Lumihiutaleupotukset

Vilma Mäenpää

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2022

Tiivistelmä

Vilma Mäenpää, *Lumihiutaleupotukset*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 41 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2022.

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutustutaan lumihiutaleupotuksiin. Päätuloksena todistetaan Assouadin upotuslause, mikä osoittaa lumihiutaleupotusten olemassaolon. Esimerkkinä lumihiutaleupotuksesta käsitellään von Kochin lumihiutaletta.

Tutkielman alussa määritellään keskeiset käsitteet, joita ovat muun muassa metriset avaruudet, bi-Lipschitz-kuvaus, täydellisyys sekä kompaktius. Lisäksi todistetaan tuloksia, joita tarvitaan myöhemmin tutkielman muiden lemmojen ja lauseiden todistuksissa.

Toisessa luvussa määritellään ensin metrisen avaruuden tuplaavuus, lumihiutalemetriikka ja metrisen avaruuden lumihiutaleversio. Lisäksi osoitetaan lumihiutaleversion olevan metrinen avaruus. Tämän jälkeen todistetaan Assouadin upotuslause: *Olkoon* (X, d) *tuplaava metrinen avaruus. Tällöin sen jokainen lumihiutaleversio* (X, d^α) *voidaan bi-Lipschitz upottaa johonkin Euklidiseen avaruuteen* $\mathbb{R}^N$.

Tutkielman kolmannessa luvussa käsitellään von Kochin lumihiutalekäyrää. Jotta käyrä voidaan antaa iteroidun funktiojärjestelmän kiintopisteenä, määritellään ensin kutistavat kuvaukset ja todistetaan Banachin kiintopistelause. Lisäksi määritellään Hausdorff-etäisyys kompakteille epätyhjille joukoille ja keskeisenä tuloksena osoitetaan, että jokaisella iteroidulla funktiojärjestelmällä on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste. Lopuksi osoitetaan, että von Kochin lumihiutalekäyrä on välin $[0, 1]$ lumihiutaleupotus.

Sisältö

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua lumihiutaleupotuksiin. Päätuloksena todistetaan Assouadin upotuslause. Lisäksi esitellään lumihiutalemetriikka sekä annetaan von Kochin lumihiutalekäyrä iteroidun funktiojärjestelmän avulla. Tutkielman lopussa osoitetaan, että von Kochin lumihiutalekäyrä on välin $[0, 1]$ lumihiutaleupotus.

Patrice Assouad oli kiinnostunut siitä, milloin metrinen avaruus voidaan upottaa bi-Lipschitz-kuvauksella johonkin Euklidiseen avaruuteen. Assouad todisti vuonna 1983, että tuplaavan metrisen avaruuden jokainen lumihiutaleversio voidaan bi-Lipschitz upottaa johonkin Euklidiseen avaruuteen. Tämä on Assouadin upotuslause, mikä osoittaa lumihiutaleupotuksien olemassaolon. Lisäksi Assouadin upotuslause antaa mahdollisuuden todistaa tuloksia tuplaaville metrisille avaruuksille, kun upotuksen kautta saadaan käyttöön Euklidisen avaruuden tuloksia. Assouadin upotuslauseen alkuperäinen todistus löytyy hänen teoksestaan *Plongements lipschitziens dans* $\mathbb{R}^n$, [**1**].

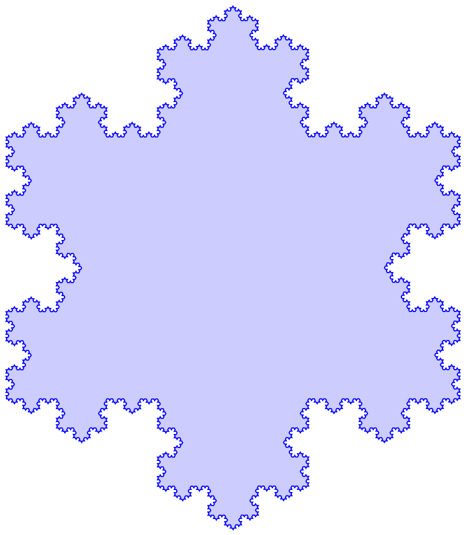
Assouadin upotuslause vaatii metrisen avaruuden lumihiutaleversion ollakseen tosi. Heisenbergin ryhmä ja Laakson graafit ovat esimerkkejä tuplaavista metrisistä avaruuksista, jotka eivät bi-Lipschitz upotu Euklidiseen avaruuteen ilman metrisen avaruuden lumihiutaleversiota. Tästä lisää lähteissä [**10**], [**14**] ja [**8**].

Jos lumihiutaleversiossa (X, d^α), $\alpha \in]0, 1/2[$, niin Euklidisen avaruuden dimensio riippuu metrisen avaruuden (X, d) tuplausvakiosta sekä luvusta α. Lisäksi α:n ollessa lähellä nollaa, on Euklidisen avaruuden dimensio suuri. Jos taas $\alpha \in]1/2, 1[$, niin Euklidisen avaruuden dimensio riippuu ainoastaan metrisen avaruuden (X, d) tuplausvakiosta. Kun α lähestyy arvoa yksi, lähestyy metrisen avaruuden lumihiutaleversio alkuperäistä metristä avaruutta, mikä tekee juuri tästä tapauksesta mielenkiintoisen. Tässä tutkielmassa ei tarkemmin tarkastella α:n arvon vaikutuksia metrisen avaruuden tuplausvakioon ja Euklidisen avaruuden dimensioon. Lisätietoa tästä löytyy Naorin ja Neimanin artikkelista [**9**] sekä Davidin ja Snipesin artikkelista [**4**].

Assouad on myös tunnettu Assouadin dimensiosta. Assouadin dimensio on eräs metristen avaruuksien fraktaalidimensio. Muita fraktaalidimensioita ovat esimerkiksi Hausdorffin dimensio ja laatikkodimensio. Assouadin dimensio antaa vaihtoehtoisen määritelmän metrisen avaruuden tuplaavuudelle. Lisäksi bi-Lipschitz-kuvaukset säilyttävät Assouadin dimension, joten Assouadin dimensio on hyödyllinen upotusongelmien tutkimisessa. Jos metrisen avaruuden Assouadin dimensio on ääretön, ei sitä voida upottaa mihinkään Euklidiseen avaruuteen. Lisäksi Assouadin dimensio on suurempi kuin esimerkiksi Hausdorffin dimensio, joten on usein helpompaa todistaa sen äärettömyys. Lisätietoa Assouadin dimensiosta löytyy Fraserin teoksessa [**3**].

Von Kochin lumihiutale on ensimmäisiä matemaattisesti kuvattuja fraktaaleja. Von Kochin käyrää kutsutaan lumihiutalekäyräksi lumihiutaletta muistuttavan ulkomuotonsa vuoksi. Lumihiutalekäyrä on saanut nimensä Helge von Kochin mukaan, joka kuvasi käyrän vuonna 1904. Korvaamalla tasasivuisen kolmion jokainen sivu von Kochin lumihiutalekäyrällä saadaan von Kochin lumihiutale (katso Kuva 1). Von Kochin lumihiutalekäyrän pituus on ääretön, mutta lumihiutaleen sisään jäävän alueen pinta-ala on kuitenkin äärellinen. Von Kochin lumihiutale on esimerkki paradoksista, jossa äärettömän pituinen käyrä esiintyy äärellisessä alueessa. Näiden ominaisuuksien todistukset löytyvät lähteestä [**12**].

Hutchinson kehitti tavan esittää fraktaalit funkitojärjestelmien avulla. Hutchinsonin artikkeli *Fractals and Self-Similarity* julkaistiin vuonna 1981 [**7**]. Jotta von Kochin lumihiutalekäyrä saadaan esitettyä iteroidun funktiojärjestelmän avulla, todistetaan Banachin kiintopistelause, määritellään Hausdorff-etäisyys kompakteille epätyhjille joukoille ja osoitetaan, että jokaisella iteroidulla funktiojärjestelmällä on yksikäsitteinen kiintopiste.



Kuva 1. Von Kochin lumihiutale saadaan korvaamalla tavasivuisen kolmion kaikki sivut von Kochin lumihiutalekäyrällä. Tässä tutkielmassa osoitetaan, että lumihiutaleen reunakäyrä saadaan lumihiutaleupotuksena. Lumihiutaletta muistuttavan muodon vuoksi puhutaan lumihiutalemetriikasta ja metrisen avaruuden lumihiutaleversiosta.

LUKU 1

Esitietoja

Tässä luvussa määritellään metriset avaruudet sekä muita tärkeitä käsitteitä. Lisäksi todistetaan tuloksia, jotka ovat olennaisia tutkielman muiden lemmojen ja lauseiden todistuksissa. Tämän luvun sisältö löytyy lähteistä [**15**] ja [**11**] ellei toisin mainita.

1. Metriset avaruudet

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoon X epätyhjä joukko. Kuvaus $d\colon X \times X \to [0, \infty[$ on metriikka, jos

(1) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$ ja

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Tällöin (X, d) on metrinen avaruus.

Oletetaan jatkossa, että joukko X on varustettu metriikalla d_X ja vastaavasti joukko Y on varustettu metriikalla d_Y ja, että (X, d_X) ja (Y, d_Y) ovat metrisiä avaruuksia. Lisäksi oletetaan, että avaruudet $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ ovat Euklidisia avaruuksia. Merkinnällä d_E viitataan Euklidiseen metriikkaan. Näin ellei toisin mainita.

Otetaan lisäksi käyttöön avoimelle x-keskeiselle r-säteiselle pallolle merkintä $B(x, r)$. Merkitään vastaavaa suljettua palloa seuraavasti $\overline{B}(x, r)$. Varataan vielä vektoreiden väliselle sisätulolle merkintä $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Joukon $A \subset X$ sulkeuma $\overline{A}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon A.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja A epätyhjä joukko. Kokoelma $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ (avoimia) joukkoja $U_\alpha \subset X$ on joukon K (avoin) peite, jos $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Peite on äärellinen, jos joukossa A on äärellisen monta alkiota. Jos on olemassa joukko $B \subset A$ siten, että $(U_\beta)_{\beta \in B}$ on myös joukon K peite, niin tällöin $(U_\beta)_{\beta \in B}$ on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ osapeite.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ epätyhjä joukko. Tällöin joukon A halkaisija on

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

2. Jatkuvuus

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ aina, kun $x \in X$ ja $d_X(x, x_0) < \delta$.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on Lipschitz-kuvaus, jos on olemassa $L \geq 0$ siten, että kaikilla $x, y \in X$ pätee

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y).$$

Tällöin sanotaan myös, että kuvaus f on L-Lipschitz.

LEMMA 1.7. *Jokainen Lipschitz-kuvaus on jatkuva.*

TODISTUS. Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Oletetaan, että kuvaus $f\colon X \to Y$ on Lipchitz ja osoitetaan se jatkuvaksi.

Olkoon $L = 0$. Tällöin $d_Y(f(x), f(y)) = 0$, joten $f(x) = f(y)$ kaikilla $x, y \in X$. Näin ollen f on vakiofunktio ja siten jatkuva.

Olkoon $L > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Tällöin kaikilla $x, x_0 \in X$ pätee

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq L d_X(x, x_0) < L\delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

kun $d_X(x, x_0) < \delta$. Näin ollen kuvaus f on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$. □

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Jatkuva kuvaus $f\colon X \to Y$ on homeomorfismi, jos se on bijektio ja sen käänteiskuvaus $f^{-1}\colon Y \to X$ on jatkuva.

MÄÄRITELMÄ 1.9. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on upotus, jos se määrittelee homeomorfismin $\hat{f}\colon X \to f(X)$. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on siis upotus, jos

(1) f on injektio,

(2) f on jatkuva ja

(3) $\hat{f}^{-1}\colon f(X) \to X$ on jatkuva.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on bi-Lipschitz, jos on olemassa $L \geq 1$ siten, että

$$d_X(x, y)/L \leq d_Y(f(x), f(x)) \leq L d_X(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$. Tällöin sanotaan, että kuvaus f on L-bi-Lipschitz.

LEMMA 1.11. *Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja kuvaus $f\colon X \to Y$ bi-Lipschitz. Tällöin kuvaus f on upotus.*

TODISTUS. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on bi-Lipschitz, joten on olemassa $L \geq 1$ siten, että $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Kuvaus on siis L-Lipschitz ja siten Lemman 1.7 nojalla jatkuva.

Jos $x \neq y$ ja $f(x) = f(y)$, niin $d_X(x, y) > 0$ ja $d_Y(f(x), f(y)) = 0$. Tällöin epäyhtälö $d_X(x, y)/L \leq d_Y(f(x), f(y))$ ei päde millään $L \geq 1$. Siispä $f(x) \neq f(y)$ aina, kun $x \neq y$ ja näin ollen f on injektio. Tästä seuraa, että f määrittelee bijektion $\hat{f}\colon X \to f(X)$. Osoitetaan vielä käänteiskuvaus $\hat{f}^{-1}\colon f(X) \to X$ jatkuvaksi.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, missä $L \geq 1$. Olkoon $x, x_0 \in f(X) \subset Y$. Nyt $\hat{f}^{-1}(x), \hat{f}^{-1}(x_0) \in X$. Lisäksi kuvaus f on bi-Lipschitz, joten saadaan

$$d_X(\hat{f}^{-1}(x), \hat{f}^{-1}(x_0))/L \leq d_Y(x, x_0).$$

Näin ollen

$$
\begin{aligned}
d_X(\hat{f}^{-1}(x), \hat{f}^{-1}(x_0)) &\leq d_Y(x, x_0)L \\
&< \delta L = \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

kun $d_Y(x, x_0) < \delta$. Siispä käänteiskuvaus $\hat{f}^{-1}$ on jatkuva.

Yllä olevasta seuraa, että kuvaus f on upotus. □

Kun jatkossa halutaan osoittaa, että kuvaus on bi-Lipschitz upotus, niin Lemman 1.11 nojalla riittää osoittaa, että kuvaus on bi-Lipschitz.

3. Jonot

MÄÄRITELMÄ 1.12. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jono $(x_k)_k$ suppenee, jos löytyy $y \in X$ siten, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_k, y) < \varepsilon$, kun $k \geq k_\varepsilon$.

MÄÄRITELMÄ 1.13. Olkoon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono ja $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kasvava injektio. Tällöin $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ on jonon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ osajono, missä $x_{k_n} = x_{j(n)}$.

Osajonon määritelmästä seuraa, että $j(n) = k_n \geq n$, sillä $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on kasvava injektio.

LEMMA 1.14. *Olkoon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppeneva jono metrisessä avaruudessa (X, d). Olkoon $x \in X$ jonon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ raja-arvo. Tällöin jokaiselle jonon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ osajonolle (x_{k_n}) pätee $x_{k_n} \longrightarrow x$, kun $n \to \infty$.*

TODISTUS. Koska jono $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee pisteeseen $x \in X$, jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x_n, x) < \varepsilon,$$

kun $n \geq k_\varepsilon$. Nyt osajonon määritelmän nojalla $k_n \geq n \geq k_\varepsilon$, joten myös

$$d\left(x_{k_n}, x\right) < \varepsilon$$

kaikilla $\varepsilon > 0$, kun $k_n \geq k_\varepsilon$. Siispä osajono $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee pisteeseen $x \in X$. □

LEMMA 1.15. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ epätyhjä joukko. Tällöin joukon A sulkeuma $\overline{A}$ koostuu joukon A alkioiden jonojen raja-arvoista, jotka suppenevat avaruudessa X.*

TODISTUS. Selvästi yksikään joukon A ulkopisteistä ei ole minkään joukon A pisteistä koostuvan jonon raja-arvo. Lisäksi jokainen joukon A piste on vakiojonon raja-arvo. Näin ollen riittää osoittaa, että jokainen joukon A reunapiste on jonkin joukon A pisteistä koostuvan jonon raja-arvo.

Olkoon $x_0 \in \partial A$. Tällöin kaikilla $k \geq 1$ pätee $B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) \bigcap A \neq \emptyset$. Olkoon jono $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ joukon A pisteitä, missä $a_k \in B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) \bigcap A \neq \emptyset$ kaikilla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tällöin

$$x_0 = \lim_{k \to \infty} a_k.$$

Näin ollen väite pätee. □

MÄÄRITELMÄ 1.16. Olkoon $(x_k)_k$ metrisen avaruuden (X, d) jono. Jono $(x_k)_k$ on Cauchyn jono, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ kaikilla $m, n \geq k_\varepsilon$.

LEMMA 1.17. *Jokainen Cauchyn jono on rajoitettu.*

TODISTUS. Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (X,d). Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

kun $m, n \geq k_\varepsilon$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}\sup\{d(x_n,x_m) : m,n \geq 1\} &\leq \sup\{d(x_n,x_m) : 1 \leq m,n \leq k_\varepsilon\} \\ &\quad + \sup\{d(x_n,x_m) : m,n \geq k_\varepsilon\} \\ &< \max\{d(x_n,x_m) : 1 \leq m,n \leq k_\varepsilon\} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Näin ollen jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on rajoitettu. □

4. Täydellisyys

MÄÄRITELMÄ 1.18. Jos metrisen avaruuden (X,d) jokainen Cauchyn jono suppenee, on (X,d) täydellinen.

LEMMA 1.19. *Metrinen avaruus* $\left(\mathbb{R}^N, d_E\right)$ *on täydellinen, kun* $N \geq 2$.

TODISTUS. Oletetaan tunnetuksi, että $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ on täydellinen.

Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{R}^N$, missä $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_N})$ kaikilla $k \geq 1$. Kiinnitetään jokin $j \in \{1,2,...,N\}$. Olkoon $(x_j(x_k))_{k=1}^{\infty}$ reaalilukujono, missä $x_j(x_k) = x_{k_j}$. Jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on Cauchy, joten on olemassa $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d_E(x_n, x_m) < \varepsilon$$

kaikilla $\varepsilon > 0$, kun $m, n \geq k_\varepsilon$. Lisäksi

$$|x_j(x_n) - x_j(x_m)| \leq d_E(x_n, x_m),$$

joten

$$|x_j(x_n) - x_j(x_m)| < \varepsilon$$

kaikilla $\varepsilon > 0$, kun $m, n \geq k_\varepsilon$. Näin ollen jono $(x_j(x_k))_{k=1}^{\infty}$ on Cauchy. Koska $\mathbb{R}$ on täydellinen, jono $(x_j(x_k))_{k=1}^{\infty}$ suppenee johonkin $x_j \in \mathbb{R}$. Vastaavasti voidaan päätellä jokaiselle $j = 1, ..., N$.

Olkoon

$$\begin{aligned}x &= \left(\lim_{k\to\infty} x_1(x_k), \lim_{k\to\infty} x_2(x_k), ..., \lim_{k\to\infty} x_N(x_k)\right) \\ &= (x_1, x_2, ..., x_N).\end{aligned}$$

Nyt

$$d_E(x_k, x) \longrightarrow 0,$$

kun $k \to \infty$. Siispä jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee ja siten $\mathbb{R}^N$ on täydellinen. □

LAUSE 1.20 (Cantorin leikkauslause). *Olkoon* (X,d) *täydellinen metrinen avaruus. Olkoot* $E_1, E_2, ...$ *epätyhjiä suljettuja joukkoja siten, että*

$$X \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$$

Jos $\operatorname{diam}(E_k) \longrightarrow 0$, *kun* $k \to \infty$, *niin tällöin*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x_0\}$$

jollakin $x_0 \in X$.

TODISTUS. Olkoon jokaisella $k \in \mathbb{N}$ piste $x_k \in E_k$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Koska $\operatorname{diam}(E_k) \longrightarrow 0$, kun $k \to \infty$, niin on olemassa $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $\operatorname{diam}(E_k) < \varepsilon$ kaikilla $k \geq k_\varepsilon$. Lisäksi kaikille $n, m \geq k_\varepsilon$ pätee $x_n \in E_n \subset E_{k_\varepsilon}$ ja $x_m \in E_m \subset E_{k_\varepsilon}$, sillä joukot E_k ovat sisäkkäisiä. Nyt halkaisijan määritelmän nojalla

$$d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(E_k) < \varepsilon$$

kaikilla $n, m \geq k_\varepsilon$. Siispä $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono, joka suppenee pisteeseen $x_0 \in X$, koska metrinen avaruus (X, d) on täydellinen.

Olkoon $l \in \mathbb{N}$. Nyt myös jono $(x_n)_{n=l}^{\infty}$ suppenee pisteeseen x_0. Lisäksi joukkojen sisäkkäisyyden nojalla kaikille $n \geq l$ pätee $x_n \in E_n \subset E_l$. Nyt Lemman 1.15 nojalla $x_0 \in \overline{E_l} = E_l$ ja siten

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Osoitetaan vielä, että leikkaukseen kuuluu vain piste x_0.

Olkoon $y_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Tällöin $x_0, y_0 \in E_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$d(x_0, y_0) \leq \operatorname{diam}(E_k) \longrightarrow 0,$$

kun $k \to \infty$ eli $x_0 = y_0$. Siispä

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x_0\}.$$

□

5. Kompaktius

MÄÄRITELMÄ 1.21. Metrisen avaruuden joukko K on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

MÄÄRITELMÄ 1.22. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jos jokaisella jonolla joukon $K \subset X$ pisteitä on olemassa suppeneva osajono, on joukko K jonokompakti.

LAUSE 1.23. *Metrinen avaruus on kompakti, jos ja vain jos se on jonokompakti.*

Lauseen 1.23 todistus ohitetaan. Tämän lauseen todistus vastaa Väisälän teoksesta löytyvää todistusta [**15**, s.103-104].

LEMMA 1.24. *Olkoon* (X, d) *metrinen avaruus. Kompakti joukko* $A \subset X$ *on suljettu ja rajoitettu.*

TODISTUS. Aloitetaan osoittamalla joukko A suljetuksi. Olkoon $x \in X \setminus A$ ja $U_k = X \setminus \overline{B}(x, \frac{1}{k})$, missä $k = 1, 2, ...$ Tällöin U_k on suljetun pallon komplementtina avoin joukko kaikilla $k = 1, 2, ...$ Lisäksi $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, joten $(U_k)_k$ on kompaktin joukon A avoin peite. On siis olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolla $A \subset U_n$, joten $B(x, \frac{1}{n}) \subset X \setminus A$. Näin ollen x on joukon A komplementin sisäpiste. Koska x on mielivaltainen, on joukon A komplementti avoin joukko. Siispä A on suljettu joukko. Osoitetaan vielä, että A on rajoitettu joukko.

Olkoon $x \in A$. Tällöin $A \subset X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x,i)$. Koska A on kompakti joukko, on olemassa äärellinen indeksijoukko I siten, että joukon A eräs äärellinen peite on yhdiste sisäkkäisiä avoimia palloja $B(x,i)$, missä $i \in I$. Tällöin

$$\bigcup_{i \in I} B(x,i) = B(x, \max I).$$

Nyt saadaan

$$\operatorname{diam}(A) \leq 2 \max I$$

ja näin ollen A on rajoitettu joukko. □

LEMMA 1.25. *Olkoot joukot $K_1, K_2, ..., K_n$ metrisen avaruuden (X,d) kompakteja epätyhjiä osajoukkoja. Tällöin yhdiste*

$$\bigcup_{k=1}^{n} K_k$$

on kompakti.

TODISTUS. Olkoon $(U_i)_{i \in I}$ yhdisteen $\bigcup_{k=1}^{n} K_k$ avoin peite. Valitaan $t \in \{1, 2, ..., n\}$. Nyt

$$K_t \subset \bigcup_{k=1}^{n} K_k \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

joten $(U_i)_{i \in I}$ on myös joukon K_t avoin peite. Koska K_t on kompakti on olemassa äärellinen joukko $I'_t \subset I$ siten, että

$$K_t \subset \bigcup_{i \in I'_t} U_i,$$

missä siis $\bigcup_{i \in I'_t} U_i$ on joukon K_t äärellinen osapeite. Määritellään

$$I' = \bigcup_{t=1}^{n} I'_t.$$

Tämä joukko on selvästi äärellinen ja $I' \subset I$. Jos $x \in \bigcup_{k=1}^{n} K_k$, niin $x \in K_t$ jollakin $t = 1, ..., n$ ja siten

$$x \in \bigcup_{i \in I'_t} U_i \subset \bigcup_{i \in I'} U_i.$$

Siispä

$$\bigcup_{k=1}^{n} K_k \subset \bigcup_{i \in I'} U_i$$

ja näin ollen $(U_i)_{i \in I'}$ on yhdisteen $\bigcup_{k=1}^{n} K_k$ äärellinen osapeite. Siispä yhdiste $\bigcup_{k=1}^{n} K_k$ on kompakti. □

LEMMA 1.26. *Olkoon $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jatkuva kuvaus. Olkoon joukko $K \subset X$ kompakti. Tällöin kuvajoukko $f(K) \subset Y$ on kompakti.*

TODISTUS. Olkoon $(y_k)_{k\in N}$ jono joukossa $f(K)$. Tällöin jokaiselle $k \geq 1$ löytyy $x_k \in K$ siten, että $f(x_k) = y_k$. Joukko K on Lauseen 1.23 nojalla kompaktina myös jonokompakti, joten jonolla $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on osajono $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, joka suppenee pisteeseen $x \in X$. Koska f on jatkuva kuvaus, niin

$$f(x_{k_j}) \longrightarrow f(x),$$

kun $j \to \infty$. Näin ollen

$$y_{k_j} \longrightarrow f(x) \in f(K),$$

kun $j \to \infty$. Siispä kuvajoukko $f(K)$ on jonokompakti, ja siten Lauseen 1.23 nojalla kompakti. □

LAUSE 1.27 (Heine-Borel). *Euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.*

TODISTUS. Olkoon joukko $A \subset (\mathbb{R}^n, d_E)$. Oletetaan, että joukko A on kompakti. Tällöin Lemman 1.24 nojalla A on myös suljettu ja rajoitettu.

Oletetaan seuraavaksi, että A on suljettu ja rajoitettu joukko. Osoitetaan, että tällöin joukko A on kompakti. Lauseen 1.23 nojalla riittää osoittaa, että joukko A on jonokompakti.

Olkoon $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono joukon A pisteitä. Koska A on rajoitettu joukko, löytyy $M > 0$ siten, että

$$A \subset I_0 = [-M, M]^n.$$

Jaetaan I_0 koordinaatti hypertasoilla yhtäsuuriin M-sivuisiin suljettuihin n-väleihin $I_1^1, ..., I_1^{2^n}$, joita on siis 2^n kappaletta. Oletetaan lisäksi, että näiden n-välien leikkaukset sisältyvät koordinaatti hypertasoihin. Olkoon I_1 näistä n-väleistä sellainen, joka sisältää äärettömän monta jonon $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pistettä. Olkoon $(a_{1_j})_{j\in\mathbb{N}}$ jonon $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ osajono, joka koostuu välin I_1 pisteistä.

Jaetaan vastaavasti I_1 koordinaatti hypertasojen suuntaisilla hypertasoilla $\frac{M}{2}$-sivuisiin n-väleihin $I_2^1, ..., I_2^{2^n}$, joita on 2^n kappaletta. Olkoon I_2 näistä n-väleistä sellainen, joka sisältää äärettömän monta jonon $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pistettä. Olkoon $(a_{2_j})_{j\in\mathbb{N}}$ jonon $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ osajono, joka koostuu välin I_2 pisteistä.

Jatkamalla induktiivisesti saadaan sisäkkäiset välit $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ...$, jotka ovat suljettuja ja rajoitettuja. Lisäksi jonolle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ saadaan osajonot $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ välin I_k pisteitä jokaisella $k = 1, 2, ...$ Valitaan osajoinoista $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ diagonaalijono $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, missä $b_k = a_{k_k}$. Tällöin $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on jonon $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ osajono. Välien I_k pituudet ovat $\frac{M}{k}$ kaikilla $k = 1, 2, ...$, joten

$$\operatorname{diam}(I_k) \longrightarrow 0,$$

kun $k \to \infty$. Näin ollen Cantorin leikkauslauseen (Lause 1.20) nojalla on olemassa $x_0 \in A$ siten, että $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x_0\}$. Selvästi jono $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppeenee pisteeseen x_0. Näin ollen joukko A on jonokompakti. □

6. Zornin lemma

Tässä esitettävän Zornin lemman todistus seuraa Väisälän teoksen todistusta [**16**, s.170-173].

Oletetaan seuraava aksiooma oikeaksi:

VALINTA-AKSIOOMA. *Jos J on epätyhjä joukko ja $A_j \neq \emptyset$, kaikilla $j \in J$, niin tällöin tulojoukko $\prod_{j\in J} A_j$ on epätyhjä.*

Valinta-aksioomasta seuraa, että on olemassa kuvaus $f\colon J \to \bigcup_{j\in J} A_j$ siten, että $f(j) \in A_j$ kaikilla $j \in J$.

MÄÄRITELMÄ 1.28. Joukossa A määritelty relaatio $\preceq$, eli tulojoukon osajoukko, on osittainen järjestys, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $a \preceq a$ kaikilla $a \in A$,

(2) jos $a, b \in A$ siten, että $a \preceq b$ ja $a \succeq b$, niin $a = b$ ja

(3) jos $a, b, c \in A$ siten, että $a \preceq b$ ja $b \preceq c$, niin myös $a \preceq c$.

Jos merkitään $a \prec b$ tai $a \succ b$, niin tällöin $a \neq b$.

MÄÄRITELMÄ 1.29. Osittain järjestetyn joukon $(A, \preceq)$

- alkio $m \in A$ on joukon $B \subset A$ yläraja, jos $b \preceq m$ kaikilla $b \in B$.
- alkio $m \in A$ on joukon A maksimaalinen alkio, jos ei ole olemassa sellaista $a \in A, a \neq m$, jolle $m \preceq a$.

Vastaavasti voidaan määritellä alaraja ja siten minimaalinen alkio.

MÄÄRITELMÄ 1.30. Osittainen järjestys on täysi järjestys, jos kaikilla $a, b \in A$ pätee $a \preceq b$ tai $b \preceq a$. Osittain järjestetyn joukon A osajoukko $K \subset A$ on joukon A ketju, jos sen järjestys on täysi.

LEMMA 1.31 (Zornin lemma). *Olkoon H epätyhjä joukko ja $(H, \preceq)$ osittain järjestetty joukko siten, että jokaisella joukon H ketjulla K on yläraja* $\sup K$. *Tällöin joukossa H on ainakin yksi maksimaalinen alkio.*

TODISTUS. Tehdään vastaoletus, että joukossa H ei ole yhtään maksimaalista alkiota. Tällöin jokaiselle $x \in H$ on olemassa epätyhjä joukko

$$S(x) = \{y \in H : y \succ x\}.$$

Valitaan H indeksijoukoksi ja sovelletaan valinta-aksioomaa joukkoihin $S(x)$. Nyt valinta-aksiooman nojalla on olemassa kuvaus $f\colon H \to H$ siten, että $f(x) \in S(x)$ eli $f(x) \succ x$ kaikilla $x \in H$.

Kiinnitetään $a_0 \in H$ ja määritellään seuraavasti: Joukko $Z \in H$ on Zornin joukko, jos sille pätee

(1) $a_0 \in Z$,

(2) jos $x \in Z$, niin $f(x) \in Z$ ja,

(3) jos epätyhjä joukko $K \subset Z$ on ketju, niin $\sup K \in Z$.

Olkoon Z_0 kaikkien Zornin joukkojen leikkaus. Osoitetaan, että Z_0 on Zornin joukko.

(1) Koska $a_0 \in Z$ jokaisella Zornin joukolla Z, niin selvästi myös $a_0 \in Z_0$.

(2) Jos $x \in Z_0$, niin $x \in Z$ ja siten $f(x) \in Z$ kaikilla Zornin joukoilla Z. Näin ollen $f(x) \in Z_0$.

(3) Olkoon epätyhjä joukko $K \subset Z_0$ ketju. Tällöin $K \subset Z$ ja $\sup K \in Z$ kaikilla Zornin joukoilla Z, joten $\sup K \in Z_0$.

Näin ollen Z_0 on Zornin joukko.

Olkoon

$$A = \{a \in Z_0 : \text{jos } x \in Z_0 \text{ ja } x \prec a, \text{ niin } f(x) \preceq a\}.$$

Tällöin jokaiselle $a \in A$ on olemassa joukko

$$B(a) = \{x \in Z_0 : x \preceq a \text{ tai } x \succeq f(a)\}.$$

Halutaan osoittaa, että Z_0 on ketju. Tätä varten osoitetaan seuraavat väitteet.

Väite 1. Jokaisella $a \in A$ pätee $B(a) = Z_0$.

Koska $B(a) \subset Z_0$, niin riittää osoittaa, että $B(a)$ on Zornin joukko, sillä tällöin $Z_0 \subset B(a)$.

(1) $\{x \in H : x \succeq a_0\}$ on selvästi Zornin joukko, joten $Z_0 \subset \{x \in H : x \succeq a_0\}$. Koska $A \subset Z_0$, niin $a \succeq a_0$ kaikilla $a \in A$. Näin ollen $a_0 \in B(a)$ kaikilla $a \in A$.

(2) Olkoon $x \in B(a)$. Jos $x \prec a$, niin joukon A määritelmän nojalla $f(x) \preceq a$, joten $f(x) \in B(a)$. Jos $x = a$, niin $f(x) = f(a)$, joten $f(x) \in B(a)$. Jos $x \succeq f(a)$, niin $f(x) \succ x \succeq f(a)$, sillä $f(x) \succ x$ kaikilla $x \in H$, joten $f(x) \in B(a)$. Siispä $f(x) \in B(a)$ kaikilla $a \in A$.

(3) Olkoon epätyhjä joukko $K \subset B(a)$ ketju. Jos a on joukon K yläraja, niin tällöin $\sup K \preceq a$, joten $\sup K \in B(a)$. Jos a ei ole joukon K yläraja, niin tällöin on olemassa $k \in K$ siten, että $k \preceq a$ ei päde. Koska $k \in B(a)$, niin on oltava $k \succeq f(a)$. Siispä $\sup K \succeq f(a)$, joten $\sup K \in B(a)$.

Näin ollen $B(a)$ on Zornin joukko jokaisella $a \in A$ ja siten Väite 1 pätee.

Väite 2. Joukoille A ja Z_0 pätee $A = Z_0$.

Koska $A \subset Z_0$ riittää jälleen osoittaa, että A on Zornin joukko.

(1) Koska $Z_0 \subset \{x \in H : x \succeq a_0\}$ ja $A \subset Z_0$, niin $a \succeq a_0$ kaikilla $a \in A$. Siispä $a_0 \in A$.

(2) Olkoon $a \in A$. Oletetaan, että $x \in Z_0$ ja $x \prec f(a)$. Nyt Väitteen 1 nojalla $x \in B(a)$, joten on oltava $x \preceq a$. Jos $x \prec a$, niin joukon A määritelmän nojalla $f(x) \preceq a \prec f(a)$. Jos $x = a$, niin $f(x) = f(a)$. Siispä aina $f(x) \preceq f(a)$, joten $f(a) \in A$.

(3) Olkoon epätyhjä joukko $K \subset A$ ketju. Koska Z_0 on Zornin joukko ja $K \subset A \subset Z_0$, niin $\sup K \in Z_0$. Olkoon $x \in Z_0$ ja $x \prec \sup K$. Osoitetaan, että $f(x) \preceq \sup K$.

Oletetaan, että on olemassa $k \in K$, jolla $x \prec k$. Koska $k \in K \subset A$, niin $f(x) \preceq k \preceq \sup K$.

Oletetaan nyt, että tälläistä k ei ole olemassa eli, että kaikille $k \in K$ pätee $k \preceq x$. Väitteen 1 nojalla jokaisella $k \in K$ on $x \in Z_0 = B(k)$. Nyt siis kaikille $k \in K$ pätee joko $x = k$ tai $x \succeq f(k) \succ k$. Siispä x on ketjun K yläraja $\sup K \preceq x$. Tämä on ristiriita oletuksen $x \prec \sup K$ kanssa.

Näin ollen $f(x) \preceq \sup K$ ja siten $\sup K \in A$.

Siispä A on Zornin joukko ja Väite 2 pätee.

Olkoon $a, b \in Z_0$. Väitteen 2 nojalla $a \in A$, joten $B(a)$ on määritelty. Lisäksi Väitteen 1 nojalla $b \in B(a)$, joten $b \preceq a$ tai $b \succeq f(a) \succ a$. Näin ollen Z_0 on ketju.

Nyt Zornin joukon määritelmän ehto (3) antaa $\sup Z_0 \in Z_0$, joten määritelmän ehdon (2) nojalla $f(\sup Z_0) \in Z_0$. Tästä seuraa, että $f(\sup Z_0) \preceq \sup Z_0$. Tämä on ristiriita, sillä $f(x) \succ x$ kaikilla $x \in H$, mikä seurasi valinta-aksioomasta. $\square$

LUKU 2

Assouadin upotuslause

Tässä luvussa todistetaan Assouadin upotuslause, eli että tuplaavan metrisen avaruuden jokainen lumihiutaleversio voidaan upottaa johonkin Euklidiseen avaruuteen bi-Lipschitz-kuvauksella.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Metrinen avaruus (X, d) on tuplaava, jos on olemassa vakio $c \in \mathbb{N}$ siten, että jokaiselle joukkolle $A \subset X$, jolle on $\operatorname{diam}(A) = s$, on olemassa äärellinen peite $\bigcup_{j=1}^{c} B_j$, missä $\operatorname{diam}(B_j) \leq \frac{s}{2}$ kaikilla $j = 1, ..., c$. Vakiota c kutsutaan tuplausvakioksi.

LAUSE 2.2 (Assouadin upotuslause). *Olkoon (X, d) tuplaava metrinen avaruus. Tällöin sen jokainen lumihiutaleversio (X, d^α) voidaan bi-Lipschitz upottaa johonkin Euklidiseen avaruuteen $\mathbb{R}^N$.*

Ennen Lauseen 2.2 todistamista annetaan määritelmä lumihiutalemetriikalle ja osoitetaan, että se todella on metriikka.

1. Lumihiutalemetriikka

Tämän osion sisältö löytyy lähteestä [**6**, s.27-28].

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $0 < \alpha < 1$. Tällöin metriikkaa d^α kutsutaan lumihiutalemetriikaksi ja metristä avaruutta (X, d^α) metrisen avaruuden (X, d) lumihiutaleversioksi.

Osoitetaan seuraavaksi, että metrisen avaruuden lumihiutaleversio on myös metrinen avaruus.

LEMMA 2.4. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $0 < \alpha < 1$. Määritellään*

$$d^\alpha(x, y) := d(x, y)^\alpha$$

kun $x, y \in X$. Tällöin (X, d^α) on metrinen avaruus.

TODISTUS. Osoitetaan ensin seuraava aputulos.

Väite 1. Olkoon $a, b \in [0, \infty[$ ja $0 < \alpha < 1$. Tällöin

$$(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha.$$

Jos $a = 0$ tai $b = 0$, niin Väite 1 pätee selvästi.
Oletetaan, että $a + b = 1$. Tällöin selvästi $(a + b)^\alpha = 1^\alpha = 1$.
Jos $a = 1$ ja $b = 0$ tai $a = 0$ ja $b = 1$, niin $a^\alpha + b^\alpha = 1$. Tällöin

$$(a + b)^\alpha = 1^\alpha = 1 = a^\alpha + b^\alpha.$$

Jos $a, b \in]0, 1[$, niin $a^\alpha > a$ ja $b^\alpha > b$. Näin ollen

$$(a + b)^\alpha = 1^\alpha = 1 = a + b \leq a^\alpha + b^\alpha.$$

Siispä Väite 1 pätee, kun $a+b=1$.

Täytyy vielä osoittaa, että Väite 1 pätee, kun $a,b \in]0,\infty[$. Olkoon $x = \frac{a}{a+b}$ ja $y = \frac{b}{a+b}$. Tällöin $x, y > 0$ ja $x+y=1$. Nyt edeltävän nojalla saadaan

$$\frac{(a+b)^\alpha}{(a+b)^\alpha} = (x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha = \frac{a^\alpha}{(a+b)^\alpha} + \frac{b^\alpha}{(a+b)^\alpha},$$

joten

$$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha.$$

Näin ollen Väite 1 pätee kaikilla $a, b \in [0,\infty[$.

Osoitetaan seuraavaksi alkuperäinen väite. Koska (X,d) on metrinen avaruus, on X epätyhjä joukko ja $d(x,y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$. Näin ollen $d^\alpha(x,y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$.

(1) Oletetaan ensin, että $d^\alpha(x,y) = 0$. Tällöin $d(x,y)^\alpha = 0$, joten $d(x,y) = 0$. Koska d on metriikka, niin $x = y$.
   Oletetaan seuraavaksi, että $x = y$. Tällöin d:n ollessa metriikka $d(x,y) = 0$, joten $d^\alpha(x,y) = d(x,y)^\alpha = 0^\alpha = 0$.

(2) Koska d on metriikka, sille pätee $d(x,y) = d(y,x)$ kaikilla $x, y \in X$. Näin ollen
$$d^\alpha(x,y) = d(x,y)^\alpha = d(y,x)^\alpha = d^\alpha(y,x).$$

(3) Olkoon $x, y, z \in X$. Koska d on metriikka sille pätee
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$
Siispä saadaan
$$\begin{aligned} d^\alpha(x,y) = d(x,y)^\alpha &\leq (d(x,z)+d(z,y))^\alpha \qquad (\textit{Väite 1.}\text{ nojalla}) \\ &\leq d(x,z)^\alpha + d(z,y)^\alpha \\ &= d^\alpha(x,z) + d^\alpha(z,y) \end{aligned}$$

Siispä d^α on metriikka ja (X, d^α) on metrinen avaruus. □

2. Assouadin upotuslauseen todistus

Tässä esitettävä todistus Assouadin upotuslauseelle seuraa Heinosen teoksen todistusta [**5**, s.98-102]. Aloitetaan todistamalla lemma, joka on keskeinen osa Assouadin upotuslauseen todistusta.

LEMMA 2.5. *Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Olkoon lisäksi luvut $A, B > 0$ ja $0 < \tau < 1$ sekä jono kuvauksia $\varphi_j \colon X \to \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{Z}$. Oletetaan, että kaikki jonon kuvaukset toteuttavat seuraavat ehdot:*

(1) $d_E(\varphi_j(s), \varphi_j(t)) \geq A$, jos pisteille $s, t \in X$ pätee $\tau^{j+1}C < d(s,t) \leq \tau^j C$, jollakin $C > 0$,

(2) $d_E(\varphi_j(s), \varphi_j(t)) \leq B \min\{\tau^{-j} d(s,t), 1\}$ kaikille $s, t \in X$.

Tällöin jokaiselle $0 < \alpha < 1$ on olemassa bi-Lipschitz upotus $f \colon (X, d^\alpha) \to \mathbb{R}^N$. Tällöin bi-Lipschitz vakio L ja avaruuden $\mathbb{R}^N$ dimensio riippuvat ainoastaan luvuista n, A, B, τ ja α.

Todistus. Olkoon $\mathbb{R}^m$ Euklidinen avaruus, jossa $m = 2d$, jollakin $d \geq 1$. Olkoon lisäksi $e_1, e_2, ..., e_{2d}$ avaruuden $\mathbb{R}^m$ ortonormaalikanta. Laajennetaan kanta kaikille kokonaisluvuille j seuraavasti $e_{2d+j} = e_j$. Määritellään kuvaus $f\colon X \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$

$$f(s) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \varphi_j(s) \otimes e_j,$$

missä $\otimes$ on tensoritulo, $\varphi_j(s) \otimes e_j = (0, ..., \varphi_j(s), ..., 0) \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$. Osoitetaan, että yllä määritelty sarja suppenee.

Olkoon $x_0 \in X$ ja oletetaan, että $\varphi_j(x_0) = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{Z}$. Olkoon lisäksi $l \in \mathbb{Z}$ siten, että $\tau^{l+1} < d(s, x_0) \leq \tau^l$. Nyt

$$\begin{aligned}
\|f(s)\| &= \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \varphi_j(s) \otimes e_j \right\| \\
&\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s) \otimes e_j\| \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s)\| \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s) - \varphi_j(x_0)\| \\
&\leq \sum_{j \geq l} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s) - \varphi_j(x_0)\| + \sum_{j < l} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s) - \varphi_j(x_0)\| \\
&\leq \sum_{j \geq l} \tau^{j\alpha} B \min\{\tau^{-j} d(s, x_0), 1\} + \sum_{j < l} \tau^{j\alpha} B \min\{\tau^{-j} d(s, x_0), 1\} \qquad (2.1) \\
&= \sum_{j \geq l} \tau^{j\alpha} B + \sum_{j < l} \tau^{j\alpha} B \tau^{-j} d(s, x_0) \\
&= B \sum_{j \geq l} \tau^{j\alpha} + B d(s, x_0) \sum_{j < l} \tau^{-j(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Molemmat sarjat ovat geometrisiä ja ne suppenevat, sillä $|\tau^\alpha| < 1$ ja $|\tau^{1-\alpha}| < 1$. Näin ollen alkuperäinen sarja suppenee. Arvion kohdassa (2.1) on käytetty oletuksen ehtoa (2).

Lemman 1.11 nojalla tiedetään, että jokainen bi-Lipschitz kuvaus on myös upotus. Riittää siis osoittaa, että kuvaus $f\colon (X, d^\alpha) \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ on bi-Lipschitz eli, että se toteuttaa epäyhtälön

$$L^{-1} d(s,t)^\alpha \leq d_E(f(s), f(t)) \leq L d(s,t)^\alpha \qquad (2.2)$$

jollakin $L \geq 1$, kaikilla $s, t \in X$. Lisäksi $N = \dim(\mathbb{R}^n) \cdot \dim(\mathbb{R}^m)$, kun $m = 2d$ valitaan sopivasti, joten tämä riittää todistamaan väitteen.

Osoitetaan ensin, että epäyhtälön (2.2) ylempi arvio pätee. Olkoon $s, t \in X$ ja $l \in \mathbb{Z}$ siten, että $\tau^{l+1} < d(s,t) \leq \tau^l$.Tällöin

$$\begin{aligned}
d_E(f(s), f(t)) &= \|f(s) - f(t)\| \\
&= \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \varphi_j(s) \otimes e_j - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \varphi_j(t) \otimes e_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \left(\varphi_j(s) - \varphi_j(t) \right) \otimes e_j \right\| \\
&\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \| \left(\varphi_j(s) - \varphi_j(t) \right) \otimes e_j \| \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s) - \varphi_j(t)\| \\
&\leq \sum_{j \geq l} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s) - \varphi_j(t)\| + \sum_{j < l} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s) - \varphi_j(t)\|. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Rivin (2.3) ensimmäiselle summalle saadaan oletuksen ehdon (2) nojalla seuraava arvio

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geq l} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s) - \varphi_j(t)\| &\leq \sum_{j \geq l} \tau^{j\alpha} B \min\left\{ \tau^{-j} d(s,t), 1 \right\} \\
&= \sum_{j \geq l} \tau^{j\alpha} B \\
&= B \sum_{j \geq l} \tau^{j\alpha} \qquad \text{(geometrinen suppeneva sarja)} \\
&= B \cdot \frac{\tau^{l\alpha}}{1 - \tau^\alpha}.
\end{aligned}$$

Vastaavasti rivin (2.3) toiselle summalle saadaan oletuksen ehdon (2) nojalla arvio

$$\begin{aligned}
\sum_{j < l} \tau^{j\alpha} \|\varphi_j(s) - \varphi_j(t)\| &\leq \sum_{j < l} \tau^{j\alpha} B \min\left\{ \tau^{-j} d(s,t), 1 \right\} \\
&= \sum_{j < l} \tau^{j\alpha} B \tau^{-j} d(s,t) \\
&= B d(s,t) \sum_{j < l} \tau^{-j(1-\alpha)} \qquad \text{(geometrinen suppeneva sarja)} \\
&= B d(s,t) \cdot \frac{\tau^{-(l-1)(1-\alpha)}}{1 - \tau^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Nyt yhdistämällä nämä arviot saadaan

$$\begin{aligned}
d_E(f(s), f(t)) &\leq B\left(\frac{\tau^{l\alpha}}{1-\tau^{\alpha}} + d(s,t)\cdot\frac{\tau^{-(l-1)(1-\alpha)}}{1-\tau^{1-\alpha}}\right)\\
&\leq B\left(\frac{\tau^{l\alpha}}{1-\tau^{\alpha}} + d(s,t)\cdot\frac{\tau^{-l(1-\alpha)}}{1-\tau^{1-\alpha}}\right)\\
&= B\left(\frac{\tau^{l\alpha}}{1-\tau^{\alpha}} + d(s,t)\cdot\frac{\tau^{l(\alpha-1)}}{1-\tau^{1-\alpha}}\right)\\
&\leq C\left(\tau^{l\alpha} + d(s,t)\tau^{l(\alpha-1)}\right) \qquad \text{(jollakin } C \geq 1)\\
&\leq C\left(\tau^{(l+1)\alpha}\tau^{-\alpha} + d(s,t)d(s,t)^{\alpha-1}\right)\\
&\leq C\left(\tau^{-\alpha}d(s,t)^{\alpha} + d(s,t)^{\alpha}\right)\\
&= C(\tau^{-\alpha}+1)d(s,t)^{\alpha}\\
&= C'd(s,t)^{\alpha},
\end{aligned}$$

kun $C' \geq 1$, missä C' riippuu luvuista B, τ ja α.

Osoitetaan vielä, että epäyhtälön (2.2) alempi arvio pätee. Olkoon l kuten aiemmin. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
d_E(f(s), f(t)) &= \|f(s) - f(t)\|\\
&= \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \tau^{j\alpha}\varphi_j(s)\otimes e_j - \sum_{j\in\mathbb{Z}}\tau^{j\alpha}\varphi_j(t)\otimes e_j\right\|\\
&= \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \tau^{j\alpha}\left(\varphi_j(s)-\varphi_j(t)\right)\otimes e_j\right\|\\
&\geq \left\|\sum_{-d+l\leq j<d+l} \tau^{j\alpha}(\varphi_j(s)-\varphi_j(t))\otimes e_j\right\| \qquad (2.4)\\
&\quad - \sum_{j\geq d+l}\tau^{j\alpha}\left\|\varphi_j(s)-\varphi_j(t)\right\| - \sum_{j<-d+l}\tau^{j\alpha}\left\|\varphi_j(s)-\varphi_j(t)\right\|. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Rivin (2.4) summan vektorit ovat ortogonaalisia, joten sen arvon on oltava vähintään

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{-d+l\leq j<d+l} \tau^{j\alpha}(\varphi_j(s)-\varphi_j(t))\otimes e_j\right\|\\
&= \sqrt{\sum_{-d+l\leq j<d+l}\left(\tau^{j\alpha}(\varphi_j(s)-\varphi_j(t))\right)^2}\\
&\geq \tau^{l\alpha}\left\|\varphi_l(s)-\varphi_l(t)\right\| \qquad \text{(oletuksen ehdon (1) nojalla)}\\
&\geq \tau^{l\alpha}A.
\end{aligned}$$

Oletuksen ehdon (2) nojalla rivin (2.5) ensimmäiselle summalle saadaan arvio

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j\geq d+l}\tau^{j\alpha}\left\|\varphi_j(s)-\varphi_j(t)\right\| \\
&\geq -\sum_{j\geq d+l}\tau^{j\alpha}B\min\left\{\tau^{-j}d(s,t),1\right\} \\
&= -B\sum_{j\geq d+l}\tau^{j\alpha} \qquad \text{(geometrinen suppeneva sarja)} \\
&= -B\cdot\frac{\tau^{\alpha(d+l)}}{1-\tau^{\alpha}} \\
&\geq -D\tau^{\alpha(d+l)},
\end{aligned}$$

jollakin $D > 0$, joka riippuu luvuista B, τ ja α. Myös rivin (2.5) toiselle summalle saadaan arvio oletuksen ehdon (2) nojalla

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j<-d+l}\tau^{j\alpha}\left\|\varphi_j(s)-\varphi_j(t)\right\| \\
&\geq -\sum_{j<-d+l}\tau^{j\alpha}B\min\left\{\tau^{-j}d(s,t),1\right\} \\
&= -B\sum_{j<d+l}\tau^{j\alpha}\tau^{-j}d(s,t) \\
&= -Bd(s,t)\sum_{j<d+l}\tau^{-j(1-\alpha)} \qquad \text{(geometrinen suppeneva sarja)} \\
&= -Bd(s,t)\cdot\frac{\tau^{-(-d+l-1)(1-\alpha)}}{1-\tau^{1-\alpha}} \\
&\geq -Bd(s,t)\cdot\frac{\tau^{-(-d+l)(1-\alpha)}}{1-\tau^{1-\alpha}} \\
&\geq -E\tau^{(-d+l)(\alpha-1)}d(s,t),
\end{aligned}$$

jollakin $E > 0$, joka riippuu luvuista B, τ ja α. Nyt yhdistämällä nämä arviot saadaan

$$\begin{aligned}
d_E(f(s),f(t)) &\geq \tau^{l\alpha}A - D\tau^{(d+l)\alpha} - E\tau^{(-d+l)(\alpha-1)}d(s,t) \\
&= \tau^{l\alpha}A - D\tau^{d\alpha}\tau^{l\alpha} - E\tau^{-d(\alpha-1)}\tau^{l(\alpha-1)}d(s,t) \\
&= \tau^{l\alpha}A - D\tau^{d\alpha}\tau^{l\alpha} - E\tau^{-d(\alpha-1)}\tau^{(l+1)(\alpha-1)}\tau^{-(\alpha-1)}d(s,t) \\
&> d(s,t)^{\alpha}A - D\tau^{d\alpha}d(s,t)^{\alpha} - E\tau^{-d(\alpha-1)}d(s,t)^{\alpha-1}\tau^{-(\alpha-1)}d(s,t) \\
&= d(s,t)^{\alpha}A - D\tau^{d\alpha}d(s,t)^{\alpha} - E\tau^{-d(\alpha-1)}\tau^{-(\alpha-1)}d(s,t)^{\alpha} \\
&= \left(A - D\tau^{d\alpha} - E\tau^{-d(\alpha-1)}\tau^{-(\alpha-1)}\right)d(s,t)^{\alpha} \\
&\geq \left(A - D\tau^{d\alpha} - E'\tau^{-d(\alpha-1)}\right)d(s,t)^{\alpha},
\end{aligned}$$

missä $E' > 0$. Kun $d \longrightarrow \infty$, niin $\tau^{d\alpha} \longrightarrow 0$ sekä $\tau^{-d(\alpha-1)} \longrightarrow 0$. Siispä, kun $d \geq 1$ valitaan riittävän suureksi, riippuen luvuista A, τ ja α, epäyhtälön (2.2) alempi arvio pätee.

Nyt on osoitettu, että epäyhtälö (2.2) pätee, joten kuvaus f on bi-Lipschitz ja siten myös upotus. $\square$

MÄÄRITELMÄ 2.6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $c > 0$. Olkoon $Y \subset X$ joukko pisteitä, siten että $d(y, y') \geq c$ aina, kun $y \neq y'$. Tällöin joukkoa Y kutsutaan c-verkoksi.

LEMMA 2.7. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $c > 0$. Tällöin on olemassa c-verkko Y siten, että*

$$\bigcup_{y \in Y} B(y, c) = X.$$

TODISTUS. Olkoon $\mathcal{Y}$ joukko, joka sisältää kaikki avaruuden X c-verkot. Määritellään osittainen järjestys joukossa $\mathcal{Y}$ siten, että $\hat{Y} \prec Y'$ aina, kun $\hat{Y} \subset Y'$.

Olkoon $\{Y_i\}_{i \in I}$ joukon $\mathcal{Y}$ ketju. Olkoon $\bar{Y} = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ja $y, y' \in \bar{Y}$ siten, että $y \in Y_i$ ja $y' \in Y_j$ $(i \neq j)$. Tällöin $y, y' \in Y_i$, jos $Y_i \prec Y_j$ tai $y, y' \in Y_j$, jos $Y_j \prec Y_i$. Näin ollen $d(y, y') \geq c$ ja siten myös $\bar{Y}$ on c-verkko. Lisäksi $Y_i \subset \bar{Y}$ ja siten $Y_i \prec \bar{Y}$ kaikilla $i \in I$. Näin ollen $\bar{Y}$ on ketjun $\{Y_i\}_{i \in I}$ yläraja. Siispä Zornin lemman nojalla on olemassa maksimaalinen alkio $Y \in \mathcal{Y}$.

Jos löytyy $x \in X \setminus \bigcup_{y \in Y} B(y, c)$, niin tällöin $d(x, y) \geq c$ kaikilla $y \in Y$. Näin ollen $Y \cup \{x\} \in \mathcal{Y}$. Siispä $Y \prec Y \cup \{x\}$, mikä on ristiriita, sillä Y on maksimaalinen.

Näin ollen Y on etsitty c-verkko. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi Assouadin upotuslause.

ASSOUADIN UPOTUSLAUSEEN TODISTUS. Olkoon $\tau = \frac{1}{2}$ ja vakio $j \in \mathbb{Z}$. Lemman 2.5 nojalla riittää osoittaa, että löytyy kuvaus $\varphi = \varphi_j \colon X \to \mathbb{R}^M$, joka toteuttaa Lemman 2.5 ehdot (1) ja (2) joillakin positiivisilla arvoilla A ja B. Lisäksi avaruuden $\mathbb{R}^M$ dimensio riippuu avaruuden (X, d) tuplausvakiosta.

Olkoon $c = \frac{1}{4}\tau^{j+1}$. Nyt Lemman 2.7 nojalla on olemassa c-verkko $Y \subset X$ siten, että $\bigcup_{y \in Y} B(y, c) = X$. Osoitetaan, että jokaiselle $y \in Y$ leikkaus

$$Y \cap \{x \in X : d(x, y) \leq 12c\}$$

sisältää enintään M alkiota.

Olkoon Y_i maksimaalinen $12c$-verkko joukossa Y kaikilla $i \in \{1, ..., M\}$. Jos löytyy $y \in Y \setminus \bigcup_{i=1}^{M} Y_i$, niin tällöin leikkaus $Y \cap B(y, 12c)$ sisältää enintään $M - 1$ kappaletta alkioita. Tämä pätee, sillä metrinen avaruus (X, d) on tuplaava, joten leikkaus voidaan peitellä äärellisellä määrällä palloja $B(y', c)$, missä $y' \in Y \cap B(y, 12c)$. Nyt siis jollakin $i \in \{1, ..., M\}$ pätee $Y_i \cap B(y, 12c) = \emptyset$. Siispä Y_i ei ole maksimaalinen, mikä on ristiriita. Näin ollen $Y = \bigcup_{i=1}^{M} Y_i$. Tästä seuraa, että leikkaus

$$Y \cap \{x \in X : d(x, y) \leq 12c\}$$

sisältää enintään M alkiota.

Olkoon $\{e_1, ...e_M\}$ avaruuden $\mathbb{R}^M$ ortonormaalikanta. Ajatellaan vektorit $e_1, ..., e_M$ ja maksimaaliset $12c$-verkot Y_i väreinä. Tällöin joukon Y väritys on kuvaus

$$k : Y \to \{1, ..., M\},$$

jolle $k(y) \neq k(y')$, kun $d(y, y') \leq 12c$, koska tällöin y ja y' kuuluvat eri $12c$-verkkoihin ja ovat siten eri väriä.

Olkoon $s \in X$ ja

$$\varphi(s) = \sum_{y \in Y} g_y(s) e_{k(y)},$$

missä

$$g_y(s) = \max\{2c - d(s,y), 0\}(2c)^{-1}.$$

Osoitetaan, että $\varphi(s)$ toteuttaa Lemman 2.5 ehdot arvoilla $A = \frac{1}{2}$ ja $B = 8C_0$, ja siten määrittelee etsityn kuvauksen. Tässä $C_0 > 0$ riippuu avaruuden tuplausvakiosta.

Huomataan, että $g_y(s) \neq 0$ täsmälleen silloin, kun $d(s,y) < 2c$. Koska (X,d) on tuplaava metrinen avaruus, niin sen jokainen avoin pallo $B(s,2c)$ voidaan peittää äärellisellä määrällä joukkoja $B(y,c)$. Merkitään tätä tuplausvakiosta riippuvaa lukumäärää vakiolla $C_0 \in \mathbb{N}$. Lisäksi joukko Y on c-verkko, joten erityisesti on siis C_0 kappaletta alkioita $y \in Y$, joille $g_y(s) \neq 0$. Näin ollen $\varphi(s)$ suppenee.

Olkoon $s,t \in X$. Oletetaan, että $d(s,y) < 2c$ ja $d(t,y) < 2c$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
|g_y(s) - g_y(t)| &= |\max\{2c - d(s,y), 0\}(2c)^{-1} \\
&\qquad - \max\{2c - d(t,y), 0\}(2c)^{-1}| \\
&= |1 - (2c)^{-1}d(s,y) - 1 + (2c)^{-1}d(t,y)| \\
&= (2c)^{-1}|d(t,y) - d(s,y)| \\
&\leq (2c)^{-1}d(s,t) \\
&= \left(2 \cdot \frac{1}{4}\tau^{j+1}\right)^{-1} d(s,t) \\
&= \left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}^{j+1}\right)^{-1} d(s,t) \\
&= 4\tau^{-j} d(s,t).
\end{aligned}$$

Oletetaan seuraavaksi, että $d(s,y) < 2c$ ja $d(t,y) \geq 2c$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|g_y(s) - g_y(t)| &= |g_y(s) - 0| \\
&= |\max\{2c - d(s,y), 0\}(2c)^{-1}| \\
&= |2c - d(s,y)|(2c)^{-1} \\
&\leq |d(t,y) - d(s,y)|(2c)^{-1} \\
&\leq d(s,t)(2c)^{-1} = 4\tau^{-j}d(s,t).
\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan $|g_y(s) - g_y(t)| \leq 4\tau^{-j}d(s,t)$, jos $d(s,y) \geq 2c$ ja $d(t,y) < 2c$. Lisäksi, jos $d(s,y) \geq 2c$ ja $d(t,y) \geq 2c$, niin

$$|g_y(s) - g_y(t)| = 0 \leq 4\tau^{-j}d(s,t).$$

Näin ollen kaikilla $s,t \in X$ pätee

$$|g_y(s) - g_y(t)| \leq 4\tau^{-j}d(s,t). \tag{2.6}$$

Olkoon $s \in X$ ja $y_1, y_2 \in Y_i$ siten, että $g_{y_1}(s) \neq 0$ ja $g_{y_2}(s) \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
d(y_1, y_2) &\leq d(y_1, s) + d(y_2, s) \\
&\leq 2c + 2c = 4c.
\end{aligned}$$

Koska $d(y,y') \geq 12c$ kaikilla $y,y' \in Y_i$ jokaisella $i \in \{1,...,M\}$, niin on oltava $y_1 = y_2$. Näin ollen jokaiselle $i \in \{1,...,M\}$ on olemassa korkeintaan yksi $y \in Y_i$ siten, että $g_y(s) \neq 0$. Tästä seuraa, että

$$\left\| \sum_{y \in Y_i} g_y(s) e_i \right\|^2 \leq 1,$$

sillä $g_y(s) \leq 1$. Lisäksi on olemassa C_0 kappaletta alkioita $y \in Y$, joille $g_y(s) \neq 0$. Siispä

$$\begin{aligned} \|\varphi(s)\|^2 &= \left\| \sum_{y \in Y} g_y(s) e_{k(y)} \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{M} \left\| \sum_{y \in Y_i} g_y(s) e_i \right\|^2 \\ &\leq C_0 \end{aligned}$$

ja siten

$$\|\varphi(s)\| < \sqrt{C_0}. \tag{2.7}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaus φ toteuttaan Lemman 2.5 ehdon (2). Osoitetaan erikseen tapaukset, missä $\tau^{-j} d(s,t) \geq 1$ ja $\tau^{-j} d(s,t) < 1$.

Olkoon $s,t \in X$ ja oletetaan, että $\tau^{-j} d(s,t) \geq 1$. Nyt yhtälön (2.7) nojalla saadaan

$$d_E(\varphi(s), \varphi(t)) = \|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq \|\varphi(s)\| + \|\varphi(t)\| \leq 2\sqrt{C_0}.$$

Tämä toteuttaa Lemman 2.5 ehdon (2) arvolla $B = 8C_0$.

Olkoon $s,t \in X$. Oletetaan nyt, että $\tau^{-j} d(s,t) < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} d_E(\varphi(s), \varphi(t)) &= \|\varphi(s) - \varphi(t)\| \\ &= \left\| \sum_{y \in Y} g_y(s) e_{k(y)} - \sum_{y \in Y} g_y(t) e_{k(y)} \right\| \\ &= \left\| \sum_{y \in Y} (g_y(s) - g_y(t)) e_{k(y)} \right\| \\ &\leq \sum_{y \in Y} |g_y(s) - g_y(t)| \, \|e_{k(y)}\| \\ &= \sum_{y \in Y} |g_y(s) - g_y(t)| \, . \end{aligned}$$

Nyt yhtälön (2.6) nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{y\in Y} |g_y(s)-g_y(t)| &\leq \sum_{d(s,y)<2c} |g_y(s)-g_y(t)| \\
&\quad + \sum_{d(t,y)<2c} |g_y(s)-g_y(t)| \\
&\leq \sum_{d(s,y)<2c} 4\tau^{-j} d(s,t) + \sum_{d(t,y)<2c} 4\tau^{-j} d(s,t) \\
&= C_0 4\tau^{-j} d(s,t) + C_0 4\tau^{-j} d(s,t) \\
&= 2C_0 4\tau^{-j} d(s,t).
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$d_E(\varphi(s),\varphi(t)) \leq 2C_0 4\tau^{-j} d(s,t),$$

mikä toteuttaa Lemman 2.5 ehdon (2) arvolla $B = 8C_0$.

Osoitetaan vielä, että kuvaus φ toteuttaa Lemman 2.5 ehdon (1). Olkoon $s,t \in X$ siten, että $4c = \tau^{j+1} < d(s,t) \leq \tau^j = 8c$. Koska vektorit $\varphi(s)$ ja $\varphi(t)$ ovat ortogonaaliset, saadaan

$$\begin{aligned}
d_E(\varphi(s),\varphi(t))^2 &= \|\varphi(s)-\varphi(t)\|^2 \\
&= \langle \varphi(s)-\varphi(t), \varphi(s)-\varphi(t)\rangle \\
&= \langle \varphi(s),\varphi(s)\rangle - \langle \varphi(s),\varphi(t)\rangle \\
&\quad - \langle \varphi(t),\varphi(s)\rangle + \langle \varphi(t),\varphi(t)\rangle \\
&= \langle \varphi(s),\varphi(s)\rangle + \langle \varphi(t),\varphi(t)\rangle \\
&= \left\langle \sum_{y\in Y} g_y(s)e_{k(y)}, \sum_{y\in Y} g_y(s)e_{k(y)} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sum_{y\in Y} g_y(t)e_{k(y)}, \sum_{y\in Y} g_y(t)e_{k(y)} \right\rangle \\
&= \sum_{y\in Y} \left\langle g_y(s)e_{k(y)}, g_y(s)e_{k(y)} \right\rangle \qquad (2.8) \\
&\quad + \sum_{y\in Y} \left\langle g_y(t)e_{k(y)}, g_y(t)e_{k(y)} \right\rangle \\
&= \sum_{y\in Y} \left\| g_y(s)e_{k(y)} \right\|^2 + \sum_{y\in Y} \left\| g_y(t)e_{k(y)} \right\|^2 \\
&= \sum_{y\in Y} |g_y(s)|^2 \left\| e_{k(y)} \right\|^2 + \sum_{y\in Y} |g_y(t)|^2 \left\| e_{k(y)} \right\|^2 \\
&= \sum_{y\in Y} |g_y(s)|^2 + \sum_{y\in Y} |g_y(t)|^2 .
\end{aligned}$$

Olkoon $s \in X$. Koska $X = \bigcup_{y \in Y} B(y, c)$, niin on oltava $y \in Y$ jolla $d(s, y) < c$. Tällaiselle y pätee

$$\begin{aligned} |g_y(s)| &= (2c - d(s, y))(2c)^{-1} \\ &> (2c - c)(2c)^{-1} \\ &= c(2c)^{-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nyt tämän ja yhtälön (2.8) nojalla saadaan

$$\begin{aligned} d_E(\varphi(s), \varphi(t))^2 &= \sum_{y \in Y} |g_y(s)|^2 + \sum_{y \in Y} |g_y(t)|^2 \\ &\geq |g_y(s)|^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$d_E(\varphi(s), \varphi(t)) \geq \frac{1}{2},$$

mikä toteuttaan Lemman 2.5 ehdon (1) arvolla $A = \frac{1}{2}$. □

Nyt on todistettu Assouadin upotuslause, mikä erityisesti osoittaa, että on olemassa paljon erilaisia lumihiutaleupotuksia. Von Kochin lumihiutalekäyrä on esimerkki välin $[0, 1]$ lumihiutaleupotuksesta. Tämä osoitetaan seuraavassa luvussa.

LUKU 3

Von Kochin lumihiutalekäyrä

Tässä luvussa esitetään von Kochin lumihiutakäyrä iteroidun funktiojärjestelmän avulla. Tätä varten määritellään Hausdorff-etäisyys ja osoitetaan, että jokaisella iteroidulla funktiojärjestelmällä on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste. Lopuksi osoitetaan von Kochin lumihiutalekäyrän olevan välin $[0,1]$ lumihiutaleupotus. Tämän luvun sisältö löytyy lähteistä [**11**] ja [**13**] ellei toisin mainita.

1. Banachin kiintopistelause

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $0 \leq K < 1$. Kuvaus $f\colon X \to X$ on K-kutistava, jos

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq K d\left(x, y\right)$$

kaikilla $x, y \in X$.

Jos on olemassa piste $x_0 \in X$ jolle $f(x_0) = x_0$, niin tällöin x_0 on funktion f kiintopiste.

Huomataan, että K-kutistavat kuvaukset ovat täsmälleen K-Lipschitz-kuvauksia. Kutistavat kuvaukset ovat siis Lemman 1.7 nojalla myös jatkuvia.

LAUSE 3.2 (Banachin kiintopistelause). *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja kuvaus $f\colon X \to X$ K-kutistava. Tällöin kuvauksella f on yksikäsitteinen kiintopiste x_0. Lisäksi kaikilla $x \in X$ pätee*

$$d\left(f^k(x), x_0\right) \leq K^k d\left(x, x_0\right)$$

jokaisella $k \geq 1$, missä $f^k(x) = (f \circ \cdots \circ f)(x)$.

TODISTUS. Olkoot $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ja $m, n \in \mathbb{N}$ siten, että $m < n$. Tällöin

$$\begin{aligned}
d\left(f^n(x), f^m(x)\right) &\leq d\left(f^n(x), f^{n-1}(x)\right) + d\left(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)\right) \\
&\quad + \cdots + d\left(f^{m+1}(x), f^m(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-m-1} d\left(f^{m+k}(x), f^{m+k+1}(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-m-1} d\left(f^{m+k}(x), f^{m+k}(f(x))\right).
\end{aligned}$$

Koska kuvaus f on K-kutistava, saadaan

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-m-1} d\left(f^{m+k}(x), f^{m+k}(f(x))\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d\left(x, f(x)\right) \qquad \text{(geom. summa)} \\
&= \frac{K^m(1-K^{n-m-1})}{1-K} \cdot d\left(x, f(x)\right) \\
&\leq \frac{K^m}{1-K} \cdot d\left(x, f(x)\right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

eli

$$d\left(f^n(x), f^m(x)\right) < \varepsilon,$$

kun $m > k_\varepsilon$, missä k_ε saadaan kaavasta $\frac{K^{k_\varepsilon}}{1-K} \cdot d(x, f(x)) < \varepsilon$. Näin ollen jono $\left(f^k(x)\right)_k$ on Cauchyn jono, koska $n > m$. Lisäksi metrinen avaruus X on täydellinen, joten Cauchyn jonona $\left(f^k(x)\right)_k$ suppenee johonkin pisteeseen $x_0 \in X$.

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
d\left(x_0, f(x_0)\right) &\leq d\left(x_0, f^k(x)\right) + d\left(f^k(x), f^{k+1}(x)\right) + d\left(f^{k+1}(x), f(x_0)\right) \\
&= d\left(x_0, f^k(x)\right) + d\left(f^k(x), f^k(f(x))\right) + d\left(f^{k+1}(x), f(x_0)\right) \\
&\leq d\left(x_0, f^k(x)\right) + K^k d\left(x, f(x)\right) + K d\left(f^k(x), x_0\right) \\
&= (1+K) d\left(x_0, f^k(x)\right) + K^k d\left(x_0, f(x)\right) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

kun $k \longrightarrow \infty$. Lisäksi $d\left(x_0, f(x_0)\right) \geq 0$, joten on oltava $d\left(x_0, f(x_0)\right) = 0$. Siispä $x_0 = f(x_0)$ eli x_0 on kuvauksen f kiintopiste.

Osoitetaan seuraavaksi, että kiintopiste on yksikäsitteinen. Oletetaan, että on olemassa myös toinen kiintopiste $y \in X$. Tällöin

$$0 \leq d\left(x_0, y\right) = d\left(f(x_0), f(y)\right) \leq K d\left(x_0, y\right).$$

Koska $K < 1$, niin on oltava $d\left(x_0, y\right) = 0$. Siispä $x_0 = y$.

Koska kuvaus f on K-kutistava ja x_0 sen kiintopiste, niin saadaan

$$\begin{aligned}
d\left(f^k(x), x_0\right) &= d\left(f^k(x), f^k(x_0)\right) \\
&\leq K d\left(f^{k-1}(x), f^{k-1}(x_0)\right) \\
&\leq K \cdot K d\left(f^{k-2}(x), f^{k-2}(x_0)\right) \\
&\;\;\vdots \\
&\leq K^{k-1} d\left(f(x), f(x_0)\right) \\
&\leq K^k d\left(x, x_0\right).
\end{aligned}$$

$\square$

2. Hausdorff-etäisyys

Jos kompaktien epätyhjien joukkojen A ja B etäisyys olisi

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B),$$

missä $\operatorname{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} d_E(x, y)$, niin tällöin etäisyysfunktio d ei olisi symmetrinen eikä etäisyydestä $d(A, B) = 0$ seuraisi, että $A = B$. Esimerkiksi joukoille $A = \{2, 3, 5, 8\}$ ja $B = \{2, 5\}$ pätisi

$$d(A, B) = 3 \quad \text{ja} \quad d(B, A) = 0,$$

eli etäisyys ei ole symmetrinen. Lisäksi vaikka $d(B, A) = 0$, niin selvästi $A \neq B$.

Tarvitaan siis jokin muu määritelmä joukkojen A ja B väliselle etäisyydelle. Määritellään seuraavaksi Hausdorff-etäisyys kompakteille epätyhjille joukoille ja osoitetaan, että se on metriikka.

Määritelmä 3.3. Olkoon

$$X = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on kompakti ja epätyhjä}\}.$$

Joukkojen $A \in X$ ja $B \in X$ välinen Hausdorff-etäisyys on

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B), \sup_{x \in B} \operatorname{dist}(x, A) \right\},$$

missä $\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} d_E(x, y)$.

Lemma 3.4. *Olkoon avaruus*

$$X = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on kompakti ja epätyhjä}\}.$$

Tällöin (X, d_H) on metrinen avaruus.

Todistus. Osoitetaan, että d_H on metriikka. Olkoon $A, B \in X$.

(1) Oletetaan, että $A = B$. Tällöin $A \subset B$ ja $B \subset A$. Nyt $\operatorname{dist}(x, B) = 0$ kaikilla $x \in A$ sekä $\operatorname{dist}(y, A) = 0$ kaikilla $y \in B$. Näin ollen $d_H(A, B) = 0$.

Oletetaan seuraavaksi, että $d_H(A, B) = 0$. Tällöin on siis oltava

$$\sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B) = 0 \quad \text{ja} \quad \sup_{y \in B} \operatorname{dist}(y, A) = 0.$$

Jotta jokaisella $x \in A$ pätee $\operatorname{dist}(x, B) = 0$, niin myös jokainen $x \in B$, koska A ja B ovat kompakteina joukkoina suljettuja. Näin ollen $A \subset B$. Vastaavasti saadaan $B \subset A$, joten $A = B$.

(2) Osoitetaan seuraavaksi funktion d_H symmetrisyys.

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max \left\{ \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B), \sup_{y \in B} \operatorname{dist}(y, A) \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{y \in B} \operatorname{dist}(y, A), \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B) \right\} \\ &= d_H(B, A). \end{aligned}$$

(3) Osoitetaan vielä, että Hausdorff-etäisyys toteuttaa kolmioepäyhtälön. Olkoon $C \in X$. Tällöin kaikille $x \in A$ pätee

$$\operatorname{dist}(x, B) \leq d_E(x, z) + \operatorname{dist}(z, B) \leq d_E(x, z) + d_H(C, B)$$

jokaisella $z \in C$. Näin ollen ottamalla infimum yli kaikkien $z \in C$ saadaan

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, B) &\leq \operatorname{dist}(x, C) + d_H(C, B) \\ &\leq d_H(A, C) + d_H(C, B). \end{aligned}$$

Edelleen ottamalla tästä supremum yli kaikkien $x \in A$ saadaan

$$\sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B).$$

Vastaavasti saadaan

$$\sup_{y \in B} \operatorname{dist}(y, A) \leq d_H(B, C) + d_H(C, A).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} d_H(A, B) = & \max \left\{ \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B), \sup_{y \in B} \operatorname{dist}(y, A) \right\} \\ & \leq d_H(A, C) + d_H(C, B). \end{aligned}$$

Siispä d_H on metriikka ja siten (X, d_H) metrinen avaruus. □

Osoitetaan vielä, että metrinen avaruus (X, d_H) on täydellinen, jotta Banachin kiintopistelausetta voidaan käyttää myöhemmin.

LEMMA 3.5. *Olkoon*

$$X = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on kompakti ja epätyhjä}\}.$$

Tällöin metrinen avaruus (X, d_H) *on täydellinen.*

Seuraava todistus seuraa lähteessä [**2**, s.253] esitettyä todistusta.

TODISTUS. Olkoon $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ Cauchyn jono avaruudessa X. Valitaan joukko

$$\begin{aligned} K = \{x \in \mathbb{R}^n : & \text{ on olemassa jono } (x_i)_{i=1}^{\infty}, \\ & \text{jonka osajono suppenee pisteeseen } x, \\ & \text{missä } x_i \in K_i \text{ kaikilla } i = 1, 2, ...\}. \end{aligned}$$

Osoitetaan, että jono $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee joukkoon K avaruudessa X. Aloitetaan osoittamalla joukko K epätyhjäksi.

Siirtymällä osajonoon $(x_{i_k})_{k=1}^{\infty}$, jonka indekseille i_k pätee

$$d_H(K_i, K_j) \leq 2^{-k}$$

kaikilla $i, j \geq i_k$, voidaan siis olettaa, että

$$d_H(K_i, K_j) \leq 2^{-i}$$

kaikilla $i < j$.

Valitaan ensin alkiot $x_1 \in K_1$ ja $x_2 \in K_2$ siten, että

$$d_E(x_1, x_2) < 2 d_H(K_1, K_2) \leq 2^{-1}.$$

Valitaan seuraavaksi $x_3 \in K_3$ siten, että

$$d_E(x_2, x_3) < 2 d_H(K_2, K_3) \leq 2^{-2}.$$

Jatkamalla näin induktiivisesti saadaan, siis jono $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, jossa $x_i \in K_i$ ja

$$d_E(x_i, x_{i+1}) < 2 d_H(K_i, K_{i+1}) \leq 2^{-i}$$

kaikilla $i = 1, 2, ...$ Osoitetaan, että $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $2^{2-k_\varepsilon} < \varepsilon$. Oletetaan, että $m > n \geq k_\varepsilon$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} d_E(x_n, x_m) &\leq d_E(x_n, x_{n+1}) + ... + d_E(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq 2d_H(K_n, K_{n+1}) + ... + 2d_H(K_{m-1}, K_m) \\ &= 2\sum_{i=n}^{m-1} d_H(K_i, K_{i+1}) \\ &\leq 2\sum_{i=n}^{m-1} 2^{-i} \qquad \text{(geometrinen summa)} \\ &= 2 \cdot \frac{2^{-n}\left(1 - (2^{-1})^{m-n}\right)}{1 - 2^{-1}} \\ &= 2^2\left(2^{-n} - 2^{-m}\right) \\ &= 2^{2-n} - 2^{2-m} \\ &< 2^{2-n} \leq 2^{2-k_\varepsilon} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Siispä jono $(x_i)_{i=1}^\infty$ on Cauchy. Lemman 1.19 nojalla $(\mathbb{R}^n, d_E)$ on täydellinen metrinen avaruus, joten Cauchyn jonona $(x_i)_{i=1}^\infty$ suppenee johonkin pisteeseen $x \in \mathbb{R}^n$. Siispä K on epätyhjä.

Osoitetaan seuraavaksi, että joukko K on jonon $(K_i)_{i=1}^\infty$ raja-arvo. Olkoon $\hat{\varepsilon} > 0$ ja $i_0 \in \mathbb{N}$. Valitaan $\varepsilon = \frac{\hat{\varepsilon}}{2}$. Jaetaan todistus kahteen väitteeseen.

Väite 1. Jokaiselle $x \in K$ pätee $\operatorname{dist}(x, K_i) < 2\varepsilon$ kaikilla $i \geq i_0$.

Jos $x \in K$, niin löytyy äärettömän monta $j \in \mathbb{N}$ siten, että $B(x,\varepsilon) \cap K_j \neq \emptyset$, sillä K on osajonojen raja-arvojen joukko ja jokainen K_j on kompakti. Näin ollen on olemassa $j \geq i_0$ ja löytyy $y \in K_j$ siten, että $d_E(x,y) < \varepsilon$. Koska $(K_i)_{i=1}^\infty$ on Cauchy, niin $d_H(K_i, K_j) < \varepsilon$, kun $i, j \geq i_0$ jollakin $i_0 \in \mathbb{N}$ ja siten $\operatorname{dist}(y, K_i) < \varepsilon$. Löytyy siis $z \in K_i$ siten, että $d_E(y,z) < \varepsilon$. Siispä nyt saadaan

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, K_i) &\leq d_E(x,z) \\ &\leq d_E(x,y) + d_E(y,z) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Näin ollen Väite 1 pätee.

Väite 2. Kaikilla $y \in K_i$ pätee $\operatorname{dist}(y, K) < 2\varepsilon$.

Määritellään jono $(x_j)_{j=1}^\infty$ seuraavasti. Olkoon $x_1 = y$. Olkoon indeksit $i_1 > i \geq i_0$ siten, että

$$d_H(K_k, K_j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

kaikilla $k, j \geq i_1$ ja

$$d_H(K_i, K_{i_1}) < \varepsilon.$$

Tällöin löytyy $x_2 \in K_{i_1}$ siten, että

$$d_E(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Olkoon $i_2 > i_1$ siten, että

$$d_H(K_k, K_j) < \frac{\varepsilon}{4}$$

kaikilla $k, j \geq i_2$ ja

$$d_H(K_{i_1}, K_{i_2}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tällöin löytyy $x_3 \in K_{i_2}$ siten, että

$$d_E(x_2, x_3) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jatkamalla näin induktiivisesti saadaan, jono $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, missä $x_j \in K_{i_{j-1}}$ ja

$$d_E(x_j, x_{j+1}) < \frac{\varepsilon}{2^{j-1}}.$$

Oletetaan, että $j > k > i_0$. Tällöin

$$\begin{aligned} d_E(x_k, x_j) &\leq d_E(x_k, x_{k+1}) + ... + d_E(x_{j+1}, x_j) \\ &< \sum_{n=k}^{j-1} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \\ &\leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \qquad \text{(suppeneva geometrinen sarja)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2^{k-2}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Näin ollen $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono. Siispä $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ on joukon K määritelmän mukainen suppeneva osajono, joten on olemassa piste $x_0 \in K$, joka on jonon $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ raja-arvo. Näin ollen

$$d_E(x_0, y) = d_E(x_0, x_1) < \frac{\varepsilon}{2^{1-2}} = 2\varepsilon,$$

ja siten

$$\operatorname{dist}(y, K) < 2\varepsilon$$

eli Väite 2 pätee.

Nyt Väitteiden 1 ja 2 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} d_H(K_i, K) = & \max\left\{\sup_{x \in K_i} \operatorname{dist}(x, K), \sup_{x \in K} \operatorname{dist}(x, K_i)\right\} \\ & < 2\varepsilon = 2\frac{\hat{\varepsilon}}{2} = \hat{\varepsilon}, \end{aligned}$$

kun $i \geq i_0$. Näin ollen jono $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee joukkoon K.

Täytyy osoittaa vielä, että K on kompakti joukko. Heinen ja Borelin lauseen nojalla (Lause 1.27) riittää osoittaa, että K on suljettu ja rajoitettu sillä $K \subset \mathbb{R}^n$. Osoitetaan ensin, että joukko K on rajoitettu.

Koska $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, se on Lemman 1.17 nojalla rajoitettu, joten voidaan olettaa, että

$$d_H(K_i, K_j) < 1$$

kaikilla $i \neq j$. Olkoon $x \in K_1$, $j \in \mathbb{N}$ ja $y \in K_j$. Tällöin

$$\operatorname{dist}(y, K_1) \leq \sup_{z \in K_j} \operatorname{dist}(z, K_1) \leq d_H(K_j, K_1) < 1.$$

Koska K_1 on kompakti ja siten suljettu, niin on olemassa $z \in K_1$ siten, että

$$\operatorname{dist}(y, K_1) = d_E(y, z).$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} d_E(y,x) &\leq d_E(y,z) + d_E(z,x) \\ &= \operatorname{dist}(y, K_1) + d_E(z,x) \\ &< 1 + \operatorname{diam}(K_1). \end{aligned}$$

Näin ollen $K_j \subset \overline{B}(x, \operatorname{diam}(K_1) + 1)$. Lisäksi kaikki joukot K_i ovat kompakteina joukkoina suljettuja, joten jokaiselle $x \in K$ pätee $x \in K_i$ jollakin $i = 1, 2, ...$ Siispä $K \subset \overline{B}(x, \operatorname{diam}(K_1) + 1)$ ja on siten rajoitettu.

Seuraava perustelu, jonka nojalla K on suljettu ei ole tarkka. Tarkempi todistus ohitetaan.

Sulkeuman määritelmän nojalla, jos $x \in K$ niin $x \in \overline{K}$, joten

$$\sup_{x \in K} \operatorname{dist}(x, \overline{K}) = \sup_{x \in K} \inf_{y \in \overline{K}} d_E(x, y) = 0.$$

Jos taas $x \in \overline{K}$, niin on olemassa jono $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ joukon K pisteitä siten, että $x_i \longrightarrow x$, kun $i \to \infty$. Näin ollen

$$\sup_{x \in \overline{K}} \operatorname{dist}(x, K) = \sup_{x \in \overline{K}} \inf_{y \in K} d_E(x, y) = 0.$$

Siispä $d_H(K, \overline{K}) = 0$. Näin ollen joukosta K voidaan siirtyä sen sulkeumaan $\overline{K}$, joka on suljettu.

Nyt on osoitettu, että jokainen Cauchyn jono $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee avaruudessa (X, d_H). Näin ollen metrinen avaruus (X, d_H) on täydellinen. □

3. Iteroidut funktiojärjestelmät

MÄÄRITELMÄ 3.6. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $k \in \mathbb{N}$. Olkoon lisäksi $f_i \colon X \to X$ kutistavia kuvauksia kaikilla $i = 1, 2, ..., k$. Tällöin joukkoa

$$\{f_i \colon X \to X : i = 1, 2, ..., k\}$$

kutsutaan iteroiduksi funktiojärjestelmäksi. Näistä käytetään lyhennettä IFS (iterated function system).

LAUSE 3.7. *Olkoon $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq k$, kutistavia kuvauksia. Eli*

$$d_E(f_i(x), f_i(y)) \leq K_i d_E(x, y)$$

jollakin $K_i \in]0, 1[$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Olkoon

$$X = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on kompakti ja epätyhjä}\}.$$

Tällöin kuvaus $\Phi \colon (X, d_H) \to (X, d_H)$

$$\Phi(A) = \bigcup_{i=1}^{k} f_i(A),$$

on kutistava ja sillä on yksikäsitteinen kiintopiste.

TODISTUS. Jokainen kuvaus f_i on kutistavana myös Lipschitz-kuvaus ja siten Lemman 1.7 nojalla jatkuva. Näin ollen Lemman 1.26 nojalla kuvajoukko $f_i(A)$ on epätyhjä kompakti joukko kaikilla $1 \leq i \leq k$. Siispä Lemman 1.25 nojalla $\Phi(A)$ on kompaktien joukkojen äärellisenä yhdisteenä kompakti sekä epätyhjä ja siten myös $\Phi(A) \in X$.

Lemman 3.5 nojalla metrinen avaruus (X, d_H) on täydellinen. Siispä Banachin kiintopistelauseen (Lause 3.2) nojalla riittää osoittaa, että kuvaus Φ on kutistava.

Olkoon $A, B \in X$ ja valitaan $z \in \Phi(A)$. Tällöin on olemassa $x \in A$ siten, että $f_i(x) = z$ jollakin $1 \leq i \leq k$. Merkitään vielä seuraavasti $K = \sup_{1 \leq i \leq k} K_i$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(z, \Phi(B)) &= \inf_{y \in \Phi(B)} d_E(z, y) \\
&\leq \inf_{y \in B} d_E\left(f_i(x), f_i(y)\right) \\
&\leq K_i \inf_{y \in B} d_E(x, y) \\
&\leq K \operatorname{dist}(x, B).
\end{aligned}$$

Koska $z \in \Phi(A)$ on mielivaltainen, niin yllä olevan nojalla

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in \Phi(A)} \operatorname{dist}(z, \Phi(B)) &\leq K \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B) \\
&\leq K d_H(A, B).
\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$\sup_{z \in \Phi(B)} \operatorname{dist}(z, \Phi(A)) \leq K d_H(A, B).$$

Näin ollen

$$d_H(\Phi(A), \Phi(B)) \leq K d_H(A, B),$$

joten Φ on K-kutistava. □

Joukon A ollessa kuvauksen Φ kiintopiste, Banachin kiintopistelauseen nojalla jokaiselle $B \in X$ pätee

$$d_H\left(A, \Phi^k(B)\right) \leq K^k d_H(A, B) \longrightarrow 0,$$

kun $k \to \infty$. Siispä kaikille $B \in X$ pätee

$$\lim_{k \to \infty} \Phi^k(B) = A.$$

Kiintopistettä A kutsutaan itsesimilaariksi joukoksi tapauksissa, joissa kaikille kuvauksille f_i pätee

$$d_E\left(f_i(x), f_i(y)\right) = K_i d_E(x, y)$$

jollakin $K_i \in]0, 1[$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kuvaukset f_i ovat similariteettejä. Itsesimilaarit joukot muodostavat osajoukon fraktaaleista. Näistä esimerkkejä ovat von Kochin lumihiutalekäyrä ja $\frac{1}{3}$-Cantorin joukko.

Jatketaan antamalla von Kochin lumihiutalekäyrä iteroidun funktiojärjestelmän avulla ja osoitetaan, että se on välin $[0, 1]$ lumihiutaleupotus. Tästä eteenpäin luvun loppuosalle ei ole lähdettä vaan sisältö on toteutettu osin itsenäisesti ja osin ohjaajan avustuksella.

4. Von Kochin lumihiutalekäyrä upotuksena

Määritellään seuraavaksi iteroitu funktiojärjestelmä

$$\left\{ f_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : i = 0,1,2,3 \right\},$$

missä

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= (\lambda x, \lambda y)\,, \\ f_1(x,y) &= R_\theta\,(\lambda x, \lambda y) + (\lambda, 0)\,, \\ f_2(x,y) &= R_{-\theta}\,(\lambda x, \lambda y) + \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2} \right) \quad \text{ja} \\ f_3(x,y) &= (\lambda x + 1 - \lambda, \lambda y)\,. \end{aligned}$$

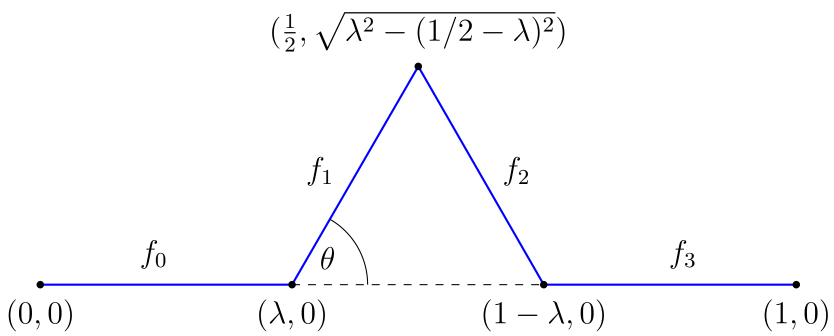
Tässä $\lambda \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$ on kutistussuhde ja R_θ sekä $R_{-\theta}$ ovat kierrot

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-2\lambda}{2\lambda} & -\frac{\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda} \\ \frac{\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda} & \frac{1-2\lambda}{2\lambda} \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{aligned} R_{-\theta} &= \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1-2\lambda}{2\lambda} & \frac{\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda} \\ -\frac{\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda} & \frac{1-2\lambda}{2\lambda} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nämä funktiot on esitetty Kuvassa 2.



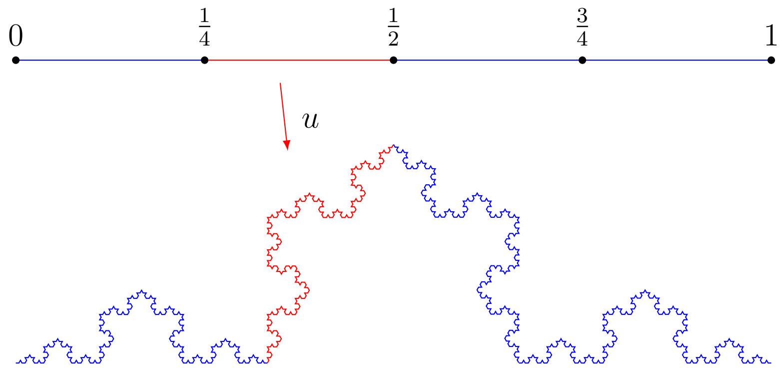
KUVA 2. Kuvassa on iteroidun funktiojärjestelmän funktiot f_0, f_1, f_2 ja f_3. Tämä on von Kochin lumihiutalekäyrä ensimmäisen iteraation jälkeen, kun iteroidaan väliä $[0,1] \times \{0\}$.

Olkoon joukko K_λ tämän iteroidun funktiojärjestelmän kiintopiste. Kutsutaan tätä joukkoa K_λ von Kochin lumihiutalekäyräksi.

Olkoon $t \in [0,1]$ ja $a_i \in \{0,1,2,3\}$ siten, että $t = \sum_{i=1}^\infty a_i 4^{-i}$. Olkoon lisäksi kuvaus $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ jolle

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} f_{a_1} \circ f_{a_2} \circ \cdots \circ f_{a_k}(0,0).$$

Osoitetaan, että tämä kuvaus on lumihiutaleupotus, jolle $u([0,1]) = K_\lambda$. Tästä eteenpäin oletetaan, että kuvaus u on yllä esitetty ellei toisin mainita.



Kuva 3. Von Kochin lumihiutalekäyrä. Korostettuna välin $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ kuvaus funktiolla u. Valitsemalla enemmän funktioita yhdistettyyn kuvaukseen u lumihiutalekäyrä tarkentuu. Kuvassa 2 esitetyt funktiot määräävät mihin välit kuvautuvat.

Lemma 3.8. *Kuvaus* $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *on hyvin määritelty.*

Todistus. Olkoon jonot $(a_i)_{i=1}^\infty$ ja $(b_i)_{i=1}^\infty$, missä $a_i, b_i \in \{0,1,2,3\}$ kaikilla $i = 1,2,3,...$ siten, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i 4^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 4^{-i}. \tag{3.1}$$

Pitää osoittaa, että näille pätee

$$u\left((a_i)\right) = u\left((b_i)\right).$$

Jos yhtälö (3.1) pätee, niin on olemassa indeksi $i_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $a_i = b_i$ kaikilla $i < i_0$ sekä $a_i = 3$ ja $b_i = 0$ kaikilla $i > i_0$. Lisäksi $b_{i_0} = a_{i_0} + 1$. Riittää siis osoittaa tapaukset

(1) $u\left(0,\overline{3}\right) = u\left(1,\overline{0}\right)$,

(2) $u\left(1,\overline{3}\right) = u\left(2,\overline{0}\right)$ ja

(3) $u\left(2,\overline{3}\right) = u\left(3,\overline{0}\right)$.

Tässä $\overline{3} = 3,3,3,...$ ja $\overline{0} = 0,0,0,...$ Tapausten osoittamiseksi määritetään ensin $f_3^k(0,0)$ ja $f_0^k(0,0)$.

Sijoittamalla piste $(0,0)$ funktioon f_3 saadaan

$$f_3(0,0) = (\lambda \cdot 0 + 1 - \lambda, \lambda \cdot 0) = (1-\lambda, 0).$$

Nyt sijoittamalla $(1-\lambda, 0)$ funktioon f_3 saadaan

$$\begin{aligned} f_3(1-\lambda,0) &= (\lambda(1-\lambda) + 1 - \lambda, 0) \\ &= ((1-\lambda)(1+\lambda), 0) \\ &= \left((1-\lambda)\sum_{i=0}^{1} \lambda^i, 0\right). \end{aligned}$$

Edelleen sijoittamalla tämä funktioon f_3 saadaan

$$\begin{aligned} f_3\left((1-\lambda)\sum_{i=0}^{1}\lambda^i, 0\right) &= \left(\lambda(1-\lambda)\sum_{i=0}^{1}\lambda^i + 1 - \lambda, 0\right) \\ &= \left((1-\lambda)\sum_{i=0}^{1}\lambda^{i+1} + 1 - \lambda, 0\right) \\ &= \left((1-\lambda)\sum_{i=0}^{2}\lambda^i, 0\right). \end{aligned}$$

Jatkamalla näin saadaan induktiolla

$$f_3^k(0,0) = \left((1-\lambda)\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^i, 0\right).$$

Lisäksi $f_0(0,0) = (\lambda \cdot 0, \lambda \cdot 0) = (0,0)$, joten saadaan

$$f_0^k(0,0) = (0,0).$$

Osoitetaan seuraavaksi tapaus (1).

Kuvauksen u määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned} u\left(0,\overline{3}\right) &= \lim_{k\to\infty} f_0 \circ f_3^k(0,0) \\ &= f_0\left(\lim_{k\to\infty} f_3^k(0,0)\right) \\ &= f_0\left(\lim_{k\to\infty}\left((1-\lambda)\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^i, 0\right)\right) \\ &= f_0\left((1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i, 0\right) \\ &= f_0\left((1-\lambda)\frac{1}{1-\lambda}, 0\right) \\ &= f_0(1,0) = (\lambda, 0). \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} u\left(1,\overline{0}\right) &= \lim_{k\to\infty} f_1 \circ f_0^k(0,0) \\ &= f_1\left(\lim_{k\to\infty} f_0^k(0,0)\right) \\ &= f_1\left(\lim_{k\to\infty}(0,0)\right) \\ &= f_1(0,0) = (\lambda, 0). \end{aligned}$$

Näin ollen $u\left(0,\overline{3}\right) = u\left(1,\overline{0}\right)$, eli ensimmäinen tapaus pätee. Jatketaan osoittamalla tapaus (2).

Kuvauksen määritelmän nojalla

$$
\begin{aligned}
u\left(1,\overline{3}\right) &= \lim_{k\to\infty} f_1 \circ f_3^k(0,0) \\
&= f_1(1,0) \\
&= R_\theta(\lambda,0) + (\lambda,0) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1-2\lambda}{2\lambda} & -\frac{\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda} \\ \frac{\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda} & \frac{1-2\lambda}{2\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1-2\lambda}{2\lambda}\cdot\lambda \\ \frac{\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda}\cdot\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2} \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Lisäksi

$$
\begin{aligned}
u\left(2,\overline{0}\right) &= \lim_{k\to\infty} f_2 \circ f_0^k(0,0) \\
&= f_2(0,0) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Siispä $u\left(1,\overline{3}\right) = u\left(2,\overline{0}\right)$, joten toinen tapaus pätee. Osoitetaan vielä tapaus (3).

Jälleen kuvauksen määritelmästä saadaan

$$
\begin{aligned}
u\left(2,\overline{3}\right) &= \lim_{k\to\infty} f_2 \circ f_3^k(0,0) \\
&= f_2(1,0) \\
&= R_{-\theta}(\lambda,0) + \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1-2\lambda}{2\lambda} & \frac{\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda} \\ -\frac{\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda} & \frac{1-2\lambda}{2\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1-2\lambda}{2\lambda}\cdot\lambda \\ -\frac{\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}}{\lambda}\cdot\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda, 0).
\end{aligned}
$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} u\left(3,\overline{0}\right) &= \lim_{k\to\infty} f_3 \circ f_0^k(0,0) \\ &= f_3(0,0) \\ &= ((1-\lambda),0)\,. \end{aligned}$$

Näin ollen $u\left(2,\overline{3}\right) = u\left(3,\overline{0}\right)$, eli kolmas tapaus pätee.

Tapaukset (1)-(3) pätevät, joten kuvaus u on hyvin määritelty. □

HUOMAUTUS 3.9. On olennaista, että kuvaus u on hyvin määritelty, jotta von Kochin lumihiutale on todella käyrä. Esimerkiksi $\frac{1}{3}$-Cantorin joukko on iteroidun funktiojärjestelmän $\{g_0, g_1\}$ kiintopiste, missä

$$g_0(x) = \frac{1}{3}x \quad \text{ja} \quad g_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Tällöin $\frac{1}{3}$-Cantorin joukko voidaan yrittää kirjoittaa välin $[0,1]$ kuvana kuvauksella $\tilde{u}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\tilde{u}(t) = \lim_{k\to\infty} g_{a_1} \circ g_{a_2} \circ \cdots \circ g_{a_k}(0),$$

missä $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}$ ja $a_i \in \{0,1\}$ kaikilla $i = 1, 2, ...$ Kuvaus $\tilde{u}$ ei ole kuitenkaan hyvin määritelty, sillä

$$\tilde{u}(0,\overline{1}) = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad \tilde{u}(1,\overline{0}) = \frac{2}{3},$$

vaikka

$$0 + \sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} 0 \cdot 2^{-i} = \frac{1}{2}.$$

Erityisesti huomataan, että $\frac{1}{3}$-Cantorin joukko ei ole käyrä, eikä sitä siis voida esittää millään jatkuvalla kuvauksella välin $[0,1]$ kuvana.

Koska avaruus $\mathbb{R}^2$ on täydellinen, kuvauksen u määräämän jonon suppenemiseksi riittää osoittaa, että kyseinen jono on Cauchy. Osoitetaan tämä seuraavaksi.

LEMMA 3.10. *Avaruuden $\mathbb{R}^2$ jono $(f^{a_k}(0,0))_{k=1}^{\infty}$, missä*

$$f^{a_k}(0,0) = f_{a_1} \circ f_{a_2} \circ \cdots \circ f_{a_k}(0,0),$$

on Cauchy.

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $m, n \in \mathbb{N}$ siten, että $m < n$. Nyt

$$\begin{aligned} d_E\left(f^{a_n}(0,0), f^{a_m}(0,0)\right) &\le d_E\left(f^{a_n}(0,0), f^{a_{n-1}}(0,0)\right) + d_E\left(f^{a_{n-1}}(0,0), f^{a_{n-2}}(0,0)\right) \\ &\quad + \cdots + d_E\left(f^{a_{m+1}}(0,0), f^{a_m}(0,0)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-m-1} d_E\left(f^{a_{m+j}}(0,0), f^{a_{m+j+1}}(0,0)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-m-1} d_E\left(f^{a_{m+j}}(0,0), f^{a_{m+j}}\left(f_{a_{m+j+1}}(0,0)\right)\right). \end{aligned}$$

Jokainen kuvaus f_{a_k} on similariteetti ja lisäksi $d_E\big(0, f_{a_{m+j+1}}(0,0)\big) < 2$ kaikilla $a_{m+j+1} \in \{0,1,2,3\}$. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-m-1} d_E\left(f^{a_{m+j}}(0,0), f^{a_{m+j}}\left(f_{a_{m+j+1}}(0,0)\right)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-m-1} \lambda^{m+j} d_E\left(0, f_{a_{m+j+1}}(0,0)\right)\\
&< 2\sum_{j=0}^{n-m-1} \lambda^{m+j} \qquad \text{(geometrinen summa)}\\
&= 2\cdot\frac{\lambda^m\left(1-\lambda^{n-m-1}\right)}{1-\lambda}\\
&\le \frac{2\lambda^m}{1-\lambda} < \varepsilon
\end{aligned}$$

eli

$$d_E\left(f^{a_n}(0,0), f^{a_m}(0,0)\right) < \varepsilon,$$

kun $m > k_\varepsilon$, missä k_ε saadaan kaavasta $\frac{2\lambda^{k_\varepsilon}}{1-\lambda} < \varepsilon$. Siispä $\left(f^{a_k}(0,0)\right)_{k=0}^{\infty}$ on Cauchyn jono. □

Lemman 1.11 nojalla jokainen bi-Lipschitz-kuvaus on myös upotus. Siispä kuvaus $u\colon\ ([0,1], d_E^{\alpha_\lambda}) \to \mathbb{R}^2$, missä $\alpha_\lambda \in]0,1[$, on lumihiutaleupotus, jos se on bi-Lipschitz. Ennen tämän todistamista, osoitetaan vielä seuraavat lemmat.

LEMMA 3.11. *Kuvaukselle u pätee $u([0,1]) = K_\lambda$, missä K_λ on von Kochin lumihiutalekäyrä.*

TODISTUS. Joukko $\{(0,0)\}$ on selvästi kompakti ja epätyhjä. Lisäksi K_λ on annetun funktiojärjestelmän kiintopiste. Näin ollen saadaan

$$u([0,1]) = \lim_{k\to\infty} \Phi^k(\{(0,0)\}) = K_\lambda.$$

□

LEMMA 3.12. *Olkoon väli*

$$I = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i 4^{-i}, \sum_{i=1}^{k}\left(a_i 4^{-i}\right) + 4^{-k}\right]$$

ja välin kuvaus

$$u(I) = f_{a_1}\circ\cdots\circ f_{a_k}(K_\lambda),$$

missä $K_\lambda = u([0,1])$. Tällöin

$$\operatorname{diam}(u(I)) = \lambda^k \operatorname{diam}(K_\lambda).$$

TODISTUS. Kuvauksen määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}\,(u(I)) &= \operatorname{diam}\,(f_{a_1}\circ\cdots\circ f_{a_k}(K_\lambda))\\
&= \sup_{x,y\in K_\lambda} d_E\left(f_{a_1}\circ\cdots\circ f_{a_k}(x), f_{a_1}\circ\cdots\circ f_{a_k}(y)\right).
\end{aligned}$$

Koska jokainen f_{a_k} on similariteetti, saadaan

$$\begin{aligned}
&\sup_{x,y\in K} d_E\left(f_{a_1}\circ\cdots\circ f_{a_k}(x), f_{a_1}\circ\cdots\circ f_{a_k}(y)\right)\\
&\quad=\lambda^k \sup_{x,y\in K} d_E(x,y)\\
&\quad=\lambda^k \operatorname{diam}(K_\lambda).
\end{aligned}$$

□

Von Kochin lumihiutalekäyrän K_λ halkaisijalle pätee $\operatorname{diam}(K_\lambda)=1$. Tämän todistus ohitetaan.

Lause 3.13. *Olkoon* $\lambda\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$ *ja* $\alpha_\lambda=-\frac{\log\lambda}{\log 4}$. *Tällöin kuvaus*

$$u\colon\ ([0,1],d_E^{\alpha_\lambda})\to\mathbb{R}^2$$

on bi-Lipschitz upotus.

Todistus. Täytyy osoittaa, että on olemassa $L_\lambda\geq 1$ jolla

$$L_\lambda^{-1}d_E(t,s)^{\alpha_\lambda}\leq d_E(u(t),u(s))\leq L_\lambda d_E(t,s)^{\alpha_\lambda}$$

kaikilla $s,t\in[0,1]$. Jaetaan todistus kahteen väitteeseen.

Väite 1. Kaikilla $s,t\in[0,1]$ pätee $d_E(u(t),u(s))\leq L_\lambda d_E(t,s)^{\alpha_\lambda}$.

Olkoon $t,s\in[0,1]$ siten, että $t<s$. Tällöin on olemassa $k\in\mathbb{N}$ siten, että

$$4^{-(k+1)}<d_E(t,s)\leq 4^{-k}.$$

Tällöin väli $[t,s]$ sisältää ainakin yhden välin $I=\left[4^{-(k+2)}m,4^{-(k+2)}(m+1)\right]$, missä $m\in\left\{0,1,...,4^{k+2}-1\right\}$. Lisäksi

$$\frac{d_E(t,s)}{\operatorname{diam}(I)}\leq\frac{4^{-k}}{4^{-(k+2)}}=16,$$

joten väli $[t,s]$ sisältää äärellisen määrän välejä I.

Koska $I\subset[t,s]$, on olemassa $4^{-(k-1)}$-pituiset välit J_1 ja J_2 siten, että $[t,s]\subset J_1\cup J_2$. Oletetaan, että $t\in J_1$ ja $s\in J_2$. Lisäksi voidaan olettaa, että väleille J_1 ja J_2 pätee joko $J_1=J_2$ tai $J_1\cap J_2=\{r\}$.

Jos $J_1\cap J_2=\{r\}$ niin $t,r\in J_1$, joten $u(t),u(r)\in u(J_1)$. Vastaavasti $r,s\in J_2$, joten $u(r),u(t)\in u(J_2)$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
d_E(u(t),u(s))&\leq d_E(u(t),u(r))+d_E(u(r),u(s))\\
&\leq\sup_{x,y\in u(J_1)}d_E(x,y)+\sup_{x,y\in u(J_2)}d_E(x,y)\\
&=\operatorname{diam}(u(J_1))+\operatorname{diam}(u(J_2))
\end{aligned}$$

ja Lemman 3.12 nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathrm{diam}\ (u(J_1)) + \mathrm{diam}\ (u(J_2)) \\
&\quad = \lambda^k \,\mathrm{diam}\,(K_\lambda) + \lambda^k \,\mathrm{diam}\,(K_\lambda) \\
&\quad = 2\lambda^k \,\mathrm{diam}\,(K_\lambda) \\
&\quad = 2\left(4^{-k}\right)^{\alpha_\lambda} \mathrm{diam}\,(K_\lambda) \\
&\quad \leq 2\,\mathrm{diam}\,(K_\lambda) d_E(t,s)^{\alpha_\lambda}.
\end{aligned}$$

Siispä

$$d_E(u(t), u(s)) \leq 2\,\mathrm{diam}\,(K_\lambda) d_E(t,s)^{\alpha_\lambda}.$$

Jos $J_1 = J_2$, niin voidaan valita piste $r \in]t, s[$ ja välit $\tilde{J}_1$ ja $\tilde{J}_2$ siten, että $t, r \in \tilde{J}_2$ ja $r, s \in \tilde{J}_2$. Nyt vastaalla päättelyllä, kun yllä saadaan

$$d_E(u(t), u(s)) \leq 2\,\mathrm{diam}\,(K_\lambda) d_E(t,s)^{\alpha_\lambda}.$$

Löytyy siis $L_\lambda = 2\,\mathrm{diam}\,(K_\lambda) \geq 1$, eli Väite 1 pätee.

Väite 2. Kaikilla $s, t \in [0,1]$ pätee $d_E(u(s), u(t)) \geq L_\lambda^{-1} d_E(s,t)^{\alpha_\lambda}$.

Olkoon $t, s \in [0,1]$ siten, että $t < s$. Tällöin on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$4^{-(k+1)} < d_E(t,s) \leq 4^{-k}.$$

Tällöin väli $[t,s]$ sisältää ainakin yhden välin $I = \left[4^{-(k+2)}m, 4^{-(k+2)}(m+1)\right]$, missä $m \in \left\{0, 1, ..., 4^{k+2} - 1\right\}$. Väitteen 1 todituksessa on perusteltu, miksi tällaisiä välejä löytyy äärellinen määrä.

Otetaan käyttöön merkintä väleille

$$I_{a_1,\ldots,a_k} = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i 4^{-i}, \sum_{i=1}^{k} a_i 4^{-i} + 4^{-k}\right],$$

missä $a_i \in \{0,1,2,3\}$. Olkoon välit $J_1 = I_{a_1,\ldots,a_{k-1}}$ ja $J_2 = I_{b_1,\ldots,b_{k-1}}$ siten, että $t \in J_1$, $s \in J_2$ ja $[t,s] \subset J_1 \cup J_2$. Tällöin väleille J_1 ja J_2 pätee $J_1 = J_2$ tai $J_1 \cap J_2 = \{r\}$. Olkoon lisäksi välit

$$I^t = I_{a_1,\ldots,a_k}$$

ja

$$I^s = I_{b_1,\ldots,b_k},$$

joille $t \in I^t$ ja $s \in I^s$.

Oletetaan, että $J_1 = J_2$. Tällöin $a_i = b_i$ kaikilla $i = 1, ..., k-1$ ja siten

$$\begin{aligned}
d_E(u(t), u(s)) &\geq \mathrm{dist}\ \left(u\left(I^t\right), u\left(I^s\right)\right) \\
&\geq \lambda^{k-1}\,\mathrm{dist}\ \left(u\left(\left[a_k 4^{-1}, a_k 4^{-1} + 4^{-1}\right]\right), u\left(\left[b_k 4^{-1}, b_k 4^{-1} + 4^{-1}\right]\right)\right) \\
&\geq \lambda^{k-1} L_\lambda^{-1} \\
&= \left(4^{-(k-1)}\right)^{\alpha_\lambda} L_\lambda^{-1} \\
&\geq d_E(t,s)^{\alpha_\lambda} L_\lambda^{-1},
\end{aligned}$$

jollakin $L_\lambda \geq 1$, joka riippuu ainoastaan parametrista λ. Näin ollen Väite 2 pätee tässä tapauksessa.

Oletetaan seuraavaksi, että $J_1 \cap J_2 = \{r\}$. Lisäksi oletetaan, että $a_{k-1} \in \{0, 1, 2\}$ ja $b_{k-1} \in \{1, 2, 3\}$. Tällöin saadaan vastaavasti, kuten yllä

$$d_E(u(t), u(s)) \geq d_E(t, s)^{\alpha_\lambda} L_\lambda^{-1},$$

jollakin $L_\lambda \geq 1$. Näin ollen Väite 2 pätee tässä tapauksessa.

Oletetaan vielä, että $J_1 \cap J_2 = \{r\}$ ja lisäksi, että $a_{k-1} = 3$ ja $b_{k-1} = 0$. Olkoon indeksi $i_0 \in \{i : a_i \neq b_i\}$ sekä jonot

$$(a_i) = (a_1, ..., a_{i_0}, 3, 3, ..., 3, a_k)$$

ja

$$(b_i) = (b_1, ..., a_{i_0 - 1}, a_{i_0 + 1}, 0, 0, ..., 0, b_k).$$

Tällöin $I^t = I_{(a_i)}$ ja $I^s = I_{(b_i)}$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} d_E(u(t), u(s)) &\geq \text{ dist } \left(u\left(I^t\right), u\left(I^s\right)\right) \\ &= \text{ dist } \left(u\left(I_{(a_i)}\right), u\left(I_{(b_i)}\right)\right) \\ &= \lambda^{i_0 - 1} \text{ dist } \left(u\Big(I_{(\tilde{a}_i)}\Big), u\left(I_{\left(\tilde{b}_i\right)}\right)\right) \\ &= \lambda^{i_0 - 1} \lambda^{k - i_0 - 1} \text{ dist } \left(u\left(I_{\left(a_{i_0}, a_k\right)}\right), u\left(I_{\left(a_{i_0 + 1}, b_k\right)}\right)\right) \\ &\geq \lambda^{k-2} L_\lambda^{-1} \\ &= \left(4^{-(k-2)}\right)^{\alpha_\lambda} L_\lambda^{-1} \\ &\geq d_E(t, s)^{\alpha_\lambda} L_\lambda^{-1}, \end{aligned}$$

jollakin $L_\lambda \geq 1$, joka jälleen riippuu vain parametrista λ. Tässä

$$\left(\tilde{a}_i\right) = (a_{i_0}, 3, 3, ..., 3, a_k)$$

ja

$$\left(\tilde{b}_i\right) = (a_{i_0 + 1}, 0, 0, ..., 0, b_k).$$

Näin ollen Väite 2 pätee.

Nyt Väitteiden 1 ja 2 nojalla kuvaus $u\colon\ ([0, 1], d_E^{\alpha_\lambda}) \to \mathbb{R}^2$ on bi-Lipschitz ja siten myös upotus. $\square$

Siispä Lauseen 3.13 nojalla kuvaus u on välin $[0, 1]$ lumihiutaleupotus. Lisäki Lemman 3.11 nojalla kuvauksen u kuvajoukko $u([0, 1])$ on von Kochin lumihiutalekäyrä. Näin ollen von Kochin lumihiutalekäyrä on lumihiutaleupotus.

Lähdeluettelo

[1] P. Assouad: *Plongements lipschitziens dans* $\mathbb{R}^n$. Bull. Soc. Math. Franc, 1983.

[2] D. Bugaro, Yu. D. Burago, ja S .Ivanov: *A Course in Metric Geometry.* American Mathematical Society, 2001.

[3] J .Fraser: *Assouad dimension and fractal geometry.* Cambridge University Press, 2020.

[4] G .David ja M .Snipes: *A Non-probabilistic proof of the Assouad embedding theorem with bounds on the dimension.* Analysis and Geometry in Metric Spaces, Vol. 1, 2013, s.36-41.

[5] J. Heinonen: *Lectures on analysis on metric spaces.* Springer, 2001.

[6] I. Holopainen: *Metristen avaruuksien differentioituvat struktuurit -kurssimoniste.* Helsingin yliopisto, 2009.

[7] J. Hutchinson: *Fractals and Self-Similarity.* Indiana Univ. Math. J., 30 No.5, 1981, s.713-747.

[8] T. Laakso: *Plane with* A^∞*-weighted metric not bi-Lipschitz embeddable to* $\mathbb{R}^n$. Bull. London Math. Soc., 34, 2002, s.667–676.

[9] A. Naor ja O. Neiman: *Assouad's theorem with dimension independent of the snowflaking.* Revista Matematica Iberoamericana, 28 (4), 2012, s.1123-1142.

[10] P. Pansu: *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un.* Ann. Math., 129, 1989, s.1–60.

[11] J. Parkkonen: *Metriset avaruudet ja Topologia -kurssimoniste.* Jyväskylän yliopisto, 2020.

[12] M. Pylkäs: *Gabrielin torvi ja Kochin lumihiutale.* Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2013.

[13] T. Rajala: *Funktionaalianalyysi -kurssimoniste.* Jyväskylän yliopisto, 2014.

[14] S. Semmes: *On the nonexistence of bi-Lipschitz parameterizations and geometric problems about* A_∞*-weights.* Rev. Mat. Iberoamericana, 12, 1996, s.337–410.

[15] J. Väisälä: *Topologia 1.* Limes, 1999.

[16] J. Väisälä: *Topologia 2.* Limes, 1999.