Konformikuvaukset ja hyperbolinen metriikka

Eero-Pekka Heimari

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2021

Tiivistelmä: Eero-Pekka Heimari, *Konformikuvaukset ja hyperbolinen metriikka* (engl. *Conformal Mappings And Hyperbolic Metric*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 31 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2021.

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä konformikuvauksia ja niiden merkitystä hyperbolisen geometrian malleissa.

Tutkielman alussa määritellään tutkielman kannalta keskeisimmät asiat kompleksiluvuista ja kompleksitasosta. Tämän jälkeen määritellään kulma ja käyräviivainen kulma, joka on geometrisesti kahden kompleksitason kaaren leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välinen kulma. Käyräviivainen kulma on myös suunnattu, eli on väliä kummasta kyljestä kumpaan kulma mitataan.

Seuraavana esitellään kompleksinen ja reaalinen differentioituvuus, jotka ovat tarpeellisia diffeomorfismin käsitettä varten. Diffeomorfismi on kuvaus, jonka reaaliosan ja imaginääriosan osittaisderivaatat ovat olemassa ja jonka Jacobin determinantti ei ole 0 missään pisteessä. Seuraavaksi määritellään, että kuvaus on konforminen, jos se säilyttää suunnatut käyräviivaiset kulmat. Sitten osoitetaan, että diffeomorfismin konformisuus ja differentioituvuus tietyssä pisteessä on yhtäpitävää, mistä seuraa, että konformikuvaus ja analyyttinen injektio ovat keskenään ekvivalentteja käsitteitä.

Tämän jälkeen esitellään joukko keskeisiä konformikuvauksia, Möbius-kuvaukset. Möbius-kuvauksilla on lukuisia hyödyllisiä ominaisuuksia, kuten se, että ne säilyttävät yleistetyt ympyrät, siis kompleksitason euklidiset ympyrät ja laajennetun kompleksitason euklidiset suorat.

Seuraavana tutkielmassa esitellään hyperbolinen geometria, joka eroaa euklidisesta geometriasta siten, että suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee vähintään kaksi alkuperäisen suoran kanssa yhdensuuntaista suoraa. Tutkielmassa esitellään keskeinen hyperbolisen geometrian malli, Poincarén kiekko. Todetaan, että konformikuvaukset Poincarén kiekolta itselleen ovat Möbius-kuvauksia, mikä on hyödyllistä, sillä ne säilyttävät sekä kulmat, että mallin hyperboliset suorat, siis yleistetyt ympyrät.

Euklidisessa geometriassa etäisyys mitataan suoraa pitkin. Hyperbolisen geometrian malleille tarvitaan erilainen etäisyyden määritelmä. Aluksi määritellään Poincarén hyperbolinen metriikka, jonka avulla voidaan laskea hyperbolinen kaarenpituus Poincarén kiekossa. Hyperbolinen etäisyys kahden pisteen välillä on infimum pisteiden välissä olevien paloittain sileiden käyrien hyperbolisista kaarenpituuksista. Osoitetaan, että hyperbolinen metriikka säilyy Poincarén kiekon konformisissa itsekuvauksissa ja että Poincarén kiekko varustettuna hyperbolisella etäisyydellä on metrinen avaruus.

Lopuksi yleistetään Poincarén kiekon tulos. Aluksi esitellään tärkeä olemassaolon tulos, Riemannin kuvauslause, joka antaa konformikuvauksen yhdesti yhtenäiseltä alueelta yksikkökiekolle, siis Poincarén kiekolle. Hyperbolinen metriikka mielivaltaisessa yhdesti yhtenäisessä alueessa Ω määritellään olevan Poincarén metriikan ja konformikuvauksen alueelta Ω Poincarén kiekolle, yhdiste. Koska hyperbolinen metriikka säilyy Poincarén kiekon konformikuvauksissa itselleen, myös tällä tavalla määritelty metriikka on yksikäsitteinen alueessa Ω. Määritellään myös hyperbolinen kaarenpituus ja hyperbolinen etäisyys alueessa Ω ja osoitetaan, että hyperbolinen etäisyys voidaan myös kuvata Poincarén kiekon etäisyysfunktiosta. Tästä seuraa, että mielivaltainen yhdesti yhtenäinen alue Ω varustettuna hyperbolisella metriikalla on metrinen avaruus.

Sisältö

Johdanto

Konformisella kuvauksella tarkoitetaan kuvausta, joka kuvaa alueen toiseksi alueeksi säilyttäen alueella sijaitsevien käyrien leikkauspisteisiin piirrettyjen tangenttien väliset kulmat ja niiden suunnan.Vanhin tunnettu tällainen kuvaus on pallon stereografinen projektio, jota Ptolemaios käytti 100-luvulla tähtikartan esitykseen. Stereografinen projektio kuvaa pallopinnan konformisesti tasolle. Toinen tärkeä pallon tasolle kuvaava konformikuvaus on Mercatorin projektio (1568), joka kuvaa maapallon pinnan tasolle. Tätä kuvausta on käytetty laajasti merikarttojen konstruoimisessa.

Kun stereografista projektiota ja Mercatorin projektiota vertaa, on ilmeistä, että saman alueen konformiset kuvaukset eivät ole keskenään samanlaisia. Lagrange esitti vuonna 1779 kaikki konformiset kuvaukset, jotka kuvaavat osan maapallon pinnasta tasoalueelle siten, että pituus- ja leveyspiirit ovat ympyrän kaaria. Vuonna 1822 Gauss esitti kaikki konformikuvaukset, jotka kuvaavat mielivaltaisen analyyttisen pinnan pisteen riittävän pienen ympäristön konformisesti tasoalueelle. Vuonna 1851 Riemann näytti, että jokainen yhdesti yhtenäinen alue, joka ei ole koko taso, voidaan kuvata konformisesti ympyrän sisälle [**4**].

Mitä kuvaukselta vaaditaan, että se on konforminen? Ei paljoakaan. Kompleksitason kuvauksissa riittää, että kuvaus on analyyttinen injektio. Möbius tutki 1800-luvulla suhteellisen yksinkertaista hyvin käyttäytyvää konformikuvausten joukkoa, joka nimettiin hänen mukaansa Möbius-kuvauksiksi [**4**].

Olemme tottuneet hahmottamaan geometriaa euklidisen tasogeometrian avulla. Tutut tulokset kuitenkin menevät rikki jo mainituissa karttaprojektioissa, sillä maapallo noudattaa tietysti pallogeometriaa. Jos piirtää pallon pinnalle kolmioita, huomaa nopeasti, että niiden kulmien summa ei ole 180 astetta. Pallogeometria ei noudata euklidisen tasogeometrian sääntöjä.

On myös tasogeometrian malleja, jotka ovat epäeuklidisia. Historian aikana on yritetty todistaa, että paralleeliaksiooma olisi riippuvainen muista tasogeometrian aksioomista. Yhden todistusyrityksen esitti Adrien-Marie Legendre 1700-luvun lopulla. Paralleeliaksiooman itsenäisyyden todistamiseksi riittää löytää geometrian malli, jossa paralleeliaksiooman negaatio, hyperbolinen aksiooma olisi voimassa. Ensimmäisen tällaisen mallin keksi Eugenio Beltrami vuonna 1868 [**5**].

Ehkä tärkein hyperbolisen geometrian malli on kuitenkin Poincarén kiekko, jonka keksi Henri Poincaré 1800-luvulla. Siinä suorat ovat pääosin ympyrän kaaria. Poincaré määritteli vuonna 1881 kiekkomallille Möbius-kuvauksessa säilyvän epäeuklidisen metriikan. Vuonna 1894 hän osoitti, että kiekon konformiset kuvaukset itselleen ovat Möbius-kuvauksia [**7**].

Tutkielman alussa määritellään kompleksianalyysin tutkielman kannalta keskeiset asiat ja käydään läpi muutamia yleisiä differentioituvuuteen liittyviä tuloksia. Toisen luvun lopussa määritellään diffeomorfismit ja osoitetaan, että diffeomorfismit ovat konformikuvauksia jos ja vain jos ne ovat analyyttisia injektioita. Kolmannessa luvussa käsitellään Möbius-kuvauksia ja niiden ominaisuuksia. Neljännen luvun alussa määritellään Poincarén kiekko ja osoitetaan, että konformikuvaukset Poincarén kiekolta itselleen ovat Möbius-kuvauksia.

Seuraavaksi määritellään Poincarén kiekon hyperbolinen metriikka ja osoitetaan, että se säilyy kiekon konformikuvauksissa itselleen. Metriikan avulla määritellään hyperbolinen kaarenpituus ja etäisyys ja osoitetaan, että Poincarén kiekko hyperbolisella etäisyydellä varustettuna on metrinen avaruus.

Neljännen luvun lopussa esitellään Riemannin kuvauslause, jonka avulla hyperbolinen metriikka määritellään yksikäsitteisesti mielivaltaisessa yhdesti yhtenäisessä alueessa. Lopuksi osoitetaan, että hyperbolinen kaarenpituus ja etäisyys saadaan konformikuvauksella Poincarén kiekon vastaavista rakenteista, mistä seuraa, että mielivaltainen yhdesti yhtenäinen alue varustettuna hyperbolisella etäisyydellä on metrinen avaruus.

Konformikuvauksiin ja yleisiin kompleksianalyysin aiheisiin liittyvissä aiheissa tutkielman lähteenä on käytetty Bruce P. Palkan teosta *An Introduction To Complex Function Theory* [**1**]. Möbius-kuvauksiin ja hyperboliseen metriikkaan yleisesti liittyvät tulokset ovat pääosin peräisin James W. Andersonin kirjasta *Hyperbolic Geometry* [**2**] ja hyperbolisen metriikan yleistys yhdesti yhtenäisille alueille perustuu A. F. Beardonin ja D. Mindan artikkeliin *The hyperbolic metric and geometric function theory* [**3**].

Tutkielman tulosten todistuksiin on kirjattu lähteet, joihin todistukset perustuvat. Mikäli todistukselle ei ole kirjattu lähdettä, se on kirjoittajan omaa käsialaa. Joitakin todistuksia on muokattu tutkielmaan sopiviksi ja joihinkin on lisätty perusteluita jotka oli todistuksen lähteessä sivuutettu.

LUKU 1

Kompleksiluvut

1.1. Kompleksiluvut ja kompleksitaso

MÄÄRITELMÄ 1.1 (Kompleksiluvut). Kompleksiluvut ovat lukuja muotoa $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja i on imaginääriyksikkö, $i = \sqrt{-1}$. Kompleksilukuja voi merkitä tason $\mathbb{R}^2$ pisteinä: $z = x + iy = (x, y)$. Nämä luvut muodostavat kompleksilukujen kunnan, jolle määritellään yhteenlasku ja kertolasku seuraavasti:

Olkoon $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ ja $w = (u, v) \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$z + w = (x + u, y + v)$$

ja

$$zw = (xu - yv, xv + yu).$$

Kompleksitasoksi kutsutaan tasoa $\mathbb{R}^2$, jossa x-akselia kutsutaan reaaliakseliksi ja y-akselia imaginääriakseliksi. Kompleksiluvut ovat kompleksitason pisteitä.

Kompleksiluvun $z = x + iy$ reaaliosa on $Re(z) = x$ ja imaginääriosa $Im(z) = y$.

Kompleksiluvun $z = x + iy$ normi $|z|$ määritellään

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kompleksiluvun $z = x + iy$ kompleksikonjugaatti $\bar{z}$ määritellään

$$\bar{z} = x - iy.$$

MÄÄRITELMÄ 1.2. Jatkuva funktio muotoa $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, missä $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ on polku ja sen kuvajoukko $|f|$ on polun jälki.

Polku on suljettu, jos $f(a) = f(b)$.

Polku on yksinkertainen, kun $f(t) \neq f(s)$ jos $t \neq s$, lukuunottamatta polun päätepisteitä, jos polku on suljettu.

Sanotaan, että polku f on jatkuvasti differentioituva, eli sileä, jos $f(t) = x(t) + iy(t)$ missä $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia reaalimuuttujan t suhteen.

Sanotaan että polku f on paloittain jatkuvasti differentioituva, jos on olemassa pisteet $t_0, t_1 \ldots, t_n$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ siten, että f on jatkuvasti differentioituva jokaisella välillä $[t_{k-1}, t_k]$. Paloittain jatkuvasti differentioituvaa polkua kutsutaan myös tieksi.

Asiayhteyksistä riippuen polkuja kutsutaan tutkielmassa myös käyriksi.

MÄÄRITELMÄ 1.3 (Laajennettu kompleksitaso). Joukkoa

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

kutsutaan laajennetuksi kompleksitasoksi. Pistettä ∞ kutsutaan äärettömyyspisteeksi ja sen ominaisuudet ovat seuraavat:

- $z + \infty = \infty + z = \infty$, kun $z \in \mathbb{C}$,
- $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$, kun $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$,
- $\frac{z}{\infty} = 0$, kun $z \in \mathbb{C}$,
- $\frac{z}{0} = \infty$, kun $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

MÄÄRITELMÄ 1.4 (Eksponenttifunktio). Olkoon $z = x+iy$ kompleksiluku. Tällöin

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

1.2. Kulmat

Tässä kappaleessa määritellään tutkielman kannalta olennaisimmat asiat kompleksitason kaarista ja niiden välisistä kulmista.

Kompleksilukua $z = x + iy$ vastaa luonnollisesti vektori origosta kompleksitason pisteeseen (x, y). Kompleksitason vektoreita on helppo hahmottaa napakoordinaattimuodossa:

LAUSE 1.5. *Olkoon z kompleksiluku. On olemassa reaaliluku θ, jolla*

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta). \tag{1.1}$$

Tätä kompleksiluvun esitystä kutsutaan napakoordinaattiesitykseksi. Kompleksisen eksponenttifunktion määritelmän perusteella kaava (1.1) *voidaan esittää myös muodossa*

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

TODISTUS. Sivuutetaan, ks. [**6**, s. 5]. □

Napakoordinaattiesityksessä θ on kompleksilukua z vastaavan vektorin ja positiivisen reaaliakselin kulma ja $|z|$ vektorin pituus. Yhtälön (1.1) toteuttavaa lukua θ kutsutaan luvun z argumentiksi, eli $\arg(z) = \theta$. Tunnetusti tällaisia lukuja on ääretön määrä, joten laskuissa kannattaa yleensä käyttää argumentin päähaaraa $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Olkoot $z, w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Tällöin kompleksilukuja z ja w vastaavien vektorien välinen suunnattu kulma $\theta(z, w)$ on

$$\theta(z, w) = \mathrm{Arg}(w/z).$$

Kulman ominaisuuksia:

(1) $\theta(w, z) = -\theta(z, w)$, kun $\theta(z, w) \neq \pi$,
(2) $\theta(\bar{z}, \bar{w}) = -\theta(z, w)$, kun $\theta(z, w) \neq \pi$,
(3) kun $\theta(z, w) = \pi$, $\theta(w, z) = \theta(\bar{z}, \bar{w}) = \theta(z, w) = \pi$,
(4) kaikilla $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\theta(cz, cw) = \theta(z, w)$,
(5) kaikilla $r, s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\theta(rz, sw) = \theta(z, w)$.

Geometrisesti kulma on siis pienempi vektorien välille muodostuneista kulmista, aina välillä $(-\pi, \pi]$. Kulma on positiivinen jos sen suunta kyljestä z kylkeen w on vastapäivään ja negatiivinen jos suunta on myötäpäivään. Tyypillinen kompleksinen kuvaus ei säilytä suoria suorina, vaan kuvaa ne sileiksi käyriksi. Kahden sileän käyrän välinen kulma voidaan tulkita olevan niiden leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välinen kulma. Käytetään tästä ilmaisua käyräviivainen kulma. Määrittelyä varten tarvitsemme käsitteen säännöllinen kaari, joka määritellään seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ sileä, yksinkertainen ja ei-suljettu polku, jolle $\alpha'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$. Säännöllinen kaari A on pistejoukko $A = |\alpha|$. Mikä tahansa vastaavat kriteerit toteuttava polku α on säännöllisen kaaren A säännöllinen parametrisaatio, jonka päätepisteet ovat $\alpha(a)$ ja $\alpha(b)$.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoot A ja B säännölliset kaaret ja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ja $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ niiden säännölliset parametrisaatiot, joilla on yksi sama päätepiste $\alpha(a) = \beta(c) = z_0$. Tällöin sanotaan, että A ja B ovat z_0-kärkisen käyräviivaisen kulman kyljet. Säännöllisten kaarien A ja B välinen suunnattu kulma $\theta(A, B)$ on

$$\theta(A, B) = \theta[\alpha'(a), \beta'(c)].$$

Ei ole väliä mikä säännöllinen parametrisaatio valitaan, sillä yksikkövektorit $\frac{\alpha'(a)}{|\alpha'(a)|}$ ja $\frac{\beta'(c)}{|\beta'(c)|}$ ovat samat riippumatta parametrisaatiosta ja kulman ominaisuuksien perusteella

$$\theta[\alpha'(a), \beta'(c)] = \theta[\frac{\alpha'(a)}{|\alpha'(a)|}, \frac{\beta'(c)}{|\beta'(c)|}].$$

Koska käyräviivainen kulma on muodollisesti tavallinen kulma, siihen pätevät samat kulman ominaisuudet.

LUKU 2

Konformikuvaukset

Konformiset kuvaukset säilyttävät kulmat. On näkökulmakysymys määritelläänkö konformikuvaus analyyttisenä injektiona, mistä johdetaan tulos, että tällaiset kuvaukset säilyttävät kulmat vai määritelläänkö se kulmat säilyttävänä kuvauksena, mistä johdetaan tulos että tällaiset kuvaukset ovat analyyttisiä injektioita. Mukaillen lähdettä [**1**] lähestymme aihetta jälkimmäisellä tavalla.

2.1. Kompleksiset derivaatat

Ennen kuin käsitellään analyyttisiä funktioita, tarvitaan keskeiset kompleksiseen ja reaaliseen differentioituvuuteen liittyvät määritelmät ja muutamia differentioituvuuteen liittyviä tuloksia.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on differentioituva alueen $A \subset \mathbb{C}$ sisäpisteessä z_0, jos raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

on olemassa. Jos raja-arvo on olemassa, voidaan kirjoittaa

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

jolloin sanotaan, että $f'(z_0)$ on funktion f derivaatta pisteessä z_0. Voidaan käyttää myös seuraavaa ekvivalenttia määritelmää: funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on differentioituva alueen $A \subset \mathbb{C}$ sisäpisteessä z_0, jos on olemassa kompleksiluku c, jolla

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + E(z), \tag{2.1}$$

missä $E : A \to \mathbb{C}$ on virhefunktio, jolle pätee

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|E(z)|}{|z - z_0|} = 0. \tag{2.2}$$

Yhtälöistä (2.1) ja (2.2) seuraa

$$c = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

jolloin $f'(z_0)$ on olemassa ja $c = f'(z_0)$.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin, epätyhjä joukko ja f kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty joukossa U. Jos f on differentioituva jokaisessa joukon U pisteessä, sanotaan, että f on analyyttinen joukossa U.

LAUSE 2.3. *Olkoon f analyyttinen funktio alueessa A. Jos f on injektio alueessa A, $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in A$.*

TODISTUS. Sivuutetaan, ks [**1**, s. 347]. □

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon $f : U \to \mathbb{C}$ funktio muotoa $f = u + iv$, missä

$$u(x, y) = Re(f(z))$$

ja

$$v(x, y) = Im(f(z)),$$

kun $z = x + iy$. Reaaliarvoisen funktion u osittaisderivaatta u_x on

$$u_x = \frac{d}{dx} u(x, y).$$

Osittaisderivaatat u_y, v_x ja v_y määritellään vastaavasti. Funktion f osittaisderivaatat f_x ja f_y puolestaan voidaan määritellä seuraavasti:

$$f_x(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$$

ja

$$f_y(z_0) = u_y(z_0) + iv_y(z_0).$$

LAUSE 2.5. *Olkoon funktio $f = u + iv$ määritelty avoimessa joukossa $U \subset \mathbb{C}$ ja osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y olemassa kaikkialla joukossa U. Tällöin, jos osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä z_0, $u_x(z_0) = v_y(z_0)$ ja $u_y(z_0) = -v_x(z_0)$, niin f on differentioituva pisteessä z_0 ja $f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0)$.*

TODISTUS. Sivuutetaan, ks [**1**, s. 70]. □

MÄÄRITELMÄ 2.6. Sanotaan, että funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on reaalisesti differentioituva alueen A sisäpisteessä z_0, jos on olemassa kompleksiluvut c ja d siten, että

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + d(\bar{z} - \bar{z_0}) + E(z),$$

kaikilla $z \in A$, missä $E : A \to \mathbb{C}$ on virhefunktio, jolle pätee $\lim_{z \to z_0} |E(z)|/|z - z_0| = 0$.

MÄÄRITELMÄ 2.7. Olkoot funktion $f = u + iv$ osittaisderivaatat $f_x(z_0)$ ja $f_y(z_0)$ olemassa pisteessä z_0. Funktion f z- ja $\bar{z}$-osittaisderivaatat f_z ja $f_{\bar{z}}$ pisteessä z_0 määritellään seuraavasti:

$$f_z(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))$$

ja

$$f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0)).$$

LAUSE 2.8. *Olkoon funktio $f = u + iv$ määritelty avoimessa alueessa $U \subset \mathbb{C}$ siten, että osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y ovat olemassa koko U:ssa. Jos jokainen osittaisderivaatta on jatkuva U:n sisäpisteessä z_0, f on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0 ja*

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z_0}) + E(z),$$

missä $E : U \to \mathbb{C}$ ja $\lim_{z \to z_0} |E(z)|/|z - z_0| = 0$.

TODISTUS. sivuutetaan, ks. [**1**, s. 100]. □

LAUSE 2.9. *Olkoon funktio $f = u+iv$ määritelty avoimessa alueessa $U \subset \mathbb{C}$ siten, että osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y ovat olemassa koko U:ssa. Jos f on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0 ja $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$, f on differentioituva pisteessä z_0 ja $f'(z_0) = f_z(z_0)$.*

TODISTUS. Lauseen 2.8 perusteella reaalisesti differentioituvuudesta seuraa

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + E(z),$$

missä $E : U \to \mathbb{C}, \lim_{z \to z_0} |E(z)|/|z - z_0| = 0$. Jos $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ saadaan yhtälöä (2.1) vastaava yhtälö

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + E(z),$$

missä $E : U \to \mathbb{C}, \lim_{z \to z_0} |E(z)|/|z - z_0| = 0$, jolloin f on differentioituva pisteessä z_0 ja $f'(z_0) = f_z(z_0)$. □

2.2. Schwarzin lemma

Tässä kappaleessa todistetaan Schwarzin lemma, joka on keskeisessä roolissa myöhemmin tutkielmassa Lauseen 4.5 todistuksessa. Tulos on sijoitettu tähän lukuun, sillä se ja sen todistuksessa tarvittavat tulokset liittyvät keskeisesti analyyttisiin kuvauksiin. Schwarzin lemma koskee yksikkökiekkoa $\mathbb{D}$, eli joukkoa

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

LAUSE 2.10. *Olkoon funktio f jatkuva avoimessa alueessa U ja analyyttinen alueessa $U \setminus z_0$ jollain $z_0 \in u$. Tällöin f on analyyttinen alueessa U.*

TODISTUS. Sivuutetaan, ks. [**1**, s. 165]. □

LAUSE 2.11 (Maksimiperiaate). *Olkoon funktio f analyyttinen alueessa A. Jos on olemassa piste $z_0 \in A$, jolla $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in A$, f on vakio alueessa A.*

TODISTUS. Sivuutetaan, ks. [**1**, s. 170]. □

SEURAUS 2.12. *Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja $f : \bar{A} \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka on analyyttinen alueessa A. Tällöin $|f(z)|$ saavuttaa maksiminsa jollain $z_0 \in \partial A$.*

TODISTUS. Sivuutetaan, ks. [**1**, s. 171]. □

LAUSE 2.13 (Schwarzin lemma). *Olkoon funktio f analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}$ ja $f(0) = 0$ sekä $|f(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$. Tällöin $|f'(0)| \leq 1$ ja $|f(z)| \leq |z|$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$. Lisäksi, jos f ei ole muotoa $f(z) = cz, c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, niin $|f'(0)| < 1$ ja $|f(z)| < |z|$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$.*

TODISTUS. ([**1**, s. 173]) Määritellään funktio $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{kun } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

g on jatkuva ja analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}^* = B^*(0, 1)$.

Lauseen 2.10 perusteella g on analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}$. Olkoon $z \in \mathbb{D}$ ja r reaaliluku, jolle pätee $|z| < r < 1$. Nyt sovelletaan seurausta 2.12 funktioon g suljetussa kiekossa $\bar{B}(0, r)$:

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \leq \frac{1}{r}.$$

Koska $r \to 1$, voidaan päätellä $|g(z)| \leq 1$. Koska z valittiin mielivaltaisesti, arvio on pätevä koko kiekossa $\mathbb{D}$. Erityisesti tästä seuraa $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ ja $|f(z)| = |g(z)| \cdot |z| \leq |z|$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$. Lisäksi maksimiperiaatteen (Lause 2.11) mukaan

$|g(z)| < 1$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$ paitsi jos g on vakiokuvaus, missä $|g(z)| = 1$. Tästä seuraa, että $|f'(0)| < 1$ ja $|f(z)| < |z|$ kaikilla $0 < |z| < 1$ paitsi jos $f(z) = cz$ missä $|c| = 1$. $\square$

2.3. Konformikuvaukset

Nyt olemme valmiit määrittelemään konformikuvaukset ja osoittamaan, että ne ovat analyyttisiä injektioita. Tässä tutkielmassa käsitellään vain kuvauksia, jotka ovat diffeomorfismeja. Diffeomorfismin määrittelyyn tarvitsemme Jacobin determinantin:

Määritelmä 2.14. Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f : U \to \mathbb{C}$ muotoa $f = u + iv$ sellainen funktio, että sen ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat f_x ja f_y ovat olemassa ja jatkuvia. Kuvauksen f Jacobin determinantti J_f on

$$J_f(z) = u_x(z)v_y(z) - u_y(z)v_x(z).$$

Tämä on z- ja $\bar{z}$-derivaattojen avulla ilmaistuna

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2.$$

Jos f on differentioituva pisteessä z_0, $f_z(z_0) = f'(z_0)$ ja $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$, mistä seuraa

$$J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2. \tag{2.3}$$

Määritelmä 2.15. Kuvaus $f : D \to \mathbb{C}$ on diffeomorfismi, jos

$$J_f(z) \neq 0$$

kaikilla $z \in D$.

Määritelmä 2.16. Diffeomorfismi $f : D \to \mathbb{C}$ on isogonaalinen pisteessä $z_0 \in D$, jos

$$|\theta(A, B)| = |\theta(f(A), f(B))|$$

aina kun A ja B ovat z_0-kärkisen käyräviivaisen kulman kyljet. Jos

$$\theta(A, B) = \theta(f(A), f(B))$$

sanotaan, että f on konforminen pisteessä z_0. Jos f on konforminen kaikissa pisteissä $z \in D$, f on konformikuvaus.

Lause 2.17. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ ja $f : D \to \mathbb{C}$ diffeomorfismi. Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

(i) *f on differentioituva pisteessä z_0,*
(ii) *f on isogonaalinen pisteessä z_0 ja $J_f(z_0) > 0$,*
(iii) *f on konforminen pisteessä z_0.*

Todistus. ([**1**, s. 380]) (1) (i) $\Rightarrow$ (ii) & (iii)
Oletetaan, että f on differentioituva. Nyt yhtälön (2.3) perusteella

$$J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2 \geq 0.$$

Koska f on diffeomorfismi, eli $J_f(z_0) \neq 0$, $J_f(z_0) > 0$.
Koska konformisuudesta määritelmällisesti seuraa isogonaalisuus, riittää todistaa (i) $\Rightarrow$ (iii). Olkoot A ja B z_0-kärkisen käyräviivaisen kulman sivut alueessa D. Valitaan säännölliset parametrisaatiot $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ A:lle ja $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ B:lle siten, että $\alpha(a) = \beta(c) = z_0$. Vastaavasti $\alpha_1(t) = f(\alpha(t))$ ja $\beta_1(t) = f(\beta(t))$ ovat kaarien $f(A)$ ja

$f(B)$ säännölliset parametrisaatiot. Kuvauksen f differentioituvuudesta z_0:ssa seuraa ketjusäännön perusteella

$$\alpha_1'(a) = f'(\alpha(a))\alpha'(a) = f'(z_0)\alpha'(a)$$

ja vastaavasti

$$\beta_1'(c) = f'(\beta(c))\beta'(c) = f'(z_0)\beta'(c).$$

Nyt, koska $f'(z_0) \neq 0$, Määritelmän 1.6 kohdan (5) nojalla

$$\theta[f(A), f(B)] = \theta[f'(z_0)\alpha'(a), f'(z_0)\beta'(c)] = \theta[\alpha'(a), \beta'(c)] = \theta(A, B).$$

(2) (ii) $\Rightarrow$ (i)
Oletetaan, että f on isogonaalinen ja että $J_f(z_0) > 0$. Koska f on diffeomorfismi, sen osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y ovat olemassa, joten siihen pätee Lause 2.8. Voidaan kirjoittaa

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + d(\bar{z} - \bar{z_0}) + E(z), \tag{2.4}$$

missä $c = f_z(z_0)$, $d = f_{\bar{z}}(z_0)$ ja E on funktio, jolle pätee $|E(z)|/|z - z_0| \to 0$ kun $z \to z_0$. Nyt halutaan näyttää, että $d = 0$, mistä seuraa Lauseen 2.9 perusteella, että f on differentioituva ja $c = f_z(z_0) = f'(z_0)$.

Valitaan $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $\overline{B}(z_0, r)$ on alueen D osajoukko. Olkoon A_ψ säännöllinen kaari ja sen parametrisaatio $\alpha_\psi(t) = z_0 + te^{i\psi}$, missä $0 \leq t \leq r$. Näin määritelty A_ψ on napakoordiesityksen (Lause 1.5) mukainen jana pisteestä z_0 pisteeseen $z_0 + re^{i\psi}$. Jos $0 < \psi < \pi$, kaaret A_0 ja A_ψ ovat z_0-kärkisen käyräviivaisen kulman kyljet. Koska $\alpha_\psi'(t) = e^{i\psi}$, $\theta(A_0, A_\psi) = Arg(e^{i\psi}/e^{i\cdot 0}) = \psi$. Nyt, kuvakaarella $f(A_\psi)$ on säännöllinen parametrisaatio $\beta_\psi(t) = f(\alpha_\psi(t)) = f(z_0+te^{i\psi})$, kun $0 \leq t \leq r$. Nyt yhtälöstä (2.4) seuraa

$$\begin{aligned}
\beta_\psi'(0) &= \lim_{t\to 0+} \frac{f(z_0 + te^{i\psi}) - f(z_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0+} \left(ce^{i\psi} + de^{-i\psi} + \frac{e^{i\psi}E(z_0 + te^{i\psi})}{te^{i\psi}} \right) \\
&= ce^{i\psi} + de^{-i\psi}.
\end{aligned}$$

Selvästi $ce^{i\psi} + de^{-i\psi} \neq 0$, kun $0 < \psi < \pi$. Voidaan merkitä

$$\theta(f(A_0), f(A_\psi)) = \mathrm{Arg}(\frac{ce^{i\psi} + de^{-i\psi}}{c + d}),$$

kun $0 < \psi < \pi$. Koska f on isogonaalinen,

$$\left| \mathrm{Arg}(\frac{ce^{i\psi} + de^{-i\psi}}{c + d}) \right| = \psi, \tag{2.5}$$

kun $0 < \psi < \pi$. Tarkastellaan murtolausekkeen imaginääriosaa. Koska $c\bar{d}e^{i\psi} + \bar{c}de^{-i\psi} = 2Re(c\bar{d}e^{i\psi})$ ja $|c|^2 - |d|^2 = J_f(z_0) > 0$, imaginääriosa on

$$\begin{aligned} Im(\frac{ce^{i\psi} + de^{-i\psi}}{c+d}) &= Im(\frac{ce^{i\psi} + de^{-i\psi}(\bar{c}+\bar{d})}{|c+d|^2}) \\ &= \frac{Im(|c|^2e^{i\psi} + c\bar{d}e^{i\psi} + \bar{c}de^{-i\psi} + |d|^2e^{-i\psi})}{|c+d|^2} \\ &= \frac{Im(|c|^2e^{i\psi} + |d|^2e^{-i\psi})}{|c+d|^2} \\ &= \frac{(|c|^2 - |d|^2)\sin\psi}{|c+d|^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Nyt, koska luvun $(ce^{i\psi} + de^{i\psi})/(c+d)$ imaginääriosa on epänegatiivinen, täytyy argumentin päähaaran sijaita välillä $[0, \pi]$. Tällöin yhtälö (2.5) yksinkertaistuu muotoon

$$\operatorname{Arg}(\frac{ce^{i\psi} + de^{-i\psi}}{c+d}) = \psi = \operatorname{Arg}(e^{i\psi}). \tag{2.6}$$

Tästä seuraa, että kaikilla $\psi \in [0, \pi]$, $(ce^{i\psi} + de^{-i\psi})/(c+d)$ on luvun $e^{i\psi}$ positiivinen reaalinen monikerta, mikä tarkoittaa, että $(c + de^{-2i\psi})/(c+d)$ on positiivisella reaaliakselilla. Kuitenkin, jos $d \neq 0$, pistejoukko $\{(c + de^{-2i\psi})/(c+d) : \psi \in [0, \pi]\}$ on ympyrä, jonka keskipiste on $c/(c+d)$ ja säde $|d|/|c+d|$, jolloin tämä joukko ei voi sijaita yksinomaan positiivisella reaaliakselilla. Täytyy siis olla $d = 0$, jolloin $f'(z_0)$ on olemassa, mikä haluttiinkin osoittaa.

(3) (iii) $\Rightarrow$ (i)

Tässä voidaan käyttää olennaisesti täysin samaa päättelyä, kuin (ii) $\Rightarrow$ (i) Laskelmat, joilla yhtälö (2.5) saatiin muotoon (2.6) voidaan jättää pois, sillä yhtälö (2.5) seuraa suoraan konformisuudesta ja väitettä $J_f(z_0) > 0$ käytettiin vain näissä laskelmissa. □

LAUSE 2.18. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$. Kuvaus $f : D \to \mathbb{C}$ on alueen D konformikuvaus jos ja vain jos se on analyyttinen injektio.*

TODISTUS. ([**1**, s. 382]) Jos f on D:n konformikuvaus, f on määritelmällisesti diffeomorfismi, jolloin se on Lauseen 2.17 perusteella differentioituva jokaisessa D:n pisteessä, toisin sanoen analyyttinen. Vastaavasti jos f on analyyttinen injektio, sen ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa alueessa D ja Lauseen 2.3 perusteella $J_f(z) = |f'(z)|^2 > 0$ kaikilla $z \in D$. Siitä seuraa, että f on diffeomorfismi, jolloin Lauseesta 2.17 seuraa, että f on konforminen jokaisessa D:n pisteessä, eli f on D:n konformikuvaus. □

LUKU 3

Möbius-kuvaukset

Tärkeä esimerkki konformikuvauksista ovat Möbius-kuvaukset. Nämä kuvaukset ovat suhteellisen yksinkertaisia ja hyvin käyttäytyviä. Lisäksi niillä on monia hyödyllisiä ominaisuuksia, kuten se, että ne säilyttävät yleistetyt ympyrät. Myöhemmin tutkielmassa osoitetaan myös, että konformikuvaukset yksikkökiekolta itselleen ovat Möbius-kuvauksia. Tämä luku perustuu pääosin lähteeseen [**2**].

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$. Tällöin kuvausta

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

kutsutaan Möbius-kuvaukseksi.

ESIMERKKI 3.2 (Yksinkertaisia Möbius-kuvauksia). ([**6**, s. 138]) Olkoon $b \in \mathbb{C}$. Kuvausta muotoa $f(z) = z + b$ kutsutaan translaatioksi. Tällainen kuvaus siirtää kompleksitason pisteitä kompleksilukua b vastaavan vektorin verran.

Olkoon $a \in \mathbb{C}$. Kuvausta $f(z) = az$ kutsutaan

- kierroksi, jos $|a| = 1$,
- dilaatioksi, jos $a \in \mathbb{R}+$,
- venytykseksi, jos $a \in \mathbb{R}$ ja $a \geq 1$,
- kutistukseksi, jos $a \in \mathbb{R}$ ja $0 < a < 1$.

Dilaatio venyttää tai kutistaa kompleksitason alueita ja kierto kiertää kompleksitason pisteitä origon ympäri. Yleinen tapaus $a \in \mathbb{C}$ saadaan yhdistämällä kierto ja dilaatio:

$$a = |a| \frac{a}{|a|}.$$

Kuvausta $f(z) = \frac{1}{z}$ kutsutaan inversioksi. Se vaihtaa nollan ja äärettömyyspisteen paikat keskenään.

LAUSE 3.3. *Möbius-kuvaukset muodostavat ryhmän, jossa laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen.*

TODISTUS. ([**4**, s. 4]) Neutraalialkio on selvästi $f(z) = z$. Osoitetaan, että Möbius-kuvausten yhdiste on Möbius-kuvaus. Olkoot $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ja $g(w) = \frac{ew+f}{gw+h}$ siten, että

$ad - bc \neq 0$ ja $eh - fg \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} f \circ g(w) &= \frac{a(\frac{ew+f}{gw+h}) + b}{c(\frac{ew+f}{gw+h}) + d} \\ &= \frac{\frac{aew+af}{gw+h} + \frac{b(gw+h)}{gw+h}}{\frac{cew+cf}{gw+h} + \frac{d(gw+h)}{gw+h}} \\ &= \frac{aew + af + bgw + bh}{cew + cf + dgw + dh} \\ &= \frac{(ae+bg)w + af + bh}{(ce+dg)w + cf + dh}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi tarkastellaan lauseketta $(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg)$.

$$\begin{aligned} &(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \\ &= acef + adeh + bcfg + bdgh - acef - adfg - bceh - bdgh \\ &= adeh + bcfg - adfg - bceh \\ &= ad(eh - fg) - bc(eh - fg) = (ad - bc)(eh - fg) \neq 0. \end{aligned}$$

Todistetaan käänteisalkion olemassaolo. Olkoon $f(z)$ Möbius-kuvaus. Etsitään Möbius-kuvaus $g(w)$ siten, että $f \circ g(w) = w$ ja $g \circ f(z) = z$ kaikilla w ja z. Olkoot f ja g aikaisemmin esiteltyä muotoa. Tällöin

$$f \circ g(w) = \frac{(ae+bg)w + af + bh}{(ce+dg)w + cf + dh}.$$

Nyt halutaan e ja g s.e. $ce + dg = 0$. Valitaan $e = -d$ ja $g = c$. Nyt

$$\frac{(ae+bg)w + af + bh}{(ce+dg)w + cf + dh} = \frac{(-ad+bc)w + af + bh}{cf + dh}.$$

Nyt nähdään, että luonnollinen valinta vakiotermin eliminoimiseksi, $h = -a$ ja $f = b$, muuttaa myös w:n kertoimen ykköseksi. Nyt

$$\frac{(-ad+bc)w + af + bh}{cf + dh} = \frac{(-ad+bc)w + ab - ab}{bc - ad} = \frac{(-ad+bc)w}{-ad + bc} = w.$$

f:n oikeanpuoleinen käänteisalkio on siis $g(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$. Tämä on Möbius-kuvaus, koska $((-d)(-a) - bc) = ad - bc \neq 0$. Osoitetaan, että g on myös f:n vasemmanpuoleinen käänteisalkio, eli $g \circ f(z) = z$. Saadaan

$$\begin{aligned} g \circ f(z) &= \frac{-d(\frac{az+b}{cz+d}) + b}{c(\frac{az+b}{cz+d}) - a} \\ &= \frac{\frac{-daz-db+bcz+db}{cz+d}}{\frac{acz+cb-acz-da}{cz+d}} \\ &= \frac{(-da+bc)z}{-da+bc} = z. \end{aligned}$$

□

LAUSE 3.4. *Kaikki Möbius-kuvaukset voidaan esittää kierron, dilaation, translaation ja inversion yhdisteenä (kuvausten $m_1(z) = z + \beta$,$m_2(z) = \lambda z$ ja $m_3(z) = \frac{1}{z}$, $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$, yhdisteenä).*

TODISTUS. ([**6**, s. 139]) Aiemmin näytettiin, että kuvaukset muotoa $f(z) = \lambda z$ ovat kierron ja dilaation yhdisteitä. Olkoon $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius-kuvaus. Jos $c = 0$,

$$f(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Nyt $f(z) = m_1 \circ m_2(z)$, missä $\lambda = \frac{a}{d}$ ja $\beta = \frac{b}{d}$. Jos $c \neq 0$,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}cz + \frac{a}{c}d - \frac{a}{c}d + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{da}{c}}{cz+d}.$$

Nyt määritellään kuvaukset $f_1(z) = \frac{c}{b-\frac{da}{c}}z$, $f_2(z) = z + \frac{d}{b-\frac{da}{c}}$, $f_3(z) = \frac{1}{z}$ ja $f_4(z) = z + \frac{a}{c}$. Nyt $f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$, missä f_1 on muotoa m_2, f_2 ja f_4 ovat muotoa m_1 ja f_3 on muotoa m_3. □

LAUSE 3.5. *Möbius-kuvaukset muotoa $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$ ovat konformisia kaikkialla paitsi pisteessä $z = -d/c$.*

TODISTUS. Lauseen 3.4 perusteella kaikki Möbius-kuvaukset voidaan esittää kuvausten $m_1(z) = z + \beta$,$m_2(z) = \lambda z$ ja $m_3(z) = \frac{1}{z}$, $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$, yhdisteenä. Selvästi kuvaukset muotoa m_1 ja m_2 ovat analyyttisiä injektioita koko $\hat{\mathbb{C}}$:ssä. Myös $m_3(z) = \frac{1}{z}$ on analyyttinen injektio muualla, kuin pisteessä $z = 0$, mikä vastaa Möbius-kuvauksen yleisessä muodossa tapausta $z = -d/c$. □

Möbius-kuvaukset voidaan laskujen helpottamiseksi samaistaa matriiseihin. Kuvaukset muotoa $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ vastaavat matriiseja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, missä $\det A = ad - bc \neq 0$. Selvästi kaikilla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ matriisit $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$ vastaavat samaa Möbius-kuvausta, sillä $\frac{\lambda az+\lambda b}{\lambda cz+\lambda d} = \frac{az+b}{cz+d}$. Kuvausten yhdistäminen vastaa matriisituloa. Käytetään esimerkkinä edellisen todistuksen laskua. Kuvausten yhdiste $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ vastaa matriisituloa $A_4A_3A_2A_1$.

ESIMERKKI 3.6. Lauseen 3.4 todistuksessa käytetty kuvausten yhdiste $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ vastaa matriisituloa $A_4A_3A_2A_1$. Siten

$$\begin{aligned} A &= A_4A_3A_2A_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{b-\frac{da}{c}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{c}{b-\frac{da}{c}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{b-\frac{da}{c}} & \frac{b}{b-\frac{da}{c}} \\ \frac{c}{b-\frac{da}{c}} & \frac{d}{b-\frac{da}{c}} \end{bmatrix} = \frac{1}{b - \frac{da}{c}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisi A vastaa siis kuvausta $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ niin kuin pitikin.

MÄÄRITELMÄ 3.7. Olkoon f kuvaus, joka ei ole identiteetti. Pistettä z_0, jolle

$$f(z_0) = z_0$$

sanotaan kuvauksen kiintopisteeksi.

LAUSE 3.8. *Möbius-kuvauksella, joka ei ole identiteetti, on yksi tai kaksi kiintopistettä.*

TODISTUS. ([**2**, s. 25]) Olkoon $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius-kuvaus. Jos $c = 0$, $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Tällöin kiintopisteitä ovat äärettömyyspiste (koska $f(\infty) = \infty$) ja yhtälön $\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$ ratkaisu. Jos $\frac{a}{d} = 1$, yhtälöllä ei ole ratkaisua ja jos $\frac{a}{d} \neq 1$, yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu muotoa $z = \frac{b}{d-a}$. Siis jos $c = 0$, f:llä on yksi tai kaksi kiintopistettä.

Jos $c \neq 0$, yhtälön $\frac{az+b}{cz+d} = z$ ratkaisut ovat toisen asteen yhtälön $cz^2+(d-a)z-b = 0$ ratkaisut, joita on yksi tai kaksi. □

SEURAUS 3.9. *Jos Möbius-kuvauksella on kolme kiintopistettä, se on identiteettikuvaus.*

LAUSE 3.10. *Olkoot $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ erillisiä pisteitä. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus f, jolla $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ ja $f(z_3) = \infty$.*

TODISTUS. ([**2**, s. 25]) Olkoot $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ erillisiä pisteitä. Nyt voidaan konstruoida kuvaus

$$m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{(z_2 - z_3)z - z_1(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)z - z_3(z_2 - z_1)},$$

jolle pätee $m(z_1) = 0, m(z_2) = 1$ ja $m(z_3) = \infty$. Koska z_k ovat erillisiä pisteitä,

$$(z_2 - z_3)(-z_3)(z_2 - z_1) - (-z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) = (z_2 - z_3)(z_2 - z_1)(z_1 - z_3) \neq 0,$$

jolloin m on Möbius-kuvaus.

Seuraavaksi todistetaan yksikäsitteisyys. Olkoot m, n Möbius-kuvauksia, joilla $m(z_1) = 0 = n(z_1)$, $m(z_2) = 1 = n(z_2)$ ja $m(z_3) = \infty = n(z_3)$. Nyt kuvauksella $m \circ n^{-1}$ on kolme kiintopistettä, eli se on Seurauksen 3.9 perusteella identiteetti. Nyt m ja n^{-1} ovat määritelmällisesti käänteisalkioita, jolloin $m = n$. □

SEURAUS 3.11. *Olkoot $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ erillisiä pisteitä ja $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ erillisiä pisteitä . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus f, jolla $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ ja $f(z_3) = w_3$.*

TODISTUS. ([**2**, s. 25]) Olkoot m ja n Möbius-kuvaukset, joilla $m(z_1) = 0, m(z_2) = 1, m(z_3) = \infty, n(w_1) = 0, n(w_2) = 1$ ja $n(w_3) = \infty$. Nyt kuvaukselle $m \circ n^{-1}$ pätee $m \circ n^{-1}(z_1) = w_1, m \circ n^{-1}(z_2) = w_2$ ja $m \circ n^{-1}(z_3) = w_3$, eli $m \circ n^{-1}$ on haluttu kuvaus. □

MÄÄRITELMÄ 3.12. Yleistetyiksi ympyröiksi kutsutaan laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbb{C}}$ euklidisia ympyröitä ja euklidisia suoria lisättynä äärettömyyspisteellä. Yleistetyt ympyrät noudattavat yhtälöä

$$A|z|^2 + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0,$$

missä $A, C \in \mathbb{R}$ ja $|B|^2 - AC > 0$. (Kun $A = 0$, kyseessä on euklidinen suora, muulloin ympyrä.)

Vastaavasti yleistetyksi kiekoksi kutsutaan kiekkoa, sen ulkopuolta tai suoran määräämää puolitasoa.

Lause 3.13. *Möbius-kuvaukset kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.*

Todistus. ([**2**, s. 28]) Mielivaltainen yleistetty ympyrä K noudattaa yhtälöä

$$A|z|^2 + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0,$$

missä $A, C \in \mathbb{R}$ ja $|B|^2 - AC > 0$. Lauseen 3.4 perusteella kaikki Möbius-kuvaukset voidaan esittää kuvausten kuvausten $m_1(z) = z + \beta$,$m_2(z) = \lambda z$ ja $m_3(z) = \frac{1}{z}$, $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$, yhdisteenä. Selvästi kuvaukset tyyppiä m_1 ja m_2 säilyttävät yleistetyn ympyrän yhtälön. Tarkastellaan kuvauksen $m_3(z) = \frac{1}{z}$ kuvapisteitä $z^{-1} = w$. (Ympyrän K) Kuvapisteet w toteuttavat yhtälön

$$\frac{A}{|w|^2} + \frac{B}{w} + \frac{\bar{B}}{\bar{w}} + C = 0,$$

joka saadaan muunnettua muotoon

$$C|w|^2 + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0,$$

joka on myös yleistetyn ympyrän, merk. $\tilde{K}$, yhtälö. Nyt, piste $z = 0$ kuuluu K:hon silloin, kun $C = 0$, eli täsmälleen silloin kun $w = 1/0 = \infty$ kuuluu $\tilde{K}$:hon. Vastaavasti piste $z = \infty$ kuuluu K:hon täsmälleen silloin kun $w = 1/\infty = 0$ kuuluu $\tilde{K}$:hon. Tästä seuraa, että $f(K) = \tilde{K}$, missä $\tilde{K}$ on yleistetty ympyrä. □

Seuraus 3.14. *Möbius-kuvaukset kuvaavat yleistetyt kiekot yleistetyiksi kiekoiksi.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. [**2**, s. 29]. □

Esimerkki 3.15. ([**2**, s. 187]) Konstruoidaan Möbius-kuvaus, joka kuvaa yksikkökiekon

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

puolitasolle

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy : y > 0\}.$$

Lauseen 3.10 perusteella voimme konstruoida kuvauksen $m(z)$, jolla $m(i) = 0, m(-1) = 1$ ja $m(-i) = \infty$:

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{z - i}{z + i} \cdot \frac{-1 + i}{-1 - i} \\ &= \frac{z - i}{z + i} \cdot (-i) \\ &= \frac{-iz - 1}{z + i}. \end{aligned}$$

Tällainen kuvaus siis kuvaa $\mathbb{D}$:n reunan $\mathbb{H}$:n reunalle. Täytyy vielä tarkistaa, että tällainen kuvaus kuvaa yksikkökiekon sisäpisteen puolitason $\mathbb{H}$ pisteeksi. Valitaan

$\mathbb{D}$:n sisäpiste $z = 0$:

$$\begin{aligned} m(0) &= \frac{-i \cdot 0 - 1}{0 + i} \\ &= -\frac{-1}{i} \\ &= \frac{-i}{-1} \\ &= i. \end{aligned}$$

Nyt $Im(m(0)) = 1 > 0$, joten $m(0) \in \mathbb{H}$.

LUKU 4

Hyperbolinen metriikka

4.1. Hyperbolinen geometria

Geometrian tulokset perustuvat kulloinkin käytössä olevaan aksioomajärjestelmään. Aksioomajärjestelmien tulisi olla minimaalisia, eli sellaisia, että yhtään aksioomaa ei voi johtaa muista aksioomista. Yksi laajasti käytössä oleva geometrian aksioomajärjestelmä on Hilbertin aksioomajärjestelmä. Yhtä sen aksioomista, paralleeliaksioomaa, on historiallisesti yritetty johtaa muista aksioomista.

Aksiooma 4.1 (Paralleeliaksiooma). Olkoon l suora ja p piste sen ulkopuolella. Tällöin pisteen p kautta kulkee täsmälleen yksi suoran l kanssa yhdensuuntainen suora.

Geometriaa, joka toteuttaa Hilbertin aksioomat lukuunottamatta paralleeliaksioomaa kutsutaan hyperboliseksi geometriaksi. Siinä paralleeliaksiooman korvaa sen negaatio hyperbolinen aksiooma:

Aksiooma 4.2 (Hyperbolinen aksiooma). Olkoon l suora ja p piste sen ulkopuolella. Tällöin pisteen p kautta kulkee ainakin kaksi eri suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa.

Tästä aksioomasta seuraa muun muassa että kolmion kulmien summa on aidosti pienempi kuin 180 astetta. Ristiriidaton hyperbolisen geometrian malli osoittaa, että paralleeliaksioomaa ei voi johtaa muista Hilbertin aksioomista. Yksi tällainen malli, siis malli, joka toteuttaa hyperbolisen geometrian aksioomat on Poincarén kiekkomalli [**5**]. Hyperboliseen geometriaan emme muuten syvenny, mutta malli on aiheen kannalta hyvin tärkeä, sillä konformikuvaukset Poincarén kiekolta itselleen säilyttävät kulmien lisäksi myös hyperboliset suorat ja metriikan.

4.2. Metriikka Poincarén kiekossa

Tämän kappaleen hyperboliseen metriikkaan ja etäisyyteen liittyvät tulokset perustuvat pääasiassa lähteen [**2**] kuvaukseen. Tässä lähteessä metriikkaa käsitellään pääosin hyperbolisessa puolitasossa, joten tuloksia on muokattu sopimaan Poincarén kiekkoon.

Määritelmä 4.3 (Poincarén kiekko). Yksikkökiekkoa

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

kutsutaan Poincarén kiekoksi.

Määritelmä 4.4. Suorat Poincarén kiekossa ovat yksikköympyrän kanssa ortogonaaliset yleistetyt ympyrät.

Lause 4.5. *Kuvaukset, jotka kuvaavat yksikkökiekon $\mathbb{D}$ konformisesti itselleen ovat funktiot $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ muotoa*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z+c}{1+\bar{c}z}, \tag{4.1}$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $|c| < 1$, tai ekvivalenttia muotoa

$$f(z) = \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}, \tag{4.2}$$

missä $|a|^2 - |c|^2 = 1$. Tällaiset kuvaukset muodostavat ryhmän Möb($\mathbb{D}$), jonka laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen.

Todistus. ([**1**, s. 388]) Selvästi yhtälön (4.1) muotoa olevat kuvaukset ovat Möbius-kuvauksia ja siten konformisia kaikkialla, paitsi pisteessä $\frac{-1}{|\bar{c}|}$, joka on yksikkökiekon ulkopuolella. Seuraavaksi osoitetaan että tällaiset kuvaukset ovat yksikkökiekon itsekuvauksia. Olkoon $|z| < 1$. Merkitään $z = x + iy$ ja $c = u + iv$. Nyt

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |e^{i\theta}\frac{z+c}{1+\bar{c}z}| \\
&= |e^{i\theta}||\frac{z+c}{1+\bar{c}z}| \\
&= \frac{|z+c|}{|1+\bar{c}z|} \\
&= \frac{|x+u+i(y+v)|}{|1+xu+yv+i(uy-vx)|} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+2xu+u^2+y^2+2yv+v^2}}{\sqrt{1^2+x^2u^2+y^2v^2+2xu+2yv+2xuyv+u^2y^2-2uyxv+v^2x^2}}
\end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+u^2+v^2}{1+(x^2+y^2)(u^2+v^2)}} \tag{4.3}$$

Koska $|z| < 1$ ja $|c| < 1$, täytyy olla myös $|z|^2 = x^2 + y^2 < 1$ ja $|c|^2 = u^2 + v^2 < 1$. Voidaan merkitä $1 - (x^2 + y^2) := a > 0$ ja $1 - (u^2 + v^2) := b > 0$. Nyt lauseke (4.3) saadaan muotoon

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+u^2+v^2}{1+(x^2+y^2)(u^2+v^2)}} = \sqrt{\frac{1-a+1-b}{1+(1-a)(1-b)}} = \sqrt{\frac{2-a-b}{2-a-b+ab}} < 1,$$

eli $|f(z)| < 1$, mikä haluttiinkin todistaa.

Selvästi $f = g \circ h$, missä $g(z) = e^{i\theta}z$ ja $h(z) = \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$. Koska g on pelkkä kierto origon suhteen, selvästi $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Edellisen perusteella $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Funktiolle h voidaan konstruoida käänteisfunktio $k(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$ ja lyhyellä laskulla voidaan osoittaa, että $h \circ k(z) = z$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$. Tästä seuraa, että

$$\mathbb{D} = h \circ k(\mathbb{D}) = h(k(\mathbb{D}) \subset h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D},$$

eli $h(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Kuvaukset muotoa f siis kuvaavat yksikkökiekon konformisesti itselleen ja koska ne ovat Möbius-kuvauksia, ne muodostavat Lauseen 3.3 perusteella ryhmän, jonka laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen.

Vielä täytyy osoittaa, että kaikki yksikkökiekon konformisesti itselleen kuvaavat funktiot ovat tätä muotoa. Olkoon f mielivaltainen tällainen kuvaus. Olkoon $c = -f^{-1}(0)$ ja $k(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$. Tarkastellaan funktiota $g(z) = f \circ k(z)$. Tällöin myös g kuvaa yksikkökiekon konformisesti itselleen siten, että

$$g(0) = f(k(0)) = f(-c) = f(f^{-1}(0)) = 0.$$

Nyt Schwarzin lemmasta (Lause 2.13) seuraa, että $|g'(0)| \leq 1$. Koska myös g:n käänteiskuvaus kuvaa yksikkökiekon konformisesti itselleen säilyttäen origon, Schwarzin lemmasta seuraa $|(g^1)'(0)| = \frac{1}{|g'(0)|} \leq 1$, jolloin yhtäsuuruus seuraa ja $|g'(0)| = 1$. Schwarzin lemman perusteella tämä on mahdollista vain, kun g on muotoa $g(z) = e^{i\theta}z$ jollain reaaliluvulla θ. Nyt, koska k on funktion h käänteisfunktio, f saa muodon

$$f(z) = g \circ k^{-1}(z) = e^{i\theta}\frac{z+c}{1+\bar{c}z}.$$

Osoitetaan lopuksi, että kuvaukset voi kirjoittaa myös yhtälön (4.2) muodossa. Olkoon a kompleksiluku, jolle pätee $|a|^2 = 1 - |c|^2$ ja $\mathrm{Arg}(a/\bar{a}) = \theta$. Nyt

$$\begin{aligned} e^{i\theta}\frac{z+c}{1+\bar{c}z} &= \frac{a}{\bar{a}}\frac{z+c}{1+\bar{c}z} \\ &= \frac{\frac{a}{\bar{a}}z + \frac{a}{\bar{a}}c}{1+\bar{c}z} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{\bar{a}}z + \frac{c}{\bar{a}}}{\frac{\bar{c}}{a}z + \frac{1}{a}} \tag{4.4}$$

ja

$$|\frac{1}{\bar{a}}|^2 - |\frac{\bar{c}}{a}|^2 = \frac{1-|c|^2}{|a|^2} = \frac{1-|c|^2}{1-|c|^2} = 1.$$

Nyt voimme määritellä muuttujat $a_1 := \frac{1}{\bar{a}}$ ja $c := \frac{\bar{c}}{a}$, jolloin lauseke (4.4) saadaan muotoon

$$\frac{a_1 z + \bar{c}_1}{c_1 z + \bar{a}_1}$$

missä $|a_1|^2 - |c_1|^2 = 1$, kuten haluttiinkin. $\square$

MÄÄRITELMÄ 4.6. Poincarén kiekossa hyperbolinen metriikka on

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}.$$

MÄÄRITELMÄ 4.7. Sileän käyrän $f : [a,b] \to \mathbb{D}$ hyperbolinen kaarenpituus $l_{\mathbb{D}}$ lasketaan kaavalla:

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{D}}(f) &= \int_f \lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| \\ &= \int_a^b \frac{2}{1-|f(t)|^2}|f'(t)|dt. \end{aligned}$$

Jos $f : [a,b] \to \mathbb{D}$ on paloittain sileä käyrä, eli on olemassa pisteet $t_0, t_1 \ldots, t_n$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ siten, että f on jatkuvasti differentioituva jokaisella välillä $[t_{k-1}, t_k]$, sen hyperbolinen kaarenpituus on

$$l_{\mathbb{D}}(f) = \sum_{1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{2}{1 - |f(t)|^2} |f'(t)| dt.$$

Yksinkertaisuuden vuoksi merkitään paloittain sileän käyrän kaarenpituutta samoin kuin sileän käyrän kaarenpituutta.

Määritelmä 4.8. Pisteiden $z, w \in \mathbb{D}$ välinen hyperbolinen etäisyys $d_{\mathbb{D}}$ määritellään

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \inf\{l_{\mathbb{D}}(f) : f \in \Gamma[z, w]\},$$

missä $\Gamma[z, w]$ on kaikkien sellaisten paloittain sileiden käyrien joukko, jotka yhdistävät pisteet z ja w.

Lause 4.9. *Möb($\mathbb{D}$):n kuvaukset ovat isometrioita hyperbolisen kaarenpituuden suhteen, eli jokaisella $g \in$ Möb($\mathbb{D}$)*

$$l_{\mathbb{D}}(f) = l_{\mathbb{D}}(g \circ f)$$

kaikilla paloittain sileillä käyrillä f.

Todistus. Muodollisesti lauseen väite tarkoittaa seuraavaa:

$$\int_{g \circ f} \lambda_{\mathbb{D}}(z) |dz| = \int_{f} \lambda_{\mathbb{D}}(z) |dz|,$$

eli

$$\int_{a}^{b} \lambda_{\mathbb{D}}(g(f(t))) |g'(f(t))| |f'(t)| dt = \int_{a}^{b} \lambda_{\mathbb{D}}(f(t)) |f'(t)| dt,$$

missä $\lambda_{\mathbb{D}}$ on metriikka kiekossa $\mathbb{D}$, $f : [a, b] \to \mathbb{D}$ on polku kiekossa $\mathbb{D}$ ja g on konforminen kuvaus kiekolta $\mathbb{D}$ itselleen muotoa

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}},$$

missä $|a|^2 - |c|^2 = 1$. Kuvauksen g derivaatta on

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{acz + a\bar{a} - caz - c\bar{c}}{(cz + \bar{a})^2} \\ &= \frac{|a|^2 - |c|^2}{(cz + \bar{a})^2} \\ &= \frac{1}{(cz + \bar{a})^2}. \end{aligned}$$

Olennaisesti siis riittää osoittaa, että

$$\lambda_{\mathbb{D}}(g(f(t))) |g'(f(t))| = \lambda_{\mathbb{D}}(f(t)).$$

Tarkastellaan lauseketta $\lambda_{\mathbb{D}}(g(f(t)))|g'(f(t))|$. Selkeyden vuoksi lyhennetään $f(t) := f$.

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbb{D}}(g(f(t)))|g'(f(t))| &= \frac{2}{1-|\frac{af+\bar{c}}{cf+\bar{a}}|^2}\left|\frac{1}{(cf+\bar{a})^2}\right| \\ &= \frac{2}{1-\frac{|af+\bar{c}|^2}{|cf+\bar{a}|^2}}\cdot\frac{1}{|cf+\bar{a}|^2} \\ &= \frac{2}{|cf+\bar{a}|^2-|af+\bar{c}|^2}.\end{aligned}$$

Nyt riittää osoittaa $|cf+\bar{a}|^2-|af+\bar{c}|^2 = 1-|f|^2$. Merkitään

- $f(t) = x(t)+iy(t)$, lyhennetään $f = x+iy$,
- $a = u+iv$,
- $c = p+iq$.

Merkinnästä seuraa

$$|a|^2-|c|^2 = \sqrt{u^2+v^2}^2-\sqrt{p^2+q^2}^2 = u^2+v^2-p^2-q^2,$$

joten oletuksen perusteella

$$u^2+v^2-p^2-q^2 = 1.$$

Nyt

$$\begin{aligned}cf+\bar{a} &= (p+iq)(x+iy)+u-iv \\ &= px+ipy+iqx-qy+u-iv \\ &= (px-qy+u)+i(py+qx-v)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}af+\bar{c} &= (u+iv)(x+iy)+p-iq \\ &= ux+iuy+ivx-vy+p-iq \\ &= (ux-vy+p)+i(uy+vx-q).\end{aligned}$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
&|cf+\bar{a}|^2-|af+\bar{c}|^2\\
&=\sqrt{(px-qy+u)^2+(py+qx-v)^2}^2-\sqrt{(ux-vy+p)^2+(uy+vx-q)^2}^2\\
&=(px-qy+u)^2+(py+qx-v)^2-(ux-vy+p)^2+(uy+vx-q)^2)\\
&=(px)^2+(qy)^2+u^2-2pxqy+2pxu-2qyu\\
&\quad+(py)^2+(qx)^2+v^2+2pyqx-2pyv-2qxv\\
&\quad-((ux)^2+(vy)^2+p^2-2uxvy+2uxp-2vyp\\
&\quad+(uy)^2+(vx)^2+q^2+2uyvx-2uyq-2vxq)\\
&=x^2(p^2+q^2-u^2-v^2)+y^2(q^2+p^2-v^2-u^2)\\
&\quad+u^2+v^2-p^2-q^2+2pxqy-2qypx+2uxvy-2uyvx\\
&\quad+2pxu-2uxp-2qyu+2qyu-2pyv+2vyp-2qxv+2vxq\\
&=1-(x^2+y^2)=1-\sqrt{x^2+y^2}^2=1-|f|^2.
\end{aligned}
$$

□

SEURAUS 4.10. *Möb($\mathbb{D}$):n kuvaukset ovat isometrioita hyperbolisen etäisyyden suhteen, eli jokaisella $g \in$ Möb($\mathbb{D}$)*

$$d_{\mathbb{D}}(z,w)=d_{\mathbb{D}}(g(z),g(w)).$$

TODISTUS. ([**2**, s. 74]) Olkoon $f:[a,b]\to\mathbb{D}$ paloittain sileä käyrä, joka yhdistää pisteet z ja w ja $g\in$ Möb($\mathbb{D}$). Tällöin selvästi $g\circ f(a)=g(z)$ ja $g\circ f(b)=g(b)$, joten $g\circ f\in\Gamma[g(z),g(w)]$, mistä seuraa suoraan,

$$\{g\circ f: f\in\Gamma[z,w]\}\subset\Gamma[g(z),g(w)].$$

Koska Möb($\mathbb{D}$):n kuvaukset ovat isometrioita kaarenpituuden suhteen,

$$l_{\mathbb{D}}(g\circ f)=l_{\mathbb{D}}(f)$$

kaikille $f\in\Gamma[z,w]$, joten

$$
\begin{aligned}
d_{\mathbb{D}}(g(z),g(w))&=\inf\{l_{\mathbb{D}}(h): h\in\Gamma[g(z),g(w)]\}\\
&\le\inf\{l_{\mathbb{D}}(g\circ f): f\in\Gamma[z,w]\}\\
&\le\inf\{l_{\mathbb{D}}(f): f\in\Gamma[z,w]\}=d_{\mathbb{D}}(z,w).
\end{aligned}
$$

Koska g on kääntyvä kuvaus ja $g^{-1}\in$ Möb($\mathbb{D}$), voimme toistaa saman päättelyn, jolloin

$$\{g^{-1}\circ h: h\in\Gamma[g(z),g(w)]\}\subset\Gamma[z,w]$$

ja

$$
\begin{aligned}
d_{\mathbb{D}}(z,w))&=\inf\{l_{\mathbb{D}}(f): f\in\Gamma[z,w]\}\\
&\le\inf\{l_{\mathbb{D}}(g^{-1}\circ h): h\in\Gamma[g(z),g(w)]\}\\
&\le\inf\{l_{\mathbb{D}}(h): h\in\Gamma[g(z),g(w)]\}=d_{\mathbb{D}}(g(z),g(w)),
\end{aligned}
$$

jolloin yhtäsuuruus seuraa, eli $d_{\mathbb{D}}(z,w))=d_{\mathbb{D}}(g(z),g(w))$. □

MÄÄRITELMÄ 4.11. Alue A varustettuna funktiolla d_A on metrinen avaruus (A, d_A), jos d_A on etäisyysfunktio, eli

- $d_A(x, y) \geq 0$, missä $d_A(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,
- $d_A(x, y) = d_A(y, x)$,
- $d_A(x, z) \leq d_A(x, y) + d_A(y, z)$

kaikilla $x, y, z \in A$.

LAUSE 4.12. *Poincarén kiekko varustettuna hyperbolisella etäisyydellä,* $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$ *on metrinen avaruus.*

TODISTUS. ([**2**, s. 74]) Riittää näyttää, että etäisyysfunktio $d_{\mathbb{D}}$ täyttää määritelmän 4.11 kriteerit.
(i) $d_{\mathbb{D}}(z, w) \geq 0$, missä $d_{\mathbb{D}}(z, w) = 0$ jos ja vain jos $z = w$.
Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{D}$, $f \in \Gamma(z, w)$. Nyt kaarenpituus on määritelmällisesti

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{D}}(f) &= \int_f \lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| \\ &= \int_a^b \frac{2}{1 - |f(t)|^2}|f'(t)|dt. \end{aligned}$$

Integroitavan funktion epänegatiivisuudesta seuraa vääjäämättä integraalin epänegatiivisuus. Lisäksi integroitavan funktion aidosta positiivisuudesta seuraa, että integraali

$$\int_a^b \frac{2}{1 - |f(t)|^2}|f'(t)|dt > 0$$

aina, kun $a \neq b$. Selvästi taas, jos $b = a$, integroidaan yhden pisteen yli, jolloin

$$\int_a^b \frac{2}{1 - |f(t)|^2}|f'(t)|dt = 0.$$

Yhden pisteen yli integroiminen tarkoittaa luonnollisesti tapausta $z = w$.
(ii) $d_{\mathbb{D}}(z, w) = d_{\mathbb{D}}(w, z)$.
Vertaillaan polkuja joukoissa $\Gamma[z, w]$ ja $\Gamma[w, z]$. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{D}, f \in \Gamma[z, w]$ ja $h : [b, a] \to [a, b], h(t) = a + b - t$, jolloin $h'(t) = -1$. Nyt $(f \circ h) \in \Gamma[w, z]$ ja

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{D}}(f \circ h) &= \int_{f \circ h} \frac{2}{1 - |z|^2}|dz| \\ &= \int_b^a \frac{2}{1 - |f \circ h(t)|^2}|(f \circ h)'(t)|dt \\ &= \int_b^a \frac{2}{1 - |f(h(t))|^2}|f'(h(t))||h'(t)|dt \\ &= -\int_b^a \frac{2}{1 - |f(h(t))|^2}|f'(h(t))|dt \\ &= \int_a^b \frac{2}{1 - |f(s)|^2}|f'(s)|ds = l_{\mathbb{D}}(f). \end{aligned}$$

Siten jokaiselle joukon $\Gamma[z, w]$ polulle voidaan konstruoida joukon $\Gamma[w, z]$ polku ja vastaavalla päättelyllä myös päinvastainen pätee. Joukot ovat siis samat, joten niillä on sama infimum. Siten

$$d_{\mathbb{D}}(z,w) = \inf\{l_{\mathbb{D}}(f) : f \in \Gamma[z,w]\} = \inf\{l_{\mathbb{D}}(f) : f \in \Gamma[w,z]\} = d_{\mathbb{D}}(w,z).$$

(iii) $d_{\mathbb{D}}(x,z) \leq d_{\mathbb{D}}(x,y) + d_{\mathbb{D}}(y,z)$.
Käytetään todistamiseen antiteesiä: oletetaan, että on olemassa pisteet $x, y, z \in \mathbb{D}$ siten, että

$$d_{\mathbb{D}}(x,z) > d_{\mathbb{D}}(x,y) + d_{\mathbb{D}}(y,z).$$

Merkitään

$$\varepsilon = d_{\mathbb{D}}(x,z) - (d_{\mathbb{D}}(x,y) + d_{\mathbb{D}}(y,z)).$$

Nyt, koska $d_{\mathbb{D}}(x,y) = \inf\{l_{\mathbb{D}}(f) : f \in \Gamma[x,y]\}$, on olemassa paloittain sileä käyrä $f : [a,b] \to \mathbb{D}$, $f \in \Gamma[x,y]$ siten, että

$$l_{\mathbb{D}}(f) - d_{\mathbb{D}}(x,y) < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{4.5}$$

Vastaavasti on olemassa paloittain sileä käyrä $g : [b,c] \to \mathbb{D}$, $g \in \Gamma[y,z]$ siten, että

$$l_{\mathbb{D}}(g) - d_{\mathbb{D}}(y,z) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Olkoon $h : [a,c] \to \mathbb{D}$ käyrien f ja g yhdiste:

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & \text{kun } t \leq b \\ g(t), & \text{kun } t > b. \end{cases}$$

Koska paloittain sileiden käyrien yhdiste on myös paloittain sileä käyrä, $h \in \Gamma[x,z]$. Saadaan

$$l_{\mathbb{D}}(h) = l_{\mathbb{D}}(f) + l_{\mathbb{D}}(g) < d_{\mathbb{D}}(x,y) + d_{\mathbb{D}}(y,z) + \varepsilon.$$

Koska $d_{\mathbb{D}}(x,z) \leq l_{\mathbb{D}}(h)$,

$$d_{\mathbb{D}}(x,z) < d_{\mathbb{D}}(x,y) + d_{\mathbb{D}}(y,z) + \varepsilon,$$

mistä seuraa ristiriita yhtälön (4.5) kanssa. Antiteesi ei päde, jolloin alkuperäinen väite on totta.
Lopuksi todetaan, että etäisyys on olemassa jokaisen pisteparin $x, y \in \mathbb{D}$ välillä, sillä jokaisen pisteparin välillä on olemassa paloittain sileä käyrä alueessa $\mathbb{D}$. □

4.3. Riemannin kuvauslause

Riemann osoitti vuonna 1851, että jokainen yhdesti yhtenäinen alue voidaan kuvata konformisesti yksikkökiekolle. Tässä tutkielmassa tarvitsemme lausetta hyperbolisen metriikan määrittelemiseen mielivaltaiselle yhdesti yhtenäiselle alueelle. Määritellään ensin muodollisesti mitä tarkoitetaan yhdesti yhtenäisellä alueella.

Määritelmä 4.13. Olkoon γ suljettu tie kompleksitasossa ja $c \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Tien γ kierrosluku pisteen c ympäri on

$$n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - c} dz.$$

Määritelmä 4.14. Suljettu tie alueessa A on nollahomologinen kun sen kierrosluku jokaisen pisteen $c \in \mathbb{C} \setminus A$ ympäri on 0.

MÄÄRITELMÄ 4.15. Alue on yhdesti yhtenäinen kun jokainen sen suljettu tie on nollahomologinen.

Intuitiotasolla yhdesti yhtenäinen alue tarkoittaa yhtenäistä aluetta, jossa ei ole reikiä. Esimerkiksi Jyväskylä on yhdesti yhtenäinen alue, mutta Espoo ei ole, sillä sen sisällä on Kauniainen, joka ei ole osa Espoota. Espoossa sijaitseva tie Kauniaisten ympäri ei olisi nollahomologinen, koska Kauniaisissa on Espooseen kuulumaton piste c, jonka ympäri tien kierrosluku ei ole 0.

LAUSE 4.16 (Riemannin kuvauslause). *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue, $\Omega \neq \mathbb{C}$ ja $z_0 \in \Omega$. On olemassa yksikäsitteinen konformikuvaus $f : \Omega \to \mathbb{D}$, jolla $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.*

TODISTUS. Sivuutetaan, ks.[**1**, s. 420]. □

4.4. Hyperbolinen metriikka yhdesti yhtenäisessä alueessa

Tähän mennessä käsitellyt asiat kulminoituvat hyperbolisen metriikan määrittelemiseen yhdesti yhtenäisille alueille. Tämä kappale perustuu lähteeseen [**3**].

MÄÄRITELMÄ 4.17. Olkoon f konformikuvaus yhdesti yhtenäiseltä alueelta $\Omega \subset \mathbb{C}$ kiekolle $\mathbb{D}$. Tällöin hyperbolinen metriikka alueessa Ω määritellään

$$\lambda_\Omega(z) = \lambda_\mathbb{D}(f(z))|f'(z)|.$$

LAUSE 4.18. *Hyperbolinen metriikka λ_Ω yhdesti yhtenäisessä alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ on yksikäsitteinen.*

TODISTUS. ([**3**, s. 25]) Määritelmällisesti hyperbolisen metriikan alueessa Ω määrittelee konformikuvaus $f : \Omega \to \mathbb{D}$. Riemannin kuvauslauseen perusteella tällainen kuvaus on olemassa kaikilla yhdesti yhtenäisillä alueilla. Riittää osoittaa, että metriikka on sama riippumatta kuvauksesta.

Kaikki kuvaukset, jotka kuvaavat alueen Ω kiekolle $\mathbb{D}$ ovat muotoa $h \circ f$, missä f on jokin konformikuvaus Ω:lta $\mathbb{D}$:lle ja h konformikuvaus $\mathbb{D}$:ltä itselleen, siis joukon Möb($\mathbb{D}$) kuvaus. Joukon Möb($\mathbb{D}$) konformikuvaukset ovat isometrioita hyperbolisen metriikan suhteen (Lause 4.9), joten kaikille w

$$\lambda_\mathbb{D}(w) = \lambda_\mathbb{D}(h(w))|h'(w)|.$$

Olkoon siis $g = h \circ f$. Nyt, ketjusäännön ja edellisen yhtälön perusteella

$$\begin{aligned}\lambda_\mathbb{D}(g(z))|g'(z)| &= \lambda_\mathbb{D}(h(f(z)))|h'(f(z))||f'(z)| \\ &= \lambda_\mathbb{D}(f(z))|f'(z)|.\end{aligned}$$

□

Hyperbolisen metriikan avulla voidaan määritellä myös hyperbolinen kaarenpituus sekä etäisyys alueessa Ω:

MÄÄRITELMÄ 4.19. Paloittain sileän käyrän f hyperbolinen kaarenpituus $l_\Omega(f)$ alueessa Ω lasketaan kaavalla:

$$l_\Omega(f) = \int_f \lambda_\Omega(z)|dz|,$$

missä $\lambda_\Omega(z)$ on hyperbolinen metriikka alueessa Ω.

MÄÄRITELMÄ 4.20. Pisteiden $z, w \in \Omega$ välinen hyperbolinen etäisyys määritellään

$$\inf\{l_\Omega(f) : f \in \Gamma[z,w]\},$$

missä $\Gamma[z,w]$ on kaikkien sellaisten paloittain sileiden käyrien joukko, jotka yhdistävät pisteet z ja w.

Hyperbolinen metriikka voidaan siis määritellä Poincarén metriikan avulla yksikäsitteisesti mille tahansa yhdesti yhtenäiselle alueelle. Käytetään esimerkkinä Poincarén puolitasoa $\mathbb{H}$, joka on toinen merkittävä hyperbolisen geometrian malli.

ESIMERKKI 4.21. Johdetaan hyperbolinen metriikka Poincarén puolitasolle. Esimerkissä 3.15 konstruoimme kuvauksen $m : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$:

$$m(z) = \frac{-iz-1}{z+i}.$$

Nyt tarvitaan tämän kuvauksen käänteiskuvaus, joka konstruoidaan Lauseen 3.3 todistuksen perusteella:

$$m^{-1}(z) = \frac{-iz-1}{z+i} := n(z).$$

Käänteiskuvauksella n on siis sama kaava, kuin alkuperäisellä kuvauksella m. Käänteiskuvauksen derivaatta on

$$n'(z) = \frac{-i(z+i)-(-iz-1)}{(z+i)^2} = \frac{-iz+1+iz+1}{(z+i)^2} = \frac{2}{(z+i)^2}.$$

Nyt hyperbolinen metriikka Poincarén puolitasolle $\mathbb{H}$ on

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbb{H}}(z) &= \lambda_{\mathbb{D}}(n(z))|n'(z)| \\ &= \frac{2}{1-|\frac{-iz-1}{z+i}|^2}\left|\frac{2}{(z+i)^2}\right| \\ &= \frac{4}{|z+i|^2-|-iz-1|^2}.\end{aligned}$$

Nyt merkitään $z = x+iy$, jolloin $z+i = x+i(y+1)$ ja $-iz-1 = (y-1)-ix$. Saadaan

$$\begin{aligned}\frac{4}{|z+i|^2-|-iz-1|^2} &= \frac{4}{x^2+(y+1)^2-(y-1)^2-x^2} \\ &= \frac{4}{y^2+2y+1-y^2+2y-1} \\ &= \frac{4}{4y} = \frac{1}{Im(z)}.\end{aligned}$$

Hyperbolinen metriikka Poincarén puolitasossa on siis $\frac{1}{Im(z)}$. Täysin samaa metriikkaa käytetään yleisesti puolitasomallissa, esimerkiksi lähteessä [**2**].

LAUSE 4.22. *Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue, g paloittain sileä käyrä alueessa Ω, $x, y \in \Omega$ ja $f : \Omega \to \mathbb{D}$ konformikuvaus. Tällöin*

$$l_\Omega(g) = l_{\mathbb{D}}(f \circ g)$$

ja

$$d_\Omega((x,y) = d_{\mathbb{D}}(f(x), f(y)).$$

TODISTUS. Olkoon g paloittain sileä käyrä yhdesti yhtenäisessä alueessa Ω ja $f:\Omega\to\mathbb{D}$ konformikuvaus. Nyt

$$\begin{aligned}
l_\Omega(g) &= \int_g \lambda_\Omega(z)|dz| \\
&= \int_g \lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)||dz| \\
&= \int_a^b \lambda_{\mathbb{D}}(f(g(t)))|f'(g(t))||g'(t)|dt \\
&= \int_a^b \lambda_{\mathbb{D}}((f\circ g)(t))|(f\circ g)'(t)|dt \\
&= \int_{f\circ g} \lambda_{\mathbb{D}}(z)|z| = l_{\mathbb{D}}(f\circ g).
\end{aligned}$$

Olkoot $x, y \in \Omega$. Nyt

$$\begin{aligned}
d_\Omega(x,y) &= \inf\{l_\Omega(g) : g \in \Gamma[x,y]\} \\
&= \inf\{l_{\mathbb{D}}(f\circ g) : f\circ g \in \Gamma[f(x), f(y)]\} = d_{\mathbb{D}}(f(x), f(y)).
\end{aligned}$$

□

SEURAUS 4.23. *Mielivaltainen yhdesti yhtenäinen alue Ω varustettuna hyperbolisella etäisyydellä d_Ω on metrinen avaruus.*

TODISTUS. Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue ja $x, y \in \Omega$. Nyt Riemannin kuvauslauseen perusteella on olemassa konformikuvaus $f:\Omega\to\mathbb{D}$, jolloin Lauseen 4.22 perusteella

$$d_\Omega(x,y) = d_{\mathbb{D}}(f(x), f(y)).$$

Koska konformikuvaus f on injektio, Lauseen 4.12 perusteella d_Ω määrittelee etäisyysfunktion alueessa Ω. □

Lähdeluettelo

[1] Bruce P. Palka: *An Introduction To Complex Function Theory.* Springer-Verlag New York Inc., 1991.

[2] James W. Anderson: *Hyperbolic Geometry.* Springer-Verlag London Limited, 1999.

[3] A. F. Beardon, D. Minda: *The hyperbolic metric and geometric function theory*, Proceedings of the International Workshop On Quasiconformal Mappings and their Applications, 2006.

[4] C. Carathéodory: *Conformal Representation*, Cambridge University Press, 2. laitos, 1963.

[5] L. Kurittu, V. Hokkanen, L. Kahanpää: *Geometria*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2008.

[6] Tero Kilpeläinen: *Kompleksianalyysi*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2006.

[7] H. L. Royden: *Hyperbolicity In Complex Analysis*, Annales Academicaæ Scientiarum Fennicæ, Series A.I. Matematica, Volumen 13, 387-400, 1988.