Kahden pelaajan stokastiset nollasummapelit ja niiden yhteys p-Laplacen operaattoriin

Kyösti Salonen

1.4.2022

Tiivistelmä: Kyösti Salonen, Kahden pelaajan stokastiset nollasummapelit ja niiden yhteys p-Laplacen operaattoriin (engl. Two-player stochastic zero-sum games and their connection with the p-Laplace operator), matematiikan pro gradu -tutkielma, 33 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2022.

Tämän tutkielman tarkoituksena on näyttää p-Laplacen yhtälön, joka on Laplacen yhtälön epälineaarinen yleistys, yhteys kahden pelaajan stokastisiin nollasummapeleihin. Tutkielmassa käytetty stokastinen nollasummapeli on niin sanottu häiritty köydenvetopeli (tug-of-war with noise), jolle rakennetaan arvofunktiokandidaatti dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen avulla.

Työssä näytetään pelin arvofunktiokandidaatin ratkaisun olemassaolo ja sen yksikäsitteisyys. Lisäksi työssä näytetään martingaalien avulla arvofunktiokandidaatin olevan sama kuin pelin päättymisen odotusarvon minimointi ja maksimointi pelaajien strategioiden mukaisesti. Pelin päättymisen odotusarvon kanssa joudutaan erityisesti varmistamaan, että mitallisten strategioiden valinta on mahdollista.

Lopuksi työssä muodostetaan jono pelien arvofunktioita. Jono rakennetaan kutistamalla pelien askelpituutta kohti 0:aa. Työn päätuloksena osoitetaan, että kyseisen jonon raja-arvo on tällöin viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälöön. Työssä joudutaan käyttämään viskositeettiteoriaa derivoituvuusongelmien takia.

Avainsanat: p-Laplace, stokastiset nollasummapelit, häiritty köydenvetopeli, dynaamisen ohjelmoinnin periaate, viskositeettiratkaisu.

Sisällys

1 Johdanto

Jo klassisesti on tunnettu yhteys satunnaiskävelyn ja Laplacen yhtälön välillä, tai ajasta riippuvassa tapauksessa lämpöyhtälön ja satunnaiskävelyn välillä. Tällä on hyvin tunnettuja sovelluksia esimerkiksi talousteoriaan, jossa Black-Scholesin yhtälöä voidaan hyödyntää optioiden hinnoittelussa.

Klassisesti tunnetaan, että harmoniset funktiot, eli funktiot jotka toteuttavat Laplacen yhtälön

$$\Delta u = 0,$$

toteuttavat keskiarvoperiaatteen

$$u(x) = \fint_{B_\varepsilon(x)} u.$$

Keskiarvoperiaatteen tulkinta satunnaiskävelyn yhteydessä on seuraava. Odotusarvo pisteessä voidaan laskea tarkastelemalla yhtä askelta ja summaamalla naapuriodotusarvot ottamalla huomioon yhden askeleen todennäköisyysmitan.

Keskiarvoperiaate on lineaarinen ominaisuus, ja ei ole ilmeisen selvää, miten se yleistyy epälineaariseen tapaukseen. Niinpä tässä työssä on tarkoitus käsitellä keskiarvoperiaatteen epälineaarinen yleistys

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon \tag{1.1}$$

p-Laplacen yhtälölle

$$\Delta_p u := |\nabla u|^{p-2} \left(\Delta u + (p-2)\Delta_\infty^N u \right) = 0,$$

joka palautuu Laplacen yhtälöksi tapauksessa $p = 2$. Yllä merkintä $\fint_{B_\varepsilon(x)}$ tarkoittaa keskiarvointegraalia ja Δ_∞^N normalisoitua ääretön-Laplacen operaattoria, jotka määritellään tarkemmin myöhemmin. Tämä keskiarvoperiaate ei ole aivan vastaava kuin tavallisen Laplacen yhtälön tapauksessa, sillä u_ε approksimoi p-Laplacen yhtälön ratkaisua u, kun $\varepsilon \to 0$ (lause 5.6). Lisäksi todennäköisyydet α ja β eivät ole mielivaltaisia, vaan ne riippuvat p:stä. Erityisesti työssä näytetään keskiarvoperiaatteen approksimaation yhteys kahden pelaajan stokastisen nollasummapelin arvofunktioon (lauseet 3.1 ja 4.2).

Lauseen 3.1, jossa osoitetaan ratkaisun olemassaolo yhtälölle (1.1), todistus perustuu sopivalla operaattorilla iteroimiseen ja kiintopisteen löytämiseen. Todistuksen vaikeus on yhtälössä esiintyvien sup ja inf käsittely raja-arvon yhteydessä, joten sen avuksi osoitetaan, että suppeneminen on tasaista. Lauseen 4.2, jossa osoitetaan, että pelin arvofunktiot yhtyvät lauseen 3.1 antamaan funktioon, todistuksessa edellisen lauseen funktiota apuna käyttäen arvioidaan pelaajien strategioita. Todistuksessa rakennetaan supermartingaali ja Doobin optionaalisen pysäytyslauseen avulla osoitetaan pelin odotusarvon ja dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen yhteys. Lauseessa joudutaan varmistamaan, että valituilla strategioilla saadaan aikaiseksi Borel-mitallisia funktioita. Työn lopuksi todistetaan lause 5.6. Koska lauseen 5.6 todistuksessa funktion derivoituvuutta ei voida taata, niin esitietoina käsitellään viskositeettiratkaisuja. Todistuksessa hyödynnetään aikaisemmin osoitettua tasaista suppenemista ja integroidaan testifunktion Taylorin-sarjaa.

Ääretönharmonisten funktioiden ja köydenvetopelin yhteys havaittiin ja todistettiin lähteessä [PSSW09]. Häirityn köydenvetopelin yhteys p-Laplacen yhtälöön havaittiin pelin hieman erilaiselle versiolle viitteessä [PS08]. Tässä työssä seurataan papereissa [MPR12, LPS13, LPS14] esitettyjä tuloksia. Erityisesti työssä keskitytään käsittelemään lähteen [MPR12] käyttämää peliä ja keskiarvoperiaatetta.

2 Yleisiä merkintöjä ja esitietoja

Aloitetaan käymällä läpi työssä käytettäviä merkintöjä ja joitakin esitietoja.

1. Merkitään r-säteistä x_0-keskistä avointa palloa merkinnällä
$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

2. Merkitään $a \wedge b := \min\{a, b\}$.

3. *Keskiarvointegraalille* käytetään merkintää
$$\fint_A f := \frac{1}{|A|} \int_A f,$$
jossa $|A|$ tarkoittaa Lebesguen mittaa joukosta A. Lisäksi työssä jätetään yleensä merkitsemättä, minkä suhteen integroidaan, ellei sitä tarvita selkeyttämään tilannetta.

4. *Gradientti* on
$$\nabla f(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T,$$
missä T on vektorin transpoosi.

5. *Laplacen operaattori* on
$$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

6. Olkoon $\nabla f \neq 0$. Tällöin *normalisoitu ääretön-Laplacen operaattori* on
$$\begin{aligned}\Delta_\infty^N f(x) &:= |\nabla f(x)|^{-2} \langle D^2 f(x) \nabla f(x), \nabla f(x) \rangle \\ &= |\nabla f(x)|^{-2} (\nabla f(x))^T D^2 f(x) \nabla f(x) \\ &= |\nabla f(x)|^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} f(x) D_i f(x) D_j f(x).\end{aligned}$$

   Työssä käytetään osittaisderivaatoista molempia merkintöjä sekaisin
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \text{ ja } D_i f(x).$$

7. Olkoon $\nabla f \neq 0$ kuten edellä. Tällöin *p-Laplacen operaattori* on

$$\begin{aligned}\Delta_p f(x) &:= \operatorname{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f)\\ &= |\nabla f(x)|^{p-2}((p-2)\Delta_\infty^N f(x) + \Delta f(x)).\end{aligned}$$

8. *O-notaatiolla* $O(g(x))$ kuvataan funktion asymptoottista käyttäytymistä. Merkintään liittyy aina raja-arvo

$$f(x) = O(g(x)), \quad \text{kun } x \to x_0,$$

mutta se jätetään välillä mainitsematta. Merkintä tarkoittaa, että on olemassa C siten, että

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

kaikille x tarpeeksi lähellä x_0:aa.

9. Funktion u *Taylorin-sarja* O-notaatiota käyttäen on

$$u(y) = u(x)\nabla u(x) \cdot (y-x) + \frac{1}{2}\langle D^2u(x)(y-x),(y-x)\rangle + O(|y-x|^3),$$

kun $y \to x$, jos u on kolmesti derivoituva.

Luvussa 5 täytyy laskea pallointegraaleja, jotka katoavat, joten lasketaan sitä varten pieni aputulos.

Lemma 2.1. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$ Tällöin*

$$\int_{B_\varepsilon(0)} (ax_i + bx_ix_j)\,dx = 0.$$

Todistus. Ajatellaan pallo $B_\varepsilon(0)$ koordinaattien tulojoukkona, jotta päästään hyödyntämään Fubinin lausetta. Järjestetään tulojoukko siten, että seuraavan koordinaatin rajat riippuvat edellisistä, ja että viimeinen koordinaatti vastaa integroitavaa komponenttia x_i. Merkitään

$$S_i := \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} x_k^2.$$

Näin ollen Fubinin lauseen nojalla integraali palautuu 1-ulotteisten integraalien laskemiseksi

$$\int_{B_\varepsilon(0)} (ax_i + bx_ix_j)\mathrm{d}x = \int \cdots \int_{-\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}}^{\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}} (ax_i + bx_ix_j)\ \mathrm{d}x_i \ldots \mathrm{d}x_1$$

ja symmetrian nojalla

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}}^{\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}} (ax_i + bx_ix_j)\ \mathrm{d}x_i &= (a + bx_j)\int_{-\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}}^{\sqrt{\varepsilon^2 - S_i}} x_i\ \mathrm{d}x_i\\ &= 0,\end{aligned}$$

joten näin ollen

$$\int_{B_\varepsilon(0)} (ax_i + bx_ix_j)\mathrm{d}x = 0$$

kaikilla $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$. □

Myös dominoidun konvergenssin lausetta tarvitaan useaan otteeseen, joten käydään se kertauksen vuoksi läpi ilman todistusta.

Lause 2.2 (Dominoidun Konvergenssin lause)**.** *Olkoon* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *jono integroituvia funktioita siten, että raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

on olemassa melkein kaikille $x \in A$. *Olkoon lisäksi* g *integroituva funktio siten, että*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{m.k. } x \in A.$$

Tällöin f *on integroituva ja*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f.$$

Lauseen termi *melkein kaikilla (m.k.)* tarkoittaa, että on mahdollisesti olemassa nollamittainen joukko, jossa kyseinen väite ei päde. Vastaava termi tulee vastaan myös stokastiikassa. Siellä käytetään ilmaisua *melkein varmasti (m.v.)*, joka tarkoittaa käytännössä samaa. Tällöin väitteen rikkova tapahtumien joukko on todennäköisyysmitan suhteen nollamittainen.

Määritelmä 2.3 (Puolijatkuvuus)**.** Funktio $u : \Omega \to (-\infty, \infty]$ on *alhaalta puolijatkuva*, jos joukko $\{x \in \Omega : u(x) > \lambda\}$ on avoin kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$. Toinen ekvivalentti määritelmä on, että funktio $u : \Omega \to (-\infty, \infty]$ on alhaalta puolijatkuva, jos

$$\lim_{r\to 0} \inf_{y\in B_r(x)\setminus\{x\}} u(y) \geq u(x)$$

kaikille $x \in \Omega$.

Vastaavasti funktio $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ on *ylhäältä puolijatkuva*, jos joukko $\{x \in \Omega : u(x) < \lambda\}$ on avoin kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ tai ekvivalentisti

$$\lim_{r\to 0} \sup_{y\in B_r(x)\setminus\{x\}} u(y) \leq u(x)$$

kaikille $x \in \Omega$.

Esimerkki 2.4. Paloittain määritelty funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0 \\ 1 & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

on ylhäältä mutta ei alhaalta puolijatkuva.

Puolijatkuvuutta tullaan käyttämään viskositeettiratkaisun määrittelemisessä. Tarkemmin puolijatkuvuuteen liittyviä tuloksia käsitellään esimerkiksi lähteissä [HKM06, Par15].

2.1 Martingaalit ja Doobin pysäytyslause

Käydään seuraavaksi hyvin pintapuolisesti läpi joitain stokastiikan perusteita, joita tulemme tarvitsemaan köydenvetopelin kanssa. Tarkempien perusteluiden ja tulosten suhteen viitataan lähteeseen [Gei20].

Todennäköisyysavaruutta merkitään

$$(X, \mathcal{F}, \mathbb{P}),$$

jossa X on perusjoukko, $\mathcal{F}$ tapahtuma-avaruus ja $\mathbb{P}$ todennäköisyysmitta. Työssä käytetään satunnaismuuttujia, jotka ovat mitallisia funktioita perusjoukolta X avaruuksille $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{R}^n$. Tyypillinen satunnaismuuttuja tässä työssä on köydenvetopelin sijainti kierroksella k, jota merkitään x_k:lla. Lisäksi työssä käytetään satunnaismuuttujien odotusarvoja. Tarkemmin ne määriteltäisiin integraalina todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ suhteen. Tyypillinen odotusarvon merkintä työssä on

$$\mathbb{E}[F(x_k)] \text{ tai } \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[F(x_k)],$$

missä alaindeksinä olevia strategioita S_{I} ja S_{II} käsitellään yksityiskohtaisemmin myöhemmin pelin määritelmän yhteydessä. Myöskään ehdollista odotusarvoa ei tässä työssä määritellä tarkasti, mutta se löytyy esimerkiksi määritelmästä [Gei20, Definition 4.1.8]. Tässä työssä tyypillinen merkintä sille on

$$\mathbb{E}[F(x_k)|\mathcal{F}_{k-1}] \text{ tai } \mathbb{E}[F(x_k)|(x_0, x_1, \dots x_{k-1})].$$

Heuristisesti tämä tarkoittaa odotusarvoa, kun tiedetään satunnaismuuttujien $(x_0, x_1, \dots x_{k-1})$ sisältämä informaatio. Toista merkintää $\mathbb{E}[F(x_k)|\mathcal{F}_{k-1}]$ käytettäessä tämä sama informaatio on koodattu satunnaismuuttujien $(x_0, x_1, \dots x_{k-1})$ generoimaan σ-algebraan $\mathcal{F}_{k-1}$.

Tavoitteena on todistaa Doobin optionaalisen pysäytyksen lause supermartingaaleille, joista molemmat pohjautuvat filtraation käsitteeseen.

Määritelmä 2.5 (Filtraatio)**.** Olkoon $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. *Filtraatio* $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ on kasvava jono σ-algebroja

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}.$$

Filtraation idea on rajoittaa käytettävissä olevaa informaatiota mallintamalla tapahtuneiden tapahtumien sarjaa. Annetaan seuraavaksi esimerkki ehdollisista odotusarvoista filtraation havainnollistamiseksi.

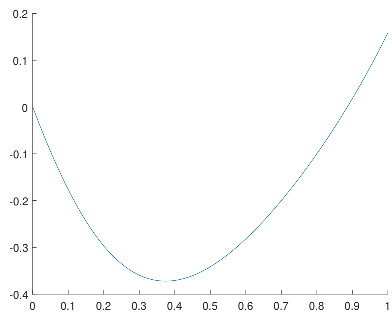
Esimerkki 2.6. Tarkastellaan välillä $[0, 1[$ määriteltyä funktiota

$$f(x) := \sin(2x^2 - 3x) + x$$

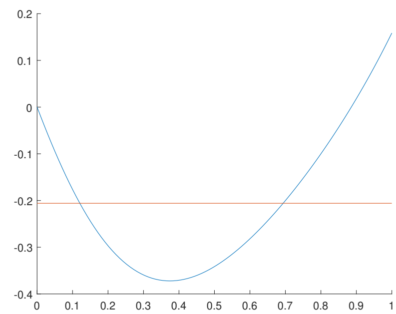
ja sen ehdollisia odotusarvoja. Väliksi on valittu puoliavoin vain kosmeettisista syistä, sillä välien päätepisteillä ei ole väliä integroitaessa.

Suoritetaan eräänlainen puolitushaku funktion kuvaajalle filtraatiota käyttäen. Voidaan ajatella, että satunnaismuuttujana toimii kolikonheitto, jonka tulos kertoo mennäänkö oikeaan vai vasempaan aliväliin. Kolikonheiton tulos on 0 tai 1, jotka peräkkäin asetettuna muodostavat binääriluvun $0, \ldots$ Joka askeleella hakuvälin pituus puolitetaan ja funktion arvoa estimoidaan sen odotusarvolla kyseisellä välillä. Filtraation tihetessä tarkoitus olisi, että funktion ehdollinen odotusarvo lähestyy funktion arvoja.

Kun yhtään jakoa ei ole vielä tehty, tilannetta vastaava σ-algebra $\mathcal{F}_0$ on joukko $\{\emptyset, [0,1[\}$. Tällöin funktion f ehdollinen odotusarvo on pelkkä vakiofunktio.



(a) Funktion kuvaaja



(b) Odotusarvo σ-algebran $\mathcal{F}_0$ suhteen

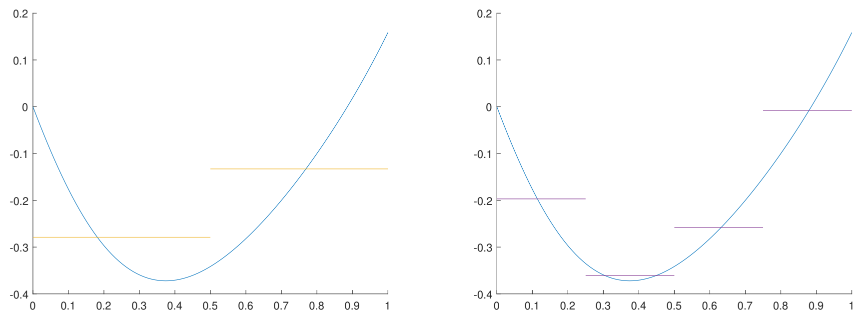
Ensimmäisen jaon jälkeen odotusarvon kuvaaja jakautuu kahdeksi palaseksi, mitä vastaava σ-algebra on

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \emptyset; [0,1[; [0, \frac{1}{2}[; [\frac{1}{2}, 1[\right\}.$$

Toiseen jakoon liittyvä σ-algebra

$$\mathcal{F}_2 = \Big\{ \emptyset; [0,1[; [0, \frac{1}{4}[; [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[; [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[; [\frac{3}{4}, 1[; \\ [0, \frac{1}{2}[; [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[; [\frac{1}{2}, 1[; [0, \frac{1}{4}[\cup [\frac{3}{4}, 1[; \ldots \Big\}$$

on jo huomattavasti suurempi, ja funktion ehdollinen odotusarvo alkaa mukailla funktion muotoa.



(a) Odotusarvo σ-algebran $\mathcal{F}_1$ suhteen (b) Odotusarvo σ-algebran $\mathcal{F}_2$ suhteen

Ehdollinen odotusarvo filtraation suhteen on siis heuristisesti paras arvaus funktion arvosta, kun tiedetään, että ollaan saatu tietty kolikonheittojen sarja, eikä se erota väleillä olevia funktion arvoja toisistaan.

Niin kuin esimerkissä 2.6 huomattiin, niin σ-algebrojen varsinainen auki kirjoittaminen on turhan työlästä. Tämän takia olisi olemassa *funktiojoukon generoima luonnollinen σ-algebra*. Koska filtraation tarkoitus on kuitenkin vain mallintaa tiedossa olevien tapahtumien historiaa, niin yksinkertaistamme merkintöjä käyttämällä köydenvetopelissä luvussa 4 vain viimeisintä pelinappulan paikkaa, sillä osoittautuu, että sitä edeltävällä pelihistorialla ei ole vaikutusta peliin.

Määritellään seuraavaksi toinen tärkeä apuväline reilun pelin käsittelemisessä. Määritelmässä merkintä $M_n \in \mathcal{L}_1(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tarkoittaa käytännössä, että satunnaismuuttuja M_n on integroituva todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ suhteen. Tarkempi määritelmä sille löytyy kohdasta [Gei20, Definition 4.1.1].

Määritelmä 2.7 (Martingaali)**.** Jono satunnaismuuttujia $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$, $M_n \in \mathcal{L}_1(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on *martingaali* filtraation $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ suhteen, jos $\forall n \in \mathbb{N}$ pätee, että

1. M_n on $\mathcal{F}_n$-mitallinen
2. $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$
3. $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$ melkein varmasti.

M on *submartingaali*, jos kohdassa 3 pätee epäyhtälö

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq M_n$$

ja vastaavasti *supermartingaali*, jos

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq M_n.$$

Eli martingaali on jono satunnaismuuttujia, jossa jonon seuraavan alkion ehdollinen odotusarvo on sama kuin jonon sen hetkinen alkio riippumatta aikaisemmista arvoista.

Määritelmä 2.8 (Pysäytyshetki)**.** Kuvaus $T : X \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ on *pysäytyshetki*, jos

$$\{T = n\} := \{x \in X : T(x) = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pysäytyshetki on *melkein varmasti äärellinen*, jos $P(\{T = \infty\}) = 0$, eli kuvaus saa arvokseen ∞ vain nollamittaisessa joukossa.

Tässä työssä tyypillinen pysäytyshetki T on poistumiskierros alueesta Ω. Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että jos peliä ei voi jatkaa mielivaltaisen pitkään, niin pysäytyshetkeä vastaavaan pelin lopputulokseen ei voi vaikuttaa, mikäli tapahtumaketju on martingaalien mielessä reilu. Lauseen todistuksessa mukaillaan lähteen [LaL13] lähes vastaavaa todistusta.

Lause 2.9 (Doobin optionaalisen pysäytyksen lause)**.** *Olkoon $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ filtraatio todennäköisyysavaruudessa $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja olkoon $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ martingaali filtraation $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ suhteen siten, että M_n on tasaisesti rajoitettu kaikilla n. Olkoon lisäksi T pysäytyshetki siten, että T on melkein varmasti äärellinen. Tällöin M_T on integroituva ja*

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0).$$

Jos M on supermartingaali, niin

$$\mathbb{E}(M_T) \leq \mathbb{E}(M_0).$$

Jos vastaavasti M on submartingaali, niin

$$\mathbb{E}(M_T) \geq \mathbb{E}(M_0).$$

Todistus. Koska pysäytyshetki T on melkein varmasti äärellinen, niin M_T on melkein kaikkialla määritelty. Lisäksi koska T on melkein varmasti äärellinen, niin $T \wedge n \to T$ melkein kaikkialla, kun $n \to \infty$. Näin ollen $M_{T\wedge n} \to M_T$ melkein kaikkialla.

Selvästi määritelmän nojalla $M_{T\wedge n}$ on integroituva ja martingaalien ominaisuuksiin kuuluu $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$. Tälle löytyy tarkempi perustelu lähteestä [Gei20, Proposition 4.3.1].

Koska M_n on oletuksen nojalla tasaisesti rajoitettu, niin on olemassa $K \in \mathbb{R}$ siten, että $|M_{T\wedge n}| < K$. Näin ollen dominoidun konvergenssin lauseen nojalla M_T on integroituva ja

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_T).$$

Ja koska $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$ kaikilla n, niin $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$.

Jos taas M on supermartingaali, niin päättely eroaa siinä, että $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) \leq \mathbb{E}(M_0)$. Tällöin

$$\mathbb{E}(M_0) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_T).$$

Submartingaalin tapauksessa päättely on aivan vastaava, mutta epäyhtälön suunta vain muuttuu. $\square$

3 Dynaamisen ohjelmoinnin periaate

Tässä luvussa on tarkoitus osoittaa, että yhtälöllä

$$u(x) = \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u \tag{DOP}$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu. Todistus seuraa ja tarkentaa vastaavaa todistusta lähteessä [LPS14].

Koska yhtälössä (DOP) tarkastellaan ε-säteisiä palloja, on määrittelyjoukkoa Ω laajennettava ε:n levyisen kaistaleen verran, jotta yhtälö olisin hyvin määritelty myös Ω:n reunalla. Joten olkoon $\varepsilon > 0, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue ja $\alpha, \beta > 0$ siten, että $\alpha + \beta = 1$. Määritellään Ω:n ε-levyinen reunakaistale

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega : \operatorname{dist}(x, \omega) \leq \varepsilon\}$$

ja merkitään $\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup \Omega$. Kutsutaan funktion u arvoja joukossa Γ_ε funktion u *reuna-arvoiksi.*

Olkoon $\mathcal{F}_\varepsilon$ joukko ei-negatiivisia Borel-mitallisia rajoitettuja funktioita, jotka on määritelty $\Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$. Määritellään lisäksi operaattori $T : \mathcal{F}_\varepsilon \to \mathcal{F}_\varepsilon$,

$$Tu(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u & \text{kun } x \in \Omega \\ u(x) & \text{kun } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.1}$$

Tarkoitus on rakentaa T:n avulla rekursiivisesti ratkaisu yhtälölle (DOP).

Varmistetaan vielä, että T on hyvin määritelty. Funktio Tu on selvästi ei-negatiivinen, rajoitettu ja määritelty edelleen Ω_ε:ssa, joten jotta $Tu \in \mathcal{F}_\varepsilon$ kaikilla $u \in \mathcal{F}_\varepsilon$ täytyy osoittaa, että Tu on Borel-mitallinen. Sitä varten riittää osoittaa, että kaikille Borel-funktioille v joukossa Ω_ε funktiot

$$\sup_{y \in B_\varepsilon(x)} v(y) \quad \text{ja} \quad \inf_{y \in B_\varepsilon(x)} v(y), \quad x \in \Omega$$

ovat Borel-mitallisia joukossa Ω. Tämä seuraa suoraan siitä, että kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ joukko

$$\left\{ x \in \Omega : \sup_{B_\varepsilon(x)} v > \lambda \right\} = \Omega \cap \left(\bigcup_{y \in \Omega_\varepsilon : v(y) > \lambda} B_\varepsilon(y) \right)$$

on avoin.

Osoitetaan seuraavaksi, että operaattorilla T iteroimalla saadaan luotua sopiva funktio u, joka toteuttaa (DOP):n halutuilla reuna-arvoilla.

Lause 3.1. *Olkoon $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borel-funktio. Tällöin on olemassa rajoitettu Borel-funktio $u : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa yhtälön* (DOP) *ja jolle $u\big|_{\Gamma_\varepsilon} = F$.*

Todistus. Olkoon $u_{j+1} = Tu_j$ kaikilla $j = 0, 1, 2, \ldots$ ja

$$u_0(x) = \begin{cases} \inf_{y \in \Gamma_\varepsilon} F & \text{kun } x \in \Omega \\ F(x) & \text{kun } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Osoitetaan induktiolla, että näin määriteltynä jono u_j on kasvava. Nyt $u_1(x) = u_0(x)$, kun $x \in \Gamma_\varepsilon$, ja

$$\begin{aligned}u_1(x) &= \frac{\alpha}{2}(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_0 + \inf_{B_\varepsilon(x)} u_0) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_0 \\ &\geq \frac{\alpha}{2}(\inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F + \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F \\ &= \alpha \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F + \beta \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F \\ &= \inf_{y\in\Gamma_\varepsilon} F = u_0(x),\end{aligned}$$

kun $x \in \Omega$. Eli $u_1(x) \geq u_0(x)$ kaikilla $x \in \Omega_\varepsilon$.

Oletetaan sitten, että $u_{j+1} \geq u_j$ jollain j. Tällöin

$$\begin{aligned}u_{j+2} &= Tu_{j+1} \\ &= \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_{j+1} + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_{j+1} + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_{j+1} \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_j + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_j + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_j \\ &= u_{j+1},\end{aligned}$$

joten induktioperiaatteen nojalla $u_{j+1} \geq u_j$ kaikilla $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Operaattorilla T iteroimalla saadaan siis kasvava jono funktioita u_j, joita rajoittaa ylhäältä $sup_{y\in\Gamma_\varepsilon} F < \infty$. Näin ollen voidaan määritellä u pisteittäisenä raja-arvona

$$u(x) := \lim_{j\to\infty} u_j(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Osoitetaan, että suppeneminen on tasaista tekemällä vastaoletus. Jos $u_j \to u$ ei suppene tasaisesti, niin pätee

$$M := \lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\Omega_\varepsilon} (u - u_j)(x) > 0. \tag{3.2}$$

Olkoon $\delta > 0$ ja valitaan $k \geq 1$ tarpeeksi suuri, että joukossa Ω_ε

$$u - u_k \leq M + \delta, \tag{3.3}$$

ja että

$$\sup_{x\in\Omega} \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u - u_k)(y)\mathrm{d}y \leq \delta. \tag{3.4}$$

Kohdan (3.4) valinta voidaan tehdä, koska funktiot u_j ovat vakiolla ylhäältä rajoitettuja, ja siten dominoidun konvergenssin lausetta soveltaen pätee, että

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} (u - u_k) \to 0 \quad \text{kaikilla } x \in \Omega.$$

Nyt (3.2):n nojalla voidaan valita $x_0 \in \Omega$ siten, että $u(x_0) - u_{k+1}(x_0) \geq M - \delta$. Valitaan vielä tarpeeksi suuri $l > k$ siten, että $u(x_0) - u_{l+1}(x_0) < \delta$. Tästä seuraa, että

$$u_{l+1}(x_0) - u_{k+1}(x_0) \geq M - 2\delta. \tag{3.5}$$

Lisäksi tiedetään, että mielivaltaiselle joukolle A pätee

$$\sup_A u_l - \sup_A u_k \leq \sup_A (u_l - u_k). \tag{3.6}$$

Vastaava pätee myös, kun yhtälön vasemman puolen supremum korvataan infimumilla. Joten funktiojonon u_j määritelmän ja monotonisuuden nojalla yhdessä epäyhtälöiden (3.2)-(3.6) kanssa saadaan, että

$$\begin{aligned}
M - 2\delta &\leq u_{l+1}(x_0) - u_{k+1}(x_0) \\
&= \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x_0)} u_l + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x_0)} u_l + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} u_l \\
&\quad - \left(\frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x_0)} u_k + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x_0)} u_k + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} u_k \right) \\
&\leq \alpha \sup_{B_\varepsilon(x_0)} (u_l - u_k) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} (u_l - u_k) \\
&\leq \alpha \sup_{B_\varepsilon(x_0)} (u_l - u_k) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} (u - u_k) \\
&\leq \alpha(M + \delta) + \delta.
\end{aligned}$$

Jos epäyhtälön järjestää uuteen muotoon

$$(1 - \alpha)M \leq (\alpha + 3)\delta,$$

niin huomaa, että se johtaa ristiriitaan, mikäli δ valitaan tarpeeksi pieneksi, koska $\alpha < 1$.

Nyt koska $u_j \to u$ suppenee tasaisesti, niin mielivaltaiselle $\varepsilon_0 > 0$ voidaan valita k siten, että $|u(x) - u_j(x)| \leq \varepsilon_0$ kaikilla $j \geq k$ ja $x \in \Omega_\varepsilon$. Tällöin yhtälön (3.6) nojalla

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sup_{B_\varepsilon(x)} u - \sup_{B_\varepsilon(x)} u_j \\
&\leq \sup_{B_\varepsilon(x)} (u - u_j) \\
&\leq \sup_{B_\varepsilon(x)} \varepsilon_0 \\
&\leq \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Eli saadaan, että

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_j = \sup_{B_\varepsilon(x)} u.$$

Koska yhtälöä (3.6) vastaava väite pätee myös infimumille, niin soveltamalla samaa päättelyä saadaan, että

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_j = \inf_{B_\varepsilon(x)} u.$$

Näin ollen kaikille $x \in \Omega$ pätee

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{j\to\infty} u_{j+1}(x) \\ &= \lim_{j\to\infty} Tu_j(x) \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u_j(x) + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u_j(x) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_j(y)\mathrm{d}y \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u(x) + \frac{\alpha}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u(x) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Tasaisen suppenemisen nojalla raja-arvo u siis toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen ja sillä on oikeat reuna-arvot konstruktiosta johtuen. □

Eli yhtälöllä (DOP) on olemassa ratkaisu. Seuraava lause takaa, että annetuilla reuna-arvoilla ratkaisu on myös yksikäsitteinen.

Lause 3.2. *Olkoon u ja u' ratkaisuja yhtälöön* (DOP) *reuna-arvoilla g ja g' joukossa Γ_ε. Tällöin*

$$\sup_{x\in\Omega} |u' - u|(x) \le \sup_{x\in\Gamma_\varepsilon} |g' - g|(x).$$

Todistus. Riittää osoittaa, että

$$M := \sup_{x\in\Omega}(u' - u)(x) \le \sup_{x\in\Gamma_\varepsilon} (g' - g)(x) =: m,$$

koska loppu tuloksesta voidaan osoittaa täysin vastaavalla päättelyllä.

Oletetaan, että väite ei päde, eli $M > m$. Joten koska u ja u' toteuttavat (DOP):n, niin hyödyntämällä epäyhtälöä (3.6) saadaan, että kaikille $x \in \Omega$ pätee

$$\begin{aligned} u'(x) - u(x) &= \frac{\alpha}{2}\big(\sup_{B_\varepsilon(x)} u' - \sup_{B_\varepsilon(x)} u\big) + \frac{\alpha}{2}\big(\inf_{B_\varepsilon(x)} u' - \inf_{B_\varepsilon(x)} u\big) \\ &\qquad + \beta\Big(\fint_{B_\varepsilon(x)} u' - \fint_{B_\varepsilon(x)} u\Big) \\ &\le \alpha \sup_{y\in B_\varepsilon(x)} (u' - u)(y) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y \\ &\le \alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Tarkastellaan seuraavaksi joukkoa

$$G := \{x \in \Omega_\varepsilon : u'(x) - u(x) = M\}.$$

Vastaoletuksen nojalla $G \subset \Omega$. Osoitetaan ensin, että G on epätyhjä. Valitaan jono $x_k \in \Omega$ siten, että $(u' - u)(x_k) \to M$, kun $k \to \infty$ ja $x_k \to x_0 \in \overline{\Omega}$.

Koska

$$\fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y = \fint_\Omega \chi_{B_\varepsilon(x_k)}(y)(u' - u)(y)\mathrm{d}y$$

ja

$$|\chi_{B_\varepsilon(x_k)}(y)(u' - u)(y)| \le \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |u' - u| \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots,$$

missä χ on karakteristinen funktio

$$\chi_{B_\varepsilon(x_k)}(x) := \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in B_\varepsilon(x_k) \\ 0 & \text{kun } x \notin B_\varepsilon(x_k), \end{cases}$$

niin dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y &= \lim_{k \to \infty} \fint_\Omega \chi_{B_\varepsilon(x_k)}(y)(u' - u)(y)\mathrm{d}y \\ &= \fint_\Omega \lim_{k \to \infty} \chi_{B_\varepsilon(x_k)}(y)(u' - u)(y)\mathrm{d}y \\ &= \fint_\Omega \chi_{B_\varepsilon(x_0)}(y)(u' - u)(y)\mathrm{d}y \\ &= \fint_{B_\varepsilon(x_0)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Koska lisäksi kaikilla $x \in \Omega$ pätee M:n määritelmän takia

$$\begin{aligned} \alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y &\le \alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} M \\ &= \alpha M + \beta M = M, \end{aligned}$$

niin yhtälön (3.7) nojalla erityisesti kaikille x_k pätee, että

$$(u' - u)(x_k) \le \alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y \le M.$$

Koska jono x_k oli valittu siten, että

$$\lim_{k \to \infty} (u' - u)(x_k) = M,$$

niin suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{k \to \infty} \left(\alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y \right) = M,$$

josta seuraa, että

$$\lim_{k \to \infty} \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y = M,$$

koska $\alpha + \beta = 1$. Näin ollen

$$\fint_{B_\varepsilon(x_0)} (u' - u)(y)\mathrm{d}y = M.$$

Koska $u' - u \leq M$ pallossa $B_\varepsilon(x_0) \in \Omega_\varepsilon$ M:n määritelmän nojalla, niin saadaan että $u' - u = M$ melkein kaikkialla $B_\varepsilon(x_0)$:ssa ja siten $|B_\varepsilon(x_0) \backslash G| = 0$. Eli erityisesti $G \neq \emptyset$.

Nyt vastaavalla päättelyllä G:llä on ominaisuus:

$$\text{Jos } x \in G, \text{ niin } |B_\varepsilon(x) \backslash G| = 0. \tag{3.8}$$

Ominaisuus (3.8) johtaa kuitenkin ristiriitaan. Olkoon e_1 ensimmäinen kantavektori. Jos $x \in G$, niin (3.8):n nojalla $G \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x + \frac{\varepsilon}{2} e_1) \neq \emptyset$. Näin löydetään helposti uusi alkio G:stä, jonka ensimmäinen koordinaatti on suurempi kuin x:n. Erityisesti voidaan valita sellainen jono alkioita, joiden ensimmäiset koordinaatit lähetyvät ääretöntä, mikä on ristiriita, sillä $G \subset \Omega$ ja Ω on rajoitettu. ☐

Lauseen 3.2 seuraus osoittaa, että iterointiprosessin tuottama funktio ei riipu lähtöarvon u_0 valinnasta.

Seuraus 3.2.1. *Olkoon $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ ja $u_0 : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ rajoitettuja Borel-funktioita siten, että $u_0\big|_{\Gamma_\varepsilon} = F$. Olkoon lisäksi funktiot u_j määritelty kuten lauseessa 3.1. Tällöin jono u_j suppenee tasaisesti yksikäsitteiseen funktioon u, joka on yhtälön* (DOP) *ratkaisu reuna-arvoilla F.*

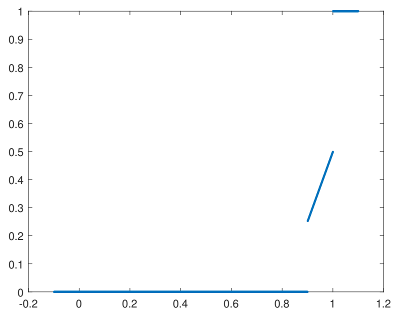
Todistus. Oletetaan, että on olemassa funktio C joukossa Γ_ε, jolle $|F| \leq C$. Tällöin lauseen 3.1 todistus pysyy samana, jos valitaan iteroinnin aloituspisteeksi joko $u_0' = -C$ tai $u_0'' = C$. Ainut ero näiden välillä on, että funktioon u_0'' liittyvä jono u_j'' on vähenevä. Mutta koska operaattori T on järjestyksen säilyttävä, niin $u_j' \leq u_j \leq u_j''$. Lauseen 3.2 nojalla ne kaikki suppenevat kuitenkin samaan funktioon. ☐

Havainnollistetaan seuraavaksi iterointiprosessia.

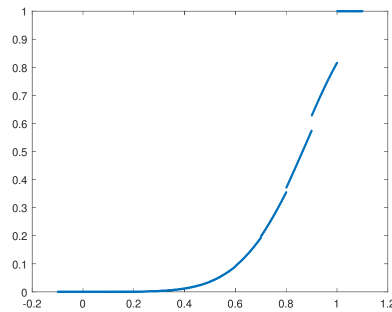
Esimerkki 3.3. Olkoon $\Omega =]0, 1[$, $\varepsilon = 0,1$ ja reuna-arvofunktio $F : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x \leq 0 \\ 1 & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

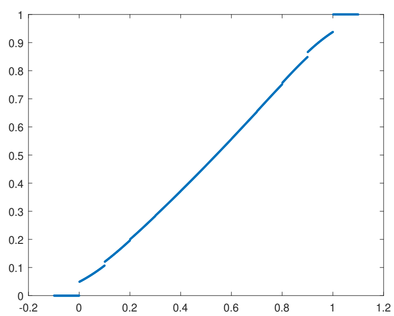
Määritellään aluksi funktio u reuna-alueen arvojen minimiksi ja lähdetään iteroimaan operaattorilla T, joka määriteltiin kaavassa (3.1). Kuvista näkyy kuinka u alkaa nousemaan ja 100-1000 iteroinnin kohdalla funktion kuvaajan muoto ei juuri enää muutu. Funktion kuvaaja jää katkonaiseksi käytetystä askeleesta ε johtuen. Jos tilannetta ajattelee pelimäisesti, niin on huomattavasti parempi olla alle ε päässä reunasta kuin yli. Tilanne on luonnostaan diskreettinen.



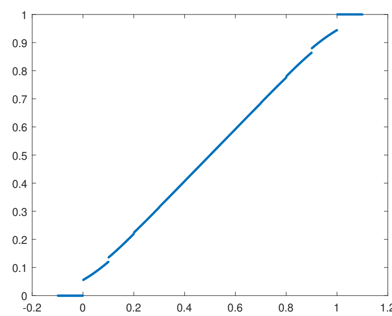
(a) 1 iteraatio



(b) 10 iteraatiota



(c) 100 iteraatiota



(d) 1000 iteraatiota

Kuva 3: Operaattorilla T iteroimalla muodostuva kuvaaja

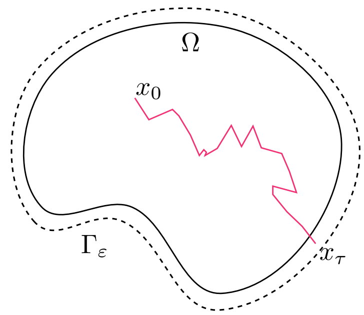
Seuraavassa luvussa käymme kahden pelaajan stokastisen köydenvetopelin määrittelyä tarkemmin läpi. Viidennessä luvussa taas tarkastelemme, mitä tapahtuu, kun askeleen ε pituutta lähdetään kutistamaan kohti 0.

4 Köydenvetopeli

Tässä luvussa tarkastellaan kahden pelaajan stokastista nollasummapeliä ja tarkoituksena on osoittaa, että pelin arvofunktio itse asiassa onkin ratkaisu yhtälöön (DOP). Todistuksissa seurataan paperissa [LPS14] osoitettuja tuloksia.

Pelin ideana on, että kaksi pelaajaa pelaa eräänlaista yleistettyä köydenvetopeliä, jossa pelinappulan paikkaa häiritään satunnaisesti. Pelialueena toimii rajoitettu avoin ja yhtenäinen joukko Ω ja pelin aloituspiste on $x_0 \in \Omega$. Pelissä heitetään kahdenlaista kolikkoa. Toinen kolikoista on painotettu todennäköisyyksille α ja β ja toinen kolikoista on rehellinen.

Jokaisen vuoron alussa heitetään ensin painotettua kolikkoa, joka määrää siirtävätkö pelaajat pelinappulaa vai siirtyykö se satunnaisesti. Todennäköisyydellä β pelinappula siirretään satunnaiseen paikkaan $x_{i+1} \in B_\varepsilon(x_i)$ tasaisen todennäköisyysjakauman mukaan. Nappulan uusi paikka arvotaan tasaisesti joukosta $B_\varepsilon(x_i)$, jonka jälkeen vuoro päättyy. Todennäköisyydellä α taas pelaajat heittävät rehtiä kolikkoa selvittääkseen kumpi nappulaa saa siirtää. Myös pelaajat joutuvat valitsemaan siirtonsa avoimesta pallosta $B_\varepsilon(x_i)$ haluamansa strategian perusteella.



Kuva 4: Esimerkki pelin kulusta

Peli päättyy, kun pelinappula poistuu alueesta Ω, ja pelin päätyttyä pelaaja II maksaa pelaajalle I summan, joka riippuu siitä, mihin pelinappula päätyi. Eli jos x_τ on ensimmäinen piste alueen Ω ulkopuolella ja $F : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ pelissä sovittu maksufunktio, niin pelaajan II pelin päätyttyä maksettava summa on silloin $F(x_\tau)$.

Tällainen maksufunktion määritelmä on mielekäs, koska pelialue Ω on rajoitettu ja satunnaisen siirron todennäköisyys $\beta > 0$. Näin ollen voidaan valita tarpeeksi suuri $N_0 \in \mathbb{N}$ siten, että N_0 askeleen satunnaiskävely ε-mittaisia siirtoja päätyy pelialueen ulkopuolelle jollain positiivisella todennököisyydellä $p > 0$. Ja koska peli sisältää melkein varmasti äärettömän monta tällaista kävelyä, niin peli päättyy melkein varmasti strategoista riippumatta. Todistus tälle sivuutetaan, mutta se löytyy lemmasta [Har16, Lemma 3.1].

4.1 Mitallisen strategian olemassaolo

Koska pelaajat joutuvat valitsemaan pelin seuraavan pisteen avoimesta pallosta, niin heidän täytyy pystyä valitsemaan piste mahdollisimman läheltä funktion supremumia tai infimumia. Seuraavan lauseen todistuksessa joudumme integroimaan näitä strategioita, joten on tärkeää, että ne ovat Borel-mitallisia. Lusinin mitallisen valinnan lausetta hyödyntäen osoittautuu onneksi niin, että tällaiset strategiat on mahdollista rakentaa.

Lemma 4.1. *Olkoon $u : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borel-funktio ja $\delta > 0$. Tällöin on olemassa rajoitetut Borel-funktiot $S_{sup}, S_{inf} : \Omega \to \Omega_\varepsilon$ siten, että $S_{sup}(x) \in B_\varepsilon(x)$, $S_{inf}(x) \in B_\varepsilon(x)$ ja*

$$u(S_{sup}(x)) \geq \sup_{B_\varepsilon(x)} u - \delta \qquad u(S_{inf}(x)) \leq \inf_{B_\varepsilon(x)} u + \delta$$

kaikille $x \in \Omega$.

Todistus. Riittää osoittaa väite funktiolle $S_{\sup}$, sillä toinen osa väitteestä seuraavaa vastaavalla argumentilla.

Merkitään $\mathcal{B}$:llä numeroituvaa kokoelmaa palloja $B \subset \Omega_\varepsilon$, joiden säde ja keskipisteen koordinaatit ovat rationaalisia. Jokaiselle $B \in \mathcal{B}$ valitaan piste $x_B \in B$ siten, että

$$u(x_B) \geq \sup_B u - \frac{\delta}{2}.$$

Merkitään näin valittujen pisteiden kokoelmaa $S := \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$. Koska $\mathcal{B}$ on numeroituva, niin myös S on numeroituva.

Koska mielivaltainen avoin pallo $B_r(x) \subset \Omega_\varepsilon$ voidaan kirjoittaa yhdisteenä $\mathcal{B}$:n palloista, niin jokaiselle $x \in \Omega$

$$\sup_{B_\varepsilon(x)} u \leq \sup_{S \cap B_\varepsilon(x)} u + \frac{\delta}{2}.$$

Funktio $S_{\sup}$ saadaan siten soveltamalla Lusinin lausetta, joka on muotoiltu ja todistettu esimerkiksi lauseessa [Sri98, Theorem 5.8.11], Borel-joukkoon

$$\Big\{(x, y) \in \Omega \times \Omega_\varepsilon : |x - y| < \varepsilon \text{ ja } \sup_{B_\varepsilon(x)} u < u(y) - \delta\Big\} \cap (\mathbb{R}^n \times S). \qquad \square$$

4.2 Arvofunktioiden yksikäsitteisyys

Pelaajan I strategia on Borel-mitallinen funktio, joka pelin tämän hetkisen tilan perusteella antaa seuraavan siirron. Eli esimerkiksi, jos kyseessä on pelaajan I vuoro ja peliä on pelattu jo k vuoroa siirroilla $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, niin pelaajan I seuraava siirto määräytyy strategian S_{I} mukaan

$$S_{\mathrm{I}}(x_0, x_1, \ldots, x_k) = x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k).$$

Vastaavasti S_{II} on pelaajan II strategia.

Strategioissa voisi ottaa huomioon pelin aiemmat tilat tai jopa pelin aikana tapahtuneet kolikonheitot. Osoittautuu kuitenkin, että nämä eivät tuo mitään uutta pelaajien strategioihin [LPS14, Corollary 3.3]. Käytetään siksi startegioista merkintää

$$S_{\mathrm{I}}(x_k) = x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k),$$

jossa pelin seuraavan siirron ajatellaan riippuvan vain tämän hetkisestä pelinappulan paikasta.

Koska pelaajien tavoite on maksimoida ja minimoida pelin päättyessä maksettava summa, on luonnollista valita pelin arvofunktioksi pelaajalle I

$$u_{\mathrm{I}}^\varepsilon(x_0) = \sup_{S_{\mathrm{I}}} \inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}^{x_0}[F(x_\tau)]$$

ja pelaajalle II

$$u_{\mathrm{II}}^\varepsilon(x_0) = \inf_{S_{\mathrm{II}}} \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}^{x_0}[F(x_\tau)],$$

missä $\mathbb{E}^{x_0}_{S_\mathrm{I},S_\mathrm{II}}[F(x_\tau)]$ on pelin lopun odotusarvo, joka lasketaan kaikkien mahdollisten polkujen yli. Odotusarvossa käytetty todennäköisyysmitta rakentuu viitteen [MPR12, s. 6-7] mukaisesti yhden askeleen todennköisyysmitoista.

Seuraavaksi huomaamme, että näin määritellyt arvofunktiot itse asiassa johtavat samaan kuin (DOP):n ratkaiseminen.

Lause 4.2. *Olkoon u^ε_I ja u^ε_{II} pelaajien I ja II arvofunktiot, kuten edellä määriteltiin, ja u (DOP):n ratkaisu. Tällöin*

$$u = u^\varepsilon_I = u^\varepsilon_{II}.$$

Erityisesti pelin arvofunktio on Borel ja se on määritelty koko joukossa Ω.

Todistus. Koska

$$\inf_{S_\mathrm{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_\mathrm{I},S_\mathrm{II}}[F(x_\tau)] \leq \mathbb{E}^{x_0}_{S_\mathrm{I},S_\mathrm{II}}[F(x_\tau)] \leq \sup_{S_\mathrm{I}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_\mathrm{I},S_\mathrm{II}}[F(x_\tau)],$$

niin

$$\sup_{S_\mathrm{I}} \inf_{S_\mathrm{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_\mathrm{I},S_\mathrm{II}}[F(x_\tau)] \leq \sup_{S_\mathrm{I}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_\mathrm{I},S_\mathrm{II}}[F(x_\tau)].$$

Ja vastaavasti

$$\sup_{S_\mathrm{I}} \inf_{S_\mathrm{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_\mathrm{I},S_\mathrm{II}}[F(x_\tau)] \leq \inf_{S_\mathrm{II}} \sup_{S_\mathrm{I}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_\mathrm{I},S_\mathrm{II}}[F(x_\tau)].$$

Joten näin ollen

$$u^\varepsilon_\mathrm{I} \leq u^\varepsilon_\mathrm{II}.$$

Riittää siis osoittaa, että

$$u^\varepsilon_\mathrm{II} \leq u, \tag{4.1}$$

sillä vastaavan argumentin nojalla $u^\varepsilon_\mathrm{I} \geq u$.

Valitaan pelaajan II strategia S^0_II siten, että pisteessä $x_{k-1} \in \Omega$ pelaaja siirtää pelinappulan pisteeseen, joka melkein minimoi u:n pallossa $B_\varepsilon(x_{k-1})$. Eli jos kiinnitetään $\eta > 0$, niin $S^0_\mathrm{II}(x_{k-1}) = x_k$ siten, että

$$u(x_k) \leq \inf_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u + \eta 2^{-k}. \tag{4.2}$$

Lemman 4.1 nojalla näin rakennettu strategia voidaan valita Borel-mitalliseksi.

Valitaan seuraavaksi pelaajalle I mielivaltainen strategia S_I. Tällöin kun peli on pisteessä x_{k-1}, niin pelin määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S_\mathrm{I},S^0_\mathrm{II}}\left[u(x_k) + \eta 2^{-k} | x_{k-1}\right] \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(u(S^0_\mathrm{II}(x_{k-1})) + u(S_\mathrm{I}(x_{k-1}))\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u\mathrm{d}y + \eta 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Joten jos käytetään epäyhtälöä (4.2) ja arvioidaan pelaajan I strategiaa ylöspäin pelkällä supremumilla, niin saadaan, että

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}\left(u(S^0_{\mathrm{II}}(x_{k-1}))+u(S_{\mathrm{I}}(x_{k-1}))\right)+\beta \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u\mathrm{d}y+\eta 2^{-k} \\
&\leq \frac{\alpha}{2}\left(\inf_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u+\eta 2^{-k}+\sup_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u\right)+\beta \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u\mathrm{d}y+\eta 2^{-k}.
\end{aligned}
$$

Koska u toteuttaa yhtälön (DOP), niin itseasiassa

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}\left(\inf_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u+\eta 2^{-k}+\sup_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u\right)+\beta \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u\mathrm{d}y+\eta 2^{-k} \\
&= u(x_{k-1})+\eta 2^{-k}(1+\frac{\alpha}{2}) \\
&\leq u(x_{k-1})+\eta 2^{-(k-1)}.
\end{aligned}
$$

Eli yhdessä näistä seuraa, että

$$
\mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S^0_{\mathrm{II}}}\left[u(x_k)+\eta 2^{-k}|x_{k-1}\right] \leq u(x_{k-1})+\eta 2^{-(k-1)}.
$$

Näin ollen riippumatta strategiasta S_{I} prosessi $M_k = u(x_k)+\eta 2^{-k}$ on supermartingaali. Lisäksi koska u on rajoitettu, niin tällöin myös M_k on rajoitettu.

Koska peli loppuu melkein varmasti, niin pysäytyhetki τ on tällöin m.v. äärellinen, ja koska $F(x_\tau)=u(x_\tau)$, niin $M_\tau = F(x_\tau)+\eta 2^{-\tau}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
u^\varepsilon_{\mathrm{II}}(x_0) &= \inf_{S_{\mathrm{II}}}\sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}[F(x_\tau)] \\
&\leq \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S^0_{\mathrm{II}}}[F(x_\tau)+\eta 2^{-\tau}].
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Nyt Doobin optionaalisen pysäytyksen lauseen (lause 2.9) nojalla

$$
\begin{aligned}
&\sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S^0_{\mathrm{II}}}[F(x_\tau)+\eta 2^{-\tau}] \\
&= \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S^0_{\mathrm{II}}}[M_\tau] \\
&\leq \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S^0_{\mathrm{II}}}[M_0] \\
&= u(x_0)+\eta.
\end{aligned}
$$

Koska $\eta>0$ oli valittu mielivaltaisesti, niin yhdessä yhtälön (4.3) kanssa se todistaa väitteen (4.1). Todistuksen toinen suunta saadaan tekemällä vastaava strategian valinta pelaajalle I. □

5 p-Laplacen yhtälö

Tässä luvussa on tarkoitus tarkastella mitä tapahtuu, kun yhtälössä (DOP) pallon sädettä ε lähdetään kutistamaan kohti 0:aa. Tavoitteena on osoittaa, että tasaisesti suppenevan jonon $u_n \to u$ raja-arvo on viskositeettiratkaisu p-Laplacen yhtälölle

$$\begin{cases} \Delta_p u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = F(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Päättely nojaa artikkelissa [MPR12] tehtyyn todistukseen. Ongelmana on se, että on mahdollista löytää u, joka ei ole kaikkialla derivoituva. Niinpä joudumme käsittelemään u:ta *viskositeettiratkaisuna*. Esimerkkejä p-harmonisista funktioista ja niiden ominaisuuksista löytyy lähteestä [Aro89].

5.1 Johtaminen ja taustoja

Aikaisemmin määriteltiin p-Laplacen operaattori

$$\Delta_p f = \operatorname{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f),$$

joka on Euler-Lagrangen yhtälö p-Dirichlet'n integraalille

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla f|^p dx.$$

Johdetaan se hieman eri muotoon. Muistetaan, että *Laplacen operaattori* on

$$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

Olkoon $\nabla f(x) \neq 0$. Määritellään *normalisoitu ääretön-Laplacen operaattori*

$$\begin{aligned} \Delta_\infty^N f(x) &:= |\nabla f(x)|^{-2}\langle D^2 f(x)\nabla f(x), \nabla f(x)\rangle \\ &= |\nabla f(x)|^{-2}(\nabla f(x))^T D^2 f(x)\nabla f(x) \\ &= |\nabla f(x)|^{-2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n D_{ij}f(x)D_i f(x)D_j f(x), \end{aligned}$$

missä $D^2 f$ on Hessen matriisi. Näin ollen

$$\begin{aligned} \Delta_p f &= \operatorname{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f) \\ &= |\nabla f|^{p-2}\operatorname{div}(\nabla f) + (\nabla|\nabla f|^{p-2})\cdot\nabla f. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Divergenssin määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla f) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\nabla f)_i}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= \Delta f. \end{aligned}$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
\nabla|\nabla f|^{p-2} &= \nabla\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}, \dots\right) \\
&= \left(\frac{p-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-4}{2}}\left(2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}\right), \dots\right) \\
&= (p-2)|\nabla f|^{p-4}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}, \dots\right),
\end{aligned}
$$

joten

$$
\begin{aligned}
(\nabla|\nabla f|^{p-2}) \cdot \nabla f &= (p-2)|\nabla f|^{p-4}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\
&= (p-2)|\nabla f|^{p-4}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= (p-2)|\nabla f|^{p-2}\Delta_\infty^N f.
\end{aligned}
$$

Näin ollen yhtälön (5.2) nojalla

$$
\begin{aligned}
\Delta_p f &= |\nabla f|^{p-2}\Delta f + (p-2)|\nabla f|^{p-2}\Delta_\infty^N f \\
&= |\nabla f|^{p-2}\left(\Delta f + (p-2)\Delta_\infty^N f\right).
\end{aligned}
$$

Eli olemme kiinnostuneita siis käytännössä yhtälön

$$
\Delta f + (p-2)\Delta_\infty^N f = 0 \tag{5.3}
$$

ratkaisuista ainakin, kun $\nabla f(x) \neq 0$. Koska funktion derivoituvuutta ei voida taata kaikkialla, määritellään avuksi viskositeettiratkaisu, jossa derivoituvuus vaaditaan vain apuna käytettäviltä testifunktioilta.

Määritelmä 5.1. Funktio ϕ *koskettaa funktiota u alhaalta* pisteessä $x \in \Omega$, jos

$$
\phi(x) = u(x) \text{ ja } u(y) > \phi(y) \text{ kun } y \neq x.
$$

Vastaavasti funktio ϕ *koskettaa funktiota u ylhäältä* pisteessä $x \in \Omega$, jos

$$
\phi(x) = u(x) \text{ ja } u(y) < \phi(y) \text{ kun } y \neq x.
$$

Jotta koskettaminen olisi ylipäätään hyvin määritelty, funktiosta täytyy olettaa sopiva puolijatkuvuus.

Määritelmä 5.2 (Viskositeettiratkaisu)**.** Olkoon $1 < p < \infty$. Alhaalta puolijatkuva funktio u on *superratkaisu* yhtälöön (5.3), jos kaikille $\phi \in C^2$, jotka koskettavat funktiota u alhaalta pisteessä $x \in \Omega$, ja joille $\nabla\phi(x) \neq 0$, pätee

$$(p-2)\Delta_\infty^N \phi(x) + \Delta\phi(x) \leq 0.$$

Vastaavasti ylhäältä puolijatkuva funktio u on *subratkaisu* yhtälöön (5.3), jos kaikille $\phi \in C^2$, jotka koskettavat funktiota u ylhäältä pisteessä $x \in \Omega$, ja joille $\nabla\phi(x) \neq 0$, pätee

$$(p-2)\Delta_\infty^N \phi(x) + \Delta\phi(x) \geq 0.$$

Funktio u on *viskositeettiratkaisu*, jos se on *super- ja subratkaisu*.

Määritelmä 5.3. Funktio $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ on *heikko ratkaisu* yhtälöön (5.1), jos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla\phi\rangle = 0 \quad \text{kaikilla } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Lisätietoja Sobolev-avaruuksista löytyy lähteistä [Par19, Eva98]. Tarkemmin p-Laplacen yhtälön heikoista ratkaisuista löytyy tietoa lähteestä [HKM06]. Viskositeettiratkaisut ja heikot ratkaisut ovat osoitettu ekvivalenteiksi lähteessä [JLM01].

5.2 Suppeneminen ja DOP

Koska perhe $\{u_\varepsilon\}$ on ylinumeroituva, niin valitaan tarkasteltavaksi siitä osajono $\{u_{\varepsilon_n}\}$, jota merkitään yksinkertaisuuden vuoksi $\{u_n\}$. Valitaan osajonon alkiot siten, että $\varepsilon_n \to 0$. Koska yhtälöllä (5.1) on yksikäsitteinen viskositeettiratkaisu, mikä on osoitettu lähteissä [JLM01, KMP12], niin itseasiassa koko perhe $u_\varepsilon \to u$.

Muistetaan, että p-Laplacen operaattorille pätee, jos oletetaan, että $\nabla u \neq 0$ ja u on sileä

$$\Delta_p u(x) = |\nabla u(x)|^{p-2}((p-2)\Delta_\infty^N u(x) + \Delta u(x)).$$

Tällöin u on ratkaisu yhtälöön $\Delta_p u = 0$, jos ja vain jos

$$(p-2)\Delta_\infty^N u + \Delta u = 0. \tag{5.4}$$

Tähän asti DOP:n kertoimet α ja β ovat olleet tuntemattomia. Osoittautuu, että valitsemalla

$$\alpha = \frac{p-2}{n+p} \qquad \beta = \frac{n+2}{n+p} \tag{5.5}$$

saadaan muodostettua yhteys (DOP):n ja (5.1) välille. Sen havainnollistamiseksi täytyy kuitenkin tehdä ensin kaksi arviota.

Lemma 5.4. *Olkoon u C^2-funktio. Tällöin*

$$u(x) - \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)\,dy = -\frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta u(x) + O(\varepsilon^3).$$

Todistus. Ottamalla keskiarvointegraalin u:n Taylorin-sarjasta yli pallon $B_\varepsilon(x)$ saadaan, että

$$\begin{aligned}
\fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)\mathrm{d}y = &\fint_{B_\varepsilon(x)} u(x)\mathrm{d}y + \fint_{B_\varepsilon(x)} \nabla u(x)\cdot(y-x)\mathrm{d}y \\
&+ \fint_{B_\varepsilon(x)} \frac{1}{2}\langle D^2u(x)(y-x),(y-x)\rangle\mathrm{d}y + \fint_{B_\varepsilon(x)} O(|y-x|^3)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Lasketaan integraali palasissa auki. Ensimmäisestä osasta saadaan, että

$$\begin{aligned}
\fint_{B_\varepsilon(x)} u(x)\mathrm{d}y &= \frac{u(x)}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon(x)} 1\mathrm{d}y \\
&= u(x).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Nyt muuttujanvaihdolla $z := y - x$ saadaan, että

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} \nabla u(x)\cdot(y-x)\mathrm{d}y = \frac{1}{|B_\varepsilon|}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\int_{B_\varepsilon(0)} z_i\mathrm{d}z\right).$$

Lemman 2.1 nojalla $\int_{B_\varepsilon(0)} z_i\mathrm{d}z = 0$ kaikilla i, joten

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} \nabla u(x)\cdot(y-x)\mathrm{d}y = 0. \tag{5.7}$$

Nyt jälleen muuttujanvaihdolla $z := y - x$ saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_\varepsilon(x)} \langle D^2u(x)(y-x),(y-x)\rangle\mathrm{d}y \\
&= \fint_{B_\varepsilon(x)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}u(x)(y-x)_i(y-x)_j\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}u(x)\int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_i(y-x)_j\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}u(x)\int_{B_\varepsilon(0)} z_iz_j\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Jälleen lemman 2.1 nojalla

$$\int_{B_\varepsilon(0)} z_iz_j\mathrm{d}z = 0,$$

kun $i \neq j$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_\varepsilon(x)} \langle D^2u(x)(y-x),(y-x)\rangle\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{|B_\varepsilon|}\sum_{i=1}^{n} D_{ii}u(x)\int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_i^2\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Koska vektorin komponentit käyttäytyvät samalla tavalla pallon yli integroitaessa, niin

$$\int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_i^2 \mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_j^2 \mathrm{d}y, \quad \text{kaikilla } i, j.$$

Joten

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_i^2 \mathrm{d}y &= \frac{\sum_{j=1}^n \int_{B_\varepsilon(x)} (y-x)_j^2 \mathrm{d}y}{n} \\
&= \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{\sum_{j=1}^n (y-x)_i^2}{n} \mathrm{d}y \\
&= \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{|y-x|^2}{n} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_\varepsilon(x)} \langle D^2u(x)(y-x), (y-x)\rangle \mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=1}^n D_{ii}u(x) \fint_{B_\varepsilon(0)} \frac{|z|^2}{n} \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Merkitään n-ulotteisen yksikköpallon tilavuutta ω_n ja pinta-alaa σ_{n-1}. Näiden välillä on yhteys $\sigma_{n-1} = n\omega_n$, ja yleisen r-säteisen pallon tilavuus ja pinta-ala voidaan ilmoittaa niiden avulla

$$\sigma_{n-1}(r) := r^{n-1}\sigma_{n-1} \qquad \text{ja} \qquad \omega_n(r) := r^n \omega_n.$$

Näin ollen Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\fint_{B_\varepsilon(0)} \frac{|z|^2}{n} \mathrm{d}z &= \frac{1}{\varepsilon^n \omega_n n} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(0,r)} r^2 \ \mathrm{d}S \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n \omega_n n} \int_0^\varepsilon r^2 r^{n-1} \sigma_{n-1} \mathrm{d}r \\
&= \frac{\sigma_{n-1}}{\varepsilon^n \omega_n n} \int_0^\varepsilon r^{n+1} \mathrm{d}r \\
&= \frac{n}{\varepsilon^n n} \frac{\varepsilon^{n+2}}{n+2} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{n+2}.
\end{aligned}$$

Koska määritelmän nojalla $\sum_{i=1}^n D_{ii}u(x) = \Delta u(x)$, niin

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} \langle D^2u(x)(y-x), (y-x)\rangle \mathrm{d}y = \frac{\varepsilon^2}{n+2} \Delta u(x). \tag{5.8}$$

Yhdistämällä yhtälöt (5.6) - (5.8) saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)\mathrm{d}y = u(x) + \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta u(x) + O(\varepsilon^3)\\
&\implies u(x) - \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)\mathrm{d}y = -\frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta u(x) + O(\varepsilon^3). \qquad \square
\end{aligned}$$

Toinen arvio tulee tarkastelemalla DOP:n jäljellä olevaa osaa. Koska gradientti osoittaa suurimman kasvunopeuden, niin

$$\sup_{B_\varepsilon(x)} u \approx u\left(x + \varepsilon\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\right) \quad \text{ja} \quad \inf_{B_\varepsilon(x)} u \approx u\left(x - \varepsilon\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\right). \tag{5.9}$$

Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi

$$h := \varepsilon\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}.$$

Heuristisesti voidaan oletettaa, että supremum löytyy pallon reunalta, koska on tarkoitus tarkastella mitä tapahtuu, kun $\varepsilon \to 0$. Koska $\nabla u \neq 0$, niin supremum löytyy joko pallon sisältä keskipiste pois lukien tai pallon reunalta. Tästä seuraa, että jostain ε eteenpäin supremum osoittaa aina pallon reunalle. Vastaava pätee infimumille.

Käyttämällä jälleen u:n Taylorin-sarjaa ja arviota (5.9) saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u\\
&\approx u(x+h) + u(x-h)\\
&= u(x) + \nabla u(x)\cdot(h) + \frac{1}{2}\langle D^2u(x)(h),(h)\rangle + O(|h|^3)\\
&\qquad + u(x) + \nabla u(x)\cdot(-h) + \frac{1}{2}\langle D^2u(x)(-h),(-h)\rangle + O(|-h|^3)\\
&= 2u(x) + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n D_{ij}u(x)h_ih_j + O(|h|^3)\\
&= 2u(x) + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n D_{ij}u(x)\left(\varepsilon\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\right)_i\left(\varepsilon\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\right)_j + O(\varepsilon^3)\\
&= 2u(x) + \frac{\varepsilon^2}{|\nabla u(x)|^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n D_{ij}u(x)(\nabla u(x))_i(\nabla u(x))_j + O(\varepsilon^3)\\
&= 2u(x) + \frac{\varepsilon^2}{|\nabla u(x)|^2}\langle D^2u(x)\nabla u(x),\nabla u(x)\rangle + O(\varepsilon^3)\\
&= 2u(x) + \varepsilon^2\Delta_\infty^N u(x) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$
\begin{aligned}
&u(x) - \frac{1}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u\right) \\
&\approx u(x) - \frac{1}{2}(2u(x) + \varepsilon^2 \Delta_\infty^N u(x) + O(\varepsilon^3)) \\
&= -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta_\infty^N u(x) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Laskemalla lemman 5.4 ja yhtälön (5.10) tulokset yhteen kertoimilla α ja β, saadaan, että

$$
\begin{aligned}
&\beta\left(u(x) - \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)\mathrm{d}y\right) + \alpha\left(u(x) - \frac{1}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u\right)\right) \\
&\approx -\frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta u(x) - \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta_\infty^N u(x) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
$$

Järjestetään yhtälöä siten, että oikealle puolelle saadaan (5.4) ja sijoitetaan kertoimien α ja β paikalle valinnat (5.5)

$$
\begin{aligned}
&u(x) - \beta\fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)\mathrm{d}y - \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u\right) + O(\varepsilon^3) \\
&\approx -\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\alpha\Delta_\infty^N u(x) + \frac{\beta}{n+2}\Delta u(x)\right) \\
&= -\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{p-2}{n+p}\Delta_\infty^N u(x) + \frac{1}{n+p}\Delta u(x)\right) \\
&= -\frac{\varepsilon^2(n+p)}{2}\left((p-2)\Delta_\infty^N u(x) + \Delta u(x)\right).
\end{aligned}
$$

Näin ollen heuristisesti yhtälön (5.1) ratkaisut ovat muotoa

$$
u(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} u\right) + \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)\mathrm{d}y + O(\varepsilon^3),
$$

kun $\varepsilon \to 0$.

Osoitetaan vastaava päättely hieman tarkemmin lauseessa 5.6, mutta sitä ennen tarvitaan aputulos.

Lemma 5.5. *Olkoon $\{u_n\}$ jono jatkuvia funktioita, joka suppenee tasaisesti funktioon u, ja olkoon ϕ jatkuva funktio siten, että funktiolla $u - \phi$ on aito minimi pisteessä x. Tällöin on olemassa jono $\{x_n\}$, joka suppenee pisteeseen x siten, että funktiolla $u_n - \phi$ on minimi pisteessä x_n.*

Todistus. Todistus ohitetaan, mutta se löytyy muotoiltuna maksimille [Eva98, s. 541]. □

Lause 5.6. *Olkoon Ω ja F niin kuin aikaisemmin määritelty ja jono $\{u_n\}$ (DOP):n toteuttavia funktioita, jotka suppenevat tasaisesti funktioon u. Tällöin u on viskositeettiratkaisu yhtälöön (5.1).*

Todistus. Koska $u_n = F$ joukossa $\partial\Omega$ kaikilla n ja $u_n \to u$ tasaisesti, niin myös $u = F$ joukossa $\partial\Omega$.

Yksinkertaistetaan merkintöjä korvaamalla jonon (ε_n) alkiot pelkällä ε:lla, sillä olemme kiinnostuneita vain siitä, että $\varepsilon_n \to 0$. Olkoon $\phi \in C^3$ superratkaisun määritelmän mukainen testifunktio. Vastaava päättely toimisi eri virhetermillä Taylorin-sarjassa määritelmän mukaiselle C^2-funktiolle, mutta käytetään yksinkertaisuuden vuoksi C^3-funktiota.

Valitaan piste $x \in \Omega$, ja olkoon x_1^ε piste, jossa ϕ saavuttaa miniminsä suljetussa pallossa $\overline{B}_\varepsilon(x)$

$$\phi(x_1^\varepsilon) = \min_{y \in \overline{B}_\varepsilon(x)} \phi(y).$$

Lasketaan seuraavaksi ϕ:n Taylorin-sarjat pisteissä x_1^ε ja $2x - x_1^\varepsilon$. Geometrisesti toinen piste on minimipisteen peilaus pisteen x suhteen. Tästä saadaan, että

$$\phi(x_1^\varepsilon) = \phi(x) + \nabla\phi(x)\cdot(x_1^\varepsilon - x) + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3)$$

ja

$$\begin{aligned}\phi(2x - x_1^\varepsilon) &= \phi(x) + \nabla\phi(x)\cdot(2x - x_1^\varepsilon - x)\\ &\qquad + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(2x - x_1^\varepsilon - x), (2x - x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|2x - x_1^\varepsilon - x|^3)\\ &= \phi(x) - \nabla\phi(x)\cdot(x_1^\varepsilon - x)\\ &\qquad + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3),\end{aligned}$$

kun $\varepsilon \to 0$.

Laskemalla saadut yhtälöt yhteen saadaan, että

$$\begin{aligned}&\phi(2x - x_1^\varepsilon) + \phi(x_1^\varepsilon) = 2\phi(x) + \langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3)\\ &\implies \phi(2x - x_1^\varepsilon) + \phi(x_1^\varepsilon) - 2\phi(x) = \langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3).\end{aligned}$$

Koska määritelmän mukaan x_1^ε oli ϕ:n minimipiste ja ϕ on jatkuva, niin saadaan arvio

$$\phi(2x - x_1^\varepsilon) + \phi(x_1^\varepsilon) - 2\phi(x) \le \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} \phi(y) + \inf_{y \in B_\varepsilon(x)} \phi(y) - 2\phi(x),$$

missä funktion arvoa pisteessä $2x - x_1^\varepsilon$ arvioidaan ylöspäin funktion supremumilla. Näin ollen

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\sup_{y \in B_\varepsilon(x)} \phi(y) + \inf_{y \in B_\varepsilon(x)} \phi(y)\right) - \phi(x)\\ &\ge \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + O(|x_1^\varepsilon - x|^3).\end{aligned} \tag{5.11}$$

Tämä yhdessä lemman 5.4 kanssa antaa arvion

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)}\phi + \inf_{B_\varepsilon(x)}\phi\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} \phi(y)\mathrm{d}y - \phi(x) \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\left\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\right\rangle + \frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\Delta\phi(x) + O(\varepsilon^3) \\
&= \frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\left((p-2)\left\langle D^2\phi(x)\left(\frac{x_1^\varepsilon - x}{\varepsilon}\right), \left(\frac{x_1^\varepsilon - x}{\varepsilon}\right)\right\rangle + \Delta\phi(x)\right) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

Jatkuvien funktioiden tapauksessa lemma 5.5 takaisi, että on olemassa jono $\{x_n\}$, joka suppenee pisteeseen x siten, että funktiolla $u_n - \phi$ on minimi pisteessä x_n. Koska funktiot u_n eivät välttämättä ole jatkuvia tarvitaan avuksi $\eta_n > 0$. Tällöin

$$u_n(y) - \phi(y) \geq u_n(x_n) - \phi(x_n) - \eta_n.$$

Tarvittaessa funktiota ϕ voidaan siirtää pystysuunnassa $\tilde{\phi} := \phi - u_n(x_n) - \phi(x_n)$, joten voidaan olettaa, että $\phi(x_n) = u_n(x_n)$. Näin saadaan arvio

$$\phi(y) \leq u_n(y) + \eta_n.$$

Näin ollen

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x_n)}\phi + \inf_{B_\varepsilon(x_n)}\phi\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_n)} \phi(y)\mathrm{d}y - \phi(x_n) \\
&\leq \frac{\alpha}{2}\left(2\eta_n + \sup_{B_\varepsilon(x_n)} u_n + \inf_{B_\varepsilon(x_n)} u_n\right) + \beta\left(\eta_n + \fint_{B_\varepsilon(x_n)} u_n(y)\mathrm{d}y\right) - \phi(x_n) \\
&= \eta_n + \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x_n)} u_n + \inf_{B_\varepsilon(x_n)} u_n\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_n)} u_n(y)\mathrm{d}y - \phi(x_n) \\
&= \eta_n + u_n(x_n) - \phi(x_n) \\
&= \eta_n.
\end{aligned}
$$

Joten yhdessä yhtälön (5.12) kanssa tästä seuraa, että

$$\eta_n \geq \frac{\beta\varepsilon^2}{2(n+2)}\left((p-2)\left\langle D^2\phi(x_n)\left(\frac{x_1^\varepsilon - x_n}{\varepsilon}\right), \left(\frac{x_1^\varepsilon - x_n}{\varepsilon}\right)\right\rangle + \Delta\phi(x_n)\right) + O(\varepsilon^3).$$

Valitaan $\eta_n = O(\varepsilon^3)$ ja yhdistetään se epäyhtälön oikean puolen virhetermin kanssa. Nyt jakamalla epäyhtälö puolittain ε^2:lla saadaan, että

$$\frac{0}{\varepsilon^2} \geq \frac{\beta}{2(n+2)}\left((p-2)\left\langle D^2\phi(x_n)\left(\frac{x_1^\varepsilon - x_n}{\varepsilon}\right), \left(\frac{x_1^\varepsilon - x_n}{\varepsilon}\right)\right\rangle + \Delta\phi(x_n)\right) + \frac{O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2}. \tag{5.13}$$

O-notaation määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
&-|C\varepsilon^3| \leq O(\varepsilon^3) \leq |C\varepsilon^3| \\
&\implies \frac{-|C\varepsilon^3|}{\varepsilon^2} \leq \frac{O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2} \leq \frac{|C\varepsilon^3|}{\varepsilon^2} \\
&\implies -|C\varepsilon| \leq \frac{O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2} \leq |C\varepsilon|,
\end{aligned}$$

joten suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2} = 0.$$

Eli ottamalla raja-arvo $\varepsilon \to 0$ epäyhtälöstä (5.13) saadaan, että

$$0 \geq \frac{\beta}{2(n+2)} \left((p-2)\Delta_\infty^N \phi(x) + \Delta\phi(x)\right)$$

näin ollen u on määritelmän nojalla superratkaisu yhtälöön (5.3).

Tekemällä vastaava päättely subratkaisun määritelmän mukaiselle testifunktiolle $\tilde{\phi} \in C^3$ käyttämällä epäyhtälön (5.12) käänteistä versiota, joka saadaan tarkastelemalla funktion $\tilde{\phi}$ maksimia

$$\tilde{\phi}(x_2^\varepsilon) = \max_{y \in \overline{B}_\varepsilon(x)} \tilde{\phi}(y)$$

saadaan, että

$$0 \leq \frac{\beta}{2(n+2)} \left((p-2)\Delta_\infty^N \phi(x) + \Delta\phi(x)\right).$$

Näin ollen u on myös subratkaisu ja siten viskositeettiratkaisu yhtälöön (5.3). $\square$

Viitteet

[Aro89] G. Aronsson. Representation of a p-harmonic function near a critical point in the plane. *Manuscripta Mathematica*, 66:73–95, 1989.

[Eva98] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.

[Gei20] S. Geiss. Stochastic processes in discrete time. http://users.jyu.fi/~geiss/lectures/processes-discrete-time.pdf, 2020. Haettu: 2022-3-11.

[Har16] H. Hartikainen. A dynamic programming principle with continuous solutions related to the p-Laplacian, $1 < p < \infty$. *Differential and Integral Equations*, 29(5/6):583 – 600, 2016.

[HKM06] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*. Dover Publications, 2006.

[JLM01] P. Juutinen, P. Lindqvist, and J.J. Manfredi. On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasilinear equation. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, 33(3):699–717, 2001.

[KMP12] B. Kawohl, J.J. Manfredi, and M. Parviainen. Solutions of nonlinear PDEs in the sense of averages. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 97(2):173–188, 2012.

[LaL13] S. LaLonde. The martingale stopping theorem. https://math.dartmouth.edu/~pw/math100w13/lalonde.pdf, 2013. Haettu: 2019-10-24.

[LPS13] H. Luiro, M. Parviainen, and E. Saksman. Harnack's inequality for p-harmonic functions via stochastic games. *Communications in Partial Differential Equations*, 38(11):1985–2003, 2013.

[LPS14] H. Luiro, M. Parviainen, and E. Saksman. On the existence and uniqueness of p-harmonious functions. *Differential and Integral Equations*, 27(3/4):201–216, 2014.

[MPR12] J.J. Manfredi, M. Parviainen, and J. Rossi. On the Definition and Properties of p-Harmonious Functions. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, Ser. 5, 11(2):215–241, 2012.

[Par15] M. Parviainen. Viscosity Theory. http://users.jyu.fi/~miparvia/Opetus/Viscosity/lecturenoteVisc2015.pdf, 2015. Haettu: 2021-11-4.

[Par19] M. Parviainen. Partial Differential Equations 2. https://koppa.jyu.fi/en/courses/231683/lecture-note, 2019. Haettu: 2021-11-4.

[PS08] Y. Peres and S. Sheffield. Tug of war with noise: a game theoretic view of the p-Laplacian. *Duke Mathematical Journal*, 145(1):91–120, 2008.

[PSSW09] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield, and D. Wilson. Tug-of-war and the infinity Laplacian. *Journal of the American Mathematical Society*, 22(1):167–210, 2009.

[Sri98] S.M. Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1998.