Vektoriavaruudet ja niiden representaatiot

Roope Hietala

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2022

Tiivistelmä: Roope Hietala, *Vektoriavaruudet ja niiden representaatiot* (engl. *Different representations of vector spaces*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 40 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2022.

Tässä työssä tutkitaan erilaisia representaatioita vektoriavaruuksille sekä Hilbertin avaruuden rakennetta. Hilbertin avaruudet ovat täydellisiä sisätuloavaruuksia, jotka ovat yleistys euklidiselle avaruudelle. Tavoitteena on näyttää, että ääretönulotteiselle Hilbertin avaruudelle löydetään aina ortogonaalinen kanta. Lisäksi tarkastellaan miten tämä eroaa Hamelin kannasta, joka on lineaarialgebrallinen kanta avaruudelle. Tämä työ koostuu neljästä osasta, joista ensimmäinen on pedagoginen katsaus vektoriavaruuksiin. Toisessa käydään läpi metrisiä avaruuksia koskevat esitiedot, kolmannessa rakennetaan abstraktien vektoriavaruuksien teoriaa ja tutustutaan jonoavaruuksiin sekä viimeisessä osassa tutkitaan Banachin ja Hilbertin avaruuksia.

Vektoreiden oppimisessa ja opettamisessa on monenlaisia haasteita, jotka ovat peräisin representaation hyödyntämisen puutteista. Representaatiossa saatetaan painottua liikaa esimerkiksi geometrisiin malleihin, jotka saattavat aiheuttaa hämmennystä milloin tarkastellaan yleistä tai spesifiä tapausta. Toisaalta ilman visualisointia siirtymä algebralliseen representaatioon voi olla liian haastavaa. Oppilaiden konseptikuvan muodostuminen vektoreista riippuu myös siitä, minkälaisina objekteina opettaja käsittelee vektoreita ja miten niitä tarkastellaan oppimateriaalissa. Lukion oppimateriaali antaa hyvin geometrisen katsauksen vektoreihin, mutta yliopistossa niitä käsitellään huomattavasti abstraktimmin. Aineenopettajalla on syytä olla vahva ymmärrys abstraktista vektoriavaruudesta, jotta osaa kehittää pedagogisia ratkaisuja joilla antaa selkeän ja rikastetun kuvan vektoreista.

Vektoriavaruudella on aina olemassa kanta, mutta tämän kannan löytäminen ei ole aina helppoa. Kanta on tärkeä vektoriavaruuden rakenteen kannalta, koska voimme esittää minkä tahansa avaruuden vektorin lineaarikombinaationa kannan vektoreista. Tämän vuoksi on tärkeää perehtyä täydellisiin sisätuloavaruuksiin, joissa löydämme aina ortonormaalin Hilbertin kannan. Ortonormaalilla kannalla on paljon käyttöä matematiikkaa soveltavilla aloilla.

Sisällys

Johdanto

Moni lukiolainen on varmasti kyseenalaistanut vektoreiden opiskelun tarpeellisuutta. Minuakin on aikanaan varoitettu, että vektoreita käsittelevä kurssi varmasti tukahduttaa lopullisesti innon matematiikkaa kohtaan. Lyhyellä vilkaisulla saattaakin jäädä kuva, että vektorit ovat vain ylenpalttinen tapa esittää avaruusgeometriaa. Miksi tarvitaan vektoreita, jos sama tilanne voidaan esittää piirtämällä pisteitä ja janoja? Vektoreiden hyödyllisyys paljastuu parhaiten tilanteessa, jossa ihminen ei enää kykene piirtämään tarkkaa kuvaa tutkittavasta tilanteesta. Kaksiulotteisesta tasogeometriasta voidaan tuloksia intuitiivisesti soveltaa suhteellisen hyvin kolmiulotteiseen avaruusgeometriaan. Pätevätkö samat tulokset korkeampiulotteisissa tilanteissa? On aika vaikeaa piirtää vaikka viisiulotteisesta tilanteesta tarkka kuva ja tehdä siitä päätelmiä pelkästään geometrian avulla.

Vektorien alkuperä on enemmän yhteydessä avaruusgeometriaan verrattuna sen nykyaikaiseen abstraktiin algebralliseen esitysmuotoon. Avaruusgeometriaa on tutkittu jo Eukleideen Alkeet -kirjan yhdeksännessä osassa (noin 300 eaa). Vektorien käyttö aloitettiin 1800-luvun lopulla ja tämä on ollut yksi merkittävimpiä mullistuksia matematiikan tutkimuksen saralla. Vektoreiden käyttö lähti liikkeelle siitä, että monikkoja alettiin hyödyntää matemaattisina objekteina joiden laskutoimitukset, yhteenlasku ja skalaaritulo, tehtiin komponenteittain. Vektorien alkuperä voidaan jäljittää useampaan eri henkilöön. Herrmann Grassmann (1809-1877) julkaisi 1844 teoksensa *Die lineale Ausdehnungs-lehre*, joka ei saavuttanut aikanaan suurta suosiota vaikealukuisuutensa vuoksi. William R. Hamilton (1805–1865) esitteli kompleksiluvut reaalilukuparina. Tätä notaatiota käytetään edelleen tänä päivänä. Hän onnistui kehittämään myös neliulotteiset kvaterniot, joilla oli mahdollista laskea yhteen, kertoa ja jakaa [**15**].

Fysiikan tutkimus sai suurta inspiraatiota Hamiltonin tuloksista. Varsinainen ajatus kvaternioista ei säilynyt sellaisenaan ja vektoreiden idea on lähempänä Grassmannin teoriaa [**15**]. Tästä huolimatta Hamiltonille on myönnetty enemmän kunniaa vektoreiden teorian kehittämisestä. Monet fysikaaliset suureet omaavat suuruuden ja suunnan, kuten voima, nopeus ja magneettikentän suuruus. Näiden esittäminen vektorien avulla on mahdollistanut useiden tärkeiden fysiikan teorioiden kehittämisen.

Ensimmäiset aksiomaattiset esitykset vektoreista on kehittänyt Stefan Banach 1900-luvun alussa [**15**]. Tämän jälkeen vektoriavaruuksien teoria on edennyt todella pitkälle ja sillä on tärkeitä käyttökohteita lähes jokaisella tieteenalalla. Tässä tutkielmassa tutustumme erityisesti Hilbertin avaruuksiin. Hilbertin avaruudet ovat täydellisiä sisätuloavaruuksia, jotka ovat kiinnostaneet tutkijoita puhtaan matemaattisessa mielessä ja myös niiden sovellusten ansiosta. Niiden avulla voidaan esimerkiksi kuvailla tarkasti kvanttimekaanisten systeemien tiloja. Hilbertin avaruudet yleistävät Euklidisen avaruuden ääretönulotteisessa tapauksessa.

Hilbertin avaruuksien tutkiminen ja vektoriavaruuksien monipuolinen ymmärtäminen on matematiikan aineenopettajalle tärkeää, koska vektoreiden opettaminen ja oppiminen koetaan haastavaksi [**13**]. Tässä työssä osoitetaan Hilbertin avaruuden ortonormaalien kantojen olemassaolo. Lisäksi osoitamme useita lukiossa opetettavia avaruusgeometrian ja vektoreiden keskeisiä aiheita, kuten Pythagoraan lause sekä normiin ja sisätuloon liittyviä tuloksia. Vektoriavaruuksien abstraktiuden vuoksi tarkastellaan useita esimerkkejä vektoriavaruuksista. Erityisesti tutkitaan l^p jonoavaruuksia, jotka ovat euklidisen avaruuden ääretönulotteinen yleistys. Lisäksi perehdytään vektoreiden opettamiseen ja sen sisältöihin lukiossa sekä yliopistossa ja tutkitaan myös miten erilaiset representaation muodot vaikuttavat vektoreiden opetukseen ja oppimiseen. Näiden kokonaisuuksien avulla haluan näyttää, miten monipuolinen sekä tärkeä osa-alue vektoriavaruudet ovat. Tavoitteenani on motivoida opettajia pohtimaan vektoreiden opetuksen kehittämistä.

Ensimmäisessä osassa tutustutaan vektoriavaruuksia käsittelevien kurssien opetussuunnitelmiin ja tavotteisiin sekä miten ne ovat muuttuneet vuosien varrella. Lisäksi perehdytään vektoreja käsittelevään oppimateriaaliin ja miten nämä materiaalit ovat linjassa opetussuunnitelman laaja-alaisten tavotteiden kanssa. Tästä siirrytään vektoriavaruuden teorian opettamisen ja opettamisen haasteisiin. Vektoriavaruuksien monipuoliset representaation muodot tekevät siitä haastavan aiheen lähestyä. Pelkkä aksiomaattinen lähestymistapa ei riitä, mutta liikaa geometriaan painottuva opetus saattaa antaa oppilaille virhekäsityksiä vektoriavaruuden rakenteesta. Opettajalla on oltava selkeä käsitys vektoriavaruuksista ja niiden rakenteesta sekä monipuolisia pedagogisia menetelmiä, jotka motivoivat niiden oppimiseen.

Toisessa osassa käydään läpi tarvittavia esitietoja ja kolmannessa osassa näytetään, että normiavaruudet ovat metrisiä avaruuksia. Lisäksi kolmannessa osassa tutkitaan erilaisia vektoriavaruuksia ja vektoriavaruuden perusominaisuuksia sekä osoitetaan, että jonoavaruudet l^p normilla varustettuna ovat normiavaruuksia.

Neljännessä osassa tutkitaan Banachin ja Hilbertin avaruuksien perusominaisuuksia ja näytetään, että jonoavaruus l^2 on Hilbertin avaruus jolla on ortonormaali kanta. Hilbertin avaruuksien ortonormaalien kantojen olemassaolo on tärkeä ominaisuus. Hilbertin kannoilla on käyttökohteita useilla matematiikkaa soveltavilla aloilla ja siksi myös arvokas asia tutkia.

LUKU 1

Vektoreiden opetus

Aloitetaan perehtymällä siihen, mitä representaatio tarkoittaa matematiikan oppimisen näkökulmasta ja mikä sen rooli on erityisesti vektoreiden oppimisen ja opettamisen kannalta. Lisäksi tarkastellaan miten eri koulutusasteiden vektoreita käsittelevät sisällöt ovat linjassa opetussuunnitelmien määrittämien tavoitteiden kanssa.

1.1. Representaatio matematiikassa

Representaatio tarkoittaa matemaattisen objektin erilaisia esityksen muotoja. Nämä esitykset voivat olla esimerkiksi algebrallisia, aksiomaattisia tai geometrisia. Representaatiot voivat tapahtua fyysisessä maailmassa tai mielen sisällä. Matematiikan oppiminen voidaan jakaa erilaisiin tärkeisiin kognitiivisiin aktiviteetteihin: representaatio, järkeily, konstruktio ja visualisointi [**17**]. Näiden vaiheiden toteuttamiseksi oppilaiden täytyy hyödyntää erilaisia representaatioita yhtäaikaisesti ja huolellisesti. Kysymyksenasettelu määrittää vahvasti, mikä ratkaisustrategia ja representaatio on paras kullekin tehtävälle. Matemaattinen prosessointi vaatii usein siirtymistä erilaisten representaatioiden välillä [**8**]. Ilman koordinaatiokykyä eri representaatioiden välillä voi vaikuttaa siltä, ettei niillä ole mitään yhteyttä. On kahdenlaisia siirtymiä eri representaatioiden välillä. Ensimmäisessä pysymme samassa representaatiossa. Esimerkiksi Gauss-Jordan -menetelmän käytössä pysytään matriisiesityksessä ja alkuperäistä matriisia vain muunnetaan. Toisessa muutoksessa siirretään esimerkiksi lineaarinen yhtälö karteesiseen koordinaatistoon. Erilaisten representaation muotojen yhdisteleminen on matematiikan oppimisen kannalta todella olennainen keino.

Konseptikuva on käsite, joka kuvailee kaikkia assosiaatioita mitä tietyllä termillä voi olla oppilaiden mielessä [**12**]. Näitä voivat olla esimerkit, vastaesimerkit, visualisaatiot ja konseptin ominaisuudet. Tämä voi olla termin matemaattinen formaali määritelmä, jonka on hyväksynyt matemaattinen yhteisö, tai se voi olla oppilaan rekonstruoima määritelmä konseptista, joka muodostuu heidän konseptikuvastaan. Konseptikuva vektoreista vaikuttaa siihen, miten hyvin oppilas pystyy käyttämään erilaisia representaatioita samalle tilanteelle.

1.2. Vektoreiden opetuksen haasteita

Lineaarialgebra on yksi tärkeimpiä matematiikan aloja ja sillä on suuri rooli matematiikan sovelluksissa. Lineaarialgebraa opetetaan monilla eri koulutustasoilla. Opettajat kokevat sen opettamisen haastavaksi, mutta sen opetuksen tutkimus on vielä tuore tutkimuksen osa-alue [**13**]. Ei ole tarpeeksi tietoa siitä, miten oppilaat oppivat lineaarialgebraa. Lineaarialgebralle on tehty epistemologista ja historiallista tutkimusta, kielen tutkimusta ja ajattelun karakterisoimista lineaarialgebran ymmärtämiseen [**17**]. Lisäksi on tutkittu opetuksen menetelmiä ja suoritettu erilaisia opetuskokeiluja. Lineaarialgebran haasteet voidaan jakaa kolmeen kategoriaan [**13**]:

1. Aksiomaattinen lähestymistapa opetuksessa vaikuttaa oppilaista tarkoituksettomalta ja ylenpalttiselta. Lineaarialgebran opetus tarvitsee eri representaation muotoja, koska pelkkä aksiomaattinen lähestymistapa määritelmien ja lauseiden avulla ei anna oppilaille tarpeeksi konkreettista kuvaa vektoreista ja miksi niitä edes tarvitaan.

2. Monipuolinen representaatio ilman väyliä niiden välillä voi aiheuttaa sekaannuksia ongelmanratkaisun kannalta. Vektoreilla on ainakin kolme yleisesti käytettyä representaation muotoa [**17**]: graafinen esitys nuolilla, taulukoitu esitys sarakekoordinaateilla ja symbolinen esitys aksiomaattisella vektoriavaruuksien teorialla. Lineaarialgebran peruselementit, kuten matriisit ja lineaaristen yhtälöiden systeemit, esiintyvät erilaisissa konteksteissa [**16**]. Vektoreiden useiden eri representaatioiden vuoksi oppilaiden konseptikuvat saattavat olla hyvinkin erilaisia [**12**]. Tämä haastaa oppilaita hahmottamaan, mitä tehtävänannon merkinnöillä tarkoitetaan. Esimerkiksi n-monikko voi esittää vektoria, pistettä euklidisessa avaruudessa tai lineaarisen yhtälön kerrointa. Osa representaation muodoista sopii paremmin laskennallisiin tarkoituksiin ja osa sopii paremmin geometriseen ymmärrykseen.

3. Tarve kehittää abstraktia ajattelua käytännön ajattelun sijaan, jotta pärjää kielellisen yhdistelyn kanssa, jota vaaditaan lineaarialgebran teorian ja rakenteen ymmärtämiseen. Oppilailla on haastetta yhdistää geometrisesti intuitiivinen representaatio algebrallisen representaation kanssa [**7**]. Haasteena on geometrisen mallin kielentäminen ja ongelmien representointi oikeassa muodossa niiden ratkaisemiseksi. Geometrinen esitys on joskus tarkoitettu toimimaan metaforana yleisemmälle tapaukselle lineaarialgebrassa. Oppilaille ei ole aina selvää, onko geometrinen malli tarkoitettu spesifille vai yleiselle tapaukselle [**12**].

Geometrinen esitys ei korvaa aritmeettista ja algebrallista puolta lineaarialgebrasta, mutta se auttaa oppilaita muodostamaan erilaisia väyliä näiden representaatioiden välillä. Geometrinen esitys rikastaa ja tuottaa pohjan algebralliselle ja aritmeettiselle objektin manipuloimiselle. Lineaarialgebrassa on kolme erilaista kieltä, geometrissynteettinen, aritmeettis-analyyttinen ja struktuuria analysoiva kieli, jotka kaikki auttavat lineaarialgebran rakenteen ymmärtämistä ja ne kaikki ovat olemassa yhtä aikaa. Representaatioiden yhtäaikaisuus voi herättää ongelmia lineaarialgebran oppimisessa siirryttäessä eri representaatioiden välillä [**18**]. Matemaattiset konseptit toimivat useilla eri representaation tasoilla. Näiden tasojen välinen vuorovaikutus auttaa ymmärryksen ja tietoisuuden kehittymisessä. Geometrinen esitys on usein helppo ymmärtää, mutta siirtyminen siitä algebralliseen representaatioon voi olla vaikeaa. Matematiikassa on normaalia, että oppilaat saavuttavat tason, jolla heidän aiemmin oppimansa lähestymistavat eivät riitä. Tällöin tarvitaan uudenlaisia pedagogisia ratkaisuja, jotta löydetään joustavia strategioita ongelmanratkaisua varten. Kaksiulotteisen euklidisen avaruuden vektorit edistävät geometrisen esityksen kognitiivista kehittymistä lähestyttäessä vektorin matemaattista abstraktia [**17**]. Toisaalta lineaarialgebraa ei voi opettaa ainoastaan geometriaa yleistävänä matematiikan alana [**4**]. Geometrian käyttöä opetuksessa täytyy tulkita kriittisesti. Uudenlaiset visuaalisen representaation menetelmät auttavat ymmärtämään vektoriavaruuksien abstrakteja malleja sekä tällöin myös helpottavat sen opettamista ja oppimista.

1.3. Vektoreiden opetussuunnitelmat

Lukion opetussuunnitelman perusteet (2019) sisällyttää vektoreiden opetuksen MAA4 Analyyyttinen geometria ja vektorit -kurssiin [**14**]. Esimerkiksi Otavan Juuri-kirjasarjan uuden opetussuunnitelman MAA4 kurssikirja sisältää yhteensä kuusi kappaletta teoriaa vektoreista [**10**]. Aiemmassa vektoreita käsittelevässä kurssikirjassa vektoreita käsiteltiin yhdentoista kappaleen verran [**9**]. Nykyisessä opetussuunnitelmassa keskeiset sisällöt vektoreiden suhteen ovat vektorin peruskäsite, vektoreiden peruslaskutoimitukset sekä vektoreiden suuruuksien ja niiden välisten kulmien tutkiminen. Aiemmin näiden lisäksi vektoreiden avulla tutkittiin suoria ja tasoja avaruudessa ja tutustuttiin lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Vektoreista on tehty aiempaa suppeampi kokonaisuus lukion pakollisessa oppimäärässä. Vektoreiden opetusta on täydennetty valinnaisella MAA10 3D-geometria -kurssilla. Tämän kurssin sisältönä on kolmiulotteinen vektoriavaruus ja sen eri ominaisuuksiin tutustuminen, ristitulo sekä pisteiden, suorien ja tasojen esittäminen vektoreiden avulla avaruudessa. Lisäksi tutustutaan kahden muuttujan funktioihin ja integraalilaskennan sovelluksiin avaruudessa. Valinnainen kurssi yhdessä MAA4 kurssin kanssa tarjoaa sisällöltään aiempaa laajemman katsauksen vektoreihin ja niiden ominaisuuksiin verrattuna vanhaan opetussuunnitelmaan.

Otavan Juuri-kirjassa vektoreista puhutaan hyvin geometrisesta näkökulmasta. Ensimmäisessä vektoreita käsittelevässä kappaleessa vektori määritellään janana, jolla on suunta ja vektorin pituus on sitä vastaavan janan pituus. Vektorin normista puhutaan ainoastaan pituutena, joka määritellään euklidisena normina. Vektorien laskutoimitukset määritellään komponenteittain. Kappaleissa esitellään kaikki vektoriavaruuden laskutoimitusten perusominaisuudet ja sisätulo opetetaan pistetulona. Tason kantavektorit esitellään standardikannan avulla. Yksi hyvä uudistus on vektorien esittäminen matriisimuodossa, jota aiemmin ei ole ainakaan Juuri-kirjoissa tehty. Vektoreiden esittäminen matriisimuotoisina pystyvektoreina auttaa oppilaita hahmottamaan komponenteittain suoritettavan yhteenlaskun ja vakiolla kertomisen [**19**]. Vektorit ovat kuitenkin yleisyydessään paljon kaikkea muutakin, kuin pelkkä geometrinen objekti. Niitä soveltamalla voidaan tutkia monien eri tieteenalojen ongelmia. Geometrinen representaatio on tärkeä työkalu vektoreiden hallitsemiseen, mutta se ei anna koko totuutta siitä mitä vektorit ovat [**4**].

Eräs lukion opetussuunnitelman tavotteista pitkän matematiikan oppimäärän suhteen on ymmärtää matematiikka monialaisena tieteenä ja mallintaa yhteiskunnan, talouden ja luonnonilmiöitä [**14**]. Vektoreista on vaikeaa lukion oppimäärällä sanoa mihin niitä tarvitaan ja mitkä niiden sovelluskohteita ovat.

Jyväskylän yliopiston matematiikan kandidaattiohjelma aloittaa vektoreihin tutustumisen kurssista Lineaarinen algebra ja geometria 1. Sen oppimistavotteina on Gauss-Jordan -menetelmän tunteminen, euklidisen avaruuden perusrakenteen ja käsitteiden hallinta, matriisien ja lineaarikuvausten perusteet ja sisätulon käsite sekä kannan ortogonalisointi. Muissa Suomen yliopistoissa vektoreiden opiskelu aloitetaan sisällöltään vastaavilla kursseilla. Verrattuna esimerkiksi matemaattiseen analyysiin, harppaus lukion vektoriavaruuksien sisällöstä yliopistoon on suuri. Onkin syytä kysyä, että mitä käyttötarkoitusta lukio-opinnot vektoreiden suhteen palvelevat. Opetussuunnitelman mukaan pitkän matematiikan opintojen pitäisi rakentaa pohjaa jatko-opintoja varten.

Vektorit ovat tärkeä ja monipuolinen matematiikan ala, jonka oppimisessa ja opetuksessa on vielä haasteita. Tämän vuoksi on tärkeää, että aineenopettajilla on hyvä ymmärrys vektoriavaruuksien rakenteesta. Tällöin on myös mahdollista tarjota oikeanlaisia representaation muotoja oppimisen kannalta mielekkäillä tavoilla. Nykyään vektoreita opetetaan hyvin geometrisella näkökulmalla ja siihen liittyy omat haasteensa ja riskinsä. Tämän vuoksi on mielekästä käydä vastapainona läpi hyvin aksiomaattinen ja algebrallinen näkökulma vektoreihin, jotta jatkossa geometrinen esitys on tasapainossa ja koherentilla tavalla linjassa algebrallisen representaation kanssa. Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan vektoriavaruuksia ja niitä koskevaa abstraktia teoriaa, jossa on tavoitteena tehdä jonoavaruuksien avulla ääretönulotteinen yleistys euklidiselle avaruudelle.

LUKU 2

Valmistelevia tuloksia

Ennen perehtymistä monimutkaisempiin vektoriavaruuksiin on hyvä kerrata metristen avaruuksien ja kompleksilukujen peruskäsitteitä. Metriset avaruudet tulevat antamaan tärkeitä ominaisuuksia normiavaruuksille. Tämän luvun keskeisimmät lähteet ovat Sheldon Axlerin Measure, Integration & Real Analysis [**2**] ja Juha Heinosen Lectures on Analysis on Metric Spaces [**5**].

2.1. Kompleksiluvut

Aloitetaan kompleksiluvuista. Abstraktien vektoriavaruuksien tapauksessa on mielekästä käyttää kerroinkuntana mahdollisimman laajaa joukkoa, joten kompleksilukujen käyttäminen tässä työssä on perusteltua. Tässä käydään läpi vain kompleksilukujen peruskäsitteet sekä muutama tulos, joita tarvitaan todistamaan esimerkiksi normia ja sisätuloa käsitteleviä tuloksia.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Imaginääriyksikkö i määritellään luvun -1 neliöjuurena, eli $i^2 = -1$. Imaginääriyksikön avulla voidaan määrittää imaginäärilvut eli kompleksiluvut, jotka ovat reaalilukujen laajennus. Kompleksiluku z on muotoa

$$z = a + ib, \text{ missä } a, b \in \mathbb{R}.$$

Kompleksiluvuilla on voimassa samat laskusäännöt kuten reaaliluvuillakin. Olkoon $z_1 = a_1 + ib_1$ ja $z_2 = a_2 + ib_2$. Tällöin summa on

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \in \mathbb{C}.$$

Tulo on taas

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 + i^2 b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Myöhemmin näiden laskutoimitusten ansiosta paljastuu, että kompleksi- ja reaalilukujen joukot ovat molemmat vektoriavaruuksia.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Kompleksiluku voidaan jakaa sen reaali- ja imaginääriosiin. Olkoon $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\operatorname{Re}(z) = a \text{ ja } \operatorname{Im} z = b.$$

MÄÄRITELMÄ 2.3. Kompleksiluvun $z = a + ib$ kompleksikonjugaatti on

$$\overline{z} = a - ib.$$

Määritelmä 2.4. Kompleksiluvun $z = a + ib$ moduuli on

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Moduuli on analoginen reaaliluvuista tuttuun itseisarvoon. Se siis kertoo meille pisteen z etäisyyden origosta.

Lemma 2.5. *Olkoon z kompleksiluku. Tällöin sillä on voimassa seuraavat kolme ominaisuutta:*

(1) $z\overline{z} = |z|^2$
(2) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
(3) $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.

Todistus. Olkoon $z = a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja.
(1) $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = |z|^2$.
(2) $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
(3) $\mathrm{Re}(z)^2 = a^2 \leq a^2 + b^2 = |z|^2$, koska $b^2 \geq 0$. Tästä seuraa, että $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$. □

2.2. Metriset avaruudet

Metrisissä avaruuksissa perusidea on luoda joukko X, joka varustetaan kuvauksella d. Kuvauksen toteuttaessa tietyt ominaisuudet saamme metrisen avaruuden, jossa voimme määrittää joukon alkioiden välisiä etäisyyksiä. Cauchy-jonot ja niiden ominaisuudet ovat tämän työn kannalta tärkein metrisiä avaruuksia koskeva sisältö. Tämän avulla voimme myöhemmin osoittaa erilaisten normi- ja sisätuloavaruuksien täydellisyyden. Tässä täydellisyys tarkoittaa sitä, että meillä on avaruus jossa ei ole ”reikiä”. Emme siis voi pudota tietyltä avaruudelta pois seuraamalla reittiä, jonka jokainen askelma kuuluu tähän avaruuteen. Tämä idea tulee myöhemmin matemaattisesti vielä tarkentumaan, mutta tämä on hyvin heuristinen perusidea.

Määritelmä 2.6. Olkoon X joukko. Funktiota $d : X \times X \to [0, \infty[$ sanotaan joukon X metriikaksi, jos se toteuttaa seuraavat ominaisuudet:

(1) Symmetrisyys: $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$.
(2) Positiivisuus: $d(x, y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$ ja $d(x, y) = 0$ ainoastaan, jos $x = y$.
(3) Kolmioepäyhtälö: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Jos d on metriikka, pari (X, d) muodostaa metrisen avaruuden.

Esimerkki 2.7. Reaaliluvut itseisarvon kanssa muodostavat metrisen avaruuden. Osoitetaan, että pari täyttää määritelmän 2.6 ehdot. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(1) $|x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x|$.
(2) $|x - y| \geq 0$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$; $|x - y| = 0$ jos ja vain jos $x - y = 0$, jolloin $x = y$.
(3) $|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Määritelmä 2.8. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin pisteen x avoin palloympäristö joukossa X on joukko

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, r > 0.$$

Pisteen x avoin palloympäristö siis koostuu niistä pisteistä, joiden etäisyys pisteestä x on pienempää kuin pallon säde r. Pisteen x suljettu palloympäristö määritellään:

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}, r > 0.$$

Suljettu palloympäristö eroaa avoimesta siten, että siihen otetaan myös niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys pisteestä x voi olla yhtä suuri kuin pallon säde r.

MÄÄRITELMÄ 2.9. **Joukon sisä- ja ulkopisteet sekä reuna.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin joukon A sisäpisteiden joukko koostuu pisteistä, joilla on avoin palloympäristö siten, että palloympäristössä on ainoastaan joukon A pisteitä. Tätä merkitään:

$$\operatorname{int} A = \{x \in X \mid B(x,r) \subset A,\ r > 0\}.$$

Joukon A ulkopisteiden joukko koostuu pisteistä, joilla on avoin palloympäristö siten, että palloympäristössä on ainoastaan pisteitä, jotka eivät kuulu joukkoon A. Tämä on siis joukon A komplementin sisäpisteiden joukko.

Pisteet, jotka eivät kuuluu kumpaankaan näistä joukoista, muodostavat joukon A reunan. Joukon A reunaa merkitään ∂A.

MÄÄRITELMÄ 2.10. **Avoimet ja suljetut joukot.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Joukko A on avoin joukko, jos sen kaikki pisteet ovat sisäpisteitä. Joukko A on suljettu, jos se sisältää sisäpisteet ja joukon A reunan ∂A. Joukko ei ole välttämättä suljettu eikä avoin.

MÄÄRITELMÄ 2.11. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja jonon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ alkiot kyseisen avaruuden alkioita. Tällöin sanotaan, että jonon raja-arvo on a, jos

$$\lim_{i \to \infty} d(a, a_i) = 0.$$

MÄÄRITELMÄ 2.12. Olkoot (X, d_1) ja (Y, d_2) metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ kuvaus. Kuvaus f on jatkuva lähtöjoukon pisteessä x, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

kaikilla lähtöjoukon pisteillä y joilla pätee

$$d_1(x,y) < \delta.$$

Kuvaus f on jatkuva, jos se on jatkuva kaikissa lähtöjoukon X pisteissä.

MÄÄRITELMÄ 2.13. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ jono avaruuden X pisteitä. Tämä jono on Cauchy-jono, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon,$$

kun $n \geq N$ ja $m \geq N$.

LAUSE 2.14. *Jokainen metrisen avaruuden suppeneva jono on Cauchy-jono.*

TODISTUS. Olkoon suppenevan jonon raja-arvo muotoa $\lim_{i \to \infty} a_i = a$. Tällöin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $n \geq N$. Olkoon luonnolliset luvut $n \geq N$ ja $m \geq N$. Kolmioepäyhtälön perusteella

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Poiketaan seuraavaksi yläraja-arvoon ja muutamaan sitä koskevaan tulokseen todistaaksemme Bolzano-Weierstrass -lauseen. Tämä on tärkeä lause, jotta saamme vahvempia ehtoja voimaan Cauchy-jonoja varten. Bolzano-Weierstrass todistetaan useammassa osassa ja aloitamme näyttämällä, että se toteutuu rajoitetuilla reaalilukujonoilla. Tämän jälkeen on helppo näyttää, että se pätee kompleksiluvuille ja useampiulotteisissa tapauksissa.

MÄÄRITELMÄ 2.15. Olkoon $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ rajoitettu reaalilukujono. Muodostetaan joukot

$$S_j = \{a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots\} = \{a_k \mid k \geq j\}.$$

Nämä joukot ovat kaikki rajoitettuja. Tällöin on olemassa lukujono $(u_j)_{j=1}^{\infty}$, missä $u_j = \sup S_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Joukko S_{j+1} on joukon S_j osajoukko, joten $u_{j+1} \leq u_j$. Tällöin lukujono $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ on rajoitettu ja vähenevä, joten se suppenee. Määritellään

$$\limsup_{j\to\infty} a_j = \lim_{j\to\infty} u_j = \lim_{j\to\infty} \sup\{a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots\}.$$

Tätä kutsutaan reaalilukujonon $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ yläraja-arvoksi. Jokaisella rajoitetulla reaalilukujonolla $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ on yläraja-arvo.

LEMMA 2.16. *Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ rajoitettu reaalilukujono ja olkoon $u = \limsup_{i\to\infty} a_i$. Tällöin jokaisella $\varepsilon > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ on olemassa $j \in \mathbb{N}$ siten, että $j \geq N$ sekä*

$$|a_j - u| < \varepsilon.$$

TODISTUS. Yläraja-arvon määritelmän 2.15 mukaan $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ missä

$$u_j = \sup\{a_k \mid k \geq j\}.$$

Lukujono $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ on vähenevä. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ sekä olkoon luonnollinen luku $m \geq N$ siten, että

$$u \leq u_m \leq u + \varepsilon.$$

Tällöin siis

$$a_j \leq u_m \leq u + \varepsilon,$$

kun $j \geq m$. Lisäksi $u - \varepsilon$ ei ole joukon $\{a_j \mid j \geq m\}$ pienin yläraja, koska u_m on pienin yläraja ja $u_m > u - \varepsilon$. Tällöin on olemassa luonnollinen luku j siten, että $j \geq m$ ja $a_j > u - \varepsilon$. Tällöin siis $j \geq N$ ja $|a_j - u| < \varepsilon$. □

LAUSE 2.17. ***Bolzano-Weierstrass***. *Jokaisella rajoitetulla päättymättömällä reaalilukujonolla on suppeneva osajono.*

TODISTUS. Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ rajoitettu lukujono. Näytetään, että tällä lukujonolla on osajono, joka suppenee sen yläraja-arvoon. Tällöin lause seuraa, kun olemme löytäneet yhden suppenevan osajonon rajoitetusta lukujonosta. Olkoon yläraja-arvo $u = \limsup_{i\to\infty} a_i$. Seuraten lemmaa 2.16 saadaan kaikille $j \in \mathbb{N}$ luku $k_j \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|a_{k_j} - u| < \frac{1}{j}.$$

Edelleen lemman 2.16 nojalla on olemassa luonnollinen luku k_{j+1} siten, että $k_{j+1} > k_j$ ja

$$|a_{k_{j+1}} - u| < \frac{1}{j+1}.$$

Nyt meillä on kasvava jono $k_1, k_2, k_3, \ldots$ luonnollisia lukuja siten, että

$$|a_{k_j} - u| < \frac{1}{j}$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla j. Tällöin jono $(a_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ on lukujonon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ yläraja-arvoon suppeneva osajono. □

LAUSE 2.18. ***Bolzano-Weierstrass kompleksiluvuille*** *Jokaisella rajoitetulla päättymättömällä kompleksilukujonolla on suppeneva osajono.*

TODISTUS. Jokainen kompleksilukujono voidaan jakaa sen realiseen ja imaginaariseen osaan. Koska kompleksilukujono on rajoitettu, niin myös sen reaaliosa on rajoitettu. Tällöin lauseen 2.17 mukaan reaaliosalla on suppeneva osajono. Tarkastellaan tämän suppenevan osajonon imaginaariosia. Koska imaginaariosa on rajoitettu löydetään sieltä suppeneva osajono. Näin saamme osajonon, jossa reaali- ja imaginaariosat lukujonosta suppenevat ja tällöin myös kyseinen osajono suppenee. □

Bolzano-Weierstrass toteutuu useampiulotteisille lukujonoille samanlaisella ideal-la miten todistimme sen kompleksilukujen tapauksessa. Aloitamme etsimällä rajoitetun lukujonon ensimmäisen ulottuvuuden suppenevaa osajonoa, kuten lauseen 2.18 tapauksessa. Sitten etsimme tämän osajonon toisen ulottuvuuden suhteen suppenevan osajonon. Tätä jatketaan kunnes jokainen ulottuvuus on käyty läpi ja meillä on rajoitetun lukujonon suppeneva osajono useampiulotteisessa tapauksessa.

LAUSE 2.19. ***Cauchyn ehto.*** *Ääretön kompleksilukujono suppenee jos ja vain jos se on Cauchy-jono.*

TODISTUS. Lause 2.14 osoittaa väitteen toisen suunnan. Riittää siis osoittaa, että jokainen Cauhcy-jono suppenee. Osoitetaan ensin, että jokainen Cauchy-jono on rajoitettu. Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ Cauhcy-jono. Tällöin on olemassa $N, n, m \in \mathbb{N}$ siten, että $n, m \geq N$ ja

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Erityisesti tästä saadaan, että

$$|a_n| \leq |a_N| + 1,$$

kun $n \geq N$. Tällöin siis $|a_j| \leq A$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, missä A on maksimi luvuista $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|$ ja $|a_N| + 1$, joten Cauhcy-jono on rajoitettu. Bolzano-Weierstrass 2.18 sanoo, että jokaisella Cauchy-jonolla on suppeneva osajono. Olkoon tämä suppeneva osajono $(a_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ ja olkoon sen raja-arvo a. Osoitetaan, että $\lim_{i\to\infty} a_i = a$, eli alkuperäinen Cauchy-jono suppenee samaan arvoon, kuin sen suppeneva osajono.

Koska kyseessä on Cauchy-jono saadaan, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luonnollinen luku N siten, että $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon$, kun $n, m \geq N$. Valitaan j niin suureksi, että $m_j \geq N$ ja $|a_{m_j} - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_{m_j} + a_{m_j} - a| \\ &\leq |a_n - a_{m_j}| + |a_{m_j} - a| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

kun $n \geq N$ ja väite seuraa. □

MÄÄRITELMÄ 2.20. Metrinen avaruus on täydellinen, jos sen kaikki Cauchy-jonot suppenevat.

Täydellisyydellä halutaan siis sanoa, että tutkittavassa avaruudessa ei ole ”reikiä” johon pudotaan jos kuljetaan pitkin Cauchy-jonoa. Esimerkiksi rationaalilukujen joukko varustettuna tavallisella itseisarvolla ei ole täydellinen metrinen avaruus, koska Cauchy-jono $(1+\frac{1}{n})^n \in \mathbb{Q}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ mutta $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \notin \mathbb{Q}$. Myöhemmin osoitetaan, miten erilaiset vektoriavaruudet ovat täydellisiä metrisiä avaruuksia. Täydellisyys on erittäin tärkeä ominaisuus ja se tulee myöhemmin vielä vahvemmin ilmi.

LUKU 3

Vektoriavaruudet

3.1. Vektoriavaruuksien perusominaisuuksia

Siirrytään tutkimaan vektoriavaruuksia ja vektoreita. Seuraavaksi määrittelemme aksiomaattisesti vektoriavaruudet sekä osoitetaan niitä koskevia perustuloksia. Pyrkimys on selvittää mitä vektorit oikeastaan ovat ja minkälainen rakenne niiden muodostamalla vektoriavaruudella on. Tutustumme vektoriavaruuksien kantoihin ja niiden muodostamiseen. Tämä tulee olemaan tärkeää tarkastellessamme Hilbertin avaruuksia. Lisäksi tutustumme jonoavaruuksiin, jotka ovat työn kannalta keskeisimmät vektoriavaruudet. Jonoavaruudet ovat ääretönulotteinen yleistys Euklidisesta avaruudesta ja siksi on kiinnostavaa tarkastella myöhemmin, että onko tällaisilla avaruuksilla olemassa kantoja ja minkälaisia ne ovat.

Määritelmä 3.1. $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus $\mathcal{V}$ on epätyhjä kokoelma vektoreiksi kutsuttuja alkioita, joille on määritelty kaksi laskutoimitusta: vektoreiden yhteenlasku ja skalaarilla kertominen. Jos vektorit u ja v kuuluvat vektoriavaruuteen $\mathcal{V}$, summavektori $u + v$ on myös vektoriavaruudessa $\mathcal{V}$. Jos λ on kerroinkunnan $\mathbb{K}$ alkio ja u on vektori avaruudessa $\mathcal{V}$, niin tällöin λu on vektoriavaruudessa $\mathcal{V}$. Vektoriavaruuden laskutoimituksilla on seuraavat ominaisuudet:
Olkoot v, u, w vektoreita ja λ_1, λ_2 kerroinkunnan skalaareita.

(1) Kommutatiivisuus: $u + v = v + u$.
(2) Assosiatiivisuus: $u + (v + w) = (u + v) + w$.
(3) Nollavektorin olemassaolo: on olemassa $0 \in \mathcal{V}$ siten, että $0 + u = u$ kaikilla $u \in \mathcal{V}$.
(4) Käänteivektorin olemassaolo: jokaisella $v \in \mathcal{V}$ on olemassa $w \in \mathcal{V}$ siten, että $v + w = 0$.
(5) $1v = v$.
(6) $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1\lambda_2)v$.
(7) $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$.
(8) $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$.

Huomautus 3.2. Määritelmän 3.1 ominaisuuden (2) ansiosta voimme kirjoittaa vektorien yhteenlaskun $u + v + w$ ilman sulkeita. Samalla tavalla ominaisuus (6) mahdollistaa kertolaskun $\lambda_1\lambda_2 v$ kirjoittamisen ilman sulkeita. Vektoriavaruudessa on aina yksi nollavektori ja jokaisella vektorilla on tasan yksi käänteisvektori.

Kerroinkunta $\mathbb{K}$ on yleensä reaali- tai kompleksilukujen joukko. Jatkossa tulokset käydään läpi yleisessä tapauksessa, ellei erikseen mainita mikä kerroinkunta on kyseessä.

Esimerkki 3.3. Olkoon vektoriavaruus $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$. Tällöin vektoreiden yhteenlasku ja skalaarilla kertominen toimivat molemmat komponenteittain. Olkoot

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ ja } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Tällöin niiden summa on

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}.$$

Kerroinkunnan alkiolla $\lambda \in \mathbb{R}$ vektoria kertomalla saadaan

$$\lambda u = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 3.4. Tutuimmat esimerkit vektoriavaruuksista ovat $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{C}^n$. Yliopiston peruskursseilla käsitellään pääosin vektoriavaruutta $\mathbb{R}^n$ ja lukiossa avaruuksia $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$. Lisäksi tavallinen reaalilukujen joukko on vektoriavaruus, mutta normaalisti tällaisissa yksiulotteisissa tapauksissa ei ole kovinkaan tavanomaista puhua vektoriavaruudesta. Muita vektoriavaruuksia ovat esimerkiksi $m \times n$-matriisien avaruus $\mathbb{K}_{n\times m}$, polynomifunktioiden avaruus ja jatkuvien funktioiden avaruus $C[a, b]$.

Tämän työn kannalta tärkeä vektoriavaruuksien joukko on l^p-avaruudet, joita kutsutaan jonoavaruuksiksi. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Jonoavaruus l^p on avaruuden $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ aliavaruus, joka koostuu lukujonoista $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ joilla on voimassa ominaisuus

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p < \infty.$$

Jos $p = \infty$, niin saadaan jonoavaruus l^{∞}, joka koostuu lukujonoista $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ joilla on ominaisuus

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |u_i| < \infty.$$

Osoitamme myöhemmin, että l^p avaruudet ovat vektoriavaruuksia. Nämä tulevat olemaan tärkeimmät esimerkit näyttämään eroja esimerkiksi Banachin ja Hilbertin avaruuksien välillä.

Määritelmä 3.5. Olkoon joukko A vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ osajoukko. Tällöin osajoukkoa A sanotaan vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ aliavaruudeksi, jos sen laskutoimitukset ovat suljettuja joukossa A. Toisin sanoen $u + v \in A$ kaikilla $u, v \in A$ sekä $\lambda u \in A$ kaikilla $u \in A$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Kokoelma vektoreita $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektoriavaruudessa $\mathcal{V}$ muodostavat lineaarikombinaatioita, jotka ovat muotoa

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j.$$

Jos tämä summa on nolla ainoastaan silloin, kun λ_j on nolla kaikilla $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, sanotaan vektoreiden olevan lineaarisesti riippumattomia.

Vektoreiden kokoelmaa sanotaan lineaarisesti riippuvaksi, jos summa on nolla jossain muussa tapauksessa. Tällöin ainakin yksi näistä vektoreista voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa, esimerkiksi

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n, \text{ kun } \lambda_1 \neq 0.$$

MÄÄRITELMÄ 3.7. Numeroituva tai ylinumeroituva kokoelma vektoreita muodostaa vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ kannan, jos

(1) Vektoreiden äärelliset lineaarikombinaatiot muodostavat kaikki avaruuden V vektorit, eli

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \ : \ \lambda_j \in \mathbb{K}, \ n \in \mathbb{N} \right\} = \mathcal{V}.$$

(2) Kantavektorien mikä tahansa äärellinen osajoukko on lineaarisesti riippumaton.

Tässä on molemmat ehdot ovat tärkeitä. Ensimmäinen ehto varmistaa, että meillä on tarpeeksi vektoreita kokoelmassamme muodostaaksemme minkä tahansa avaruuden $\mathcal{V}$ vektorin. Toinen ehto varmistaa, että vähemmällä määrällä vektoreita ensimmäinen ehto ei toteudu. Vektoriavaruudella $\mathcal{V}$ on yleisesti paljon erilaisia kantoja, mutta jokaisessa kannassa on aina sama määrä vektoreita. Tämä vektorien lukumäärä kuvaa vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ dimensiota ja tätä merkitään $\dim V$. Vektoriavaruuden kantavektorien virittämää joukkoa merkitään ainakin äärellisessä tapauksessa yleensä $\langle v_1, v_1, \ldots, v_n \rangle$.

HUOMAUTUS 3.8. Vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ dimension ollessa äärellinen on yleensä suoraviivaista etsiä sopiva kanta. Helpoin tapa on käyttää luonnollista kantaa. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan muodostavat vektorit e_1 ja e_2. Esimerkiksi polynomifunktioiden muodostama vektoriavaruus on ääretönulotteinen ja sen kanta on suhteellisen helppo löytää valitsemalla kannaksi $\langle 1, x, x^2, \ldots \rangle$. Tällaista ääretöntä kantaa kutsutaan Hamelin kannaksi. Toisaalta osalle vektoriavaruuksista voi olla hyvin vaikeaa löytää kantaa. Esimerkiksi reaaliarvoisten jatkuvien funktioiden vektoriavaruuden kanta on äärimmäisen vaikeaa löytää. Tämän vuoksi Hamelin kannoilla ei ole kovinkaan paljon käyttöä meille, koska myöhemmin muodostaessamme ortonormaaleja kantoja Hilbertin avaruuksissa huomaamme sen olevan paljon käytännönläheisempää [**11**]. Kuitenkin Hamelin kanta on aina olemassa riippumatta onko se helppo löytää vai ei. Tämä on osoitettavissa Zornin lemmalla, joka on ekvivalentti valinta-aksiooman kanssa. Ideana on muodostaa maksimaalinen lineaarisesti riippumaton joukko, joka osoittautuu ääretönulotteisen vektoriavaruuden kannaksi. Käytännössä tämä onnistuu valitsemalla esimerkiksi yksi alkio, joka on selvästi itsenään lineaarisesti riippumaton. Jos tämä alkio virittää avaruuden, niin kaikki on selvää. Muussa tapauksessa lisätään lineaarisesti riippumaton vektori ja tarkastetaan virittääkö tämä joukko avaruuden. Tätä jatketaan kunnes olemme saaneet kannan valmiiksi. Zornin lemma varmistaa, että tämä prosessi todellakin saa aikaan kannan [**2**]. Tutustumme Zornin lemmaan tarkemmin myöhemmin, kun tutkimme Hilbertin avaruuksia.

MÄÄRITELMÄ 3.9. Olkoot $\mathcal{V}_1$ ja $\mathcal{V}_2$ vektoriavaruuksia ja $L : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ kuvaus. Kuvausta L sanotaan lineaarikuvaukseksi, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

(1) $L(u+v) = L(u) + L(v)$ kaikilla lähtöavaruuden $\mathcal{V}_1$ vektoreilla u ja v.
(2) $L(\lambda u) = \lambda L(u)$ kaikilla lähtöavaruuden V_1 vektoreilla u ja kerroinkunnan $\mathbb{K}$ alkioilla λ.

Seuraavaksi tutustumme sisätuloon. Sisätulo antaa meille mahdollisuuden tutkia vektoriavaruuden alkioiden välisiä kulmia ja niiden suuruuksia. Sisätulo ja sisätulon indusoima normi tulevat olemaan tärkeitä käsitteitä Hilbertin avaruuksien kannalta.

MÄÄRITELMÄ 3.10. Olkoon $\mathcal{V}$ vektoriavaruus. Tällöin kuvaus $(\cdot \mid \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ on sisätulo, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla avaruuden $\mathcal{V}$ vektoreilla u, v ja w ja kerroinkunnan $\mathbb{K}$ alkioilla λ:

(1) $(u|v) = \overline{(v|u)}$
(2) $(\lambda u|v) = \lambda(u|v)$
(3) $(u+v|w) = (u|w) + (v|w)$
(4) $(u|u) \geq 0$, $(u|u) = 0$ jos ja vain jos $u = 0$.

ESIMERKKI 3.11. Olkoon $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ ja u ja v sen vektoreita. Tällöin eräs sisätulo on

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}.$$

Osoitetaan, että tämä todellakin on sisätulo:

(1) $\overline{(v|u)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{v_j \overline{u_j}} = \sum_{j=1}^{n} \overline{v_j} u_j = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j} = (u|v).$

(2) $(\lambda u|v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda u_j \overline{v_j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j} = \lambda(u|v).$

(3)
$$\begin{aligned}
(u+v|w) &= \sum_{j=1}^{n} (u_j + v_j)\overline{w_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (u_j \overline{w_j} + v_j \overline{w_j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{w_j} + \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w_j} = (u|w) + (v|w).
\end{aligned}$$

(4) $(u|u) = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{u_j} = \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2 \geq 0$ kaikilla $u \in \mathbb{C}^n$ ja $(u|u) = 0$ jos ja vain jos $|u_j|^2 = 0$ eli $u_j = 0$ kaikilla $j = 1, 2, \dots, n$ eli $u = 0$.

Reaalisessa tapauksessa sisätulon voi laskea huomioimatta kompleksikonjugaattia. Tätä sisätuloa kutsutaan usein avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnolliseksi sisätuloksi. Lukiossa sisätulosta puhutaan lähinnä pistetulona, joka on tämän sisätulon reaalinen versio yleensä kahdessa tai kolmessa ulottuvuudesta.

Vektoriavaruuteen $C([a, b])$ voidaan määritellä sisätulo asettamalla

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

MÄÄRITELMÄ 3.12. Olkoon $\mathcal{V}$ vektoriavaruus ja u sekä v sen vektoreita. Tällöin sanotaan, että vektorit ovat ortogonaaliset, jos

$$(u|v) = 0.$$

Vektoreiden ortogonaalisuutta merkitään $u \perp v$.

HUOMAUTUS 3.13. Ortogonaalisuudesta puhutaan myös vektoreiden ”kohtisuoruutena”. Tämä on helppo visualisoida esimerkiksi $\mathbb{R}^2$-tason vektoreilla. Ajatus kohtisuoruudesta ei välttämättä kuitenkaan ole niin selkeä korkeampiulotteisissa tapauksissa tai esimerkiksi tilanteessa, jossa meillä on vektoreina reaaliarvoisia funktioita.

3.2. Normiavaruus

Seuraavaksi määrittelemme vektorinormin ja normiavaruuden, jossa vektoriavaruus on varustettu normilla. Tämän jälkeen osoitamme, että normiavaruudet ovat metrisiä avaruuksia. Tämä mahdollistaa aiemmin osoitettujen metristen avaruuksien tulosten soveltamisen, jotta voimme alkaa myöhemmin tutkimaan täydellisiä normiavaruuksia.

MÄÄRITELMÄ 3.14. Olkoon $\mathcal{V}$ vektoriavaruus. Tällöin kuvaus $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ on normi, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla avaruuden $\mathcal{V}$ vektoreilla u ja v sekä kerroinkunnan $\mathbb{K}$ alkioilla λ:

(1) $\|u\| \geq 0$ ja $\|u\| = 0$ jos ja vain jos $u = 0$.
(2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$
(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Jos kuvaus $\|\cdot\|$ on normi, niin tällöin vektoriavaruus $\mathcal{V}$ varustettuna tällä normilla on normiavaruus.

LAUSE 3.15. *Olkoon $\mathcal{V}$ normiavaruus. Tällöin kuvaus $d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [0, \infty[$,*

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

on metriikka avaruudessa $\mathcal{V}$.

TODISTUS. Tarkastetaan, että metriikan ehdot toteutuvat.

(1) $d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = |(-1)|\|v - u\| = \|v - u\| = d(v, u)$.
(2) $d(u, v) = \|u - v\| \geq 0$ normin määritelmän mukaan sekä $d(u, v) = 0$ jos ja vain jos $u - v = 0$. Tästä seuraa, että $u = v$.
(3) $d(u, w) = \|u - w\| = \|u - v + v - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w)$.

□

Vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ normeista puhuttaessa mainitaan joskus Frechétin metriikka. Jokainen vektoriavaruuden normi on tällainen ja ne määrittelevät indusoidun metriikan $d(u,v) = \|u - v\|$.

MÄÄRITELMÄ 3.16. Olkoon $\mathcal{V}$ normiavaruus ja $(\cdot \mid \cdot)$ sen sisätulo. Tällöin

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)}$$

on sisätulon indusoima normi.

Lähdetään osoittamaan, että vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ sisätulon indusoima normi on normi. Ensin täytyy osoitaa Cauchy-Schwarzin epäyhtälö.

LAUSE 3.17. ***Cauchy-Schwarz epäyhtälö.*** *Olkoon $\mathcal{V}$ vektoriavaruus ja $(\cdot \mid \cdot)$ sen sisätulo. Lisäksi $\|\cdot\|$ on sisätulon indusoima normi. Tällöin*

$$|(u|v)| \leq \|u\|\|v\|, \text{ kaikilla avaruuden } \mathcal{V} \text{ vektoreilla } u \text{ ja } v.$$

TODISTUS. Jos $v = 0$, niin $(u|0) = \overline{(0|u)} = 0 \cdot \overline{(0|u)} = 0$. Tällöin väite on selvä. Olkoon siis $v \neq 0$, jolloin $(v|v) \neq 0$. Olkoon $\lambda = \frac{(u|v)}{\|v\|^2}$.

Nyt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|u - \lambda v\|^2 = (u - \lambda v|u - \lambda v) \\
&= (u|u - \lambda v) - \lambda(v|u - \lambda v) \\
&= \overline{(u - \lambda v|u)} - \lambda\overline{(u - \lambda v|v)} \\
&= \overline{(u|u)} - \overline{\lambda}\overline{(v|u)} - \lambda\overline{(u|v)} + \lambda\overline{\lambda}\overline{(v|v)} \\
&= (u|u) - \overline{\lambda}(u|v) - \lambda\overline{(u|v)} + \lambda\overline{\lambda}(v|v) \\
&= \|u\|^2 - \frac{\overline{(u|v)}}{\|v\|^2}(u|v) - \frac{(u|v)}{\|v\|^2}\overline{(u|v)} + \frac{(u|v)}{\|v\|^2}\frac{\overline{(u|v)}}{\|v\|^2}\|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 - \frac{(u|v)\overline{(u|v)}}{\|v\|^2} \\
&= \|u\|^2 - \frac{|(u|v)|^2}{\|v\|^2}.
\end{aligned}$$

Tällöin saadaan epäyhtälö

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{|(u|v)|^2}{\|v\|^2},$$

josta ratkaistaan

$$|(u|v)|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2.$$

Haluttu tulos on osoitettu, kun otamme tästä epäyhtälöstä puolittain neliöjuuren. □

LAUSE 3.18. *Sisätulon indusoima normi on normi.*

TODISTUS. Osoitetaan väite sisätulon määritelmää 3.10 hyödyntämällä.
1.) $\|u\| = \sqrt{(u|u)} \geq 0$, koska sisätulo on epänegatiivinen ja neliöjuuri antaa myös epänegatiivisen arvon. Toisaalta $\|u\| = \sqrt{(u|u)} = 0$ jos ja vain jos $(u|u) = 0$ ja se on määritelmän 3.10 nojalla mahdollista ainoastaan silloin kun $u = 0$.

2.) Tarkastellaan normin neliötä:

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|^2 &= (\lambda u|\lambda u) = \lambda(u|\lambda u)\\ &= \lambda\overline{\lambda}(u|u) = |\lambda|^2(u|u).\end{aligned}$$

Tästä puolittain neliöjuuren ottamalla saadaan $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.

3.) Tarkastellaan taas normin neliötä:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= (u+v|u+v) = (u|u+v) + (v|u+v)\\ &= \overline{(u+v|u)} + \overline{(u+v|v)}\\ &= \overline{(u|u)} + \overline{(v|u)} + \overline{(u|v)} + \overline{(v|v)}\\ &= \|u\|^2 + (u|v) + \overline{(u|v)} + \|v\|^2\\ &= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}((u|v)) + \|v\|^2\\ &\le \|u\|^2 + 2|(u|v)| + \|v\|^2\\ &\le \|u\|^2 + 2\|u\|\ \|v\| + \|v\|^2\\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 .\end{aligned}$$

Ottamalla tästä puolittain neliöjuuret saadaan $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$. $\square$

HUOMAUTUS 3.19. Kaikki normit eivät ole sisätulon indusoimia normeja. Esimerkiksi p-normin tapauksessa, missä $1 \le p < \infty$, vektorin u pituus määritellään

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Tästä saadaan indusoitu normi ainoastaan, kun $p = 2$, jolloin se on euklidinen normi.

Osoitetaan seuraavaksi kaikille koulusta tuttu geometrian tulos Pythagoraan lause. Muotoilemme sen yleisen sisätuloavaruuden tapauksessa, joka mahdollistaa sen soveltamisen kaikissa sisätuloavaruuksissa. Tällöin saamme siitä paljon enemmän käytännön hyötyä sen alkuperäiseen muotoon verrattuna.

LAUSE 3.20. ***Pythagoraan lause.*** *Olkoon $\mathcal{V}$ sisätuloavaruus sekä $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sen ortogonaalisia vektoreita. Tällöin näille vektoreille pätee*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} u_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|^2.$$

TODISTUS. Todistetaan väite induktiolla. Kun $n = 2$ saadaan kaksi ortogonaalista vektoria. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}\|u_1+u_2\|^2 &= (u_1+u_2|u_1+u_2) = (u_1|u_1+u_2) + (u_2|u_1+u_2)\\ &= \overline{(u_1+u_2|u_1)} + \overline{(u_2|u_1+u_2)}\\ &= \overline{(u_1|u_1)} + \overline{(u_2|u_1)} + \overline{(u_2|u_1)} + \overline{(u_2|u_2)}\\ &= (u_1|u_1) + 2(u_1|u_2) + (u_2|u_2)\\ &= \|u_1\|^2 + 0 + \|u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2.\end{aligned}$$

Kun $n = k - 1$ oletetaan, että

$$\left\| \sum_{j=1}^{k-1} u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{k-1} \|u_j\|^2.$$

Nyt, kun $n = k$ saadaan:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{k} u_j \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{k-1} u_j + u_k \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{k-1} u_j \right\|^2 + \|u_k\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \|u_j\|^2 + \|u_k\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k} \|u_j\|^2.
\end{aligned}$$

Toinen yhtäsuuruus toteutuu samankaltaisella päättelyllä mitä teimme kohdan $n = 2$ laskussa. Koska vektorit $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ovat oletuksen mukaan ortogonaalisia, saadaan $(u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1}|u_k) = (u_1|u_k) + (u_2|u_k) + \cdots + (u_{k-1}|u_k) = 0$. Tällöin induktioaskeleen välivaiheet toteutuvat. □

LAUSE 3.21. ***Suunnikassääntö.*** *Vektoriavaruudessa $\mathcal{V}$, jossa on sisätulon indusoima normi, pätee suunnikassääntö. Toisin sanoen olkoot $u, v \in \mathcal{V}$ vektoreita. Tällöin pätee*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

TODISTUS. Olkoot u ja v vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ vektoreita ja käytetään sisätulon indusoimaa normia. Tällöin

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= (u + v|u + v) + (u - v|u - v) \\
&= (u|u + v) + (v|u + v) + (u|u - v) - (v|u - v) \\
&= \overline{(u + v|u)} + \overline{(u + v|v)} + \overline{(u - v|u)} - \overline{(u - v|v)} \\
&= \overline{(u|u)} + \overline{(v|u)} + \overline{(u|v)} + \overline{(v|v)} + \overline{(u|u)} - \overline{(v|u)} - \overline{(u|v)} + \overline{(v|v)} \\
&= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.
\end{aligned}$$

□

Suunnikassääntö tulee olemaan tärkeä ominaisuus Hilbertin avaruuksille ja sen avulla nähdään myöhemmin minkälaiset normiavaruudet voivat olla Hilbertin avaruuksia.

ESIMERKKI 3.22. Varustetaan vektoriavaruus $\mathbb{C}^n$ sisätulon

$$(u|v) = \sum_{j=1}^{n} u\overline{v}$$

indusoimalla normilla. Tämä on täydellinen metrinen avaruus. Riittää osoittaa, että sisätulon indusoimalla normilla kaikki vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ Cauchy-jonot suppenevat. Lauseen 2.19 mukaan kaikki kompleksiset Cauchy-jonot suppenevat.

Olkoon $(a_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, \ldots, a_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$ Cauchy-jono. Nyt tarkastellaan koordinaattia k. Tällä pätee, että jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|a_n^{(k)} - a_m^{(k)}| < \varepsilon, \text{ kun } n, m \geq N.$$

Toisin sanoen jokainen komponentti Cauchy-jonosta on myös Cauchy-jono. Tällöin jokaisella komponentilla k on olemassa $b^{(k)} \in \mathbb{C}$ siten, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$, jolla pätee

$$|a_m^{(k)} - b^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \text{ kun } m \geq N.$$

Valitaan vektori $b = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}) \in \mathbb{C}^n$. Tällöin saadaan

$$\|a_j - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_j^{(k)} - b^{(k)}|^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} < \varepsilon, \text{ kun } j \geq N.$$

Saimme täydellisen normiavaruuden, eli sellaisia todellakin on olemassa. Tämän työn viimeisessä luvussa tutustumme erilaisiin täydellisiin normi- ja sisätuloavaruuksiin.

Osoitetaan tämän kappaleen lopuksi, että l^p-avaruudet ovat normiavaruuksia, kun ne varustetaan p-normilla. Tämän todistaminen on muuten suoraviivaista, mutta kolmioepäyhtälön todistaminen on työläämpää. Tätä varten osoitetaan kolme tärkeää epäyhtälöä.

Lause 3.23. ***Youngin epäyhtälö.*** *Olkoot $p, q \in \mathbb{R}$ positiivisia lukuja siten, että*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tällöin kaikilla $a, b \geq 0$ pätee

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $a, b > 0$. Jos $a = 0$ tai $b = 0$ niin väite on selvä. Nyt potenssien- ja logaritmien laskusääntöjen ja eksponenttifunktion konveksiuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)} \\ &= e^{\frac{1}{p}p\ln(a)+\frac{1}{q}q\ln(b)} \\ &= e^{\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q)} \\ &\leq \frac{1}{p}e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(b^q)} \\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \end{aligned}$$

□

LAUSE 3.24. ***Hölderin epäyhtälö.*** *Olkoot $p, q \in \mathbb{R}$ positiivisia lukuja siten, että*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

sekä $u \in l^p$ ja $v \in l^q$. Tällöin $uv = (u_i v_i)_{i=1}^{\infty} \in l^1$ sekä

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

TODISTUS. Voidaan olettaa, että $u \neq 0$ ja $v \neq 0$. Määritetään jonot $a = \frac{u}{\|u\|_p}$ ja $b = \frac{v}{\|v\|_q}$. Tällöin

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{u_i}{\|u\|_p} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|u\|_p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|u\|_p} \|u\|_p = 1.$$

Vastaavasti voidaan näyttää, että $\|b\|_q = 1$. Sovelletaan Youngin epäyhtälöä, jolloin kaikille $i = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$|a_i b_i| \leq \frac{1}{p} |a_i|^p + \frac{1}{q} |b_i|^q.$$

Tällöin siis

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} |a_i|^p + \frac{1}{q} |b_i|^q \right) < \infty$$

joten $(a_i b_i)_{i=1}^{\infty} \in l^1$. Tällöin myös $(u_i v_i)_{i=1}^{\infty} = \|u\|_p \|v\|_q (a_i b_i)_{i=1}^{\infty} \in l^1$. Sovelletaan uudelleen Youngin epäyhtälöä, jolloin

$$\|ab\|_1 \leq \frac{1}{p} \|a\|_p^p + \frac{1}{q} \|b\|_q^q = 1.$$

Tästä seuraa

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q \|ab\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

kuten haluttiin. □

LAUSE 3.25. ***Minkowskin epäyhtälö.*** *Olkoot $u, v \in l^p$. Tällöin*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i + v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

TODISTUS. Voidaan olettaa, että $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i + v_i|^p \neq 0$. Määritellään

$$q = \frac{p}{p-1},$$

jolloin

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|u_i+v_i|^p &= \sum_{i=1}^{\infty}|u_i+v_i||u_i+v_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{\infty}|u_i||u_i+v_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{\infty}|v_i||u_i+v_i|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty}|u_i+v_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty}|u_i+v_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{\infty}|u_i+v_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Ensimmäinen epäyhtälö seuraa kolmioepäyhtälöstä kompleksiluvuille. Toinen epäyhtälö seuraa Hölderin epäyhtälöstä sekä siitä, että $(p-1)q = p$. Haluttu tulos saadaan jakamalla epäyhtälö puolittain termillä

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|u_i+v_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

ja käyttämällä kaavaa $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. □

Esimerkki 3.26. Osoitetaan, että jonoavaruudet ovat normiavaruuksia kun ne varustetaan normilla

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ missä } 1 \leq p < \infty.$$

Tarkastetaan, että jonoavaruudet ovat suljettuja laskutoimitusten suhteen. Olkoot $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ ja $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ l^p-avaruuden jonoja ja $\lambda \in \mathbb{K}$.

(1) Tällöin alkioiden yhteenlasku tehdään komponenteittain

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|u_i+v_i|^p &\leq \sum_{i=1}^{\infty}|2\max\{u_i,v_i\}|^p = \sum_{i=1}^{\infty}2^p|\max\{u_i^p,v_i^p\}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}2^p(|u_i|^p+|v_i|^p) = 2^p\sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^p + 2^p\sum_{i=1}^{\infty}|v_i|^p < \infty\end{aligned}$$

ja vakiolla kertominen samalla idealla, jolloin saadaan

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda u_i|^p = |\lambda|^p\sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^p < \infty.$

Jonoavaruuden neutraalialkio on lukujono, jonka jäsenet ovat kaikki nollia. Jokaisella jonoavaruuden alkiolla $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ on vasta-alkio $(-u_i)_{i=1}^{\infty}$. Muut laskutoimituksien ominaisuudet seuraavat siitä, että jonoavaruus on avaruuden $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ aliavaruus ja reaalisekä kompleksiluvuilla pätee kommutatiivisuus, assosiatiivisuus, distributiivisuus ja transitiivisuus.

Osoitetaan vielä, että l^p-avaruudet ovat normiavaruuksia l^p-normilla varustettuna. Käydään läpi normin määritelmän ehdot.

(1) Normi saa epänegatiivisia arvoja, koska $|u_i| \geq 0$ kaikilla $i = 1, 2, 3, \ldots$ Jos $\|u\|_p = 0$ niin

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

jolloin $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p = 0$ joka pätee ainoastaan, kun $u_i = 0$ kaikilla $i = 1, 2, 3, \ldots$ joten $u = 0$. Jos taas $u = 0$, niin tällöin $\|u\|_p = \|0\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |0|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$.

(2) $\|\lambda u\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^p |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|u\|_p.$

(3) Kolmioepäyhtälö seuraa suoraan Minkowskin epäyhtälöstä.

Voimme myös osoittaa, että jonoavaruus l^{∞} on normiavaruus varustettuna normilla

$$\|u_i\|_{\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_j|.$$

Tämän tarkastaminen on varsin suoraviivaista ja emme sitä tässä käy tarkemmin läpi.

Olemme saaneet osoitettua, että l^p-avaruudet ovat todellakin normiavaruuksia ja tästä on hyvä jatkaa monimutkaisempiin tapauksiin. Seuraavaksi osoitamme, että nämä avaruudet ovat täydellisiä ja tutustumme yleiseen teoriaan täydellisistä normi- ja sisätuloavaruuksista.

LUKU 4

Täydelliset normi- ja sisätuloavaruudet

4.1. Banachin avaruudet

Tässä kappaleessa tutustaan abstraktimpiin versioihin normi- ja sisätuloavaruuksista. Tässä kappaleessa myös merkinnät ovat hieman erilaisia, jotta todistukset ovat kirjoitusasun puolesta selkeitä. Jos tekstissä ei erikseen mainita, mikä normi on kyseessä niin käytämme normista merkintää φ. Aluksi käydään läpi Banachin avaruuksien ominaisuuksia, jotka ovat oleellisia Hilbertin avaruuksien rakenteen kannalta. Tämän kappaleen jälkeen on helppo todeta, että lukiossa käsiteltävät $\mathbb{R}^2$- ja $\mathbb{R}^3$-avaruudet ovat täydellisiä normiavaruuksia. Lisäksi huomataan, että äärellisulotteisissa vektoriavaruuksissa normit ovat ekvivalentteja. Tämän kappaleen tärkeimmät lähteet ovat Sheldon Axlerin Measure, Integration & Real Analysis [**2**], Harry Dymin Linear Algebra in Action [**6**] ja Lauri Kahanpään Funktionaalianalyysi: Suoraviivaista Ajattelua - Osa 2 [**11**].

LEMMA 4.1. ***Käänteinen kolmioepäyhtälö.*** *Olkoon $\mathcal{V}$ normiavaruus ja kuvaus φ sen normi. Tällöin*

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \varphi(u - v)$$

kaikilla vektoreilla u ja v avaruudessa $\mathcal{V}$.

TODISTUS. Sovelletaan normin kolmioepäyhtälöä väitteen todistamiseksi:

$$\varphi(u) = \varphi(u - v + v) \leq \varphi(u - v) + \varphi(v).$$

Tällöin siis

$$\varphi(u) - \varphi(v) \leq \varphi(u - v).$$

Toisaalta vaihtamalla vektoreiden järjestystä saadaan

$$\varphi(v) - \varphi(u) \leq \varphi(v - u) = \varphi(u - v).$$

Näistä kahdesta epäyhtälöstä seuraa, että

$$-\varphi(u - v) \leq \varphi(u) - \varphi(v) \leq \varphi(u - v),$$

joka on ekvivalentti lemman tuloksen kanssa. □

LAUSE 4.2. *Äärellisulotteisen vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ kaikki normit ovat ekvivalentteja. Toisin sanoen, jos kuvaukset φ_1 ja φ_2 ovat vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ normeja, niin tällöin on olemassa positiiviset vakiot λ_1 ja λ_2 siten, että*

$$\lambda_1\varphi_1(v) \leq \varphi_2(v) \leq \lambda_2\varphi_1(v), \text{ kaikille } v \in \mathcal{V}.$$

TODISTUS. Olkoon $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ kanta. Olkoot

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i, w = \sum_{i=1}^{n} w_i u_i$$

ja e_i avaruuden $\mathbb{K}^n$ luonnollisen kannan i :s alkio. Tällöin

$$\begin{aligned}|\varphi_1(v) - \varphi_1(w)| \le \varphi_1(v-w) &= \varphi_1\left(\sum_{i=1}^n (v_i - w_i)u_i\right) \\ &\le \sum_{i=1}^n |v_i - w_i|\varphi_1(u_i) \\ &\le \left\{\sum_{i=1}^n |v_i - w_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{i=1}^n \varphi_1(u_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz epäyhtälön nojalla. Tästä seuraa, että

$$|\varphi_1(v) - \varphi_1(w)| \le \beta\|Lv - Lw\|_2 \quad \text{ja} \quad |\varphi_1(v)| \le \beta\|Lv\|_2, \tag{4.1}$$

missä

$$\beta = \left\{\sum_{i=1}^n \varphi_1(u_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ja L on lineaarikuvaus avaruudelta $\mathcal{V}$ kerroinkunnan avaruuteen $\mathbb{K}^n$, joka on määritelty asettamalla

$$L\left(\sum_{i=1}^n v_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i e_i.$$

Ensimmäinen epäyhtälö (4.1) varmistaa, että $\varphi_1(v)$ on jatkuva. Lisäksi normin ominaisuuksista seuraa, että $\varphi_1(v) > 0$ kaikilla vektoreilla v joukossa $\{v \mid \|Lv\|_2 = 1\}$. Olkoon

$$\alpha = \inf\{\varphi_1(v) \mid \|Lv\|_2 = 1\}.$$

Infimumin määritelmästä seuraa, että on olemassa jono vektoreita $(v_i)_{i=1}^\infty$ avaruudessa $\mathcal{V}$ siten, että $\|Lv_i\|_2 = 1$ ja $\lim_{i\to\infty} \varphi_1(v_i) = \alpha$. Koska joukko

$$\{w \in \mathbb{K}^n \mid \|w\|_2 = 1\}$$

on suljettu ja rajoitettu avaruuden $\mathbb{K}^n$ osajoukko, on se tällöin sen kompakti osajoukko. Tällöin siis on olemassa vektorijonon osajono $(v_{k_i})_{i=1}^\infty$ ja vektori w vektoriavaruudessa $\mathcal{V}$ siten, että $\lim_{i\to\infty} \varphi_1(v_{k_i} - w) = 0$. Tästä vuorostaan seuraa, että $\lim_{i\to\infty} \varphi_1(v_{k_i}) = \varphi_1(w)$, jolloin $\alpha = \varphi_1(w) > 0$. Nyt

$$\alpha \le \varphi_1(v) \le \beta, \text{ kun } \|Lv\|_2 = 1. \tag{4.2}$$

Valitaan mikä tahansa vektori v avaruudesta $\mathcal{V}$ siten, että $v \ne 0$. Tällöin epäyhtälö (4.2) antaa

$$\alpha \le \varphi_1\left(\frac{v}{\|Lv\|_2}\right) \le \beta,$$

tai yhtälailla

$$\alpha\|Lv\|_2 \le \varphi_1(v) \le \beta\|Lv\|_2 \tag{4.3}$$

pätee jokaiselle nollasta poikkeavalle vektorille v vektoriavaruudessa $\mathcal{V}$. Tämä viimeinen epäyhtälö pätee myös, jos $v = \overline{0}$. Lisäksi samanlainen epäyhtälö pätee normin $\varphi_2(v)$ arvolle:

$$\alpha_1\|Lv\|_2 \le \varphi_2(v) \le \beta_1\|Lv\|_2, \tag{4.4}$$

missä $0 < \alpha_1 < \beta_1$. Lauseen väite saadaan yhdistämällä yhtälöt (4.3) ja (4.4):

$$\frac{\alpha}{\beta_1}\varphi_2(v) \leq \varphi_1(v) \leq \frac{\beta}{\alpha_1}\varphi_2(v).$$

Nyt riittää valita $\lambda_1 = \frac{\alpha}{\beta_1}$ ja $\lambda_2 = \frac{\beta}{\alpha_1}$ ja väite on todistettu. □

MÄÄRITELMÄ 4.3. **Banachin avaruus.** Normiavaruus $\mathcal{U}$ on Banachin avaruus, jos se on täydellinen normiavaruus. Tällöin siis jokainen Cauchy-jono suppenee normiavaruudessa $\mathcal{U}$.

LEMMA 4.4. *Olkoon $u_1, u_2, \ldots, u_n$ äärellisulotteisen normiavaruuden $\mathcal{V}$ kanta. Tällöin*

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} c_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} |c_j|$$

määrittää normin avaruudessa $\mathcal{V}$.

TODISTUS. Osoitetaan, että kuvaus φ toteuttaa normin määritelmän 3.14 kolme ehtoa. Tässä siis vektorit esitetään kantavektorien lineaarikombinaationa ja niille valitaan sopivat kertoimet c_j. Olkoon nyt $v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$.

(1) $\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} c_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} |c_j| \geq 0$, koska $|c_j| \geq 0$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n$. Jos $\varphi(v) = 0$, niin $\sum_{j=1}^{n} |c_j| = 0$ joka on totta vain jos $|c_j| = 0$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin $v = \sum_{j=1}^{n} 0u_j = 0$.

(2) $\varphi(\lambda v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda c_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} |\lambda c_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |c_j| = |\lambda|\varphi(v)$.

(3) $\varphi(v + w) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j)u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} |c_j + d_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |c_j| + |d_j| = \varphi(v) + \varphi(w)$.

□

LAUSE 4.5. *Jokainen normiavaruus $\mathcal{V}$, jonka dimensio on äärellinen, on Banachin avaruus.*

TODISTUS. Olkoon $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ Cauchy-jono normiavaruudessa $\mathcal{V}$ ja olkoot vektorit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sen kanta. Tällöin jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luonnollinen luku K siten, että

$$\|v_{k+l} - v_k\| < \varepsilon \text{ kun } k \geq K \text{ ja } l \geq 1.$$

Olkoon normi φ lemman 4.4 mukainen. Tällöin lauseen 4.2 nojalla kaikille $v \in \mathcal{V}$ pätee

$$\lambda_1\|v\| \leq \varphi(v) \leq \lambda_2\|v\|$$

jollain $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Lausutaan vektori v_k kantavektorien ja vakiokertoimien $c_{j,k}$ avulla

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} c_{j,k}u_j.$$

Tällöin kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$ kertoimista $c_{j,k}$ muodostettu jono on rajoitettu. Tämä seuraa siitä, että jokainen Cauchy-jonon $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ jäsen v_i on rajoitettu, joten kaikkien jäsenten kertoimet ovat rajoitettuja. Lisäksi

$$\begin{aligned} |c_{i,k+l} - c_{i,k}| &\leq \sum_{j=1}^{n} |c_{j,k+l} - c_{j,k}| \\ &= \varphi(v_{k+l} - v_k) \\ &\leq \lambda_2 \|v_{k+l} - v_k\|. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että jono $(c_{i,k})_{k=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono kaikilla $i = 1, 2 \ldots, n$. Tällöin on olemassa $d_i \in \mathbb{K}$ siten, että $c_{i,k} \to d_i$, kun $k \to \infty$. Jos asetetaan

$$v = \sum_{i=1}^{n} d_i u_i,$$

niin tällöin

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|v - v_k\| &\leq \varphi(v - v_k) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (c_{i,k} - d_i) u_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |c_{i,k} - d_i|. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $\|v - v_k\| \to 0$, kun $k \to \infty$.

$\square$

Esimerkki 4.6. Osoitetaan, että jonoavaruudet l^p ovat Banachin avaruuksia. Jonoavaruuksien normi on

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ kun } 1 \leq p < \infty.$$

Lisäksi määritellään vielä ääretönnormi

$$\|u\|_\infty = \sup |u_i|,$$

kun tarkastellaan l^∞-avaruutta, johon kuuluvat kaikki rajoitetut lukujonot. Osoitetaan, että Cauchy-jono suppenee l^p avaruudessa, kun $p < \infty$. Olkoon $(u_i)_{i=1}^{\infty} \in l^p$ Cauchy-jono. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|u_m - u_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_{m,k} - u_{n,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \text{ kun } n, m \geq N.$$

Kiinnittämällä yksi alkuperäisen Cauchy-jonon indeksi $k \in \mathbb{N}$ saadaan Cauchy-jono $(u_{i,k})_{i=1}^{\infty}$. Tässä kerroinkunta $\mathbb{K}$ on reaali- tai kompleksilukujen joukko, jotka ovat täydellisiä, joten tällöin Cauchy-jono $(u_{k,i})_{i=1}^{\infty}$ suppenee johonkin arvoon $v_k \in \mathbb{K}$.

Näytetään, että alkuperäinen Cauchy-jono suppenee lukujonoon $(v_k)_{k=1}^{\infty}$. Cauchy-jono on rajoitettu Cauchyn ehdon 2.19 nojalla, joten $\|v\|_p < \infty$. Nyt

$$\left(\sum_{k=1}^{K} |u_{k,m} - u_{k,n}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u_m - u_n\|_p \leq \varepsilon \text{ kaikille } K \in \mathbb{N}.$$

Haluttu tulos $\|v - u_m\|_p \leq \varepsilon$ saadaan, kun $n \to \infty$ ja $K \to \infty$.

Tarkastellaan vielä, että l^∞-avaruus on Banachin avaruus. Tässä voidaan käyttää samanlaista päättelyä, että Cauchy-jonon $(u_i)_{i=1}^\infty$ jäsenien k :nsien lukujen muodostamat jonot ovat Cauchy-jonoja, joilla on raja-arvo v_k. Tällöin haluamme näyttää, että jono $v = (v_k)_{k=1}^\infty$ löytyy ja jono $(u_i)_{i=1}^\infty$ suppenee tähän jonoon v. Nyt siis $\|v_k - u_{k,i}\|_\infty \leq \varepsilon$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tästä saadaan, että

$$\|v - u\|_\infty = \sup |v_k - u_k| \leq \varepsilon.$$

4.2. Hilbertin avaruudet

Tässä kappaleessa tutustumme jo useampaan kertaan mainittuihin Hilbertin avaruuksiin. Ne ovat yleistys Euklidiselle avaruudelle, eli niissä on voimassa vektoriavaruuden aksioomat, vektoreiden välinen etäisyys ja kulman suuruus. Lisäksi nämä ovat täydellisiä avaruuksia. Käymme läpi miten Hilbertin avaruudet eroavat Banachin avaruuksista. Loppuhuipennus on osoittaa, että kaikilla Hilbertin avaruuksilla on ortonormaali kanta. Tämän kappaleen keskeisimmät lähteet ovat Hans Wilhelm Altin Linear Functional Analysis [**1**], Sheldon Axlerin Measure, Integration & Real Analysis [**2**], An Application-Oriented Introduction ja Lauri Kahanpään Funktionaalianalyysi: Suoraviivaista Ajattelua - Osa 2 [**11**].

Määritelmä 4.7. Hilbertin avaruus H on Banachin avaruus, jolla on sisätulon indusoima normi.

Esimerkki 4.8. Yksinkertaisin esimerkki Hilbertin avaruudesta euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna luonnollisella sisätulolla $(u|v) = \sum_{j=1}^n u_j v_j$. Tämä on osoitettu sisätuloksi ja myös $\mathbb{R}^n$ on osoitettu täydelliseksi.

Määritelmä 4.9. Joukko on konveksi, jos sen minkä tahansa alkioiden välille on mahdollista vetää jana siten, että kaikki janan pisteet kuuluvat myös alkuperäiseen joukkoon. Toisin sanoen, jos $\mathcal{V}$ on vektoriavaruus ja U on sen osajoukko, niin tällöin joukko U on konveksi, jos

$$(1-t)f + tg \in U \text{ kaikilla } t \in [0,1] \text{ ja kaikilla } f, g \in U.$$

Huomautus 4.10. Vektoriavaruuden kaikki aliavaruudet ovat konvekseja. Konveksiuden määritelmä toteutuu, koska aliavaruuden alkioiden laskutoimitukset ovat suljettuja.

Määritelmä 4.11. Olkoon $\mathcal{V}$ normiavaruus, A sen epätyhjä osajoukko sekä $u \in \mathcal{V}$. Tällöin alkion u etäisyys joukosta A määritellään

$$d(u, A) = \inf\{\|u - v\| \mid v \in A\}.$$

Tässä $d(u, A) = 0$ jos ja vain jos $u \in \overline{A}$.

Yksi suuri ero Banachin ja Hilbertin avaruuksien välillä on se, että Banachin avaruuksissa etäisyys alkiosta suljettuun aliavaruuteen ei välttämättä toteudu millään aliavaruuden tietyllä alkiolla. Seuraava esimerkki havainnollistaa tätä ja sen jälkeinen lause osoittaa, että näin ei voi koskaan käydä Hilbertin avaruuksien tapauksessa.

Esimerkki 4.12. Vektoriavaruus $C([0,1])$ varustettuna normilla $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$ on Banachin avaruus. Tällöin

$$A = \left\{ f \in C([0,1]) \mid \int_0^1 f = 0 \quad \text{ja} \quad f(1) = 0 \right\}$$

on avaruuden $C([0,1])$ suljettu aliavaruus. Olkoon $u \in C([0,1])$ siten, että $u(x) = 1 - x$. Olkoon

$$v_k(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{x^k}{2} + \frac{x-1}{k+1} \in A \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

Nyt

$$\lim_{k\to\infty} \|u - v_k\| = \frac{1}{2},$$

josta seuraa, että $d(u,A) \leq \frac{1}{2}$. Jos $v \in A$, niin $\int_0^1 u(x) - v(x)dx = \frac{1}{2}$ ja $u(1) - v(1) = 0$. Näistä seuraa, että

$$\|u - v\| \geq \sup_{[0,1]} |u(x) - v(x)| > \frac{1}{2}.$$

Tällöin $d(u,A) = \frac{1}{2}$, mutta joukossa A ei ole alkiota v, jolla toteutuu $\|u - v\| = \frac{1}{2}$.

Seuraava lause osoittaa, että Hilbertin avaruuden alkion etäisyys sen suljettuun epätyhjään konveksiin osajoukkoon saadaan aina yksikäsitteisellä osajoukon alkiolla.

Lause 4.13. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $u \in H$ sekä A avaruuden H epätyhjä suljettu konveksi osajoukko. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $v \in A$ siten, että*

$$\|u - v\| = d(u,A).$$

Todistus. Aloitetaan näyttämällä, että löydämme osajoukon A alkion, jolla on haluttu etäisyysominaisuus. Olkoon $(v_i)_{i=1}^\infty \in A$ jono, siten että

$$\lim_{i\to\infty} \|u - v_i\| = d(u,A).$$

Olkoot $n, m \in \mathbb{N}$ ja $\varepsilon > 0$, jolloin

$$\begin{aligned}
\|v_n - v_m\|^2 &= \|(u - v_m) - (u - v_n)\|^2 \\
&= 2\|u - v_m\|^2 + 2\|u - v_n\|^2 - \|2u - (v_m + v_n)\|^2 \\
&= 2\|u - v_m\|^2 + 2\|u - v_n\|^2 - 4\left\|u - \frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2\|u - v_m\|^2 + 2\|u - v_n\|^2 - 4d(u,A)^2 \\
&\leq 2(d(u,A) + \varepsilon)^2 + 2(d(u,A) + \varepsilon)^2 - 4d(u,A)^2 \\
&= 4d(u,A)\varepsilon + 4\varepsilon^2, \text{ kun } n \text{ ja } m \text{ riittävän suuria.}
\end{aligned}$$

Toinen yhtäsuuruus seuraa suunnikassäännöstä ja $\frac{v_m + v_n}{2} \in A$ seuraa joukon A konveksiudesta. Tästä epäyhtälöstä seuraa, että $(v_i)_{i=1}^\infty$ on Cauchy-jono. Tällöin täydellisyyden nojalla on olemassa $v \in A$ siten, että

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i - v\| = 0.$$

Koska A on suljettu osajoukko ja $v_i \in A$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ seuraa, että $v \in A$. Tällöin olemme löytäneet siis alkion $v \in A$ siten, että

$$\|u - v\| = d(u, A).$$

Osoitetaan vielä alkion v yksikäsitteisyys. Olkoot $v, v' \in A$ siten, että

$$\|u - v\| = \|u - v'\| = d(u, A).$$

Tällöin

$$\|v - v'\|^2 = 2\|u - v\|^2 + 2\|u - v'\|^2 - 4d(u, A)^2 = 0,$$

koska voimme tehdä samat laskut mitä aiemmin korvaamalla alkiot v_n ja v_m alkioilla v ja v'. Käyttämällä oletusta $\|u - v\| = \|u - v'\| = d(u, A)$ saadaan viimeinen yhtäsuuruus ja se implikoi, että $v = v'$. □

Seuraavaksi käydään läpi ortonormaalin joukon ominaisuudet ja Gram-Schmidt -menetelmä, joka varmistaa että voimme aina muodostaa ortonormaalin joukon mistä tahansa lineaarisesti riippumattomasta joukosta.

MÄÄRITELMÄ 4.14. Sisätuloavaruuden $\mathcal{V}$ osajoukko $F \subset \mathcal{V}$ on ortogonaalinen joukko, jos $(u|v) = 0$ kaikilla $u, v \in F$, kun $u \neq v$. Osajoukko on lisäksi ortonormaali, jos $\|u\| = 1$ kaikilla $u \in F$. Ortonormaalin joukon alkioille siis pätee

$$(u|v) = \delta_{uv} = \begin{cases} 0 & \text{jos } u \neq v \\ 1 & \text{jos } u = v. \end{cases}$$

Merkintää δ_{uv} kutsutaan myös Kroneckerin deltaksi esimerkiksi kvanttimekaniikassa.

LAUSE 4.15. ***Gram-Schmidt.*** *Sisätuloavaruuden $\mathcal{V}$ lineaarisesti riippumaton jono $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ voidaan ortonormittaa, eli saadaan jono $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ siten, että $(v_i|v_i) = 1$ kaikilla i ja $(v_i|v_j) = 0$, kun $i \neq j$, sekä $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Gram-Schmidt menetelmä toimii seuraavalla tavalla*

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - \frac{(u_2|v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 \\ v_3 &= u_3 - \frac{(u_3|v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{(u_3|v_2)}{\|v_2\|^2} v_2 \\ &\vdots \\ v_n &= u_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(u_n|v_j)}{\|v_j\|^2} v_j. \end{aligned}$$

Lopuksi kaikki vektorit v_j normitetaan jakamalla ne normillaan.

TODISTUS. Tarkastetaan, että vektorit v_j ovat todellakin ortogonaalisia. Lähdetään liikkeelle vektoreista v_1 sekä v_2:

$$(v_2|v_1) = (u_2 - \frac{(u_2|v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 | v_1) = (u_2|v_1) - \frac{(u_2|v_1)}{\|v_1\|^2}(v_1|v_1) = 0.$$

Nämä ovat siis ortogonaalisia keskenään. Oletetaan, että vektorit $v_1, v_2, \dots v_{n-1}$ ovat kaikki ortogonaalisia keskenään. Osoitetaan, että

$$v_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(u_n|v_j)}{\|v_j\|^2} v_j$$

on ortogonaalinen minkä tahansa vektorin v_i kanssa, kun $i = 1, 2, \dots, n-1$:

$$(v_n|v_i) = (u_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(u_n|v_j)}{\|v_j\|^2} v_j|v_i) = (u_n|v_i) - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(u_n|v_j)}{\|v_j\|^2} v_j|v_i \right).$$

Tässä

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(u_n|v_j)}{\|v_j\|^2} v_j|v_i \right) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(u_n|v_j)}{\|v_j\|^2} (v_j|v_i).$$

Summan termi $\frac{(u_n|v_j)}{\|v_j\|^2}(v_j|v_i) = 0$, kun $i \neq j$ koska $(v_j|v_i) = 0$, joten jäljelle jää

$$(v_n|v_i) = \dots = (u_n|v_i) - \frac{(u_n|v_i)}{\|v_i\|^2}(v_i|v_i) = 0.$$

Tämän jälkeen on mahdollista normittaa jokainen vektori jakamalla se omalla normillaan. $\square$

MÄÄRITELMÄ 4.16. Olkoon H Hilbertin avaruus ja A sen epätyhjä suljettu konveksi osajoukko. Ortogonaaliprojektio avaruudelta H avaruuteen A on funktio $P_A : H \to H$, jossa $P_A(u)$ on joukon A yksikäsitteinen alkiota u lähimpänä oleva alkio.

LEMMA 4.17. *Ortogonaaliprojektiolla Hilbertin avaruudessa H, jolla on suljettu epätyhjä konveksi osajoukko A, on voimassa seuraavat ominaisuudet:*

(1) *$P_A u = u$ jos ja vain jos $u \in A$.*
(2) *$P_A \circ P_A = P_A$.*

LAUSE 4.18. ***Projektiolause.*** *Olkoon H Hilbertin avaruus, $u \in H$ sekä V sen suljettu aliavaruus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen vektori v aliavaruudessa V, jolla on seuraavat yhtäpitävät ominaisuudet:*

(1) *$u - v$ on ortogonaalinen aliavaruuden V kanssa.*
(2) *$\|u - v\| = \min_{a \in V} \|u - a\|$.*

TODISTUS. Lähimmän pisteen olemassaolo seuraa lauseesta 4.13, joten riittää todistaa ehtojen yhtäpitävyys. Ensimmäisestä ehdosta on helppo huomata, että toinen ehto toteutuu, koska vektori $u - v$ on ortogonaalinen aliavaruuden V kanssa. Tällöin näiden vektorien erotuksen normi on aina pienempää, kuin minkään aliavaruuden V vektorin normin erotus vektorista u. Muodostetaan kolmio, jonka kärjet ovat u, v ja $a \in V$. Tämä kolmio on suorakulmainen, koska $u - v$ on ortogonaalinen aliavaruuden V kanssa. Vektorit v ja $a \in V$, joten myös vektori $v - a \in V$. Pythagoraan lauseesta seuraa, että

$$\|u - a\|^2 = \|u - v\|^2 + \|v - a\|^2.$$

Koska $\|v - a\|^2 \geq 0$, niin $\|u - a\|^2 \geq \|u - v\|^2$. Täten kateetti $u - v$ on lyhyempi kuin hypotenuusa $u - a$ ja tällöin toinen ehto toteutuu.

Toisesta ehdosta seuraa ensimmäinen taas antiteesillä. Oletetaan siis, että piste v on aliavaruuden V lähin piste pisteeseen u. Jos vektori $u - v$ ei ole ortogonaalinen aliavaruuden V kanssa, niin tällöin on jokin aliavaruuden V vektori w siten, että $(u-v|w)\neq 0$.

Tarkastellaan tällöin kolmiota, jonka kärjet ovat u, v, ja $v+w$. Tällä kolmiolla ei ole siis suoraa kulmaa kärjessä v. Tarkastellaan nyt aliavaruutta $\langle u,v,w\rangle$. Huomataan, että pisteen v kautta kulkeva vektorin w suuntainen suora sisältää pisteen $a=v+(u-v|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}$. Sievennetään lauseke

$$\begin{aligned}(a|\frac{w}{\|w\|}) &= \left(v+(u-v|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}|\frac{w}{\|w\|}\right)\\ &= \left(v+(u|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}-(v|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}|\frac{w}{\|w\|}\right)\\ &= (v|\frac{w}{\|w\|})+(u|\frac{w}{\|w\|})-(v|\frac{w}{\|w\|})\\ &= (u|\frac{w}{\|w\|}).\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}(u-a|a-v) &= \left(u-a|(u-v|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}\right)\\ &= \left(u-a|(u|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}-(v|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}\right)\\ &= \left(u|(u|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}-(v|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}\right)\\ &\quad-\left(a|(u|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}-(v|\frac{w}{\|w\|})\frac{w}{\|w\|}\right)\\ &= \overline{(u|\frac{w}{\|w\|})}(u|\frac{w}{\|w\|})-\overline{(v|\frac{w}{\|w\|})}(u|\frac{w}{\|w\|})\\ &\quad-\overline{(u|\frac{w}{\|w\|})}(a|\frac{w}{\|w\|})+\overline{(v|\frac{w}{\|w\|})}(a|\frac{w}{\|w\|})\\ &= \overline{(u|\frac{w}{\|w\|})}(u|\frac{w}{\|w\|})-\overline{(v|\frac{w}{\|w\|})}(u|\frac{w}{\|w\|})\\ &\quad-\overline{(u|\frac{w}{\|w\|})}(u|\frac{w}{\|w\|})+\overline{(v|\frac{w}{\|w\|})}(u|\frac{w}{\|w\|})\\ &= 0,\end{aligned}$$

joten Pythagoraan lauseesta seuraa

$$\|u-v\|^2=\|u-a\|^2+\|a-v\|^2.$$

Koska piste a löytyy aliavaruudelta V on mahdotonta, että piste v olisi lähin piste, koska $\|u-a\|^2<\|u-v\|^2$. Tämä on ristiriita. Tästä johtuen ehdosta kaksi on seurattava, että vektori $u-v$ on ortogonaalinen aliavaruuden V kanssa. □

MÄÄRITELMÄ 4.19. Olkoon $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ ortonormaali Hilbertin avaruuden H jono. Lukuja $(v|u_i)$ kutsutaan vektorin $v\in H$ koordinaateiksi eli abstrakteiksi Fourier-kertoimiksi.

SEURAUS 4.20. ***Besselin epäyhtälö.*** *Olkoon H Hilbertin avaruus, $A \subset H$ sen aliavaruus ja $(u_i)_{i=1}^{\infty} \in A$ ortonormaali jono. Tällöin kaikilla $v \in A$ pätee*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(v|u_i)|^2 \leq \|v\|^2.$$

TODISTUS. Olkoon $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset A$ ortonormaali joukko. Olkoon $v \in A$ ja $w = \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)u_i$. Huomataan, että ortonormaaliudesta, sisätulon vasemman puolen lineaarisuudesta ja Pythagoraan lauseesta seuraa

$$\|w\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (u_i|v)u_i | \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)^2 \,(u_i|u_i) = \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)^2.$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
0 \leq \|v - w\|^2 &= (v - w|v - w) \\
&= \|v\|^2 - (v|w) - \overline{(v|w)} + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 - 2\,\mathrm{Re}((v|w)) + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 - 2|(v|w)| + \|w\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2 \left(v| \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)u_i \right) + \|w\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)^2 + \|w\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\|w\|^2 + \|w\|^2 = \|v\|^2 - \|w\|^2.
\end{aligned}$$

Epäyhtälöstä $0 \leq \|v\|^2 - \|w\|^2$ saadaan $\|w\|^2 \leq \|v\|^2$, josta seuraa $\|w\| \leq \|v\|$. Tästä saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i|v)^2 \leq \|v\|^2.$$

Koska tämä pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$, voidaan ottaa raja-arvo $n \to \infty$ ja saadaan haluttu tulos. $\square$

MÄÄRITELMÄ 4.21. Olkoon H Hilbertin avaruus. Epätyhjän osajoukon $A \subset H$ ortogonaalinen komplementti on joukon A kaikkia vektoreita kohtisuorassa olevien vektorien joukko

$$A^{\perp} = \{u \in H \mid (u|a) = 0 \text{ kaikilla } a \in A\}.$$

LAUSE 4.22. *Olkoon H Hilbertin avaruus, $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ ortonormaali jono ja $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ lukujono. Tällöin sarja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i$$

suppenee kohti nollavektoria jos ja vain jos kaikilla $i = 1, 2, \dots$ pätee $\lambda_i = 0$.

TODISTUS. Jos $0 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i$, niin sisätulon ensimmäisen komponentin lineaarisuuden ja jatkuvuuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \middle| u_j\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \middle| u_j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \middle| u_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (u_i|u_j) \\ &= \lambda_j \|u_j\|^2 = \lambda_j. \end{aligned}$$

Väite on selvä, jos $\lambda_i = 0$ kaikilla $i = 1, 2, 3, \dots$. □

SEURAUS 4.23. *Edellisestä lauseesta seuraa, että mikä tahansa Hilbertin avaruuden H ortogonaalinen joukko $A \subset H$ on lineaarisesti riippumaton. Joskus myös sanotaan, että ortogonaalinen joukko on vapaa.*

MÄÄRITELMÄ 4.24. Hilbertin avaruuden H ortonormaali kanta on ortonormaali joukko $V \subset H$, jolla on seuraavat yhtäpitävät ominaisuudet.

(1) Joukko V virittää koko Hilbertin avaruuden, eli $\overline{\langle V \rangle} = H$.
(2) $V^{\perp} = \{0\}$.
(3) V on maksimaalinen ortonormaali joukko, eli jos $V \subset F$ ja F on ortonormaali niin $V = F$.

LAUSE 4.25. ***Parsevalin yhtälö ja l^2-lause.*** *Olkoon H Hilbertin avaruus, missä $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ on avaruuden ortonormaali jono sekä $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ lukujono.*

a) Sarja

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \tag{4.5}$$

suppenee jos ja vain jos $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$.

b) Jokainen lukujonon $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ jäsen on Fourier-kerroin, kun sarja (4.5) suppenee.

c) Parsevalin yhtälö, eli ääretönulotteinen Pythagoraan lause, on voimassa, kun sarja (4.5) suppenee:

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2}.$$

TODISTUS. Oletetaan, että sarja (4.5) suppenee. Tällöin sisätulon jatkuvuuden ja ortonormaaliuden nojalla pätee

$$(v|u_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \middle| u_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (u_i|u_j) = \lambda_j.$$

Tällöin Besselin epäyhtälöstä seuraa

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(v|u_j)|^2 \leq \|v\|^2 < \infty.$$

Tästä huomataan, että sarjan (4.5) suppenemisesta seuraa suoraan kerroinjonon neliösummautuvuus $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$.

Oletetaan, että kerroinjonon neliösumma suppenee. Tällöin sarja (4.5) on Cauchy-sarja, koska kaikilla $n < m$ pätee äärellisulotteinen Pythagoraan lause ja tästä seuraa

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} \lambda_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=n}^{m} |\lambda_i|^2.$$

Suppeneminen on suora seuraus Hilbertin avaruuden täydellisyydestä. Parsevalin yhtälö saadaan valitsemalla $n = 1$ ja antamalla luvun m kasvaa rajatta. □

Nyt voidaan osoittaa, että jokaisella Hilbertin avaruudella on ortonormaali kanta. Tämän osoittamiseksi hyödynnämme Zornin lemmaa, josta mainittiin Hamelin kantoja tarkastellessa. Hilbertin kannan suhteen on tärkeää muistaa muutamia keskeisiä asioita [**11**].

(1) Hilbertin kannan ei tarvitse olla numeroituva joukko.
(2) Saman Hilbertin avaruuden eri kannat ovat yhtä mahtavat.
(3) Hilbertin kanta ja Hamelin kanta ovat hyvin erilaisia. Jokainen Hilbertin avaruuden kannan vektori on äärellinen lineaarikombinaatio Hamelin kannan vektoreista. Numeroituvaulotteisen Hilbertin avaruuden Hamelin kanta on ylinumeroituva. Tämän huomaa esimerkiksi jonoavaruuden l^2 tapauksessa.

Lause 4.26. *Jokaisella Hilbertin avaruudella on ortonormaali kanta.*

Todistus. Zornin lemman mukaan osittain järjestetyssä joukossa $(J, \leq)$ on maksimaalinen alkio, mikäli sen jokaisella täysin järjestetyllä osajoukolla eli ketjulla on yläraja joukossa J [**2**]. Asetetaan nyt

$$J = \{\text{avaruuden } H \text{ ortonormaalit joukot}\}$$
$$A \leq B \text{ jos ja vain jos } A \subset B, \text{ missä } A, B \in J.$$

Halutaan siis löytää maksimaalisen alkion ja tällöin pitää tarkastaa, että jokaisella ortonormaaleista joukoista täysin järjestetyllä joukolla $\mathcal{A}$ on yläraja. Tämä on analoginen ortonormaalin joukon $E \subset H$ kanssa, joka sisältää osajoukkona jokaisen joukon $\mathcal{A}$ alkion. Tällainen yläraja saadaan muodostamalla kaikista joukoista $\mathcal{A}$ yhdiste

$$E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Tästä on helppo nähdä, että joukko E todellakin sisältää kaikki joukot $\mathcal{A}$. Täytyy ainoastaan osoittaa, että joukko E on ortonormaali joukko. Valitaan alkiot $u, v \in E$ ja niitä vastaavat alkiot $A_u, A_v \in \mathcal{A}$ siten, että $u \in A_u$ ja $v \in A_v$. Koska A_u ja A_v ovat täysin järjestetyn joukon alkioita, niitä voidaan vertailla. Yleisyyden vuoksi voidaan olettaa, että $A_u \subset A_v$. Tällöin alkiot u ja v kuuluvat samaan ortonormaaliin joukkoon $\mathcal{A}_v$ ja ovat ortogonaalisia tai samoja. □

Esimerkki 4.27. Jonoavaruus l^2 varustettuna sisätulolla

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \overline{v_i},$$

missä u ja v ovat jonoja, on Hilbertin avaruus. Tällöin meillä on äärettönulotteinen Hilbertin avaruus. Sisätuloa vastaava normi on

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2}.$$

Mikään muu jonoavaruus ei ole Hilbertin avaruus, koska ne eivät toteuta suunnikassääntöä. Tässä tapauksessa l^2-avaruudelle sopii ortonormaaliksi kannaksi standardikantaa muistuttava kanta, jonka jäseniä ovat

$$u_{j,i} = \begin{cases} 0 & \text{jos } i \neq j \\ 1 & \text{jos } i = j. \end{cases}$$

Kantavektoreina ovat lukujonot joiden yksi alkio on yhtä suuri kuin yksi ja loput ovat nollia.

4.3. Pohdinta

Vektoriavaruudet ja niitä käsittelevä teoria ovat todella monipuolinen ja laaja matematiikan osa-alue ja olen tyytyväinen, että sain tässä työssä syventyä Hilbertin avaruuksiin. Vektoreiden ja vektoriavaruuksien määritteleminen lyhyesti on vaikeaa. Lukiosta tullut oppilas saattaisi sanoa, että vektori on jana avaruudessa ja tällä janalla on suunta [**12**]. Itse sanoisin vektoreiden olevan objekteja, joita voidaan laskea yhteen ja joita voi kertoa skalaarilla. Toisaalta fysiikkaan orientoitunut henkilö saattaa todeta, että vektorilla on suunta ja suuruus. Näissä kuvauksissa on kaikissa totuutta ja parhaimman käsityksen vektoreista saa yhdistämällä näitä näkemyksiä eli representaatioita.

Vektoriavaruuksien ymmärtäminen vie aikaa ja vaatii monenlaisien eri representaation muotojen hallintaa. Kuitenkin tällä hetkellä varsinkin lukiossa suositaan geometrista representaatiota. Mielestäni siinä piilee riski, että vektorit nähdään vain jonkinlaisena erilaisena muotona analyyttisesta geometriasta, vaikka ne ovat myös niin paljon muuta. Oman kokemukseni mukaan oppilaita aliarvioidaan vektoreiden suhteen ja vektoreita yritetään opettaa yksinkertaistaen niitä koskevaa teoriaa. Esimerkiksi sisätuloa käsiteltäessä aluksi se opetetaan kaksi- tai kolmiulotteisena pistetulona, sen jälkeen se opetetaan n-ulotteisena pistetulona, kompleksisena pistetulona ja sitten saatetaan alkaa käsittelemään yleisiä sisätuloja. Mielestäni olisi kokeilun arvoista sisällyttää opetukseen ajatus, että vaikka heti ei käsitellä muita sisätuloja kuin pistetuloa, niin silti voi mainita että tämä ei ole ainoa sisätulo. Tämän kaltaista menettelyä on hyödyllistä pitää mielessä opettajana, jotta välttää mahdollisten virhekäsityksien syntymisen. Minulle vektoreiden opiskelussa on ollut haastavaa, koska geometria ei riitä kuvaamaan vektoriavaruutta kaikessa yleisyydessään. Lisäksi algebrallista representaation kanssa haastavaa on ollut esimerkiksi projektioihin tutustuminen. Termit piste ja vektori esiintyvät välillä jopa sekaisin ja molempia lasketaan vektoriavaruuden laskutoimituksilla, joka ainakin minussa herätti aikanaan hämmennystä.

Vektoreiden opettamisen kannalta on jatkossa mielekästä tutkia, miten hyvä käsitteistön hallinta matematiikan opiskelijoilla on yliopisto-opintojen alussa. Esimerkiksi LAG1-kurssin yhteydessä voitaisiin järjestää vektoriavaruuden käsitteistön hallintaa testaava koe, jossa on esimerkiksi monivalintakysymyksiä. Kokeen avulla saataisiin tietoa oppilaiden mahdollisista virhekäsityksistä. Tämä myös mahdollistaa näihin virhekäsityksiin puuttumisen opetuksessa. Lisäksi on syytä tutkia, miten nykyinen vektoreiden opiskelu lukiossa palvelee vektoreiden teorian hahmottamista ja miten sitä voisi motivoida enemmän. Vektoreita kuitenkin sovelletaan monilla erilaisilla aloilla, joten mielestäni ei kannata liikaa jumittua vektoreiden geometriseen tulkitsemiseen. Vektorit vaativat motivointia ja toisaalta harvassa matematiikan alassa pitää mennä teorian puolella yhtä pitkälle mitä vektoreiden opetuksessa, jotta sovelluksia päästään tekemään mielekkäällä tavalla. Tämä on ehdottomasti haaste, johon on syytä pohtia ratkaisuja.

LIITE A

Merkintöjä

$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Kokonaislukujen joukko $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	Rationaalilukujen joukko
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko
$\mathcal{V}$	Yleinen vektoriavaruus
H	Hilbertin avaruus
$\mathcal{U}$	Banachin avaruus

Kirjallisuutta

[1] Hans Wilhelm Alt *Linear Functional Analysis, An Application-Oriented Introduction,* Springer, 2012.

[2] Sheldon Axler *Measure, Integration & Real Analysis,* Graduate Texts in Mathematics, 282. Springer, 2020.

[3] Joan Cerdá: *Linear Functional Analysis.* American Mathematical Society, Real Sociedad Matemática Española, 2010.

[4] Ghislaine Gueudet-Chartier: *Should we teach linear algebra through geometry,* Linear Algebra and its Applications 379 (2004), 491-501.

[5] Juha Heinonen: *Lectures on Analysis on Metric Spaces.* Universitext, Springer-Verlag New York Inc. 2012.

[6] Harry Dym: *Linear Algebra in Action.* American Mathematical Society, 2006.

[7] J. Hillel: *Modes of description and the problem of representation in linear algebra,* In: Dorier, JL. (eds) On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library, vol 23. Springer, 2000, 191-207.

[8] Markus Hähkiöniemi: *The Role of Representations in Learning the Derivative.* Jyväskylä, 2006.

[9] Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-aho: *Juuri 4,* Otava 2016.

[10] Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Anni Laitinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-aho, Terhi Raittila, Tommi Tikka: *Juuri 4,* Otava 2021.

[11] Lauri Kahanpää: *Funktionaalianalyysi: Suoraviivaista Ajattelua - Osa 2*, Jyväskylä, 2004.

[12] Tobias Mai, Frank Feudel, Rolf Biehler: *A vector is a line segment between the two points*, CERME 10, 2017.

[13] Mirko Marracci: *Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory,* ZDM 40 (2008), 265-276.

[14] Opetushallitus: *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019.*

[15] Alexander Ostermann, Gerhard Wanner: *Geometry by its history,* Springer, 2012.

[16] Ivonne Sandoval, Edgar Possani: *An analysis of different representations for vectors and planes in* $\mathbb{R}^3$ *- Learning challenges.* Educational Studies in Mathematics 92 Springer (2016), 109-127.

[17] A. Sierpinska, T. Dreyfus, J. Hillel: *Hillel, Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations,* Recherches en didactique des mathématiques 19 (1999), 7-40.

[18] A. Sierpinska: *On some aspects of students' thinking in linear algebra.* In: Dorier, JL. (eds) On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library, vol 23. Springer, 2000, 209-246.

[19] Anna Watson, Panayotis Spyrou, David Tall: *The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: the concept of vector,* The Mediterranean Journal of Mathematics Education 1 (2003), 73-97.