

Sähköheikko Symmetriarikko Tekniväriteorioissa

Matti Heikinheimo
mapesahe@cc.jyu.fi



Pro gradu -tutkielma
Jyväskylän yliopisto
Fysiikan laitos
12. Huhtikuuta 2007

Sisältö

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Johdanto | 3 |
| 2 | Higgsin mekanismi ja sähköheikko teoria standardimallissa | 8 |
| 2.1 | Spontaani symmetriarikko | 8 |
| 2.1.1 | Diskreetti symmetria | 8 |
| 2.1.2 | Jatkuva symmetria | 9 |
| 2.1.3 | Goldstonen bosonit | 10 |
| 2.2 | Higgsin mekanismi | 11 |
| 2.3 | GWS-Teoria | 12 |
| 2.3.1 | Mittabosonien massat | 12 |
| 2.3.2 | Kytkeä fermioneihin | 15 |
| 2.3.3 | Fermionien massat | 17 |
| 2.3.4 | Higgsin bosoni | 18 |
| 3 | Luonnollisuusongelma standardimallissa | 20 |
| 3.1 | Massan renormalisaatio Yukawa-teoriassa | 21 |
| 3.1.1 | Divergoivat graafit | 21 |
| 3.1.2 | Renormalisaatio | 23 |
| 3.1.3 | Korjaustermit | 25 |
| 4 | Tekniväri | 32 |
| 4.1 | Minimaalinen tekniväriteoria | 32 |
| 4.2 | Laajennettu tekniväri | 35 |
| 4.2.1 | Fermionien ja teknipionien massat | 35 |
| 4.2.2 | Makua muuttava neutraali virta | 38 |
| 4.3 | Kävelevä tekniväri | 39 |
| 4.3.1 | faasidiagrammi | 40 |
| 4.4 | Sähköheikot tarkkuusmittaukset | 43 |
| 4.5 | Anomalioiden kumoutuminen | 47 |
| 4.5.1 | Wittenin anomalia | 47 |
| 4.5.2 | Mitta-anomaliat | 47 |
| 5 | Minimaalinen kävelevä teknivärimalli | 53 |
| 5.1 | $SU(N)$:n korkeammat esitykset | 53 |
| 5.2 | Efektiivinen teoria | 56 |
| 5.2.1 | Kiraalisymmetria | 58 |
| 5.2.2 | Teknipionit | 59 |
| 5.2.3 | Kytkeä sähköheikkoon sektoriin | 61 |
| 5.2.4 | Kytkeä standardimallin fermioneihin | 62 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.3 | Fenomenologiaa | 64 |
| 5.3.1 | leptoniparin tuotto | 65 |
| 5.3.2 | Leptonin hajoaminen | 67 |
| 5.3.3 | Higgsin hiukkasen hajoaminen | 69 |
| 5.3.4 | ζ :n ja antineutriinon tuotto | 71 |
| 6 | Yhteenveto | 72 |

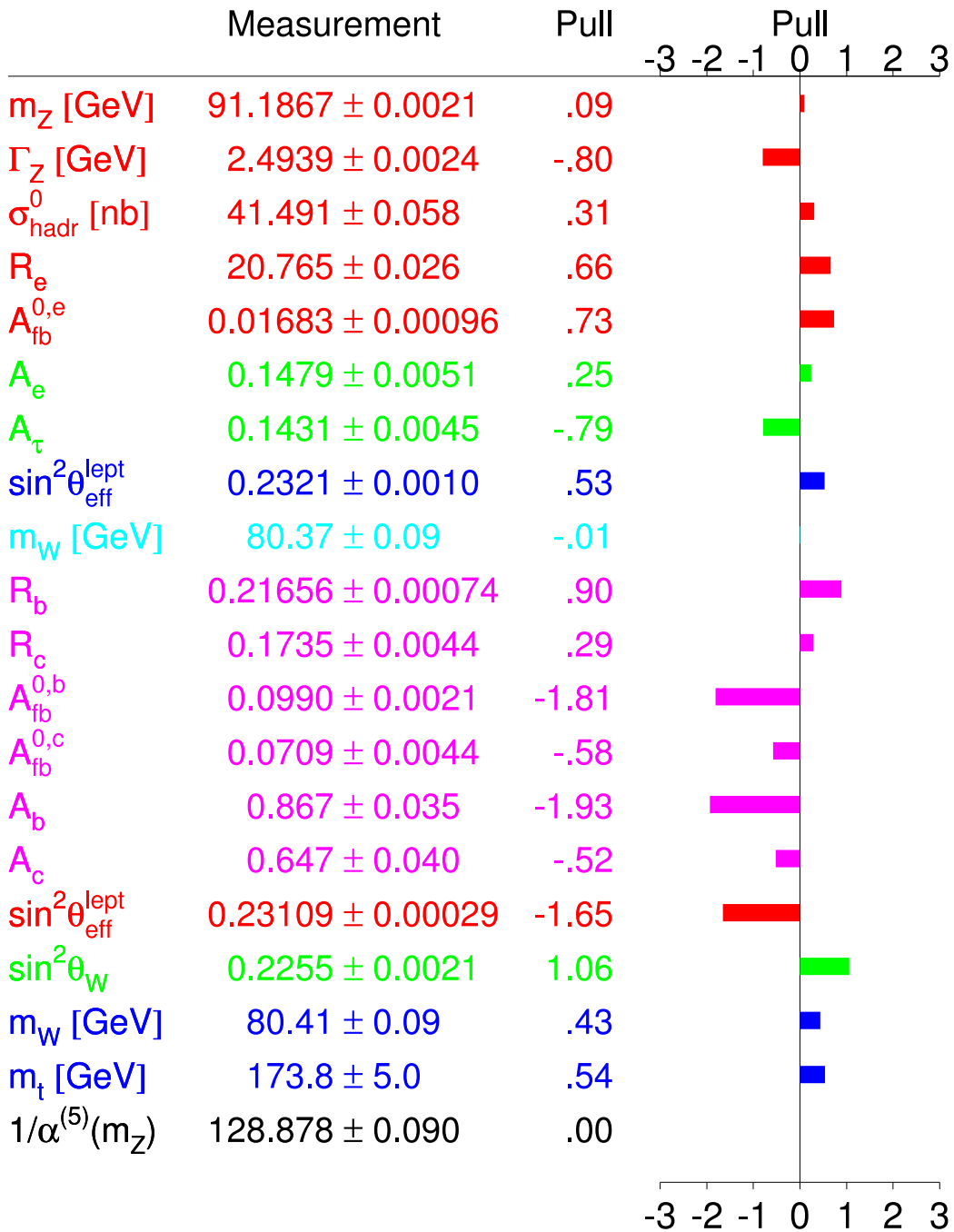
1 Johdanto

Hiukkasfysiikan standardimallissa kaikki luonnon vuorovaikutukset gravitaatiota lukuunottamatta selitetään kvanttikenttäteorialla. Standardimalli jakautuu sähköheikkoon ja vahvaan sektoriin. Vahva sektori eli QCD (quantum chromo dynamics, kvanttiväridynamiikka) [1] kuvaa kvarkkien välisiä vahvoja vuorovaikutuksia sekä näitä vuorovaikutuksia välittäviä mittabosoneja, gluoneja. Sähköheikko sektori puolestaan sisältää sähkömagneettisen ja heikon vuorovaikutuksen. Standardimallissa sähköheikkoa sektoria kuvataan Glashow-Weinberg-Salam-teorialla (GWS-teoria) [2]. Tässä teoriassa on oleellista spontaani sähköheikko symmetriarikko, jonka tutkimiseen tässä työssä keskitytään.

Standardimallissa sähköheikkoja vuorovaikutuksia kuvataan rikkoutumattomassa faasissa $SU(2) \times U(1)$ -symmetrisellä teorialla. Tässä teoriassa ei kuitenkaan voi esiintyä massatermejä mittabosoneille tai fermioneille, sillä ne rikkovat mittainvarianssia. Siksi malliin sisällytetään myös skalaarinen Higgsin kenttä. Tämä kenttä aiheuttaa spontaanin symmetriarikon, jonka seurauksena heikot mittakentät W^\pm ja Z saavat nollasta poikkeavan massan, mutta sähkömagneettista vuorovaikutusta välittävä fotoni säilyy massattomana. Tällöin sähköheikko symmetria on rikkoutunut erillisiksi sähkömagneettisiksi ja heikoiksi vuorovaikutuksiksi. Tätä mekanismia kutsutaan Higgsin mekanismiksi.

Standardimalli on ollut äärimmäisen tehokas tähän astisissa kokeissa saatutun energiaskaalan efektiivisenä teoriana. Sen ennusteita on pystytty testaamaan lukuisissa kiihdyttimissä, mm. LEP (Large Electron-Positron collider, CERN, ei enää toiminnassa), SLC (Stanford Linear Collider, USA) ja Tevatron (Fermilab, USA), ja on havaittu, että standardimallin mukaiset kytkennät niin sähköheikossa kuin vahvassa sektorissa ovat suurella tarkkuudella oikein [3, 4]. Taulukossa 1 on esitetty erinäisiä standardimallin ennustamia suureita, sekä näiden kokeellisesti mitattuja arvoja.

Higgsin hiukkasta ei kuitenkaan ole löydetty [5]. Higgsin hiukkasen olemassaolon kokeellinen vahvistaminen ja sen ominaisuuksien tarkempi tutkiminen onkin yksi tärkeimmistä tehtävistä uudessa LHC-kiihdyttimessä (Large Hadron Collider, CERN, toiminta alkaa vuoden 2007 kuluessa). LHC:n lisäksi suunnitteilla on uusi elektroni-positroni-kiihdytin, ILC (International Linear Collider), jolla päästäisiin 500 GeV:n, ja myöhemmin jopa 1 TeV:n massakeskipiste-energiaan e^-e^+ -törmäyksissä.



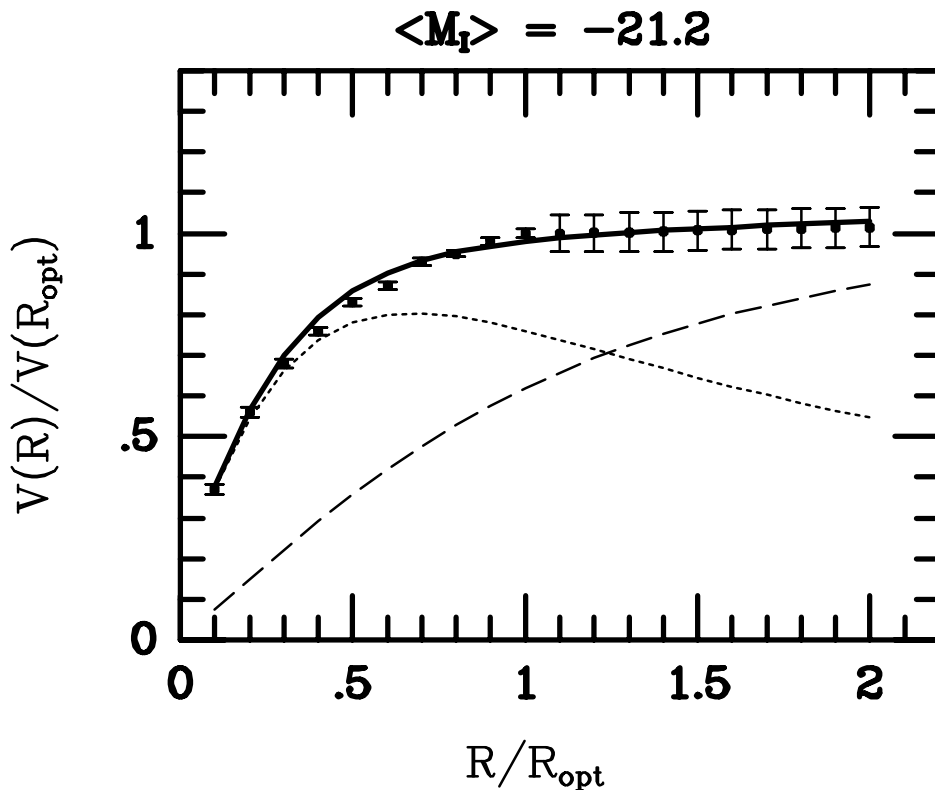
Taulukko 1. Standardimallin ennustamia suureita ja niiden kokeellisesti määritetyjä arvoja [6]. Palkki oikealla kuvaa mitatun arvon poikkeamaa (standardipoikkeamissa) standardimallin ennusteesta.

Huolimatta standardimallin suuresta menestyksestä mittaustulosten selittämiseksi, siihen liittyy ongelmia; GWS-teorian sisältämä Higgsin hiukkanen on skalaarinen alkeishiukkanen, ja tällaisen hiukkasen olemassaolo

sisältää teorian rakenteeseen liittyviä ongelmia. Näitä ovat niin kutsutut luonnollisuus-, hierarkia- ja triviaalisuusongelmat.

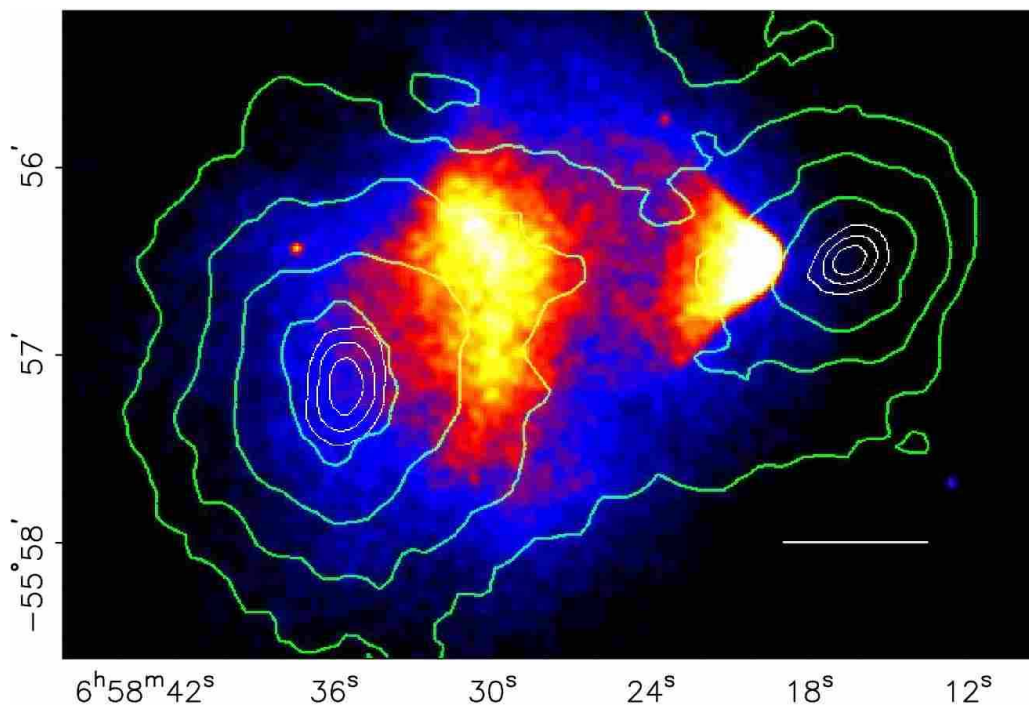
Edellä mainitut ongelmat ovat luonteeltaan teorian matemaattiseen konsistenssiin liittyviä, eivätkä suoraan liity teorian antamiin ennusteisiin. Havaintoja, jotka suoraan viittaavat standardimallin ulkopuoliseen fysiikkaan on hyvin vähän. Yksi tällainen havinto on neutriinoiden massat. Standardimallin mukaan neutriinot ovat massattomia, mutta havaintojen mukaan neutriinoilla kuitenkin on pieni massa [7]. Vaaditaan siis jotain standardimallin ulkopuolista fysiikkaa selittämään havainnot neutriinoiden massoista.

Standardimalli ei myöskään pysty selittämään pimeän aineen ongelmaa; maailmankaikkeudessa on runsaasti niin kutsuttua pimeää ainetta, eli sähköisesti neutraalia 'näkymätöntä' materiaa, joka ei säteile sähkömagneettista säteilyä. [8, 9]. Tämä nähdään muun muassa tarkkailemalla galaksin reunoilla olevien tähtien kiertonopeutta galaksin keskipisteen ympäri. Tämä ei vastaa gravitaatioteorian ennustetta, mikäli galaksin massa koostuu vain näkyvästä aineesta. Siksi galaksissa täytyykin olla näkyvän aineen lisäksi pimeää ainetta, joka muuttaa gravitaatiopotentiaalia.



Kuva 1. Havaittu kiertonopeus galaksin keskipisteen ympäri etäisyyden keskipisteestä funktiona. Pisteiviiva on näkyvän aineen ja katkoviiva pimeän aineen kontribuutio. Kuva lähteestä [10]

Kuvan 1 esittämä kiertonopeus voitaisiin selittää myös sillä, että painovoima toimii eri tavalla suurilla etäisyyksillä. Tämäkin malli kuitenkin osoittautuu vääräksi, kun tarkastellaan kahden galaksiklusterin törmäystä. Näkyvä aine klustereissa on pääosin vetyplasmaa, joka vuorovaikuttaa törmäyksessä toisen klusterin plasman kanssa, ja jää siksi jälkeen heikosti vuorovaikuttavasta pimeästä aineesta. Siksi gravitaatiopotentiaali on keskittynyt tuollaisen törmäyksen jälkeen eri kohtaan kuin näkyvä aine. Tämä tilanne näkyy selvästi kuvassa 2. [10]



Kuva 2. Gravitaatio-tasapotentiaalikäyrät klusterista 1E0657-558. Näkyvä aine on vetyplasmaa, joka on selvästi keskittynyt eri kohtaan, kuin gravitaatiopotentiaalikeskukset, jotka näkyvät vihreällä merkittyjen tasapotentiaalikäyrien keskipisteinä. Kuva lähteestä [10].

Nämä havainnot tukevat siis teoriaa, jonka mukaan galaksien pimeä aine koostuu heikosti vuorovaikuttavista massiivisista hiukkasista. On esitetty myös, että pimeä aine voisi koostua massiivisista kompakteista objekteista, mutta on vaikeaa konstruoida malleja, joissa tällaisia objekteja syntyisi riittävästi. Standardimalli ei kuitenkaan sisällä sellaista hiukkasta, josta heikosti vuorovaikuttava pimeä aine voisi luontevasti koostua.

Tästä johtuen standardimallia pyritään laajentamaan siten, että nämä ongelmat poistuisivat, mutta mallin suuri tarkkuus mittaustulosten ennustamisessa säilyisi. Yksi tapa laajentaa standardimallia, ovat niin kutsutut

tekniväriteoriat [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] . Näissä teorioissa Higgsin sektori korvataan uudella vahvasti vuorovaikuttavalla sektorilla, joka sisältää uusia fermioneja, teknikvarkkeja, ja näiden kokeman uuden vahvan vuorovaikutuksen. Tällainen teoria pystyy vastaamaan sähköheikon symmetrian rikkoutumisesta ilman tarvetta ongelmalliselle skalaarihiukkaselle. Tekniväriteoria voi myös vastata pimeän aineen ongelmaan. Jos teorian parametrit valitaan tietyllä tavalla, voi teoria sisältää hiukkasen, joka olisi luonnollinen kandidaatti heikosti vuorovaikuttavaksi pimeäksi aineeksi [19, 20].

Tässä työssä tutkitaan sähköheikkoa symmetriarikkoa tekniväriteorioissa.

2 Higgsin mekanismi ja sähköheikko teoria standardimallissa

Tarkastellaan aluksi standardimallin sähköheikkoa sektoria ja Higgsin mekanisme. Tässä on oleellista spontaanin symmetriarikon ilmiö ja siihen liittyvät Goldstonen bosonit. Tutkitaan siksi spontaania symmetriarikkoa ja Higgsin mekanisme ensin yleisesti, ja sitten standardimallin GWS-teoriassa.

2.1 Spontaani symmetriarikko

2.1.1 Diskreetti symmetria

Tutkitaan ϕ^4 -teoriaa, jonka Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1)$$

missä nyt $\mu^2 > 0$, eli massatermi on väärän merkkinen. Korvataan nyt $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$, jolloin

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi') &= \frac{1}{2} (\partial_\mu (-\phi))^2 + \frac{1}{2} \mu^2 (-\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!} (-\phi)^4 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \mathcal{L}(\phi) \end{aligned} \quad (2)$$

eli \mathcal{L} on invariantti muunnoksessa $\phi \rightarrow -\phi$.

\mathcal{L} :n Hamiltonin funktio on

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^3x (\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}) = \int d^3x \left(\dot{\phi}(x) \frac{\partial}{\partial(\partial^0 \phi)} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) - \mathcal{L} \right) \\ &= \int d^3x (\dot{\phi}^2(x) - \mathcal{L}) = \int d^3x \left(\dot{\phi}^2(x) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Josta siis potentiaali $V(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$. Potentiaalin derivaatta on siten 0, kun

$$\begin{aligned} V'(\phi) &= -\mu^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 = 0 \\ \Rightarrow \phi &= 0 \text{ tai } \phi = \pm \sqrt{\frac{6}{\lambda}} \mu =: \pm v, \end{aligned} \quad (4)$$

missä $\phi = 0$ on lokaali maksimi ja $\phi = \pm v$ ovat minimejä. Kentän arvoa, jossa potentiaalilla V on minimi, kutsutaan kentän vakuuiodotusarvoksi.

Siirretään nyt kenttää ja kirjoitetaan Lagrangen tiheys potentiaalin minimin ympäristössä, eli tehdään muuttujanvaihto $\phi(x) = v + \sigma(x)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(v + \sigma))^2 + \frac{1}{2}\mu^2(v + \sigma)^2 - \frac{\lambda}{4!}(v + \sigma)^4 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(v^2 + 2v\sigma + \sigma^2) - \frac{\lambda}{4!}(v^4 + 4v^3\sigma + 6v^2\sigma^2 + 4v\sigma^3 + \sigma^4) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \mu^2\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4.\end{aligned}\tag{5}$$

Tämä on $\sqrt{2}\mu$ -massaisen skalaarikentän Lagrangen tiheys, jossa on σ^3 ja σ^4 vuorovaikutukset, ja joka ei ole invariantti muunnoksessa $\sigma \rightarrow -\sigma$. Tämä symmetria on siis rikkoutunut, kun kenttä on kehitetty potentiaalin minimin, eli fyysikaalisen vakuumin suhteen.

2.1.2 Jatkuva symmetria

Tutkitaan Lagrangen tiheyttä

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^i)^4,\tag{6}$$

missä summataan N :n kentän $\{\phi^i\}_{i=1}^N$ yli termeissä $(\phi^i)^2$. Jälleen $\mu^2 > 0$, eli massatermi on väärän merkinen. Koska \mathcal{L} riippuu vain $(\phi^i)^2$:sta, eli $\vec{\phi}$:n normin neliöstä, se on riippumaton $\vec{\phi}$:n suunnasta, ts. \mathcal{L} on invariantti rotaatioissa.

Kuten edellä, saadaan potentiaaliksi

$$V(\phi^i) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi^i)^4,\tag{7}$$

jonka derivaatta on 0, kun

$$V'(\phi^i) = -\mu^2\phi^i + \lambda(\phi^i)^3 = 0,\tag{8}$$

eli $\phi^i = 0$ tai $(\phi^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$. Näistä origo on lokaali maksimi, ja potentiaalilla on minimi, kun $\vec{\phi}$:n normi on

$$|\vec{\phi}| = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} =: v.\tag{9}$$

Siiretään nyt kenttä minimin kohdalle suuntaan $(0, 0, \dots, 0, v)^1$, eli tehdään muuttujanvaihto

$$\vec{\phi}(x) \rightarrow (\pi^1(x), \pi^2(x), \dots, \pi^{N-1}(x), v + \sigma(x)) = (\vec{\pi}(x), v + \sigma(x)). \quad (10)$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^i)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu (v + \sigma))^2 + \frac{1}{2}\mu^2((\pi^i)^2 + (v + \sigma)^2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4}((\pi^i)^2 + (v + \sigma)^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^i)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \mu^2 \sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu(\pi^i)^2 \sigma - \frac{\lambda}{2}(\pi^i)^2 \sigma^2 \\ &\quad - \sqrt{\lambda}\mu \sigma^3 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{4}(\pi^i)^4, \end{aligned} \quad (11)$$

missä siis summataan N-1:n kentän $\{\pi^i\}_{i=1}^{N-1}$ yli termeissä $(\pi^i)^2$. Siten σ on massiivinen kenttä ja π^i :t massattomia. Lagrangen tiheys on edelleen symmetrinen π^i -kenttien rotaatioiden suhteen, mutta se ei ole symmetrinen kentän σ rotaatioiden suhteen. Symmetrian rikkoutuminen siis loi yhden massiivisen, ja N-1 massatonta kenttää. Näitä massattomia bosonikenttiä kutsutaan Goldstonen bosoneiksi. Huomattavaa kuitenkin on, että itse asiassa Lagrangen tiheys on edelleen invariantti alkuperäisen muunnoksen suhteen. Siirtyminen kentän minimiin, eli fysikaaliseen vakuumiin on vain muuttujanvaihto, eikä siten riko alkuperäistä symmetriaa. Koska kuitenkin fysikaaliset kentät kirjoitetaan fysikaalisen vakuumin suhteen, eivät ne toteuta alkuperäistä symmetriaa.

2.1.3 Goldstonen bosonit

Goldstonen teoreeman mukaan jatkuvan symmetrian rikkoutuessa syntyy aina massattomia bosonikenttiä, ns. Goldstonen bosoneja [21, 22]. Todistetaan tämä tutkimalla kenttää $\mathcal{L} = f(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) - V(\phi^i)$, missä siis f sisältää vain termejä, jotka riippuvat ϕ :n derivaatoista. Olkoon potentiaali nyt sellainen, että sillä on minimi jollakin nollasta poikkeavalla kentällä ϕ_0^a , eli $\frac{\partial}{\partial \phi^a} V|_{\phi^a(x)=\phi_0^a} = 0$. Kirjoitetaan V sarjaksi ϕ_0^a :n ympäristössä: toisessa kertaluvussa

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)^a (\phi - \phi_0)^b \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0}, \quad (12)$$

josta $\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0} =: m_{ab}^2$ on massamatriisi, jonka ominaisarvot ovat fysikaalisen vakuumin suhteen kehitettyjen kenttien massat.

¹Voitaisiin valita mikä tahansa muukin piste, joka toteuttaa yhtälön (9)

Tarkastellaan sitten symmetriamuunnosta $\phi^a \rightarrow \phi^a + \alpha \Delta^a(\phi)$, missä α on infinitesimaalinen ja $\Delta^a(\phi)$ on kenttien $\{\phi^i\}$ funktio. Tarkastellaan vakio-kenttiä, jolloin $f(\phi, \partial_\mu \phi) = 0$ ja siten V :n on oltava invariantti muunnoksessa, eli

$$V(\phi^a) = V(\phi^a + \alpha \Delta^a(\phi)), \quad (13)$$

josta kirjoittamalla yhtälön oikealla puolella V sarjaksi ϕ^a :n suhteen saadaan

$$V(\phi^a) \approx V(\phi^a) + \alpha \Delta^a(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi^a} V(\phi), \quad (14)$$

ja siten on oltava

$$\Delta^a(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi^a} V(\phi) = 0. \quad (15)$$

Derivoimalla tätä ϕ^b :n suhteen saadaan pisteessä $\phi = \phi_0$:

$$\left(\frac{\partial \Delta^a(\phi)}{\partial \phi^b} \right)_{\phi_0} \left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi^a} \right)_{\phi_0} + \Delta^a(\phi_0) \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0} = 0 \quad (16)$$

Tässä $\left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} \right)_{\phi=\phi_0} = 0$, joten on oltava

$$\Delta^a(\phi_0) \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0} = 0. \quad (17)$$

Jos $\Delta^a(\phi_0) = 0$, niin symmetria ei ole rikkoutunut kentän ϕ^a osalta, eli \mathcal{L} on fysikaalisen vakuumin suhteen kehitettynä edelleen symmetrinen muutoksen $\phi^a \rightarrow \phi^a + \alpha \Delta^a(\phi)$ suhteen. Jos taas $\Delta^a(\phi_0) \neq 0$, eli symmetria on rikkoutunut, on oltava $\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0} = 0$ ts.

$$m_{ab} = 0, \quad (18)$$

eli on syntynyt massaton bosonikenttä. Siten Goldstonen teoreema on todistettu.

Goldstonen teoreema ei päde suoraan tässä muodossa, jos teoria ei ole Lorentz-invariantti. Siksi tilanteessa, jossa kemiallinen potentiaali $\mu \neq 0$ tai kentät ovat epärelativistisia, voi syntyneiden Goldstonen bosonien määrä olla eri kuin rikkoutuneiden generaattorien määrä.

2.2 Higssin mekanismi

Higssin mekanismissa mittabosonit saavat massan spontaanin symmetriarikon vaikutuksesta. Tutkitaan kenttää \mathcal{L} , joka on skalaarikenttien $\{\phi_i\}$ funktio

ja invariantti jonkin symmetriaryhmän G suhteen, missä G :tä esittää muunnos $\phi_i \rightarrow (1 + i\alpha^a t^a)_{ij} \phi_j$, missä α on infinitesimaalinen. Oletetaan, että ϕ_i :t ovat reaalisia, jolloin t^a :iden on oltava imaginaarisia ja siten hermiittisyyden nojalla antisymmetrisiä. Merkitään $t^a_{ij} = iT^a_{ij}$, missä T^a on reaalinen ja antisymmetrinen. Jos G on lokaali mittasymmetria, on kovariantti derivaatta tällöin

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a t^a) \phi = (\partial_\mu + gA_\mu^a T^a) \phi, \quad (19)$$

missä A^a :t ovat mittakentät. Siten kineettinen termi \mathcal{L} :ssä on

$$\frac{1}{2}(D_\mu \phi_i)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)^2 + gA_\mu^a (\partial_\mu \phi_i T^a_{ij} \phi_j) + \frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{b\mu} (T^a \phi)_i (T^b \phi)_i. \quad (20)$$

Olkoon nyt ϕ :llä nollasta poikkeava vakuumiodotusarvo $\langle \phi_i \rangle = (\phi_0)_i$. Tällöin tässä pisteessä termi $\frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{b\mu} (T^a \phi)_i (T^b \phi)_i = \frac{1}{2}m_{ab}^2 A_\mu^a A^{b\mu}$ on mittakenttien A^a massatermi, missä massamatriisi on $m_{ab}^2 = g^2 (T^a \phi_0)_i (T^b \phi_0)_i$. Massat ovat oikean merkkisiä eli positiivisia, sillä diagonaalialkiot

$$m_{aa}^2 = g^2 (T^a \phi_0)^2 \geq 0 \quad \forall a. \quad (21)$$

Kuitenkin, jos jokin G :n generaattoreista T^a jättää vakuumin invariantiksi, on tällöin $T^a \phi_0 = 0$, ja siten kyseinen mittabosoni jää massattomaksi.

2.3 GWS-Teoria

2.3.1 Mittabosonien massat

Glashow-Weinberg-Salam -teoria kuvaa sähkömagneettisia ja heikkoja vuorovaikutuksia. Tutkitaan $SU(2) \times U(1)$ -symmetristä dublettikenttää, joka on siis invariantti mittamuunnoksessa

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha^a \tau^a} e^{i\frac{\beta}{2}} \phi, \quad (22)$$

missä $\tau^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ (Paulin σ -matriisi). Skalaarikenttä ϕ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\phi(x) = U(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

missä $h(x)$ on reaaliarvoinen kenttä, jolle $\langle h(x) \rangle = 0$ ja $U(x)$ on jokin $SU(2)$ -muunnos.

Koska ϕ on $SU(2)$ -mittainvariantti, voidaan $U(x)$ poistaa mittamuunnoksella. Tämä mittamuunnos vastaa niin kutusun unitaarimitan valintaa. Oletetaan nyt ϕ :lle ϕ^4 -Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (24)$$

josta saadaan potentiaali

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 = \frac{1}{2}\mu^2(v + h(x))^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + h(x))^4. \quad (25)$$

Siten potentiaalin derivaatta on 0, kun

$$V'(\phi) = \mu^2(v + h(x)) - \lambda(v + h(x))^3 = 0, \quad (26)$$

eli $v + h(x) = 0$ (maksimi) tai $v + h(x) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ (minimi). Koska $\langle h(x) \rangle = 0$, saadaan vakuumiodotusarvoksi $v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$. Sijoittamalla tämä potentiaaliin saadaan

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + h \right)^2 - \frac{1}{4}\lambda \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + h \right)^4 = -\mu^2 h^2 - \sqrt{\lambda}\mu h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 \\ &= -\frac{1}{2}m_h^2 h^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}m_h h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4, \end{aligned} \quad (27)$$

missä $m_h = \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$ on Higgsin bosonin massa.

Tarkastellaan nyt infinitesimaalista mittamuunnosta, jossa $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ ja $\alpha^3 = \beta$. Tällöin

$$\begin{aligned} e^{i\alpha^a \tau^a} e^{i\frac{\beta}{2}} \langle \phi \rangle &= e^{i\frac{\beta}{2}(1+\sigma^3)} \langle \phi \rangle \approx \left(1 + \frac{i\beta}{2}(1 + \sigma^3) \right) \langle \phi \rangle \\ &= \langle \phi \rangle + \frac{i\beta}{2} \left(\mathbf{1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \langle \phi \rangle \end{aligned} \quad (28)$$

eli $\langle \phi \rangle$ säilyy invarianttina tässä muunnoksessa ja siten vastaava mittabosoni jää massattomaksi. Muut kolme mittabosonia saavat nollassa eroavan massan Higgsin mekanismin kautta.

Nyt kovariantti derivaatta on

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a \tau^a - i\frac{g'}{2}B_\mu)\phi, \quad (29)$$

jossa siis A_μ^a :t ovat $SU(2)$ -mittakentät ja B_μ on $U(1)$ -mittakenttä, ja g ja g' näiden kytkinvakiot. Mittabosonien massatermit saadaan siis $D_\mu \phi$:n neliöstä, kun asetetaan $\phi = \langle \phi \rangle$. Tällöin

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) &= \langle \phi \rangle^T (igA_\mu^a \tau^a + i\frac{g'}{2}B_\mu)(-igA^{b\mu} \tau^b - i\frac{g'}{2}B^\mu) \langle \phi \rangle \\ &\quad + \text{termejä} \sim \partial_\mu \phi \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} (gA_\mu^a \sigma^a + g'B_\mu)(gA^{b\mu} \sigma^b + g'B^\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \dots \\ &= \frac{v^2}{8} (g^2(A_\mu^1)^2 + g^2(A_\mu^2)^2 + (-gA_\mu^3 + g'B_\mu)^2) + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Merkitään nyt

$$\begin{aligned}
W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2), \\
Z_\mu^0 &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu), \\
A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'A_\mu^3 + gB_\mu),
\end{aligned} \tag{31}$$

jolloin

$$\begin{aligned}
&\frac{v^2}{8}(g^2(A_\mu^1)^2 + g^2(A_\mu^2)^2 + (-gA_\mu^3 + g'B_\mu)^2) \\
&= \frac{v^2}{2}\left(\frac{g^2}{4}|W_\mu^+|^2 + \frac{g^2}{4}|W_\mu^-|^2 + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)|Z_\mu^0|^2\right)
\end{aligned} \tag{32}$$

Tästä voidaan lukea mittabosonien massat

$$\begin{aligned}
m_W &= \frac{gv}{2}, \\
m_Z &= \sqrt{g^2 + g'^2}\frac{v}{2}, \\
m_A &= 0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Tutkitaan fermionia, jolla on U(1)-varaus Y . Tällöin

$$\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu - igA_\mu^a T^a - ig'Y B_\mu \\
&= \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2)(T^1 + iT^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2)(T^1 - iT^2)\right) \\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu)(g^2T^3 - g'^2Y) \\
&\quad - i\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'A_\mu^3 + gB_\mu)(T^3 + Y) \\
&= \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}Z_\mu(g^2T^3 - g'^2Y) \\
&\quad - i\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}A_\mu(T^3 + Y)
\end{aligned} \tag{34}$$

missä $T^\pm = (T^1 \pm iT^2) = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2)$.

Kun tulkitaan massaton bosoni A_μ fotoniksi, voidaan identifoida elektronin varaus

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{35}$$

ja sähkömagneettinen varaus $Q = T^3 + Y$. Määritellään θ_w siten, että $\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ ja $\sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$, jolloin $g = \frac{e}{\sin \theta_w}$ ja $m_W = m_Z \cos \theta_w$. Näiden avulla D_μ saadaan muotoon

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i \frac{g}{\cos \theta_w} Z_\mu (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) - ie A_\mu Q, \quad (36)$$

jossa on siis vain kaksi vapaata parametriä: g (tai e) ja θ_w .

2.3.2 Kytkentä fermioneihin

Koska heikkojen mittabosonien on havaittu kytkevän ainoastaan vasenkätisiin fermioneihin, jaetaan fermionikentän kineettinen termi erillisiin osiin vasen- ja oikeakätisille kentille:

$$\bar{\psi} i \not{D} \psi = \bar{\psi}_L i \not{D} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{D} \psi_R \quad (37)$$

Kun fermionikenttä kytketään $SU(2)$ -mittakenttään, eli korvataan $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$, asetetaan vasenkätiset fermionit $SU(2)$ -dubleteiksi ja oikeakätiset singleteiksi. Siten oikeakätisille kentille $T^i = 0$ kaikilla i , ja edelleen $Q = T^3 + Y = Y$, joten $Y_{e_R} = -1$ ja $Y_{u_R} = \frac{2}{3}$ jne. Vasenkätisille kentille $E_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ ja $Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ on $T^3 = \frac{1}{2} \sigma^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ja siten $Y_{E_L} = -\frac{1}{2}$ ja $Y_{Q_L} = \frac{1}{6}$.

Koska vasen- ja oikeakätiset fermionikentät ovat $SU(2)$:n eri esityksissä, ei tyypillinen massatermi muotoa $-m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$ ole mittainvariantti. Ilman massatermejä voidaan kytkentä kirjoittaa

$$\mathcal{L} = \bar{E}_L(i\not{D})E_L + \bar{e}_R(i\not{D})e_R + \bar{Q}_L(i\not{D})Q_L + \bar{u}_R(i\not{D})u_R + \bar{d}_R(i\not{D})d_R. \quad (38)$$

Kun tähän sijoitetaan yhtälössä (36) johdettu muoto D_μ :lle, saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{E}_L(i\not{D})E_L + \bar{e}_R(i\not{D})e_R + \bar{Q}_L(i\not{D})Q_L + \bar{u}_R(i\not{D})u_R + \bar{d}_R(i\not{D})d_R \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{E}_L \gamma^\mu (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) E_L + \bar{Q}_L \gamma^\mu (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) Q_L \\ & + \frac{g}{\cos \theta_w} (\bar{E}_L \gamma^\mu Z_\mu (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) E_L + \bar{e}_R \gamma^\mu Z_\mu (-\sin^2 \theta_w Q) e_R \\ & + \bar{Q}_L \gamma^\mu Z_\mu (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) Q_L + \bar{u}_R \gamma^\mu Z_\mu (-\sin^2 \theta_w Q) u_R \\ & + \bar{d}_R \gamma^\mu Z_\mu (-\sin^2 \theta_w Q) d_R) \\ & + e (\bar{E}_L \gamma^\mu A_\mu Q E_L + \bar{e}_R \gamma^\mu A_\mu Q e_R + \bar{Q}_L \gamma^\mu A_\mu Q Q_L + \bar{u}_R \gamma^\mu A_\mu Q u_R \\ & + \bar{d}_R \gamma^\mu A_\mu Q d_R). \end{aligned} \quad (39)$$

Nyt

$$\begin{aligned}\bar{E}_L \gamma^\mu (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) E_L &= (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_L \gamma^\mu \left(W_\mu^+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + W_\mu^- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ &= W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L + W_\mu^- \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L,\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\bar{Q}_L \gamma^\mu (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) Q_L = W_\mu^+ \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + W_\mu^- \bar{d}_L \gamma^\mu u_L.$$

Edelleen

$$\bar{E}_L \gamma^\mu Z_\mu (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) E_L = Z_\mu \left(\frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_w \right) e_L \right),$$

ja

$$\begin{aligned}\bar{Q}_L \gamma^\mu Z_\mu (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) Q_L \\ = Z_\mu \left(\bar{u}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_L \right).\end{aligned}$$

Merkitään nyt sähkömagneettista virtaa, sekä varattua ja neutraalia heikkoa virtaa

$$\begin{aligned}J_Z^\mu &= \frac{1}{\cos \theta_w} \left(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \frac{1}{2} \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_w \right) e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu \sin^2 \theta_w e_R \right. \\ &\quad + \bar{u}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_L + \bar{u}_R \gamma^\mu \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_R \\ &\quad \left. + \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_R \right),\end{aligned}\tag{40}$$

$$J_{EM}^\mu = \bar{e} \gamma^\mu (-1) e + \bar{u} \gamma^\mu \frac{2}{3} u + \bar{d} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{3} \right) d,$$

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L),$$

$$J_W^{\mu-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L).$$

Näin saadaan lopulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{E}_L (i \not{\partial}) E_L + \bar{e}_R (i \not{\partial}) e_R + \bar{Q}_L (i \not{\partial}) Q_L + \bar{u}_R (i \not{\partial}) u_R + \bar{d}_R (i \not{\partial}) d_R \\ &\quad + g (W_\mu^+ J_W^{\mu+} + W_\mu^- J_W^{\mu-} + Z_\mu J_Z^\mu) + e A_\mu J_{EM}^\mu\end{aligned}\tag{41}$$

2.3.3 Fermionien massat

Edellä johdetusta Lagrangen tiheydestä puuttuu vielä fermionien massatermit. Näiden lisäämiseksi teoriaan huomataan, että myös seuraavanlainen termi on mittainvariantti:

$$\Delta\mathcal{L}_e = -\lambda_e \bar{E}_L \cdot \phi e_R + h.c. \quad (42)$$

Kun tämä kehitetään ϕ :n vakuumiodotusarvossa, saadaan elektronille massatermi:

$$\Delta\mathcal{L}_e = -\lambda_e (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} e_R + h.c. = -\frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} v \bar{e}_L e_R + h.c., \quad (43)$$

mistä voidaan lukea elektronin massa $m_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e v$.

Myös kvarkeille saadaan massat, kun kirjoitetaan

$$\Delta\mathcal{L}_q = -\lambda_d \bar{Q}_L \cdot \phi d_R - \lambda_u \epsilon^{ab} \bar{Q}_{La} \phi_b^\dagger u_R + h.c., \quad (44)$$

mikä vakuumiodotusarvossa antaa

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_q &= -\lambda_d (\bar{u}_L \quad \bar{d}_L) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} d_R - \lambda_u \bar{u}_L \frac{1}{\sqrt{2}} v u_R + h.c. \\ &= \frac{\lambda_d}{\sqrt{2}} v \bar{d}_L d_R - \frac{\lambda_u}{\sqrt{2}} v \bar{u}_L u_R + h.c. \end{aligned} \quad (45)$$

Tästä voidaan lukea kvarkkien massat $m_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_u v$ ja $m_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_d v$.

Kun teoriaan lisätään uusia fermionisukupolvia, saadaan niille massat vastaavasti. Samalla syntyy myös termejä, jotka kytkevät sukupolvet toisiinsa; merkitään u- ja d-tyypin kvarkkeja $u_L^i = (u_L, c_L, t_L)$ ja $d_L^i = (d_L, s_L, b_L)$. Kirjoitetaan nämä nyt massan ominaiskannassa. Tähän päästään unitaari-muunnoksella $u_L^i = U_u^{ij} u_L^j$ ja $d_L^i = U_d^{ij} d_L^j$. Tällöin varattu virta tulee kvarkkien osalta muotoon

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu (U_u^\dagger U_d)_{ij} d_L^j. \quad (46)$$

Tässä $(U_u^\dagger U_d)_{ij} =: V_{ij}$ on unitaarinen Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-matriisi. V_{ij} :n ei-diagonaalitermit mahdollistavat kvarkkisukupolvien sekoittumisen heikon varatun virran välityksellä.

2.3.4 Higgsin bosoni

Tarkastellaan vielä Higgsin hiukkasen vuorovaikutuksia. Kovariantin derivaatan (36) avulla saadaan Higgsin bosonin kineettinen termi

$$\begin{aligned}
|D_\mu\phi|^2 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(v+h))^2 \\
&+ \frac{g^2}{4} \left(\left(W^{\mu+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + W^{\mu-} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \right)^\dagger \\
&\left(W^{\mu+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + W^{\mu-} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \\
&+ \frac{g^2}{\cos^2\theta_w} \frac{1}{8} \left(\left(Z_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \right)^\dagger \left(Z_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{g^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} (v+h)^2 + \frac{1}{8} \frac{g^2}{\cos^2\theta_w} Z_\mu Z^\mu (v+h)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + (m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu) \left(1 + \frac{h}{v}\right)^2.
\end{aligned} \tag{47}$$

Tästä ja potentiaalista (27) voidaan lukea Feynmanin säännöt verteksille, jotka sisältävät Higgsin bosonin ja mittabosoneja. Saadaan verteksit:

$$\begin{aligned}
\{W^+W^-h\} &= 2i \frac{m_W^2}{v} g^{\mu\nu}, \\
\{Z^0Z^0h\} &= 2i \frac{m_Z^2}{v} g^{\mu\nu}, \\
\{hhh\} &= -6i \sqrt{\frac{\lambda}{2}} m_h = -3i \frac{m_h^2}{v} \\
\{hhhh\} &= -i\lambda.
\end{aligned} \tag{48}$$

Lisäksi kirjoittamalla auki fermionien massatermit, saadaan

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L}_e &= -\lambda_e \bar{E}_L \cdot \phi e_R = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} e_R + h.c. \\
&= -m_e \bar{e}_L e_R \left(1 + \frac{h}{v}\right) + h.c.
\end{aligned} \tag{49}$$

ja

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L}_q &= -\lambda_d \bar{Q}_L \cdot \phi d_R - \lambda_u \epsilon^{ab} \bar{Q}_{La} \phi_b^\dagger u_R + h.c. \\
&= -m_d \bar{d}_L d_R \left(1 + \frac{h}{v}\right) - m_u \bar{u}_L u_R \left(1 + \frac{h}{v}\right) + h.c.
\end{aligned} \tag{50}$$

Siten saadaan vielä feynmanin sääntö Higgsin bosonin ja fermioni-antifermioni-parin verteksille:

$$\{f\bar{f}h\} = -i\frac{m_f}{v}. \quad (51)$$

Yhtälön (23) jälkeen tehty unitaarimitan valinta poisti teoriasta Goldstonen bosonit. Jos valitaan jokin toinen mitta, teoriassa esiintyy Higgsin hiukkasen lisäksi kentät ϕ^+ , ϕ^- ja ϕ^0 , jotka unitaarimitassa ovat heikkojen mittabosonien longitudinaaliset komponentit. Lisäksi mitan valinnasta riippuen teoriassa esiintyy niin kutsuttuja Faddeev-Popov-aaveita. Nämä ovat epäfyysikaalisia hiukkasia, jotka voivat kuitenkin esiintyä Feynmannin diagrammien välitilahiukkasina.

3 Luonnollisuusongelma standardimallissa

Jos teoriassa esiintyy jokin hyvin pieni ja tarkkaan 'säädetty' parametri, se herättää kysymyksen siitä, miksi tällä parametrilla on juuri kyseinen hienosäädetty arvo. Tätä ongelmaa kutsutaan luonnollisuusongelmaksi.

Tällaisen hienosäädetyin parametrin sanotaan olevan teknisesti luonnollinen, mikäli säteilykorjaukset sen arvoon ovat multiplikatiivisia, sillä tällöin suureen arvo pysyy pienenä säteilykorjauksissa. Tällainen tilanne syntyy, mikäli kyseisen parametrin arvon säätäminen nolnaan synnyttää teoriaan symmetrian, joka estää nollasta poikkeavat säteilykorjaukset parametrin arvoon kaikissa kertaluvuissa. Edelleen jää selittämättä, miksi arvo on juuri kyseinen, mutta kun se on kerran säädetty, se pysyy samassa suuruusluokassa säteilykorjauksista huolimatta. Tyypillisesti fermionikenttien asettaminen massattomaksi luo kiraalisen symmetrian, jonka vuoksi säteilykorjaukset fermionien massaun ovat tuolloin myös nollia. Siten fermionien massat ovat teknisesti luonnollisia.

Skalaarihiukkasen tapauksessa tällaista symmetriaa ei synny. Siksi säteilykorjaukset skalaarisen alkeishiukkasen massaun ovat additiivisia, ja siten synnyttävät skalaarihiukkaselle nollasta poikkeavan massan, vaikka se puutasolla säädetäisiin nollassi. Siksi skalaarihiukkasen massa joudutaan säätämään uudestaan kaikissa kertaluvuissa, jotta se pysyisi annetussa suuruusluokassa. Näin ollen skalaarihiukkasen tarkkaan säädetty massa on hyvin epäluonnollinen ja vaatii jonkinlaisen selityksen. Poikkeuksena tähän ovat Goldstonen bosonit, jotka voivat omata teknisesti luonnollisen pienen massan spontaanisti rikkoutuneen symmetrian vuoksi. Toinen poikkeus on sellainen skalaarihiukkanen, joka ei ole alkeishiukkanen, vaan koostuu ei-skalaareista alkeishiukkasista. Tämän massa nimittäin määräytyy konstituenttihiukkasten dynamiikan perusteella, eikä siten saa säteilykorjauksia suoraan, vaan välillisesti konstituenttihiukkasten dynamiikkaan vaikuttavien säteilykorjausten kautta.

Standardimallissa Higgsin bosoni ei kuulu kumpaankaan näistä luokista, ja siten sen massaun liittyy luonnollisuusongelma.

Tarkastellaan esimerkkinä Yukawa-teorian renormalisointia yksisilmukkasolla, jossa eksplisiittisesti nähdään skalaarin ja fermionin massakorjausten ero. Saman tyypiset korjaukset saadaan myös standardimallin sähköheikossa teoriassa.

3.1 Massan renormalisaatio Yukawa-teoriassa

3.1.1 Divergoivat graafit

Tarkastellaan siis Yukawa-teoriaa, jonka Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_{0\phi}^2 \phi_0^2 + \bar{\psi}_0(i\not{\partial} - m_{0\psi})\psi_0 - ig_0 \bar{\psi}_0 \gamma^5 \psi_0 \phi_0, \quad (52)$$

missä siis ϕ on reaalinen skalaarikenttä ja ψ on fermionikenttä. Alaindeksi 0 viittaa siihen, että kyseessä ovat renormalisoimattomat kentät, massat ja kytkinvakiot. Tästä voidaan suoraan lukea renormalisoimattoman teorian Feynmanin säännöt:

$$\begin{aligned} \text{---} \longrightarrow \text{---} &= \frac{i(\not{k} + m_{0\psi})}{k^2 - m_{0\psi}^2} \\ \text{---} \text{---} \longrightarrow \text{---} \text{---} &= \frac{i}{k^2 - m_{0\phi}^2} \\ \begin{array}{c} \swarrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \longrightarrow \text{---} &= g_0 \gamma^5 \end{aligned}$$

Teorian divergoivat n -pistefunktiot saadaan selville tarkastelemalla graafien divergenssin näennäistä astetta D . Kukin silmukka tuottaa integroinnin 4-ulotteisen avaruuden yli. Kukin skalaaripropagaattori tuottaa integraalin nimittäjään termin k^2 ja kukin fermionipropagaattori tuottaa nimittäjään termin k . Siten annetun graafin divergenssin näennäinen aste on

$$D = 4L - 2p_\phi - p_\psi, \quad (53)$$

missä L on silmukoiden määrä, p_ϕ on sisäisten skalaaripropagaattoreiden määrä ja p_ψ on sisäisten fermionipropagaattoreiden määrä. Nyt siis graafi divergoi, jos $D \geq 0$. Edelleen kukin propagaattori tuottaa integraalin liikemääränsä yli, kukin verteksi sitoo yhden liikemäärän neliliikemäärän säilymisen vuoksi, mutta yksi vertekseistä sitoo ainoastaan neliliikemäärän säilymisen koko graafissa, eikä siten vaikuta integrointien määrään. Kaikkiaan silmukkaintegraalien määrä on siten

$$L = p_\phi + p_\psi - v + 1, \quad (54)$$

missä v on verteksiiden määrä. Nyt sisäiseen skalaaripropagaattoriin kytkeytyy aina kaksi verteksiä ja ulkoiseen skalaarijalkaan yksi verteksi. Lisäksi yhteen verteksiin kytkeytyy aina yksi skalaari (ulkoinen jalka tai sisäinen propagaattori). Siten pätee

$$v = 2p_\phi + n_\phi, \quad (55)$$

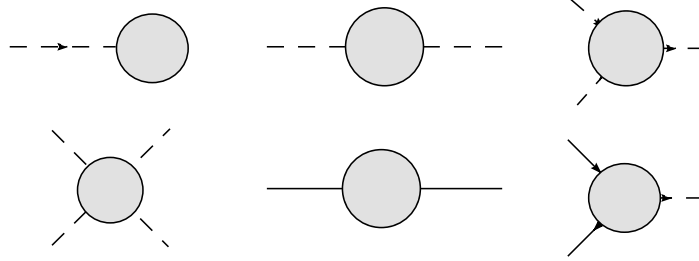
missä siis n_ϕ on ulkoisten skalaarijalkojen määrä. Samanlaisen argumentin nojalla fermioneille pätee

$$2v = 2p_\psi + n_\psi, \quad (56)$$

missä n_ψ on ulkoisten fermionijalkojen määrä. Näistä yhtälöistä saadaan annetun graafin divergenssin näennäiseksi asteeksi

$$\begin{aligned} D &= 4L - 2p_\phi - p_\psi = 2p_\phi + 3p_\psi = v - n_\phi + 3v - \frac{3}{2}n_\psi - 4v + 4 \\ &= 4 - \frac{3}{2}n_\psi - n_\phi. \end{aligned} \quad (57)$$

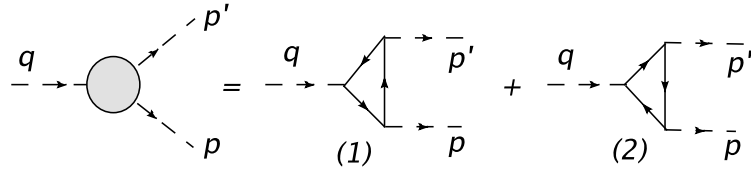
Tämän perusteella divergoivia n -pistefunktioita on 6:



Kuitenkin huomataan, että skalaarinen 1-pistefunktio on yksisilmukkatasolla

$$\text{---} \rightarrow \text{---} \circlearrowleft = \text{---} \circlearrowright = -g_0 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}(i\gamma^5(\not{k} + m_{0\psi}))}{(k^2 - m_{0\psi}^2)(k^2 - m_{0\phi}^2)} = 0,$$

sillä $\text{Tr}(\gamma^5(\not{k} + m_{0\psi})) = 0$. Siten skalaarinen 1-pistefunktio häviää. Edelleen skalaarinen 3-pistefunktio yksisilmukkatasolla on



Nyt

$$(1) = -(ig_0)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}(\gamma^5(\not{k} + m_{0\psi})\gamma^5(\not{k}\not{p}' + m_{0\psi})\gamma^5(\not{k}\not{q} + m_{0\psi}))}{(k^2 - m_{0\psi}^2)((k+p')^2 - m_{0\psi}^2)((k+q)^2 - m_{0\psi}^2)} \quad (58)$$

Tässä

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(\gamma^5(\not{k} + m_{0\psi})\gamma^5(\not{k}\not{p}' + m_{0\psi})\gamma^5(\not{k}\not{q} + m_{0\psi})) \\ &= -m_{0\psi}k_\alpha(k+p')_\beta \text{Tr}(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta) + m_{0\psi}k_\alpha(k+q)_\beta \text{Tr}(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta) \\ &\quad + m_{0\psi}(k+p')_\alpha(k+q)_\beta \text{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^5\gamma^\beta) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Sillä $\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 0$. Siten (1) = 0. Vastaavasti (2) = 0, joten myös skalaarinen kolmipistefunktio häviää. Kaikkiaan siis divergoivia n -pistefunktioita on 4:

$$\begin{aligned}
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} &= -i\Sigma_s \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} &= -i\Sigma_f \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} &= i\Gamma \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} &= i\mathcal{M}
 \end{aligned}$$

3.1.2 Renormalisaatio

Koska skalaarinen nelipistefunktio on divergoiva, tulee teoriassa esiintymään tämän vastaterminä efektiivisesti skalaarinen nelipisteverteksi. Tämän vuoksi lisätään teoriaan myös renormalisoimaton neliverteksi:

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = -i\lambda_0,$$

joka saadaan aikaan lisäämällä Lagrangen tiheyden termi

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{\lambda_0}{4!}\phi^4. \tag{60}$$

Skaalataan nyt kentät ϕ_0 ja ψ_0 siten, että $\phi_0 = \sqrt{Z_s}\phi$ ja $\psi_0 = \sqrt{Z_f}\psi$. Tällöin

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z_s(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_{0\phi}^2 Z_s\phi^2 + Z_f\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_{0\psi})\psi - ig_0 Z_f\sqrt{Z_s}\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi - Z_s^2\frac{\lambda_0}{4!}\phi^4. \tag{61}$$

Määritellään sitten vastatermit:

$$\begin{aligned}
\delta_s &= Z_s - 1, \\
\delta_f &= Z_f - 1, \\
\delta_{m_\phi} &= m_{0\phi}^2 Z_s - m_\phi^2, \\
\delta_{m_\psi} &= m_{0\psi} Z_f - m_\psi, \\
\delta_g &= Z_f \sqrt{Z_s} g_0 - g, \\
\delta_\lambda &= Z_s^2 \lambda_0 - \lambda,
\end{aligned} \tag{62}$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2 \phi^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_\psi)\psi - ig\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \\
&+ \frac{1}{2}\delta_s(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}\delta_{m_\phi}\phi^2 + \bar{\psi}(i\delta_f\not{\partial} - \delta_{m_\psi})\psi - i\delta_g\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi - \frac{\delta_\lambda}{4!}\phi^4,
\end{aligned} \tag{63}$$

Missä nyt ilman alaindeksiä 0 esiintyvät parametrit ovat fysikaaliset kentät, massat ja kytkinvakiot. Tästä voidaan lukea renormalisoidun teorian Feynmanin säännöt:

$$\text{---}\longrightarrow\text{---} = \frac{i(\not{k} + m_\psi)}{k^2 - m_\psi^2}$$

$$\text{---}\longrightarrow\text{---} = \frac{i}{k^2 - m_\phi^2}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \longrightarrow\text{---} = g\gamma^5$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} = -i\lambda$$

$$\text{---}\bigotimes\text{---} = i(\delta_s k^2 - \delta_{m_\phi})$$

$$\begin{aligned}
\text{---} \bigcirc \otimes \text{---} &= i(\delta_f k^2 - \delta_{m_\psi}) \\
\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \bigcirc \otimes \text{---} &= \delta_g \gamma^5 \\
\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \bigcirc \otimes \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= -i\delta_\lambda
\end{aligned}$$

Kiinnitetään seuraavaksi renormalisaatiopiste. Koska olemme nyt kiinnostuneita vain massan renormalisoinnista, jätetään renormalisaatioehdot kytkinvakioille λ ja g kirjoittamatta. Vaaditaan siis, että propagaattorien navat ovat hiukkasten massan kohdalla hiukkasten ollessa massakuorellaan, ja että näiden napojen residy on 1. Tästä saadaan renormalisaatioehdot:

$$\begin{aligned}
\Sigma_f(\not{k} = m_\psi) &= 0 \\
\left. \frac{d\Sigma_f}{d\not{k}} \right|_{\not{k}=m_\psi} &= 0 \\
\Sigma_s(k^2 = m_\phi^2) &= 0 \\
\left. \frac{d\Sigma_s}{dk^2} \right|_{k^2=m_\phi^2} &= 0
\end{aligned} \tag{64}$$

3.1.3 Korjaustermit

Fermionin massakorjaus: Fermionin massakorjauksen määrittämiseksi lasketaan eksplisiittisesti Σ_f yksisilmukkatasolla. Nyt

$$-i\Sigma_f(\not{q}) = \text{---} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \bigcirc \otimes \text{---}$$

Tässä jälkimmäinen osa on $i(\delta_f \not{p} - \delta_{m_\psi})$, ja ensimmäinen on

$$(ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^5(\not{k} + m_\psi)\gamma^5}{(k^2 - m_\psi^2)((q - k)^2 - m_\phi^2)}. \tag{65}$$

Käyttämällä Feynmanin parametrejä saadaan nimittäjä muotoon

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k^2 - m_\psi^2)((q - k)^2 - m_\phi^2)} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x((q - k)^2 - m_\phi^2) - (1 - x)(k^2 - m_\psi^2))^2} \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 - 2xq \cdot k + xq^2 - xm_\phi^2 - (1 - x)m_\psi^2)^2} \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{(l^2 - \Delta)^2},
\end{aligned} \tag{66}$$

missä $l = k - xq$ ja $\Delta = xm_\phi^2 + (1 - x)m_\psi^2 - x(1 - x)q^2$. Muuttujanvaihdolla $l = k - xq$ osoittaja tulee muotoon

$$\gamma^5(\not{k} + m_\psi)\gamma^5 = -\not{k} + m_\psi = -\not{l} - x\not{q} + m_\psi. \tag{67}$$

Koska \not{l} on l :n pariton funktio, se häviää integroinnissa koko liikemääräavaruuden yli ja siten osoittajaksi tulee

$$-x\not{q} + m_\psi. \tag{68}$$

Kaikkiaan siis saadaan

$$g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{x\not{q} - m_\psi}{(l^2 - \Delta)^2} = ig^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{x\not{q} - m_\psi}{(l_E^2 + \Delta)^2}, \tag{69}$$

missä on suoritettu Wickin rotaatio $l^0 \rightarrow il_E^0$. Tässä alaindeksi E viittaa siihen, että integraali on nyt 4-ulotteisen euklidisen avaruuden yli. Suoritetaan integraali dimensionaalista regularisointia käyttäen, eli siirrytään d -dimensioiseen Euklidiseen avaruuteen. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
&ig^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{x\not{q} - m_\psi}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\
&= -g^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \frac{x\not{q} - m_\psi}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \Delta^{\frac{d}{2}-2} \\
&= \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_\psi^2} \right) + \log \left(\frac{m_\psi^2}{\Delta} \right) \right) (x\not{q} - m_\psi),
\end{aligned} \tag{70}$$

missä $\epsilon = 4-d$, $\gamma_E \approx 0.5772$ on Euler-Mascheroni-vakio ja μ on mielivaltainen massan dimensionoinen parametri. Tämä jakautuu äärelliseen ja divergoivaan osaan, joista divergoiva osa on

$$\frac{ig^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_\psi^2} \right) \right) \left(\frac{1}{2}\not{q} - m_\psi \right), \quad (71)$$

ja äärellinen osa on

$$\frac{ig^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (x\not{q} - m_\psi) \log \left(\frac{m_\psi^2}{xm_\phi^2 + (1-x)m_\psi^2 - x(1-x)q^2} \right). \quad (72)$$

Käytetään nyt renormalisaatioehtoa

$$\left. \frac{d\Sigma_f}{d\not{q}} \right|_{\not{q}=m_\psi} = 0, \quad (73)$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Sigma_f}{d\not{k}} \right|_{\not{k}=m_\psi} &= \delta_f + \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{\gamma_E}{2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_\psi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx \left(x \log \left(\frac{m_\psi^2}{xm_\phi^2 + (1-x)^2m_\psi^2} \right) + \frac{2(1-x)m_\psi^2}{xm_\phi^2 + (1-x)^2m_\psi^2} \right) \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (74)$$

josta

$$\begin{aligned} \delta_f &= -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{\gamma_E}{2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_\psi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx \left(x \log \left(\frac{m_\psi^2}{xm_\phi^2 + (1-x)^2m_\psi^2} \right) + \frac{2(1-x)m_\psi^2}{xm_\phi^2 + (1-x)^2m_\psi^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (75)$$

Edelleen ehdosta

$$\Sigma_f(\not{q} = m_\psi) = 0 \quad (76)$$

saadaan

$$\begin{aligned} \Sigma_f(\not{q} = m_\psi) &= i\delta_f m_\psi - \delta_{m_\psi} - \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{\gamma_E}{2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_\psi^2} \right) m_\psi \right. \\ &\quad \left. + m_\psi \int_0^1 dx (1-x) \log \left(\frac{m_\psi^2}{xm_\phi^2 + (1-x)^2m_\psi^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (77)$$

missä l :n parittomat termit on jätetty pois, sillä ne häviävät integroinnissa koko liikemäärävaruuden yli. Suoritetaan nyt Wickin rotaatio $l^0 \rightarrow il_E^0$ ja siirrytään dimensioon d , jolloin integraali on kokonaisuudessaan

$$\begin{aligned}
& 4ig^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2 + x(1-x)q^2 + m_\psi^2}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\
&= \int_0^1 dx \frac{\mu^\epsilon 4ig^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{d}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \Delta^{\frac{d}{2}-1} + \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \Delta^{\frac{d}{2}-2} (x(1-x)q^2 + m_\psi^2) \right) \\
&= \frac{4ig^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left(-\left(1 - \frac{2}{\epsilon - 2}\right) \Delta + x(1-x)q^2 + m_\psi^2 \right) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \\
&= \frac{4ig^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left(\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right)\alpha - \Delta + \alpha \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_\psi^2}\right) - \alpha \log\left(1 - x(1-x)\frac{q^2}{m_\psi^2}\right) \right), \tag{83}
\end{aligned}$$

missä $\alpha = 3x(1-x)q^2 - m_\psi^2$. Toinen graafi on

$$-i\frac{1}{2}\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_\phi^2}. \tag{84}$$

Tehdään jälleen Wickin rotaatio ja siirrytään dimensioon d , jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
-i\frac{1}{2}\lambda\mu^\epsilon \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_E^2 + m_\phi^2} &= \frac{-i\lambda\mu^\epsilon}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(1)} (m_\phi^2)^{\frac{d}{2}-1} \\
&= \frac{i\lambda m_\phi^2}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + 2 + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_\phi^2}\right) \right). \tag{85}
\end{aligned}$$

Nyt renormalisaatioehto

$$\left. \frac{d\Sigma_s(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=m_\phi^2} = 0 \tag{86}$$

antaa

$$\delta_s = -\frac{4g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E \right) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_\psi^2}\right) + A \right), \tag{87}$$

missä

$$A = - \int_0^1 dx \left(3x(1-x) \log(1-x(1-x) \frac{m_\phi^2}{m_\psi^2}) - \frac{x(1-x)(3x(1-x)m_\phi^2 - m_\psi^2)}{m_\psi^2 - x(1-x)m_\phi^2} \right), \quad (88)$$

ja edelleen ehdosta

$$\Sigma_s(q^2 = m_\phi^2) = 0 \quad (89)$$

saadaan

$$\delta_{m_\phi} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\lambda m_\phi^2}{2} - 4g^2 m_\psi^2 \right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_\phi^2}\right) \right) + \frac{4g^2 A}{(4\pi)^2} + B, \quad (90)$$

missä

$$B = \frac{\lambda m_\phi^2}{(4\pi)^2} + \int_0^1 dx (3x(1-x)m_\phi^2 - m_\psi^2) \log(1-x(1-x) \frac{m_\phi^2}{m_\psi^2}). \quad (91)$$

Oleellista on nyt huomata, että δ_{m_ϕ} :n hallitseva osa on verrannollinen tekijään $\frac{\lambda m_\phi^2}{2} - 4g^2 m_\psi^2$. Tästä johtuen ϕ :n massakorjaus ei siis ole ainoastaan kerroin puutason massa m_ϕ , vaan se sisältää myös termin, joka lisätään puutason massa. Näin ollen skalaarihiukkasen massa ei ole suojassa säteilykorjauksilta, vaan pyrkii kasvamaan jokaisessa kertaluvussa. Tämä ilmiö ei ole ominainen ainoastaan tässä käsitellylle Yukawa-teorialle, vaan esiintyy aina, kun teoria sisältää fundamentaalisen skalaaripartikkelin. Toinen tapa nähdä tämä ilmiö, on tulkita teoria efektiiviseksi teoriaksi, joka pätee jonkun energiaskaalan Λ alapuolella. Tällöin skalaarihiukkasen massakorjaus δ_{m_ϕ} on cut-off-regularisatiossa verrannollinen tekijään Λ^2 . Standardimallin tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että jos tulkitaan standardimalli efektiiviseksi teoriaksi, jonka pätevyysalue päättyy skaalaan $\Lambda \sim 1$ TeV, on Higgsin hiukkasen massakorjaus $\delta_{m_H} \sim \Lambda^2$. Tällöin vaatii suurta hienosäätöä, jotta Higgsin hiukkasen massa saadaan pysymään satojen GeV:ien suuruusluokassa.

Skalaariseen Higgsin hiukkaseen liittyy myös muita luonteeltaan saman tyyppisiä ongelmia [23]. Näitä ovat niin kutsuttu hierarkiaongelma ja triviaalisuusongelma. Hierarkiaongelma syntyy siitä, että mikään ei selitä sähköheikon symmetriarikon energiaskaalan ja oletetun GUT-skaalan valtavaa suhteellista eroa. Triviaalisuusongelma syntyy, kun tarkastellaan Higgsin hiukkasen itsekytkennän kytkinvakion skaalaevoluutiota. Kytkinvakion voidaan

annetulla skaalalla μ arvioida olevan [13]

$$\lambda(\mu) \approx \frac{\lambda(\Lambda)}{1 + \frac{24}{16\pi^2} \lambda(\Lambda) \log \frac{\Lambda}{\mu}}. \quad (92)$$

tämä häviää kaikilla μ , kun $\Lambda \rightarrow \infty$. Siis on epäluonnollista, että Higgsin itsekytkentä on eri kuin nolla.

Higgsin hiukkaseen liittyviä ongelmia voidaan pyrkiä ratkaisemaan usealla eri tavalla. Supersymmetriset mallit [24] sisältävät suuren määrän standardimallin ulkopuolisia hiukkasia, jotka on järjestelty siten, että ongelmalliset kontribuutiot, kuten edellä esitetty skalaarihiukkasen massan säteilykorjaus, kumoutuvat.

Tekniväriteorioissa Higgsin hiukkanen ei ole alkeishiukkanen, vaan standardimallin ulkopuolisten hiukkasten, teknikvarkkien sidottu tila. Tällöin teoria ei sisällä lainkaan skalaarista alkeishiukkasta, eikä siten myöskään siihen liittyviä ongelmia. Tarkastellaan nyt lähemmin tekniväriteoriaa.

4 Tekniväri

Tekniväriteorioissa otetaan lähtökohdaksi standardimalli ilman Higgsin sektoria. Sen sähköheikko sektori koostuu siis $SU(2) \times U(1)$ -mittakentistä, jotka ovat lähtökohtaisesti massattomia. Teoriaan lisätään uusia fermioneja, joita nimitetään teknikvarkeiksi. Nämä kokevat uuden vahvan vuorovaikutuksen, jota kuvaa tekniväriyhmä $SU(N_{TC})$. Tämä vahva vuorovaikutus on luonteeltaan pitkälti QCD:n vahvan vuorovaikutuksen kaltainen. Se sitoo teknikvarkit kondensaatiksi, jonka muodostuminen rikkoo teknikvarkkien kiraalisymmetrian. Tämän symmetriarikon yhteydessä syntyy Goldstonen bosoneja, jotka absorboituvat sähköheikkojen mittabosonien massoiksi, ja siten rikkovat sähköheikon symmetrian. Tällöin siis sähköheikko symmetriarikko tapahtuu dynaamisesti, joka poistaa GWS-teoriassa esiintyvät hierarkia-triviaalisuus- ja luonnollisuusongelmat.

4.1 Minimaalinen tekniväriteoria

Tarkastellaan teoriaa, jossa on kaksi standardimallin ulkopuolista massatonta fermionia T ja B . Sijoitetaan nämä vasenkätiseen dublettiin ja kahteen oikeakätiseen singlettiin, kuten standardimallinkin fermionit,

$$\begin{aligned} Q_L^{TC} &= \begin{pmatrix} T \\ B \end{pmatrix}_L \\ Q_R^{TC} &= (T_R, B_R), \end{aligned} \tag{93}$$

ja annetaan näille hypervaraukset $Y_L = 0$, $Y_R = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Nämä kokevat vahvan vuorovaikutuksen, jonka generoi ryhmä $\mathcal{G}_{TC} = SU(N_{TC})$, missä N_{TC} on teknivärien määrä. Koska teknikvarkit ovat massattomia, ei teorian Lagrangin tiheydessä esiinny massatermejä

$$m^2(\bar{T}_L T_R + \bar{T}_R T_L)$$

tai

$$m^2(\bar{B}_L B_R + \bar{B}_R B_L).$$

Siten teoria on invariantti oikea- ja vasenkätisissä rotaatioissa, eli sillä on $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -kiraalisymmetria.

Rikotaan nyt kiraalisymmetria antamalla kenttäoperaattorille $\bar{T}T + \bar{B}B$ nollasta poikkeava vakuuodotusarvo

$$\langle \bar{T}T + \bar{B}B \rangle \neq 0. \tag{94}$$

Tällöin fysikaalinen vakuumi on enää invariantti rotaatioissa, joissa vasen- ja oikeakätiset rotaatiot ovat ekvivalentit. Tämä rikkoo $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -kiraalisymmetrian $SU(2)_{\text{Isospin}}$ -symmetriaksi. Siten syntyy kolme massatonta Goldstonen bosonia. Kutsutaan näitä teknipioneiksi ja merkitään niitä π_a^{TC} , $a = 1, 2, 3$. Teknipionien hajoamisvakio f_{TC} määritellään siten, että

$$\langle 0 | J_{5a}^\mu | \pi_b^{TC} \rangle = f_{TC} q^\mu \delta_{ab}, \quad (95)$$

missä $J_{5a}^\mu = \bar{Q} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} Q$, $a = 1, 2, 3$ ovat isospin-akσιαalivirrat.

Kytetään sähköheikon $SU(2)_L \times U(1)$ -teorian mittakentät teknikvarkkeihin. Nyt Higgsin kenttää ei ole, ja siten mittabosonit W^\pm , W^0 ja B ovat massattomia. Tarkastellaan W^\pm -bosonin propagaattoria. Se saa vakuumpolarisaatiokorjauksen

$$D_{W^\pm}(q) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2(1 - \Pi(q^2))}, \quad (96)$$

missä $\Pi(q^2)$ on vakuumpolarisaatio.

Vakuumpolarisaation määrittämiseksi tarkastellaan termiä

$$\Delta\mathcal{L} = g_2 W_\mu^\pm J^\mu, \quad (97)$$

missä g_2 on $SU(2)_L$ -kytkinvakio ja J^μ on isospin-virta, joka kytkee W :n teknikvarkkeihin. J^μ jakautuu vektori- ja akσιαaliosiin siten, että $J^\mu = J_V^\mu - J_A^\mu$. Näistä vain akσιαalivirta J_{5a}^μ tuottaa kontribuution W -propagaattorin napaan. Siksi voidaan rajoittua tutkimaan termiä

$$\Delta\mathcal{L}_a = -g_2 W_\mu^\pm J_{5a}^\mu. \quad (98)$$

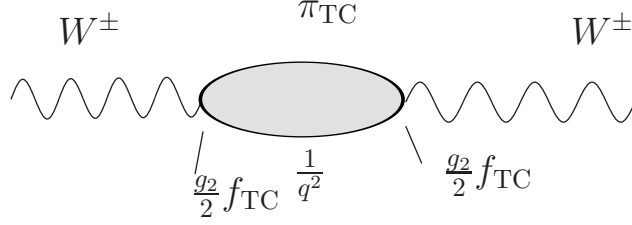
Kirjoitetaan nyt yhtälö (95) operaattorimuodossa

$$\frac{1}{2} \bar{Q}^{TC} \gamma^\mu \gamma^5 \tau^a Q^{TC} = f_{TC} \partial_\mu \pi_b^{TC} \delta^{ab}. \quad (99)$$

Tämän avulla termi (98) tulee muotoon

$$\Delta\mathcal{L}_a = -\frac{g_2}{2} f_{TC} W_\mu^\pm \partial^\mu \pi_a^{TC}, \quad (100)$$

josta päätellään, että Feynmanin sääntö W^\pm :n ja teknipionin kytkevälle ver-teksille on $\frac{g_2}{2} f_{TC} q^\mu$. Tämän avulla voidaan vakuumpolarisaatio lukea dia-grammista



Tästä saadaan vakuumpolarisaatioksi

$$\Pi(q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \frac{g_2^2 f_{TC}^2}{4q^2}. \quad (101)$$

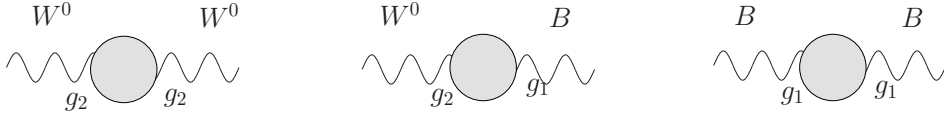
Siten W^\pm -propagaattori on

$$D_{W^\pm}(q) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 - \frac{g_2^2 f_{TC}^2}{4}}. \quad (102)$$

Tällä on napa pisteessä $q^2 = \frac{g_2^2 f_{TC}^2}{4}$ ja siten voidaan lukea W^\pm :n massa

$$m_W = \frac{g_2 f_{TC}}{2}. \quad (103)$$

Edelleen neutraaleille mittabosoneille W^0 ja B voidaan lukea massamatriisin alkiot vakuumpolarisaatiodiagrammeista



missä g_1 on $U(1)$ -kytkinvakio. Tästä saadaan

$$m^2 = \begin{pmatrix} g_2^2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \frac{f_{TC}^2}{4}. \quad (104)$$

Tämän ominaisarvot ovat 0 ja $(g_1^2 + g_2^2) \frac{f_{TC}^2}{4}$. Tulkitaan tämän matriisin ominaistilat fysikaalisiksi kentiksi Z^0 ja A , jolloin saadaan Z^0 :n ja fotonin γ massat

$$m_Z = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \frac{f_{TC}}{2} \quad (105)$$

$$m_\gamma = 0.$$

Jos nyt määritellään kuten standardimallissa

$$\frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \cos \theta_w, \quad (106)$$

saadaan Z^0 :n ja W^\pm :n massoille suhde

$$m_W = m_Z \cos \theta_w, \quad (107)$$

kuten standardimaalikin ennustaa. Tämä malli siis generoi mittabosoneille oikeat massat, kunhan vain teknipionien hajoamisvakio f_{TC} säädetään oikean suuruiseksi.

Tällä yksinkertaisella teknivärimallilla voitiin siis tuottaa oikea massaspektri standardimallin mittabosoneille ilman fundamentaalista skalaaripartikkeliä. Vastaavasti mittabosonien massaspektri voidaan tuottaa monipuolisemmilla teknivärimalleilla, joissa on useampi teknifermionisukupolvi. Tällöin kuitenkin rikkoutuva kiraalisymmetriaryhmä on suurempi, ja siten Goldstonen bosoneja, eli teknipioneja, syntyy enemmän. Edelleen kolme näistä häviää teoriasta mittabosonien massoiksi, mutta loput esiintyvät teoriassa fyysisinä hiukkasina [25, 26, 27]. Tällaisen teorian täytyy siis jotenkin selittää miksi näitä hiukkasia ei ole havaittu tähänastisissa kokeissa. Tämä voidaan saada aikaiseksi lisäämällä teoriaan mekanismi, joka generoi näille hiukkasille riittävän suuret massat.

4.2 Laajennettu tekniväri

4.2.1 Fermionien ja teknipionien massat

Standardimallissa Higgsin kenttä luo massat sekä mittabosoneille, että fermioneille. Edellä kuvatun kaltainen tekniväriteoria pystyi generoimaan mittabosonien massat, mutta se ei sisällä mekanismeja fermionien massojen luomiseksi. Fermionien massatermi saataisiin aikaiseksi kirjoittamalla teoriaan nelifermionivuorovaikutus

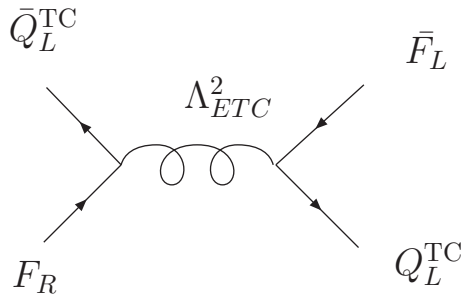
$$\sim \bar{F}_L F_R \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC}, \quad (108)$$

joka kytkee standardimallin fermionit ja teknifermionit toisiinsa. Tässä F_L ja F_R kuvaavat standardimallin fermionikenttiä, ja Q_L^{TC} ja Q_R^{TC} teknikvarkikenttiä. Kun teknikvarkkien kiraalisymmetria on rikottu, ne muodostavat kondensaatin $\langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle$, jolloin termi (108) tulee muotoon

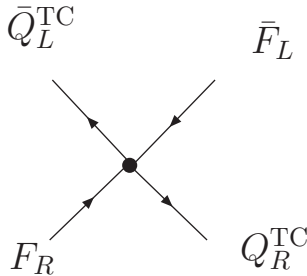
$$\sim \langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle \bar{F}_L F_R. \quad (109)$$

Tämä on tavallinen Diracin massatermi standardimallin fermionille F . Tällainen termi on kuitenkin ei-renormalisoituva. Siksi sen on oltava seurausta jostain korkeamman energiaskaalan prosessista.

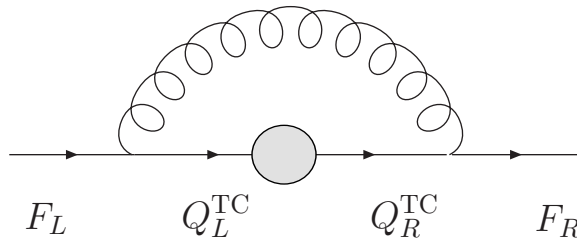
Nelifermionivuorovaikutus matalalla energiaskaalalla saadaan efektiivisesti aikaiseksi, kun asetetaan tekniväriyhmä \mathcal{G}_{TC} laajennetun tekniväriyhmän \mathcal{G}_{ETC} aliryhmäksi. Tässä mallissa ETC -mittasymmetria rikkoutuu jollain korkealla energiaskaalalla Λ_{ETC} teknivärien mittasymmetriaksi. Laajennettu tekniväri sisältää uuden mittabosonin, joka kytkee teknikvarkit ja standardimallin fermionit toisiinsa diagrammin



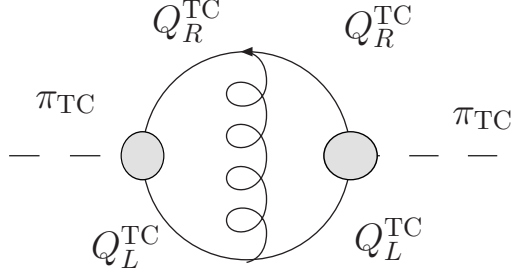
välityksellä. Koska tämä mittabosoni on hyvin massiivinen, voidaan tyypillisillä energiaskaaloilla $q^2 \ll \Lambda_{ETC}^2$ tätä vuorovaikutusta hyvin aproksimoida Fermi nelipistevuorovaikutuksella



Näin ollen teoriassa esiintyy efektiivinen nelifermionivuorovaikutus teknikvarkkien ja standardimallin fermionien välillä, joka luo fermioneille massan. Näin syntyneen massatermin skaala voidaan määrittää graafista



Tässä harmaa pallo kuvaa teknifermionin dynaamista massaa. Myös tekni-
pioneille saadaan massa ETC -vuorovaikutuksen kautta. Sen generoi graafi



Edellä olevista graafeista voidaan lukea standardimallin fermionin massas-
kaala

$$m_f \sim \frac{g_{ETC}^2}{\Lambda_{ETC}^2} \langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{ETC}, \quad (110)$$

missä $\langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{ETC}$ on teknikvarkkikondensaatin arvo ETC -skaalassa ja g_{ETC} on ETC -kytkinvakio. Vastaavasti tekni-
pionin massaskaala on

$$m_{\pi_{TC}}^2 \sim \frac{g_{ETC}^2}{f_{TC}^2 \Lambda_{ETC}^2} \langle (\bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC})^2 \rangle_{ETC}. \quad (111)$$

Teknikvarkkikondensaatin arvo ETC -skaalassa saadaan sen arvosta TC -
symmetriarikon skaalassa yhtälöstä [28]

$$\langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{ETC} = \langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{TC} \exp \left(\int_{\Lambda_{TC}}^{\Lambda_{ETC}} d\mu \frac{\gamma_m(\mu)}{\mu} \right), \quad (112)$$

missä γ_m on operaattorin $\bar{Q}Q$ anomalinen dimensio. Jos $\gamma_m \ll 1$, on tällöin

$$\langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{ETC} \approx \langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{TC}. \quad (113)$$

QCD:n skaalauksesta voidaan arvioida, että

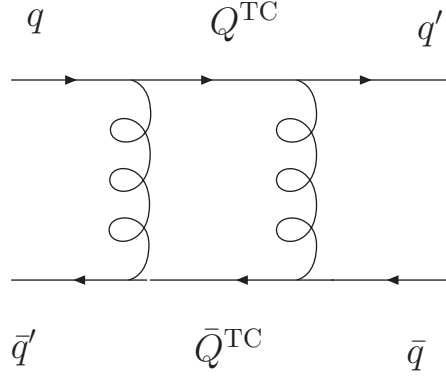
$$\langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{TC} \approx 4\pi f_{TC}^3, \quad (114)$$

joten yhtälöstä (111) saadaan tekni-
pionin massalle arvio

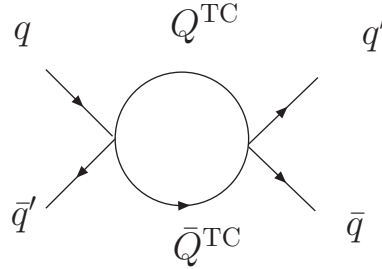
$$m_{\pi_{TC}}^2 \sim \frac{(4\pi)^2 g_{ETC}^2 f_{TC}^4}{\Lambda_{ETC}^2}. \quad (115)$$

4.2.2 Makua muuttava neutraali virta

Fermionien massojen tuottamiseksi lisätyn ETC -vuorovaikutuksen välttämättömän seurauksena on makua muuttavan neutraalin virran prosessit. Nämä syntyvät diagrammista



missä q ja q' ovat eri sukupolven kvarkkeja. Tätä diagrammia voidaan jälleen aproksimoida nelifermionivuorovaikutuksella, jolloin saadaan efktiivinen diagrammi



Tämä luo teoriaan vuorovaikutuksen

$$\mathcal{L}_{qq'} = \frac{g_{ETC}^2 V_{qq'}^2}{\Lambda_{ETC}^2} \bar{q} \Gamma^\mu q' \bar{q}' \Gamma'_\mu q + \text{h.c.} , \quad (116)$$

missä $V_{qq'}$ on kvarkkisukupolvien q ja q' sekoitustekijä, jonka oletetaan olevan vastaavan Cabibbo-kulman luokkaa. Γ^μ ja Γ'^μ ovat ETC -verteksiin liittyvät kiraalisuusmatriisit, $\Gamma^\mu \sim \gamma^\mu(1 - \gamma^5)$. Tästä voidaan suoraan laskea arvio neutraalin kaonin massaeroon ΔM_K , kun asetetaan $q = d$, $q' = s$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \Delta M_K &= \frac{g_{ETC}^2 V_{ds}^2}{M_K \Lambda_{ETC}^2} \langle K^0 | \bar{d} \Gamma^\mu s \bar{d}' \Gamma'_\mu s | \bar{K}^0 \rangle + \text{c.c.} \\ &\approx \frac{g_{ETC}^2 \text{Re}(V_{ds}^2)}{\Lambda_{ETC}^2} f_K^2 M_K, \end{aligned} \quad (117)$$

missä on arvioitu $\langle \Omega | \bar{d} \gamma_\mu \gamma^5 s | \bar{K}^0(p) \rangle = i\sqrt{2} f_K p_\mu$.² Tässä $\langle \Omega |$ on fysikaalinen vakuumi ja f_K on K-mesonin hajoamisvakio $f_K \approx 110$ MeV. Kokeellisesti [30] tiedetään, että $\Delta M_K \approx 3,5 \times 10^{-18}$ TeV, josta seuraa, että

$$\frac{\Lambda_{ETC}}{g_{ETC} \sqrt{Re(V_{ds}^2)}} \geq 1300 \text{ TeV}. \quad (118)$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (115), saadaan teknipionin massalle yläraja

$$m_{\pi_{TC}} \leq \frac{4\pi f_{TC}^2}{\sqrt{Re(V_{ds}^2)} \times 1300 \text{ TeV}}, \quad (119)$$

joka realistisilla V_{ds} :n ja f_{TC} :n arvoilla $V_{ds} \sim 0.1$, $f_{TC} \sim 250$ GeV antaa ylärajaksi

$$m_{\pi_{TC}} \lesssim 10 \text{ GeV}. \quad (120)$$

Tämä on selvästi liian pieni massa, jotta tällaista hiukkasta ei olisi jo havaittu tähänastisissa kokeissa. Jotta teknipionit voisivat olla massiivisempia, tulisi ETC -skaalan Λ_{ETC} olla selvästi pienempi. Vaatimus makua muuttavan neutraalin virran heikkoudesta ja toisaalta teknipionien massiivisuudesta antavat siis ristiriitaisia vaatimuksia skaalan Λ_{ETC} suuruudelle.

4.3 Kävelevä tekniväri

Edellä teknipionin massaa arvioitaessa oletettiin yhtälössä (112), että $\gamma_m \ll 1$. Tämä johti ongelmiin yhdessä makua muuttavan neutraalin virran kanssa. Ongelma voidaan ratkaista antamalla TC-kytkinvakion α_{TC} pysyä lähes vakiona energiaskaalojen Λ_{TC} ja Λ_{ETC} välisellä alueella. Tekniväriteoriaa, jossa kytkinvakion skaalaevoluutio on hidasta, kutsutaan käveleväksi tekniväriksi. Tällöin siis teorian β -funktio $\beta(\mu) \ll 1$, kun $\Lambda_{TC} \leq \mu \leq \Lambda_{ETC}$, ja $\gamma_m \approx 1$ [31]. Siten yhtälöstä (112) saadaan

$$\begin{aligned} \langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{ETC} &\approx \langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{TC} \exp \left(\int_{\Lambda_{TC}}^{\Lambda_{ETC}} d\mu \frac{1}{\mu} \right) \\ &= \frac{\Lambda_{ETC}}{\Lambda_{TC}} \langle \bar{Q}_L^{TC} Q_R^{TC} \rangle_{TC}. \end{aligned} \quad (121)$$

Tällöin yhtälö (115) tulee muotoon

$$m_{\pi_{TC}}^2 \sim \frac{(4\pi)^2 g_{ETC}^2 f_{TC}^4}{\Lambda_{ETC}^2} \frac{\Lambda_{ETC}^2}{\Lambda_{TC}^2}, \quad (122)$$

²Niin sanottu vakuumisaturaatioapproksimaatio [29]

ja siten makua muuttavan neutraalin virran suuruusluokasta saatu arvio (118) antaa, samoin argumentein kuin edellä, teknipionin massan ylärajaksi

$$m_{\pi_{TC}} \leq \frac{4\pi f_{TC}^2}{\sqrt{Re(V_{ds}^2)} \times 1300\text{TeV}} \frac{\Lambda_{ETC}}{\Lambda_{TC}}. \quad (123)$$

Jos kytkinvakio α_{TC} kävelee esim. kahden kertaluokan yli, eli jos

$$\frac{\Lambda_{ETC}}{\Lambda_{TC}} \sim 10^2, \quad (124)$$

on yhtälön (123) yläraja nyt samoin oletuksin V_{ds} :n ja f_{TC} :n arvoille kuin edellä

$$m_{\pi_{TC}} \lesssim 1 \text{ TeV}. \quad (125)$$

Tämä massa on jo riittävän suuri, jotta tällaista hiukkasta ei olisi havaittu tähänastisissa kokeissa. Kävelevässä teknivärimallissa voidaan siis sovittaa yhteen toisaalta makua muuttavan neutraalin virran heikkous, ja toisaalta teknipionien riittävän suuri massa.

4.3.1 faasidiagrammi

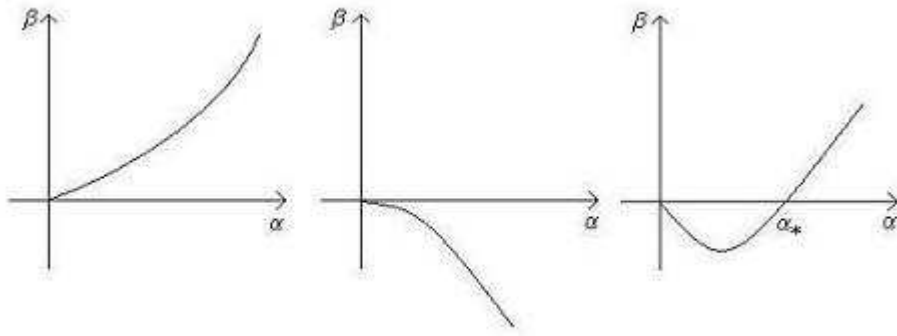
Pyritään sitten konstruoimaan tällainen kävelevä teknivärimalli. Jotta annettu tekniväriteoria olisi kävelevä, täytyy sen toteuttaa muutamia ehtoja. Ensimmäkin, teorian β -funktiolla pitää olla ei-triviaali nollakohta kytkinvakion arvolla $\alpha_* \neq 0$. Jotta teoria olisi asympotoottisesti vapaa, on β -funktion ensimmäisessä kertaluvussa oltava negatiivinen, ts. $\beta_0 < 0$. Jos kuitenkin toisen kertaluvun kerroin on positiivinen, eli $\beta_1 > 0$, voi β -funktiolla olla tällainen ei-triviaali nollakohta. Kuvassa 3 on skemaattisesti esitettyinä erityyppisiä β -funktioita.

Toinen huomioitava seikka on kondensaatin $\langle \bar{Q}Q \rangle$ muodostuminen ja siten kiraalisymmetrian rikkoutuminen. Tämä tapahtuu jollakin juoksevan kytkinvakion arvolla α_c . Oleellista on nyt näiden arvojen järjestys energiaskaalalla. Niin kauan, kun β -funktio pysyy negatiivisena, kasvaa kytkinvakio α siirryttäessä energia-akselilla kohti matalampaa energiaa. Jos α_c saavutetaan ensin, teknifermionit kondensoituvat, jolloin teorian β -funktio muuttuu kiraalisen symmetrian rikkoutumisen vuoksi. Tällöin oletetaan, että β_1 :n arvo muuttuu negatiiviseksi ja siten kiintopistettä, jossa $\beta \approx 0$ ei saavuteta. Tällöin siis teoria ei ole kävelevä. Jos taas α_* saavutetaan ensin, β -funktio saavuttaa arvon 0, jolloin kytkinvakion evoluutio pysähtyy. Näin ollen kytkinvakio ei koskaan saavuta arvoa α_c , ja kiraalinen symmetria ei rikkoudu. Tällöin ei myöskään synny Goldstonen bosoneja, ja heikot mittabosonit jäävät massattomiksi. Kävelevän tekniväriteorian siis täytyy olla sellainen, jossa $\alpha_* \approx \alpha_c$.

Kriittisen kytkinvakion α_c arvolle voidaan johtaa arvio [32]

$$\alpha_c = \frac{2\pi N}{3C_2(\mathbf{R})}, \quad (126)$$

missä $C_2(\mathbf{R})$ on tekniväriyhmän $SU(N)$ esityksen \mathbf{R} neliöllinen Casimir-operaattori.



Kuva 3. Vasemmanpuoleisessa kuvassa sekä β_0 , että β_1 ovat positiivisia. Siten β -funktio on positiivinen kaikilla kytkinvakion arvoilla. Tällöin teoria ei ole asympotoottisesti vapaa, eikä sillä ole ei-triviaalia kiintopistettä. Keskimmäisessä kuvassa sekä β_0 , että β_1 ovat negatiivisia. Siten β -funktio on negatiivinen kaikilla kytkinvakion arvoilla. Tällöin teoria on asympotoottisesti vapaa, mutta sillä ei ole ei-triviaalia kiintopistettä. Oikean puoleisessa kuvassa β_0 on negatiivinen ja β_1 positiivinen. Siten β -funktio on negatiivinen pienillä kytkinvakion arvoilla, ja positiivinen suurilla. Tällöin teoria on asympotoottisesti vapaa, ja sillä on ei-triviaali kiintopiste α_* .

Tutkitaan nyt tekniväriteoriaa, jossa on N_f teknikvarkkia ja N tekniväriä, eli tekniväriyhmä on $SU(N)$. Tällaisen teorian β -funktio on kaksisilmukkas tasolla [33]

$$\beta(g) = \beta_0 \frac{g^3}{(4\pi)^2} + \beta_1 \frac{g^5}{(4\pi)^4}, \quad (127)$$

missä

$$2N\beta_0 = -\frac{11}{3}C_2(\mathbf{G}) + \frac{4}{3}T(\mathbf{R}) \quad (128)$$

ja

$$(2N)^2\beta_1 = -\frac{34}{3}C_2^2(\mathbf{G}) + \frac{20}{3}C_2(\mathbf{G})T(\mathbf{R}) + 4C_2(\mathbf{R})T(\mathbf{R}). \quad (129)$$

Tässä siis $C_2(\mathbf{R})$ on esityksen \mathbf{R} neliöllinen Casimir-operaattori, jolle pätee

$$T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^a = C_2(\mathbf{R}), \quad (130)$$

missä T_R^a ovat ryhmän generaattorit esityksessä R. Vastaavasti $C_2(G)$ on liittoaesityksen G neliöllinen Casimir-operaattori, ja $T(R)$ on esityksen R indeksi, jolle pätee [34]

$$N_f C_2(R) d(R) = T(R) d(G), \quad (131)$$

missä $d(R)$ on esityksen R ja $d(G)$ liittoaesityksen G dimensio.

Kuten edellä on kuvattu, teoria voi olla asymptoottisesti vapaa, jos β_0 on negatiivinen. Asettamalla $\beta_0 = 0$, saadaan yhtälöistä (128) ja (131) yläraja teknikvarkkien määrälle

$$N_f^{\text{af}} = \frac{11}{4} \frac{d(G) C_2(G)}{d(R) C_2(R)}. \quad (132)$$

Tätä suuremmalla määrällä teknikvarkkimakuja teoria ei ole asymptoottisesti vapaa.

Jotta β -funktiolla olisi ei-triviaali nollakohta, eli infrapunakiintopiste, täytyy β_1 :n olla positiivinen. Siten asettamalla $\beta_1 = 0$, saadaan yhtälöistä (129) ja (131) alaraja teknikvarkkien määrälle

$$N_f^{\text{ir}} = \frac{d(G) C_2(G)}{d(R) C_2(R)} \frac{17 C_2(G)}{10 C_2(G) + 6 C_2(R)}. \quad (133)$$

Tätä pienemmällä määrällä teknikvarkkeja teoria ei sisällä infrapunakiintopistettä.

Yhtälöstä (127) voidaan ratkaista teorian infrapunakiintopiste, kun asetaan $\beta(g) = 0$. Tällöin saadaan

$$\alpha_* = \frac{g_*^2}{4\pi} = -4\pi \frac{\beta_0}{\beta_1}. \quad (134)$$

Siten asettamalla $\alpha_* = \alpha_c$, saadaan yhtälöistä (126) ja (134) teknikvarkkien määrälle kriittinen arvo, jonka yläpuolella teoria on konformaalinen

$$N_f^c = \frac{d(G) C_2(G)}{d(R) C_2(R)} \frac{17 C_2(G) + 66 C_2(R)}{10 C_2(G) + 30 C_2(R)}. \quad (135)$$

$SU(N)$:n perusesityksessä F oleelliset ryhmäteoreettiset suureet ovat

$$\begin{aligned} d(F) &= N, \\ C_2(F) &= N^2 - 1, \end{aligned} \quad (136)$$

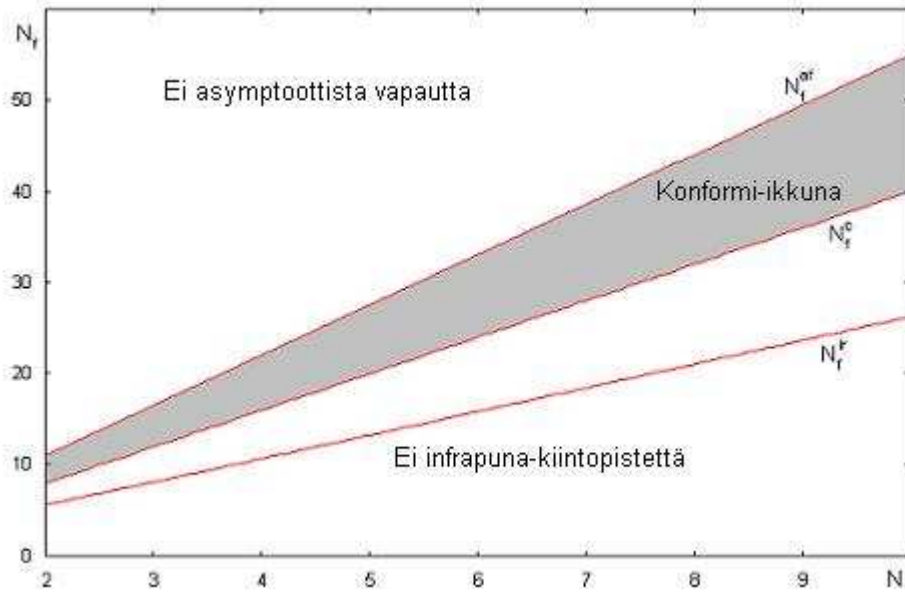
ja liittoaesitykselle G

$$\begin{aligned} d(G) &= N^2 - 1, \\ C_2(G) &= 2N^2. \end{aligned} \quad (137)$$

Siten yhtälöistä (132), (133) ja (135) saadaan

$$\begin{aligned} N_f^{af} &= \frac{11}{2}N, \\ N_f^{ir} &= \frac{34N^3}{13N^2 - 3}, \\ N_f^c &= \frac{2}{5}N \frac{50N^2 - 33}{5N^2 - 3}. \end{aligned} \tag{138}$$

Kuvassa 4 on esitetty nämä arvot teknivärien määrän N funktiona.



Kuva 4 $SU(N)$:n perusesityksen faasidiagrammi. Ylimmässä alueessa $\beta_0 > 0$ ja teoria ei ole asymptoottisesti vapaa. Alimmassa alueessa $\beta_1 < 0$ ja teoriassa ei ole infrapunakiintopistettä. Harmaalla merkitty alue on ns. konformi-ikkuna, jossa $N_f^c \leq N_f \leq N_f^{af}$. Tämän alueen alarajalla teorian odotetaan olevan kävelevä.

Perusesityksessä tarvittavien teknikvarkkien määrä on siis varsin suuri. Esimerkiksi $SU(2)$:n tapauksessa tarvitaan $N_f \geq 8$ ja $SU(3)$:n tapauksessa jo $N_f \geq 12$.

4.4 Sähköheikot tarkkuusmittaukset

Standardimallin ennusteita voidaan kokeellisesti testata hyvin tarkasti niin kutsuttujen sähköheikkojen tarkkuusmittausten avulla. Standardimallin ulkopuolisten hiukkasten vaikutusta näille mittauksille saataviin ennusteisiin

voidaan kuvata kolmella parametrilla, S , T ja U . Nämä määritellään siten, että standardimallissa $S = T = U = 0$, ja näiden poikkeama nolasta kuvaa uuden fysiikan osuutta sähköheikkojen tarkkuusmittausten tuloksiin. Parametrit S , T ja U voidaan määritellä sähköheikon teorian mittabosonien vakuumpolarisaatioiden avulla. Merkitään nyt vakuumpolarisaatiota

$$\text{Diagram} = \Pi_{IJ}^{\mu\nu},$$

missä I ja J ovat γ , Z^0 , W^+ tai W^- . Jaetaan tämä sitten tensorirakenteensa mukaan

$$\Pi_{IJ}^{\mu\nu}(q) = \Pi_{IJ}(q^2)g^{\mu\nu} + \Delta(q^2)q^\mu q^\nu. \quad (139)$$

$\Delta(q^2)$ ei ole sähköheikkojen tarkkuusmittausten kannalta oleellinen. Laskujen helpottamiseksi määritellään nyt Π_{IJ} :tä vastaavat vakuumpolarisaatiot rikkoutumattoman sähköheikon faasin ominaiskannassa, eli kvanttilukujen T^1 , T^3 ja Q avulla. Nämä liittyvät mittabosonien massan ominaiskannassa määritelyihin vakuumpolarisaatioihin seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma\gamma} &= e^2 \Pi_{QQ}, \\ \Pi_{\gamma Z} &= \frac{e^2}{s_W c_W} (\Pi_{3Q} - s_W^2 \Pi_{QQ}), \\ \Pi_{ZZ} &= \frac{e^2}{s_W^2 c_W^2} (\Pi_{33} - 2s_W^2 \Pi_{3Q} + s_W^4 \Pi_{QQ}), \\ \Pi_{WW} &= \frac{e^2}{s_W^2} \Pi_{11}. \end{aligned} \quad (140)$$

Tässä $s_W = \sin \theta_W$ ja $c_W = \cos \theta_W$. Sähkövarauksen Q asemasta voidaan käyttää kvanttilukuna myös heikkoa hypervarausta Y . Tällöin

$$\Pi_{3Y} = 2(\Pi_{3Q} - \Pi_{33}) \quad (141)$$

Näiden avulla parametrit S , T ja U voidaan määritellä seuraavasti [35, 36]:

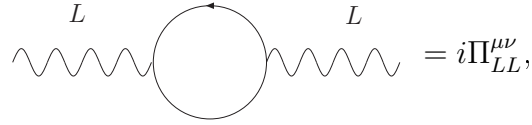
$$\begin{aligned} S &= -16\pi \frac{\Pi_{3Y}(m_Z^2) - \Pi_{3Y}(0)}{m_Z^2}, \\ T &= 4\pi \frac{\Pi_{11}(0) - \Pi_{33}(0)}{s_W^2 c_W^2 m_Z^2}, \\ U &= 16\pi \frac{(\Pi_{11}(m_Z^2) - \Pi_{11}(0)) - (\Pi_{33}(m_Z^2) - \Pi_{33}(0))}{m_Z^2}. \end{aligned} \quad (142)$$

S -parametri kuvaa uuden fysiikan aiheuttamaa vakuumpolarisaation skaalaevoluutiota, kun taas T -parametri kuvaa $SU(2)$ -isospinsymmetrian rikkoutumista. U on verrannollinen T :n derivaattaan, ja siten yleensä T :n ollessa pieni on myös U pieni. Tyypillisesti tekniväriteorioissa T ja U ovat hyvin lähellä nollaa S :n muodostuessa ongelmalliseksi. Määritellään edelleen yleiset vakuumpolarisaatiotensorit $\Pi_{LL}^{\mu\nu}$ ja $\Pi_{LR}^{\mu\nu}$ siten, että $\Pi_{LL}^{\mu\nu}$ kytkee kaksi vasenkätistä virtaa ja $\Pi_{LR}^{\mu\nu}$ vasen- ja oikeakätisen virran, ja jaetaan nämäkin vastaavalla tavalla tensorirakenteensa mukaan kuin edellä.

Näiden avulla voidaan laskea uuden fermionidubletin vaikutus parametriin S perusesityksessä. Tarkastellaan siis kahta uutta fermionia u ja d . Annetaan nyt oikeakätiselle fermionille d_R hypervaraus Y_d^R ja asetetaan toisen oikeakätisen fermionin u_R hypervaraus nolllaksi. Olkoon vasenkätisten fermionien hypervaraukset $Y_u^L = Y_d^L =: Y^L$. Tällöin

$$\Pi_{3Y} = \frac{1}{2}Y^L(\Pi_{LL}^d - \Pi_{LL}^u) - \frac{1}{2}Y_d^R\Pi_{LR}^u. \quad (143)$$

Määritetään sitten Π_{LL} .



jossa

$$i\Pi_{LL}^{\mu\nu} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}(i\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)i(\not{k} + m)i\gamma^\nu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)i(\not{k} + \not{q} + m))}{(k^2 - m^2)((k + q)^2 - m^2)}. \quad (144)$$

Tässä jälki on

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(i\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)i(\not{k} + m)i\gamma^\nu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)i(\not{k} + \not{q} + m)) \\ &= 8(k^\mu(k + q)^\nu + k^\nu(k + q)^\mu - k \cdot (k + q)g^{\mu\nu} - k_\alpha(k + q)_\beta \epsilon^{\beta\mu\alpha\nu}), \end{aligned}$$

ja Feynmanin parametrien avulla nimittäjä tulee muotoon

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)((k + q)^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2},$$

missä $l = k + xq$ ja $\Delta = -x(1-x)q^2 + m^2$. Tällä muuttujanvaihdolla osoittaja on

$$\begin{aligned} & k^\mu(k + q)^\nu + k^\nu(k + q)^\mu - k \cdot (k + q)g^{\mu\nu} - k_\alpha(k + q)_\beta \epsilon^{\beta\mu\alpha\nu} \\ &= \left(\frac{2}{d} - 1\right)l^2 g^{\mu\nu} + x(1-x)q^2 g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

missä on jätetty pois termit, jotka eivät ole verrannollisia metriseen tensoriin $g^{\mu\nu}$. Siten

$$\begin{aligned} i\Pi_{LL} &= -2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(\frac{2}{d} - 1)l^2 + x(1-x)q^2}{(l^2 - \Delta)^2} \\ &= -\frac{2i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (2x(1-x)q^2 - m^2) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right) \right). \end{aligned} \quad (145)$$

Vastaavasti

$$i\Pi_{LR}^{\mu\nu} = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}(i\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)i(\not{k} + m)i\gamma^\nu \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)i(\not{k} + \not{q} + m))}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)}, \quad (146)$$

josta saadaan

$$i\Pi_{LR} = -\frac{2i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx m^2 \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right) \right). \quad (147)$$

Siten

$$\Pi_{LL}(m_Z^2) - \Pi_{LL}(0) = -\frac{4}{(4\pi)^2} \left(\frac{m_Z^2}{6} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) \right) - \frac{m_Z^2}{12} \right), \quad (148)$$

missä on arvioitu $m^2 \gg m_Z^2$. Edelleen

$$\Pi_{LR}(m_Z^2) - \Pi_{LR}(0) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{m_Z^2}{3}. \quad (149)$$

Siten yhtälöistä (143), (148) ja (149) saadaan

$$\Pi_{3Y}(m_Z^2) - \Pi_{3Y}(0) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{m_Z^2}{6} \left(Y^L \log\left(\frac{m_d^2}{m_u^2}\right) - \frac{1}{2} Y_d^R \right), \quad (150)$$

ja siten yhtälön (142) mukaisesti

$$S = \frac{1}{6\pi} \left(Y^L \log\left(\frac{m_d^2}{m_u^2}\right) - \frac{1}{2} Y_d^R \right). \quad (151)$$

Jos nyt asetetaan kuten esim standardimallin leptoneille, $Y^L = -1$ ja $Y_d^R = -2$, ja oletetaan, että uudet fermionit ovat saman massaisia, eli $m_u = m_d$, saadaan S :n arvoksi $S = \frac{1}{6\pi}$. Tekniväriteoriassa uusia fermionidubletteja

on $\frac{N_f}{2}d(\mathbf{R})$ kappaletta, joista kukin aiheuttaa S :ään edellä kuvatun kontribuution. Siten tekniväriteoriassa

$$S = \frac{1}{6\pi} \frac{N_f}{2} d(\mathbf{R}). \quad (152)$$

Edellä nähtiin, että kävelevän teorian rakentamiseksi tarvitaan $SU(2)$:n tapauksessa vähintään 8 ja $SU(3)$:n tapauksessa vähintään 12 kvarkkia, kun ollaan $SU(N)$:n perusesityksessä. Tällöin $d(\mathbf{R}) = N$, joten $SU(2)$ -teoriassa $S = \frac{4}{3\pi} \approx 0.42$ ja $SU(3)$ -teoriassa $S = \frac{3}{\pi} \approx 0.95$. Kokeellisesti [30] $S \lesssim 0.2$, joten nämä arvot ovat liian suuria. Kävelevä tekniväriteoria ei siis voi olla $SU(N)$, jossa fermionit ovat perusesityksessä. Jos teknikvarkit ovat $SU(N)$:n jossain korkeammassa esityksessä, niitä saatetaan kuitenkin tarvita vähemmän. Tästä syystä voisi olla järkevää tutkia tällaista tekniväriteoriaa. Tarkastellaan kuitenkin ensin joitakin anomaliaita, jotka rajoittavat mahdollisten teorioiden valikoimaa.

4.5 Anomalioiden kumoutuminen

4.5.1 Wittenin anomalia

Niin kutsuttu Wittenin anomalia esiintyy teorioissa, joissa heikon vuorovaikutuksen $SU(2)$ -kenttään kytketään pariton määrä fermionidubletteja [37]. Johtuen $SU(2)$:n topologiasta, funktionaali-integraalia yli parittoman määrän fermionikenttiä ei voida järkevästi määrittellä. Standardimalli sisältää parillisen määrän vasenkätisiä fermionidubletteja, joten siinä ei esiinny Wittenin anomaliaa. Tästä syystä minkä tahansa laajennuksen standardimalliin tulee olla sellainen, että se ei itsessään sisällä Wittenin anomaliaa. Siis jos standardimalliin halutaan lisätä fermioneja, jotka kytketään heikkoon vuorovaikutukseen vasenkätisenä dublettina, tulee näitä dubletteja olla parillinen määrä.

Tekniväriteorian kannalta tämä tarkoittaa sitä, että joko teknikvarkkidubletteja on oltava parillinen määrä, eli oltava $\frac{1}{2}N_f d(\mathbf{R}) =$ parillinen, tai sitten teoriaan on lisättävä teknikvarkkien lisäksi muitakin fermioneja siten, että uusien fermionidublettien määrä yhteensä on parillinen. Jälkimmäisessä tapauksessa eräs luonnollinen kandidaatti uudeksi fermionidubletiksi olisi uusi leptonisukupolvi.

4.5.2 Mitta-anomaliat

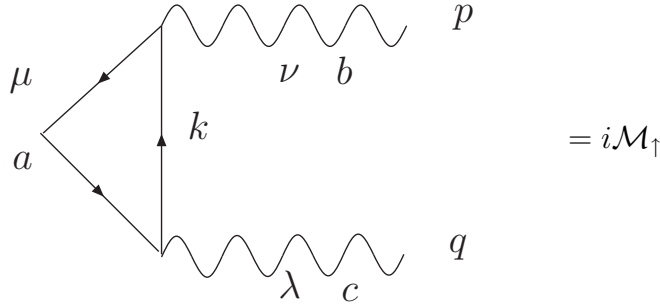
Klassisesti teorian invarianssista jonkin muunnoksen suhteen seuraa Noetherin teoreeman mukaisesti säilyvä virta. Kuitenkin laskettaessa teoriaa korkeampaan kertalukuun, saattavat säteilykorjaukset tuottaa virran säilymis-

tä rikkovia termejä. Tällaisia ilmiöitä kutsutaan mitta-anomalioksi. Hyvin määritellyssä teoriassa mitta-anomalioiden tulee kumoutua siten, että mitta-symmetrian perusteella odotettu virran säilyminen pätee säteilykorjauksista huolimatta. Standardimallin kannalta oleellisin anomalia on niin kutsuttu aksiaalivirta-anomalia.

Tutkitaan nyt yleisesti teoriaa, jossa kytketään massattomia fermioneja johonkin ei-abeliseen mittakenttään. Standardimallin fermionit ovat useimmissa tilanteissa hyvänä approksimaationa massattomia, joten tämän anomalian kumoutuminen standardimallissa ja sen mahdollisissa laajennuksissa on oleellista. Koska fermionit ovat massattomia, ei teoria sisällä termejä, jotka sekoittavat vasen- ja oikeakätisiä fermioneja keskenään. Siten vasen- ja oikeakätisten virtojen oletetaan säilyvän erikseen. Nämä virrat voidaan myös ilmoittaa vektori- ja aksiaalivirtojen lineaarikombinaationa. Tästä seuraa, että myös vektori- ja aksiaalivirtojen tulee säilyä erikseen. Tulee siis olla

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^{\mu a} &= 0 \\ \partial_\mu j^{\mu 5a} &= 0,\end{aligned}\tag{153}$$

missä $j^{\mu a} = \bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi$ on vektorivirta ja $j^{\mu 5a} = \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^5 t^a \psi$ on aksiaalivirta. Vektorivirran divergenssi on nolla, mutta aksiaalivirtaan liittyy anomalin nollasta poikkeava divergenssi. Tutkitaan nyt diagrammia



missä verteksi kolmion kärjessä kuvaa aksiaalivirtaa $j^{\mu 5a}$, ja ulkoiset kentät ovat teorian mittakenttiä, sekä vastaavaa diagrammia $i\mathcal{M}_\uparrow$, jossa fermionivirta kiertää toiseen suuntaan. Tässä t^a on teorian ei-abelisen mittakentän generaattori. Nyt

$$\begin{aligned}i\mathcal{M}_\uparrow &= -(ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \gamma^5 t^a \frac{i(\not{k} - \not{p})}{(k-p)^2} \gamma^\nu t^b \frac{i\not{k}}{k^2} \gamma^\lambda t^c \frac{i(\not{k} + \not{q})}{(k+q)^2} \right) \\ &= -ig^2 \text{Tr}(t^a t^b t^c) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \gamma^5 \frac{\not{k} - \not{p}}{(k-p)^2} \gamma^\nu \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\lambda \frac{\not{k} + \not{q}}{(k+q)^2} \right).\end{aligned}\tag{154}$$

Jos kytkentä mittakenttiin sisältää termin γ^5 , ei tällä ole merkitystä, sillä γ^5 :t voidaan järjestää vierekkäin ja $(\gamma^5)^3 = \gamma^5$. $i\mathcal{M}_\downarrow$ on sama lauseke, jossa on vaihdettu $(p, \nu, b) \leftrightarrow (q, \lambda, c)$. Nyt yhtälön (153) perusteella odotettaisiin, että

$$\langle p, \nu, b; q, \lambda, c | \partial_\mu j^{\mu 5a} | 0 \rangle = 0. \quad (155)$$

Divergenssiä $\partial_\mu j^{\mu 5a}$ vastaa liikemääräesityksessä sisätulo $(p+q)_\mu j^{\mu 5a}$. Matriisielementin (155) määrittämiseksi otetaan nyt diagrammissa $i\mathcal{M}_\uparrow$ tämä sisätulo, jolloin korvataan $\gamma^\mu \gamma^5 \rightarrow (p+q)_\mu \gamma^\mu \gamma^5 = (\not{k} + \not{q})\gamma^5 + \gamma^5(\not{k} - \not{p})$. Tällöin \mathcal{M}_\uparrow tulee muotoon

$$i\mathcal{M}_\uparrow = -ig^2 \text{Tr}(t^a t^b t^c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma^5 \frac{\not{k} - \not{p}}{(k-p)^2} \gamma^\nu \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\lambda - \gamma^5 \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\lambda \frac{\not{k} + \not{q}}{(k+q)^2} \gamma^\nu \right). \quad (156)$$

Suoritetaan nyt ensimmäisessä termissä muuttujan vaihto $k \rightarrow k+p$, jolloin saadaan

$$i\mathcal{M}_\uparrow = -ig^2 \text{Tr}(t^a t^b t^c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma^5 \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\nu \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2} \gamma^\lambda - \gamma^5 \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\lambda \frac{\not{k} + \not{q}}{(k+q)^2} \gamma^\nu \right). \quad (157)$$

Liikemääräintegraali on nyt selvästi antisymmetrinen vaihdon $(p, \nu, b) \leftrightarrow (q, \lambda, c)$ suhteen, joten näennäisesti $\mathcal{M}_\uparrow + \mathcal{M}_\downarrow = 0$, eikä anomalista nollasta poikkeavaa nelidivergenssiä esiinny. Kuitenkin integraali, jossa muuttujanvaihto $k \rightarrow k+p$ suoritettiin, on divergoiva. Siksi tästä muuttujanvaihdosta saattaa jäädä jäljelle nollasta poikkeava termi. Tarkastellaan tilannetta dimensionaalisisä regularisatiossa. Määritellään γ^5 dimensiossa d siten, että se antikommutoi γ^μ :n kanssa, kun $\mu = 0, 1, 2, 3$, mutta kommutoi γ^μ :n kanssa muilla μ :n arvoilla. Jaetaan sitten integrointimuuttuja k siten, että $k = k_\parallel + k_\perp$, missä k_\parallel sisältää k :n komponentit neljässä ulottuvuudessa ja k_\perp loput komponentit $d-4$:ssä ulottuvuudessa. Tällöin sisätulo $(p+q)_\mu j^{\mu 5a}$ antaa $\gamma^\mu \gamma^5 \rightarrow (p+q)_\mu \gamma^\mu \gamma^5 = (\not{k} + \not{q})\gamma^5 + \gamma^5(\not{k} - \not{p}) - 2\gamma^5 \not{k}_\perp$. Tällöin laskeuttaessa summaa $\mathcal{M}_\uparrow + \mathcal{M}_\downarrow$ ensimmäiset kaksi termiä kumoutuvat kuten edellä on näytetty, mutta viimeisestä termistä jää kontribuutio

$$i\mathcal{M}_\uparrow = -ig^2 \text{Tr}(t^a t^b t^c) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left(-2\gamma^5 \not{k}_\perp \frac{\not{k} - \not{p}}{(k-p)^2} \gamma^\nu \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\lambda \frac{\not{k} + \not{q}}{(k+q)^2} \right). \quad (158)$$

Feynmanin parametrien avulla tämä saadaan muotoon

$$i\mathcal{M}_\uparrow = -8g^2 \text{Tr}(t^a t^b t^c) \int_0^1 dx dy \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_\perp^2}{(l^2 - \Delta)^3} p_\alpha q_\beta \epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}, \quad (159)$$

missä on suoritettu muuttujanvaihto $l = k + yq - xp$ ja $\Delta = -x(1-x)p^2 - y(1-y)q^2 + 2xyp \cdot q$, sekä otettu jälki Diracin matriisien yli. Symmetrisessä integraalissa voidaan korvata $l_{\perp}^2 \rightarrow \frac{d-4}{d}l^2$. Tehdään sitten Wickin rotaatio ja suoritetaan integraalit, jolloin saadaan

$$i\mathcal{M}_{\uparrow} = \frac{2ig^2}{(4\pi)^2} p_{\alpha} q_{\beta} \epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda} \text{Tr}(t^a t^b t^c). \quad (160)$$

Tämä on symmetrinen vaihdon $(p, \nu) \leftrightarrow (q, \lambda)$ suhteen, joten kokonaisuudessaan saadaan

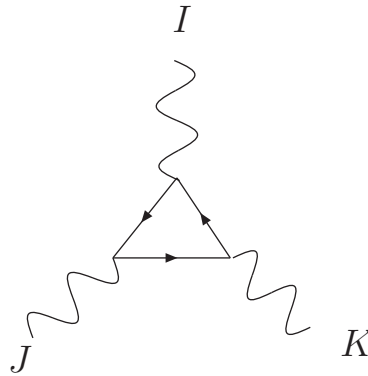
$$\mathcal{M}_{\uparrow} + \mathcal{M}_{\downarrow} = \frac{g^2}{8\pi^2} p_{\alpha} q_{\beta} \epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda} \text{Tr}(t^a \{t^b, t^c\}). \quad (161)$$

Näin ollen siis matriisielementti (155) on

$$\langle p, \nu, b; q, \lambda, c | \partial_{\mu} j^{\mu 5a} | 0 \rangle = \frac{g^2}{8\pi^2} p_{\alpha} q_{\beta} \epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda} \mathcal{A}^{abc}, \quad (162)$$

missä $\mathcal{A}^{abc} = \text{Tr}(t^a \{t^b, t^c\})$. Aksiaalivirta ei siis säily, ellei \mathcal{A}^{abc} ole nolla, tai jos teoria sisältää useita mittakenttiä ja fermioneja, tulee summan näihin kaikkiin liittyvistä tekijöistä \mathcal{A}^{abc} olla nolla. Koska teorian rakenteen kannalta on oleellista, että aksiaalivirta on säilyvä virta, on siis vaadittava, että kaikissa kiraalisissa teorioissa tekijöiden \mathcal{A}^{abc} summa häviää. Muussa tapauksessa teoriaa ei voida järkevästi määrittellä.

Tarkastellaan sitten aksiaalivirta-anomalian kumoutumista standardimallissa, joka sisältää yhden perheen massattomia kvarkkeja ja yhden perheen massattomia leptoneja. Mahdolliseen aksiaalivirta-anomaliaan kontribuotivat diagrammit ovat kolmen mittabosonin väliset kolmiodiagrammit:



Tässä I , J ja K ovat standardimallin mittakenttiä, eli $U(1)$, $SU(2)$ tai $SU(3)$. Huomioidaan myös mahdollinen gravitaation kvanttiteoria, jolloin standardimalliin sisällytetään uusi mittabosoni, gravitoni. Graafeja, joissa

kaikki kolme mittakenttää ovat vasen-oikea-symmetrisiä, ei tarvitse ottaa huomioon, sillä nämä eivät kontribuoi aksiaalivirta-anomaliaan. Gaafit, jotka sisältävät yhden $SU(2)$ - tai $SU(3)$ -bosonin ovat verrannollisia jälkeen $\text{Tr}(\tau^a) = 0$ tai $\text{Tr}(t^a) = 0$, ja ovat siten nollia. Edelleen kolmen $SU(2)$ -bosonin verteksi antaa nollan, sillä $\{\tau^a, \tau^b\} = \frac{1}{4}\delta^{ab}$ ja siten jälki $\mathcal{A}^{abc} = 0$. Siten jäljelle jäävät diagrammit ovat kolmen $U(1)$ -kentän, yhden $U(1)$ -kentän ja kahden $SU(2)$ -kentän, yhden $U(1)$ -kentän ja kahden $SU(3)$ -kentän, sekä yhden $U(1)$ -kentän ja kahden gravitaatiokentän väliset verteksit. Näissä pitää summata kaikkien relevanttien fermionien yli.

Yhden $U(1)$ -bosonin ja kahden $SU(3)$ -bosonin välinen verteksi antaa

$$\mathcal{A}^{abc} = 2\text{Tr}(t^a t^b Y) = \delta^{ab} \sum_q Y_q, \quad (163)$$

missä summa on oikea- ja vasenkätisten kvarkkien hypervarausten yli. Standardimallin mukaisilla hypervarauksilla saadaan

$$\sum_g Y_g = -2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad (164)$$

ja siten siis tämä graafi ei tuota kontribuutiota aksiaalivirta-anomaliaan. Vastaavasti $U(1)$ -bosonin ja kahden $SU(2)$ -bosonin välinen verteksi antaa

$$\mathcal{A}^{abc} = 2\text{Tr}(\tau^a \tau^b Y) = \delta^{ab} \sum_{f_L} Y_{f_L}, \quad (165)$$

missä summa on kaikkien vasenkätisten fermionien hypervarausten yli. Jälleen standardimallin mukaisilla hypervarauksilla saadaan

$$\sum_{f_L} Y_{f_L} = -(-\frac{1}{2}) - 3 \cdot \frac{1}{6} = 0, \quad (166)$$

missä tekijä kolme tulee siitä, että kvarkkien kolme eri väriä tulee laskea erikseen mukaan. Tämäkään graafi ei siis tuota kontribuutiota aksiaalivirta-anomaliaan. Edelleen kolmen $U(1)$ -bosonin graafi tuottaa

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{abc} &= 2\text{Tr}(Y^3) = 2 \sum_f Y_f^3 \\ &= 2 \left(-2 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^3 - 3 \left(2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (167)$$

missä siis summa on yli kaikkien fermionien, ja viimeisenä $U(1)$ -bosonin ja kahden gravitonin graafi tuottaa

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{abc} &= 2\text{Tr}(Y) = \sum_f Y_f \\ &= 2 \left(-2 \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) - 3 \left(2 \left(\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (168)$$

Standardimalli siis todellakin on vapaa aksiaalivirta-anomaliasta. Tämä tarkoittaa myös sitä, että mahdollisten laajennusten standardimalliin tulee itsessään olla vapaita tästä anomaliasta.

5 Minimaalinen kävelevä teknivärimalli

5.1 $SU(N)$:n korkeammat esitykset

Edellä tarkasteltiin mahdollisuutta konstruoida kävelevä teknivärimalli, jossa teknikvarkit ovat $SU(N)$:n perusesityksessä. Tällöin kuitenkin kävelevän dynamiikan saavuttamiseen tarvittiin varsin suuri määrä teknikvarkkidubletteja, mikä johti suureen kontribuutioon sähköheikkojen tarkkuusmittausten S -parametriin. Näin ollen tällaiset mallit eivät ole yhteensopivia nykyisten mittaustulosten kanssa. Ei kuitenkaan ole selvää, että teknikvarkkien tulisi muuntua juuri $SU(N)$:n perusesityksen mukaan. Yhtä hyvin voidaan tarkastella teoriaa, jossa teknikvarkit ovat $SU(N)$:n jossain korkeammassa esityksessä.

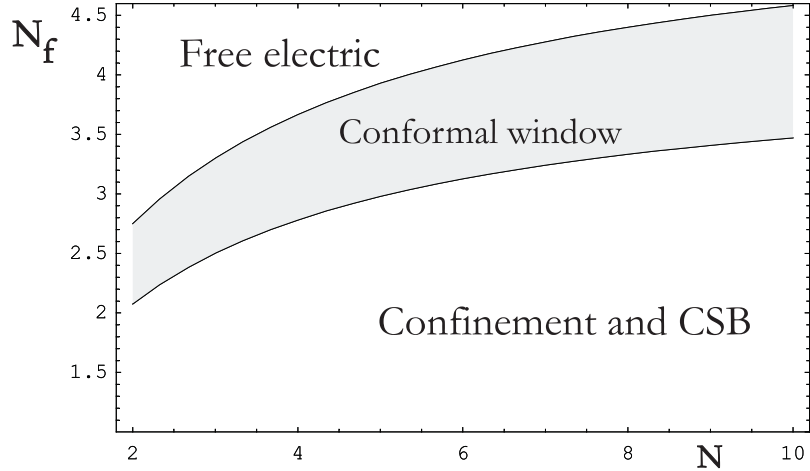
Tarkastellaan nyt mallia, jossa on N_f teknikvarkkia ryhmän $SU(N_c)$ kaksiindeksisessä symmetrisessä esityksessä. Tällöin faasidiagramin kannalta oleelliset ryhmäteoreettiset suureet ovat

$$\begin{aligned} d(\mathbf{R}) &= \frac{N_c(N_c + 1)}{2}, \\ d(\mathbf{G}) &= N_c^2 - 1, \\ C_2(\mathbf{R}) &= 2(N_c - 1)(N_c + 2), \\ C_2(\mathbf{G}) &= 2N_c^2. \end{aligned} \tag{169}$$

Näin ollen saadaan edellisessä luvussa kuvatut teknifermionimakujen kriittiset määrät ilmoitettua teknivärien määrän N_c avulla:

$$\begin{aligned} N_f^{\text{af}} &= \frac{11}{2} \frac{N_c}{N_c + 2}, \\ N_f^{\text{ir}} &= \frac{17N_c^3}{(N_c + 2)(8N_c^2 + 3N_c - 6)}, \\ N_f^c &= \frac{N_c}{N_c + 2} \frac{83N_c^2 + 66N_c - 132}{20N_c^2 + 15N_c - 30}. \end{aligned} \tag{170}$$

Näiden avulla voidaan piirtää teorian faasidiagrammi.



Kuva 5. $SU(N)$:n kaksi-indeksisen symmetrisen esityksen faasidiagrammi. Kuva lähteestä [39].

Kuten kuvasta nähdään, teoria on konformaalinen jo huomattavan pienellä määrällä teknikvarkkeja. Tapauksessa $N_c = 2$ on makujen määrä $N_f = 2$ jo hyvin lähellä konformi-ikkunaa, eli kävelevän dynamiikan saavuttamiseksi riittää lisätä vain yksi teknikvarkkisukupolvi. Otetaankin nyt tarkasteluun tällainen malli, sillä se tuottaa kaikkein pienimmän kontribuution S -parametriin. Yhtälön (152) mukaisesti tällöin

$$S = \frac{1}{6\pi} \frac{N_f}{2} d\mathbb{R}. \quad (171)$$

Koska kaksi-indeksisen symmetrisen esityksen dimensio on yhtälön (169) mukaisesti

$$d(\mathbb{R}) = \frac{2(2+1)}{2} = 3, \quad (172)$$

on S -parametri nyt vain $S = \frac{1}{2\pi} \approx 0.159$. Kuitenkin, koska teoriaan on nyt lisätty kolme teknikvarkkidoublettia, kärsii malli Wittenin anomaliasta. Teoriaan täytyy siis lisätä vielä yksi fermionidoubletti. Koska kävelevä dynamiikka saavutetaan jo yhdellä teknikvarkkisukupolvella, ei ole syytä lisätä uusia teknikvarkkeja. Ei myöskään haluta lisätä uusia QCD-kvarkkeja, joten luonnollinen tapa korjata asia, on lisätä teoriaan uusi leptonisukupolvi.

Kokonaisuudessaan siis tarkastelun alaisena oleva teoria sisältää yhden teknikvarkkisukupolven, joka kuuluu tekniväriyryhmän $SU(2)$ kaksi-indeksiseen symmetriseen esitykseen, ja yhden uuden leptonisukupolven. Merkitään näitä seuraavalla tavalla:

$$Q_L^{ab} = \begin{pmatrix} U^{ab} \\ D^{ab} \end{pmatrix}_L, \quad U_R^{ab}, \quad D_R^{ab} \quad (173)$$

ja

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_\zeta \\ \zeta \end{pmatrix}_L, \quad \nu_{\zeta_R}, \quad \zeta_R. \quad (174)$$

Tässä a ja b ovat $SU(2)$:n kaksi-indeksisen esityksen väri-indeksit. Kun uusille hiukkasille annetaan vielä hypervaraukset, on malli kokonaisuudessaan kiinnitetty. Hypervarauksia ei voida valita täysin mielivaltaisesti, sillä aksiaalivirta-anomalian kumoutuminen rajoittaa mahdollisia hypervarauskonfiguraatioita. Merkitään nyt hypervarauksia siten, että vasenkätisen teknikvarkkidubletin hypervaraus on Y_{Q_L} , ja vasenkätisen leptonidubletin Y_{L_L} . Edelleen merkitään oikeakätisten teknikvarkkien ja leptonien hypervarauksia Y_{U_R} , Y_{D_R} , Y_{ν_R} ja Y_{ζ_R} . Näillä merkinnöillä aksiaalivirta-anomalian kumoutuminen asettaa ehdot

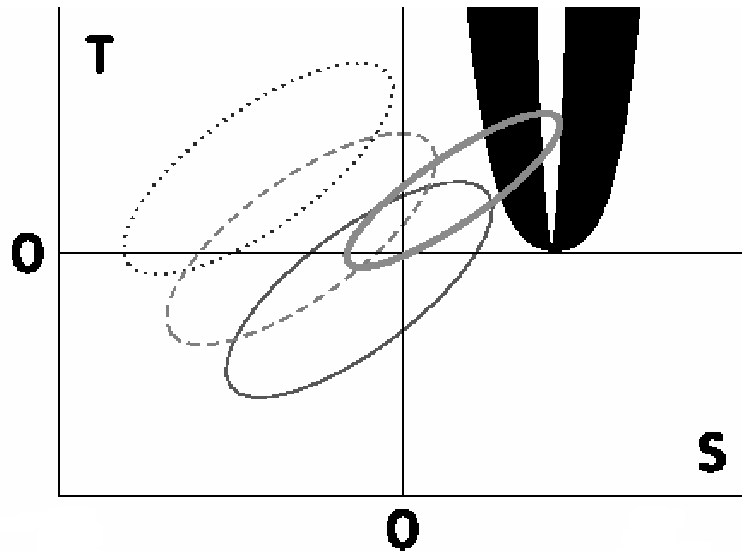
$$\begin{aligned} -2Y_{Q_L} + Y_{U_R} + Y_{D_R} &= 0, \\ Y_{L_L} + 3Y_{Q_L} &= 0, \\ -2Y_{L_L} + Y_{\nu_R} + Y_{\zeta_R} - 3(2Y_{Q_L} - Y_{U_R} - Y_{D_R}) &= 0, \\ -2Y_{L_L}^3 + Y_{\nu_R}^3 + Y_{\zeta_R}^3 - 3(2Y_{Q_L}^3 - Y_{U_R}^3 - Y_{D_R}^3) &= 0. \end{aligned} \quad (175)$$

Nämä toteutuvat, jos asetetaan [38]

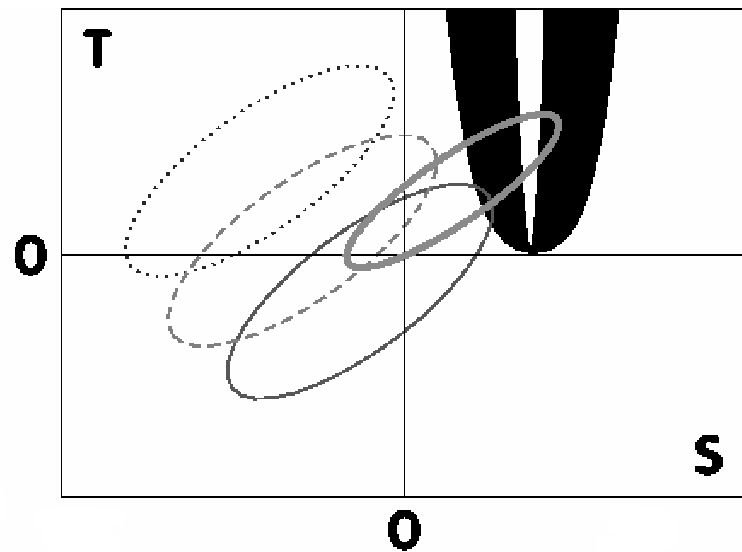
$$\begin{aligned} Y_{Q_L} &= \frac{y}{2}, \\ (Y_{U_R}, Y_{D_R}) &= \left(\frac{y+1}{2}, \frac{y-1}{2} \right), \\ Y_{L_L} &= -\frac{3y}{2}, \\ (Y_{\nu_R}, Y_{\zeta_R}) &= \left(\frac{-3y+1}{2}, \frac{-3y-1}{2} \right), \end{aligned} \quad (176)$$

missä y on mikä tahansa reaaliluku. Asettamalla $y = \frac{1}{3}$ saadaan standardimallin mukaiset hypervaraukset.

Teorian S - ja T -parametrit ovat nyt pieniä, ja sopivat hyvin mittausdataan. Kuvassa 6 mustalla merkitty alue kuvaa teorian S -ja T -parametrien saavutettavissa olevaa aluetta uuden leptonin massan ollessa 1-10 kertaa Z -bosonin massa. Kolme limittäistä ellipsiä ovat 90%:n luottamusvälit sähköheikkojen tarkkuusmittausten datasta [40] Higgsin hiukkasen massan ollessa 117 GeV, 340 GeV tai 1000 GeV siten, että 117 GeV on alimpana ja 1000 GeV ylimpänä. Ellipsi oikealla ylhäällä on 68%:n luottamusväli uudemmassa datasta [41] Higgsin hiukkasen massan ollessa 150 GeV, joka voidaan arvioida olevan Higgsin massa tässä mallissa [42]. Kuvassa 7 on otettu huomioon kävelvästä dynamiikasta johtuvat ei-perturbatiiviset korjaukset teknikvarkkien kontribuutioon S -parametriin. Kuvat lähteestä [42].



Kuva 6. S - ja T -parametrit ilman ei-perturbatiivisia korjauksia.



Kuva 7. S - ja T -parametrit ei-perturbatiivisten korjausten kanssa.

5.2 Efektiivinen teoria

Teknivariteoria on korkean energian teoria, sillä matalassa energiassa teknikvarkit eivät ole vapaita. Siksi teorian fenomenologian tutkimiseksi on järkevää muodostaa efektiivinen teoria. Efektiivisen teorian konstruoinnissa pyritään löytämään alkuperäisestä korkean energian teoriasta ne vapausasteet, jotka ovat oleellisia matalan energian prosesseissa, ja muotoilemaan teoria näiden vapausasteiden avulla.

Wilsonilaisen [43] periaatteen mukaisesti ajatellaan teorian Lagrangen tiheyden jollain korkealla energiaskaalalla sisältävän kaikki teorian symmetrioiden sallimat termit. Siirryttäessä matalammalle energiaskaalalle erilaiset termit kokevat erilaisen skaalaevoluution. Ne termit, jotka kasvavat matalammalle energialle siirryttäessä, ovat niin kutsuttuja relevantteja operaattoreita. Termit, jotka pienenevät ovat irrelevantteja operaattoreita. Sellaisia termejä, jotka eivät ensimmäisessä kertaluvussa muutu lainkaan skaalaa pienennettäessä, kutsutaan marginaalisiksi operaattoreiksi. Matalan energian efektiivisen teorian kannalta oleellisia ovat ainoastaan relevantit ja marginaaliset operaattorit, kun taas irrelevantit operaattorit tulevat merkittäviksi lähestyttäessä efektiivisen teorian pätevyysalueen ylärajaa.

Termien luonne voidaan päätellä termin kertaluvusta kentän suhteen. Tarkastellaan skalaarista teoriaa dimensiossa D , ja lähdetään liikkeelle siitä, että aktion S on oltava dimensioton. Aktio sisältää ainakin kineettisen termin

$$S_{\text{Kin}} = \int d^D x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (177)$$

Tämän dimensio on $2 + 2[\phi] - D$. Koska siis vaaditaan, että aktio on dimensioton, voidaan tästä ratkaista kentän ϕ dimensio

$$[\phi] = \frac{D - 2}{2}. \quad (178)$$

Tarkastellaan sitten termiä $\lambda \phi^M$, missä λ on dimensioton tai dimensiollinen kytkinvakio ja M on jokin kokonaisluku. Tämä tuottaa aktioon termin

$$S_M = \int d^D x \lambda \phi^M, \quad (179)$$

jonka dimensio on

$$[S_M] = [\lambda] + M[\phi] - D = [\lambda] - \frac{2M - (M - 2)D}{2}. \quad (180)$$

Vaaditaan edelleen, että tämä on dimensioton, jolloin saadaan λ :n dimensioiksi

$$[\lambda] = \frac{2M - (M - 2)D}{2}. \quad (181)$$

Jos nyt asetetaan $D = 4$, saadaan tästä

$$[\lambda] = 4 - M. \quad (182)$$

Kun teoria tulkitaan nyt efektiiviseksi teoriaksi jonkin suuren skaalan Λ alapuolella, on ainoa luonnollinen massan dimensioinen parametri, joka teoriassa

voi esiintyä, skaala Λ . Siten termit, joilla kytkinvakion λ dimensio on negatiivinen, ovat verrannollisia skaalan Λ negatiiviseen potenssiin, ja ovat siten irrelevantteja. vastaavasti termit, joilla λ :n dimensio on positiivinen, ovat relevantteja. Termit, joille $[\lambda] = 0$, ovat marginaalisia. Yhtälöstä (182) voidaan nyt lukea, että termit, joille $M < 4$ ovat relevantteja. Termit, joille $M > 4$ ovat irrelevantteja ja termit, joille $M = 4$ ovat marginaalisia.

5.2.1 Kiraalisymmetria

Tutkitaan nyt tarkemmin teorian symmetriaa. Ennen spontaania symmetriarikkoo teoriassa on siis $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -kiraalisymmetria. Kuitenkin, koska ryhmä $SU(2)$ on reaalinen, voidaan teknikvarkit kirjoittaa kokonaan vasenkätisten kenttien avulla [19] siten, että

$$Q = \begin{pmatrix} U_L \\ D_L \\ -i\sigma^2 U_R^* \\ -i\sigma^2 D_R^* \end{pmatrix}. \quad (183)$$

Tämä vektori muuntuu ryhmän $SU(4)$ mukaisesti, joten symmetriaryhmä onkin itse asiassa $SU(4)$ eikä $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Teknikvarkkikondensaatti on

$$\langle Q_i^\alpha Q_j^\beta \epsilon_{\alpha\beta} E^{ij} \rangle = -2 \langle \bar{U}_R U_L + \bar{D}_R D_L \rangle, \quad (184)$$

missä indeksit $i, j = 1, \dots, 4$ viittaavat Q :n komponentteihin ja α ja β ovat spin-indeksit. Matriisi E ilmaistuna 2×2 -yksikkömatriisin $\mathbf{1}_2$ avulla on

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (185)$$

Kondensaatti rikkoo kiraalisymmetrian $SO(4)$ -symmetriaksi. Tämä nähdään helposti, kun kirjoitetaan kvarkit U ja D kannassa, jossa

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\sqrt{2}}, & \epsilon U_R^* &= \frac{\lambda_1 - i\lambda_2}{\sqrt{2}}, \\ D_L &= \frac{\lambda_3 + i\lambda_4}{\sqrt{2}}, & \epsilon D_R^* &= \frac{\lambda_3 - i\lambda_4}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (186)$$

missä $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ ovat neljä riippumatonta kaksikomponenttista spinoria. Tässä kannassa kondensaatti on

$$-2 \langle \bar{U}_R U_L + \bar{D}_R D_L \rangle = \langle \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \rangle, \quad (187)$$

mikä on selvästi $SO(4)$ -invariantti. Merkitään $SU(4)$:n aliryhmän $SO(4)$:n generaattoreita $S^a, a = 1, \dots, 6$ ja muita $SU(4)$:n generaattoreita $X^a, a =$

$1, \dots, 9$. Tässä X^a :t ovat siis rikkoutuneet generaattorit, joten kutakin vastaa Goldstonen bosoni Π^a , $a = 1, \dots, 9$. Generaattoreiden X^a ja S^a eksplisiittiset lausekkeet ovat [19]

$$\begin{aligned} S^a &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tau^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau^{aT} \end{pmatrix}, & a = 1, \dots, 4, \\ S^a &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B^a \\ B^{a\dagger} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & a = 5, 6, \\ X^i &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tau^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau^{iT} \end{pmatrix}, & i = 1, 2, 3, \\ X^i &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & D^i \\ D^{i\dagger} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & i = 4, \dots, 9, \end{aligned} \tag{188}$$

missä τ^a , $a = 1, 2, 3$ ovat Paulin matriisit, $\tau^4 = \mathbf{1}_2$, $B^5 = \tau^2$, $B^6 = i\tau^2$ ja D -matriisit ovat

$$\begin{aligned} D^4 &= \mathbf{1}_2, & D^6 &= \tau^3, & D^8 &= \tau^1, \\ D^5 &= i\mathbf{1}_2, & D^7 &= i\tau^3, & D^9 &= i\tau^1. \end{aligned} \tag{189}$$

Mallin efektiivinen Higgsin sektori koostuu siis komposiitti- Higgsin hiukasta ja yhdeksästä Goldstonen bosonista. Järjestetään nämä matriisiksi

$$M = \left(\frac{\sigma}{2} + i\sqrt{2}\Pi^a X^a \right) E, \tag{190}$$

joka muuntuu $SU(4)$ -muunnoksessa siten, että

$$M \rightarrow uMu^T, \quad u \in SU(4). \tag{191}$$

Efektiivisen teorian Lagrangen tiheyden on siis oltava invariantti tässä muunnoksessa. Yleisin tällainen, korkeintaan kertalukua M^4 oleva Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = \text{Tr}(\partial_\mu M^\dagger \partial^\mu M) - \mu^2 \text{Tr}(M^\dagger M) - \lambda_1 \text{Tr}(M^\dagger M M^\dagger M) - \lambda_2 \left(\text{Tr}(M^\dagger M) \right)^2, \tag{192}$$

missä μ , λ_1 ja λ_2 ovat teorian massaparametri ja kytkinvakiot.

5.2.2 Teknipionit

Tarkastellaan sitten lähemmin teknipioneja Π^a . Yhtälöstä (190) saadaan

$$\text{Tr}(MEX^b) = i\sqrt{2}\Pi^a \text{Tr}(X^a X^b) = \frac{i}{\sqrt{2}}\Pi^b \tag{193}$$

Tästä voidaan ratkaista teknipionien kvarkkisisällöt. Esimerkiksi pionille numero 1 pätee

$$\begin{aligned}\Pi^1 &= -i\sqrt{2}\text{Tr}(MEX^1) = -\frac{i}{2}\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau^{1T} \end{pmatrix}\right) \\ &= -\frac{i}{2}(\text{Tr}(\mathbf{Q}_2\tau^1) + \text{Tr}(\mathbf{Q}_3\tau^{1T})),\end{aligned}\tag{194}$$

missä on merkitty

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_1 &= \begin{pmatrix} Q_1Q_1 & Q_1Q_2 \\ Q_2Q_1 & Q_2Q_2 \end{pmatrix}, & \mathbf{Q}_2 &= \begin{pmatrix} Q_1Q_3 & Q_1Q_4 \\ Q_2Q_3 & Q_2Q_4 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_3 &= \begin{pmatrix} Q_3Q_1 & Q_3Q_2 \\ Q_4Q_1 & Q_4Q_2 \end{pmatrix}, & \mathbf{Q}_4 &= \begin{pmatrix} Q_3Q_3 & Q_3Q_4 \\ Q_4Q_3 & Q_4Q_4 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{195}$$

Jäljet ovat

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\mathbf{Q}_2\tau^1) &= Q_1Q_4 + Q_2Q_3, \\ \text{Tr}(\mathbf{Q}_3\tau^{1T}) &= Q_3Q_2 + Q_4Q_1,\end{aligned}\tag{196}$$

jossa

$$\begin{aligned}Q_1Q_4 + Q_2Q_3 &= U_L(-i\sigma^2 D_R^*) + D_L(-i\sigma^2 U_R^*) \\ &= -(D_R^*)^\alpha U_{L\alpha} - (U_R^*)^\alpha D_{L\alpha}\end{aligned}\tag{197}$$

ja vastaavasti

$$Q_3Q_2 + Q_4Q_1 = -(U_R^*)^\alpha D_{L\alpha} - (D_R^*)^\alpha U_{L\alpha}.\tag{198}$$

Siten

$$\Pi^1 = -(\bar{U}D + \bar{D}U).\tag{199}$$

Vastaavalla tavalla voidaan määrittää muidenkin teknipionien kvarkkisisällöt. Pionit 2 ja 3 ovat

$$\begin{aligned}\Pi^2 &= \bar{D}U - \bar{U}D \\ \Pi^3 &= \bar{U}U - \bar{D}D.\end{aligned}\tag{200}$$

Kvarkkisisältöjen avulla voidaan edelleen laskea teknipionien kvanttiluvut. Pioneille 1, 2 ja 3 saadaan hypervaraus $Y = 0$ ja sähkövaraus $Q = -1, 1$ ja 0 vastaavasti. Nämä vastaavat heikkojen mittabosonien kvanttilukuja, joten pionit 1, 2 ja 3 absorboituvat heikkojen mittabosonien longitudinaalisiksi

komponenteiksi. Muut pionit jäävät teoriaan fysikaalisiksi hiukkasiksi. Näiden kvarkkisisällöt ovat

$$\begin{aligned}
\Pi^4 &= i(UD + \bar{U}\bar{D}), \\
\Pi^5 &= \bar{U}\bar{D} - UD, \\
\Pi^6 &= i(UU - DD + \bar{U}\bar{U} - \bar{D}\bar{D}) \\
\Pi^7 &= \bar{U}\bar{U} - \bar{D}\bar{D} - UU + DD, \\
\Pi^8 &= i(UU + DD + \bar{U}\bar{U} + \bar{D}\bar{D}), \\
\Pi^9 &= \bar{U}\bar{U} + \bar{D}\bar{D} - UU - DD.
\end{aligned} \tag{201}$$

Kuten luvussa 4.2.1 on kuvattu, saavat teknipionit dynaamisen massan ETC-vuoro vaikutuksista. Tätä kuvaamaan lisätään Lagrangen tiheyteen (192) teknipionien efektiivinen massatermi

$$\Delta\mathcal{L} = -\Pi^a (M_{\Pi}^2)^{ab} \Pi^b, \tag{202}$$

missä M_{Π}^2 on teknipionien massamatriisi.

5.2.3 KytKentä sähköheikkoon sektoriin

Lagrangen tiheys (192) ei sisällä kytKentää sähköheikkoihin mittakenttiin. Tämä kytKentä saadaan aikaiseksi korvaamalla derivaatta ∂_μ kovariantilla derivaatalla D_μ . Oikeanlaisen kovariantin derivaatan löytämiseksi sähköheikko ryhmä $SU(2) \times U(1)$ täytyy upottaa teknikvarkkien kiraalisymmetriaryhmään $SU(4)$ [44]. Tämä voidaan tehdä kirjoittamalla kovariantti derivaatta muotoon

$$D_\mu M = \partial_\mu M - ig(G_\mu M + MG_\mu^T), \tag{203}$$

missä on määritelty $SU(4)$:een upotettu sähköheikko mittakenttä G_μ siten, että

$$G_\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_\mu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{g'}{g} \mathbf{B}_\mu^T \end{pmatrix} + \frac{y g'}{2g} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_\mu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}_\mu \end{pmatrix}. \tag{204}$$

$SU(2)_L \times SU(2)_R$ on siis upotettu $SU(4)$:een diagonaalisesti, eli

$$\begin{pmatrix} SU(2)_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & SU(2)_R \end{pmatrix}.$$

Tässä y on yhtälössä (176) määritelty hypervaraus ja kentät \mathbf{W}_μ ja \mathbf{B}_μ ovat standardimallin sähköheikkojen kenttien W_μ^a , $a = 1, 2, 3$ ja B_μ avulla ilmaistuna

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_\mu &= W_\mu^a \frac{\tau^a}{2}, \\
\mathbf{B}_\mu^T &= B_\mu \frac{\tau^{3T}}{2} = B_\mu \frac{\tau^3}{2},
\end{aligned} \tag{205}$$

missä matriisit τ^a ovat Paulin matriisit. Yhdistämällä nyt yhtälöt (192) ja (202), ja korvaamalla derivaatta kovariantilla derivaatalla (203) saadaan efektiivisen teorian Lagrangen tiheydeksi

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \text{Tr}(D_\mu M^\dagger D^\mu M) - \mu^2 \text{Tr}(M^\dagger M) - \lambda_1 \text{Tr}(M^\dagger M M^\dagger M) \\ & - \lambda_2 (\text{Tr}(M^\dagger M))^2 - \Pi^a (M_\Pi^2)^{ab} \Pi^b. \end{aligned} \quad (206)$$

Tästä voitaisiin auki kirjoittamalla johtaa teorian Feynmanin säännöt, jotka kytkevät Higgsin kentän, teknipionit ja sähköheikot mittakentät toisiinsa.

5.2.4 KytKentä standardimallin fermioneihin

Tarkastellaan sitten teknipionien kytKentää standardimallin fermioneihin. Merkintöjen helpottamiseksi kirjoitetaan standardimallin fermionit muotoon

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \\ -i\sigma^2 \nu_R^* \\ -i\sigma^2 e_R^* \end{pmatrix} \quad (207)$$

leptoneille ja

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ -i\sigma^2 u_R^* \\ -i\sigma^2 d_R^* \end{pmatrix} \quad (208)$$

kvarkeille. Tarkastellaan sitten fermionien massatermejä. Nämä syntyvät Yukawa-kytkennästä

$$\mathcal{L}_{m_L} = Y_L L_\alpha^T M^* L_\beta \epsilon^{\alpha\beta} + h.c., \quad (209)$$

missä Y_L on kytkinvakio. Kun tämä kehitetään M :n vakuumiodotusarvossa $\langle M \rangle = vE$, saadaan

$$\mathcal{L}_{m_L} = -vY_L (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{e}_R e_L) + h.c. \quad (210)$$

Tämä termi antaa elektronille ja sen neutriinolle saman massan. Koska tämä symmetria halutaan rikkoa, lisätään Lagrangen tiheyteen projektio-operaattori

$$P_{\frac{U}{D}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}(\mathbf{1}_2 \pm \sigma^3) \end{pmatrix}. \quad (211)$$

Tämän avulla kirjoitetaan

$$\mathcal{L}_{m_L} = Y_{L_D} L_\alpha^T P_D M^* P_D L_\beta \epsilon^{\alpha\beta} + Y_{L_U} L_\alpha^T P_U M^* P_U L_\beta \epsilon^{\alpha\beta} + h.c. \quad (212)$$

missä nyt Y_{LD} ja Y_{LU} ovat erilliset kytkinvakiot. Kehitettynä M :n vakuumio-dotusarvossa tämä antaa massatermit

$$\mathcal{L}_{m_L} = -vY_{LD}\bar{e}_R e_L - vY_{LU}\bar{\nu}_R \nu_L + h.c. \quad (213)$$

Näin saadaan elektronille ja neutriinolle erilliset massat. Vastaavasti kvarkkien massatermit saadaan kytkemällä kvarkit kenttään M :

$$\mathcal{L}_{m_Q} = Y_{QD}Q_\alpha^T P_D M^* P_D Q_\beta \epsilon^{\alpha\beta} + Y_{QU}Q_\alpha^T P_U M^* P_U Q_\beta \epsilon^{\alpha\beta} + h.c. \quad (214)$$

Tarkastellaan sitten näiden termien muunnosta hypervarauksen suhteen. Määritellään operaattorit

$$T^i = \frac{S^i + X^i}{\sqrt{2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (215)$$

Tässä generaattorit S^i ja X^i on määritelty yhtälössä (188). Nyt sähkövaraus Q voidaan lausua

$$Q = \sqrt{2}(S^3 + yS^4), \quad (216)$$

missä y on yhtälössä (176) määritelty hypervarausparametri. Yhtälön (215) avulla tämä tulee muotoon

$$Q = T^3 - R^{3T} + \sqrt{2}yS^4, \quad (217)$$

missä

$$R^{3T} = \frac{X^3 - S^3}{\sqrt{2}}. \quad (218)$$

Koska pätee myös

$$Q = T^3 + Y, \quad (219)$$

missä Y on hypervaraus, saadaan tästä

$$Y = -R^{3T} + \sqrt{2}yS^4. \quad (220)$$

Standardimallin leptoneille $Y = -1$, joten M ja L muuntuvat hypervarauksen suhteen siten, että

$$\begin{aligned} M &\rightarrow e^{i\alpha(-R^{3T} + \sqrt{2}yS^4)} M e^{i\alpha(-R^3 + \sqrt{2}yS^{4T})}, \\ L &\rightarrow e^{i\alpha(-R^3 - \sqrt{2}S^4)} L. \end{aligned} \quad (221)$$

Siten Yukawa-termi $L^T M^* L$ muuntuu

$$L^T M^* L \rightarrow L^T e^{-i\alpha\sqrt{2}(y+1)S^4} M^* e^{-i\alpha\sqrt{2}(y+1)S^4} L. \quad (222)$$

Termi siis säilyy invarianttina vain, jos $y = -1$. Kuitenkin, koska standardimallin kvarkeille hypervaraus $Y = \frac{1}{3}$, saadaan vastaavan laisella tarkastellulla kvarkkien Yukawa-termistä ehto $y = \frac{1}{3}$. Yukawa-termit saadaan kuitenkin invarianteiksi mielivaltaisella y :n valinnalla, kun kytketään vain M :n ei-diagonaalitermit standardimallin fermioneihin. Määritellään ei-diagonaalinen M_{off} siten, että

$$M_{\text{off}} = P_1 M P_1 - P_2 M P_2 \quad (223)$$

missä projektiot P_1 ja P_2 ovat

$$P_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (224)$$

Tämän avulla voidaan kirjoittaa invariantti Yukawa-kytkentä leptoneille ja kvarkeille

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & Y_{Q_D} Q_\alpha^T P_D M_{\text{off}}^* P_D Q_\beta \epsilon^{\alpha\beta} + Y_{Q_U} Q_\alpha^T P_U M_{\text{off}}^* P_U Q_\beta \epsilon^{\alpha\beta} \\ & + Y_{L_D} L_\alpha^T P_D M_{\text{off}}^* P_D L_\beta \epsilon^{\alpha\beta} + Y_{L_U} L_\alpha^T P_U M_{\text{off}}^* P_U L_\beta \epsilon^{\alpha\beta} + h.c. \end{aligned} \quad (225)$$

Tämä kytkentä vastaa efektiivisesti standardimallin Higgsin sektoria. Tämä nähdään, kun kirjoitetaan auki kenttä M :

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{2}(\sigma + i2\sqrt{2}\Pi^a X^a)E \\ = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma \mathbf{1}_2 + i2\sqrt{2}\Pi^i \tau^i & i2\sqrt{2}\Pi^a D^a \\ i2\sqrt{2}\Pi^a D^{a\dagger} & \sigma \mathbf{1}_2 + i2\sqrt{2}\Pi^i \tau^{iT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \\ a = 4, \dots, 9 \end{array} \\ = & \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|cc} i2\sqrt{2}\Pi^a D^a & & \sigma + i2\sqrt{2}\Pi^3 & 2\sqrt{2}(i\Pi^1 + \Pi^2) \\ \sigma + i2\sqrt{2}\Pi^3 & 2\sqrt{2}(i\Pi^1 - \Pi^2) & 2\sqrt{2}(i\Pi^1 - \Pi^2) & \sigma - i2\sqrt{2}\Pi^3 \\ \hline & & & i2\sqrt{2}\Pi^a D^{a\dagger} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (226)$$

Tässä ei-diagonaaliakiot sisältävät efektiivisen Higgsin kentän σ ja heikkojen mittabosonien longitudinaaliset komponentit Π^i , $i = 1, 2, 3$, eli juuri standardimallin Higgsin sektoria vastaavan osan. Diagonaalelementit pitävät sisällään fysikaalisten teknipionien kontribuution. Kun kytkentä standardimallin fermioneihin kirjoitetaan nyt ei-diagonaalisen kentän M_{off} avulla, eivät teknipionit kytke laisinkaan SM-fermioneihin.

5.3 Fenomenologiaa

Tutkitaan lopuksi mallin fenomenologiaa. Efektiivinen malli sisältää useita uusia hiukkasia; teknipionit ja uuden leptonisukupolven. Keskitytään tässä

kuitenkin leptonisen sektorin fenomenologian kartoittamiseen. Koska näitä leptoneita ei ole vielä havaittu, tulee niiden olla raskaita. Jatkossa oletetaan, että varatun leptonin massa on noin 200 GeV ja neutriinon massa noin 100 GeV.

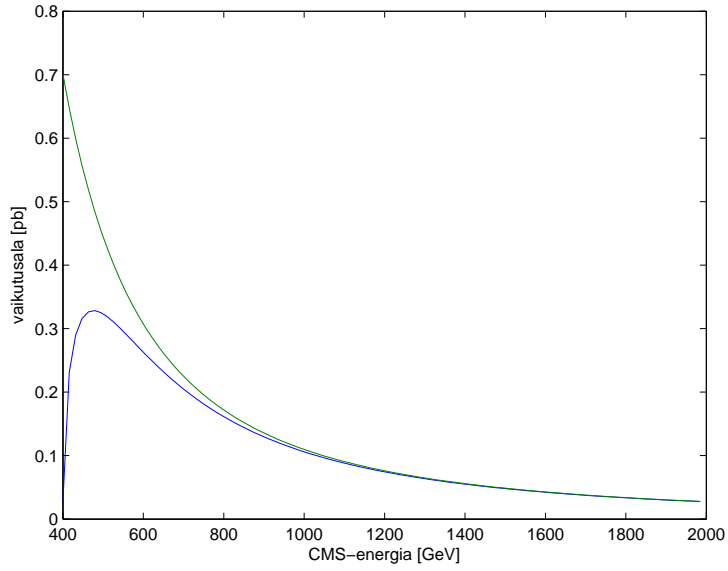
5.3.1 leptoniparin tuotto

Tarkastellaan uuden leptonin tuottoa e^-e^+ -törmäyksessä. Kuvassa 8 on vaikutusala leptoniparin $\zeta^-\zeta^+$ tuotolle e^-e^+ -törmäyksessä massakeskipiste-energian funktiona. Samassa kuvassa on vertailukohtana vaikutusala $\mu^-\mu^+$ -parin tuotolle samassa törmäyksessä.

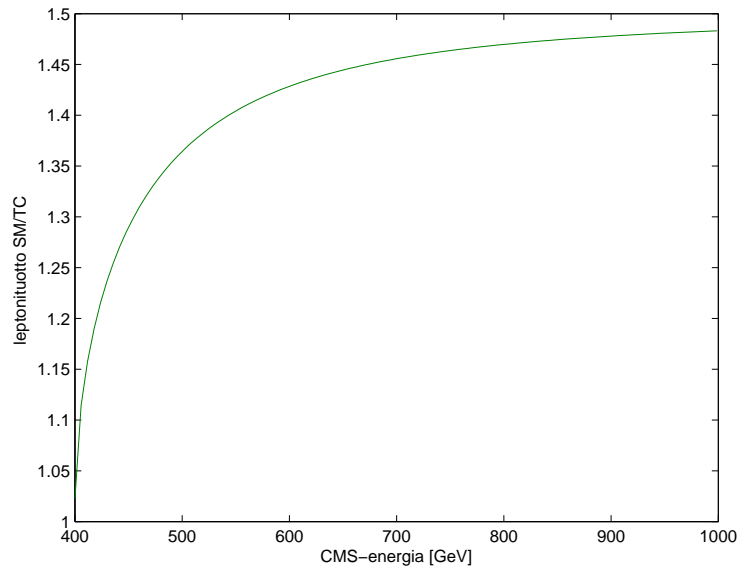
Kuvassa 9 on plotattu suhde

$$R = \frac{\sigma(e^-e^+ \rightarrow l_{\text{SM}}^- l_{\text{SM}}^+)}{\sigma(e^-e^+ \rightarrow l_{\text{TC}}^- l_{\text{TC}}^+)}, \quad (227)$$

missä $l_{\text{SM}} = \mu, \tau$ ja $l_{\text{TC}} = \mu, \tau, \zeta$. Leptoniparin tuottovaikutusala siis kasvaa selvästi suurilla energioilla, jos malliin lisätään neljäs leptonisukupolvi. Tässä kuvaajassa ei kuitenkaan ole mukana prosessia $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, joka dominoi selvästi kaikilla energia-alueilla muita leptonisia lopputiloja. Kuvissa 8 ja 9 on oletettu, että ζ :n massa on 200 GeV ja että sillä on standardimallin muiden leptonien kaltainen $V - A$ -kytkentä. Kuvaajat on tuotettu CalcHEP-ohjelmalla [45].

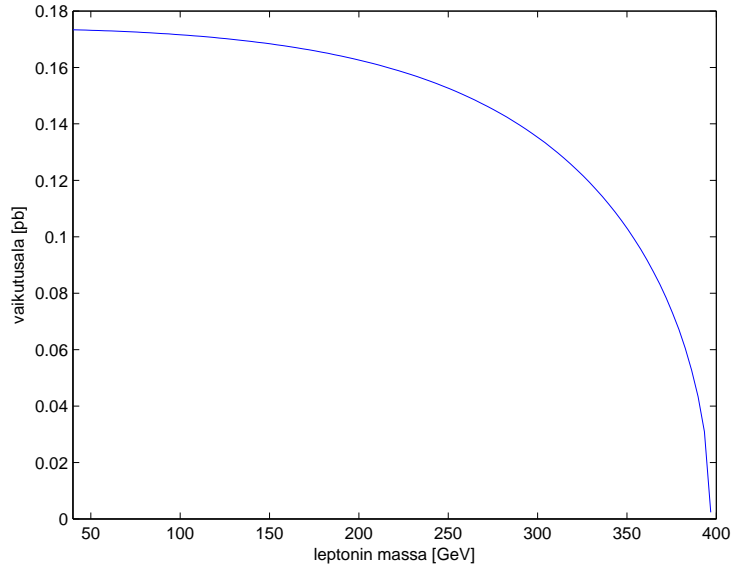


Kuva 8. Tuottovaikutusalat $\sigma(e^-e^+ \rightarrow \zeta^-\zeta^+)$ (alempi käyrä) ja $\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)$ (ylempi käyrä) \sqrt{s} :n funktiona.



Kuva 9. Leptoniparin tuottovaikutusalojen standardimallissa ja tekni väriteoriassa suhde R \sqrt{s} :n funktiona.

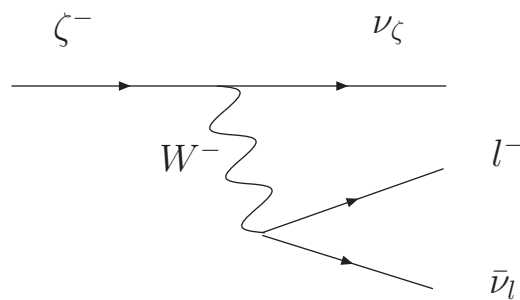
kuvassa 10 on plotattu $\zeta^-\zeta^+$ -parin tuottoaikutusala e^-e^+ -törmäyksessä ζ :n massan funktiona, massakeskipiste-energian ollessa 800 GeV.



Kuva 10. Vaikutusala $\sigma(e^-e^+ \rightarrow \zeta^-\zeta^+)$ ζ :n massan funktiona \sqrt{s} :n ollessa 800 GeV.

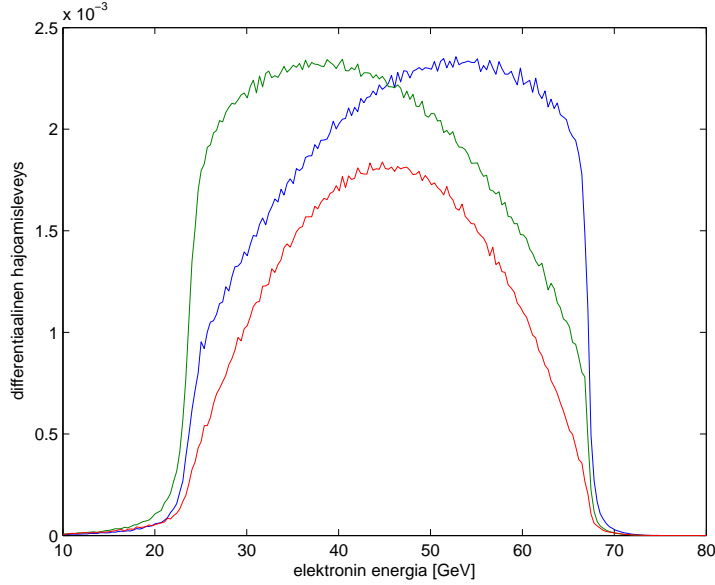
5.3.2 Leptonin hajoaminen

Tarkastellaan sitten leptonin ζ hajoamista leptoniseen kanavaan. Johtava termi on heikon varatun virran välityksellä tapahtuva hajoaminen:



Erona esimerkiksi μ :n hajoamiseen on se, että nyt hajoava hiukkanen on raskaampi, kuin W -bosoni, jolloin Fermi nelipistevuorovaikutus ei ole hyvä approksimaatio. Toinen ero on se, että ζ :n neutriino on massiivinen. Ei ole myöskään selvää, että ζ :lla on juuri $V - A$ -kytkentä. Kytkenän laatu vaikuttaa lopputilahiukkasten energiajakaumaan. Tämä käy ilmi kuvasta 11, jossa

on plotattu differentiaalin hajoamisleveys $\frac{d\Gamma}{dE_e}$ tuotetun elektronin energian E_e funktiona prosessissa $\zeta^- \rightarrow \nu_\zeta e^- \bar{\nu}_e$, kun ζ :lle on oletettu $V - A$ -, $V + A$ - tai V -kytkentä. Jakauma on samanlainen muillekin leptonisille hajoamiskanaville. Kytkennän luonnetta voidaan siis tutkia mittaamalla leptonisen hajoamisen tuotteena syntyneen standardimallin leptonin energiajakaumaa.



Kuva 11. differentiaalin hajoamisleveys $\frac{d\Gamma}{dE_e}$ ζ :n hajoamistuotteena syntyneen elektronin energian funktiona kytkennöillä $V - A$ (sininen käyrä), $V + A$ (vihreä käyrä) ja V (punainen käyrä).

ζ voi hajota myös semileptoniseen kanavaan, jolloin lopputilalla on sekä leptoneita, että hadroneita. Semileptonisen ja leptonisen kanavan hajoamisleveyksien suhteen voidaan arvioida olevan [29]

$$\frac{\Gamma_{\text{semileptonic}}}{\Gamma_{\text{leptonic}}} \approx 3, \quad (228)$$

kun τ -leptonille sama suhde on samassa approksimaatiossa noin 1,5. Säteilyskorjaukset tuottavat tähän noin 20%:n suuruisen korjauksen, jolloin τ -leptonille suhde on 1,85 ja ζ :lle noin 3,6.

5.3.3 Higgsin hiukkasen hajoaminen

Uusien leptonien olemassaolo näkyy myös efektiivisen Higgsin hiukkasen hajoamisessa, mikäli se on riittävän raskas. Jos Higgsin hiukkasen massa on suurempi kuin kaksi kertaa uuden leptonin massa, on yksi hajoamiskanava prosessi $H \rightarrow \zeta^-\zeta^+$. Koska myös neutriino on massiivinen, kytkee Higgsin hiukkanen myös siihen, josta syntyy kanava $H \rightarrow \nu_\zeta\bar{\nu}_\zeta$. Kuvassa 12 on Higgsin hiukkasen suhteelliset hajoamisleveydet Higgsin massan funktiona. Siinä on otettu ζ :n massaksi 200 GeV ja ν_ζ :n massaksi 100 GeV. Hajoamisleveydet on laskettu johtavassa kertaluvussa. Tällöin hajoamisleveys fermioni-fermioni pariin on [46]

$$\Gamma(H \rightarrow f\bar{f}) = \frac{G_\mu A_c}{4\sqrt{2}\pi} M_H m_f^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{M_H^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (229)$$

missä A_c on kvarkeille 3 ja leptoneille 1, M_H on Higgsin massa ja m_f fermionin massa. Hajoamisleveys heikkoihin mittabosoneihin on

$$\Gamma(H \rightarrow VV) = \frac{G_\mu M_H^3}{16\sqrt{2}\pi} \delta_V \sqrt{1-4x}(1-4x+12x^2), \quad (230)$$

missä $x = \frac{m_V^2}{M_H^2}$, V on W tai Z , $\delta_W = 2$ ja $\delta_Z = 1$. Hajoaminen kahdeksi gluoniksi tapahtuu fermionisilmukan kautta. Hajoamisleveys tälle prosessille on

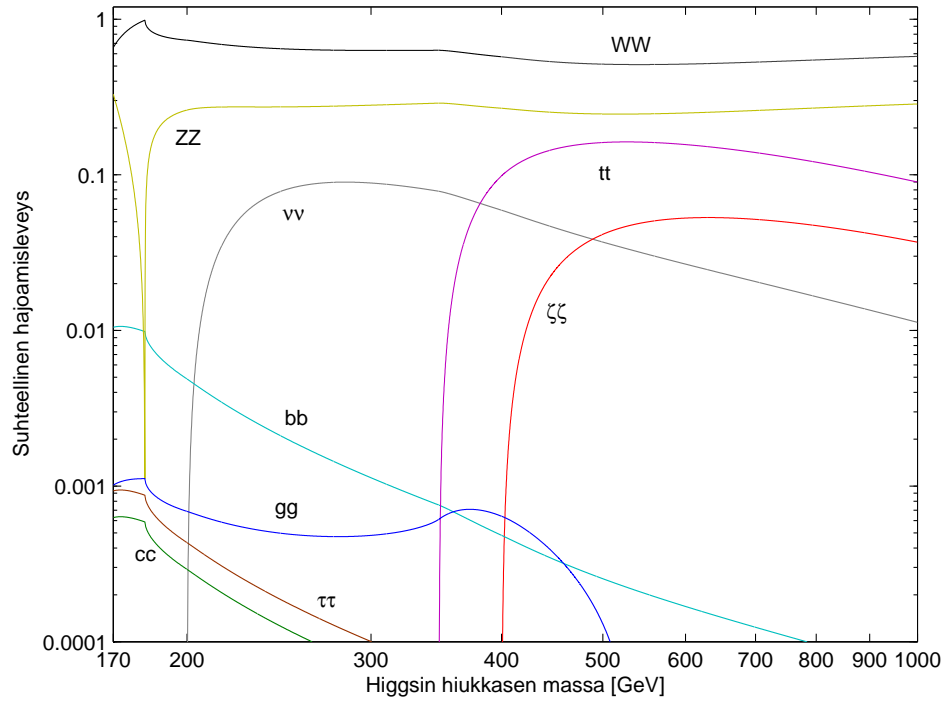
$$\Gamma(H \rightarrow gg) = \frac{G_\mu \alpha_s^2 M_H^3}{36\sqrt{2}\pi^3} \left| \frac{3}{4} A^H(\tau_t) \right|^2, \quad (231)$$

missä $\tau_t = \frac{M_H^2}{4m_t^2}$, α_s on vahva kytkinvakio ja

$$A^H(\tau) = 2(\tau + (\tau - 1)f(\tau))\tau^{-2}, \quad (232)$$

missä funktio $f(\tau)$ on

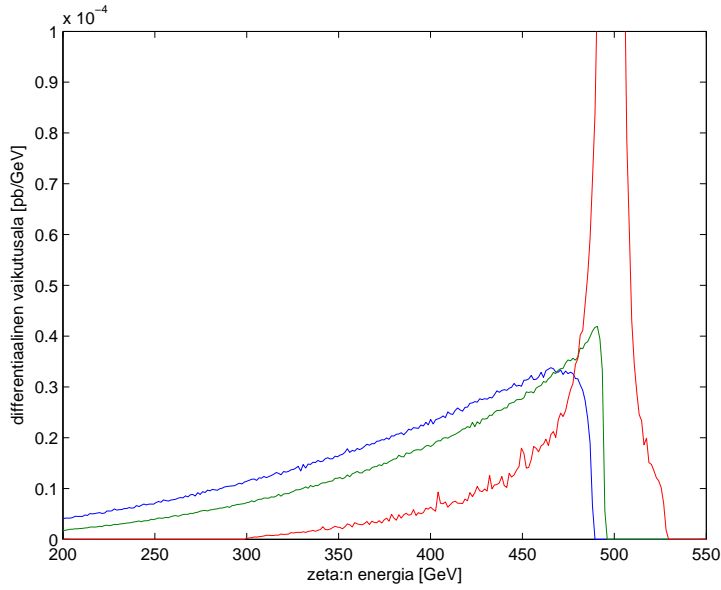
$$f(\tau) = \begin{cases} (\arcsin(\sqrt{\tau}))^2, & \tau \leq 1 \\ -\frac{1}{4} \left(\log \frac{1+\sqrt{1-\tau^{-1}}}{1-\sqrt{1-\tau^{-1}}} - i\pi \right)^2 & \tau > 1 \end{cases}. \quad (233)$$



Kuva 12. Higgsin hiukkasen hajoamiskanavien suhteelliset leveydet Higgsin massan funktiona.

5.3.4 ζ :n ja antineutriinon tuotto

Tarkastellaan vielä prosessia $e^-e^+ \rightarrow W^+\zeta^-\bar{\nu}_\zeta$. Tässä prosessissa nähdään ζ :n ja ν_ζ :n massojen eron vaikutus. Kuvassa 13 on plotattu differentiaalinen vaikutusala $\frac{d\sigma}{dE_\zeta}$ tuotetun ζ :n energian E_ζ funktiona kolmella eri ζ :n massalla ν_ζ :n massan ollessa 100 GeV. Massojen ero siis vaikuttaa tuotetun ζ :n energiajakumaan siten, että suuremmalla massaerolla tuotetun ζ :n energia piikittyy voimakkaammin lähelle suurinta kinemaattisesti sallittua arvoa.



Kuva 13. Differentiaalinen vaikutusala $\frac{d\sigma}{dE_\zeta}$ E_ζ :n funktiona prosessissa $e^-e^+ \rightarrow W^+\zeta^-\bar{\nu}_\zeta$. CMS-energia on 1000 GeV ja ν_ζ :n massaksi on oletettu 100 GeV. ζ :n massa on 100 GeV (sininen käyrä), 150 GeV (vihreä käyrä), ja 300 GeV (punainen käyrä).

6 Yhteenveto

Sähköheikko symmetriarikko voidaan generoida fundamentaalien Higgsin hiukkasen asemasta tekniväriteorian avulla. Tekniväriteoria sisältää standardimallin ulkopuolisia fermioneja, teknikvarkkeja, jotka kokevat tekniväriyhmän välittämän vahvan vuorovaikutuksen. Standardimallin fermionien massojen generoimiseksi teoriaan täytyy lisätä vielä uusi vuorovaikutus, jota kutsutaan ETC-vuorovaikutukseksi. Tämä vuorovaikutus kuitenkin luo ongelmallisen suuren kontribuution makua muuttavan neutraalin virran prosesseihin. Tästä ongelmasta päästään eroon, jos tekniväriyhmän kytkinvakion skaalaevoluutio on kävelevää. Jos teknikvarkit ovat tekniväriyhmän peruseesityksessä, kävelevän dynamiikan saavuttamiseksi tarvitaan suuri määrä teknikvarkkeja, joka aiheuttaa liian suuren kontribuution sähköheikkojen tarkkuusmittausten S -parametriin. Tämän vuoksi tutkitaan teoriaa, jossa teknikvarkit ovat tekniväriyhmän jossain korkeammassa esityksessä.

Minimaalinen kävelevä tekniväriteoria sisältää uuden raskaan leptonisukupolven, sekä yhden sukupolven teknikvarkkeja, jotka kuuluvat tekniväriyhmän $SU(2)$ kaksi-indeksiseen symmetriseen esitykseen. Tämän teorian S -, T - ja U -parametrit ovat yhteensopivia havaintojen kanssa. Sähköheikon symmetriarikon skaalan alapuolella teoria koostuu efektiivisesti komposiittihiggsin hiukkasesta ja yhdeksästä pseudo-Goldstonen bosonista eli teknipionista. Kolme teknipioneista absorboituu sähköheikkojen mittabosonien longitudinaalisiksi komponenteiksi. Loput kuusi esiintyvät teoriassa fysikaalisina massiivisina hiukkasina. Nämä eivät kuitenkaan kytke standardimallin fermioneihin. Näin ollen teorian hiukkasspektri eroaa matalalla energialla standardimallista ainoastaan uusien leptoneiden muodossa.

Uuden leptonisukupolven olemassaolo näkyisi muun muassa Higgsin hiukkasen hajoamisessa, mikäli tämä on riittävän raskas hajotakseen leptoniantileptoni-pariksi. Toinen signaali olisi e^-e^+ -törmäyksen leptonisten lopputilojen voimistuminen riittävän suurella energialla.

Viitteet

- [1] W. J. Marciano and H. Pagels, Phys. Rept. **36** (1978) 137.
- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [3] [LEP Collaborations], arXiv:hep-ex/0412015.
- [4] K. Hagiwara *et al.* [Particle Data Group], Phys. Rev. D **66** (2002) 010001.
- [5] R. Barate *et al.* [LEP Working Group for Higgs boson searches], Phys. Lett. B **565** (2003) 61 [arXiv:hep-ex/0306033].
- [6] R. D. Peccei, arXiv:hep-ph/9909233.
- [7] S. M. Bilenky, C. Giunti and W. Grimus, Pramana **51** (1998) 51 [arXiv:hep-ph/9805368].
- [8] K. A. Olive, arXiv:astro-ph/0301505.
- [9] U. Seljak, *Prepared for ICTP Summer School on Astroparticle Physics and Cosmology, Miramare, Trieste, Italy, 12 Jun - 7 Jul 2000*
- [10] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones and D. Zaritsky, arXiv:astro-ph/0608407.
- [11] L. Susskind, Phys. Rev. D **20** (1979) 2619.
- [12] E. Farhi and L. Susskind, Phys. Rept. **74** (1981) 277.
- [13] K. D. Lane, arXiv:hep-ph/0007304.
- [14] S. Weinberg, Phys. Rev. D **19** (1979) 1277.
- [15] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **125** (1962) 397.
- [16] R. Jackiw and K. Johnson, Phys. Rev. D **8** (1973) 2386.
- [17] J. M. Cornwall and R. E. Norton, Phys. Rev. D **8** (1973) 3338.
- [18] M. A. B. Beg and A. Sirlin, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **24** (1974) 379.
- [19] S. B. Gudnason, C. Kouvaris and F. Sannino, Phys. Rev. D **73** (2006) 115003 [arXiv:hep-ph/0603014].
- [20] K. Kainulainen, K. Tuominen and J. Virkajarvi, arXiv:hep-ph/0612247.

- [21] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154.
- [22] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965.
- [23] K. Lane, arXiv:hep-ph/0202255.
- [24] S. P. Martin, arXiv:hep-ph/9709356.
- [25] S. Dimopoulos and L. Susskind, *Nucl. Phys. B* **155** (1979) 237.
- [26] E. Eichten and K. D. Lane, *Phys. Lett. B* **90** (1980) 125.
- [27] M. A. B. Beg, H. D. Politzer and P. Ramond, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1701.
- [28] R. S. Chivukula, arXiv:hep-ph/0011264.
- [29] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* **2** (1992) 1.
- [30] D. E. Groom *et al.* [Particle Data Group], *Eur. Phys. J. C* **15** (2000) 1.
- [31] A. G. Cohen and H. Georgi, *Nucl. Phys. B* **314** (1989) 7.
- [32] D. D. Dietrich and F. Sannino, arXiv:hep-ph/0611341.
- [33] W. E. Caswell, *Phys. Rev. Lett.* **33** (1974) 244.
- [34] D. R. T. Jones, *Phys. Rev. D* **25** (1982) 581.
- [35] H. J. He, N. Polonsky and S. f. Su, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 053004 [arXiv:hep-ph/0102144].
- [36] M. E. Peskin, "THEORY OF PRECISION ELECTROWEAK MEASUREMENTS,"
- [37] E. Witten, *Phys. Lett. B* **117** (1982) 324.
- [38] D. D. Dietrich, F. Sannino and K. Tuominen, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 055001 [arXiv:hep-ph/0505059].
- [39] F. Sannino and K. Tuominen, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 051901 [arXiv:hep-ph/0405209].
- [40] S. Eidelman *et al.* [Particle Data Group], *Phys. Lett. B* **592** (2004) 1.
- [41] [ALEPH Collaboration], *Phys. Rept.* **427** (2006) 257 [arXiv:hep-ex/0509008].

- [42] D. D. Dietrich, F. Sannino and K. Tuominen, Phys. Rev. D **73** (2006) 037701 [arXiv:hep-ph/0510217].
- [43] K. G. Wilson and J. B. Kogut, Phys. Rept. **12** (1974) 75.
- [44] T. Appelquist, P. S. Rodrigues da Silva and F. Sannino, Phys. Rev. D **60** (1999) 116007 [arXiv:hep-ph/9906555].
- [45] A. Pukhov, arXiv:hep-ph/0412191.
- [46] A. Djouadi, arXiv:hep-ph/0503172.