Brouwerin kiintopistelause

Jussi Porkola

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2022

Tiivistelmä: Jussi Porkola, *Brouwerin kiintopistelause* (engl. *Brouwer's fixed-point theorem)*, matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2022.

Tämän tutkielman tarkoituksena on todistaa Brouwerin kiintopistelause tason suljetussa yksikköpallossa. Brouwerin kiintopistelauseen mukaan jokaisella jatkuvalla funktiolla tason suljetulta yksikköpallolta itselleen on kiintopiste.

Johdannossa käydään läpi Brouwerin elämäkertaa. Keskitytään elämäkerran kuvailussa erityisesti Brouwerin akateemiseen uraan. Lisäksi johdannossa kuvaillaan lyhyesti tutkielman kappaleiden aiheita.

Toisessa luvussa käsitellään lyhyesti perusmääritelmiä ja merkintöjä. Kolmannessa luvussa käsitellään tutkielmassa tarvittavia esitietoja topologisista avaruuksista. Määritellään topologisten avaruuksien peruskäsitteitä, kuten jatkuvuus, topologian kanta, yhtenäisyys ja kompaktius sekä todistetaan näihin liittyviä tuloksia.

Neljännessä luvussa lähdetään tarkastelemaan topologisia avaruuksia abstraktin algebran käsitteiden, kuten ekvivalenssiluokkien kautta. Luvun alussa määritellään homotopia ja polkuhomotopia, jotka osoittautuvat ekvivalenssirelaatioiksi. Polkuhomotopia on jatkuva kuvaus, joka muuttaa topologisen avaruuden polun toiseksi poluksi niin, että polkujen yhteiset alku ja -päätepisteet pysyvät muunnoksessa muuttumattomina. Luvussa määritellään myös polkuhomotopian ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokkien välinen laskutoimitus ja nähdään, että tällä laskutoimituksella on hyvin samanlaisia ominaisuuksia kuin mitä aksioomia ryhmällä on.

Viidennen luvun alussa määritellään topologisen avaruuden perusryhmä. Avaruuden perusryhmää varten kiinnitetään avaruudesta piste, jota kutsutaan avaruuden kantapisteeksi. Lisäksi määritellään silmukan olevan sellainen polku, jolla on sama alku- ja päätepiste. Tällöin avaruuden perusryhmä on kantapisteessä olevien silmukoiden polkuluokkien joukko varustettuna polkuluokkien välisellä laskutoimituksella. Tämän jälkeen luvussa käsitellään perusryhmän riippuvuutta kantapisteestä ja määritellään kuvaus, jonka avulla perusryhmä voidaan kuvata toiseksi perusryhmäksi. Määritellään myös kuvauksen indusoima homomorfismi. Luvun lopussa käsitellään vielä lyhyesti peiteavaruuksia, kuvausten nostoja sekä ympyrän perusryhmää.

Kuudennessa luvussa määritellään aluksi retraktio. Retraktio on sellainen jatkuva kuvaus topologiselta avaruudelta saman topologisen avaruuden osajoukkoon, jonka rajoittuma tähän osajoukkoon on sama kuin identtinen kuvaus. Sitten todistetaan joitakin tuloksia liittyen retraktioihin. Luvun lopussa päästään todistamaan tutkielman päätulos, eli Brouwerin kiintopistelause tason suljetussa yksikköpallossa.

Seitsemännessä ja tutkielman viimeisessä luvussa käsitellään kiintopistelauseiden historiaa sekä esitellään Banachin, Schauderin ja Browderin kiintopistelauseet. Luvun lopussa esitellään vielä kiintopistelauseiden sovelluksia niin teoreettisen kuin sovelletun matematiikan osa-alueilta.

Sisältö

1. Johdanto

Tämän työn keskeinen tavoite on todistaa Brouwerin kiintopistelause tason suljetussa yksikköpallossa. Matematiikassa funktion kiintopiste tarkoittaa funktion määrittelyjoukon pistettä, jonka funktio kuvaa itselleen. Brouwerin kiintopistelauseen mukaan jokaisella jatkuvalla funktiolla tason suljetulta yksikköpallolta itselleen on kiintopiste. Lause on yksi tärkeimmistä algebrallisen topologian tuloksista. Algebrallisessa topologiassa topologisia avaruuksia tutkitaan algebrasta tuttujen käsitteiden avulla [**8**].

Luitzen Egbertus Jan Brouwer syntyi Overschiessa, Rotterdamin lähiympäristössä 27. helmikuuta vuonna 1881. Brouwer suoritti lukion Hoornissa ja neljääntoista ikävuoteensa mennessä hän oli valmistunut lukiosta loistavin arvosanoin. Yliopistoon pääsy vaati kreikan ja latinan osaamista, eikä Brouwer ollut opiskellut kumpaakaan kieltä lukio-opintojensa aikana. Siksi Brouwer vietti seuraavat kaksi vuotta kreikan ja latinan kieltä opiskellen. Vuonna 1897 Brouwer osallistui Amsterdamin yliopiston pääsykokeisiin.

Amsterdamin yliopiston matematiikan professori Diederik Johannes Korteweg huomasi nopeasti, että Brouwer on erinomainen opiskelija. Vasta perustutkintoaan suorittava Brouwer todisti joitakin tuloksia liittyen jatkuviin liikkeisiin neliulotteisissa avaruuksissa. Kortewegin rohkaisemana Brouwer julkaisi todistuksensa yleisölle. Julkaisusta tuli hänen ensimmäisensä Amsterdamin tiedeakatemian julkaisema artikkeli. Muista matematiikan aihepiireistä Brouwer oli kiinnostunut topologiasta ja matematiikan perustasta. Hän oppi aihepiireistä sekä yliopiston luennoilla että opiskelemalla itsenäisesti monia töitä.

Brouwer valmistui maisteriksi vuonna 1904 ja meni samana vuonna naimisiin yksitoistavuotta vanhemman Lize de Hollin kanssa, jolla oli tytär entisestä avioliitostaan. Naimisiinmenon jälkeen pariskunta muutti Blaricumiin, pieneen kuntaan lähellä Amsterdamia. Kolme vuotta myöhemmin de Holl valmistui farmaseutiksi. Brouwer auttoi de Hollia työurallaan esimerkiksi kirjanpidon tekemisessä sekä apteekissa palvelemalla. Brouwer ja de Holl eivät saaneet avioliittonsa aikana lapsia.

Brouwer paljasti vuonna 1907 julkaistussa väitöskirjassaan hänen koko uraansa hallinneet matematiikan kiinnostuksen kohteet: matematiikan perusta, mistä seurasi Brouwerin perustama matematiikan filosofinen suuntaus, intuitionismi sekä geometria, mistä seurasi hänen uranuurtava työnsä topologian parissa. Brouwer huomasi nopeasti, että hänen ideoitaan matematiikan perustasta ei hyväksyttäisi helposti: Brouwerin väitöskirjaohjaaja Kurteweg ei ollut tyytyväinen Brouwerin väitöskirjan filosofisista näkökulmista ja vaati useiden osien poistamista lopullista työtä varten. Kurteweg painostikin Brouweria keskittymään enemmän kunnioitettavaan matematiikkaan, jotta Brouwer saisi parannettua matemaattista mainettaan ja hänellä olisi mahdollisuus akateemiseen uraan.

Väitöskirjan julkaisunsa jälkeen Brouwer teki tutkimusta kahden eri alan parissa: hän jatkoi tutkimuksiaan matematiikan loogisesta perustasta sekä näki paljon vaivaa Hilbertin ongelmien opiskelemiseen, jotka esiteltiin Pariisin kansainvälisessä matemaatiikkojen kongressissa vuonna 1900. Erityisesti Brouwer hyökkäsi Hilbertin viidennen ongelman kimppuun, joka käsittelee jatkuvia ryhmiä.

Vuonna 1908 Brouwer piti puheen Rooman kansainvälisessä matemaatikkojen kongressissa Lien ryhmien topologisesta perustasta ja seuraavan vuonna hänet nimitettiin Amsterdamin yliopiston dosentiksi. Vuoden 1909 joulun tienoilla Brouwer kävi vierailulla Pariisissa ja tapasi siellä Henri Poincarén (1854 - 1912), Jacques Hadamardin (1865 - 1963) sekä Emilé Borelin (1871 - 1956). Pariisissa käytyjen keskustelujen kehottamana Brouwer ryhtyi työskentelemään dimension muuttumattomuutta käsittelevän ongelman parissa.

Vuonna 1912 Brouwer valittiin kuninkaalliseen tiedeakatemiaan. Samana vuonna, Hilbertin lämpimän suosituskirjeen auttamana, Brouwer myös nimitettiin Amsterdamin yliopiston joukko-opin, kompleksianalyysin ja aksiomatiikan poikkeukselliseksi professoriksi ja hän hoiti virkaa aina eläkkeelle siirtymiseensä asti vuoteen 1951. Brouwer päätti pitää virkaanastujaisluentonsa intuitionismista ja formalismista, vaikka hän olikin tehnyt merkittävää työtä topologian parissa.

Brouwer teki lähes kaiken topologiaan liittyvän työnsä uransa alkuaikoina, vuosina 1909 - 1913. Hän löysi topologisten kuvausten karakterisointeja karteesisessa koordinaatistossa sekä useita kiintopistelauseita. Ensimmäisessä kiintopistelauseessaan Brouwer osoitti, että jatkuvalla orientaation säilyttävällä injektiolla suljetusta pallosta itseensä on kiintopiste. Lause syntyi Hilbertin viidennen ongelman tutkimusten tuloksena ja Brouwer osoitti sen aluksi kaksiulotteiselle pallolle ja myöhemmin yleisti tuloksen myös n-ulotteisille palloille. Toinen äärimmäisen tärkeä tulos oli dimension muuttumattomuuden osoittaminen. Tärkeiden topologisten tulosten todistamisen lisäksi Brouwer kehitti myös menetelmiä, joista on tullut alan standardeja työkaluja. Brouwer arvioi jatkuvia kuvauksia paloittain jatkuvilla lineaarisilla kuvauksilla. Hän myös esitteli kuvauksen asteen idean, yleisti Jordanin käyrälauseen n-ulotteisille avaruuksille sekä määritteli topologiset avaruudet vuonna 1913.

Eläköidyttyään vuonna 1951, Brouwer luennoi Etelä-Afrikassa vuonna 1952 sekä Yhdysvalloissa ja Kanadassa vuonna 1953. Hänen vaimonsa kuoli 89-vuoden ikäisenä vuonna 1959 - samana vuonna, jolloin 78-vuotias Brouwer kieltäytyi Brittiläisen Kolumbian yliopiston tarjoamasta vuoden mittaisesta virasta. Vuonna 1962 yli kahdeksankymmentävuotiaalle Brouwerille tarjottiin virkaa Montanan yliopistosta. Brouwer kuoli vuonna 1966 Blaricumissa liikenneonnettomuuden seurauksena. [**9**]

Tämän tutkielman toisessa luvussa esitellään perusmääritelmiä ja merkintöjä. Kolmas luku käsittelee tutkielmassa tarvittavia esitietoja topologisista avaruuksista. Neljännessä luvussa lähdetään tarkastelemaan topologisia avaruuksia algebran käsitteiden näkökulmasta. Tässä luvussa keskiössä ovat homotopiat ja polkuhomotopiat. Viidennessä luvussa jatketaan polkuhomotopioiden käsittelyä ja määritellään topologisen avaruuden perusryhmä. Kuudennessa luvussa esitellään ja todistetaan tutkielman päätulos, eli Brouwerin kiintopistelause tason suljetussa yksikköpallossa. Viimeisessä, seitsemännessä luvussa esitellään vielä lyhyesti muita kiintopistelauseita ja kiintopistelauseiden sovelluksia. Tutkielman pääasiallisena lähdeteoksena on käytetty James Munkresin (2000) teosta *Topology*.

2. Määritelmiä ja perusmerkintöjä

MÄÄRITELMÄ 2.1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu yksikköpallo $\bar{B}^n$ määritellään kaavalla

$$\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| \leq 1\},$$

missä

$$||x|| = ||(x_1, \ldots, x_n)|| = ({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2)^{1/2}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallon reuna S^{n-1} on

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| = 1\}.$$

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoot $f \colon A \to B$ kuvaus ja $A_0 \subset A$. Kuvauksen f *rajoittuma* joukkoon A_0 on kuvaus $g \colon A_0 \to B$, jonka sääntö on

$$\{(a, g(a)) \mid a \in A_0\}.$$

Kuvauksen f rajoittumaa joukkoon A_0 merkitään $f|_{A_0}$.

Seuraavaa kahta joukkojen yhtäsuuruutta koskevaa lemmaa tarvitaan myöhemmin topologisia avaruuksia käsittelevässä luvussa 4.

LEMMA 2.3. *Olkoon $f \colon X \to Y$ kuvaus. Tällöin kaikille $B \subset Y$ pätee*

$$f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B).$$

TODISTUS. Olkoon $x \in f^{-1}(Y \backslash B)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x \in X$ ja $f(x) \in Y \backslash B$. Edellinen pätee jos ja vain jos $x \in X$ ja $f(x) \notin B$. Edellinen puolestaan on yhtäpitävää sen kanssa, että $x \in X \backslash f^{-1}(B)$. □

LEMMA 2.4. *Olkoon $f \colon X \to Y$ surjektiivinen kuvaus. Tällöin $f(f^{-1}(Y)) = Y$.*

TODISTUS. Osoitetaan, että joukot $f(f^{-1}(Y))$ ja Y ovat toistensa osajoukkoja. Olkoon $y \in f(f^{-1}(Y))$. Tällöin on olemassa sellainen $x \in f^{-1}(Y)$, että $f(x) = y$. Edellisestä saadaan suoraan alkukuvan määritelmän nojalla, että $y \in Y$. Täten $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.

Oletetaan sitten, että $y \in Y$. Koska kuvaus p on surjektio, niin on olemassa sellainen $x \in X$, että $f(x) = y$. Tällöin $x = f^{-1}(y)$ eli $x \in f^{-1}(Y)$. Edellisestä saadaan, että $y = f(x) \in f(f^{-1}(Y))$. Täten $Y \subset f(f^{-1}(Y))$. □

3. Topologiaa

Tässä luvussa määritellään topologia ja topologinen avaruus. Määritellään lisäksi topologisiin avaruuksiin liittyviä peruskäsitteitä, kuten jatkuvuus, Hausdorffin avaruus, topologian kanta, kompaktius ja yhtenäisyys. Todistetaan joitakin edellämainittuihin käsitteisiin liittyviä tuloksia - näillä tuloksilla on tärkeä rooli myöhemmin tutkielmassa käsiteltävien väitteiden todistamisessa.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Joukon X osajoukkojen kokoelma τ on joukon X *topologia*, jos sillä on seuraavat kolme ominaisuutta:

1) $\emptyset \in \tau$ ja $X \in \tau$.
2) Jos $I \neq 0$ ja $A_i \in \tau$ kaikilla $i \in I$, niin $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
3) Jos $A_1, A_2, \ldots A_n \in \tau$, niin $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \tau$.

Pari (X, τ) on *topologinen avaruus*. Joukon X osajoukko U on *avoin*, jos osajoukko U kuuluu topologiaan τ.

HUOMAUTUS 3.2. Olkoot (X, τ) topologin avaruus ja $x \in X$. Pisteen x sisältävää avointa joukkoa U kutsutaan myös pisteen x *ympäristöksi*.

ESIMERKKI 3.3. Joukon X *diskreetti topologia* on topologia, missä joukon X kaikki osajoukot ovat avoimia. Joukon X topologia $\{X, \emptyset\}$ on nimeltään *triviaali topologia*.

MÄÄRITELMÄ 3.4. Topologinen avaruus X on *Hausdorffin avaruus*, jos avaruuden X mille tahansa kahdelle eri pisteelle x_1 ja x_2 on olemassa erilliset ympäristöt U_1 ja U_2.

MÄÄRITELMÄ 3.5. Olkoot (X, τ) ja $(Y, \hat{\tau})$ topologisia avaruuksia. Funktio $f \colon X \to Y$ on jatkuva, jos $f^{-1}(V) \in \tau$ jokaiselle $V \in \hat{\tau}$.

ESIMERKKI 3.6. Olkoot (X, τ) diskreetti topologinen avaruus ja $(Y, \hat{\tau})$ mikä tahansa toinen topologinen avaruus. Tällöin funktio $f \colon X \to Y$ on jatkuva, sillä diskreetin topologian määritelmän nojalla $f^{-1}(V) \in \tau$ jokaiselle $V \in \hat{\tau}$.

LEMMA 3.7. *Olkoot (X, τ) ja $(Y, \hat{\tau})$ topologisia avaruuksia. Funktio $f \colon X \to Y$ on jatkuva täsmälleen silloin kun $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.*

TODISTUS. Oletetaan, että funktio f on jatkuva. Jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$ joukko $Y \setminus F$ on avoin, joten Määritelmän 3.5 nojalla joukko $f^{-1}(Y \setminus F)$ on avoin. Lisäksi Lemman 2.3 nojalla pätee $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$. Eli joukko $X \setminus f^{-1}(F)$ on avoin ja täten joukko $f^{-1}(F)$ on suljettu.
Oletetaan sitten, että $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$. Tällöin avoimelle joukolle $V \subset Y$ joukko $f^{-1}(Y \setminus V)$ on suljettu. Jälleen Lemman 2.3 nojalla pätee $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Siispä joukko $X \setminus f^{-1}(V)$ on suljettu ja täten $f^{-1}(V)$ on avoin ja Määritelmän 3.5 nojalla funktio f on jatkuva. □

MÄÄRITELMÄ 3.8. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Jos $Y \subset X$, niin kokoelma

$$\tau_Y = \{Y \cap U \colon U \in \tau\}$$

on avaruuden Y topologia. Topologia τ_Y on *aliavaruustopologia* ja tällä topologialla varustettu joukko Y on avaruuden X *aliavaruus*. Siis aliavaruuden Y avoimia joukkoja ovat avaruuden X kaikkien avointen joukkojen leikkausjoukot avaruuden Y kanssa.

LAUSE 3.9. *Olkoot (X,τ) ja (Y,τ) topologisia avaruuksia ja $f\colon X\to Y$ jatkuva kuvaus. Oletetaan, että Z on avaruuden Y sellainen aliavaruus, että $f(X)\subset Z$. Tällöin kuvaus $g\colon X\to Z$, $g(x)=f(x)$ kaikilla $x\in X$, on jatkuva.*

TODISTUS. Olkoot $f\colon X\to Y$ jatkuva kuvaus ja Z avaruuden Y sellainen aliavaruus, että $f(X)\subset Z\subset Y$. Olkoon B avoin joukko avaruudessa Z. Tällöin Määritelmän 3.8 nojalla $B=Z\cap U$ jollekin avaruuden Y avoimelle joukolle U. Koska $f(X)\subset Z$ ja $f(x)=g(x)$ kaikille $x\in X$, niin joukko-opin perusteorian nojalla saadaan, että

$$x\in g^{-1}(B)\iff g(x)\in B\iff g(x)\in Z\cap U\iff f(x)\in U\iff x\in f^{-1}(U).$$

Siispä $g^{-1}(B)=f^{-1}(U)$. Koska $f^{-1}(U)$ on avoin joukko kuvauksen f jatkuvuuden nojalla, niin $g^{-1}(B)$ on avoin joukko. Täten kuvaus g on jatkuva. □

LEMMA 3.10. *Olkoot $X=A\cup B$ ja Y topologisia avaruuksia, missä A ja B ovat suljettuja joukkoja avaruudessa X. Oletetaan myös, että $f\colon A\to Y$ ja $g\colon B\to Y$ ovat sellaisia jatkuvia funktioita, että ehto $f(x)=g(x)$ pätee jokaiselle $x\in A\cap B$. Tällöin funktio $h\colon X\to Y$,*

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{kun } x\in A\\ g(x), & \text{kun } x\in B\end{cases}$$

on jatkuva.

TODISTUS. Olkoon $F\subset Y$ suljettu osajoukko. Kuvauksen h säännön ja joukko-opin perusteorian nojalla

$$h^{-1}(F)=f^{-1}(F)\cup g^{-1}(F).$$

Koska kuvaus f on jatkuva, niin $f^{-1}(F)$ on suljettu joukko suljetussa joukossa A Lemman 3.7 nojalla ja täten suljettu joukko avaruudessa X. Vastaavasti $g^{-1}(F)$ on suljettu joukko suljetussa joukossa B ja täten suljettu joukko avaruudessa X. Joukko $h^{-1}(F)$ on kahden suljetun joukon yhdisteenä suljettu. Eli mielivaltaisen suljetun joukon F alkukuva kuvauksessa h on suljettu. Kuvaus h on jatkuva Lemman 3.7 nojalla. □

Homeomorfismin käsitettä tarvitaan myöhemmin peiteavaruuksia käsiteltäessä.

MÄÄRITELMÄ 3.11. Olkoot (X,τ) ja $(Y,\hat{\tau})$ topologisia avaruuksia ja kuvaus $f\colon X\to Y$ bijektio. Jos sekä kuvaus f, että käänteiskuvaus $f^{-1}\colon Y\to X$ ovat jatkuvia, niin kuvaus f on *homeomorfismi*. Tällöin topologiset avaruudet (X,τ) ja $(Y,\hat{\tau})$ ovat homeomorfisia keskenään.

Käsitellään seuraavaksi topologian kantaa sekä yhtenäisyyttä. Esitellään ja todistetaan myös jatkuvien funktioiden väliarvolause topologisissa avaruuksissa.

MÄÄRITELMÄ 3.12. Olkoon X joukko. Kokoelma $\mathscr{B}$ avaruuden X osajoukkoja B on joukon X jonkin topologian *kanta*, jos seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa:

1) Jokaiselle $x\in X$ on olemassa sellainen $B\in\mathscr{B}$, että $x\in B$.
2) Jos on sellaiset $B_1\in\mathscr{B}$ ja $B_2\in\mathscr{B}$, että $x\in B_1\cap B_2$, niin on olemassa sellainen $B_3\in\mathscr{B}$, että $x\in B_3$ ja $B_3\subset B_1\cap B_2$.

Jos kokoelma $\mathscr{B}$ toteuttaa ehdot 1) ja 2), niin kannan $\mathscr{B}$ virittämä topologia τ määritellään seuraavasti: avaruuden X osajoukko U on avoin, jos $U = \emptyset$ tai jokaiselle $x \in U$ on olemassa sellainen $B \in \mathscr{B}$, että $x \in B$ ja $B \subset U$. Erityisesti jokainen kannan $\mathscr{B}$ alkio B kuuluu topologiaan τ.

Määritellään sitten järjestysrelaatio, jota tarvitaan kannan lisäksi järjestystopologian määrittelemiseen.

MÄÄRITELMÄ 3.13. Joukon A relaatio R on *järjestysrelaatio*, jos seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

1) Kaikille $x, y \in A$, $x \neq y$ toinen ehdoista xRy tai yRx on voimassa.
2) Ei ole olemassa sellaista $x \in A$, että xRx.
3) Jos xRy ja yRz, niin xRz.

HUOMAUTUS 3.14. Järjestysrelaation symbolina käytetään usein ”pienempää kuin” -merkkiä $<$. Tällöin merkintä $x \leq y$ tarkoittaa, että $x < y$ tai $x = y$.

ESIMERKKI 3.15. Reaalilukujen perusominaisuuksista seuraa, että relaatio $<$ on järjestysrelaatio reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$, eli relaatio $<$ toteuttaa Määritelmän 3.13 kolme ehtoa.

Olkoon X joukko, jossa on määritelty järjestysrelaatio $<$. Jos a ja b ovat joukon X alkiot, joille $a < b$, niin joukossa X on neljä erilaista alkioiden a ja b määräämää väliä:

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in X : a < x < b\} \\
(a, b] &= \{x \in X : a < x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \in X : a \leq x < b\} \\
[a, b] &= \{x \in X : a \leq x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

Ensimmäistä väliä kutsutaan avoimeksi ja viimeistä väliä suljetuksi. Kaksi keskimmäistä väliä ovat puoliavoimia.
Määritellään nyt järjestystopologia.

MÄÄRITELMÄ 3.16. Olkoon (X, τ) joukko, jossa on määritelty järjestysrelaatio. Oletetaan lisäksi, että avaruudessa X on vähintään kaksi alkiota. Olkoon $\mathscr{B}$ kokoelma kaikista johonkin seuraaviin luokkiin kuuluvista joukoista B:

1) Kaikki avoimet välit (a, b).
2) Kaikki puoliavoimet välit $[a_0, b)$, missä a_0 on avaruuden X pienin alkio.
3) Kaikki puoliavoimet välit $(a, b_0]$, missä b_0 on avaruuden X suurin alkio.

Tällöin $\mathscr{B}$ on kanta avaruuden X topologialle τ, jota kutsutaan *järjestystopologiaksi.*

HUOMAUTUS 3.17. Avaruudessa X ei välttämättä ole suurinta tai pienintä alkiota. Jos avaruudessa X ei ole pienintä alkiota, niin luokan 2) joukkoja ei ole ja jos avaruudessa X ei ole suurinta alkiota, niin luokan 3) joukkoja ei ole.

Osoitetaan, että kokoelma $\mathscr{B}$ todellakin on kanta. Olkoon $x \in X$. Jos $x = a_0$, niin $x \in [a_0, b)$. Jos $x = b_0$, niin $x \in (a, b_0]$. Oletetaan sitten, että $x \neq a_0$ ja $x \neq b_0$. Tällöin $x \in (a, b)$ joillekin $a, b \in X$. Täten Määritelmän 3.12 ehto 1) on voimassa kokoelmalle $\mathscr{B}$. Jaetaan ehdon 2) käsittely neljään eri tapaukseen. Tapauksia varten määritellään joukot $B_1 = [a_0, b), B_2 = (a, b_0], B_3 = (a_1, b_1)$ ja $B_4 = (a_2, b_2)$, missä a_0 on avaruuden X pienin ja b_0 suurin alkio. Määritelmästä 3.16 nähdään, että $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathscr{B}$.

1) Oletetaan, että avaruudessa X on pienin alkio a_0 ja suurin alkio b_0. Olkoon $x \in B_1 \cap B_2$. Tällöin $x \in (a, b)$ ja $(a, b) \subset B_1 \cap B_2$. Lisäksi Määritelmän 3.16 nojalla $(a, b) \in \mathscr{B}$.
2) Oletetaan, että avaruudessa X on vain pienin alkio a_0. Olkoon $x \in B_1 \cap B_3$. Nyt riippuen pisteistä a_1, b_1 ja b, niin leikkausjoukolle $B_1 \cap B_3$ pätee $B_1 \cap B_3 = (a_1, b_1)$ tai $B_1 \cap B_3 = (a_1, b)$. Erityisesti leikkausjoukko on siis avoin väli, jolloin Määritelmän 3.16 nojalla on olemassa sellainen joukko $\hat{B} \in \mathscr{B}$, että $x \in \hat{B}$ ja $\hat{B} \subset B_1 \cap B_3$.
3) Oletetaan, että avaruudessa X on vain suurin alkio b_0. Olkoon $x \in B_2 \cap B_3$. Jälleen riippuen pisteistä a, a_1 ja b_1, niin leikkausjoukolle $B_2 \cap B_3$ pätee $B_2 \cap B_3 = (a, b_1)$ tai $B_2 \cap B_3 = (a_1, b_1)$. Erityisesti leikkausjoukko on siis avoin väli, jolloin Määritelmän 3.16 nojalla on olemassa sellainen joukko $\hat{B} \in \mathscr{B}$, että $x \in \hat{B}$ ja $\hat{B} \subset B_2 \cap B_3$.
4) Oletetaan vielä, että avaruudessa X ei ole suurinta eikä pienintä alkiota. Olkoon $x \in B_3 \cap B_4$. Nyt riippuen pisteistä a_1, b_1, a_2, b_2, niin leikkausjoukolle $B_3 \cap B_4$ pätee $B_3 \cap B_4 = (a_1, b_1)$ tai $B_3 \cap B_4 = (a_2, b_2)$ tai $B_3 \cap B_4 = (a_1, b_2)$ tai $B_3 \cap B_4 = (a_2, b_1)$. Erityisesti leikkausjoukko on siis avoin väli, jolloin Määritelmän 3.16 nojalla on olemassa sellainen joukko $\hat{B} \in \mathscr{B}$, että $x \in \hat{B}$ ja $\hat{B} \subset B_3 \cap B_4$.

Siispä kokoelma $\mathscr{B}$ on Määritelmän 3.12 nojalla kanta.

ESIMERKKI 3.18. Positiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}_+$ muodostaa järjestetyn joukon, jossa on pienin alkio 1. Järjestystopologia joukolle $\mathbb{Z}_+$ on diskreetti topologia, jossa jokainen joukko on avoin. Erityisesti yhden pisteen muodostamat joukot $\{n\}$ ovat avoimia, sillä: jos $n > 1$, niin $\{n\} = (n-1, n+1)$ on kanta-alkio ja jos $n = 1$, niin $\{1\} = [1, 2)$ on kanta-alkio.

MÄÄRITELMÄ 3.19. Olkoon X järjetetty joukko ja $a \in X$. Tällöin on neljä joukon X osajoukkoa, jotka ovat alkion a määräämiä *säteitä*. Joukot ovat:

$$(a, +\infty) = \{x \in X \colon x > a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x \in X \colon x < a\}$$
$$[a, +\infty) = \{x \in X \colon x \geq a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x \in X \colon x \leq a\}.$$

Kahta ensimmäistä joukkoa kutsutaan *avoimiksi säteiksi* ja kahta viimeistä joukkoa kutsutaan *suljetuiksi säteiksi*.

Määritellään sitten yhtenäisyys:

MÄÄRITELMÄ 3.20. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Avaruuden X *separaatio* on sellainen kahden epätyhjän, erillisen ja avoimen joukon U ja V pari, että $U \cup V = X$. Sanotaan, että avaruus X on *yhtenäinen*, jos ei ole olemassa avaruuden X separaatiota.

LEMMA 3.21. *Avaruus X on yhtenäinen jos ja vain jos ainoat avaruuden X sellaiset joukot, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja, ovat tyhjä joukko ja koko avaruus X.*

Todistus. Todistetaan lemma kontrapositiolla. Oletetaan ensin, että epätyhjät, erilliset ja avoimet joukot U ja V muodostavat avaruuden X separaation. Tällöin joukko U on epätyhjä, avaruudesta X eroava joukko joka on sekä avoin, että avoimen joukon V komplementtijoukkona suljettu. Siis U on sellainen joukko, joka on sekä avoin että suljettu, eikä U ole tyhjä joukko tai koko avaruus X.

Oletetaan sitten, että joukko A on avaruuden X aito epätyhjä joukko, joka on sekä avoin että suljettu avaruudessa X. Tällöin joukot $U := A$ ja $V := X \setminus A$ ovat epätyhjiä, erillisiä ja avoimia joukkoja sekä $U \cup V = X$. Siis U ja V muodostavat avaruuden X separaation. Täten avaruus X ei ole yhtenäinen. $\square$

Lause 3.22. *Yhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus, missä avaruus X on yhtenäinen. Koska kuvaus f säilyy Lauseen 3.9 nojalla jatkuvana rajoittamalla sen maalijoukko avaruuteen $f(X)$, niin voidaan olettaa että kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva surjektio. Tehdään vastaoletus, että avaruus Y ei ole yhtenäinen. Tällöin on Määritelmän 3.20 nojalla olemassa sellaiset avoimet, epätyhjät ja erilliset avaruuden Y joukot A ja B, että $Y = A \cup B$. Koska yhdiste alkukuvista on alkuvien yhdiste, niin $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Nyt joukoille $f^{-1}(A)$ ja $f^{-1}(B)$ pätee:

1) Koska joukot A ja B ovat erilliset, niin joukot $f^{-1}(A)$ ja $f^{-1}(B)$ ovat erilliset.
2) Koska kuvaus f on jatkuva, niin Määritelmän 3.5 nojalla joukot $f^{-1}(A)$ ja $f^{-1}(B)$ ovat avoimia.
3) Koska kuvaus f on surjektio, niin joukot $f^{-1}(A)$ ja $f^{-1}(B)$ ovat epätyhjiä.

Siis joukot $f^{-1}(A)$ ja $f^{-1}(B)$ muodostavat avaruuden X separaation, mikä on ristiriita avaruuden X yhtenäisyyden kanssa. Täten vastaoletus on väärin ja alkuperäinen väite seuraa. $\square$

Muotoillaan ja todistetaan sitten jatkuvien funktioiden väliarvolause topologisissa avaruuksissa:

Lause 3.23. *Olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus, missä avaruus X on yhtenäinen ja Y on järjestetty joukko, johon on määritelty järjestystopologia. Jos a ja b ovat avaruuden X kaksi pistettä ja r on sellainen avaruuden Y piste, että $f(a) < r < f(b)$, niin tällöin on olemassa sellainen avaruuden X piste c, että $f(c) = r$.*

Todistus. Olkoot kuvaus f, avaruudet X ja Y sekä pisteet a, b ja r kuten Lauseen 3.23 oletuksissa. Tarkastellaan erillisiä joukkoja

$$A = f(X) \cap (-\infty, r) \qquad \text{ja} \qquad B = f(X) \cap (r, \infty).$$

Koska $f(a) \in f(X) \cap (-\infty, r)$ ja $f(b) \in f(X) \cap (r, \infty)$, niin joukot A ja B ovat epätyhjiä. Lisäksi joukot A ja B ovat kahden avoimen joukon leikkauksena avoimia joukkoja avaruudessa $f(X)$. Tehdään vastaoletus, että ei ole olemassa sellaista pistettä $c \in X$, että $f(c) = r$. Tällöin $f(X) = A \cup B$, eli joukot A ja B muodostaisivat avaruuden $f(X)$ separaation. Kuitenkin yhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen, eli saadaan ristiriita Lauseen 3.22 kanssa. Siispä vastaoletus on väärin ja alkuperäinen väite seuraa. $\square$

Käsitellään sitten samastuskuvauksia sekä avoimia ja suljettuja kuvauksia.

MÄÄRITELMÄ 3.24. Olkoot (X, τ) ja $(Y, \hat{\tau})$ topologisia avaruuksia. Kuvaus $p\colon X \to Y$ on *samastuskuvaus*, jos seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa:

1) kuvaus p on surjektio ja
2) joukko U on avoin joukossa Y täsmälleen silloin kun joukko $p^{-1}(U)$ on avoin joukossa X.

HUOMAUTUS 3.25. Määritelmä 3.24 on vahvempi ehto funktion p jatkuvuudelle, eli erityisesti jokainen samastuskuvaus on jatkuva. Lisäksi Lemmasta 2.3 seuraa, että yhtäpitävä ehto Määritelmän 3.24 ehdolle 2) on ”joukko F on suljettu joukossa Y täsmälleen silloin kun joukko $p^{-1}(F)$ on suljettu joukossa X”.

LEMMA 3.26. *Kahden samastuskuvauksen yhdistetty kuvaus on samastuskuvaus.*

TODISTUS. Olkoot X, Y ja Z topologisia avaruuksia sekä $p\colon X \to Y$ ja $q\colon Y \to Z$ samastuskuvauksia. Osoitetaan, että Määritelmän 3.24 kaksi ehtoa ovat voimassa kuvaukselle $q \circ p\colon X \to Z$:

1) Olkoon $z \in Z$. Koska kuvaus q on Määritelmän 3.24 nojalla surjektio, niin on olemassa sellainen $y \in Y$, että $q(y) = z$. Vastaavasti, koska kuvaus p on surjektio, niin on olemassa sellainen $x \in X$, että $p(x) = y$. Täten yhdistetylle kuvaukselle pätee $(q \circ p)(x) = q(p(x)) = q(y) = z$. Siispä yhdistetty kuvaus $q \circ p$ on surjektio.
2) Olkoon $U \subset Z$ avoin. Koska kuvaus q on samaistuskuvauksena jatkuva, niin joukko $q^{-1}(U)$ on avoin joukko avaruudessa Y. Vastaavasti kuvaus p on samaistuskuvauksena jatkuva, joten $p^{-1}(q^{-1}(U))$ on avoin joukko avaruudessa X. Olkoon sitten $U \subset Z$ sellainen joukko, että $(q \circ p)^{-1}(U)$ on avoin joukko. Koska $(q \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(q^{-1}(U))$ ja p on samaistuskuvaus, niin joukko $q^{-1}(U)$ on avoin. Vastaavasti, koska q on samaistuskuvaus, niin joukko U on avoin.

Siis Määritelmän 3.24 nojalla $q \circ p$ on samastuskuvaus. □

Määritellään seuraavaksi mitä suljettu ja avoin kuvaus tarkoittavat.

MÄÄRITELMÄ 3.27. Olkoot (X, τ) ja $(Y, \hat{\tau})$ topologisia avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *avoin kuvaus*, jos jokaiselle avoimelle joukolle $U \subset X$ joukko $f(U)$ on avoin joukossa Y. Vastaavasti kuvaus f on *suljettu kuvaus*, jos jokaiselle suljetulle joukolle $A \subset X$ joukko $f(A)$ on suljettu joukossa Y.

LEMMA 3.28. *Olkoon kuvaus $p\colon X \to Y$ jatkuva surjektio ja lisäksi joko avoin tai suljettu kuvaus. Tällöin p on samastuskuvaus.*

TODISTUS. Oletetaan, että $p\colon X \to Y$ on jatkuva surjektio ja lisäksi avoin kuvaus. Kuvauksen p jatkuvuudesta seuraa suoraan, että jokaisen avoimen joukon $U \subset Y$ alkukuva $p^{-1}(U)$ on avoin joukossa X. Siksi Määritelmän 3.24 ehdosta 2) riittää osoittaa, että joukko $U \subset Y$ on avoin avoimelle joukolle $p^{-1}(U) \subset X$. Koska p on oletuksen nojalla avoin kuvaus, niin joukko $p(p^{-1}(U))$ on avoin. Koska p on oletuksen nojalla myös surjektio, niin Lemman 2.4 nojalla $p(p^{-1}(U)) = U$. Täten U on avoin joukossa Y. Suljetulle kuvaukselle todistus menee vastaavalla tavalla. □

LAUSE 3.29. *Olkoot X, Y ja Z topologisia avaruuksia ja $p\colon X \to Y$ samastuskuvaus. Olkoon lisäksi $g\colon X \to Z$ sellainen kuvaus, joka on vakio jokaisessa joukossa $p^{-1}(\{y\})$, missä $y \in Y$. Tällöin seuraavat ehdot ovat voimassa:*

1) *On olemassa sellainen yksikäsitteinen kuvaus $f\colon Y \to Z$, että $f \circ p = g$. Kuvausta f kutsutaan indusoiduksi kuvaukseksi.*
2) *Indusoitu kuvaus f on jatkuva täsmälleen silloin kun kuvaus g on jatkuva.*
3) *Indusoitu kuvaus f on samastuskuvaus täsmälleen silloin kun kuvaus g on samastuskuvaus.*

TODISTUS.

1) Koska oletuksen nojalla kuvaus g on vakio jokaisessa joukossa $p^{-1}(\{y\})$, niin jokaiselle $y \in Y$ joukko $g(p^{-1}(\{y\}))$ on yhden pisteen muodostama joukko avaruudessa Z. Merkitsemällä $f(y) := g(p^{-1}(\{y\}))$, olemme määritelleet kuvauksen $f\colon Y \to Z$, jolle pätee $f(p(x)) = g(p^{-1}(\{(p(x))\})) = g(x)$ jokaiselle $x \in X$.
2) Määritelmän 3.24 nojalla samastuskuvaus p on jatkuva. Jos oletetaan, että indusoitu kuvaus f on jatkuva, niin tällöin kuvaus g on kahden jatkuvan funktion f ja p yhdistettynä kuvauksena jatkuva. Oletetaan sitten, että kuvaus g on jatkuva. Avoimen joukon $V \subset Z$ alkukuva $g^{-1}(V)$ on kuvauksen g jatkuvuuden nojalla avoin joukko avaruudessa X. Nyt p on samaistuskuvaus eli Määritelmän 3.24 nojalla joukko $p^{-1}(f^{-1}(V))$ on avoin täsmälleen silloin kun $f^{-1}(V)$ on avoin. Koska yhdistetyn funktion $f \circ p = g$ alkukuvalle pätee $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$, niin joukko $f^{-1}(V)$ on avoin. Eli avoimen joukon V alkukuva kuvauksessa f on avoin. Siispä kuvaus f on jatkuva.
3) Jos oletetaan, että f on samastuskuvaus niin tällöin kuvaus g on Lemman 3.26 nojalla kahden samastuskuvauksen yhdistettynä kuvauksena samastuskuvaus. Oletetaan sitten, että kuvaus g on samastuskuvaus. Tällöin Määritelmän 3.24 nojalla kuvaus $g = f \circ p$ on surjektio ja erityisesti kuvauksen f täytyy olla surjektio. Olkoon $V \subset Z$ ja oletetaan, että $f^{-1}(V)$ on avoin joukko avaruudessa Y. Koska kuvaus p on jatkuva, niin $p^{-1}(f^{-1}(V)) = g^{-1}(V)$ on avoin joukko avaruudessa X. Koska g on oletuksen nojalla samastuskuvaus, niin V on avoin joukko avaruudessa Z. Eli, jos $f^{-1}(V)$ on avoin joukko, niin tällöin V on avoin joukko. Oletetaan sitten, että V on avoin joukko avaruudessa Z. Koska oletuksen nojalla g on samastuskuvaus, eli erityisesti g on jatkuva kuvaus, niin kohdassa 2) todistetun nojalla kuvauksen f täytyy olla jatkuva. Täten $f^{-1}(V)$ on avoin joukko avaruudessa Y ja kuvaus f on samastuskuvaus.

□

Määritellään sitten kompakti avaruus. Sitä varten täytyy kuitenkin ensin määritellä topologisen avaruuden peite.

MÄÄRITELMÄ 3.30. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon I indeksijoukko. Kokoelma $(U_i)_{i\in I}$ avaruuden X osajoukkoja on avaruuden X *peite*, jos $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Peite on *avoin*, jos joukot U_i ovat avoimia ja äärellinen, jos indeksijoukko I on äärellinen. Jos $I' \subset I$ ja $(U_i)_{i\in I'}$ on avaruuden X peite, niin peite $(U_i)_{i\in I'}$ on peitteen $(U_i)_{i\in I}$ *osapeite*.

MÄÄRITELMÄ 3.31. Topologinen avaruus X on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Todistetaan seuraavaksi kolme kompakteihin joukkoihin liittyvää tulosta.

Lause 3.32. *Kompaktin avaruuden suljettu osajoukko on kompakti.*

Todistus. Olkoon F kompaktin avaruuden X suljettu osajoukko. Olkoon I indeksijoukko ja $(U_i)_{i\in I}$ avaruuden X avoin peite. Koska F on suljettu joukko, niin $X\backslash F$ on avoin. Tällöin kokoelma $\mathscr{A} := (U_i)_{i\in I} \cup \{X\backslash F\}$ on avaruuden X avoin peite. Koska X on kompakti avaruus, niin Määritelmän 3.31 nojalla on olemassa sellainen äärellinen indeksijoukko I', että joukot $U_i, i \in I'$ ja $X\backslash F$ peittävät avaruuden X. Jos $a \in F$, niin $a \in X$ jolloin $a \in U_i$ jollekin $i \in I'$ tai $a \in X\backslash F$. Jälkimmäinen vaihtoehto ei voi pitää paikkansa, joten $F \subset (\bigcup_{i\in I'} U_i)$. Löysimme siis joukon F avoimesta peitteestä $(U_i)_{i\in I}$ äärellisen osapeitteen $(U_i)_{i\in I'}$. Täten joukko F on Määritelmän 3.31 nojalla kompakti. □

Lause 3.33. *Hausdorffin avaruuden kompakti osajoukko on suljettu.*

Todistus. Olkoon F Hausdorffin avaruuden X kompakti osajoukko. Osoitetaan, että joukko $X\backslash F$ on avoin. Olkoon $x \in X\backslash F$. Koska X on Hausdorffin avaruus, niin jokaisella pisteellä $a \in F$ ja pisteellä x on erilliset ympäristöt $x \in U_x$ ja $a \in V_a$. Koska F on kompakti, niin äärellinen määrä joukkoja V_a peittää avaruuden F, eli $F \subset \bigcup_{k=1}^n V_{a_k}$. Nyt joukko $U = \bigcap_{k=1}^n U_{x_k}$ on pisteen x avoin ympäristö, koska jokainen joukoista U_k on pisteen x avoin ympäristö. Lisäksi $U \cap V_{a_k} = \emptyset$ jokaiselle $k = 1, 2, \ldots, n$, jolloin $U \cap F = \emptyset$ ja $U \subset X\backslash F$. Siispä $X\backslash F$ on avoin joukko, jolloin F on suljettu joukko. □

Lause 3.34. *Kompaktin avaruuden kuvajoukko jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

Todistus. Olkoon X kompakti avaruus ja $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Olkoon I indeksijoukko ja $(U_i)_{i\in I}$ joukon $f(X)$ avoin peite. Koska f on jatkuva, niin joukot $f^{-1}(U_i)$ ovat avoimia kaikilla $i \in I$ ja $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ on siis avaruuden X avoin peite. Koska avaruus X on kompakti, sillä on olemassa äärellinen osapeite, eli on sellainen äärellinen indeksijoukko I', että $(f^{-1}(U_i))_{i\in I'}$ on avaruuden X peite. Tällöin $(U_i)_{i\in I'}$ on joukon $f(X)$ äärellinen osapeite, joten $f(X)$ on kompakti. □

Kaikki työ seuraavan lauseen todistamiseen on tehty Lauseiden 3.32, 3.33 ja 3.34 todistamisessa.

Lause 3.35. *Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia sekä $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Oletetaan lisäksi, että X on kompakti avaruus ja Y on Hausdorffin avaruus. Tällöin f on suljettu kuvaus.*

Todistus. Olkoon K suljettu osajoukko kompaktissa avaruudessa X. Lauseen 3.32 nojalla K on kompakti joukko. Koska f on jatkuva kuvaus ja K on kompakti joukko, niin auseen 3.34 nojalla $f(K)$ on kompakti joukko. Koska Y on Hausdorffin avaruus ja $f(K) \subset Y$, niin Lauseen 3.33 nojalla $f(K)$ on suljettu joukko. Täten Määritelmän 3.27 nojalla f on suljettu kuvaus. □

Määritelmä 3.36. Olkoot I indeksijoukko ja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ kokoelma joukkoja. Joukkojen $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *tulojoukko* on

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha = \big\{x\colon I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \colon x(\alpha) \in X_\alpha \,\forall\, \alpha \in I\big\}.$$

Määritelmä 3.37. Olkoot I indeksijoukko ja (X_α, τ_α) topologisia avaruuksia kaikilla $\alpha \in I$. Tulojoukon $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ topologia on se topologia, jonka kanta on

$$\left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \colon U_\alpha \in \tau_\alpha,\ \#\{\alpha \in I \colon U_\alpha \neq X_\alpha\} < \infty \right\},$$

missä $\#\{\alpha \in I \colon U_\alpha \neq X_\alpha\}$ tarkoittaa joukon $\{\alpha \in I \colon U_\alpha \neq X_\alpha\}$ alkioiden lukumäärää.

Lause 3.38. *Äärellisen monen kompaktin avaruuden tuloavaruus on kompakti, kun tuloavaruus on varustettu tulotopologialla.*

Todistus. Todistus löytyy lähteestä [**4**]: Theorem 26.7. □

4. Polkuhomotopia

Tässä luvussa määritellään aluksi topologisten avaruuksien X ja Y jatkuvien kuvausten f ja f' välinen relaatio: homotopia. Sitten tarkastellaan erikoistapausta, missä kuvaukset f ja f' ovat polkuja ja määritellään polkujen f ja f' välinen relaatio: polkuhomotopia. Osoittautuu, että homotopia on ekvivalenssirelaatio. Käytetään tässä luvussa ja myöhemminkin tässä tutkielmassa polkuhomotopian määräämän ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokista lyhennystä ”polkuluokka”. Luvun lopuksi määritellään polkuluokkien välinen laskutoimitus $*$ ja osoitetaan, että joukko $(X, *)$ on grupoidi.

Määritelmä 4.1. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia sekä $f\colon X \to Y$ ja $f'\colon X \to Y$ jatkuvia kuvauksia. Kuvaus f on *homotooppinen* kuvaukselle f', jos on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $F\colon X \times [0,1] \to Y$, että

$$F(x,0) = f(x) \qquad \text{ja} \qquad F(x,1) = f'(x)$$

jokaiselle $x \in X$. Sanotaan, että kuvaus F on kuvausten f ja f' välinen *homotopia.* Jos kuvaus f on homotooppinen kuvaukselle f', niin silloin merkitään $f \simeq f'$. Jos $f \simeq f'$ ja f' on vakiokuvaus, niin kuvaus f on *nollahomotooppinen.*

Kuvausten f ja f' välinen homotopia voidaan samaistaa jatkuvien yhden parametrin kuvausten perheeksi topogiselta avaruudelta X topologiselle avaruudelle Y. Jos parametrin t ajatellaan kuvaavan aikaa, niin tällöin homotopia F on kuvauksen f jatkuva muunnos kuvaukseksi f', kun aika menee nollasta yhteen.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvausten f ja f' välistä homotopiaa tilanteessa, jossa kuvaukset f ja f' ovat polkuja topologisessa avaruudessa X. Tätä varten määritellään ensin kuitenkin topologisen avaruuden X polku.

Määritelmä 4.2. Olkoon X topologinen avaruus ja $x_0, x_1 \in X$. Pisteiden x_0 ja x_1 välinen *polku* avaruudessa X on sellainen jatkuva kuvaus $f\colon [0,1] \to X$, jolle pätee $f(0) = x_0$ ja $f(1) = x_1$. Pistettä x_0 sanotaan polun *alkupisteeksi* ja pistettä x_1 polun *päätepisteeksi.* Jos $f(0) = x_0 = f(1)$, eli polun alkupiste on sama kuin polun päätepiste, niin polkua f kutsutaan *silmukaksi* pisteessä x_0.
Avaruus X on *polkuyhtenäinen*, jos mitkä tahansa kaksi avaruuden pistettä voidaan yhdistää avaruuden X polulla.

Huomautus 4.3. Käytetään tässä luvussa kaikkien polkujen määrittelyjoukkona suljettua väliä $[0,1]$. Käytetään suljetulle välille $[0,1]$ tästä eteenpäin lyhyempää merkintää $[0,1] = I$.

Määritelmä 4.4. Olkoot $f\colon I \to X$ ja $f'\colon I \to X$ polkuja topologisessa avaruudessa X. Oletetaan myös, että poluilla on yhteinen alkupiste x_0 ja yhteinen loppupiste x_1. Polut f ja f' ovat *polkuhomotooppisia*, jos on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $F\colon I \times I \to X$, että

$$F(s,0) = f(s) \qquad \text{ja} \qquad F(s,1) = f'(s) \tag{4.5}$$

$$F(0,t) = x_0 \qquad \text{ja} \qquad F(1,t) = x_1 \tag{4.6}$$

jokaiselle $s, t \in I$. Kuvausta F kutsutaan polkujen f ja f' väliseksi *polkuhomotopiaksi.* Jos polku f on polkuhomotooppinen polulle f', niin silloin merkitään $f \simeq_p f'$.

Yhtälö (4.5) kertoo, että kuvaus F on kuvausten f ja f' välinen homotopia. Yhtälö (4.6) kertoo, että jokaiselle $t \in [0,1]$ polku f_t on yhtälön $f_t(s) = F(s,t)$ määräämä polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1. Toisin sanoen: yhtälön (4.5) mukaan kuvaus F on polun f jatkuva muunnos poluksi f' ja yhtälön (4.6) mukaan polun alku -ja päätepisteet pysyvät muunnoksessa muuttumattomina.

Lemma 4.7. *Relaatiot $f \simeq f'$ ja $f \simeq_p f'$ ovat ekvivalenssirelaatioita. Käytetään polun f polkuluokalle merkintää $[f]$.*

Todistus. Osoitetaan, että homotopia ja polkuhomotopia toteuttaa ekvivalenssirelaatiolta vaadittavat kolme ominaisuutta, eli relaatio on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

1) Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Kuvaus $F\colon X \times I \to Y$, $F(x,t) = f(x)$ on kaivattu homotopia kuvausten f ja f välillä. Jos f on polku, niin suoraan Määritelmästä 4.4 nähdään, että F on polkujen f ja f välinen polkuhomotopia.

2) Oletetaan, että $f \simeq f'$. Määritelmän 4.1 nojalla on olemassa homotopia F kuvausten f ja f' välillä. Tällöin kuvaus $G\colon X \times I \to Y$, $G(x,t) := F(x, 1-t)$ on jatkuva kuvauksen f jatkuvuuden nojalla. Lisäksi oletuksen nojalla saadaan
$$G(x,0) = F(x,1) = f'(x) \qquad \text{ja} \qquad G(x,1) = F(x,0) = f(x).$$
Täten kuvaus G on kaivattu homotopia kuvausten f' ja f välillä. Siis $f' \simeq f$. Jälleen suoraan Määritelmästä 4.4 nähdään, että jos F on polkujen f ja f' välinen polkuhomotopia, niin G on polkujen f' ja f välinen polkuhomotopia.

3) Oletetaan, että $f \simeq f'$ ja $f' \simeq f''$. Määritelmän 4.1 nojalla on olemassa homotopia F kuvausten f ja f' välillä sekä homotopia F' kuvausten f' ja f'' välillä. Olkoon $G\colon X \times I \to Y$
$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & \text{kun } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ F'(x, 2t-1), & \text{kun } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$
Kuvaus G on hyvin määritelty, sillä pisteessä $t = \frac{1}{2}$ pätee $F(x,1) = f'(x) = F'(x,0)$. Koska kuvaus G jatkuva joukon $X \times I$ kahdessa suljetussa osajoukossa eli joukoissa $X \times [0, \frac{1}{2}]$ ja $X \times [\frac{1}{2}, 1]$, niin kuvaus G on jatkuva koko joukossa $X \times I$ Lemman 3.10 nojalla. Täten kuvaus G on kaivattu homotopia kuvausten f ja f'' välillä.
Jos f, f' ja f'' ovat polkuja pisteestä x_0 pisteeseen x_1 sekä F on polkujen f ja f' välinen polkuhomotopia ja F' on polkujen f' ja f'' välinen polkuhomotopia, niin kuvaukselle G pätee lisäksi
$$G(0,t) = \begin{cases} F(0,2t) = x_0, & \text{kun } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ F'(0, 2t-1) = x_0, & \text{kun } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \text{ sekä}$$
$$G(1,t) = \begin{cases} F(1,2t) = x_1, & \text{kun } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ F'(1, 2t-1) = x_1, & \text{kun } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Siis $G(0,t) = x_0$ kaikille $t \in I$ ja $G(1,t) = x_1$ kaikille $t \in I$. Täten G on polkujen f ja f'' välinen polkuhomotopia.

□

Esimerkki 4.8. Olkoot f ja g mielivaltaisia jatkuvia kuvauksia topologiselta avaruudelta X tasoon $\mathbb{R}^2$ ja tarkastellaan kuvausta $F\colon X \times I \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Funktio F on jatkuvien tulo- ja summafunktioiden yhdistettynä funktiona jatkuva. Lisäksi kuvaus F toteuttaa ehdot

$$F(x,0) = f(x) \qquad \text{ja} \qquad F(x,1) = g(x)$$

jokaiselle $x \in X$. Siispä kuvaus f on homotooppinen kuvaukselle g ja kuvaus F on kuvausten f ja g välinen homotopia. Kuvausta F kutsutaan *janahomotopiaksi*, sillä se siirtää pisteen $f(x)$ pisteeksi $g(x)$ pisteiden välistä suoraa janaa pitkin. Jos f ja g ovat polkuja pisteestä x_0 pisteeseen x_1, niin lisäksi pätee $F(0,t) = (1-t)f(0) + tg(0) = x_0 - tx_0 + tx_0 = x_0$ ja $F(1,t) = (1-t)f(1) + tg(1) = x_1 - tx_1 + tx_1 = x_1$. Täten Määritelmän 4.4 nojalla F on polkujen f ja g välinen polkuhomotopia.

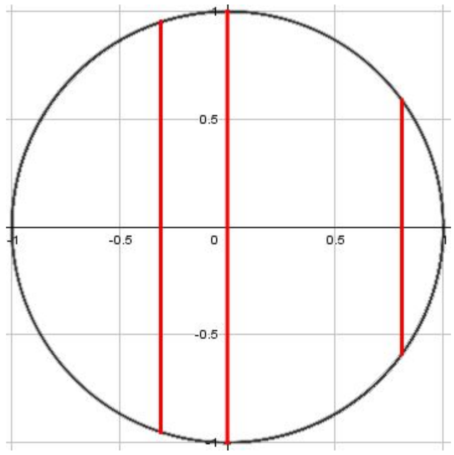
Esimerkki 4.9. Tarkastellaan punkteerattua tasoa $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Polut

$$f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s),$$
$$g(s) = (\cos \pi s, 2 \sin \pi s)$$

ovat polkuhomotooppisia punkteeratussa tasossa: polkujen f ja g väliseksi polkuhomotopiaksi käy janahomotopia. Janahomotopia ei kuitenkaan käy polkujen f ja

$$h(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$$

väliseksi homotopiaksi, sillä kyseinen janahomotopia kulkee origon kautta, joka ei kuulu punkteerattuun tasoon. Tilannetta on havainnollistettu Kuvassa 1.



Kuva 1. Janahomotopian F havainnollistuskuva kolmella eri kiinnitetyllä muuttujan s arvolla.

Tarkemmin ottaen pisteessä $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ polkujen f ja h väliselle janahomotopialle $F(s,t)=(1-t)f(s)+th(s)$ pätee

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f(s)+\frac{1}{2}h(s)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right),-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=(0,0).$$

Osoittautuu, että polkujen f ja h välillä ei ole olemassa polkuhomotopiaa punkteeratussa tasossa. Tarkasteltessa polkujen välisiä polkuhomotopioita on siis hyvin olennaista tietää, missä avaruudessa polkuja käsitellään.

Määritelmä 4.10. Olkoot X topologinen avaruus ja $x_0,x_1,x_2\in X$. Olkoot lisäksi kuvaus f polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1 ja kuvaus g polku pisteestä x_1 pisteeseen x_2. Polkujen f ja g *tulopolku* $f*g$ on polku h pisteestä x_0 pisteeseen x_2, jonka määrää sääntö

$$h(s)=\begin{cases}f(2s), & \text{kun } s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ g(2s-1), & \text{kun } s\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Lemman 3.10 nojalla kuvaus h on hyvin määritelty sekä jatkuva.

Polkujen tulo indusoi hyvin määrittelyn laskutoimituksen polkuluokille:

$$[f]*[g]=[f*g]. \tag{4.11}$$

Osoitetaan tämä vielä seuraavassa lemmassa.

Lemma 4.12. *Polkujen tulo on hyvin määritelty laskutoimitus polkuluokkien suhteen. Laskutoimituksen määrää yhtälö* (4.11). *Eli, jos* $f\simeq_p f'$ *ja* $g\simeq_p g'$*, niin* $f*g\simeq_p f'*g'$.

Todistus. Olkoot X topologinen avaruus ja kuvaukset $f,f'\colon I\to X$ polkuja pisteestä x_0 pisteeseen x_1 sekä kuvaukset $g,g'\colon I\to X$ polkuja pisteestä x_1 pisteeseen x_2. Olkoot lisäksi kuvaus F polkujen f ja f' välinen ja kuvaus G polkujen g ja g' välinen polkuhomotopia. Määritellään kuvaus $H\colon I\times I\to X$

$$H(s,t)=\begin{cases}F(2s,t), & \text{kun } s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ G(2s-1,t), & \text{kun } s\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Oletuksen nojalla kuvaukset F ja G ovat jatkuvia. Pisteessä $s=\frac{1}{2}$ pätee $F(1,t)=x_1=G(0,t)$ kaikille $t\in[0,1]$, joten kuvaus H on hyvin määritelty. Lisäksi Lemman 3.10 oletukset täyttyvät, joten kuvaus H on jatkuva. Tarkistetaan vielä, että kuvaus H täyttää Määritelmän 4.4 muut ehdot. Koska

$$H(s,0)=\begin{cases}F(2s,0)=f(2s), & \text{kun } s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ G(2s-1,0)=g(2s-1), & \text{kun } s\in\left[\frac{1}{2},1\right],\end{cases}$$

niin $H(s,0)=(f*g)(s)$ jokaiselle $s\in I$. Vastaavasti

$$H(s,1)=\begin{cases}F(2s,1)=f'(2s), & \text{kun } s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ G(2s-1,1)=g'(2s-1), & \text{kun } s\in\left[\frac{1}{2},1\right],\end{cases}$$

joten $H(s,1)=(f'*g')(s)$ jokaiselle $s\in I$. Lisäksi kuvaukselle H pätee $H(0,t)=F(0,t)=x_0$ ja $H(1,t)=G(1,t)=x_2$. Täten kuvaus H täyttää Määritelmän 4.4 kaikki ehdot, joten se on kaivattu homotopia polkujen $f*g$ ja $f'*g'$ välille. $\square$

Määritelmä 4.13. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko A on *konveksi*, jos kaikille joukon A pisteille a ja b pätee, että pisteiden a ja b välinen jana kuuluu joukkoon A.

Esimerkki 4.14. Osoitetaan, että avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukko $I = [0, 1]$ on konveksi joukko. Olkoot $a, b \in I$ ja $t \in [0, 1]$ ja osoitetaan, että joukko $\{ta + (1 - t)b\} \subset I$. Koska $a \leq 1$ ja $b \leq 1$, niin

$$0 \leq ta + (1 - t)b \leq t + (1 - t) \leq 1.$$

Osoittautuu, että polkuhomotopialuokkien välisellä laskutoimituksella $*$ on hyvin samanlaisia ominaisuuksia kuin mitä aksioomia *ryhmällä* on. Laskutoimitus $[f] * [g]$ ei ole kuitenkaan määritelty kaikkien polkuluokkien välille, vaan ainoastaan sellaisille polkuluokkapareille $[f], [g]$, joille $f(1) = g(0)$.

Lause 4.15. *Olkoot kuvaukset $f, g, h\colon I \to X$ polkuja avarudeessa X. Laskutoimituksella $*$ on seuraavat ominaisuudet:*

1) *Jos $[f] * ([g] * [h])$ on määritelty, niin tällöin myös $([f] * [g]) * [h]$ on määritelty. Lisäksi $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$.*

2) *Olkoot $x \in X$ ja $e_x\colon I \to X$ vakiopolku, eli kuvaus e_x vie kaikki välin $[0, 1]$ pisteet pisteeseen x. Jos kuvaus $f\colon I \to X$ on polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1 niin tällöin*
$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \qquad \textit{ja} \qquad [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

3) *Olkoon kuvaus $f\colon I \to X$ polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1. Kuvausta $\bar{f}\colon I \to X$, $\bar{f}(s) = f(1 - s)$ kutsutaan polun f* käänteispoluksi. *Tällöin*
$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \qquad \textit{ja} \qquad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Lauseen 4.15 todistamiseen tarvitaan seuraavat kaksi lemmaa.

Lemma 4.16. *Olkoot $k\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus ja F joukossa X olevien polkujen f ja f' välinen polkuhomotopia. Tällöin $k \circ F$ on polkujen $k \circ f$ ja $k \circ f'$ välinen polkuhomotopia joukossa Y.*

Todistus. Oletuksen nojalla F on polkujen f ja f' välinen polkuhomotopia, jolloin Määritelmän 4.4 nojalla

$$F(s, 0) = f(s) \qquad \text{ja} \qquad F(s, 1) = f'(s)$$
$$F(0, t) = x_0 \qquad \text{ja} \qquad F(1, t) = x_1$$

jokaiselle $s, t \in I$. Edellisestä saadaan, että $(k \circ F)(s, 0) = k(F(s, 0)) = k(f(s)) = (k \circ f)(s)$ ja $(k \circ F)(s, 1) = k(F(s, 1)) = k(f'(s)) = (k \circ f')(s)$ sekä $(k \circ F)(0, t) = k(F(0, t)) = k(x_0)$ ja $(k \circ F)(1, t) = k(F(1, t)) = k(x_1)$. Koska $k \circ F$ on kahden jatkuvan funktion k ja F yhdistettyna funktiona jatkuva, niin $k \circ F$ on Määritelmän 4.4 nojalla polkujen $k \circ f$ ja $k \circ f'$ välinen polkuhomotopia. $\square$

Lemma 4.17. *Olkoot $k\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus sekä f ja g sellaisia polkuja joukossa X, että $f(1) = g(0)$. Tällöin*

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g).$$

TODISTUS. Suoraan tulopolun Määritelmän 4.10 nojalla

$$
\begin{aligned}
k\circ(f*g)(s)=(k\circ h)(s)=k(h(s)) &= \begin{cases} k(f(2s)) & \text{kun } s\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ k(g(2s-1)) & \text{kun } s\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases} \\
&= \begin{cases} (k\circ f)(2s) & \text{kun } s\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ (k\circ g)(2s-1) & \text{kun } s\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases} \\
&= (k\circ f)*(k\circ g)(s)
\end{aligned}
$$

kaikille $s\in I$. □

Nyt päästään todistamaan Lause 4.15.

TODISTUS. Todistetaan aluksi ominaisuus 2). Olkoon $e_0\colon I\to I$ joukon I vakiopolku pisteessä 0, eli $e_0(s)=0$ kaikille $s\in I$ ja olkoon $i\colon I\to I$ identtinen kuvaus, joka on polku pisteestä 0 pisteeseen 1 joukossa I. Yhdistetty polku e_0*i on hyvin määritelty ja se on myös polku pisteestä 0 pisteeseen 1 joukossa I. Koska I on Esimerkin 4.14 nojalla konveksi joukko, joukossa I on olemassa polkujen i ja e_0*i välinen polkuhomotopia G. Nyt mille tahansa polulle $f\colon I\to X$ pisteestä x_0 pisteeseen x_1 saadaan Lemman 4.17 nojalla

$$f\circ(e_0*i)=(f\circ e_0)*(f\circ i)=e_{x_0}*f,$$

sillä $(f\circ e_0)(s)=f(e_0(s))=f(0)=x_0$ kaikille $s\in I$ eli $f\circ e_0=e_{x_0}$ vakiopolun määritelmän nojalla. Lisäksi $(f\circ i)(s)=f(i(s))=f(s)$ kaikille $s\in I$, eli $f\circ i{=}f$. Nyt $f\colon I\to X$ on jatkuva kuvaus ja G on polkujen i ja e_0*i välinen polkuhomotopia joukossa I. Tällöin Lemman 4.16 nojalla $f\circ G$ on polkujen $f\circ i{=}f$ ja $f\circ(e_0*i)=e_{x_0}*f$ välinen polkuhomotopia joukossa X. Siispä $f\simeq_p e_{x_0}*f$ ja ekvivalenssirelaation transitiivisuuden nojalla saadaan $[f]=[e_{x_0}*f]=[e_{x_0}]*[f]$. Käyttämällä hyödyksi tietoa, että e_1 on joukon I vakiopolku pisteessä 1, voidaan täysin vastaavalla päättelyllä osoittaa, että $[f]*[e_{x_1}]=[f]$.
Todistetaan seuraavaksi ominaisuus 3). Identtisen polun i käänteispolku on $\bar{i}\colon I\to I, \bar{i}(s)=1-s$. Tällöin tulopolku $i*\bar{i}$ on sellainen polku joukossa I, joka alkaa ja päättyy samasta pisteestä 0. Myös vakiopolku e_0 on polku joukossa I, joka alkaa ja päättyy pisteestä 0. Koska I on konveksi joukko, joukossa I on olemassa polkujen e_0 ja $i*\bar{i}$ välinen polkuhomotopia H. Mille tahansa polulle $f\colon I\to X$ pisteestä x_0 pisteeseen x_1 saadaan Lemman 4.17 ja käänteispolun määritelmän nojalla

$$f\circ(i*\bar{i})=(f\circ i)*(f\circ\bar{i})=f*\bar{f}.$$

Nyt $f\colon I\to X$ on jatkuva kuvaus ja H on polkujen e_0 ja $i*\bar{i}$ välinen polkuhomotopia joukossa I. Tällöin Lemman 4.16 nojalla $f\circ H$ on polkujen $f\circ e_0=e_{x_0}$ ja $f\circ(i*\bar{i})=f*\bar{f}$ välinen polkuhomotopia. Täten $e_{x_0}\simeq_p f*\bar{f}$ ja ekvivalenssirelaation transitiivisuuden nojalla saadaan $[e_{x_0}]=[f*\bar{f}]=[f]*[\bar{f}]$. Käyttämällä hyödyksi tietoa, että tulopolku $\bar{i}*i$ on polku, joka alkaa ja päättyy samasta pisteestä 1, voidaan täysin vastaavalla päättelyllä osoittaa, että $[e_{x_1}]=[\bar{f}]*[f]$.
Todistetaan lopuksi ominaisuus 1). Jos $[a,b]$ ja $[c,d]$ ovat suljettuja välejä reaaliakselilla, niin tällöin on olemassa yksikäsitteinen funktio $p\colon[a,b]\to[c,d]$, $p(x)=mx+k$, jolle pätee $p(a)=c$ ja $p(b)=d$. Funktiota p kutsutaan välin $[a,b]$ *positiiviseksi lineaariseksi funktioksi* välille $[c,d]$, koska kuvauksen p graafi on suora, jonka kulmakerroin on positiivinen. Tehdään kaksi havaintoa liittyen positiivisiin lineaarisiin funktioihin.

Ensinnäkin, jos funktio p on välin $[a,b]$ positiivinen lineaarinen funktio välille $[c,d]$, niin tällöin p:n käänteiskuvaus on välin $[c,d]$ positiivinen lineaarinen funktio välille $[a,b]$. Lisäksi, jos funktio p on välin $[a,b]$ positiivinen lineaarinen funktio välille $[c,d]$ ja funktio q on välin $[c,d]$ positiivinen lineaarinen funktio välille $[e,f]$, niin tällöin yhdistetty funktio $p \circ q$ on välin $[a,b]$ positiivinen lineaarinen funktio välille $[e,f]$. Nyt pääsemme varsinaisen todistuksen kimppuun.

Kun f, g ja h ovat polkuja joukossa X, niin tulopolut $f*(g*h)$ ja $(f*g)*h$ ovat määritelty täsmälleen silloin kun $f(1) = g(0)$ ja $g(1) = h(0)$. Mikäli ehdot $f(1) = g(0)$ ja $g(1) = h(0)$ ovat voimassa, määritellään kolmen polun f, g ja h tulopolku seuraavalla tavalla: valitaan sellaiset välin $[0,1]$ pisteet a ja b, että $0 < a < b < 1$. Sitten määritellään polku $k_{a,b}$ joukossa X seuraavasti:

$$k_{a,b}(s) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{a}s\right), & \text{kun } s \in [0,a] \\ g\left(\frac{1}{b-a}s - \frac{a}{b-a}\right), & \text{kun } s \in [a,b] \\ h\left(\frac{1}{1-b}s - \frac{b}{1-b}\right), & \text{kun } s \in [b,1], \end{cases}$$

missä $\left(\frac{1}{a}s\right)$, $\left(\frac{1}{b-a}s - \frac{a}{b-a}\right)$ ja $\left(\frac{1}{1-b}s - \frac{b}{1-b}\right)$ ovat välien $[0,a]$, $[a,b]$ ja $[b,1]$ samassa järjestyksessä olevat positiiviset lineaariset funktiot välille $[0,1]$. Tietysti polku $k_{a,b}$ riippuu pisteiden a ja b valinnasta, mutta sen polkuluokka ei riipu. Osoitetaan, että jos c ja d ovat myös sellaiset välin $[0,1]$ pisteet, että $0 < c < d < 1$, niin polku $k_{c,d}$ on polkuhomotooppinen polulle $k_{a,b}$. Olkoon $p\colon I \to I$ sellainen funktio, että funktion p rajoittuma väleille $[0,a]$, $[a,b]$ ja $[b,1]$ on näiden välien positiivinen lineaarinen funktio väleille $[0,c]$, $[c,d]$ ja $[d,1]$ samassa järjestyksessä. Osoitetaan edellistä käyttäen, että $k_{c,d} \circ p = k_{a,b}$. Jaetaan tarkastelu kolmeen osaan. Välillä $[0,a]$ funktio p on välin $[0,a]$ positiivinen lineaarinen funktio välille $[0,c]$ ja välillä $[0,c]$ funktiolle $k_{c,d}$ pätee $k_{c,d}(s) = f\left(\frac{1}{c}s\right)$. Täten välillä $[0,a]$ saadaan

$$(k_{c,d} \circ p)(s) = k_{c,d}(p(s)) = k_{c,d}\left(\frac{c}{a}s\right) = f\left(\frac{1}{c} \cdot \frac{c}{a}s\right) = f\left(\frac{1}{a}s\right) = k_{a,b}(s).$$

jokaiselle $s \in [0,a]$. Samanlainen päättely toimii myös väleillä $[a,b]$ ja $[b,1]$. Täten $k_{c,d} \circ p(s) = k_{a,b}(s)$ kaikille $s \in I$, jolloin $k_{c,d} \circ p = k_{a,b}$.

Koska I on konveksi joukko sekä p ja identtinen kuvaus $i\colon I \to I$ ovat molemmat joukon I polkuja pisteestä 0 pisteeseen 1, on olemassa polkujen p ja i välinen polkuhomotopia P joukossa I. Nyt $k_{c,d}\colon I \to X$ on jatkuva kuvaus ja P on polkujen p ja i välinen polkuhomotopia joukossa I. Tällöin Lemman 4.16 nojalla $k_{c,d} \circ P$ on polkujen $k_{c,d} \circ p = k_{a,b}$ ja $k_{c,d} \circ i = k_{c,d}$ välinen polkuhomotopia joukossa X.

Kun $a = \frac{1}{2}$ ja $b = \frac{3}{4}$, on kolmen polun f, g ja h tulopolku $f*(g*h)$ täsmälleen polku $k_{a,b}$. Osoitetaan vielä tämä. Suoraan Määritelmän 4.10 nojalla

$$(g*h)(s) = \begin{cases} g(2s), & \text{kun } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ h(2s-1), & \text{kun } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Täten

$$
\begin{aligned}
[f * (g * h)](s) &= \begin{cases} f(2s), & \text{kun } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (g * h)(2s - 1), & \text{kun } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(2s), & \text{kun } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(4s - 2), & \text{kun } s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ h(4s - 3), & \text{kun } s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases} \\
&= k_{a,b}(s).
\end{aligned}
$$

Ihan vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että kun $c = \frac{1}{4}$ ja $d = \frac{1}{2}$, on tulopolku $(f * g) * h$ täsmälleen polku $k_{c,d}$. Siispä polut $f * (g * h)$ ja $(f * g) * h$ ovat polkuhomotooppiset ja olemme vihdoin saaneet osoitettua polkuluokkien välisen laskutoimituksen $*$ assosiatiivisuuden. $\square$

Huomautus 4.18.

- Ominaisuuden 1) nojalla laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen, ominaisuuden 2) nojalla laskutoimituksella $*$ on vasen ja oikea neutraalialkio ja ominaisuuden 3) nojalla laskutoimituksella $*$ on käänteisalkio.
- Koska laskutoimitus $*$ on määritelty vain sellaisten polkuluokkien $[f]$ ja $[g]$ välille, joille $f(1) = g(0)$, niin polkuluokkien joukko varustettuna laskutoimituksella $*$ ei ole ryhmä. Laskutoimituksella $*$ varustettu joukko $(X, *)$ on kuitenkin *grupoidi.*

5. Perusryhmä

Rajoitutaan tässä luvussa tarkastelemaan sellaisia polkuja h, joiden alkupiste on sama kuin päätepiste. Tällaisten polkuluokkien joukko varustettuna laskutoimituksella $*$ on ryhmä. Kutsutaan tätä ryhmää topologisen avaruuden X perusryhmäksi. Palautetaan ennen perusryhmän määrittämistä mieleen ryhmän sekä homomorfismin määritelmät.

MÄÄRITELMÄ 5.1. Laskutoimituksella $*$ varustettu joukko $(G, *)$ on *ryhmä*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1) Laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen eli $(a * b) * c = a * (b * c)$ pätee kaikilla $a, b, c \in G$.
2 Laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio eli on olemassa sellainen $e \in X$, että $g * e = g = e * g$ pätee kaikilla $g \in G$.
3 Jokaisella $g \in G$ on olemassa käänteisalkio, eli on olemassa sellainen $\bar{g} \in G$, että $g * \bar{g} = e = \bar{g} * g$.

MÄÄRITELMÄ 5.2. Olkoot $(G, \cdot)$ ja $(G', \cdot)$ ryhmiä. Kuvaus $f \colon G \to G'$ on *homomorfismi*, jos $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ kaikille $a, b \in G$.
Injektiivinen homomorfismi on *monomorfismi* ja surjektiivinen homomorfismi on *epimorfismi*. Bijektiivinen homomorfismi on *isomorfismi*.
Kuvaus $f \colon G \to G'$ on *triviaali homomorfismi*, jos $f(a) = e$ kaikille $a \in G$, missä e on laskutoimituksen $\cdot$ neutraalialkio.

Määritellään nyt tologisen avaruuden X perusryhmä.

MÄÄRITELMÄ 5.3. Olkoot X topologinen avaruus ja $x_0 \in X$. Pisteessä x_0 olevien silmukoiden polkuluokkien joukko varustettuna laskutoimituksella $*$ on avaruuden X *perusryhmä* kantapisteenään x_0. Avaruden X perusryhmää kantapisteessä x_0 merkitään $\pi_1(X, x_0)$.

HUOMAUTUS 5.4. Lauseesta 4.15 seuraa, että laskutoimitus $*$ rajoitettuna pisteessä x_0 olevien silmukoiden polkuluokkien joukkoon toteuttaa ryhmän Määritelmän 5.1 kolme ehtoa.

ESIMERKKI 5.5. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ perusryhmä $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ on *triviaali*, eli jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ silmukka f kantapisteessä x_0 on homotooppinen kantapisteen x_0 vakiopolun e_{x_0} kanssa. Silmukan f ja vakiopolun e_{x_0} väliseksi homotopiaksi käy janahomotopia. Erityisesti perusryhmä $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ koostuu siis ainoastaan vakiopolun e_{x_0} polkuluokasta $[e_{x_0}]$. Yleisemmin, jos X on mikä tahansa avaruuden $\mathbb{R}^n$ konveksi osajoukko ja $x_0 \in X$, niin $\pi_1(X, x_0)$ on triviaali perusryhmä. Erityisesti yksikköpallolla $\bar{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ on triviaali perusryhmä.

Seuraavaksi tarkastellaan perusryhmän riippuvuutta kantapisteestä.

MÄÄRITELMÄ 5.6. Olkoon kuvaus α polku topologisessa avaruudessa X pisteestä x_0 pisteeseen x_1. Kuvaus

$$\hat{\alpha} \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

määritellään seuraavasti:

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

Kuvaus $\hat{\alpha}$ on hyvin määritelty, sillä laskutoimitus $*$ on hyvin määritelty. Jos kuvaus f on silmukka pisteessä x_0, niin $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$ on silmukka pisteessä x_1. Täten $\hat{\alpha}$ kuvaa kantapisteen x_0 määräämän perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$ kantapisteen x_1 määräämäksi perusryhmäksi $\pi_1(X, x_1)$. Lisäksi, kuvaus $\hat{\alpha}$ riipuu ainoastaan polun α polkuluokasta.

LAUSE 5.7. *Kuvaus $\hat{\alpha}$ on isomorfismi.*

TODISTUS. Olkoot kuvaus α polku topologisessa avaruudessa X pisteestä x_0 pisteeseen x_1 ja kuvaukset f ja g pisteessä x_0 olevia silmukoita. Osoitetaan aluksi, että kuvaus $\hat{\alpha}$ on homomorfismi. Suoraan Määritelmän 5.6 ja ryhmän ominaisuuksien nojalla:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * ([\alpha] * [\bar{\alpha}]) * [g] * [\alpha] \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [e_{x_0}] * [g] * [\alpha] \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g]).\end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että kuvaus $\hat{\alpha}$ on bijektio. Näytetään, että jos β on polun α käänteispolku, niin kuvaus $\hat{\beta}$ on kuvauksen $\hat{\alpha}$ käänteiskuvaus. Nyt jokaiselle $[h] \in \pi_1(X, x_1)$ pätee

$$\hat{\beta}([h]) = [\bar{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]$$

ja

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) = [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [h].$$

Lisäksi jokaiselle $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ pätee

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [\alpha] * ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * [\bar{\alpha}] = [f].$$

Täten kuvaus $\hat{\beta}$ on kuvauksen $\hat{\alpha}$ käänteiskuvaus. Siksi kuvaus $\hat{\alpha}$ on bijektio ja täten kuvaus $\hat{\alpha}$ isomorfismi. □

MÄÄRITELMÄ 5.8. Topologinen avaruus X on *yhdesti yhtenäinen*, jos se on polkuyhtenäinen ja perusryhmä $\pi_1(X, x_0)$ on triviaali yhden alkion muodostama joukko jollekin $x_0 \in X$.

ESIMERKKI 5.9. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kuvaus $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $f(t) = (1-t)x+ty$ on polku pisteestä x pisteeseen y. Lisäksi Esimerkissä 5.5 todettiin, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ perusryhmä $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ on triviaali. Siis avaruus $\mathbb{R}^n$ on yhdesti yhtenäinen.

LAUSE 5.10. *Yhdesti yhtenäisessä avaruudessa mitkä tahansa kaksi avaruuden polkua, joilla on yhteinen alkupiste ja loppupiste, ovat polkuhomotooppisia.*

TODISTUS. Olkoot α ja β polkuja pisteestä x_0 pisteeseen x_1 yhdesti yhtenäisessä avaruudessa X. Tällöin tulopolku $\alpha * \bar{\beta}$ on määritelty ja se on pisteessä x_0 oleva silmukka. Koska avaruus X on yhdesti yhtenäinen, niin tulopolku $\alpha * \bar{\beta}$ on polkuhomotooppinen pisteessä x_0 olevan vakiopolun e_{x_0} kanssa. Tällöin siis $[\alpha * \bar{\beta}] = [e_{x_0}]$ ja koska laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen ja $[e_{x_0}]$ on ryhmän $\pi_1(X, x_0)$ neutraalialkio, niin

$$[\alpha] = [\alpha] * ([\bar{\beta}] * [\beta]) = ([\alpha] * [\bar{\beta}]) * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] = [\beta].$$

Siispä $[\alpha] = [\beta]$, eli polut polut α ja β ovat polkuhomotooppisia. □

MÄÄRITELMÄ 5.11. Olkoon $h\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus, jolle pätee $h(x_0) = y_0$. Määritellään kuvaus

$$h_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

asettamalla

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

Kuvasta h_* kutsutaan *kuvauksen h indusoimaksi homomorfismiksi* kantapisteessä x_0. Jos polku f on pisteessä x_0 oleva silmukka avaruudessa X, niin $h \circ f$ on pisteessä y_0 oleva silmukka avaruudessa Y.

Kuvaus h_* on hyvin määritelty: jos kuvaus F on polkujen f ja f' välinen polkuhomotopia, niin yhdistetty kuvaus $h \circ F$ on Lemman 4.16 nojalla polkujen $h \circ f$ ja $h \circ f'$ välinen polkuhomotopia.

Osoitetaan, että kuvaus h_* todellakin on homomorfismi, eli

$$h_*([f * g]) = h_*([f]) * h_*([g])$$

kaikille $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$.

Suoraan Määritelmän 5.11 ja Lemman 4.17 nojalla

$$h_*([f * g]) = [h \circ (f * g)] = [(h \circ f) * (h \circ g)] = [h \circ f] * [h \circ g] = h_*([f]) * h_*([g])$$

kaikille $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$. Täten kuvaus h_* on homomorfismi.

Homomorfismi h_* riippuu sekä kuvauksesta h, että kantapisteen x_0 valinnasta. Tarkasteltaessa kuvauksen h indusoimia homomorfismeja avaruuden eri X kantapisteissä x_0 ja x_1, täytyy ottaa käyttöön merkintä

$$(h_{x_0})_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

korostamaan homomorfismin riippuvuutta kantapisteestä.

Kuvauksen indusoimalla homomorfismilla on kaksi ominaisuutta, jotka ovat välttämättömiä sovelluksissa. Niitä kutsutaan homomorfismin ”funktoriallisiksi ominaisuuksiksi”. Seuraava lause kertoo nämä ominaisuudet.

LAUSE 5.12. *Olkoot kuvaukset $h\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ja $k\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ jatkuvia sekä $i\colon (X, x_0) \to (X, x_0)$ identtinen kuvaus. Tällöin*

1) $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$ *ja*
2) i_* *on identtinen homomorfismi.*

TODISTUS. Suoraan Määritelmän 5.11 ja funktioiden yhdistämisen assosiatiivisuuden nojalla:

$$\begin{aligned}(k_* \circ h_*)([f]) &= k_*(h_*([f])) \\ &= k_*([h \circ f]) \\ &= [k \circ (h \circ f)] \\ &= [(k \circ h) \circ f] \\ &= (k \circ h)_*([f]).\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$. □

Käsitellään seuraavaksi lyhyesti peiteavaruuksia.

MÄÄRITELMÄ 5.13. Olkoot E ja B topologisia avaruuksia ja kuvaus $p\colon E \to B$ jatkuva surjektio. Sanotaan, että avaruuden B avoin osajoukko U on *tasaisesti peitetty* kuvauksella p, jos $p^{-1}(U)$ voidaan kirjoittaa yhdisteenä sellaisista erillisistä avoimista joukoista V_α, että jokaiselle α kuvauksen p rajoittuma joukkoon V_α on homeomorfismi joukosta V_α joukkoon U. Kokoelmaa $\{V_\alpha\}$ kutsutaan alkukuvan $p^{-1}(U)$ osituksekseksi siivuihin.

MÄÄRITELMÄ 5.14. Olkoot E ja B topologisia avaruuksia ja kuvaus $p\colon E \to B$ jatkuva surjektio. Kuvaus p on *peitekuvaus* ja E on avaruuden B *peiteavaruus*, jos jokaiselle $b \in B$ on olemassa avoin ympäristö U, joka on tasaisesti peitetty kuvauksella p.

LAUSE 5.15. *Kuvaus $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ on peitekuvaus.*

TODISTUS. Trigonometriset funktiot ovat jatkuvia, joten p on jatkuva funktio. Tarkastellaan yksikköpallon reunan S^1 avointa osajoukkoa U_1, joka koostuu yksikköpallon reunan S^1 ja oikean puolitason $\{(x, y)\colon x > 0\}$ leikkausjoukon pisteistä. Tällöin $p^{-1}(U_1)$ koostuu niistä pisteistä x, joille $\cos 2\pi x$ on positiivinen. Siispä $p^{-1}(U_1)$ on yhdiste väleistä $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ kaikille $n \in \mathbb{Z}$. Jos kuvaus p rajoitetaan mille tahansa suljetulle välille $\overline{V_n}$, niin $\sin 2\pi x$ on aidosti kasvava tällä välillä, joten kuvaus p on injektio samalla välillä. Nyt väliarvolauseen 3.23 nojalla kuvaus p kuvaa surjektiivisesti välin $\overline{V_n}$ väliksi $\overline{U_1}$ ja välin V_n väliksi U_1. Siis kuvaus $p|_{\overline{V_n}}$ on jatkuva bijektio, joka kuvaa kompaktin joukon $\overline{V_n}$ kompaktiksi joukoksi $\overline{U_1}$. Kuvaus $p|_{\overline{V_n}}$ on siis homeomorfismi joukosta $\overline{V_n}$ joukkoon $\overline{U_1}$. Erityisesti kuvaus $p|_{V_n}$ on homeomorfismi joukosta V_n joukkoon U_1.
Aivan vastaavanlainen päättely toimii avoimille joukoille U_2, U_3 ja U_4, jotka ovat yksikköpallon reunan S^1 leikkaukset vasemman, ylemmän ja alemman puolitason kanssa. Nyt avoimet joukot U_1, U_2, U_3 ja U_4 peittävät yksikköympyrän S^1 ja jokainen joukoista U_1 on tasaisesti peitetty kuvauksella p. Täten $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ on Määritelmän 5.14 nojalla peitekuvaus. □

Käsitellään seuraavaksi ympyrän perusryhmää ja osoitetaan, että ympyrän perusryhmä on isomorfinen kokonaislukujen additiivisen ryhmän kanssa. Määritellään ensin kuitenkin kuvauksen nosto.

MÄÄRITELMÄ 5.16. Olkoot E, B ja X topologisia avaruuksia ja $p\colon E \to B$ kuvaus. Oletetaan, että kuvaus $f\colon X \to B$ on jatkuva. Tällöin kuvauksen f *nosto* on kuvaus $\tilde{f}\colon X \to E$, jolle pätee $p \circ \tilde{f} = f$.

Seuraava lemma kertoo, että peitekuvauksilla on tärkeä nosto-ominaisuus.

LEMMA 5.17. *Olkoot E ja B topologisia avaruuksia, $b_0 \in B$ ja $p\colon E \to B$ peitekuvaus. Valitaan sellainen $e_0 \in E$, että $p(e_0) = b_0$. Tällöin millä tahansa pisteestä b_0 alkavalla polulla $f\colon I \to B$ on yksikäsitteinen nosto avaruuden E poluksi $\tilde{f}$, joka alkaa pisteestä e_0.*

MÄÄRITELMÄ 5.18. Olkoot E ja B topologisia avaruuksia, $b_0 \in B$ ja $p\colon E \to B$ peitekuvaus. Valitaan sellainen $e_0 \in E$, että $p(e_0) = b_0$. Olkoon $[f] \in \pi_1(B, b_0)$ ja olkoon $\tilde{f}$ polun f nosto poluksi avaruudessa E, joka alkaa pisteestä e_0. Olkoon $\phi([f])$ polun $\tilde{f}$ päätepiste, eli $\phi([f]) = \tilde{f}(1)$. Tällöin ϕ on hyvin määritelty kuvaus

$$\phi\colon \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0).$$

Huomautus 5.19.

1) Lemman 5.17 nojalla polun f nosto $\tilde{f}$ on olemassa.
2) Perustellaan miksi kuvaus ϕ on hyvin määritelty. Olkoon $[f]$ ja $[g]$ sellaiset kaksi polkuluokkaa ryhmästä $\pi_1(B, b_0)$, että $[f] = [g]$. Tarkastellaan polkujen f ja g nostoja avaruuden E sellaisiksi poluiksi $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$, jotka alkavat pisteestä e_0. Jos polut $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ ovat silmukoita, niin tällöin määritelmän nojalla polut $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ päättyvät samaan pisteeseen, eli $\phi([f]) = \tilde{f}(1) = e_0 = \tilde{g}(1) = \phi([g])$. Polut $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ eivät yleisesti kuitenkaan ole silmukoita. Tällöin tarvitaan seuraava tulos perustelemaan, miksi myös tällöin pätee $\phi([f]) = \phi([g])$.

Lause 5.20. *Olkoot E ja B topologisia avaruuksia, $p\colon E \to B$ peitekuvaus ja $p(e_0) = b_0$. Olkoot f ja g polkuja avaruudessa B pisteestä b_0 pisteeseen b_1. Olkoot $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ polkujen f ja g nostot avaruuden E poluiksi, jotka alkavat pisteestä e_0. Jos f ja g ovat polkuhomotooppisia, niin tällöin polut $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ päättyvät samaan pisteeseen ja ovat polkuhomotooppisia.*

Todistus. Lauseen todistamiseen tarvitaan Lemmaa 5.17 sekä toista kuvausten nostoihin liittyvää lemmaa. Molempien lemmojen todistukset ovat melko teknisiä. Sivuutetaan lemmojen, kuten myös Lauseen 5.20 todistus. Lemmojen ja Lauseen 5.20 todistukset löytyvät lähteestä [**4**]: Lemma 54.1, Lemma 54.2 ja Theorem 54.3. □

Lause 5.21. *Olkoot $p\colon E \to B$ peitekuvaus ja $p(e_0) = b_0$. Jos avaruus E on polkuyhtenäinen, niin kuvaus*

$$\phi\colon \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

on surjektio. Jos avaruus E on yhdesti yhtenäinen, niin kuvaus ϕ on bijektio.

Todistus. Olkoon $e_1 \in p^{-1}(b_0)$. Koska avaruus E on polkuyhtenäinen, niin avaruudessa E on olemassa polku $\tilde{f}$ pisteestä e_0 pisteeseen e_1. Tällöin polulle $f = p \circ \tilde{f}$ pätee $f(0) = (p \circ \tilde{f})(0) = p(\tilde{f}(0)) = p(e_0) = b_0$ ja $f(1) = p(e_1) = b_0$, koska $e_1 \in p^{-1}(b_0)$. Siis f on pisteessä b_0 oleva silmukka ja Määritelmän 5.18 nojalla $\phi([f]) = e_1$. Siis kuvaus ϕ on surjektio.

Oletetaan, että avaruus E on yhdesti yhtenäinen. Osoitetaan, että kuvaus ϕ on injektio. Olkoot $[f]$ ja $[g]$ sellaiset kaksi silmukkaa perusryhmästä $\pi_1(B, b_0)$, että $\phi([f]) = \phi([g])$. Olkoot $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ polkujen f ja g nostot avaruuden E poluiksi, jotka alkavat pisteestä e_0. Koska $\tilde{f}(1) = \phi([f]) = \phi([g]) = \tilde{g}(1)$, niin poluilla on yhteinen loppupiste. Siis poluilla $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ on yhteinen alku -ja loppupiste. Koska avaruus E on yhdesti yhtenäinen, niin Lauseen 5.10 nojalla avaruudessa E on olemassa polkujen $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ välinen polkuhomotopia $\tilde{F}$. Koska polkuhomotopian Määritelmän 4.4 nojalla $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$ ja $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$ kaikille $s \in I$, niin
$(p \circ \tilde{F})(s, 0) = (p \circ \tilde{f})(s) = f(s)$ ja $(p \circ \tilde{F})(s, 1) = (p \circ \tilde{g})(s) = g(s)$, sillä $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ ovat kuvausten f ja g nostot. Nyt kuvaus $p \circ \tilde{F}$ on kahden jatkuvan funktion yhdistettynä kuvauksena jatkuva ja sille pätee lisäksi $(p \circ \tilde{F})(0, t) = p(\tilde{F}(0, t)) = p(e_0) = b_0$ ja $(p \circ \tilde{F})(1, t) = b_0$ kaikille $t \in I$. Kuvaus $p \circ \tilde{F}$ on täten Määritelmän 4.4 nojalla polkujen f ja g välinen polkuhomotopia. Siis $[f] = [g]$, joten kuvaus ϕ on injektio. □

Lause 5.22. *Ympyrän perusryhmä on isomorfinen kokonaislukujen additiivisen ryhmän kanssa.*

TODISTUS. Olkoon $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(s) = \big(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)\big)$ Lauseessa 5.15 peitekuvaukseksi osoitettu kuvaus. Olkoot $e_0 = 0$ ja $b_0 = p(e_0) = (1, 0)$. Tällöin $p^{-1}(b_0)$ on kokonaislukujen joukko. Esimerkissä 5.9 näytettiin, että $\mathbb{R}$ on yhdesti yhtenäinen, joten Lauseen 5.21 nojalla kuvaus

$$\phi\colon \pi_1(S^1, b_0) \to \mathbb{Z}$$

on bijektio. Näytetään sitten, että kuvaus ϕ on homomorfismi. Olkoot $[f], [g] \in \pi_1(B, b_0)$ ja olkoot $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ polkujen f ja g nostot joukon $\mathbb{R}$ poluiksi, jotka alkavat pisteestä 0. Olkoot polkujen $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ päätepisteet n ja m, eli $\tilde{f}(1) = n$ ja $\tilde{g}(1) = m$. Tällöin Määritelmän 5.18 nojalla $\phi([f]) = n$ ja $\phi([g]) = m$. Olkoon sitten $\tilde{\tilde{g}}$ joukon $\mathbb{R}$ polku, jonka sääntö on

$$\tilde{\tilde{g}}(s) = n + \tilde{g}(s).$$

Siis $\tilde{\tilde{g}}$ on polku, joka alkaa pisteestä $\tilde{\tilde{g}}(0) = n + \tilde{g}(0) = n$ ja päättyy pisteeseen $\tilde{\tilde{g}}(1) = n + \tilde{g}(1) = n + m$. Koska trigonometriset funktiot ovat jaksollisia, myös kuvaus p on jaksollinen: $p(n + x) = p(x)$ jokaiselle $x \in \mathbb{R}$. Tämän vuoksi

$$(p \circ \tilde{\tilde{g}})(s) = p(\tilde{\tilde{g}}(s)) = p(n + \tilde{g}(s)) = p(\tilde{g}(s)) = g(s)$$

kaikille $s \in [0, 1]$. Siis polku $\tilde{\tilde{g}}$ on polun g nosto, joka alkaa pisteestä n. Koska polku $\tilde{f}$ päättyy pisteeseen n, niin tulopolku $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ on hyvin määritelty. Määritelmistä 4.10 ja 5.16 seuraa, että $p(\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}) = p(\tilde{f}) * p(\tilde{\tilde{g}}) = f * g$. Siis $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ on polun $f * g$ nosto, joka alkaa pisteestä 0. Polun $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ päätepiste on $\tilde{\tilde{g}}(1) = n + m$. Täten Määritelmän 5.18 nojalla

$$\phi([f] * [g]) = \phi([f * g]) = n + m = \phi([f]) + \phi([g]).$$

Siis kuvaus ϕ on homomorfismi. $\square$

MÄÄRITELMÄ 5.23. Olkoot $(G, \cdot)$ ryhmä ja $x \in G$. Olkoon x^{-1} alkion x käänteisalkio. Merkintä x^n tarkoittaa alkion x tuloa itsensä kanssa n kertaa, merkintä x^{-n} tarkoittaa alkion x^{-1} tuloa itsensä kanssa n kertaa ja x^0 tarkoittaa ryhmän G neutraalialkiota. Ryhmä G on *syklinen*, jos jokainen ryhmän G alkio y on muotoa $y = x^m$ jollekin kokonaisluvulle m. Tällöin alkio x on ryhmän G *virittäjä*.

Ympyrän perusryhmä on ääretön syklinen ryhmä, eli ympyrän perusryhmä on syklinen ja ryhmässä on ääretön määrä alkioita. Tämän väitteen todistamiseksi tarvitaan seuraava abstraktin algebran tulos.

LAUSE 5.24. *Jos ryhmä on isomorfinen kokonaislukujen additiivisen ryhmä kanssa, niin ryhmä on ääretön syklinen ryhmä*

TODISTUS. Kokonaisulukujen additiivinen ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on ääretön syklinen ryhmä ja $1 \in \mathbb{Z}$ on ryhmän virittäjä, sillä jokainen $n \in \mathbb{Z}$ voidaan esittää muodossa

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ kpl}}$$

ja jokaisen alkion $n \in \mathbb{Z}$ käänteisalkio voidaan ilmaista luvun 1 käänteisalkion -1 avulla. Suoraan isomorfismin määritelmästä nähdään, että äärettömyys ja syklisyys säilyvät isomorfismeissa. Perustellaan tämä vielä tarkemmin. Olkoon G ryhmä varustettuna laskutoimituksella $\oplus$ ja oletetaan, että kuvaus $h\colon (\mathbb{Z}, +) \to (G, \oplus)$ on isomorfismi. Koska $(\mathbb{Z}, +)$ on ääretön ryhmä ja kuvaus h on isomorfismin määritelmän nojalla bijektio, niin ryhmän $(G, \oplus)$ täytyy myös olla ääretön. Olkoon $g \in G$. Tällöin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}$, että $h(n) = g$. Koska kuvaus h on homomorfismi ja ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on syklinen, niin

$$g = h(n) = h(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ kpl}}) = h(1) \oplus h(1) \oplus \cdots \oplus h(1).$$

Siis ryhmä $(G, \oplus)$ on syklinen. □

SEURAUS 5.25. *Ympyrän perusryhmä on ääretön syklinen ryhmä.*

TODISTUS. Seuraa suoraan Lauseista 5.22 ja 5.24. □

6. Retraktio ja kiintopisteet

Tässä luvussa esitellään ja todistetaan tutkielman päätulos, eli Brouwerin kiintopistelause tason suljetussa yksikköpallossa. Tätä varten täytyy kuitenkin ensin tutustua retraktioihin:

Määritelmä 6.1. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$. Jatkuva kuvaus $r\colon X \to A$ on *retraktio*, jos $r|_A$ on identtinen kuvaus eli $r|_A(x) = id(x) = x$ kaikille $x \in A$. Jos tällainen kuvaus r on olemassa, sanotaan että joukko A on joukon X retrakti.

Esimerkki 6.2. Yksikköpallon reuna $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \colon ||z|| = 1\}$ on punkteeratun tason $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ retrakti, sillä kuvaus $r\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to S^1$,

$$r(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

on jatkuva joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Lisäksi jokaiselle $z = (x,y) \in S^1$ pätee

$$r(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) = (x,y),$$

eli $r|_{S^1}(z) = id(z) = z$ kaikille $z \in S^1$.

Lemma 6.3. *Olkoon joukko A on joukon X retrakti. Tällöin inkluusiokuvauksen $j\colon A \to X$ indusoima homomorfismi $j_*\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, x_0)$ on injektio.*

Todistus. Tehdään aluksi sellainen huomio, että inkluusiokuvaus $j\colon A \to X$ on sama kuin identtisen kuvauksen $id\colon X \to X$ rajoittuma joukkoon A eli kuvaus $id|_A$. Nyt oletuksen nojalla löytyy retraktio $r\colon X \to A$, jolloin yhdistetty kuvaus $r \circ j$ on sama kuin identtinen kuvaus $id\colon A \to A$. Lauseen 5.12 nojalla indusoidulle homomorfismille pätee $(r \circ j)_* = r_* \circ j_*$. Lisäksi, koska kuvaus $r \circ j$ on identtinen kuvaus, niin saman Lauseen 5.12 nojalla $r_* \circ j_*$ on identtinen homomorfismi joukossa $\pi_1(A, a_0)$, missä piste a_0 on eräs joukon A kantapiste. Koska identtinen homomorfismi $r_* \circ j_*$ on injektio, niin kuvauksen j_* täytyy olla injektio. $\square$

Lemma 6.4. *Olkoon $h\colon S^1 \to X$ jatkuva kuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

1) *Kuvaus h on nollahomotooppinen.*
2) *Kuvaus h laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi $k\colon \bar{B}^2 \to X$.*
3) *Kuvaus h_* on triviaali perusryhmien välinen homomorfismi.*

Todistus. "1) $\Longrightarrow$ 2)". Oletetaan, että kuvaus h on nollahomotooppinen ja olkoon $s_0 \in S^1$. Tällöin Määritelmän 4.1 nojalla on olemassa kuvauksen h ja vakiokuvauksen v_{s_0} välinen homotopia $H\colon S^1 \times I \to X$, jolle pätee

$$H(x,0) = h(x) \qquad \text{ja} \qquad H(x,1) = v_{s_0}(s) = s_0$$

jokaiselle $x \in X$. Määritellään sitten kuvaus $\pi\colon S^1 \times I \to \bar{B}^2$,

$$\pi(x,t) = (1-t)x.$$

Tehdään seuraavaksi kolme havaintoa kuvauksesta π:

1) Kuvaus π on kahden jatkuvan funktion tulofunktiona jatkuva.

2) Kuvaus π on surjektio, sillä se "kutistaa" yksikköpallon reunan S^1 jatkuvasti kohti origoa käyden läpi jokaisen pisten reunan S^1 ja origon välillä. Toisin sanoen jokainen suljetun yksikköpallon $\bar{B}^2$ piste saavutetaan.
3) Koska I ja S^1 ovat kompakteja joukkoja, niin Lauseen 3.38 nojalla tulojoukko $S^1 \times I$ on kompakti. Lisäksi $\bar{B}^2$ on Hausdorffin avaruus, jolloin Lauseen 3.35 nojalla π on suljettu kuvaus.

Nyt edellä tehdyistä havainnoista 1) – 3) seuraa Lemman 3.28 nojalla, että π on samastuskuvaus. Kuvaukselle H pätee, että se on vakio jokaisella joukolla $\pi^{-1}(y)$, missä $y \in \bar{B}^2$, sillä:

1) Jos $y \neq 0$, niin joukko $\pi^{-1}(y)$ koostuu yhdestä alkiosta, eli erityisesti $H(\pi^{-1}(y))$ on vakio.
2) Jos $y = 0$, niin $\pi^{-1}(y) = S^1 \times \{1\}$ ja $H(x, 1) = v_{s_0}(s) = s_0$, eli ominaisuus pätee tällöinkin.

Nyt Lauseen 3.29 kohtien 1) ja 2) nojalla kuvaus H indusoi sellaisen jatkuvan kuvauksen $k\colon \bar{B}^2 \to X$, että $H = k \circ \pi$ ja

$$k(x) = k(\pi(x, 0)) = H(x, 0) = h(x)$$

jokaiselle $x \in S^1$.

"2) $\Longrightarrow$ 3)". Olkoon $j\colon S^1 \to \bar{B}^2$ inkluusiokuvaus. Tällöin $h = k \circ j$ ja lauseen 5.12 nojalla $h_* = k_* \circ j_*$. Olkoot $b_0 \in S^1$ ja $x_0 \in X$. Koska yksikköpallon $\bar{B}^2$ perusryhmä on triviaali, niin indusoitu homomorfismi $j_*\colon \pi_1(S^1, b_0) \to \pi_1(\bar{B}^2, b_0)$ on triviaali, eli $j_*([f]) = [j \circ f] = [e]$ jokaiselle $[f] \in \pi_1(S^1, b_0)$, missä $[e]$ on perusryhmän $\pi_1(\bar{B}^2, b_0)$ neutraalialkio. Koska kuvaus k_* kuvaa homomorfismina neutraalialkion neutraalialkioksi, niin

$$h_*([f]) = (k_* \circ j_*)([f]) = k_*(j_*([f])) = k_*[e] = [e']$$

jokaiselle $[f] \in \pi_1(S^1, b_0)$, missä $[e']$ on perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$ neutraalialkio. Siispä h_* on triviaali indusoitu homomorfismi.

"3) $\Longrightarrow$ 1). "Olkoon $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ Lauseessa 5.15 peitekuvaukseksi osoitettu kuvaus ja olkoon $p_0\colon I \to S^1$ kuvauksen p rajoittuma välille $I = [0, 1]$, eli $p|_I = p_0$. Tällöin p_0 on pisteessä $b_0 := (1, 0)$ oleva silmukka. Koska p_0 on silmukka, joka kiertää joukon S^1 kerran ympäri ja $\pi_1(S^1, b_0)$ on syklinen ryhmä, niin alkio $[p_0]$ virittää perusryhmän $\pi_1(S_1, b_0)$. Olkoon $x_0 = h(b_0)$. Koska oletuksen nojalla h_* on triviaali homomorfismi, eli $h_*([g]) = [h \circ g] = [e]$ jokaiselle $[g] \in \pi_1(S^1, b_0)$, niin polku $f = h \circ p_0$ edustaa ryhmän $\pi_1(X, x_0)$ neutraalialkiota, eli vakiopolkua e_{x_o}. Siis $[f] = [e_{x_o}]$ ja Määritelmän 4.4 nojalla on olemassa polkujen f ja e_{x_o} välinen polkuhomotopia F avaruudessa X. Nyt kuvaus $p_0 \times id\colon I \times I \to S^1 \times I$ on jatkuva surjektio ja lisäksi Lauseen 3.35 nojalla suljettu, joten Lemman 3.28 nojalla kuvaus $p_0 \times id$ on samastuskuvaus. Kuvaus $p_0 \times id$ kuvaa joukot $\{0\} \times \{t\}$ ja $\{1\} \times \{t\}$ joukoiksi $\{b_0\} \times \{t\}$ jokaiselle $t \in I$ ja on muutoin injektio. Määritelmän 4.4 nojalla polkuhomotopia F kuvaa joukot $\{0\} \times I, \{1\} \times I$ ja $I \times \{1\}$ pisteeksi x_0. Nyt Lauseen 3.29 nojalla kuvaus F indusoi kuvauksen h ja vakiokuvauksen e_{x_0} välisen polkuhomotopian $H\colon S^1 \times I \to X$. Siispä kuvaus h on Määritelmän 4.4 nojalla nollahomotooppinen. □

SEURAUS 6.5. *Inkluusiokuvaus $j\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ ei ole nollahomotooppinen. Identtinen kuvaus $i\colon S^1 \to S^1$ ei ole nollahomotooppinen.*

Todistus. Esimerkin 6.2 nojalla kuvaus $r\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to S^1, r(x) = \frac{x}{||x||}$ on retraktio joukosta $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ joukkoon S^1. Täten Lemman 6.3 nojalla inkluusiokuvauksen $j\colon S^1 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ indusoima homomorfismi $j_*\colon \pi_1(S^1, a) \to \pi_1(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, b)$ on injektio. Koska Lauseen 5.22 nojalla ympyrän perusryhmä $\pi_1(S^1, a)$ on isomorfinen kokonaislukujen additiviisen ryhmän kanssa, niin kuvaus j_* ei kuvaa jokaista alkiota $[f] \in \pi_1(S^1, a)$ ryhmän $\pi_1(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, b)$ neutraalialkioksi. Kuvaus j_* ei ole täten triviaali. Siis on olemassa sellainen joukon S^1 silmukka f kantapisteessä $a \in S^1$, että $j_*([f]) \neq [e_b]$. Nyt Lemman 6.4 ehdon 3) negaatiosta seuraa, että kuvaus j ei ole nollahomotooppinen.
Koska i on identtinen kuvaus, niin Lauseen 5.12 kohdan 2) nojalla kuvauksen i indusoima homomorfismi i_* on identtinen homomorfismi. Kuvaus i_* ei ole täten triviaali, jolloin Lemman 6.4 nojalla kuvaus i ei ole nollahomotooppinen. □

Seuraava vektorikenttiä koskeva lause on tärkeässä osassa Brouwerin kiintopistelauseen todistuksessa. Määritellään kuitenkin sitä ennen vielä, mitä tässä tutkielmassa tarkoitetaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ suljetun yksikköpallon $\bar{B}^2$ vektorikentällä.

Määritelmä 6.6. Suljetun yksikköpallon $\bar{B}^2$ vektorikenttä on järjestetty pari $(x, v(x))$, missä $x \in \bar{B}^2$ ja v on jatkuva kuvaus $v\colon \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2$. Vektorikenttä on *häviämätön*, jos $v(x) \neq 0$ kaikille $x \in \bar{B}^2$. Tällöin v on kuvaus $v\colon \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

Lause 6.7. *Olkoon $v\colon \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2$ häviämätön vektorikenttä. Tällöin on olemassa yksikköpallon reunan S^1 pisteet x_1 ja x_2, että pisteessä x_1 vektorikenttä v osoittaa suoraan yksikköpallon sisään ja pisteessä x_2 vektorikenttä osoittaa suoraan yksikköpallosta ulos. Toisin sanoen, on olemassa sellaiset reaaliluvut $a < 0$ ja $b > 0$, että $v(x_1) = ax_1$ ja $v(x_2) = bx_2$.*

Todistus. Oletetaan, että vektorikenttä v ei osoita missään pisteessä x_1 suoraan yksikköpallon sisään. Olkoon w kuvauksen $v\colon \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ rajoittuma yksikköpallon reunaan S^1. Koska kuvaus w laajenee kuvaukseksi $v\colon \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, niin Lemman 6.4 nojalla kuvaus w on nollahomotooppinen.
Toisaalta kuvaus w on homotooppinen inkluusiokuvaukselle $j\colon S^1 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Osoitetaan, että kuvausten w ja j väliseksi homotopiaksi käy janahomotopia

$$F\colon S^1 \times I \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},\ F(x,t) = tx + (1-t)w(x)$$

kaikille $x \in S^1$. Itse asiassa esimerkissä 4.8 janahomotopian osoitettiin toteuttavan homotopialta vaadittavat ehdot. Näytetään vielä, että janahomotopialle F todella pätee $F(x,t) \neq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$. Kun $t = 0$, niin $F(x,0) = w(x)$ ja oletuksen nojalla $w(x) \neq 0$ kaikilla $x \in S^1$. Kun $t = 1$, niin $F(x,1) = x \neq 0$ kaikilla $x \in S^1$. Käytetään epäsuoraa päättelyä osoittamaan, että $F(x,t) \neq 0$ kaikilla $t \in]0,1[$: jos olisi $F(x,t) = 0$ jollekin $t \in]0,1[$, niin tällöin $tx + (1-t)w(x) = 0$ ja edelleen $w(x) = -(\frac{t}{1-t})x$. Tämä tarkoittaa sitä, että vektorikenttä w osoittaa suoraan sisäänpäin pisteessä x eli täten myös vektorikenttä v osoittaa suoraan sisäänpäin pisteessä x. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, joten täytyy olla $F(x,t) \neq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$ ja homotopialle F pätee $F\colon S^1 \times I \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
Olemme saaneet, että kuvaus $F\colon S^1 \times I \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ on kuvausten w ja j välinen polkuhomotopia. Koska kuvaukset j ja w ovat homotooppisia ja kuvaus w on nollahomotooppinen, niin inkluusiokuvauksen j täytyy myös olla nollahomotooppinen relaation $\simeq_p$ transitiivisuuden nojalla. Tämä on kuitenkin ristiriidassa Seurauksen 6.5

kanssa. Täten vastaoletus on väärin ja alkuperäinen väite seuraa tästä. Kun halutaan osoittaa, että vektorikenttä v osoittaa suoraan yksikköpallosta ulos jossakin pisteessä x_2, niin sovelletaan juuri edellä todistettua tulosta vektorikenttään $(x, -v(x))$. □

Nyt olemme edenneet tutkielmassa siihen pisteeseen, että voimme todistaa Brouwerin kiintopistelauseen tason suljetussa yksikköpallossa:

Lause 6.8. *Olkoon $f\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ jatkuva funktio. Tällöin on olemassa sellainen suljetun yksikköpallon $\bar{B}^2$ piste x, että $f(x) = x$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: $f(x) \neq x$ jokaiselle pisteelle $x \in \bar{B}^2$. Tällöin määrittelemellä $v(x) := f(x) - x$ saadaan häviämätön vektorikenttä v. Nyt Lauseen 6.7 nojalla vektorikentän v täytyy osoittaa suoraan yksikköpallosta ulos jossakin pisteessä $x \in S^1$. Siis

$$f(x) - x = ax$$

jollekin positiiviselle reaaliluvulle a. Tästä saadaan funktiolle f esitys $f(x) = (1+a)x$ pisteessä x. Edellinen esitys tarkoittaa sitä, että $f(x) = (1 + a)x \notin \bar{B}^2$, eli piste $f(x)$ ei kuuluisi yksikköpalloon $\bar{B}^2$. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärin ja alkuperäinen väite seuraa tästä. □

Oletetaan, että avaruus G on homeomorfinen suljetun yksikköpallon $\bar{B}^2$ kanssa. Brouwerin kiintopistelauseen seurauksena saadaan, että millä tahansa jatkuvalla funktiolla avaruudesta G itseensä, on kiintopiste.

Seuraus 6.9. *Olkoon G topologinen avaruus ja $h\colon \bar{B}^2 \to G$ homeomorfismi. Tällöin jatkuvalla funktiolla $f\colon G \to G$ on kiintopiste.*

Todistus. Koska funktio h on homeomorfismi, niin Määritelmän 3.11 nojalla h on jatkuva sekä h^{-1} on olemassa ja h^{-1} on jatkuva. Tarkastellaan sitten funktiota $h^{-1} \circ f \circ h\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$. Koska funktiot h, h^{-1} ja f ovat jatkuvia, niin funktio $h^{-1} \circ f \circ h$ on näiden yhdistettynä funktiona jatkuva. Tällöin funktiolla $h^{-1} \circ f \circ h\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ on Lauseen 6.8 nojalla kiintopiste, eli on olemassa sellainen $x \in \bar{B}^2$, että

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(x) = x. \tag{6.10}$$

Nyt operoimalla surjektiivisella funktiolla h yhtälön 6.10 molemmilta puolilta, saadaan Lemman 2.4 nojalla $f(h(x)) = h(x)$. Siis funktio f kuvaa pisteen $h(x)$ pisteeksi $h(x)$, eli funktiolla f on kiintopiste. □

Toisaalta, avaruuden G homeomorfisuus koko pallon $\bar{B}^2$ kanssa on välttämätön oletus seurauksessa 6.9, eikä jokaisella jatkuvalla funktiolla $f\colon G \to G$ ole yleisesti kiintopistettä:

Esimerkki 6.11. Tarkastellaan suljettua yksikköpalloa, josta on poistettu origo, eli joukkoa $T = \bar{B}^2 \backslash \{(0,0)\}$ ja funktiota $f\colon T \to T, f(x,y) = (y, -x)$. Funktio f siis kiertää joukkoa T $90°$ myötäpäivään. Vaikka joukko T on yhtenäinen sekä funktio f on jatkuva, niin funktiolla f ei ole kiintopistettä.

7. Muita kiintopistelauseita ja sovelluksia

Brouwerin kiintopistelausetta voidaan pitää kaikista matematiikan historian aikana löydetyistä kiintopistelauseista tärkeimpänä. Brouwer julkaisi kiintopistelauseensa vuonna 1912 seuraavassa muodossa: jokaisella euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetusta yksikköpallosta suljettuun yksikköpalloon jatkuvalla funktiolla on kiintopiste. Tätä ennen Henri Poincaré piti tulosta nimissään ekvivalentissa muodossa. Poincaré todisti vuonna 1886 seuraavan tuloksen: oletetaan, että on olemassa sellaiset vakiot $\alpha > 0$ ja $r > 0$, että funktiolle $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pätee $f(x) + \alpha x \neq 0$, kun $||x|| = r$. Tällöin on olemassa piste x_0, jolle pätee $||x_0|| \leq r$ ja $f(x_0) = x_0$. Nyt tiedetään, että Poincarén väite ja Brouwerin kiintopistelause ovat ekvivalentteja keskenään. [**5**]

Brouwer todisti kiintopistelauseensa vuonna 1912 ja nykyisin lauseelle on eri tilanteita varten erilaisia muotoiluja ja todistuksia. Vuonna 1922 George David Birkhoff ja Oliver Dimon Kellogg todistivat Brouwerin kiintopistelauseen klassisen laskennan ja determinantin avulla tilanteessa, missä tarkasteltava joukko on kompakti ja konveksi. Samana vuonna Stefan Banach $(1892 - 1945)$ esitti täydellisiä metrisiä avaruuksia ja kutistavia kuvauksia koskevan kiintopistelauseensa. Banachin kiintopistelausetta varten määritellään täydellinen metrinen avaruus ja kutistava kuvaus. [**5**],[**7**]

Määritelmä 7.1. Metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee.

Määritelmä 7.2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $k \in [0, 1)$. Kuvaus $f \colon X \to X$ on *kutistava kuvaus*, jos jokaiselle $x, y \in X$ pätee

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Seuraava lause tunnetaan nimellä *Banachin kiintopistelause*:

Lause 7.3. *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $f \colon X \to X$ kutistava kuvaus. Tällöin kuvauksella f on täsmälleen yksi kiintopiste.*

Vuonna 1927 Juliusz Pawel Schauder $(1899 - 1943)$ laajensi Birkhoffin ja Kelloggin todistaman lauseen koskemaan myös metrisiä lineaarisia avaruuksia. Vuonna 1930 Schauder osoitti Banachin avaruuksiin liittyvän kiintopistelauseensa. Schauderin kiintopistelausetta varten määritellään Banachin avaruus. [**5**],[**7**]

Määritelmä 7.4. Täydellinen normiavaruus on *Banachin avarus.*

Seuraava lause tunnetaan nimellä *Schauderin kiintopistelause*:

Lause 7.5. *Olkoon B Banachin avaruus, $K \subset B$ konveksi ja kompakti joukko sekä $f \colon K \to K$ jatkuva. Tällöin funktiolla f on kiintopiste.*

Felix Browderin $(1927 - 2016)$ vuonna 1965 todistamassa kiintopistelausessa määrittelyjoukon K ei tarvitse olla kompakti. Seuraava tulos tunnetaan nimellä *Browderin kiintopistelause.* [**2**]

Lause 7.6. *Olkoon B tasaisesti konveksi Banachin avaruus ja $K \subset B$ suljettu, rajoitettu ja konveksi joukko. Oletetaan lisäksi, että funktiolle $f \colon K \to K$ pätee $||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||$ jokaiselle $x, y \in K$. Tällöin funktiolla f on kiintopiste.*

Banachin kiintopistelauseen todistaminen onnistuu perustiedoilla metrisistä avaruuksista ja Cauchyn jonoista. Schauderin ja Browderin kiintopistelauseiden todistamiseen tarvitaan huomattavasti monimutkaisempia matemaattisia työkaluja. Sen sijaan Brouwerin kiintopistelause reaaliakselilla on suora Bolzanon lauseen seuraus:

LAUSE 7.7. *Olkoon* $f\colon [0,1] \to [0,1]$ *jatkuva funktio. Tällöin funktiolla* f *on kiintopiste.*

TODISTUS. Voidaan olettaa, että $f(0) > 0$ ja $f(1) < 1$. Jos olisi $f(0) = 0$ tai $f(1) = 1$, niin väite seuraisi tästä. Määritellään sitten apufunktio $g\colon [0,1] \to [0,1]$, $g(x) = f(x) - x$. Funktio g on kahden jatkuvan funktion summafunktiona jatkuva ja lisäksi funktiolle g pätee $g(0) = f(0) - 0 > 0$ ja $g(1) = f(1) - 1 < 0$. Täten Bolzanon lauseen nojalla on olemassa sellainen välin $[0,1]$ piste x, että $g(x) = 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että $f(x) - x = 0$ eli $f(x) = x$. □

Kiintopistelauseilla on sovelluksia niin teoreettisen kuin sovelletun matematiikan osa-alueilla. Banachin kiintopistelauseen avulla voidaan todistaa Picardin ja Lindelöfin lause alkuarvotehtävän ratkaisun olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä [**6**]:

LAUSE 7.8. *Olkoon* $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ *Lipschitz-jatkuva vektorikenttä, missä* $U \subset \mathbb{R}^n$ *on avoin. Jokaisella* $a \in \mathbb{R}$ *ja* $b \in U$ *on olemassa sellainen* $\delta > 0$*, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,t) \\ x(a) = b \end{cases}$$

on välillä $]a-\delta, \delta + a[$ *määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.*

Browderin kiintopistelauseella on puolestaan sovelluksia differentiaaliyhtälöiden jaksollisten ratkaisujen tutkimuksessa [**2**]. Kiintopistelauseiden teoria on tärkeää myös dynaamisten systeemien teoriassa, epälineaarisessa analyysissa, lineaarissa epäyhtälöissä sekä approksimaatioteoriassa. Esimerkkejä kiintopistelauseiden teorian sovelluksista sovelletussa matematiikassa ovat matemaattinen mallintaminen sekä talousmatematiikka, kuten peliteoria, tasapaino-ongelmat ja optimointiongelmat. [**1**], [**3**].

Lähdeluettelo

[1] Kim C. Border: *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[2] Haïm Brezis: *Felix Browder (1927 - 2016)*, Notices of the AMS, MAA Press, 65 (2018), no. 11, 1398 - 1411.

[3] Amelia Bucur: *About applications of the fixed point theory*, Scientific Bulletin, University Politehnica of Bucharest, 22 (2017), no. 1, 13 - 17.

[4] James R. Munkres: *Topology*, Second edition, Pearson College division, New York, 2000.

[5] R.P. Pant, A.B. Lohani ja K. Jha: *A history of fixed point theorems*, Ganita Bharati, Printspublications Private Limited, 24 (2002), no. 1-4, 147 - 159.

[6] Jouni Parkkonen: *Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2019.

[7] Eric Schechter: *Handbook of Analysis and Its Foundations*, Academic Press, Cambridge, 1997.

[8] Algebrallinen topologia - Wikipedia artikkeli: `https://fi.wikipedia.org/wiki/Algebrallinen_topologia` (luettu 8.11.2021).

[9] Luitzen Egbertus Jan Brouwer - mathshistory artikkeli `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brouwer/` (luettu 25.11.2021).