pm} = \frac{\gamma_0\tilde{\Lambda}_+}{p_0 + E_p^{\pm}} + \frac{\gamma_0\tilde{\Lambda}_-}{p_0 - E_p^{\mp}}, \quad (\text{B.14})$$

sillä

$$\begin{aligned} G_0^{\pm} &= \frac{\gamma_0\tilde{\Lambda}_+}{p_0 + E_p^{\pm}} + \frac{\gamma_0\tilde{\Lambda}_-}{p_0 - E_p^{\mp}} \\ &= \frac{\gamma_0(p_0 - E_p^{\mp})\tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^{\pm})\tilde{\Lambda}_-}{(p_0 + E_p^{\pm})(p_0 - E_p^{\mp})} \\ &= \frac{\gamma_0(p_0 - E_p^{\mp})\tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^{\pm})\tilde{\Lambda}_-}{[\gamma_0(p_0 - E_p^{\mp})\tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^{\pm})\tilde{\Lambda}_-][\gamma_0(p_0 - E_p^{\mp})\tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^{\pm})\tilde{\Lambda}_-]} \\ &= \frac{1}{\gamma_0(p_0 - E_p^{\mp})\tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^{\pm})\tilde{\Lambda}_-} \\ &= [ (p_0 \pm \mu)\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m ]^{-1}. \end{aligned}$$

Edellä ja jatkossa  $E_p^{\pm} = E_p \pm \mu$ . Lasketaan Nambu-Gorkov-propagaattorin elementit lähtien propagaattorista  $G^{\pm}$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} G^{\pm} &= \{ [G_0^{\pm}]^{-1} - \Delta^{\mp} G_0^{\mp} \Delta^{\pm} \}^{-1} \\ &= \left\{ [\gamma_0(p_0 - E_p^{\mp})\tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^{\pm})\tilde{\Lambda}_-] + |\Delta|^2 \gamma_5 \left( \frac{\gamma_0\tilde{\Lambda}_+}{p_0 + E_p^{\mp}} + \frac{\gamma_0\tilde{\Lambda}_-}{p_0 - E_p^{\mp}} \right) \gamma_5 \right\}^{-1} \\ &= \left\{ [\gamma_0(p_0 - E_p^{\mp})\tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^{\pm})\tilde{\Lambda}_-] - |\Delta|^2 \left( \frac{\gamma_0\tilde{\Lambda}_+}{p_0 + E_p^{\mp}} + \frac{\gamma_0\tilde{\Lambda}_-}{p_0 - E_p^{\mp}} \right) \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \gamma_0 \left[ p_0 - E_p^{\mp} - \frac{|\Delta|^2}{(p_0 + E_p^{\mp})(p_0 - E_p^{\mp})} \right] \tilde{\Lambda}_+ \right. \\ &\quad \left. + \gamma_0 \left[ p_0 + E_p^{\pm} - \frac{|\Delta|^2}{(p_0 + E_p^{\mp})(p_0 - E_p^{\mp})} \right] \tilde{\Lambda}_- \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \gamma_0 \frac{p_0^2 - (E_p^{\mp})^2 - |\Delta|^2}{p_0 + E_p^{\mp}} \tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0 \frac{p_0^2 - (E_p^{\pm})^2 - |\Delta|^2}{p_0 - E_p^{\mp}} \tilde{\Lambda}_- \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

$G^\pm$  saadaan, kun ratkaistaan yhtälö  $[G^\pm]^{-1}G^\pm = 1$ . Tälle haetaan ratkaisua muodossa  $\gamma_0 a \tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0 b \tilde{\Lambda}_-$ , missä  $a, b \in \mathbb{C}$ . Nyt pätee

$$\begin{aligned}
& [\gamma_0 \frac{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2}{p_0 + E_p^\mp} \Lambda_+ + \gamma_0 \frac{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2}{p_0 - E_p^\pm} \Lambda_-] [\gamma_0 a \tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0 b \tilde{\Lambda}_-] = 1 \\
\Rightarrow & \gamma_0 \frac{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2}{p_0 + E_p^\mp} \Lambda_+ \gamma_0 a \tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0 \frac{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2}{p_0 + E_p^\mp} \Lambda_+ \gamma_0 b \tilde{\Lambda}_- \\
& + \gamma_0 \frac{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2}{p_0 - E_p^\pm} \Lambda_- \gamma_0 a \tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0 \frac{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2}{p_0 - E_p^\pm} \Lambda_- \gamma_0 b \tilde{\Lambda}_- = 1 \\
\Rightarrow & \frac{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2}{p_0 + E_p^\mp} a \tilde{\Lambda}_- \tilde{\Lambda}_+ + \frac{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2}{p_0 + E_p^\mp} b \tilde{\Lambda}_- \tilde{\Lambda}_- \\
& + \frac{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2}{p_0 - E_p^\pm} a \tilde{\Lambda}_+ \tilde{\Lambda}_+ + \frac{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2}{p_0 - E_p^\pm} b \tilde{\Lambda}_+ \tilde{\Lambda}_- = 1 \\
\Rightarrow & \frac{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2}{p_0 + E_p^\mp} b \tilde{\Lambda}_- + \frac{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2}{p_0 - E_p^\pm} a \tilde{\Lambda}_+ = 1.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$a = \frac{p_0 - E_p^\pm}{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2}, \quad b = \frac{p_0 + E_p^\mp}{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2}, \quad (\text{B.15})$$

joten

$$G^\pm = \gamma_0 \frac{p_0 - E_p^\pm}{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2} \tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0 \frac{p_0 + E_p^\mp}{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2} \tilde{\Lambda}_-. \quad (\text{B.16})$$

Ratkaistaan lisäksi  $\Xi^\pm$ , joksi saadaan

$$\begin{aligned}
\Xi^\pm &= -G^\mp \Delta^\pm G^\pm \\
&= -\left[ \gamma_0 \frac{p_0 - E_p^\mp}{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2} \tilde{\Lambda}_+ + \gamma_0 \frac{p_0 + E_p^\pm}{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2} \tilde{\Lambda}_- \right] \Delta^\pm \left[ \frac{\gamma_0 \tilde{\Lambda}_+}{p_0 + E_p^\pm} + \frac{\gamma_0 \tilde{\Lambda}_-}{p_0 - E_p^\mp} \right] \\
&= \Delta^\pm \left[ \gamma_0 \frac{p_0 - E_p^\mp}{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2} \Lambda_+ + \gamma_0 \frac{p_0 + E_p^\pm}{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2} \Lambda_- \right] \left[ \frac{\gamma_0 \tilde{\Lambda}_+}{p_0 + E_p^\pm} + \frac{\gamma_0 \tilde{\Lambda}_-}{p_0 - E_p^\mp} \right] \\
&= \Delta^\pm \left[ \frac{p_0 - E_p^\mp}{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2} \left( \frac{1}{p_0 + E_p^\pm} \gamma_0 \Lambda_+ + \gamma_0 \tilde{\Lambda}_+ + \frac{1}{p_0 - E_p^\mp} \gamma_0 \Lambda_- + \gamma_0 \tilde{\Lambda}_- \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{p_0 + E_p^\pm}{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2} \left( \frac{1}{p_0 + E_p^\pm} \gamma_0 \Lambda_- - \gamma_0 \tilde{\Lambda}_+ + \frac{1}{p_0 - E_p^\mp} \gamma_0 \Lambda_- - \gamma_0 \tilde{\Lambda}_- \right) \right] \\
&= \frac{\Delta^\pm}{p_0^2 - (E_p^\pm)^2 - |\Delta|^2} \tilde{\Lambda}_+ + \frac{\Delta^\pm}{p_0^2 - (E_p^\mp)^2 - |\Delta|^2} \tilde{\Lambda}_-.
\end{aligned}$$

Nyt on selvitetty Nambu-Gorkov-propagaattorin elementit ja voidaan siirtyä laskemaan termodynaamista potentiaalia.

Termodynaaminen potentiaali saadaan lausekkeesta

$$\Omega(T, \mu) = -T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left( \frac{1}{T} S^{-1}(i\omega_n, \vec{p}) \right) + V. \quad (\text{B.17})$$

Koska siniset kvarkit eivät osallistu kondensaattiin, niille pätee

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \ln[\beta S^{-1}] &= 2N_F \ln[\text{Det}(\beta[G_0]^{-1})] \\
&= 2N_F \ln[\text{Det}(\beta[G_0^+]^{-1})] \ln[\text{Det}(\beta[G_0^-]^{-1})],
\end{aligned}$$

missä tekijä  $2N_F$  seuraa spin- ja makujäljistä. Lasketaan determinantit

$$\begin{aligned}
\text{Det}(\beta[G_0^\pm]^{-1}) &= \text{Det}\{\beta[(p_0 \pm \mu)\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m]\} \\
&= \beta^2 \text{Det} \begin{pmatrix} -m & (p_0 \pm \mu)\gamma_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ (p_0 \pm \mu)\gamma_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \\
&= -\beta^2[(p_0 \pm \mu)^2 - E_p^2], \tag{B.18}
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
\ln[\text{Det}(\beta[G_0]^{-1})] &= \ln\{\beta^4[(p_0 + \mu)^2 - E_p^2][(p_0 - \mu)^2 - E_p^2]\} \\
&= \ln\{\beta^4[p_0^2 - (E_p + \mu)^2][p_0^2 - (E_p - \mu)^2]\}.
\end{aligned}$$

Sinisille kvarkeille termodynaaminen potentiaali on siten

$$\begin{aligned}
\Omega_b(T, \mu) &= -N_F T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \ln\{\beta^2[p_0^2 - (E_p + \mu)^2]\} \right. \\
&\quad \left. + \ln\{\beta^2[p_0^2 - (E_p - \mu)^2]\} \right] + V.
\end{aligned}$$

Seuraaavaksi suoritetaan summaus yli  $n$ :n, käyttäen tietoa [8]

$$T \sum_n \ln\left[\frac{1}{T^2}(\omega_n^2 + \lambda^2)\right] = \lambda + 2T \ln[1 + e^{-\lambda/T}]. \tag{B.19}$$

Sinisten kvarkkien termodynaaminen potentiaali sievenee lopulliseen muotoon

$$\begin{aligned}
\Omega_b(T, \mu) &= -N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p + \mu + 2T \ln[1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}}] \right. \\
&\quad \left. + E_p - \mu + 2T \ln[1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}}] \right] + V \\
&= -2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}}] + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}}] \right] + V.
\end{aligned}$$

Punaisille ja vihreille kvarkeille termodynaamisen potentiaalin laskeminen on hieman hankalampaa. Yleisesti pätee matriiseille  $A, B, C, D$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{Det}[-CB + CAC^{-1}D] \tag{B.20}$$

$$= \text{Det}[-BC + BDB^{-1}A], \tag{B.21}$$

joten determinantti voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}\text{Det}(\beta G^{-1}) &= \text{Det}(\beta^2 D_1) = \text{Det}\beta^2\{-\Delta^+\Delta^- + \Delta^+[G_0^+]^{-1}[\Delta^+]^{-1}[G_0^-]^{-1}\} \\ &= \text{Det}(\beta^2 D_2) = \text{Det}\beta^2\{-\Delta^+\Delta^- + \Delta^-[G_0^-]^{-1}[\Delta^-]^{-1}[G_0^+]^{-1}\}.\end{aligned}$$

Kirjoitetaan seuraavaksi  $D_1$  ja  $D_2$  projektio-operaattoreiden avulla, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}D_1 &= -\Delta^+\Delta^- + \Delta^+[G_0^+]^{-1}[\Delta^+]^{-1}[G_0^-]^{-1} \\ &= |\Delta|^2 + \gamma_5[\gamma_0(p_0 - E_p^-)\Lambda_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^+)\Lambda_-] \\ &\quad \cdot \gamma_5[\gamma_0(p_0 - E_p^+)\Lambda_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^-)\Lambda_-] \\ &= |\Delta|^2(\Lambda_+ + \Lambda_-) \\ &\quad - [(p_0 - E_p^-)\Lambda_- + (p_0 + E_p^+)\Lambda_+][(p_0 - E_p^+)\Lambda_+ + (p_0 + E_p^-)\Lambda_-] \\ &= |\Delta|^2(\Lambda_+ + \Lambda_-) - [(p_0^2 - (E_p^+)^2)\Lambda_+ + (p_0^2 - (E_p^-)^2)\Lambda_-] \\ &= -[(p_0^2 - (E_p^+)^2 - |\Delta|^2)\Lambda_+ + (p_0^2 - (E_p^-)^2 - |\Delta|^2)\Lambda_-],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2 &= -\Delta^+\Delta^- + \Delta^-[G_0^-]^{-1}[\Delta^-]^{-1}[G_0^+]^{-1} \\ &= |\Delta|^2 + \gamma_5[\gamma_0(p_0 - E_p^+)\Lambda_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^-)\Lambda_-] \\ &\quad \cdot \gamma_5[\gamma_0(p_0 - E_p^-)\Lambda_+ + \gamma_0(p_0 + E_p^+)\Lambda_-] \\ &= |\Delta|^2(\Lambda_+ + \Lambda_-) \\ &\quad - [(p_0 - E_p^+)\Lambda_- + (p_0 + E_p^-)\Lambda_+][(p_0 - E_p^-)\Lambda_+ + (p_0 + E_p^+)\Lambda_-] \\ &= |\Delta|^2(\Lambda_+ + \Lambda_-) - [(p_0^2 - (E_p^+)^2)\Lambda_- + (p_0^2 - (E_p^-)^2)\Lambda_+] \\ &= -[(p_0^2 - (E_p^-)^2 - |\Delta|^2)\Lambda_+ + (p_0^2 - (E_p^+)^2 - |\Delta|^2)\Lambda_-].\end{aligned}$$

Näitä käyttäen on determinantti helppo laskea, sillä

$$D_1 D_2 = (p_0^2 - (E_p^-)^2 - |\Delta|^2)(p_0^2 - (E_p^+)^2 - |\Delta|^2) = (p_0^2 - (E_\Delta^-)^2)(p_0^2 - (E_\Delta^+)^2),$$

missä

$$E_\Delta^\pm = \sqrt{(\sqrt{\vec{p}^2 + M^2} \pm \mu)^2 + |\Delta|^2}. \quad (\text{B.22})$$

Nyt voidaan laskea  $\text{Tr} \ln(\beta G^{-1})$ . Maku- ja spinjäljet tuottavat tekijän  $2N_F$ , joten

$$\begin{aligned}\text{Tr} \ln(\beta G^{-1}) &= 2N_F \ln[\text{Det}\beta G^{-1}] \\ &= N_F \ln[\text{Det}\beta G^{-1}]^2 \\ &= N_F \ln[\text{Det}\beta^2 D_1 \text{Det}\beta^2 D_2] \\ &= N_F \ln[\text{Det}\beta^4 (D_1 D_2)] \\ &= 4N_F \ln\{\beta^4 [p_0^2 - (E_\Delta^+)^2][p_0^2 - (E_\Delta^-)^2]\}.\end{aligned}$$

Näin termodynaaminen potentiaali punaisille ja vihreille kvarkeille on

$$\begin{aligned}
\Omega_{r,g}(T, \mu) &= -2N_F T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \ln\{\beta^2[p_0^2 - (E_\Delta^+)^2]\} \right. \\
&\quad \left. + \ln\{\beta^2[p_0^2 - (E_\Delta^-)^2]\} \right] + V \\
&= -4N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{E_\Delta^+ + E_\Delta^-}{2} \right. \\
&\quad \left. + T \ln[1 + e^{-E_\Delta^+/T}] + T \ln[1 + e^{-E_\Delta^-/T}] \right] + V.
\end{aligned}$$

Koko järjestelmän termodynaaminen potentiaali on näiden summa, joten se on

$$\begin{aligned}
\Omega(T, \mu) &= -4N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{E_\Delta^+ + E_\Delta^-}{2} + T \ln[1 + e^{-E_\Delta^+/T}] + T \ln[1 + e^{-E_\Delta^-/T}] \right] \\
&\quad - 2N_F \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ E_p + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}}] + T \ln[1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}}] \right] + V.
\end{aligned}$$



## Liite C

# Termodynaamisen potentiaalin johtaminen dikvarkkikondensaateille

Propagaattori (5.30) voidaan jakaa osiin sinisille kvarkeille, jotka eivät osallistu kondensaattiin, sekä vihreille ja punaisille kvarkeille. Sinisille kvarkeille propagaattori näyttää seuraavalta:

$$S_b^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \not{p} + \tilde{\mu}_b \gamma_0 - M_b & 0 \\ 0 & \not{p} - \tilde{\mu}_b \gamma_0 - M_b \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

missä

$$M_b = M_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} M_8, \quad \tilde{\mu}_b = \tilde{\mu} - \frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{\mu}_8. \quad (\text{C.2})$$

Termodynaamisen potentiaalin laskeminen voidaan suorittaa kuten sinisille kvarkeille aikaisemmin liitteessä B. Sinisten kvarkkien osuus termodynaamisesta potentiaalista on

$$\Omega_b(T, \mu) = -2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_{p,b} + T \ln[1 + e^{-E_-/T}] + T \ln[1 + e^{-E_+/T}] \right] + V,$$

missä

$$E_{\pm} = E_{p,b} \pm \tilde{\mu}_b = \sqrt{\vec{p}^2 + M_b^2} \pm \tilde{\mu}_b. \quad (\text{C.3})$$

Seuraavaksi lasketaan termodynaaminen potentiaali punaisille ja vihreille kvarkeille. Niiden kvarkkipropagaattori on

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \not{p} + \tilde{\mu}_r \gamma_0 - M_r & (\Delta + \Delta_0 \gamma_0) \gamma_5 \tau_2 \\ (-\Delta^* + \Delta_0^* \gamma_0) \gamma_5 \tau_2 & \not{p} - \tilde{\mu}_r \gamma_0 - M_r \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

missä

$$M_r = M_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}M_8 \quad \tilde{\mu}_r = \tilde{\mu} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\mu}_8. \quad (\text{C.5})$$

Matriisijäljen laskeminen propagaattorista (C.4) yksinkertaistuu, kun käytetään yhtälöitä (B.20), (B.21). Matriisijälki on tämän jälkeenkin helpointa laskea symbolisella ohjelmistolla, kuten Mathematicalla, jota tässä työssä käytettiin. Merkitään

$$a = \not{p} + \tilde{\mu}_r \gamma_0 - M_r \quad (\text{C.6})$$

$$b = (\Delta + \Delta_0 \gamma_0) \gamma_5 \tau_2 \quad (\text{C.7})$$

$$c = (-\Delta^* + \Delta_0^* \gamma_0) \gamma_5 \tau_2 \quad (\text{C.8})$$

$$d = \not{p} - \tilde{\mu}_r \gamma_0 - M_r. \quad (\text{C.9})$$

Nyt käyttäen yhtälöitä (B.20) ja (B.21) saadaan

$$\begin{aligned} \ln \text{Det}[\beta S^{-1}(p)] &= \frac{1}{2} \ln[\text{Det}[\beta S^{-1}(p)]]^2 \\ &= \frac{2N_F}{2} \ln[\text{Det}[\beta^2(-bc + bdb^{-1}a)]\text{Det}[\beta^2(-cb + cac^{-1}d)]] \\ &= N_F \ln \beta^{16} [(M_r^2 - \tilde{\mu}_r^2)^2 + p_0^4 + \vec{p}^4 + 2(M_r^2 - \tilde{\mu}_r^2)\vec{p}^2 \\ &\quad + |\Delta|^4 + |\Delta_0|^4 - 2(M_r^2 + \tilde{\mu}_r^2 + \vec{p}^2 + |\Delta|^2 + |\Delta_0|^2)p_0^2 \\ &\quad + 2(M_r^2 + \tilde{\mu}_r^2 + \vec{p}^2)|\Delta|^2 + 2(M_r^2 + \tilde{\mu}_r^2 - \vec{p}^2)|\Delta_0|^2 \\ &\quad + 4M_r\tilde{\mu}_r(\Delta^*\Delta_0 + \Delta\Delta_0^*) - ((\Delta^*)^2\Delta_0^2 + \Delta^2(\Delta_0^*)^2)]^4 \\ &= 4N_F \ln \beta^4 \{p_0^4 - 2p_0^2(M_r^2 + \tilde{\mu}_r^2 + \vec{p}^2 + |\Delta|^2 + |\Delta_0|^2) \\ &\quad + (M_r^2 + \tilde{\mu}_r^2 + \vec{p}^2 + |\Delta|^2 + |\Delta_0|^2)^2 \\ &\quad - 4[(\tilde{\mu}_r^2 + |\Delta_0|^2)\vec{p}^2 + (M_r\tilde{\mu}_r - \frac{1}{2}(\Delta\Delta_0^* + \Delta^*\Delta_0))^2]\} \\ &= 4N_F \{\ln[\beta^2(p_0^2 - \omega_+^2)] + \ln[\beta^2(p_0^2 - \omega_-^2)]\}, \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \sqrt{\vec{p}^2 + M_r^2 + \tilde{\mu}_r^2 + |\Delta|^2 + |\Delta_0|^2 \pm 2s}, \\ s &= \sqrt{(\tilde{\mu}_r^2 + |\Delta_0|^2)\vec{p}^2 + t^2}, \\ t &= M_r\tilde{\mu}_r - \frac{1}{2}(\Delta\Delta_0^* + \Delta^*\Delta_0). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Siten termodynaaminen potentiaali punaisille ja vihreille kvarkeille on

$$\begin{aligned} \Omega_{r,g}(T, \mu) &= -2N_F T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \{\ln[\beta^2(p_0^2 - \omega_+^2)] + \ln[\beta^2(p_0^2 - \omega_-^2)]\} + V \\ &= -2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2 \left\{ \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \right. \\ &\quad \left. + T \ln[1 + e^{-\omega_+/T}] + T \ln[1 + e^{-\omega_-/T}] \right\} + V \end{aligned}$$

ja koko termodynaaminen potentiaali

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu) = & -2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \omega_+ + \omega_- + 2T \ln[1 + e^{-\omega_+/T}] \right. \\ & + 2T \ln[1 + e^{-\omega_-/T}] + E_{p,b} + T \ln[1 + e^{-E_-/T}] \\ & \left. + T \ln[1 + e^{-E_+/T}] \right\} + V, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

missä

$$V = \frac{(M_0 - m)^2}{4G_s^{(0)}} + \frac{M_8^2}{4G_s^{(8)}} + \frac{(\tilde{\mu} - \mu)^2}{4G_v^{(0)}} + \frac{\tilde{\mu}_8^2}{4G_v^{(8)}} + \frac{|\Delta|^2}{4H} + \frac{|\Delta_0|^2}{4H_0}. \quad (\text{C.12})$$

## Liite D

# Termodynaamisen potentiaalin johtaminen spin-1 -kondensaatille

Termodynaaminen potentiaali on

$$\Omega(T, \mu) = -T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln[\beta S^{-1}(p)] + V. \quad (\text{D.1})$$

Tämä voidaan laskea erikseen punaisille ja vihreille sekä sinisille kvarkeille.

### Punaiset ja vihreät kvarkit

Punaisille ja vihreille kvarkeille propagaattori on muotoa

$$S^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \not{p} + \mu\gamma^0 - M & \Delta\gamma_5\lambda_2\tau_2 \\ -\Delta^*\gamma_5\lambda_2\tau_2 & \not{p} - \mu\gamma^0 - M \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Tämä on sama propagaattori, joka esiintyi liitteessä B dikvarkkikondensaatin tapauksessa. Termodynaaminen potentiaali punaisille ja vihreille kvarkeille on siis

$$\begin{aligned} \Omega_{r,g}(T, \mu) = & -2N_F \sum_{i=1}^2 T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\omega_i^+ + \omega_i^-}{2} \right. \\ & \left. + T \ln[1 + e^{-\omega_i^+/T}] + T \ln[1 + e^{\omega_i^-/T}] \right] + V_{r,g} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

missä

$$\omega_{1,2}^\pm = \sqrt{(\sqrt{\vec{p}^2 + M^2} \pm \mu)^2 + |\Delta|^2}. \quad (\text{D.4})$$

## Siniset kvarkit

Sinisille kvarkeille propagaattori on

$$S^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \not{p} + \mu\gamma^0 - M & \Delta'\sigma^{03}\tau_2 \\ \Delta'^*\sigma^{03}\tau_2 & \not{p} - \mu\gamma^0 - M \end{pmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Kun merkitään

$$a = \not{p} + \mu\gamma^0 - M, \quad b = \Delta'\sigma^{03}\tau_2 \quad (\text{D.6})$$

$$c = \Delta'^*\sigma^{03}\tau_2, \quad d = \not{p} - \mu\gamma^0 - M, \quad (\text{D.7})$$

voidaan kvarkkipropagaattorin jälki laskea käyttäen yhtälöitä (B.20) ja (B.21) seuraavasti:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln[\beta S^{-1}(p)] &= \frac{N_F}{2} \ln\{\text{Det}[\beta S^{-1}(p)]^2\} \\ &= N_F \ln\{\beta^{16} \text{Det}[-cb + cac^{-1}d] \text{Det}[-bc + bdb^{-1}a]\}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Tekijä  $N_F$  seuraa makujäljestä, ja spinjälki tuottaa tekijän 1. Tämä johtuu siitä, että kyseessä on spin-1 -kondensaatti sinisille kvarkeille, jolloin kondensaattiin osallistuvien kvarkkien spin on kiinnitetty. Edellä oleva determinantti on helpointa laskea käyttäen symbolista ohjelmistoa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &N_F \ln\{\beta^{16} \text{Det}[-cb + cac^{-1}d] \text{Det}[-bc + bdb^{-1}a]\} \\ &= \frac{N_F}{2} \ln\{\beta^{16} [p_0^4 + (M^2 - \mu^2 + \vec{p}^2)^2 + 2(M^2 + \mu^2 - \vec{p}^2 + 2p_3^2)|\Delta'|^2 \\ &\quad + |\Delta'|^4 - 2p_0^2(M^2 + \mu^2 + \vec{p}^2 + |\Delta'|^2)]^4\} \\ &= 2N_F \{\ln \beta^4 [p_0^4 + (M_e^2 - \mu_e^2 + \vec{p}^2)^2 + |\Delta'_e|^4 + 2|\Delta'_e|^2(\vec{p}^2 + M_e^2 - \mu_e^2) \\ &\quad - 2p_0^2(\vec{p}^2 + M_e^2 + \mu_e^2 + |\Delta'_e|^2)]\} \\ &= 2N_F \{\ln \beta^4 [p_0^2 - (\omega_3^+)^2][p_0^2 - (\omega_3^-)^2]\}, \end{aligned}$$

missä

$$\omega_3^\pm = \sqrt{(\sqrt{\vec{p}^2 + M_e^2} \pm \mu_e)^2 + |\Delta'_e|^2} \quad (\text{D.9})$$

ja

$$\begin{aligned} \mu_e^2 &= \mu^2 + |\Delta'|^2 \sin^2 \theta, \\ M_e &= \frac{M\mu}{\mu_e}, \\ |\Delta'_e|^2 &= |\Delta'|^2 (\cos^2 \theta + \frac{M^2}{\mu_e^2} \sin^2 \theta), \\ \cos \theta &= \frac{p_3}{\vec{p}^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Tästä saadaan sinisten kvarkkien termodynaamiseksi potentiaaliksi

$$\Omega_b(T, \mu) = -T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln[\beta S^{-1}(p)] \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned} &= -2N_F \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\omega_3^+ + \omega_3^-}{2} \right. \\ &\quad \left. + T \ln[1 + e^{-\omega_3^+/T}] + T \ln[1 + e^{-\omega_3^-/T}] \right] + V_b. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Koko järjestelmän termodynaaminen potentiaali on eri väristen kvarkkien termodynaamisten potentiaalien summa, joten se on

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu) &= -2N_F \sum_{i=1}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\omega_i^+ + \omega_i^-}{2} + T \ln[1 + e^{-\omega_i^+/T}] \right. \\ &\quad \left. + T \ln[1 + e^{-\omega_i^-/T}] \right] + \frac{(M-m)^2}{4G} + \frac{|\Delta|^2}{4H_s} + \frac{|\Delta'|^2}{16H_t}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

# Kirjallisuutta

- [1] John C. Collins and Malcolm J. Perry. Superdense matter: Neutrons or asymptotically free quarks? *Phys. Rev. Lett.*, 34:1353, 1975.
- [2] Nicola Cabibbo and Giorgio Parisi. Exponential hadronic spectrum and quark liberation. *Phys. Lett.*, B59:67, 1975.
- [3] Bertrand C. Barrois. Superconducting quark matter. *Nucl. Phys.*, B129:390, 1977.
- [4] Steven C. Frautschi. Asymptotic freedom and color superconductivity in dense quark matter. Presented at Workshop on Hadronic Matter at Extreme Energy Density, Erice, Italy, Oct 13-21, 1978.
- [5] David Bailin and Alex Love. Superfluidity and superconductivity in relativistic fermion systems. *Phys. Rept.*, 107:325, 1984.
- [6] Mark G. Alford, Krishna Rajagopal, and Frank Wilczek. QCD at finite baryon density: Nucleon droplets and color superconductivity. *Phys. Lett.*, B422:247–256, 1998.
- [7] Ralf Rapp, Thomas Schafer, Edward V. Shuryak, and Momchil Velkovsky. Diquark Bose condensates in high density matter and instantons. *Phys. Rev. Lett.*, 81:53–56, 1998.
- [8] Michael Buballa. NJL model analysis of quark matter at large density. *Phys. Rept.*, 407:205–376, 2005.
- [9] Kohsuke Yagi, Tetsuo Hatsuda, and Yasuo Miake. *Quark-Gluon plasma*. Cambridge University Press, Cambridge, first edition, 2005.
- [10] Krishna Rajagopal and Frank Wilczek. The condensed matter physics of QCD. *hep-ph/0011333*, 2000.
- [11] W.-M. Yao *et.al.* Review of particle physics. *J. Phys. G*, 33:1, 2006.

- [12] Ulrich W. Heinz and Maurice Jacob. Evidence for a new state of matter: An assessment of the results from the CERN lead beam programme. 2000.
- [13] Miklos Gyulassy and Larry McLerran. New forms of QCD matter discovered at RHIC. *Nucl. Phys.*, A750:30–63, 2005.
- [14] Future Science at the Relativistic Heavy Ion Collider. url: <http://www.bnl.gov/physics/rhicIIscience/>, 2006.
- [15] Richard C. Tolman. Static solutions of Einstein’s field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, 55:364–373, 1939.
- [16] Julius R. Oppenheimer and George M. Volkoff. On Massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374–381, 1939.
- [17] Hans C. Ohanian. *Gravitation and spacetime*. W. W. Norton & Company, New York, first edition, 1976.
- [18] Albert Einstein. The Field Equations of Gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )*, 1915:844–847, 1915.
- [19] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books Publishing, L.L.C., Cambridge, first edition, 1995.
- [20] Michio Kaku. *Quantum Field Theory*. Oxford University Press, Inc., New York, first edition, 1993.
- [21] Moo-Young Han and Yoichiro Nambu. Three-triplet model with double SU(3) symmetry. *Phys. Rev.*, 139:B1006–B1010, 1965.
- [22] Tetsuo Hatsuda and Teiji Kunihiro. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian. *Phys. Rept.*, 247:221–367, 1994.
- [23] Kimmo Tuominen. Four Lectures on effective field theories. url: [http://theory.physics.helsinki.fi/~hanuc/Hyytiala\\_06.html](http://theory.physics.helsinki.fi/~hanuc/Hyytiala_06.html), 2006.
- [24] Yoichiro Nambu and Giovanni Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I. *Phys. Rev.*, 122:345–358, 1961.
- [25] Yoichiro Nambu and Giovanni Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II. *Phys. Rev.*, 124:246–254, 1961.



- [26] Michael Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. Dover Publications, Inc., New York, second edition, 1996.
- [27] John B. Kogut and Mikhail A. Stephanov. *The Phases of Quantum Chromodynamics*. Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, first edition, 2004.
- [28] Mariana Sánchez and Roger Bowley. *Introductory Statistical Mechanics*. Oxford University Press, Inc., New York, second edition, 1999.
- [29] George Gamow and Mario Schoenberg. Neutrino theory of stellar collapse. *Phys. Rev.*, 59(7):539–547, Apr 1941.
- [30] Lars Bergström and Ariel Goobar. *Cosmology and particle astrophysics*. Praxis Publishing Ltd and John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England, first edition, 1999.