Reaaliluvut: historiaa, teoriaa ja pedagogiikkaa

Laura Haapala

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2021

Tiivistelmä: Laura Haapala, *Reaaliluvut: historiaa, teoriaa ja pedagogiikkaa* (engl. *Real numbers: history, theory and pedagogy*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 41 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2021.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustuttaa lukija reaalilukujen historiaan, Dedekindin leikkauksiin sekä siihen, kuinka reaaliluvut määritellään opiskelijoille lukion ensimmäisenä opiskeluvuonna. Lukijalle pyritään myös avaamaan sitä, millainen prosessi matemaattisen käsitteen ymmärtämisen taustalla oikeastaan on. Reaalilukuja on osattu käyttää sujuvasti matematiikassa antiikin Kreikan ajoista lähtien, vaikka niille ei ole ollut olemassa täsmällistä määritelmää. Lopulta 1870-luvulla pieni joukko lahjakkaita matemaatikoita kykeni luomaan reaaliluvuille useamman erilaisen täsmällisen määritelmän, joista suosituimpia käytetään edelleen. Saksalainen Richard Dedekind käytti määritelmässään niin kutsuttuja Dedekindin leikkauksia, joihin päästään tutustumaan tarkemmin tässä tutkielmassa.

Reaalilukujen täsmällisen määritelmän ymmärtäminen vaatii jo pitkälle kehittynyttä matemaattista ajattelukykyä ja tästä johtuen reaaliluvut esitellään lukiolaisille usein vain hyvin yleisellä tasolla ilman, että mennään täsmällisiin yksityiskohtiin. Matemaattisen käsitteen ymmärtämiseen kuuluu monta erilaista vaihetta, joiden yhteydessä käytetään erilaisia apukeinoja, kuten ajattelumalleja. Nämä mallit näyttelevätkin tärkeää roolia matematiikan opiskelussa, sillä niiden avulla uusia haastavia asioita pystytään jäsentämään selkeämpään ja informatiivisempaan muotoon. Monelle lukiolaiselle reaaliluvun käsite on vielä verrattain epäselvä, mikä todennäköisesti johtuu sekä opiskelijoiden vielä rakenteilla olevasta matemaattisesta ajattelutaidosta että havainnosta, jonka mukaan irrationaaliluvut ja yleisesti lukualueen laajentaminen ovat opiskelijoille vaikeita aiheita. Lukijalle myös kerrotaan minkälaisin keinoin voitaisiin helpottaa tätä opiskelijoiden läpikäymää ymmärtämisen prosessia.

Tutkielman lopussa on toteutettu pienimuotoinen vertailu siitä, kuinka lukion pitkän matematiikan oppikirjoissa reaaliluvut esitellään opiskelijoille. Vertailun seurauksena löydetään huomattavia eroja muun muassa irrationaalilukuihin liittyvässä tiedon määrässä sekä asioiden esitysjärjestyksessä. Pohdintaa käydään myös siitä, mitä mahdollisia syitä näille oppikirjoihin päätyneille sisällöllisille ratkaisuille voisi olla.

Sisältö

Johdanto

Reaalilukujen joukko, jota merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, koostuu rationaalilukujen ja irrationaalilukujen joukoista. Reaalilukuja tarvitaan muun muassa pituuksien, pinta-alojen, jatkuvuuden, derivaatan ja integraalin yhteydessä, mutta myös siihen, että voidaan todistaa matemaattisten ominaisuuksien pätevän kaikille luvuille, eikä vain jollekin tietylle lukujoukolle. Graafisesti reaaliluvut voidaan kuvata lukusuorana, jossa siis jokaista lukusuoran pistettä vastaa jokin reaaliluku. Ehkä juuri reaalilukujen vastaavuus kaikkiin mahdollisiin lukuihin tekee reaalilukujen joukosta ajatuksen tasolla niin sanotusti helpon lukujoukon. Todellisuudessa reaalilukujen täsmällinen ymmärtäminen vaatii suuria muutoksia ajattelussa aiempiin ja yksinkertaisempiin lukujoukkoihin verrattuna, sillä esimerkiksi rationaali- ja irrationaalilukujen tiheysominaisuus vaatii hyvin erilaista ajattelua verrattuna luonnollisten lukujen ja kokonaislukujen käsittelyyn.

Tässä tutkielmassa reaalilukuja tarkastellaan kolmesta eri näkökulmasta. Niiden avulla lukijalle pyritään muodostamaan kokonaisvaltaisempi käsitys siitä, minkälaisia ymmärryksen vaiheita reaalilukujen hallinta pitää sisällään ja mistä tähän lukujoukkoon vahvasti liitetyt vaikeudet voisivat jouhtua. Ensimmäisessä luvussa käsitellään reaalilukujen läpikäymää historiaa ja toisessa luvussa tutustutaan Dedekindin leikkauksiin, joiden avulla reaaliluvut onnistuttiin 1870-luvulla ensimmäisiä kertoja määrittelemään täsmällisesti. Kolmannessa luvussa perehdytään tarkemmin reaalilukujen oppimisen ja opettamisen haasteisiin ja esimerkiksi siihen, millainen prosessi uuden käsitteen oppimisen taustalla on, ja kuinka lukiotason oppikirjat valmistavat opiskelijat tämän haastavan ja monipuolisen lukualueen hallintaan.

On mahdotonta jäljittää ensimmäisiä havaintoja reaaliluvuista, mutta jo 400 vuotta ennen ajanlaskumme alkua antiikin Kreikassa havaittiin yhteismitattomuuden ongelma, joka osaltaan edisti irrationaaliluvun käsitteen syntyä ja uuden lukualueen, reaalilukujen joukon, löytämistä. Satojen vuosien ajan reaalilukuja osattiin käyttää sujuvasti laskuissa, vaikka täsmällistä määritelmää niille ei ollut. Erilaisia lukuja käytettiin täysin vapaasti aina 1800-luvulle saakka, kunnes tämän merkittävän vuosisadan aikana muun muassa matemaattisen analyysin tutkimuksellinen kehitys eteni siihen pisteeseen, että reaalilukujen tarkan määritelmän luominen oli väistämättä edessä. Vuosisadan loppuun mennessä reaaliluvut olivat vihdoin saaneet useamman matematiikon toimesta täsmällisen ja toimivan määritelmän.

Usein matemaattisessa kirjallisuudessa reaalilukujen perusteiden yhteydessä mainitaan kaksi nimeä: Richard Dedekind ja Georg Cantor. Heidän luomansa määritelmät reaaliluvuille ovat olleet kaikista suosituimpia, ja tutkielman ensimmäisessä luvussa lukijalle esitellään perusideat näistä kahdesta määritelmästä. Toisessa luvussa tutustutaan tarkemmin niistä toiseen, Dedekindin leikkausten avulla luotuun määritelmään. Tämän luvun pääasiallisena kirjallisuuslähteenä on käytetty Inder K. Ranan teosta *From numbers to analysis*. Luvun lopussa esitetään lukijalle vielä mielenkiintoinen havainto siitä, kuinka jo noin 400 vuotta e.a.a. muuan Eudoksos Knidoslainen oli hämmästyttävän lähellä tätä Dedekindin reaalilukujen määritelmää luodessaan suhteiden teoriaa.

Oppiminen on erittäin mielenkiintoinen ja monimutkainen prosessi, jonka selittämiseen ei varmastikaan yksi pro gradu -tutkielma riitä. Jokaista opettajaksi valmistuvaa varmasti jollakin tasolla kiinnostaa se, millaisia asioita oppimisen taustalla on ja mitkä asiat taas vaikeuttavat ymmärtämistä. Niinpä myös tässä tutkielmassa halutaan tutkia näitä asioita ja sitä, minkälaisin eväin oppikirjat valmistavat opiskelijoita tulevaan. Matematiikka on oppiaine, joka usein jakaa vahvasti mielipiteitä: siitä joko tykätään tai sitten sitä vihataan. Usein myös kuulee puheita ”matikkapään puutteesta” tai kuinka ”minä en voi ymmärtää matematiikkaa”. ”Matikkapäänä” voidaan ehkä pitää sitä matemaattista ajattelutaitoa, joka jokaisella kehittyy omaan tahtiin sen mukaan, kuinka paljon tätä taitoa haastaa ja jalostaa eteenpäin. Matemaattinen ajattelutaito pitää sisällään muun muassa ymmärrystä matematiikan kielestä eli symbolimuotoisista esityksistä, kykyä jäsennellä vaikeita asioita itselleen selkeämpään muotoon esimerkiksi ajattelumallien kautta ja taitoa soveltaa opittuja asioita uusien asioiden yhteydessä. Kokemus ”matikkapään” puuttumisesta voi siis kyllä olla ihan aiheellinen, jos ei ole saanut tarpeeksi tukea ja työvälineitä oman ajattelun kehittämiseen ja taidot tällä saralla ovat heikot. Tutkielman kolmannessa luvussa halutaankin painottaa opiskelijan läpikäymää mentaalista työtä, joka on suuressa roolissa uuden asian oppimisessa.

Kolmannen luvun lopussa on pieni, neljä oppikirjaa sisältävä tutkimus siitä, kuinka lukion ensimmäisenä syksynä opiskelijoille esitellään reaaliluvut. Tutkimuksen tarkoituksena on vertailla oppikirjojen sisältöjä ja esitystapoja reaalilukuihin liittyen, sekä pohtia mitkä esitystavoista saattavat toimia paremmin kuin toiset. Käsiteltävät oppikirjat on julkaistu hieman eri aikoina viimeisen kahdenkymmenen vuoden aikana, joten on myös mahdollista havaita miten suomalaisen lukiotason matematiikan opetuskirjallisuuden ihanteet ovat muuttuneet. Vertailupohjana käytetään Kaarina Merenluodon väitöskirjaa, jossa on tutkittu laajasti lukiolaisten reaaliluku-käsitteen muodostumista ja sitä, millaisiin asioihin pitäisi erityisesti kiinnittää huomiota, kun puhutaan lukiolaisen reaalilukukäsityksestä. Merenluodon teos toimiikin pohjana koko kolmannen luvun aihepiirille.

LUKU 1

Reaalilukujen historiaa

Ihmiset ovat kautta aikojen tarvinneet numeroita ja jonkinlaista laskentatapaa, jotta arkipäiväisen elämän toiminnot ovat onnistuneet. On mahdotonta määrittää tarkasti numeroiden ja laskentaprosessin synnyn alkuperää, mutta joidenkin arvioiden mukaan tämä prosessi olisi alkanut jopa 30 000 vuotta sitten. Numeroiden syntyyn on varmasti ollut täysin luonnollinen selitys: esimerkiksi tarve ilmaista ja erottaa yksi useamman joukosta, esimerkiksi yksi lammas laumasta lampaita. Aluksi määrää on luultavasti kuvattu vain käsimerkein: käsien sormilla päästiin jo osoittamaan kymmenen olion kokoelmia, ja kahteenkymmeneen päästiin sormet ja varpaat yhdistämällä. Ongelmia kuitenkin ilmeni, kun haluttiin ilmaista vielä isompia kokoelmia, ja tätä varten täytyi keksiä uusia merkintätapoja. Lopulta tätä tarvetta vastaamaan on kehitetty erilaisia symboleja, joiden avulla suuriakin määriä ja kokoelmia ollaan voitu kuvailla.

Kun ihminen on alkanut elämään suuremmissa yhteisöissä ja talojen rakentaminen, maanviljely ja kaupankäynti ovat yleistyneet, on syntynyt myös tarve systemaattiselle aritmetiikalle. Ensimmäisenä numerojärjestelmänä pidetään babylonialaisten kehittämää nuolenpääkirjoitusta, joka on saanut alkunsa noin 2000 vuotta ennen ajanlaskumme alkua. Parisataa vuotta myöhemmin, noin 1700 vuotta e.a.a., myös egyptiläiset olivat kehittäneet oman symbolijärjestelmänsä numeroille. Noin 500 vuotta e.a.a. kreikkalaisten luomassa numerojärjestelmässä jokainen kreikkalainen kirjain vastasi yhtä lukua. [**14**, luku 2]

1.1. Antiikin Kreikan aika

Näin jälkikäteen katsottuna antiikin Kreikassa tehtiin 400-luvulla e.a.a. erittäin merkittäviä matemaattisia huomioita ja havaintoja, jotka olivat reaalilukujen synnyn ja kehityksen kannalta tärkeässä roolissa. Tämä niin kutsuttu ”matematiikan sankarikausi” oli kokonaisuudessaan tärkeää aikaa länsimaisen kulttuurin kehityksen kannalta: matematiikka kukoisti koko Välimeren alueella, ja joitakin matemaattisia ja tieteellisiä lähteitä tältä ajalta on säilynyt meidän päiviimme asti. Sankarikaudella pohdittiin muun muassa kolmea kuuluisaa klassista ongelmaa, jotka askarruttivat yli 2000 vuotta matemaatikoita ympäri maailmaa. Nämä kolme harppi ja viivain -konstruktio-ongelmaa olivat ympyrän neliöiminen, kulman kolmijako ja kuution kahdentaminen, mitkä lopulta 1800-luvulla todistettiin muun muassa reaalilukujen ominaisuuksia hyödyntäen mahdottomiksi konstruktiotehtäviksi. [**1**, luku 5]

Antiikin kreikkalaiset käyttivät sujuvasti kokonaislukuja ja murtolukuja esimerkiksi maanmittauksessa ja kaupankäynnissä, mutta varsinaisessa matematiikassa murtolukujen roolissa käytettiin kokonaislukujen suhteita. Geometriaan perustuva matematiikka on näytellyt suurta roolia antiikin Kreikassa, sillä se oli oiva apuväline käytännön sovelluksissa, kuten maanmittauksessa ja rakentamisessa. Tärkeä havainto 400-luvulla e.a.a., joka antoi sysäyksen reaalilukujen synnylle, oli yhteismitattomuuden ymmärtäminen. Tämän havainnon ydinideana oli se, että edes geometriassa itsessään kokonaisluvut eivät riitä yksinkertaisten perusominaisuuksien selittämiseen. [**1**, luku 5] Ei esimerkiksi ole olemassa kokonaislukuja a ja b siten, että neliön sivun ja lävistäjän suhde olisi $a : b$. Tänä päivänä ilmaisemme asian sanomalla, että neliön sivun ja lävistäjän suhde $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku, jota ei voida ilmaista kahden kokonaisluvun osamääränä. [**9**]

Tuolloin siis huomattiin, että jonkinlainen uusi lukujoukko on olemassa. Antiikin Kreikassa vahvasti elänyt pythagoralaisuuden koulukunta, jonka aatteena oli ”kaikki on lukua”, järkkyi, kun yhteismitattomuuden keksiminen käytännössä romutti kokonaislukuihin perustuvan uskon. Yhteismitattomien suureiden tiedostaminen aiheutti paljon epävarmuutta kreikkalaisten matemaatikoiden keskuudessa. Tämän seurauksena esimerkiksi alkeismatematiikassa välteltiin suhteiden käyttöä, ja pituuksia ja pinta-aloja ajateltiin enemmänkin vain geometrisina objekteina, eikä lukuina. [**9**]

Matematiikan tunnetuin ja merkittävin teos, Eukleideen kirjoittama *Alkeet* (kreikaksi *Stoikheia*, latinaksi *Elementa*), kirjoitettiin noin 300 vuotta e.a.a. [**1**, luku 7] Vaikka kaikki matemaatikot tuntevat Eukleides Aleksandrialaisen nimen ja hänen teoksensa on kaikkien aikojen menestyksekkäin matematiikan oppikirja, ei hänen elämästään tiedetä oikeastaan mitään. Edes Eukleideen syntymäpaikkaa ei tiedetä, ja elinaikakin on vain karkea arvio, noin 325-265 e.a.a. Eukleideen nimi viittaa siihen, että hän toimi opettajana Aleksandriassa, Egyptissä, ja häneen liittyvissä legendoissa häntä on kuvailtu luonteeltaan kohteliaana, oikeudenmukaisena, tarkkana ja nöyränä matemaatikkona. [**12**]

Yhteismitattomien suhteiden aiheuttama epävarmuus vaikutti myös Eukleideen työhön: keksintö kyseenalaisti verrannollisuuteen perustuvat todistukset, ja Eukleides välttelikin niiden käyttöä mahdollisimman pitkään. Alkeiden viides kirja tarttui kuitenkin lopulta suhteiden ja verrantojen teoriaan. Viides ja kymmenes kirja (joka käsittelee yhteismitattomuutta) ovat itse asiassa kaikista ihailluimmat osiot Alkeiden kolmentoista kirjan joukosta. Kuten hyvin tiedetään, Eukleides ei itse keksinyt kaikkia teoksessaan olevia tuloksia ja todistuksia, vaan käytti runsaasti hyväkseen edeltäjiensä töitä. Alkeiden viidennessä kirjassa esitellään Eudoksos Knidoslaisen (408-355 e.a.a.) kehittämä suhteiden teoria, jonka avulla yhteismitattomuuden aiheuttama kriisi saatiin torjuttua. [**1**, luku 7] Eudoksos vaikutti pääosin synnyinkaupungissaan Knidoksessa, Jooniassa (nykyisen Turkin länsirannikolla). Suhteiden teorian keksiminen kuuluu hänen merkittävimpiin töihinsä, mutta Eudoksos vaikutti myös astronomian puolella: häntä pidetään ensimmäisenä, joka kartoitti tähdet ja kokosi kartan tunnetusta maailmasta. [**13**]

Kreikkalaiset olivat ilmeisesti ajatelleet, että neljän suureen välillä on verranto $a : b = c : d$, jos kummallekin suhteelle $a : b$ ja $c : d$ pätee, että suhteen suurempi luku on pienemmän sama kokonainen monikerta, pienempi luku on kummankin jakojäännöksen sama kokonainen monikerta ja että jakojäännös on taas uuden jakojäännöksen sama kokonainen monikerta, ja niin edelleen. [**1**, luku 6] Tämä määritelmä oli kaikinpuolin hankala, ja Eudoksoksen keksimä määritelmä hyväksyttiinkin yleisesti käyttöön. Eudoksoksen määritelmä sanoo, että suhteet $a : b$ ja $c : d$ ovat verrannollisia, jos kaikille kokonaisluvuille m ja n pätee tasan yksi seuraavista

$$ma > nb \quad \text{ja} \quad mc > nd$$

tai

$$ma = nb \quad \text{ja} \quad mc = nd$$

tai

$$ma < nb \quad \text{ja} \quad mc < nd.$$

Viidennessä kirjassa todistetaan myös koko matematiikan perusteiden kannalta tärkeitä asioita, jotka vastaavat nykyisin reaalilukujen laskusääntöjä. Esimerkiksi seuraavat todistukset löytyvät Alkeiden viidennestä kirjasta:

- jos $n, m \in \mathbb{N}$ ja a on suure, niin $m(na) = (mn)a$
- jos $a : c = b : c$, niin $a = b$
- jos $a : b = c : d$ ja $c : d = e : f$, niin $a : b = e : f$.

Eudoksoksen kuuluisa muotoilu suhteiden teoriasta ei itse asiassa ole kovin kaukana 1800-luvun reaalilukujen määritelmästä, kuten myöhemmin saadaan huomata.

1.2. Matka kohti 1800-lukua ja täsmällistä määritelmää

Antiikin Kreikan ajan jälkeen koitti pitkä, jopa 2000 vuoden ajanjakso, jolloin reaalilukujen teoria ei juurikaan kehittynyt. Reaalilukuja osattiin kyllä käyttää matematiikan parissa sujuvasti, mutta koska pohjalla ei ollut tarkkaa ja yhdenmukaista määritelmää, aiheutui siitä ajan myötä erilaisia ongelmia. Nämä ongelmat taas luonnollisesti aiheuttivat epävarmuutta matemaatikoiden keskuudessa ja hidastivat omalta osaltaan matematiikan kehitystä. Matematiikan perustana pidettiin pitkään geometriaa, ja lähes kaikki matemaattiset käsitteet ja todistukset pohjautuivat siihen tavalla tai toisella. Vuosisatojen saatossa herättiin lopulta siihen, että geometria ei ehkä kuitenkaan anna tarpeeksi täsmällistä pohjaa kaikille matemaattisille perusteluille. Tämän pitkän ajanjakson loppupuolella matematiikassa tapahtuneet kehitykset ja muutokset alkoivat vähitellen luoda painetta täsmälliselle reaalilukujen määritelmälle.

Yhtenä tällaisena kehityksenä voidaan pitää desimaalilukujen käytön yleistymistä. Desimaalilukujen käytöstä on näyttöä jo muinaisen Kiinan, keskiaikaisen Arabian ja renessanssin Euroopan ajoilta, mutta laajaan käyttöön ne tulivat vasta 1500-luvun loppupuolella. Tuohon aikaan kehitettiin logaritmitaulukot, jotka osaltaan vaikuttivat desimaalilukujen yleistymiseen. 1500-luvulta on jo todisteita siitä, kuinka flaamilainen (nimitys etnisen ryhmän edustajalle nykyisen Belgian alueella) Simon Stevin (1548-1620) käytti sujuvasti töissään reaalilukujen desimaalimuotoja. Hän ei tosin muotoillut minkäänlaista täsmällistä tulkintaa reaaliluvuista, vaan esitti jopa hyvin kiistanalaisen näkemyksen siitä, että rationaaliluvuilla ja irrationaaliluvuilla ei olisi merkittävää eroa. 1600-luvun alussa desimaaliluvut saivat esitysmuodon, joka on käytössä edelleen. [**1**, luku 16] [**15**] Desimaalilukujen luonteenomaista jakautumista päättyviin tai päättymättömiin, ja jaksollisiin tai jaksottomiin lukuihin voidaan pitää asiana, joka saattoi herätellä matemaatikoissa ajatusta rationaalilukujen ja irrationaalilukujen yhdistämisestä yhdeksi suureksi lukujoukoksi.

Analyysin kehittyminen oli myös tärkeässä asemassa reaalilukujen tarkan määritelmän synnylle. Analyysi kehitettiin 1600-luvulla päättymättömien prosessien tutkimukseen, ja sen aihepiireihin kuului muun muassa jatkuvuuden, integraalin ja derivaatan tutkiminen. Analyysissä käytettiin yleisesti infinitesimaaleihin pohjautuvia määritelmiä ja todistuksia, joiden huomattiin olevan melko alttiita loogisille vastaväitteille. Tämän matemaattisen osa-alueen kokema tutkimuksellinen kehitys 1800-luvun loppupuolella varmisti, että reaalilukujen tarkan määritelmän puutteen aiheuttamia ongelmia ei voitu enää ohittaa. [**1**, luku 21]

1800-luvulla matematiikassa tapahtui yleisesti todella paljon: matematiikka kehittyi suurin harppauksin, ja sitä alettiin kehittää paljon abstraktimpaan suuntaan. Matematiikan harrastaminen myös yleistyi kansan keskuudessa, ja tärkeitä keskuksia matematiikalle olivat muun muassa Pariisi, Berliini ja Cambridge. [**9**] 1800-luvulla täsmennettiin monia matematiikan perusteisiin liittyviä käsitteitä. Vuosisadan loppupuolella voimakkain matemaattisen tutkimuksen suuntaus oli aritmetisointi, joka vaikutti algebraan, geometriaan ja analyysiin. [**1**, luku 25] Tarve reaalilukujen tarkalle määrittelylle syntyi, kun esimerkiksi sarjojen suppenemiselle ei ollut täsmällistä perustaa, ja derivaatta ja integraali ymmärrettiin vain geometrisesta näkökulmasta. Toinen merkittävä syy reaalilukujen tarkan määritelmän tarpeelle oli se, että geometria oli menettänyt statuksensa totuutena, kun epäeuklidinen geometria löydettiin 1800-luvulla. [**14**, luku 5]

1.3. Dedekind ja Cantor

Jo 1830-luvulla tsekkiläinen Bernhard Bolzano (1781-1848) oli kehitellyt jonkinlaista reaalilukujen teoriaa rationaalisten lukujonojen raja-arvoista, mutta hänen tuotoksensa jäi tuolloin huomiotta ja julkaisematta, joten kunnia reaalilukujen täsmällisestä määritelmästä menee viisikolle, joka tietoisesti puuttui asian ytimeen ensimmäistä kertaa. Matemaatikot, jotka julkaisivat analyysin aritmetisoinnissa keskeisiä tuloksia 1870-luvulla, olivat ranskalainen Charles Mèray (1835-1911) ja saksalaiset Karl Weierstrass (1815-1897), Eduard Heine (1821-1881), Georg Cantor (1845-1918) ja Richard

Dedekind (1831-1916). Mèray ja Weierstrass kehittivät ensimmäiset analyysin aritmetisointiohjelmat, joissa reaaliluvun tarkkaan määritelmään tartuttiin. Heidän käyttämänsä menetelmät ja tulokset olivat kuitenkin melko epämääräisiä ja monimutkaisia, joten ne eivät jääneet historian kirjoihin niinkään merkittävinä teoksina. Cantor ja Dedekind olivat molemmat erittäin taitavia ja omaperäisiä matemaatikoita, mutta valitettavasti he eivät elinaikanaan saavuttaneet ammatillisesti arvostettua asemaa. Heidän työnsä reaalilukujen parissa oli kuitenkin erittäin menestyksekästä ja tänä päivänäkin näiden kahden saksalaisen luomat täsmälliset määritelmät reaaliluvuille ovat kaikista tunnetuimmat. [**1**, luku 25]

Richard Dedekind syntyi Braunschweigissä Saksassa ja hän oli nelilapsisen perheen nuorin. Yhdeksäntoistavuotiaana Dedekind ryhtyi opiskelemaan matematiikkaa Göttingenin yliopistossa ja kolme vuotta myöhemmin hän väitteli tohtoriksi. Vuonna 1854 Dedekind nimitettiin Göttingenin yliopiston luennoitsijaksi ja vuonna 1857 professoriksi Zürichin teknilliseen korkeakouluun. Vuonna 1862 Dedekind palasi takaisin Braunschweigiin, jossa hän toimi lukion opettajana uransa loppuun asti. Dedekindin merkittävimpiin töihin (reaalilukujen määritelmän lisäksi) kuului muun muassa kokonaislukujen konstruktion luominen, ja hän oli myös mukana kehittämässä algebrallisten lukujen teoriaa. [**14**, luku 5]

Georg Cantor syntyi Pietarissa ja hän osoitti jo nuorena merkkejä kiinnostuksesta ja lahjakkuudesta matematiikkaa kohtaan. Vuonna 1863 Cantor alkoi opiskelemaan Berliinin yliopistossa ja hän keskittyi opinnoissaan erityisesti matematiikkaan, fysiikkaan ja filosofiaan, mikä näyttää kehittäneen hänen omalaatuista matemaattista mielikuvitustaan. Yli kolmekymmentä vuotta Cantor toimi opettajana pienessä ja melko tuntemattomassa Hallen yliopistossa. Cantor oli toivonut saavansa Berliinin yliopiston kunniakkaan professuurin, mutta ei koskaan saavuttanut tavoitettaan. Uransa aikana Cantor osallistui esimerkiksi Fourier'n sarjojen, joukko-opin teorian ja transfiniittien lukujen kehittämiseen. Cantoria on kuvailtu yliherkäksi ja temperamenttiseksi ihmiseksi, joka joutuikin useisiin riitoihin kollegoidensa kanssa. Cantor koki elämänsä aikana monta hermoromahdusta, kärsi masennuksesta ja kuoli lopulta Hallen mielisairaalassa. [**1**, luku 25] [**14**, luku 1]

Cantor konstruoi reaaliluvut Cauchyn jonojen avulla. Hänen määritelmänsä mukaan jokainen reaaliluku saadaan raja-arvona sellaisesta rationaalilukujen jonosta, jossa jonon loppupään kaikkien termien etäisyys saadaan mielivaltaisen pieneksi, kunhan jonossa edetään tarpeeksi pitkälle. Cantor oli itse hyvin tyytyväinen luomaansa määritelmään, ja julistikin määritelmänsä olevan yksinkertaisin, kaikista luonnollisin ja välittömästi käyttökelpoinen analyysin laskuihin. Cantorin määritelmä reaaliluvuille muistuttaa Mèrayn ja Weierstrassin kehittämiä menetelmiä, mutta Cantorin konstruktiota voidaan pitää kaikista hedelmällisimpänä: Cauchyn jonojen avulla määriteltiin myöhemmin esimerkiksi metrisen avaruuden täydellisyyden käsite. [**1**, luku 25] [**3**, luku 2]

Dedekind havaitsi irrationaalilukujen ongelman, kun hän luennoi differentiaali- ja integraalilaskentaa. Hän ymmärsi, että raja-arvon määritelmää pitäisi kehittää nimenomaan aritmeettisesti, ilman tavanomaista geometriaan vetoamista, jotta käsitteestä saataisiin täsmällinen. Dedekind konstruoi reaaliluvut rationaalilukujen leikkauksien avulla. Hän näki, että rationaalilukujen alueen voi laajentaa reaalilukujen jatkumoksi, jos oletetaan, että reaaliluvuilla ja suoran pisteillä on kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus. Dedekindin leikkaukseksi kutsuttu määritelmä sanoo: oletetaan, että rationaalilukujen joukko voidaan jakaa kahteen epätyhjään joukkoon A ja B siten, että jokainen luokan A luku on pienempi kuin jokainen luokan B luku. Jos luokassa A on suurin luku tai luokassa B on pienin luku, leikkaus määrittelee rationaaliluvun. Jos taas luokassa A ei ole suurinta lukua ja luokassa B ei ole pienintä lukua, leikkaus määrittelee irrationaaliluvun. [**1**, luku 25] [**3**, luku 2] Tähän määritelmään tutustutaan tarkemmin tutkielman toisessa luvussa.

Dedekindin määritelmä reaaliluvuille oli kaikista suosituin, ja se korvasikin analyysin perustana olleen geometrisen suureen käsitteen. Kuten suhteellisen nuorena kuollut sakasalainen matemaatikko Hermann Hankel (1839-1873) oli ennakoinut, reaalilukujen määritelmien oli oltava rationaaliluvuista syntyviä ajatteluun perustuvia konstruktioita, eikä intuitiivisia suureita, jotka periytyivät Eukleideen geometriasta. [**1**, luku 25]

1.4. 1900-luku

Aivan 1800- ja 1900-lukujen taitteessa matemaattisen ajattelun "aksiomaattisen koulukunnan" johtavana matemaatikkona pidetty saksalainen David Hilbert (1862-1943) määritteli reaaliluvut vielä aksiomaattisesta näkökulmasta. Aiemmin aksiomaattisia metodeja oltiin käytetty vain geometriassa, mutta Hilbert käytti niitä ensimmäistä kertaa myös reaalilukujen määrittelemiseen teoksessaan *Grundlagen der Geometrie* (suomeksi *Geometrian perusteet*). Tämä pieni, mutta kuuluisa teos vaikuttikin voimakkaasti 1900-luvun matematiikkaan, ja se esimerkiksi muovasi matematiikan opetusta koskevia näkemyksiä. Hilbertin aksiomaattisen määritelmän mukaan abstrakti joukko $\mathbb{R}$, jossa on määritelty yhteenlasku, kertolasku ja järjestysrelaatio, on täydellinen järjestetty kunta, eli reaalilukujen kunta, jos algebrallisella struktuurilla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ on algebralliset ominaisuudet, järjestysominaisuudet ja täydellisyysominaisuus. Tämä tapa onkin nykyään yleisin menetelmä määritellä reaaliluvut, kun analyysin opetusta ja tutkimusta aloitetaan. [**1**, luku 27] [**3**, luku 2]

1900-luvulla suurta tarvetta reaalilukujen teorian kehitykselle ei enää ollut, sillä reaaliluvut olivat saaneet jo useamman matematikon toimesta toimivan ja täsmällisen määritelmän. Uusia ja erilaisia reaalilukujen määritelmiä on silti esitetty runsaasti vielä käänteentekevän 1870-luvun jälkeenkin. [**15**] Nämä määritelmät ovat kuitenkin monille matemaatikoillekin hyvin vieraita, sillä ne eivät ole käytännössä tuoneet mitään uutta reaalilukujen täsmälliseen määritelmään, jotka Cantor ja Dedekind aikanaan omilla tyyleillään loivat, eivätkä näin ollen ole saaneet suurta näkyvyyttä matemaatikoiden keskuudessa. Matematiikassa tutkimus kuitenkin edistyy koko ajan, ja viimeisimpänä löytönä reaalilukujen tiimoilta voidaan pitää saksalaisen Abraham

Robinsonin (1918-1974) 1960-luvulla kehittämää epästandardia analyysia, joka on eräänlainen reaalilukujen laajennus. [**2**, luku 6] Epästandardin analyysin perusideana on laajentaa reaalilukujen joukkoa infinitesimaaleilla, jolloin esimerkiksi derivaatalle voidaan esittää vaihtoehtoinen täsmällinen määritelmä infinitesimaalien avulla perinteisen epsilon-delta -menetelmän sijaan.

LUKU 2

Reaalilukujen määritelmä Dedekindin tapaan

Tässä luvussa tutustutaan tarkemmin aiemmin mainittuihin Dedekindin leikkauksiin, joiden avulla reaaliluvut voidaan määritellä täsmällisesti. Luvussa esitellään leikkauksen määritelmä ja näytetään, että yhteenlasku ja kertolasku on todella määritelty Dedekindin leikkauksille. Lisäksi todistetaan, että Dedekindin leikkausten avulla määritellyt reaaliluvut toteuttavat täydellisyysominaisuuden, joka erottaa reaalilukujen joukon rationaalilukujen joukosta. On tärkeää tietää, että tämän luvun pohjatiedoiksi oletetaan rationaalilukujen ominaisuudet (laskusäännöt ja järjestysominaisuudet), jotka taas perustuvat kokonaislukujen vastaaviin ominaisuuksiin. Luvun lopussa vielä hieman vertaillaan Dedekindin menetelmää ja Eudoksoksen määritelmää suhteiden teoriaan liittyen, ja etsitään yhtäläisyyksiä näistä menetelmistä, joiden ideat ovat loppujen lopuksi hyvin lähellä toisiaan.

2.1. Dedekindin leikkaukset ja reaalilukujen täsmällinen määritelmä

Määritelmä 2.1. Rationaalilukujen joukon jakoa kahteen osajoukkoon A ja B sanotaan *Dedekindin leikkaukseksi*, merkitään $(A|B)$, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

1. Kaikille $x \in \mathbb{Q}$ pätee $x \in A$ tai $x \in B$.
2. $A \neq \emptyset$ ja $B \neq \emptyset$.
3. Kaikille $x \in A$ ja $y \in B$ pätee $x < y$.

Dedekindin leikkaus määrittelee rationaaliluvun, jos:

- joukossa A on suurin luku tai
- joukossa B on pienin luku.

Leikkaus määrittelee irrationaaliluvun, jos:

- joukossa A ei ole suurinta lukua ja
- joukossa B ei ole pienintä lukua.

Osajoukkoja A ja B voidaan ajatella lukusuoran ”vasempana” ja ”oikeana” puolena.

Esimerkki 2.2. Dedekindin leikkaus määrittelee rationaaliluvun silloin, kun osajoukossa B on pienin luku. Esimerkiksi jako

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$$

ja

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 2\}$$

antaa rationaaliluvun 2, sillä nyt joukossa A ei ole suurinta lukua ja joukosta B voidaan löytää pienin luku (2), joka on rationaaliluku. Joukot A ja B toteuttavat Dedekindin leikkauksen määritelmän: kaikille $x \in A$ ja $y \in B$ pätee $x < 2 \leq y$, jolloin voidaan valita esimerkiksi $1 \in A$ ja $3 \in B$, jolloin selvästi $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ja $1 < 3$.

Esimerkki 2.3. Jaetaan rationaalilukujen joukko kahteen osajoukkoon A ja B siten, että

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ tai } x^2 < 2\}$$

ja

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > 0 \text{ ja } y^2 \geq 2\}.$$

Tämä jako toteuttaa myös Dedekindin leikkauksen määritelmän: esimerkiksi $-1 \in A$ ja $2 \in B$, jolloin $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ja $-1 < 2$. Kaikille $x \in A$ ja $y \in B$ todella pätee $x < y$: tapaus on selvä, jos $x \leq 0$, ja jos $x, y > 0$ niin pätee $x^2 < 2 \leq y^2$, josta luonnollisesti seuraa, että $x < y$. Nyt Dedekindin leikkaus määrittelee irrationaaliluvun $\sqrt{2}$. Joukossa A ei ole suurinta lukua, eikä joukossa B ole pienintä lukua, sillä tapaus $y = \sqrt{2}$ ei ole mahdollinen, koska $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku eli ei ole olemassa lukua $y \in \mathbb{Q}$ siten, että $y^2 = 2$. Dedekindin leikkaus määrittelee nyt siis irrationaaliluvun, joka on suurempi kuin kaikki A:n alkiot ja pienempi kuin kaikki B:n alkiot, ja joka jää ikään kuin näiden kahden joukon väliin.

Dedekindin leikkauksien avulla saadaan siis määritettyä kaikki rationaaliluvut, sekä niiden väliin jäävät ”aukot” eli irrationaaliluvut. Jatkossa oletetaan, että mahdollinen ”rajapiste” kuuluu aina joukkoon B, jolloin itse asiassa joukko A edustaa koko leikkausta, B:n ollessa A:n komplementti. Nyt voidaan määritellä reaalilukujen joukko:

Määritelmä 2.4. *Reaalilukujen joukko* muodostuu joukoista $\alpha \subset \mathbb{Q}$, joille pätee, että $(\alpha|\mathbb{Q}\setminus\alpha)$ on Dedekindin leikkaus ja että α:ssa ole suurinta alkiota. Merkitään $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.2. Reaalilukujen laskutoimitukset

Nyt, kun tiedetään reaalilukujen määritelmä Dedekindin leikkausten avulla ilmaistuna, voidaan tutustua laskutoimitusten määritelmiin näiden leikkausten pohjalta.

Määritelmä 2.5. Kaikille $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ asetetaan $\alpha + \beta := \{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\}$.

Lause 2.6. *Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Summa $\alpha + \beta$ kuuluu reaalilukujen joukkoon, eli $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Olkoot α, $\beta \in \mathbb{R}$ siten, että $\alpha \neq \emptyset$ ja $\beta \neq \emptyset$,

$$\alpha + \beta := \{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\} \neq \emptyset.$$

Olkoot $r \in \alpha$ ja $s \in \beta$ mielivaltaisesti valittuja. Koska on olemassa $r' \in \alpha$ ja $s' \in \beta$ siten, että $r' > r$ ja $s' > s$, saadaan $r' + s' > r + s$. Tämä tarkoittaa sitä, että summalla $\alpha + \beta$ ei ole suurinta arvoa. Voidaan löytää $r \in \alpha$ ja $s \in \beta$ siten, että $r + \frac{1}{2} \notin \alpha$ ja $s + \frac{1}{2} \notin \beta$. Tällöin $r + s + 1 \notin \alpha + \beta$, koska jos olisi $r + s + 1 \in \alpha + \beta$, niin silloin $r + s + 1 = r' + s'$ joillekin $r' \in \alpha$ ja $s' \in \beta$. Mutta $r' < r + \frac{1}{2}$, ja $s' < s + \frac{1}{2}$, koska $r + \frac{1}{2} \notin \alpha$ ja $s + \frac{1}{2} \notin \beta$. Nyt siis $r' + s' < r + s + 1$, mikä on ristiriita. Näin ollen $r + s + 1 \notin \alpha + \beta$.

Lopuksi: olkoot $t \in \alpha + \beta$ ja $v \notin \alpha + \beta$. Näytetään, että $t < v$. Olkoon $t = r + s$, missä $r \in \alpha$ ja $s \in \beta$. Jos $t \geq v$, niin $t = v + k$, $k \geq 0$. Näin ollen $r + s = v + k$ ja saadaan $(r - k) + s = v$. Koska $r - k \leq r$, niin $r - k \in \alpha$ koska $r \in \alpha$. Täten olisi $v = (r - k) + s \in \alpha + \beta$, mikä ei kuitenkaan ei ole mahdollinen, koska $v \notin \alpha + \beta$. Näin ollen $t \geq v$ ei ole tosi eli toisin sanoen $t < v$. Tämä osoittaa, että yhteenlasku on hyvin määritelty.

□

Määritelmä 2.7. Reaalilukujen nollalle käytetään jatkossa ajoittain merkintää α_0, missä siis $\alpha_0 := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\}$.

Määritelmä 2.8. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Jos $0 \in \alpha$, sanotaan, että α on *positiivinen*, merkitään $\alpha > 0$. Jos $0 \notin \alpha$ ja $\alpha \neq \alpha_0$, niin α on *negatiivinen*, merkitään $\alpha < 0$. Toisin sanoen $\alpha \in \mathbb{R}$ on positiivinen, jos ja vain jos se sisältää positiivisia rationaalilukuja, ja α on negatiivinen, jos ja vain jos joukko $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ sisältää negatiivisia rationaalilukuja.

Seuraavaksi esitellään joukon suurimman alarajan eli *infimumin* määritelmä, jota tarvitaan reaalilukujen ominaisuuksien todistuksissa.

Määritelmä 2.9. Olkoon $S \subset \mathbb{R}$. Reaaliluku a on joukon S *alaraja*, jos

$$a \leq x, \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Jos joukolla S on alaraja, sanotaan että joukko S on alhaalta rajoitettu.

Määritelmä 2.10. Olkoon $S \subset \mathbb{R}$. Reaaliluku a on joukon S suurin alaraja eli *infimum*, jos

- a on joukon S alaraja
- jos on $a' > a$, niin a' ei ole joukon S alaraja, eli ei ole suurempaa alarajaa kuin a.

Tällöin merkitään $a = \inf S$.

Määritelmä 2.11. Jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$ asetetaan *vastaluku*

$$-\alpha := \{-s \in \mathbb{Q} \mid s \notin \alpha, s \neq \inf(\mathbb{Q} \backslash \alpha)\}.$$

Ehto $s \neq \inf(\mathbb{Q} \backslash \alpha)$ tarvitaan, sillä reaalilukujen määritelmän mukaan joukolla $-\alpha$ ei saa olla suurinta alkiota. Seuraavaksi osoitetaan, että $-\alpha \in \mathbb{R}$ ja että $\alpha + (-\alpha) = \alpha_0$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lause 2.12. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin $(-\alpha) \in \mathbb{R}$ ja pätee*

$$\alpha + (-\alpha) = \alpha_0$$

TODISTUS. Näytetään ensimmäisenä, että $-\alpha$ on todellakin leikkaus: koska $\alpha \neq \emptyset$ ja $\alpha \neq \mathbb{Q}$, saadaan $-\alpha \neq \emptyset$ ja $-\alpha \neq \mathbb{Q}$. Seuraavaksi, olkoon $s \in -\alpha$ ja $t \notin -\alpha$. Nyt $-s \notin \alpha$, $-t \in \alpha$ tai $-t = \inf(\mathbb{Q} \backslash \alpha)$ ja näin ollen $-t < -s$, joten $s < t$. Selvästi $-\alpha$:lla ei ole suurinta arvoa, sillä joukossa $\mathbb{Q} \backslash \alpha$ saattaa olla pienin arvo, merkitään s_0, mutta tällöin $-s_0 \notin -\alpha$, koska määritelmän mukaan $s \neq \inf(\mathbb{Q} \backslash \alpha)$ kaikilla $s \in -\alpha$. Näin ollen $-\alpha \in \mathbb{R}$.

Tarkistetaan, että α:lla on ominaisuus $\alpha + (-\alpha) = \alpha_0$. Huomataan, että kaikille $r \in \alpha$ ja $s \in -\alpha$ pätee $s = -t$, $t \notin \alpha$. Koska $r < t$, niin $r + s = r - t = -(t - r) < 0$. Näin ollen $r + s \in \alpha_0$. Kääntäen, jos $t < 0$, niin kaikilla $r \in \alpha$, $t = r + (t - r)$. Olkoon $s = t - r$. Näytetään että $s \in -\alpha$, eli toisin sanoen $-s \notin \alpha$. Tätä varten huomataan vain, että $-s = r - t > r$ ja $r \in \alpha$, joten $-s = (r - t) \notin \alpha$. Tämä todistaa, että $\alpha + (-\alpha) = \alpha_0$.

□

Määritelmä 2.13. Kaikille $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ asetetaan

$$\alpha \cdot \beta := \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 0\} \cup \{r = st \mid s \in \alpha, t \in \beta, s > 0, t > 0\}$$

kun $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$. Muissa tapauksissa

$$\alpha \cdot \beta := \begin{cases} 0 & \text{jos } \alpha = 0 \text{ tai } \beta = 0 \\ (-\alpha) \cdot (-\beta) & \text{jos } \alpha < 0 \text{ ja } \beta < 0 \\ -((-\alpha) \cdot \beta) & \text{jos } \alpha < 0 \text{ ja } \beta > 0 \\ -(\alpha \cdot (-\beta)) & \text{jos } \alpha > 0 \text{ ja } \beta < 0. \end{cases}$$

Lause 2.14. *Kaikille $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pätee $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$, ja tulo on suurempaa kuin nolla, jos ja vain jos $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$, tai $\alpha < 0$ ja $\beta < 0$.*

Todistus. Tutkitaan tapaus kun $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$, jolloin siis

$$\alpha \cdot \beta := \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 0\} \cup \{r = st \mid s \in \alpha, t \in \beta, s > 0, t > 0\}.$$

Selvästi $\alpha \cdot \beta \neq \emptyset$. Koska $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$, voidaan löytää $s > 0$ ja $t > 0$ siten, että $s \in \alpha$ ja $t \in \beta$, ja että $s + 1 \notin \alpha$ ja $t + 1 \notin \beta$. Väitetään, että $(st + s + t + 1) \notin \alpha \cdot \beta$, ja näin ollen $\alpha \cdot \beta \neq \mathbb{Q}$. Jos näin ei ole, niin koska $(st + s + t + 1) > 0$, olisi $st + s + t + 1 = s't'$ joillakin $s' \in \alpha$ ja $t' \in \beta$, joille $s' > 0$ ja $t' > 0$. Koska $s' \in \alpha$ ja $s + 1 \notin \alpha$, saadaan $s' < s + 1$. Samalla tavalla $t' < t + 1$, ja koska $s't' < st + s + t + 1$, saadaan ristiriita. Näin ollen $(st + s + t + 1) \notin \alpha \cdot \beta$.

Seuraavaksi näytetään, että kaikille $r \in \alpha \cdot \beta$ ja $s \notin \alpha \cdot \beta$ pätee $r < s$. Voidaan olettaa ilman yleisyyden menettämistä, että $r > 0$. Oletuksen $s \notin \alpha \cdot \beta$ perusteella $s > 0$ ja näin ollen $r < s$ jos $r \leq 0$. Oletetaan, että $r > s$. Tällöin $r = st$ jollekin $t > 1$. Koska $r > 0$ ja $r \in \alpha \cdot \beta$, niin $r = r's'$, missä $r' \in \alpha$, $s' \in \beta$, joille $r' > 0$ ja $s' > 0$. Täten $st = r's'$ ja edelleen $s = \frac{r's'}{t}$. Koska $\frac{r'}{t} < r'$, niin $\frac{r'}{t} \in \alpha$ ja $s' \in \beta$. Näin ollen $s \in \alpha \cdot \beta$, mikä on ristiriita, josta seuraa, että $r < s$.

Lopuksi näytetään, että tulolla $\alpha \cdot \beta$ ei ole suurinta arvoa. Olkoon $r \in \alpha \cdot \beta$. Ilman yleisyyden menetystä voidaan olettaa, että $r > 0$ ja $r = st$, missä $s \in \alpha$, $t \in \beta$ ja $s > 0$, $t > 0$. Koska α:lla ei ole suurinta arvoa, on olemassa $s_1 \in \alpha$ siten, että $s_1 > s$. Nyt $r_1 = s_1 t \in \alpha \cdot \beta$, ja $r_1 = s_1 t > st = r$. Näin ollen tulolla ei ole suurinta arvoa. Tämä todistaa, että $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$.

Se, että tulo on suurempaa kuin nolla (eli positiivinen) on selvää, kun joko $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$, tai $\alpha < 0$ ja $\beta < 0$, sillä jos $\alpha < 0$ ja $\beta < 0$, niin $-\alpha > 0$ ja $-\beta > 0$. Määritelmän 2.13 mukaan $\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta)$, kun $\alpha < 0$ ja $\beta < 0$. Jos $\alpha < 0$ ja $\beta > 0$, niin $\alpha \cdot \beta = -((-\alpha) \cdot \beta)$, ja tulo on pienempää kuin nolla eli negatiivinen.

Vastaavasti, jos $\alpha > 0$ ja $\beta < 0$, niin $\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot (-\beta))$ on negatiivinen.

$\square$

Yhteenlasku ja kertolasku on siis todella määritelty Dedekindin leikkauksille. Leikkauksien avulla määritellyt reaaliluvut toteuttavat myös kaikki tutut algebralliset ominaisuudet, sekä järjestysominaisuudet. Järjestysominaisuudet kuvaavat lukujen suuruutta:

Määritelmä 2.15. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sanotaan, että α on *suurempi* kuin β (tai β on *pienempi* kuin α), merkitään $\alpha > \beta$ (tai $\beta < \alpha$), jos $\beta \subset \alpha$, eli β on joukon α aito osajoukko. Jos $\beta \subseteq \alpha$, niin voi olla $\alpha > \beta$ tai $\alpha = \beta$. Tällöin sanotaan, että α on *suurempi tai yhtä suuri* kuin β, merkitään $\alpha \geq \beta$.

Algebrallisiin ominaisuuksiin kuuluu yhteenlaskun ja kertolaskun erilaisia laskusääntöjä. Seuraavaksi esitellään algebralliset ominaisuudet ja järjestysominaisuudet, sekä näytetään muutama esimerkkitodistus siitä, kuinka nämä ominaisuudet toteutuvat Dedekindin leikkausten avulla määritellyille reaaliluvuille.

Algebralliset ominaisuudet:

1. Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $x + y = y + x$ (yhteenlaskun vaihdantalaki eli kommutatiivisuus).
2. Kaikille $x, y, z \in \mathbb{R}$ pätee $x + (y + z) = (x + y) + z$ (yhteenlaskun liitäntälaki eli assosiatiivisuus).
3. On olemassa sellainen reaaliluku 0, että kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee $x + 0 = x$ (nollan olemassaolo).
4. Jokaista $x \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa sellainen $x' \in \mathbb{R}$, että $x + x' = 0$ (vastaluvun olemassaolo).
5. Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $xy = yx$ (kertolaskun vaihdantalaki).
6. Kaikille $x, y, z \in \mathbb{R}$ pätee $x(yz) = (xy)z$ (kertolaskun liitäntälaki).
7. On olemassa sellainen reaaliluku 1, että kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee $x \cdot 1 = x$ (ykkösen olemassaolo).
8. Jos $x \in \mathbb{R}$ ja $x \neq 0$, niin on olemassa sellainen $x' \in \mathbb{R}$, että $xx' = 1$ (käänteisluvun olemassaolo).
9. Kaikille $x, y, z \in \mathbb{R}$ pätee $x(y + z) = xy + xz$ (osittelulaki).

Järjestysominaisuudet:

10. Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee täsmälleen yksi seuraavista
    - $x = y$
    - $x < y$
    - $x > y$.
11. Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $x \leq x$ (refleksiivisyys).
12. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Jos $x \leq y$ ja $y \leq x$, niin $x = y$ (antisymmetrisyys).
13. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Jos $x \leq y$ ja $y \leq z$, niin $x \leq z$ (transitiivisuus).

14. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Jos $x \leq y$, niin $x + z \leq y + z$ (järjestyksen säilyminen yhteenlaskussa).
15. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$, Jos $x \leq y$ ja $z \geq 0$, niin $x \cdot z \leq y \cdot z$ (järjestyksen säilyminen kertolaskusssa).
16. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Jos $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, niin $x + y \geq 0$ ja $x \cdot y \geq 0$ (ei-negatiivisuuden säilyminen yhteen- ja kertolaskussa).

Todistus ominaisuudelle numero 4 on esitetty lauseessa 2.12. Esitellään vielä todistukset ominaisuuksille 5 ja 14.

5. Kertolaskun vaihdantalaki: Kaikille $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pätee $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Todistus. Olkoot $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$. Tällöin väite seuraa suoraan kertolaskun määritelmästä ja rationaalilukujen laskusäännöistä: joukko $\alpha \cdot \beta$ koostuu rationaalisista alkioista st, ja tulo st on rationaalilukujen kertolaskun vaihdantalain perusteella sama kuin tulo ts, joista määritelmän mukaan koostuu joukko $\beta \cdot \alpha$.

Tapauksessa $\alpha = 0$ tai $\beta = 0$, selvästi $0 \cdot \beta = \beta \cdot 0$. Jos $\alpha < 0$ ja $\beta > 0$, niin

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= -((-\alpha) \cdot \beta) \\ &= -(\beta \cdot (-\alpha)) \\ &= \beta \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen.

□

14. Järjestyksen säilyminen yhteenlaskussa: Olkoot $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Jos $\alpha \leq \beta$, niin $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Todistus. Olkoon $\alpha < \beta$ ja olkoon $r \in \beta$ siten, että $r \notin \alpha$. Tällainen r on olemassa määritelmän 2.15 perusteella, sillä nyt α on β:n aito osajoukko, ja joukosta β voidaan löytää alkio, joka ei kuulu joukkoon α. Oletetaan, että kaikille $s \in \gamma$ pätee $r + s \in \alpha + \gamma$. Nyt $r = (r + s) - s \in (\alpha + \gamma) + (-\gamma) = \alpha$, mikä ei ole tosi. Näin ollen on olemassa $s \in \gamma$ siten, että $r + s \notin \alpha + \gamma$. Selvästi $r + s \in \beta + \gamma$, koska oletuksen mukaan $r \in \beta$ ja $s \in \gamma$. Nyt siis joukosta $\beta + \gamma$ voidaan aina löytää alkio, jota ei ole joukossa $\alpha + \gamma$, toisin sanoen joukko $\alpha + \gamma$ on joukon $\beta + \gamma$ aito osajoukko, eli $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$. Jos $\alpha = \beta$, on yhtäsuuruus selvää: $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Samankaltaiset argumentit voidaan esittää kertolaskun järjestyksen säilymisen (järjestysominaisuus numero 15) osoittamineen.

□

2.3. Täydellisyys

Dedekindin leikkausten avulla määritellyt reaaliluvut muodostavat järjestetyn kunnan, koska ne toteuttavat algebralliset ominaisuudet sekä järjestysominaisuudet. Itse asiassa myös rationaalilukujen joukko muodostaa järjestetyn kunnan, joten tarvitaan vielä jokin ominaisuus, joka erottaa nämä joukot toisistaan. Tällainen on täydellisyysominaisuus, jonka mukaan reaalilukujen joukon osajoukolla, joka on ylhäältä rajoitettu, on olemassa pienin yläraja. Rationaaliluvuilla täydellisyysominaisuutta ei ole.

Määritelmä 2.16. Olkoon $S \subset \mathbb{R}$. Reaaliluku y on joukon S *yläraja*, jos

$$x \leq y, \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Jos joukolla S on yläraja, sanotaan että joukko S on ylhäältä rajoitettu.

Määritelmä 2.17. Olkoon $S \subset \mathbb{R}$. Reaaliluku y on joukon S pienin yläraja eli *supremum*, jos

- y on joukon S yläraja
- jos on $y' < y$, niin y' ei ole joukon S yläraja, eli ei ole pienempää ylärajaa kuin y.

Tällöin merkitään $y = \sup S$.

Lause 2.18. *Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\alpha < \beta$. Tällöin on olemassa rationaaliluku δ siten, että $\alpha < \delta < \beta$.*

TODISTUS. Nyt α on β:n aito osajoukko, koska $\alpha < \beta$, eli on olemassa $r \in \beta$ siten, että $r \notin \alpha$. Nyt pätee $\alpha < \alpha_r < \beta$, missä $\alpha_r = \{s \in \mathbb{Q} \mid s < r\}$, sillä jos $t \in \alpha$ niin $t < r$ (koska $r \notin \alpha$) ja näin ollen $t \in \alpha_r$. Vastaavasti, jos $s \in \alpha_r$, niin $s < r \in \beta$ ja näin ollen $s \in \beta$. Täten rationaaliluku $\delta := \alpha_r$ täyttää vaaditun ominaisuuden.

□

Esimerkki 2.19. Olkoon rationaalilukujen osajoukko $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. Joukolla A on yläraja (esimerkiksi 10 tai 3), mutta rationaalista pienintä ylärajaa ei ole. Tämä voidaan osoittaa esimerkiksi epäsuoraa todistusta käyttäen: tehdään antiteesi, että on olemassa $z \in \mathbb{Q}$ siten, että z on pienin yläraja.

Jos $z \in A$, niin $0 < z < \sqrt{2}$. Koska reaaliluvuilla on lauseessa 2.18 esitelty tiheysominaisuus, voidaan mielivaltaisen lyhyeltä lukusuoran väliltä löytää aina rationaaliluku. Väliltä $[z, \sqrt{2}]$ voidaan siis löytää $q \in \mathbb{Q}$ ja vastaväitteestä seuraa ristiriita. Tässä tapauksessa $z < q < \sqrt{2}$, eli $q \in A$, jolloin z ei enää kelpaa ylärajaksi, ja q:sta tulee "uusi" supremum. Vastaväite ei siis päde ja rationaalilukujen osajoukolla A ei ole pienintä ylärajaa $z \in A$.

Oletetaan, että $z \notin A$, eli $z > \sqrt{2}$. Nyt z kelpaa ylärajaksi, mutta jälleen tiheysominaisuuden perusteella voidaan löytää $q \in \mathbb{Q}$ väliltä $[\sqrt{2}, z]$ siten, että $\sqrt{2} < q < z$. Voidaan siis löytää vielä pienempi yläraja kuin z silloin, kun $z \notin A$, jolloin vastaväitteestä seuraa ristiriita, ja näin ollen täydellisyysominaisuus ei toteudu.

Lause 2.20. *Jokaisella joukon $\mathbb{R}$ epätyhjällä osajoukolla S, joka on ylhäältä rajoitettu, on olemassa pienin yläraja* $\sup S$.

Todistus. Olkoon $\beta \in \mathbb{R}$ joukon S yläraja, eli $\alpha \leq \beta$ kaikilla $\alpha \in S$. Olkoon

$$\gamma := \bigcup_{\alpha \in S} \{r \in \mathbb{Q} \mid r \in \alpha\}.$$

Näytetään ensimmäisenä, että $\gamma \in \mathbb{R}$. Selvästi $\gamma \neq \emptyset$. Koska $\alpha \leq \beta$ kaikilla $\alpha \in S$, niin selvästi myös $\gamma \subseteq \beta$. Nyt $\beta \neq \mathbb{Q}$, eli β on rationaalilukujen aito osajoukko, jolloin myös γ on rationaalilukujen aito osajoukko $\gamma \neq \mathbb{Q}$, koska γ on β:n osajoukko. Jos $r \in \gamma$ ja $s \notin \gamma$, niin $r \in \alpha$ jollakin $\alpha \in S$ ja $s \notin \alpha$. Näin ollen $r < s$.

Lopuksi: γ:lla ei ole suurinta arvoa, sillä jos $r \in \gamma$, niin $r \in \alpha$ jollakin α ja siten on olemassa $r' \in \alpha$, jolle $r < r'$. Selvästi $r' \in \gamma$. Tämä näyttää, että $\gamma \in \mathbb{R}$. Selvästi $\gamma \geq \alpha$ kaikilla $\alpha \in S$, eli γ on yläraja, ja $\gamma \leq \beta$, eli γ on pienin ylärajoista. Näin ollen $\gamma = \sup S$.

□

Reaalilukujen joukko, joka on siis täydellinen järjestetty kunta, on nyt määritelty Dedekindin leikkausten avulla. Lisäksi reaalilukujen joukko on isomorfismia vaille yksikäsitteinen. Tämä tarkoittaa sitä, että minkä tahansa kahden täydellisen järjestetyn kunnan välillä on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi, eli kuvaus, joka säilyttää laskutoimitukset ja järjestyksen. Yksikäsitteisyyden todistaminen sivuutetaan tässä tutkielmassa, mutta lisää aiheesta voi lukea lähteistä [**3**] ja [**14**].

2.4. Suhteiden teoria ja Dedekindin leikkaukset

Palataan vielä aiemmin esitettyyn Eudoksoksen määritelmään suhteiden teoriasta. Eudoksoksen kuuluisa muotoilu Eukleideen Alkeiden viidennessä kirjassa sanoo:

Suureet ovat verrannollisia, ensimmäinen toiseen ja kolmas neljänteen, kun laskettiinpa ensimmäisestä ja kolmannesta mikä tahansa monikerta ja toisesta ja neljännestä mikä tahansa monikerta, edelliset monikerrat ovat aina suurempia, yhtäsuuria tai pienempiä, kuin jälkimmäiset monikerrat vastaavassa järjestyksessä.

Toisin sanoen $a : b = c : d$ jos ja vain jos epäyhtälöstä $ma > nb$ seuraa, että $mc > nd$, yhtälöstä $ma = nb$ seuraa, että $mc = nd$, ja epäyhtälöstä $ma < nb$ seuraa, että $mc < nd$, annetuilla kokonaisluvuilla m ja n. Ikään kuin seurauksena tästä voidaan sanoa, että suhde $a : b$ on suurempi kuin suhde $c : d$, eli $a : b > c : d$, jos on olemassa kokonaisluvut m ja n siten, että $ma > nb$ mutta $mc \leq nd$. Eudoksoksen määritelmän seurauksena jokainen yhteismitaton luku, eli irrationaaliluku, antaa rationaalilukujen joukolle jaon kahteen eri luokkaan: jos $x = a : b$ on yhteismitaton suhde, voidaan ajatella

$$V_x := \left\{ \frac{c}{d} \mid \frac{c}{d} \quad \text{on yhteismitallinen suhde,} \quad \frac{c}{d} < \frac{a}{b} \right\}$$

ja

$$O_x := \left\{ \frac{c}{d} \mid \frac{c}{d} \quad \text{on yhteismitallinen suhde,} \quad \frac{c}{d} \geq \frac{a}{b} \right\},$$

missä V ilmaisee lukusuoran vasenta puolta ja O oikeaa puolta. Eudoksoksen määritelmä ei siis tosiaankaan ollut kovin kaukana modernista reaalilukujen määritelmästä, etenkin kun sitä verrataan Dedekindin kehittämään menetelmään, sillä vaikka Eudoksos itse ei kuvaillut määritelmässään rationaalilukujen jakoa kahteen eri ryhmään, voidaan näin jälkikäteen tämä ominaisuus tulkita myös hänen menetelmästään.

LUKU 3

Pedagogiikkaa reaalilukujen taustalla

Tässä luvussa tutustutaan siihen, miten reaaliluvut esitellään lukiotasolla ja millaisia vaikeuksia lukioikäisillä opiskelijoilla on reaaliluvun käsitteen ymmärtämisessä. Toisaalta perehdytään myös siihen, millainen käsitys tai informaali mielikuva matemaatikoilla on reaalilukujen joukosta, ja millainen ajatusmalli reaaliluvuista lukiolaisella pitäisi ammattilaisten mielestä olla, jotta hänellä olisi valmiudet siirtyä syventävämpään matematiikkaan. Tämän luvun tärkeimpänä kirjallisuuslähteenä toimii Kaarina Merenluodon väitöskirja [**11**], jossa on tutkittu suomalaisten lukiolaisten käsityksiä reaaliluvuista, lukujen hierakiasta ja funktion raja-arvon ja jatkuvuuden käsitteistä. Lisäksi väitöskirja sisältää asiantuntijoiden teemahaastattelun, jossa kahdeksan tutkimuksen toteutuksen aikaan yliopistossa matematiikkaa opettanutta matemaatikkoa vastasivat kysymyksiin omien kokemuksiensa pohjalta.

Perinteistä ja toimivaa oppimisprosessia voidaan kuvailla ikään kuin polkuna, jossa aiemmin opitun tiedon ympärille rakennetaan ja laajennetaan uutta tietoa ja taitoa, jolloin polku saa jatkoa ja voidaan kulkea taas eteenpäin oppimisen tiellä. Tämä prosessi ei kuitenkaan ole aina niin yksinkertainen kuin miltä se kuulostaa, sillä vaikka aikaisempi tieto ohjaa uuden muodostumista, se saattaa myös tuottaa systemaattisia väärinkäsityksiä, jolloin luotu polku johtaakin umpikujaan ja on käännyttävä takaisin, jotta voi löytää paremman reitin. Uutta opeteltaessa opiskelijalta vaaditaan usein merkittäviä muutoksia ja joustavuutta ajattelussa sekä operaatioissa, joita on totuttu käyttämään. Lisäksi matematiikan opiskelussa tapahtuva lukualueen laajennus reaalilukujen joukkoon edellyttää opiskelijalta kykyä siirtyä uudenlaiseen logiikkaan, joka saattaa olla ristiriidassa aiemmin opitun, luonnollisiin lukuihin liittyvän, logiikan kanssa.

3.1. Matemaattisen käsitteen muodostuminen

Matematiikka on siinä mielessä haastava tieteenala, että monia siihen liittyviä käsitteitä on vaikeaa selittää konkreettisella tasolla, sillä arjessa esiintyvien matematiikkakokemusten kompleksisuuden taso on melko alhainen, verrattuna korkeamman tason matematiikan kompleksisuuteen. Matemaattiset käsitteet määritellään symbolikielisinä lauseina, joiden lukeminen ja ymmärtäminen vaatii opiskelijalta jo omanlaistaan sopeutumis- ja ajattelukykyä. Matemaattinen kieli perustuu yleiseen sopimukseen tietyn käsitteen käytöstä, ja tietyssä tilanteessa jokaisella käsitteen käyttäjällä tulisi olla samalainen käsitys tapahtumasta. Matemaattisten symbolien keskeisinä tehtävinä on tallentaa uusi tieto pysyvään muotoon, tehdä ajattelusta automaattista, osoittaa matemaattisia rakenteita ja ominaisuuksia, sekä luoda henkistä toimintaa ja reflektoivaa ajattelua. [**16**] Mutta kuinka matemaattisen käsitteen ymmärtäminen oikeastaan tapahtuu? Ensimmäisenä tutustutaan Merenluodon väitöskirjassa esitettyyn kolmivaiheiseen malliin matemaattisen käsitteen muodostumisesta, jotta saadaan jonkinlainen käsitys siitä, minkälainen prosessi ymmäryksen taustalla todella on.

Merenluoto esittelee väitöskirjassaan [**11**] *Lukiolaisen reaaliluku. Lukualueen laajentaminen käsitteellisenä muutoksena matematiikassa*, matemaattisen käsitteen muodostumisen kolmivaiheisen mallin, joka on alunperin esitelty Anna Sfardin teoksessa *On the dual nature of mathematical conception: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* Ihmisten käyttäymis- ja toimintamalleja tutkittaessa kolmivaiheisen mallin luomista voidaan pitää tutkijoiden keskuudessa melko yleisenä konseptina. Matemaattisen käsitteen oppimisesta ja muodostumisesta on luonnollisestikin olemassa useita erilaisia teorioita ja malleja, joita on luotu eri tutkijoiden toimesta. Vaikka mallit voivat poiketa toisistaan huomattavankin paljon, voidaan niistä kuitenkin usein löytää yhteneviä piirteitä kuhunkin vaiheeseen liittyen: ensimmäisessä vaiheessa tutustutaan uuteen käsitteeseen ja sen kanssa operoimiseen, toisessa vaiheessa käsitteen ja siihen liittyvien lähikäsitteiden ymmärrys syvenee, ja viimein kolmannesssa vaiheessa opiskelija kykenee muodostamaan yhtenäisen ja laajan kokonaiskuvan matemaattisesta käsitteestä. [**11**]

1. VAIHE: KÄSITTEEN SISÄISTÄMINEN

Ensimmäisessä vaiheessa uuteen matemaattiseen olioon tai konstruktioon tutustutaan yleensä operationaalisen toiminnan kautta, jossa opitaan käyttämään tätä uutta oliota erilaisissa tilanteissa. Tässä vaiheessa matemaattinen olio tunnistetaan yleensä vain yhdessä kontekstissa: jos konteksti muuttuu, saattaa aiemmin tuttu olio näyttää yhtäkkiä aivan vieraalta. Tällainen tilanne saattaa tapahtua esimerkiksi silloin, kun yhtälössä yleensä käytetty tuntemattoman suureen esityssymboli ”x” korvataan symbolilla ”a”. Erityinen tunnusomainen piirre tässä ensimmäisessä vaiheessa on siis konkreettisuus: uuteen olioon ja sen ominaisuuksiin tutustutaan konkreettisten esitysten kautta.

2. VAIHE: KÄSITTEEN TIIVISTYMINEN

Toisessa vaiheessa opiskelija alkaa jo ymmärtämään pitkiäkin prosesseja ja ne ikään kuin tiivistyvät opiskelijan mielessä helpommin käsiteltävään muotoon. Annettua prosessia pystytään ajattelemaan enemmän kokonaisuutena, ilman että tarvitsee aina mennä yksityiskohtiin. Toisin sanoen opiskelija pystyy suorittamaan operaatioita mentaalisten mielikuvien avulla, ilman että niitä fyysisesti suoritetaan. Esimerkkinä tiivistymisvaiheen onnistumisesta voidaan pitää negatiivisten lukujen hallintaa: kun opiskelija kykenee suorittamaan vaivattomasti yhteen-, kerto- ja jakolaskuja positiivisilla ja negatiivisilla luvuilla, toiminta ikään kuin automatisoituu ja uusi käsite alkaa olemaan hallinnassa. Tämän vaiheen opiskelija kokee usein prosessin etenemisen vaivattomuutena: asiat tuntuvat helpommilta ja itsevarmuus uuden olion kanssa työskentelemisessä kasvaa.

3. Vaihe: käsitteen strukturalisoituminen
Stukturalisoitumisella tarkoitetaan matemaattisen käsitteen tulkintaa objektina, johon voidaan kohdistaa muita operaatioita, esimerkiksi kerto- tai jakolaskuja. Tässä kolmannessa vaiheessa opiskelija kykenee ymmärtämään uuden käsitteen itsenäisenä objektina ja käsite alkaa saamaan merkityksensä jonkin tietyn kategorian osana. Sfard nimesi tämän kolmannen vaiheen reifikaatioksi, joka viittaa ilmiöön, missä uutta vaihetta tarkastellaan kokonaisuutena, joka on aktuaalisesti eikä vain potentiaalisesti olemassa. Sfard kuvaa tätä tapahtumaa nopeaksi oivaltamisen tapahtumaksi, jossa jokin aikaisemmin tuttu asia nähdäänkin aivan uudenlaisessa valossa, ja uusi asia ymmärretään kokonaisuutena. Sfardin mukaan tämä reifikaation vaihe on vaikeaa saavuttaa: se vaatii paljon työtä, mutta toisaalta voidaan saavuttaa myös oivalluksena silloin, kun sitä vähiten osataan odottaa. Itse kuvailisin tätä tapahtumaa kansankielellä ”Ahaa!”-elämyksenä, joka on asiayhteydestä riippumatta aina erittäin motivoiva ja palkitseva tunne.

Jokainen matematiikkaa harrastanut voi varmasti ainakin jollakin tasolla tunnistaa nämä kaikki kolme vaihetta omasta oppimisen prosessistaan. Matematiikan opetuksen näkökulmasta katsottuna käsitteen strukturalisoitumisen saavuttamisen vaikeus tuottaa usein ongelmia, ja voi johtaa jopa virheellisiin mielikuviin siitä, että matematiikkaa ei voi oppia. On myös hyvin mahdollista, että ennen kuin opiskelija on saavuttanut täysin kehittyneen operationaalisen taitotason, voi hänellä olla jo heikohko strukturaalinen ymmärrys. [**11**] Koska strukturaalinen ymmärrys vaatii kehittynyttä operationaalista taitotasoa, ei ymmärtämisen ja oppimisen prosessi tapahdu ihan hetkessä, vaan se ottaa oman aikansa. Lisäksi matemaattisen käsitteen muodostumisen kolmannessa vaiheessa mainittu ”kyky nähdä tuttu asia uudessa valossa” ei ole ikinä helppo saavuttaa, sillä usein mielemme valmistaa meidät näkemään sitä, mitä olemme ennakkotietoihin pohjautuen valmistautuneet näkemään.

Merenluoto kirjoittaa teoksessaan saksalaisen Edmund Landaun (1877-1938) havainnollisesta, Dedekindin leikkauksiin perustuvasta konstruktiosta, jossa kuvaillaan niin sanottua hierarkkista rakenneta. Lukujärjestelmät ovat yksi esimerkki tällaisesta hierarkkisesta rakenteesta, jonka perusideana on lukualueita laajentamalla siirtyä hierarkkiselta tasolta toiselle ja samalla säilyttää aikaisempi kokonaisuus uuden rakeneteen osana. Tässä siis aina edellisessä tasossa refikoituneet oliot tulevat objekteiksi seuraavan tason sisäistämisen vaiheeseen. Landau lähtee liikkeelle luonnollisista luvuista ja konstruoi laajennuksen murtolukujen alueelle. Luonnollisten lukujen operaatioista tutut luvut ovat muuttuneet objekteiksi, joiden avulla voidaan määritellä murtoluvut. Landau määrittelee murtoluvun $\frac{a}{b}$ vastaavan niitä luonnollisten lukujen pareja (x_1, x_2), joille pätee $x_1 b = x_2 a$ (ja $x_2 \neq 0$). Näin saaduille uusille luvuille määritellään laskutoimitukset ja järjestys. Vastaavat vaiheet toistetaan, kun murtoluvut oletetaan objekteiksi ja määritellään rationaaliluvut. Landaun konstruktiossa saman suhteen muodostavat murtoluvut ovat ekvivalentteja, eli esimerkiksi luvut $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{9}$ ja $\frac{6}{18}$ edustavat kaikki samaa rationaalilukua. Kun rationaaliluvuille on määritelty laskutoimitukset ja järjestys, ne tulevat operaatioiden kohteeksi ja niiden avulla voidaan konstruoida halutut Dedekindin leikkaukset.

Jotta kykenee kehittymään matemaattisen käsitteen ymmärtämisessä, on olennaista tietoisesti ajatella tätä prosessia ja harjaannuttaa ajattelun taitoa. Opiskelijan on kuitenkin erittäin vaikeaa, ellei jopa mahdotonta, seurata omia ymmäryksen vaiheita, sillä hän ei välttämättä ole ollenkaan tietoinen siitä mihin kontekstiin uusi käsite liittyy. Tässä vaiheessa suureen rooliin astuvatkin opettajat. He ovat niitä, jotka kykenevät tunnistamaan opiskelijan ymmärryksen vaiheet ja pystyvät näin ollen auttamaan ja hieman ohjailemaan opiskelijaa oikeaan suuntaa. Luonnollisesti ihmiset oppivat ja hahmottavat asioita eri tavoilla, joten opettajan tulisi tarjota opiskelijalle erilaisia tapoja ja vaihtoehtoja uuden asian ymmärtämisen tueksi. Esimerkiksi matematiikassa toisille visuaalinen konstruointi on oleellinen osa ymmärtämisen prosessia, ja toiset taas pyrkivät loogisella päättelyllä haluttuun lopputulokseen.

Matemaattista ajattelua on mahdollista harjoittaa tietoisesti, jolloin esimerkiksi erilaisten käsitteiden ymmärtäminen helpottuu. Raija Yrjönsuuri on artikkelissaan luonut matematiikan tehtävän ratkaisemisen viisivaiheisen mallin, jossa on kerrottu informaatiota siitä, millaisiin asioihin tehtävän tekijän tulisi kiinnittää huomiota, jotta matemaattinen ajattelutaito voisi kehittyä. [**16**] Vaikka kyseessä on matematiikan tehtävään tarkoitettu ratkaisumalli, on sitä mielestäni mahdollista soveltaa myös käsitteen oppimiseen. Seuraavaksi esitellään muutama näistä mallin vaiheista, joissa ilmenee selkeitä ja hyviä tapoja, kuinka opiskelija voi itse (tai opettajan neuvomana) kiinnittää huomiota omaan matemaattiseen ajatteluunsa.

Ensimmäisen vaiheen, ”Matemaattisen tehtävän tavoitteen”, ydinideana on löytää tehtävän alkutilan ja lopputilan sisällölliset muutokset, eli esimerkiksi havaita tehtävään kuuluvat ongelmat. Tehtävän ratkaisijan tulisi myös tietoisesti pyrkiä löytämään matematiikan rakenteellista tai menetelmällistä samanlaisuutta aikaisempiin tilanteisiin tai tehtäviin. Tähän vaiheeseen kuuluu myös tehtävän kuvallisen esittämisen hahmottaminen, sekä jonkinlaisen mielikuvan luominen mahdollisesta tuloksesta. Toisessa vaiheessa, ”Verbaalisesta kielestä siirtyminen symboliseen”, matemaattinen ajattelutaito kehittyy, kun pohdittavaksi tulevat muuttujien valinnat ja lisäehdot, sekä mitkä muuttujat tunnetaan ja mitkä täytyy rakentaa uudelleen. Tämän vaiheen tärkeimpiä tapahtumia on reflektoiva ja yleistävä ajattelu sekä käsitteiden ja rakenteiden koettelu. Kolmas vaihe, ”Matemaattisen käsitteiden, lauseiden ja operaatioiden ominaisuuksien pohtiminen”, antaa yhteydet alkutilan muuttamiseen lopputilaksi. Tässä vaiheessa ajattelua kehitetään matemaattisia rakenteita ja merkityksiä tunnistamalla ja varmistamalla, että valitut muutokset sopivat kokonaisuuteen. [**16**]

3.2. Matemaattinen ajattelumalli reaaliluvuille

Kuten aiemmin mainittiin, on ihmisillä tapana luoda abstrakteista asioista itselleen uniikki mentaalinen mielikuva, jonka avulla pyritään helpottamaan ymmärtämistä ja jollakin tasolla konkretisoimaan uutta asiaa. Esimerkiksi luonnollisille luvuille melko yleinen mentaalinen esitys voi olla lukusuoraan pohjautuva representaatio, jossa luvut suurenevat oikealle päin edetessä. Joidenkin mielikuvissa luonnollisten lukujen ”jatkumo” himmenee vähitellen ja lopulta häviää kokonaan. Merenluodon teoksessa mainittiin mielenkiintoinen mentaalinen malli luonnollisille luvuille: mallissa ykkönen on ikään kuin huipulla ja seuraavat luvut ovat peräkkäin alaspäin laskeutuvan spiraalin muotoisessa järjestyksessä, jossa spiraalin koko suurenee samalla kun luvut suurenevat. Tämä esimerkki toivottavasti havainnollistaa sitä, kuinka erilaisia mielikuvia opiskelijat voivat opetettavasta asiasta luoda, mikä taas varmasti vaikuttaa siihen, kuinka vaivattomasti tämän mielikuvan täydentäminen ja laajentaminen tulevaisuudessa tapahtuu.

Matemaattisen ajattelumallin tulisi täyttää neljä kriteeriä, jotta se olisi toimiva ja tarkoituksenmukainen:

1. Mallin ja käsitteen looginen vastaavuus: mallilla tulisi siis olla ominaisuuksia, jotka mahdollisimman loogisesti vastaavat opittavan käsitteen ominaisuuksia.
2. Mallin opetuksellinen selkeys: mallin ominaisuudet, jotka vastaavat käsitteen ominaisuuksia, tulisi olla helposti havaittavissa kyseisestä mallista.
3. Mallitapahtuman yleisyys käytännössä: mallin pitäisi olla niin sanotusti käsitteen lähiympäristöstä ja taipuvainen käytännön operaatioihin.
4. Mallin kiinnostavuus: mallin tulisi olla sellainen, että se houkuttelee tutkimaan asiaa, ja että mallin käyttäminen tuntuu tarpeeksi helpolta uuteen asiaan syventyessä. [**16**]

Jos opiskelijalle on kehittynyt jotenkin virheellinen mielikuva opetettavasta aiheesta, voi eteneminen olla hyvin hidasta ja hankalaakin, sillä aiemmin luotu mielikuva ei välttämättä mahdollista etenemistä haluttuun suuntaan. Kun vaatimustaso kasvaa käy helposti niin, että opiskelija menettää otettaan luomistaan mentaalimalleista ja alkaa opetella ulkoa. Tämä ulkoa opetteleminen on melko vaarallinen tekijä, sillä se luo aukkoja asioiden ymmärtämiseen, joka taas aiheuttaa erilaisia oppimisvaikeuksia. Tiettyyn pisteeseen asti opiskelija voi pärjätä matematiikassa ulkoa opettelemalla, mutta edistyminen syventävämpään matematiikkaan on mahdotonta, jos taustalla ei ole aitoa ymmärrystä asioista.

Vaikka matemaatikoilla on tieto ja taito ajatella reaalilukuja formaalin eli täsmällisen mallin mukaisesti, käytännön tilanteissa sitä kuitenkin harvemmin toteutetaan: myös ammattilaiset turvautuvat työssään ajattelumalleihin, joiden kanssa työskenteleminen tuntuu luonnolliselta. Ammattilaisten käyttämät mentaaliset epämuodolliset ajattelumallit reaaliluvuista käytännön tilanteissa voidaan jakaa kolmeen ryhmään: lukusuoramalliin, raja-arvon ajatteluun perustuvaan mallin, sekä merkintään ja laskemiseen perustuvaan malliin. [**11**]

Lukusuoraan pohjautuva reaalilukujen mentaalimalli perustuu siihen, että lukusuoralle voidaan enimmäisenä ajatella kokonaislukupisteet, sitten rationaalilukupisteet ja lopuksi täydentää jäljelle jäävät aukot irrationaaliluvuilla. Reaalilukujen joukko voidaan siis ajatella aukottomana lukusuorana, ja tätä pidetäänkin reaalilukujen geometrisena esityksenä. Tämä malli on käytännön kannalta myös erittäin tehokas, sillä se mahdollistaa lukujen välisen suuruusjärjestyksen ajattelun, mutta myös rajattoman jakamisen sekä raja-arvon tulkitsemisen. Esimerkiksi aiemmin esitellyt Dedekindin leikkaukset perustuvat lukusuoramalliin: määritelmässä tehdään lukusuoran jako oikeaan ja vasempaan puoleen. Monet matemaatikot pitävät lukusuoramallia melko luonnollisena vaihtoehtona, sillä sen avulla voidaan myös kätevästi tarkastella rationaali- ja reaalilukujen eroja.

Lukusuoralla olevalla pisteellä ei ole ulottuvuuksia, minkä takia yksittäistä pistettä voi olla haastavaa ajatella. Toinen intuitiivinen reaalilukujen ajattelumalli perustuukin reaalilukupisteen ympäristöön. Jokaiselle pisteelle voidaan kuvitella ympäristö, jolla on tietynalaiset ominaisuudet: tutkittava ympäristö voidaan määrittää esimerkiksi mielivaltaisen pieneksi. Kun keskitytään tietyn pisteen sijasta sen ympäristöön, voidaan hyödyntää raja-arvon ja likiarvon käsitteitä, jotka tulevat tässä mentaalimallissa hyvin luonnollisesti mukaan ajatusprosessiin. Tämä malli tuo reaaliluvun käsitteen jo sellaiselle tasolle, että maallikkokin pystyy kuvittelmaan, kuinka likiarvon avulla päästään yhä lähemmäksi ja lähemmäksi haluttua arvoa. Aiemmin mainitusta Cantorin luomasta Cauchyn jonojen avulla konstruoidusta reaalilukujen määritelmästä voidaan selvästi löytää tämän raja-arvoihin pohjautuvan ajattelumallin käyttöä.

Kolmas malli perustuu aiemmista poiketen ehkä hieman käytännöllisempään näkökulmaan. Joillekin irrationaaliluvut todellistuvat esimerkiksi päättymättömien ja jaksottomien desimaalilukujen kautta. Sanana reaaliluku voi herättää ajatuksen siitä, että kyseessä ei enää välttämättä ole mikä tahansa niin sanotusti helppo luku, eli esimerkiksi kokonaisluku, jonka kanssa operoiminen on yksinkertaista ja tuttua, vaan kyse on jollakin tavalla epäsäännöllisestä ja pulmallisesta yksilöstä. Tässä mallissa korostuu reaalilukujen rationaaliluku-irrationaaliluku -jako. Myös tälle ajattelumallille voidaan löytää historiallisia viitteitä, sillä jo 1500-luvulla Simon Stevin käytti töissään reaalilukujen desimaalimuotoja.

Jokainen edellä mainituista kolmesta mentaalimallista voidaan siis liittää historiallisiin matemattiisiin töihin, joten tuntuu turvalliselta todeta, että mentaalimallien käyttö on kautta aikojen ollut matemaatikkojen yksi tärkeimmistä työvälineistä. Mallien käyttö ei tietenkään ole välttämättä ollut aina kovin tietoista, sillä ihmiselle on hyvin luontevaa selittää itselleen hankalia asioita tavalla, joka olisi ymmärrettävämpi ja joka kuitenkin vastaa alkuperäistä ideaa. Näin on siis käynyt myös reaalilukujen tapauksessa: niiden kanssa osattiin toimia äärimmäisen pitkään, ennen kuin täsmällinen määritelmä lopulta luotiin. Matemaatikot sekä muut matematiikan soveltajat ovat siis ajattelumallien kautta pystyneet soveltamaan reaalilukuja käyttöön, tarkan määritelmän puuttuessa.

Mutta minkälainen ajattelumalli lukiolaisella pitäisi reaaliluvuista olla, jotta edistyminen matematiikan opinnoissa tapahtuisi jouhevasti? Ammattilaiset painottavat erityisesti lukusuoraan perustuvaa ajattelumallia: sitä pidetään täysin riittävänä ja mukavan konkreettisena mallina, jonka avulla voidaan myös luoda opiskelijalle intuitiivinen käsitys esimerkiksi raja-arvosta. [**11**] Koska koulussa on vain rajallisesti aikaa käytössä yhtä kokonaisuutta kohden, on opettajan tärkeää osata yhdistää ja nivoa opetettavia asioita yhteen, ja herättää opiskelijoissa ajatuksia siitä, kuinka aiemmin opitut asiat liittyvät uuteen ja toisaalta miten uuden oppiminen rikastuttaa vanhaa, aiemmin opittua asiaa. Lukusuora toimiikin siis erinomaisena esimerkkinä tällaisesta mallista, jota käytetään aina uudestaan ja uudestaan: lukusuora esitellään jo alakouluikäisille lapsille ja sitä hyödynnetään moneen otteeseen, kun tarvitaan tukea jonkin uuden asian oppimiseen. Matemaatikot korostavat myös irrationaaliluvun käsitteen ymmärtämisen tärkeyttä lukiolaisten reaalilukuun liittyvässä ajattelumallissa. Usein koeataan, että irrationaalilukujen käsittely jää vain hyvin pintapuoleiseksi maininnaksi, vaikka ne ovat erittäin oleellinen osa reaalilukujen kokonaisuutta.

3.3. Reaalilukuihin liittyvät haasteet ja ratkaisuehdotuksia niihin

Yksi selvin ongelma, joka lukiolaisilla on reaalilukujen tiimoilta, liittyy yleisesti eri lukualueiden hahmottamiseen: opiskelijoilla on haasteita hahmottaa, mihin lukualueeseen annettu luku kuuluu ja minkälaisia yhtäläisyyksiä ja eroja eri lukualueilla on. Huomattava virhekäsitys on luokitella luvut pelkästään kokonaisluvuiksi, desimaaliluvuiksi ja murtoluvuiksi. Kokonaisluvun käsite on usein opiskelijoilla hieman vääristynyt, sillä esimerkiksi lukua 2,0 ei välttämättä osata ajatella kokonaislukuna, koska siinä on desimaaliesityksestä tuttu pilkku ja pilkun jälkeinen desimaaliosa. Edellä annettua lukua ei siis hahmoteta kokonaisluvuksi, koska se ei opiskelijoiden mielessä näyttäydy ”kokonaisena” desimaaliosansa takia. Sen sijaan luku 2, jonka esitysmuodossa ei ole mitään ”ylimääräistä”, on opiskelijoiden mielestä selvästi kokonaisluku. Samoin luku $\frac{2}{1}$ näyttäytyy opiskelijoille usein pelkästään murtolukuna, koska sen esitysmuoto vastaa sitä esitystapaa, jonka on kerrottu olevan vain murtoluvuille ominainen. Lisäksi luonnollisen luvun käsite voi olla monelle jopa vieras, sillä luonnollisia lukuja ajatellaan usein vain kokonaislukuina. Opiskelijoilla on siis vaikeuksia käsittää luonnolliset luvut ja kokonaisluvut myös rationaaliluvuiksi, eli lukuihin ja lukujen muodolliseen hierarkiaan liittyvä osaaminen on verrattain heikkoa ja epäselvää. [**11**]

Reaalilukujen ymmärtämisen kannalta suurimpana ongelmana on kuitenkin irrationaaliluvut. Irrationaaliluvun käsite koetaan hankalaksi ja niiden olemuksesta esiintyykin ajoittain erittäin räikeitä virhekäsityksiä opiskelijoiden keskuudessa, esimerkiksi että luvun negatiivisuus tekisi siitä irrationaalisen, tai että imaginaariluku olisi irrationaaliluku. Päättymättömät ja jaksolliset rationaaliluvut näyttäytyvät opiskelijoille usein irrationaalisina, eli opiskelijat siis tulkitsevat irrationaaliluvut usein väärin ja heillä on haasteita erottaa rationaalinen luku irrationaalisesta. Irrationaaliluvun muodollinen esittäminen desimaalimuodossa ei sekään aina ole aivan selvää: irrationaaliluku voidaan esittää tarkasti vain matemaattisia merkintöjä käyttäen, ja desimaalimuodossa se esitetään jaksottomana ja päättymättömänä lukuna, jossa päättymättömyyttä merkitään kolmella pisteellä desimaalikehitelmän alun jälkeen.

Opiskelijoiden kokema haastavuus irrationaalilukujen kanssa työskentelemiseen on toisaalta ihan ymmärrettävää, sillä irrationaalilukujen olemassaoloa ei perustella täsmällisesti lukiolaisille, ja monet irrationaalilukuihin liittyvät ongelmat yksinkertaisuuden vuoksi vain ohitetaan. Huomionarvoista on kuitenkin myös se, että niin sanotusti ”tunnetut” irrationaaliluvut, joita usein käytetään esimerkkeinä irrationaaliluvuista (kuten $\sqrt{2}$ ja π), tunnistetaan useimmiten oikeaan lukualueeseen. Tässä ehkä korostuu aikaisemmin mainittu ulkoa opettelu: esimerkkeinä annetut irrationaaliluvut muistetaan, mutta muita ei osata tunnistaa. [**11**]

Irrationaalilukujen rooli lukion matematiikan opinnoissa onkin melko pieni: niitä käytetään vain silloin kun on pakko, eli esimerkiksi polynomiyhtälöiden ja matemaattisten vakioiden, kuten π ja e, yhteydessä. Tässä tapahtuukin mielenkiintoinen siirtymävaihe, kun opiskelija siirtyy yliopistomatematiikan pariin. Yliopistotasolla matematiikkaa tutkitaan paljon syvällisemmin ja täsmällisiin perusteluihin pyritään aina, myös sellaisten perusasioiden kohdalla, jotka tuntuvat itsestäänselvyyksiltä. Kun lukiossa usein tyydytään toteamaan lausahdus "näin vain on", yliopistossa etsitään vastauksia kysymykseen "miksi näin on?". Yliopisto-opiskelija käy siis ikään kuin uudestaan läpi aiemmin mainitun matemattisen käsitteen muodostumisen prosessin, esimerkiksi juuri reaalilukujen kohdalla: jokaisella matematiikkaa opiskelemaan tulleella opiskelijalla on mielessään suhteellisen selkeä käsitys reaaliluvuista, mutta tämä mielikuva kokee todennäköisesti melko rajun kariutumisen, kun reaalilukujen täsmälliseen määritelmään pääsee vihdoinkin tutustumaan. Opiskelija saattaa kokea matemaattisen käsitteen muodostumisen ensimmäisestä vaiheesta tutun ilmiön, jossa aiemmin tuttu asia näyttääkin äkkiä täysin vieraalta, kun aiemmin yksinkertaistetut esitykset reaaliluvuista määritelläänkin nyt täsmällisesti ja tarkasti. Näin ollen opiskelijan on jälleen käytävä tämä ymmärtämisen prosessi läpi, jotta voi saavuttaa syvällisen ja täsmällisen ymmärryksen aiemmin jo niin tutuiksi tulleista reaaliluvuista.

Lukioikäiset nuoret ovat siis vielä verrattain alkuvaiheessa lukukäsitteen laajentamisen suhteen, ja luonnollisten lukujen spontaani logiikka on intuitiivisesti käytössä. Merenluodon väitöskirjan tutkimuksen tulosten mukaan oppimisvaikeudet eivät johdu pelkästään opetettavan käsitteen kompleksisuudesta, vaan myös opiskelijan aiemmasta ajattelun laadusta. [**11**] Lukiolaisilla matemaattinen ajattelu kehittyy koko ajan opintojen edetessä, ja kuten aiemmin on mainittu, uusien käsitteiden liittäminen pysyväksi osaksi omaa tietorakennetta ottaa aina oman aikansa. Matematiikan opiskelun suurimpia ongelmakohtia onkin kurssien kireä etenemistahti. [**4**]

Ero lukion ja peruskoulun opiskelutyylissä ja -tahdissa on melko suuri ja näiden muutosten omaksuminen saattaa joidenkin kohdalla kestää hieman pidempään. Johdattelu uusien käsitteiden pariin vaatii huomattavasti aikaa, jotta opiskelijalla olisi hyvät edellytykset sisäistää uutta asiaa. Koska etenemistahti on lukiossa nopea, ja jotkut aiheet ja asiat täytyy käsitellä hieman joutuisammin, vaaditaan opiskelijalta lukiotasolla jo kykyä myös itsenäiseen työskentelyyn. Tässä kohtaa korostuu siis jo opiskelijan oman sisäisen motivaation tärkeys, sekä toimivien opiskelutekniikoiden hallinta. Opiskelijakohtaiset erot voivat luonnollisestikin olla melko suuria edellä mainituissa ominaisuuksissa ja taidoissa, ja usein mahdolliset ongelmat matematiikan opiskeluun liittyen ilmenevät jo ensimmäisenä opiskeluvuonna. Lukiotasolla toimiva opiskelutekniikka on monilla ensimmäisenä lukiovuonna vielä puutteellinen, joka yhdistettynä nopeaan opiskelutahtiin voi pahimmillaan johtaa opiskelijan hyvinkin epämotivoivaan tunnetilaan ja oppimisvaikeuksiin. [**4**]

Mutta minkälaisin keinoin voitaisiin helpottaa opiskelijoiden läpikäymää prosessia reaalilukujen suhteen? Ehkä kaikista tärkeimpänä tekijänä voidaan pitää opettajaa, sillä kaiken opetuksen lähtökohtana on kuitenkin se, että opettaja on oman alansa asiantuntija. Jos opettajan tieto- ja taitotaso on puutteellinen, tulee oppilaiden ohjaamisesta nopeasti haastavaa. Jos opettajalle on epäselvää esimerkiksi se, millaisia lukuja irrationaaliluvut oikeasti ovat, on vaikeaa kuvitella, että käsitteen perusteellinen selittäminen oppilaalle olisi mahdollista. Zazkisin ja Siroticin toteuttaman mielenkiintoisen tutkimuksen kohteena oli 46 (oletettavasti kanadalaista) matematiikan opettajaopiskelijaa, jotka olivat aivan opettajankoulutusohjelmansa loppusuoralla. Kyselyssä heille annettiin kaksi lukua, jotka piti tunnistaa joko rationaali- tai irrationaaliluvuksi, ja lisäksi vastaus piti perustella. Annetut luvut olivat 0,12122122212... ja $\frac{53}{83}$, jonka laskimella muunnetun desimaalilmuodon kerrottiin olevan 0,63855421687. Jälkimmäisen luvun kohdalla oli tarkoituksella päädytty sellaiseen lukuun, jonka desimaalimuodon jakso on ikään kuin näkymätön, sillä todellisuudessa kyseisen luvun jakso on 41 numeron pituinen. [**17**]

Tuloksista selviää, että jopa 40% vastaajista ei tunnistanut ensimmäisenä annettua jaksotonta ja päättymätöntä desimaalilukua irrationaaliluvuksi, ja noin 30% hämääntyi liikaa toisen luvun kohdalla annetusta desimaalimuodosta ja väitti virheellisesti kyseessä olevan irrationaaliluku. Yksi tärkeimmistä johtopäätöksistä edellä mainitussa tutkimuksessa oli se, että rationaalilukujen ja irrationaalilukujen määritelmät eivät selvästikään olleet aktiivisessa käytössä opettajaopiskelijoiden matemaattisen tietorakenteen valikoimassa. Toinen merkittävä tulos, joka kävi ilmi vastaajien perusteluista oli se, että vastaajilla oli taipumus luottaa vahvasti laskimen antamaan esitykseen ja desimaalimuotoista lukua pidettiin jollakin tasolla parempana edustajana, verrattuna murtolukumuotoon. Voidaan siis todeta, että vaikka matematiikan opettajankoulutuksen yksi perustavoitteista on edetä haastavampaan matematiikkaan, syventää aiemmin opittua tietoa ja tutustua jopa hyvin abstrakteihinkin asioihin, olisi silti tärkeää painottaa myös koulumatematiikan sisältöjä. Rationaali- ja irrationaalilukujen täytyisi olla opettajille hyvin selviä asioita, eikä edellä mainittuja virhekäsityksiä pitäisi olla noin suurella osalla pian valmistuvien matematiikan opettajien joukosta.

Zazkis ja Sirotic antavat myös konkreettisen kehitysehdotuksen siihen, miten opettajat voivat vaikuttaa positiivisesti opiskelijoiden kykyyn tunnistaa rationaali- ja irrationaalilukuja ja näin vahvistaa reaalilukujen hallintaa. Heidän mukaansa opetuksessa tulisi erityisesti kiinnittää opiskelijoiden huomio lukujen erilaisiin matemattisiin esitysmuotoihin sekä niihin matemaattisiin yhteyksiin, jotka tekevät kahdesta esitystavasta ekvivalentit. Toiminnasta pyritään siis tekemään tietoisempaa ja näin ollen opiskelijoilla olisi paremmat mahdollisuudet saavuttaa syvällisempi ymmärrys luvuista. [**17**]

Myös Merenluoto pohtii väitöskirjassaan opiskelijoiden tietoisemman toiminnan ja lukuihin liittyvän pohdiskelun edistävän reaalilukujen hallintaa ja antavan hyvän lähtökohdan syvällisemmällekin matemaattiselle ajattelulle. Hänen mukaansa lukualueiden laajennuksen yhteydessä opiskelijat tulisi saattaa pohtimaan tietoisia muutoksia lukujen ajattelemiseen ja heidät tehtäisiin ylipäätään tietoisiksi aikaisemmasta lukukäsitteestään. Merenluoto nostaa esille myös yleisesti opetuksen rakenteen tuomat haasteet. Niin sanottu muodollinen opetus, jossa matemaattinen tieto esitetään tavallisesti symbolimuodossa ja tietoa pyritään esittämään mahdollisimman pelkistettynä ja yksiselitteisenä, ja jossa opetuksen vaiheet seuraavat toisiaan (teoreema - todistus - soveltaminen), ei välttämättä aina palvele parhaalla mahdollisella tavalla. Vaikka tällaista muodollista opetusta toteuttamalla saadaan matematiikan opetukselle mukava ja selvä struktuuri, ei opiskelija pääse tutustumaan siihen epämuodolliseen ympäristöön ja mielenkiintoisiin harhapolkuihin, mitkä ehkä tekisivät uuden käsitteen opiskelijoille ymmärrettävämmäksi.

Tietoisen toiminnan puolesta puhuu artikkelissaan myös Jorma Joutsenlahti, jonka mukaan yleisesti matemaattisen ymmärryksen keskeisiä piirteitä ovat esimerkiksi ”käsitteiden *tietäminen*; periaatteen, säännön tai yleistyksen *tietäminen*; matemaattisen rakenteen *tietäminen* ja tietojen *erotteleminen*”. [**4**] Voidaan siis todeta, että kehittämällä opiskelijoita tietoisemmiksi toimistaan, voidaan saavuttaa kaiken kaikkiaan syvällisempi ymmärrys opetettavasta asiasta. Matematiikan oppimiseen kuuluu nimittäin myös se, että joskus uuden ja vaikean asian yhteydessä täytyy vain hyvin epätietoisenakin, ikään kuin ”sokena”, kokeilla ja tutkia miten esimerkiksi jokin operaatio suoritetaan. Vaikka konteksti ja päämäärä eivät aina olisi täysin selviä, täytyy vain rohkeasti toimia ohjeiden ja neuvojen mukaan, ja usein toistojen myötä mieli alkaa löytämään säännönmukaisia toimintoja ja palaset ikään kuin loksahtelevat paikoilleen. Tämä edellä mainittu ennakkoluuloton ja utelias toiminta lisättynä opettajan aktiiviseen rohkaisuun oman ymmärryksen pohtimisesta, vaikuttaisi antavan hyvät edellytykset oman matemaattisen tietoisuuden kehittämiseen.

Merenluoto kirjoittaa myös siitä, kuinka harmittavaa on, että opiskelijat eivät juurikaan pääse tutustumaan matemaatikoiden ajattelutapaan, sillä erittäin muodollisten ja tarkkojenkin matemaattisten tulosten taustalla on todella paljon informaalista ajattelua ja hahmottelua. Jos opiskelijat pääsisivät tutustumaan tällaisiin ajattelumaailmoihin, voisi heidän omakin matemaattinen ajattelu kehittyä suuntaan, joka helpommin mahdollistaa uusien asioiden ymmärtämisen. [**11**]

3.4. Reaaliluvut lukion oppikirjoissa

Seuraavaksi tehdään pienimuotoinen vertailu lukion pitkän matematiikan eri kirjasarjojen tavoista esitellä reaaliluvut. Vertailun kohteena on neljän eri kirjasarjan kirjat, jotka on julkaistu hieman eri aikoina viimeisen noin kahdenkymmenen vuoden aikana. Tutkittaviksi kirjoiksi on valikoitunut vuonna 1998 julkaistu Calculus 1 [**6**], vuonna 2004 julkaistu Pitkä matematiikka 2 [**7**], vuodelta 2005 Pyramidi 1 [**8**] ja MAY1-luvut ja yhtälöt vuodelta 2020 [**5**]. Kolme ensimmäiseksi mainittua oppikirjaa on tarkoitettu lukion pitkän matematiikan ensimmäisille kursseille. MAY1 poikkeaa muista siinä mielessä, että se on lukion opetussuunnitelman perusteiden 2015 muutoksen myötä jokaiselle lukiolaiselle tarkoitetun yhteisen ensimmäisen matematiikan kurssin oppikirja. Yhteisen kurssin tavoitteena on herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaa kohtaan ja vahvistaa pohjaa tuleville matematiikan opinnoille. [**10**] Muutos mahdollisti sen, että opiskelijalla on mahdollisuus tehdä valinta pitkän ja lyhyen matematiikan opintojen välillä vasta lukiossa saadun opiskelukokemuksen perusteella.

On hyvä muistaa että opettajalla on vastuu opettamisesta, ei pelkästään oppikirjalla. Kirjasarjoissa voi aiheesta riippuen olla pieniä näkemyseroja esitystavan suhteen, ja oppikirjoja tehdessä joudutaan yleensä valitsemaan tietynlainen linjaus toteutukseen ja kompromisseja joudutaan aina tekemään. Tässä vertailussa tutkitaan kuitenkin nimenomaan oppikirjoihin päätynyttä sisältöä reaalilukuihin liittyen ja etsitään yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia kirjojen välillä.

Calculus 1

Calculus 1 -kirjassa reaalilukuihin tutustuminen aloitetaan luvulla nimeltä ”Lukualueen laajentaminen”. Luvussa esitellään lyhyesti ensimmäisenä luonnolliset luvut ja sitten kokonaisluvut. Seuraavaksi edetään murtolukuihin, ja rationaaliluvut esitetään joukkona, jossa kokonaislukujen joukkoon liitetään ei-kokonaiset murtoluvut. Viimeiseksi esitellään myös irrationaaliluvut saatesanoilla ”on tarpeen ottaa käyttöön muitakin lukuja kuin rationaaliluvut”. Irrationaaliluvun kerrotaan olevan luku, joka ei ole kokonaisluku eikä murtoluku, ja esimerkkitapauksena annetaan π, ympyrän piirin ja halkaisijan suhde. Lopuksi kerrotaan reaalilukujen joukon koostuvan rationaali- ja irrationaaliluvuista. Tavasta määritellä irrationaaliluvut voidaan jo havaita syytä sille, miksi opiskelijoilla voi olla vaikeuksia käsittää kokonaisluvut myös rationaaliluvuiksi: irrationaaliluvut olisi voinut esitellä myös sanomalla, että jos luku ei ole rationaaliluku, se on irrationaaliluku. Mutta tässä tapauksessa rationaaliluvut on ikään kuin pilkottu pienempiin osiinsa (kokonaislukuihin ja murtolukuihin) ja edellä esitettyä rationaalilukujen määritelmää ei nyt kirjaimellisesti hyödynnetä irrationaaliluvun määrittelyssä. Etenkin jos aiempien lukualueiden määritelmiä ei ole vielä kunnolla sisäistetty, opiskelijalle voi helposti kehittyä virheellinen mielikuva, jossa ”kokonaisluku tai murtoluku ei ole irrationaaliluku, mutta rationaaliluku voi olla irrationaaliluku”. Lukualueen laajennusta käsittelevässä luvussa käsitellään myös reaaliluvun esittämistä desimaalimuodossa, sekä tapaa jolla desimaalimuotoinen rationaaliluku voidaan muuntaa murtoluvuksi.

Merenluodon mainitsemaan lukualueiden hahmottamiseen on tässä oppikirjassa kiinnitetty huomiota, vaikkakin edellä mainitut irrationaaliluvut on opiskelijalle esitetty ehkä hieman hämäävästi. Lukualueet on esitetty suppeimmasta lukualueesta laajimpaan, ja kirjan sivulta löytyy kuva, jolla on havainnollistettu sitä, kuinka luonnolliset luvut sisältyvät kokonaislukuihin, kuinka kokonaisluvut sisältyvät rationaalilukuihin ja edelleen kuinka rationaaliluvut sisältyvät reaalilukuihin.

Täsmällisemmin reaalilukuihin tutustutaan Calculus 1 -kirjassa kappaleessa ”Reaalilukujen ominaisuudet”. Luvussa esitellään reaaliluvut nimenomaan aksiomaattisesta näkökulmasta. Algebralliset ominaisuudet ja järjestysominaisuudet esitellään, mutta täydellisyysaksiooma sivuutetaan kokonaan. Luvussa mainitaan, että reaalilukujen määrittelyssä täydellisyysaksiooma kuitenkin tarvitaan, mutta sen sisällöstä ei ole opiskelijalle minkäänlaista informaatiota. Opiskelijalle esitetään melko yksityiskohtaisesti reaalilukuja vastaava lukusuoraan pohjautuva ajattelumalli. Lukusuoramallin käyttö perustellaan reaalilukujen järjestysominaisuuksien olemassaololla, ja luvussa esitellään lukusuoran muodostuminen ensin kokonaislukujen vastinpisteistä, johon voidaan seuraavaksi lisätä rationaalilukujen vastinpisteet. Lopuksi mainitaan vielä irrationaalilukujen vastinpisteiden lisääminen lukusuoralle, jotta siitä saadaan aukoton. Ajattelumallin tehokkuutta vahvistetaan vielä kertomalla lukusuoran pisteiden ja reaalilukujen välillä olevan kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus, eli että jokaista lukusuoran pistettä vastaa reaaliluku ja jokaista reaalilukua vastaa lukusuoran piste.

Pitkä matematiikka 2

Pitkä matematiikka -kirjasarjassa reaalilukujen käsittely aloitetaan ongelmalla. Opiskelijalle esitellään kreikkalaisten matemaatikkojen pohdiskelua neliön lävistäjän pituudesta, jos neliön sivun pituus on 1, ja lopulta todetaan että on olemassa muitakin lukuja kuin rationaalilukuja. Luvussa edetään seuraavaksi irrationaaliluvun määritelmään. Irrationaaliluvun sanotaan olevan sellainen luku, jota ei voida kirjoittaa murtolukumuodossa, ja sen desimaalimuoto on päättymätön ja jaksoton. Lisäksi opiskelijalle annetaan muutamia esimerkkejä irrationaaliluvuista. Seuraavaksi opiskelijalle määritellään reaaliluvut sanomalla, että rationaaliluvut ja irrationaaliluvut yhdessä muodostavat reaalilukujen joukon. Myös tässä kirjasarjassa opiskelijalle annetaan reaaliluvuista lukusuoraan perustuva ajattelumalli, mutta sen käyttöä ei ole millään tavalla perusteltu, kuten esimerkiksi edellä mainitussa Calculus 1 -kirjassa. Opiskelijalle on siis annettuna lukusuora, johon on merkitty pelkästään kokonaislukupisteitä, mutta lukusuoraan ei ole havainnollistettu millään tavalla muita lukualueiden lukuja, ja tämän mallin yksityiskohtaisempaa muodostumista ei ole selitetty sanallisesti.

Tässä kirjasarjassa niin sanotusti hypätään suoraan syvään päätyyn. Opiskelijalta oletetaan muiden lukualueiden hallintaa, sillä luonnollisia lukuja, kokonaislukuja ja rationaalilukuja ei käytännössä esitellä lainkaan. Pitkä matematiikka -kirjasarja poikkeaa siinäkin mielessä muista kirjasarjoista, että reaaliluvut määritellään opiskelijalle vasta pitkän matematiikan toisella kurssilla, kun muissa vertailuun valikoituneissa kirjasarjoissa reaaliluvut käsitellään ensimmäisen kurssin aikana. Pitkä matematiikka -kirjasarjan ensimmäisessä oppikirjassa on esitelty lunnolliset luvut, kokonaisluvut, sekä rationaaliluvut, joten nämä lukualueet pitäisi olla opiskelijalle tuttuja, mutta lukualueiden välinen hierarkia ja kokonaiskuva saattaa jäädä opiskelijalle nyt hieman epäselväksi, kun reaalilukujen määrittely on jätetty erilliseksi osaksi. Tässä kirjasarjassa ehkä kaikista silmiinpistävin puute on lukualueiden kuvallisen esityksen puuttuminen, eli oppikirja ei sisällä havainnollista esitystä lukualueiden välisestä hierarkiasta.

Pyramidi 1

Pyramidi 1 -kirjassa lukujoukkojen esittely aloitetaan niin ikään luonnollisista luvuista, edeten kokonaislukuihin ja edelleen rationaalilukuihin. Kirjassa painotetaan rationaalilukujen joukon koostuvan kokonaisluvuista sekä murtoluvuista, sillä jokainen kokonaisluku k voidaan esittää muodossa $k = \frac{k}{1}$. Tämän jälkeen esitellään rationaalilukujen desimaalimuodon ominaisuudet, jotka on itse asiassa esitetty hyvin kattavasti. Kirja sisältää havainnollistavan kuvan siitä, kuinka rationaaliluvut jakautuvat kokonaislukuihin ja murtolukuihin, ja edelleen kuinka murtoluvut voidaan jaotella päättyviin ja päättymättömiin jaksollisiin desimaalilukuihin. Myös tässä kirjassa irrationaalilukujen pariin johdatellaan antiikin kreikkalaisten havaitseman ongelman avulla: suorakulmaisessa kolmiossa, jossa kateettien pituudet ovat 1 ja 2, hypotenuusan pituus ei olekaan rationaaliluku. Myös irrationaalilukujen desimaalimuodon ominaisuudet esitellään esimerkkien kera, ja lopuksi kerrotaan rationaali- ja irratinaalilukujen joukkojen yhdessä muodostavan reaalilukujen joukon. Pyramidi 1 -kirja antaa edeltäjien tapaan ajattelumallin yhtenäisestä lukusuorasta, mutta mallin käyttöä ei opiskelijalle oikeastaan perustella millään tavalla, todetaan että näin vain on. Kappaleeseen sisältyy myös havainnollistava kaavio lukujoukoista ja siitä, mitä lisäyksiä edelliseen lukujoukkoon tehdään, jotta saadaan seuraava, laajempi lukujoukko muodostettua.

Pyramidi-kirjasarjan reaalilukujen esittelyä voidaan pitää kattavana ja onnistuneena, jos mietitään Merenluodon esille tuomia seikkoja reaalilukujen ymmärtämisen suhteen: jokainen lukualue on esitetty esimerkkien kera ja lukualueen laajentamista on kuvailtu sanallisesti, sekä havainnollisen kuvan avulla. Irrationaalilukuja on esitetty desimaalimuodossa perinteisten esimerkkitapausten, kuten π ja $\sqrt{5}$, lisäksi ja painotettu sitä, että irrationaaliluvut eivät ole rationaalilukuja. Näiden havaintojen pohjalta tuntuu luonnolliselta todeta, että opiskelijalla olisi tämän kappaleen opiskeltuaan korrekti mielikuva lukualueiden välisestä hierarkiasta sekä irrationaalilukujen olemuksesta. Lisäksi reaalilukuja käsittelevässä kappaleessa on mainittu kirjan lopusta löytyvä ”Lisätietoa”-osio, josta löytyykin opiskelijalle paljon lisää informaatiota reaalilukuihin liittyen. Tässä osiossa opiskelijalle on esitelty reaalilukujen aksioomat ja kerrottu, mitä aksioomilla ylipäätään tarkoitetaan ja miten niiden kanssa toimitaan. Pyramidi 1 -kirja on esitellyt suhteellisen täsmällisesti myös täydellisyysaksiooman, siinä missä Calculus 1 -kirja vain ohimennen mainitsi kyseisen aksiooman tarpeellisuudesta. Tämä Pyramidi 1 -kirjan lopusta löytyvä informaatio mahdollistaa opiskelijalle varmasti paljon syvemmän ymmärryksen reaaliluvuista, mutta koska se on nimensä mukaan lisätietoa, on sen läpikäyminen käytännössä jätetty opiskelijan oman kiinnostuksen ja innostuksen varaan, sillä se ei kuulu varsinaisen opiskeltavan kappaleen sisältöön.

MAY1

Uusimman opetussuunnitelman mukainen, kaikille lukiolaisille yhteiseksi tarkoitettu lukion enimmäistä matematiikan kurssia edustava oppikirja MAY1 alkaa historia-aiheisella johdannolla, jossa käydään lyhyesti läpi erilaisia lukujärjestelmiä aina tutustusta kymmenjärjestelmästä egyptiläisiin hieroglyfeihin ja maya-intiaanien käyttämiin merkintöihin. Lukujoukkojen esittelyyn MAY1 kirja ottaa käyttöön täysin käänteisen esitysjärjestyksen aiempiin oppikirjoihin verrattuna: esittelyssä lähdetään liikkeelle lukusuorasta, jonka jokaista pistettä kerrotaan vastaavan jokin reaaliluku. Opiskelijalle annetaan siis heti ensimmäisenä käyttöön ajattelumalli, jonka avulla reaaliluvun käsite muistutetaan mieleen. Reaalilukujen kerrotaan jakautuvan rationaalija irrationaalilukuihin, ja muistutetaan että rationaaliluvut voidaan esittää murtolukuna, irrationaalilukuja ei. Seuraavaksi opiskelijalle oikein esimerkkien avulla muistutetaan, että kaikki kokonaisluvut ovat myös rationaalilukuja. Lopuksi mainitaan luonnollisten lukujen olevan lukumääriä ilmaisevia kokonaislukuja.

Tässä oppikirjassa eri lukujoukkojen määritelmät on esitetty pääosin sanallisesti, eli matematiikan symbolimuotoisen kielen käyttö on vähisempää kuin esimerkiksi Pyramidi 1 -kirjassa. Lukujoukkojen esittelyn jälkeen on kirjaan painettu vielä pieni, mutta havainnollistava kuva esimerkkilukujen kera siitä, kuinka reaaliluvut jakautuvat rationaalilukuihin ja irrationaalilukuihin, ja edelleen kuinka rationaalilukuihin sisältyvät sekä kokonaisluvut että luonnolliset luvut. Kirjassa on esitelty myös vaihdantalait, liitäntälait sekä osittelulaki, mutta samanlaista aksiomaattista määrittelyn otetta ei ole, kuten esimerkiksi Calculus 1 -kirjassa, vaan kysessä on enemmänkin laskusääntöjen esittely.

Havaintoja ja pohdintaa

Yhteenvetona tästä suhteellisen satunnaisesti valituista lukion pitkän matematiikan ensimmäisten kurssien oppikirjojen välisestä vertailusta voisi sanoa, että uusin, jokaiselle lukiolaiselle yhteiseksi tarkoitetun matematiikan kurssin oppikirja MAY1, sekä Pitkä matematiikka 2 tekevät pesäeroa kaikista eniten. Pitkä matematiikka -kirjasarjassa suurimman eron tekee se, että reaaliluvut esitellään vasta toisen kurssin oppikirjassa. Lisäksi voidaan sanoa, että oppikirjassa informaation määrä on hyvin suppeaa, eikä lukualueiden välistä hierarkiaa olla tehty selväksi opiskelijalle. MAY1-kirjassa taas lukujoukkojen esittely täysin päinvastaisessa järjestyksessä kuin muissa oppikirjoissa saa sen erottumaan joukosta. Molemmissa opikirjoissa on myös hyvin vähän matemattista symbolikieltä. Sanallista ilmaisua voidaan MAY1-kirjan kohdalla perustella esimerkiksi sillä, että opiskelijoille, jotka vielä miettivät valintaa pitkän ja lyhyen matematiikan välillä, halutaan tarjota mahdollisimman helppoa ja ymmärrettävää matematiikkaa. Symbolikielinen matematiikka voi alkuun näyttäytyä opiskelijalle vaikealta ja jopa täysin epäselvältä, ja opiskelijalle voi tulla tunne, että on mahdotonta ymmärtää haastavampaa matematiikkaa, jolloin valinta lyhyen matematiikan opiskelusta tapahtuisi ehkä turhan kevein perustein. Tämä perustelu ei tosin kelpaa Pitkä matematiikka 2 -kirjalle, joka on tarkoitettu pitkän matematiikan opiskelijoille, joille matemaattinen symbolikieli täytyisi tehdä tutuksi.

Matemaattisen symbolikielen käytön määrässä voidaan siis havaita erittäin selkeitä eroja kirjojen välillä. Pyramidi 1 -kirjassa symbolikieltä on käytetty kaikista eniten: kaikki lukujoukot on esitetty joukkomerkintöjä käyttäen, eli esimerkiksi rationaalilukujen merkintä $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$, sekä irrationaalilukujen merkintä $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\right\}$ on opiskelijalle tehty tutuiksi. Myös Calculus 1 -kirjassa on esitelty lukujoukkoja matemaattisin merkinnöin, mutta esimerkiksi irrationaaliluvut on esitetty vain sanallisesti. Vähiten matemaattista symbolikieltä lukujoukkoihin liittyen on uusimmassa MAY1 kirjassa. Teoksessa on vahvasti luotettu sanalliseen ilmaisuun, eikä edellä mainittuja joukkomerkintöihin pohjautuvia lukujoukkojen määritelmiä ole annettu yhtäkään.

Vertailun vanhin, hieman yli kaksikymmentä vuotta sitten julkaistu, pitkän matematiikan oppikirja Calculus 1 on käsitellyt lukujoukkoja ja reaalilukujen ominaisuuksia ehdottomasti laajimmin ja perusteellisimmin. Tämän seurauksena kirja sisältää erittäin paljon tekstiä ja luettavaa on paljon, joten on ihan ymmärrettävää, että uudemmissa oppikirjoissa on pyritty hieman tiiviimpään esitysmuotoon. Toki supistetummalla oppikirjan sisällöllä taustojen ja yksityiskohtien esittämisestä siirretään enemmän vastuuta opettajalle. Myös Pyramidi 1 -kirja kilpailee laajimman asiasisällön tittelistä, sillä se on ainoa oppikirja, jossa on matemaattisin merkinnöin esitelty myös positiivisten ja negatiivisten kokonaislukujen joukot, positiivisten ja negatiivisten reaalilukujen joukot, sekä irrationaalilukujen joukko. Lisäksi Pyramidi on kirjasarjoista ainoa, joka lyhyesti esimerkin $x^2 = -1$ avulla manitsee myös kompleksilukujen joukon $\mathbb{C}$.

Kaikissa muissa tutkittaviksi valikoituneissa oppikirjoissa, paitsi MAY1-kirjassa, on reaalilukujen yhteydessä esitelty myös lukusuoran välin kuvailu: kuinka suljetut, avoimet ja puoliavoimet välit ilmaistaan epäyhtälöiden ja sulkumerkintöjen avulla, ja miltä nämä välit näyttävät lukusuoralle piirrettynä. Tosin MAY1-kirjan ensimmäinen luku alkaa esimerkinomaisella johdantotehtävällä, jossa pyydetään luettelemaan jotkin kolme lukua, jotka sijaitsevat lukusuoralla tietyllä annetulla välillä, ja mukana on myös visuaalinen esitys lukusuorasta. Lukusuoran välin kertaus on siis käytännössä mukana myös tässä oppikirjassa, mutta sitä ei ole painotettu samalla tavalla kuin muissa kirjoissa ja asia tulee ilmi pelkästään esimerkkitehtävän yhteydessä. Calculus 1 -kirjassa ei ole reaalilukujen esittelyn yhteydessä kerrattu vastaluvun, käänteisluvun tai itseisarvon määritelmiä. Pitkä matematiikka 2 -kirjasta löytyy reaalilukujen yhteydestä itseisarvon määritelmä, Pyramidi 1 -kirjasta vastaluvun ja käänteisluvun määritelmät, ja MAY1-kirjasta vastaluvun ja itseisarvon määritelmät.

Jokaisessa oppikirjassa, Calculus 1 poislukien, on jonkinlainen reaalilukujen historiaan viittava johdanto-osio. Matematiikan historia ei kuulu opetussuunnitelman sisältöihin, vaikkakin kysessä on erittäin mielenkiintoinen ja yleissivistävä aihe. On kuitenkin ilo huomata, että juuri reaalilukuihin ja lukualueen laajentamiseen liittyvissä osa-alueissa halutaan nostaa esiin matematiikan historiaa ja sitä, kuinka vahvat perinteet matematiikalla yhteiskunnassamme on. Muinaiseen historiaan vittaaminen matematiikan yhteydessä palvelee myös opiskelijaa: historiasta kiinnostunut voi saada lisää motivaatiota matematiikan opiskeluun, tai vastaavasti innostunut matemaatikon alku kuuntelee jatkossa historian tuntia ehkä hieman tarkemmin. Oppikirjat mahdollistavat myös oppiainerajat ylittävän opetuksen, kun matematiikan, historian ja miksei myös yhteiskuntaopin opettajat voivat suunnitella yhteisiä opetuskokonaisuuksia.

Reaaliluvuista käytettävä lukusuoraan pohjautuva mentaalimalli esiintyy jokaisessa kirjassa. Vaihtoehtoinen, reaalilukujen desimaalikehitelmään pohjautuva malli löytyy selvästi oppikirjoista Pyramidi 1 ja Calculus 1. Pitkä matematiikka 2 -kirjassa on maininta irrationaalilukujen desimaalimuodosta, mutta tätä ei ehkä voida pitää kovin vahvana ajattelumallin esittelynä, sillä rationaalilukujen desimaalimuotoa ei ole tuotu esiin tässä yhteydessä. Tästä voidaan tehdä melko selvä johtopäätös, että pääsääntöisesti opiskelijoille halutaan antaa lukusuoraan pohjautuva mentaalimalli reaaliluvuista. Vaikka kirjoissa Pyramidi 1 ja Calculus 1 on melko yksityiskohtaisesti käyty läpi reaalilukujen desimaalikehitelmiä, on molemmissa kirjoissa sanallisesti painotettu nimenomaan lukusuoran toimivan reaalilukuja vastaavana mallina.

Kuten aiemmin kerrottiin, MAY1-kirja antoi opiskelijalle heti ensimmäisenä lukusuoran ajattelumallina reaaliluvuille, kaikissa muissa kirjoissa lukusuoran maininta tuli vasta, kun reaalilukujen määritelmä oli esitelty. MAY1-kirjaan päätynyttä järjestystä voidaan pitää toimivana. Merenluoto painottaa väitöskirjassaan sitä, kuinka suuressa roolissa opiskelijan ajattelumallit ovat oppimisen kannalta, joten tuntuu luonnolliselta antaa opiskelijalle ensimmäisenä ajattelumalli, jonka ympärille rakennetaan halutut asiat. Ja koska lukusuora on opiskelijoille jo peruskoulusta erittäin tuttu työväline, on helppoa muistuttaa se jälleen mieleen. Tästä voidaan ehkä jälleen löytää perusteluja uudistetun kurssin tavoitteisiin: jokainen lukion ensimmäisellä matematiikan tunnilla oleva varmasti muistaa miltä yläkoulustakin tuttu lukusuora näyttää, jolloin opiskelijalle voidaan luoda mielikuvaa siitä, että matematiikka ei heti muutu liian vaikeaksi, vaan asioita jatketaan sitä mihin peruskoulussa jäätiin. Aiemmin mainittu reaalilukupisteen ympäristöön ja raja-arvoon perustuva ajattelumalli on ainakin suurimmalle osalle vasta lukion aloittaneista opiskelijoista liian vaikea ja monimutkainen, sillä raja-arvon käsitettä ei ole lukiolaisille vielä esitetty.

Laajimmin irrationaalilukuja on käsitelty kirjoissa Calculus 1 ja Pyramidi 1. Uusimman kirjan vähäinen perehtyminen irrationaalilukuihin ehkä jopa hieman ihmetyttää: opiskelijoiden vaikeudet tämän lukualueen ymmärtämisessä ovat tiedossa, ja myös Merenluoto painotti tutkimustuloksissaan irrationaalilukujen verrattain heikkoa osaamista, mutta silti kirjassa on päädytty pelkästään mainintaan irrationaalilukujen olemassaolosta. Kuten aiemmin on mainittu, irrationaaliluku voidaan esittää tarkasti vain matemattisia merkintöjä käyttäen ja desimaalimuodossa se esitetään jaksottomana ja päättymättömänä lukuna. MAY1-kirja ei ole antanut yhtäkään esimerkkiä desimaalimuotoisesta irrationaaliluvusta, eikä desimaalilmuotoisen reaaliluvun tunnistamisesta rationaali- tai irrationaaliluvuksi ole mainintaa tai esimerkkiä. Muissa oppikirjoissa desimaalimuotoisen irrationaaliluvun rakenne on tehty opiskelijalle tutuksi.

Mielenkiintoinen havainto on myös se, kuinka paljon oppikirjat Pitkä matematiikka 2 ja Pyramidi 1 eroavat toisistaan, kun tutkitaan kirjojen tapaa esitellä reaaliluvut. Nämä kirjat on kuitenkin julkaistu lähes samaan aikaan, vain vuoden erolla, mutta sisällölliset erot ovat melko suuria. Pyramidi-kirjasarjan esitystapa on selvästi laajempi ja kattavampi kuin Pitkä matematiikka -sarjan: sanallista selitystä on huomattavasti enemmän, samoin myös matemattista symbolikieltä. Pitkä matematiikka 2 -kirjan suppeampaa esitystapaa voidaan ehkä perustella sillä, että on nimenomaan haluttu luoda mahdollisimman yksinkertainen ja selkeällä pohjaratkaisulla toteutettu oppikirja, joka toimii tukimateriaalina opettajan opetukselle. Lisäksi on ehkä haluttu tehdä selkeää eroa muutamia vuosia aiemmin julkaistuun matematiikan oppikirjaan (Calculus 1), joka on saattanut saada osakseen kritiikkiä runsaasta tekstin määrästä.

Uusien oppikirjojen suunnitteluvaiheessa tutustutaan varmasti aiemmin ilmestyneeseen materiaaliin ja niiden pohjalta pyritään luomaan toimivampia ratkaisuja. Oppikirjat tehdään kuitenkin edistämään opiskelijoiden oppimista, joten palautetta halutaan epäilemättä kuulla myös kohdeyleisöltä eli opiskelijoilta ja opettajilta, joiden mielipiteitä halutaan varmasti ottaa huomioon uutta oppikirjaa tehdessä. Matematiikan opetuksen kulmakivinä voidaan pitää kolmea esitystapaa: sanallinen, symbolinen ja kuvallinen. Näiden kolmen tavan avulla voidaan tarjota opiskelijalle useampi erilainen lähestymistapa uuteen asiaan, joka helpottaa kokonaiskuvan ymmärtämistä. Sanallinen esitys on tietysti kaikista luonnollisin tapa opetuksessa, kun kerrotaan opetettavasta asiasta ja miten sen kanssa toimitaan, mutta sanallinen ilmaisu ei välttämättä aina kuvaa matemaattisia ilmiöitä ihan täydellisesti, jolloin tarvitaan siis lisää tapoja ja keinoja oppimisen tueksi. Kuvallinen esitys tai kaavio toimii usein hyvänä tukena sanalliselle selitykselle ja tuo enemmän konkreettisuutta opittavaan asiaan, sekä luo opiskelijalle jonkinlaisen ajattelumallin uudesta asiasta. Symbolimuotoinen esitys taas antaa mahdollisuuden ilmaista haluttua asiaa lyhyesti ja informatiivisesti yhteisesti sovitun ”kielen” avulla.

Tutkittavissa oppikirjoissa on melko hyvin toteutunut nämä kaikki kolme esitystapaa. Reaalilukujen sanallinen määritelmä on kutakuinkin sama jokaisessa oppikirjassa: ”reaalilukujen joukko koostuu rationaali- ja irrationaaliluvuista”. Myös symbolimuotoinen esitys $\mathbb{R}$ löytyy jokaisesta kirjasta, mutta esimerkiksi irrationaalilukujen joukko $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ on esitelty symbolimuotoisesti vain kirjassa Pyramidi 1. Lukusuora toimii kaikissa kirjoissa kuvallisena esityksenä reaaliluvuista, mutta Pitkä matematiikka 2 -kirjasta uupuu kaavio lukualueiden välisestä hierakiasta, joka löytyy muista oppikirjoista. Tätä voidaan pitää melko suurena puutteena, sillä nyt opiskelijalle ei tarjota selkeää graafista kokonaiskuvaa yhdestä matematiikan opiskelun kannalta tärkeimmästä kokonaisuudesta.

LUKU 4

Yhteenveto

Kuten Merenluotokin on väitöskirjassaan lausunut, on reaaliluvun käsite yksi matematiikan syvällisimmistä käsitteistä. Vaikka käsite itsessään on vain noin 150 vuotta vanha, on reaaliluvuilla paljon pidempi historia. Kyseessä oli tulevalle aineenopettajalle siis täydellinen graduaihe: koulumatematiikan sisältöihin kuuluva kokonaisuus, johon voi mainiosti kirjoittajan mielenkiinnosta johtuen lisätä myös kiehtovia historiallisia tapahtumia ja huomioita, mutta joka on matemaattisesta näkökulmasta kuitenkin pohjimmiltaan niin haastava ja syvällinen aihe, että allekirjoittanut joutui toden teolla haastamaan ja jopa kyseenalaistamaan tietonsa ja taitonsa.

Satojen vuosien ajan matemaatikot ja matematiikan harrastajat käyttivät reaalilukuja töissään sujuvasti ilman täsmällistä määritelmää, ja oikeastaan tämä sama historiallinen ilmiö käydään läpi koulumatematiikassa yhä uudestaan: opiskelijoille esitetään reaalilukujen määritelmästä vain sellainen epätarkka versio, joka on helppo hyväksyä ilman tarkentavia kysymyksiä ja jonka pohjalta reaalilukujen kanssa toimiminen tuntuu helpolta ja luontevalta. Täsmälliseen määritelmään pääsee tutustumaan vasta yliopisto-opintojen parissa. Tämä on ihan ymmärrettävää, sillä jos reaalilukujen täsmällinen määritelmä on vuosisatojen ajan tuottanut hankaluuksia ihmisille, jotka ovat vapaaehtoisesti ja omasta mielenkiinnostaan käyttäneet suuren osan elämästään matematiikan tutkimukseen ja kehittämiseen, on kohtuutonta olettaa, että 16-vuotias lukiolainen, jonka on käytännössä pakko opiskella matematiikkaa kiinnostuksen määrästä riippumatta, voisi olla kykenevä vastaanottamaan ja ymmärtämään niin yksityiskohtaista ja täsmällistä matemaattista määritelmää.

Monelle tulee ehkä yllätyksenä se, että reaaliluvuille on todellakin olemassa useita erilaisia täsmällisiä määritelmiä, joiden menetelmät voivat erota toisistaan huomattavankin paljon. Varmasti tunnetuin menetelmä on määritellä reaaliluvut Hilbertin tapaan aksiomaattisesti, joten oli mielenkiintoista päästä graduprosessin aikana tutustumaan tarkemmin hieman toisenlaiseen määrittelytapaan, Dedekindin luomaan reaalilukujen määritelmään Dedekindin leikkausten avulla. Nopeasti ajateltuna voi vaikuttaa siltä, että on helppoa tutustua määritelmään, joka käsittelee tuttua asiaa, mutta vain hieman erilaisesta näkökulmasta. Vaikeus piileekin siinä, että mitään aiemmin opittuja tuttuja operaatioita ei voida vain olettaa todeksi. Kuten Ebbinghaus ja muut *Numbers* teoksessaan hienosti ilmaisevat (vapaasti suomennettuna): ”kun lähdetään täsmällisesti perustelemaan operaatioita, joiden käyttö on kouluajoista lähtien ollut tuttua, täytyy olla huolellinen siinä, että toimitaan vain niiden tulosten pohjalta, jotka ollaan todistettu oikeiksi, eikä vain oleteta asioiden pitävän paikkansa siksi, että ne ovat meille ennestään niin tuttuja”.

Toisen luvun sisältöihin allekirjoittanutkin sai siis muuttaa ajattelutapaansa ja huomata, kuinka tutut asiat todella tulevat niin sanotusti suoraan selkäytimestä. Mutta ehkä tätä havaintoa voidaan pitää vain todisteena siitä, kuinka hyvin koulutusjärjestelmämme toimii, kun opittavat asiat ja operaatiot on todella sisäistetty ja ne suorastaan automatisoituvat.

Peruskoulun ja lukion aikana reaaliluvut tulevat opiskelijoille todella tutuiksi ja monella on täysin oikea mielikuva siitä, että reaaliluvut vastaavat lukusuoran pisteitä. Reaalilukuja ei määritellä täsmällisesti koulumatematiikassa, sillä kyseessä on niin abstrakti asia, että ei pelkästään koulumaailman kuuluisa ajanpuute, vaan myös opiskelijoiden keskeneräinen ja vielä rakenteilla oleva matemaattinen ajattelutaito estää näin hankalan asian läpikäymisen. Monella lukion aloittavalla opiskelijalla voi olla jo lukualueisiin liittyvässä perustiedossa ennestään paljon puutteita ja virheellisiä mielikuvia, joiden oikaisu ja korjaaminen ei aina ole niin yksinkertaista. Lukualueen laajentamiseen liittyvät vaikeudet sekä irrationaaliluvut ovatkin suurimpia ongelmia reaalilukujen oppimisessa. Irrationaalilukuja käsitellään lukiossa loppujen lopuksi hyvin vähän, ja tästä johtuen melko iso osa reaalilukujen kokonaisuutta jää opiskelijoille vielä hieman hämäräksi. Mielenkiintoinen havainto on myös se, että yllättävänkin suurella osalla matematiikan opettajaopiskelijoista on vaikeuksia erottaa rationaali- ja irrationaalilukuja toisistaan, mikä siis pohjimmiltaan tarkoittaa sitä, että myös pian valmistuvien opettajien joukossa on havaittavissa heikkouksia reaalilukujen hallinnassa.

Matemaattisen lukualueen laajennus vaatii opiskelijalta aina muutoksia ajattelussa ja kykyä siirtyä uudenlaiseen logiikkaan. Lukualueen laajentamiseen liittyvät vaikeudet perustuvatkin usein virheellisiin käsityksiin ja mielikuviin. Lukujen muodollinen hierarkia on monelle lukiolaiselle vielä epäselvä, jolloin esimerkiksi luonnollisia lukuja ja kokonaislukuja ei tunnisteta rationaaliluvuiksi. Vaikka nykyään kokeneemmalle matematiikan harrastajalle lukualueiden muodostama eheä hierarkinen asetelma näyttäytyy luonnollisena ja selkeänä kokonaisuutena, ei näin ole aina ollut. Erilaisia lukuja on käytetty täysin vapaasti aina 1800-luvulle saakka, joten on oikeastaan melko luonnollista, että lukiolaisella ei välttämättä ole täysin selvää ymmärrystä lukualueista ja niiden välisistä suhteista, sillä erilaisten lukujen kanssa pystyy operoimaan hyvin pitkälle myös ilman edellä mainittua tietämystä.

Neljän oppikirjan vertailussa löydettiin yllättävänkin paljon eroja tavassa esitellä reaaliluvut ja lukualueiden välisiä suhteita. Eroja havaittiin muun muassa asioiden esitysjärjestyksessä, matemaattisen symbolikielen määrässä ja irrationaalilukuihin liittyvässä informaation määrässä. Yhtäläisyyksiä taas löytyi esitetyistä mentaalimalleista ja sanallisesta tavasta määritellä reaaliluvut. On mahdotonta sanoa, mikä kirjoista olisi ”paras” reaalilukujen esittämisen näkökulmasta, sillä jokaisessa teoksessa on varmasti omat hyvät puolensa. Jokaisen oppikirjan avulla reaalilukuihin päästään varmasti hyvin tutustumaan, mutta selvästi joissakin teoksissa on havaittavissa huomattavaa vastuunsiirtoa opettajalle, joka joutuu tarvittaessa esittämään tärkeitäkin huomioita opetuskirjallisuuden ulkopuolelta.

Tutkielmassa käytetyistä kirjallisuuslähteistä löytyi yksi yhteinen tekijä, jota pidetään olennaisena ratkaisuehdotuksena reaalilukujen luomiin haasteisiin: opiskelijoista täytyisi tehdä tietoisempia omasta toiminnastaan ja heitä tulisi aktiivisesti rohkaista muuttamaan matemaattisia ajattelutapojaan. Tämä on varmasti asia, joka tulee vaikuttamaan omaan opetustapaani ja -tyyliini. Matematiikan opettaminen ei ole pelkästään matemaattisten asioiden esittämistä, vaan myös opiskelijoiden ajattelutaitojen ja ongelmanratkaisukykyjen kehittämistä. Nämä ominaisuudet ovat nuorille erittäin tärkeitä heidän tulevaisuuttaan ajatellen, ei pelkästään matematiikan näkökulmasta. Toivonkin, että muistan itse opettajana sen, että vaikka tulen esittelemään opiskelijoille kiehtovia matematiikan ilmiöitä, kuitenkin tärkeintä ja palkitsevinta olisi, että matematiikan opiskelun yhteydessä opitut ja käytetyt tavat ja käytännöt, kuten luova ajattelu ja pitkäjänteinen työskentely, jäisivät pysyväksi osaksi nuorten elämää. Silloin voin varmasti todeta onnistuneeni työssäni.

Kirjallisuutta

[1] Carl B. Boyer, suomentanut Kimmo Pietiläinen: *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osat I ja II.* Art House, toinen painos, 1994.

[2] John N. Crossley: *The Emergence of Number.* World Scientific Publishing, 1987.

[3] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, M. Mainzer, J. Neukrich, A. Prestel ja R. Remmert: *Numbers.* Springer, englanninkielinen painos, 1990.

[4] Jorma Joutsenlahti: *Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa.* Teoksessa: P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P. Malinen (toim.): *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* s. 336-351. Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 1997.

[5] S. Juhala, P. Juutinen, A. Laitinen, E. Luoma-aho, J. Ottelin, T. Tikka ja S. Vallineva: *MAY1 Luvut ja yhtälöt.* Otava, 2020.

[6] P. Jäppinen, A. Kupiainen ja M. Räsänen: *Calculus 1 Funktiot ja yhtälöt 1.* Otava, 1998.

[7] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela ja J. Tahvanainen: *Pitkä matematiikka 2 Polynomifunktiot.* WSOY, 2004.

[8] P. Kontkanen, R. Liira, K. Luosto, J. Nurmi, R. Nurmiainen, A. Ronkainen ja S. Savolainen: *Pyramidi 1 Funktiot ja yhtälöt.* Tammi, 2005.

[9] Juha Lehrbäck: *Matematiikan historia, kurssimateriaali.* 2019.

[10] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*, https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/lukion-opetussuunnitelmien-perusteet. Luettu 22.7.2021.

[11] Kaarina Merenluoto: *Lukiolaisen reaaliluku. Lukualueen laajentaminen käsitteellisenä muutoksena matematiikassa.* Turun yliopisto, 2001.

[12] J.J. O'Connor ja E.F. Robertson: *Euclid of Alexandria*, The MacTutor History of Mathematics Archive, 1999. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/. Luettu 5.2.2021.

[13] J.J. O'Connor ja E.F. Robertson: *Eudoxus of Cnidus*, The MacTutor History of Mathematics Archive, 1999. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eudoxus/. Luettu 5.2.2021.

[14] Inder K. Rana: *From numbers to analysis.* World Scientific Publishing, 1998.

[15] Ittay Weiss: *Survey article: The real numbers - a survey of constructions.* Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 45, numero 3, 2015.

[16] Raija Yrjönsuuri: *Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen.* Teoksessa: P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P. Malinen (toim.): *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* s. 128-141. Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 1997.

[17] Rina Zazkis ja Natasa Sirotic: *Making sence of irrational numbers: focusing on representation.* Simon Fraser University, 2004.